Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Integrály a diferenciální rovnice v aplikačních úlohách - sbírka řešených příkladů

Vypracoval: Bc. Miroslav Holub
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Integrály a diferenciální rovnice v aplikačních úlohách - sbírka řešených příkladů jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 10. července 2018

....
Miroslav Holub

Anotace
Hlavním tématem diplomové práce je sbírka řešení vybraných úloh integrálního počtu a obyčejných diferenciálních rovnic. Integrály, respektive jejich aplikace jsou řešeny metodou substituce a per partes. Pro slovní úlohy jsou sestaveny příslušné diferenciální rovnice a ty jsou následně vyřešeny.

Annotation
The main topic of the Thesis is a digest of solved examples on integral calculus and applications of ordinary differential equations of the first order. Integrals are solved via substitution and/or integration by parts. For word problems corresponding differential equations are formulated and subsequently solved via standard methods of ODE.

Poděkování
Děkuji vedoucí své diplomové práce za čas mi věnovaný kdykoliv jsem o to požádal a za poskytnutá zadání příkladů.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato diplomová práce si klade za cíl spočítat vybrané příklady z integrálního počtu a diferenciálních rovnic.

Stěžejní části práce jsou Kapitoly 2 a 3, ve kterých je spočítána řada zajímavých příkladů z integrálního počtu a jeho aplikací a z aplikací obyčejných diferenciálních rovnic. V Kapitole 2 jsou spočítány integrály pomocí substitučních metod, pomocí metody per partes a integrály, které vedou ke známým vzorcům pro objem a obsah některých geometrických útvarů. V Kapitole 3 jsou studovány slovní úlohy z různých životních situací, jejichž matematická formulace vede na počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Tyto rovnice jsou následně řešeny známými prostředky diferenciálního a integrálního počtu. Získané výsledky jsou u většiny příkladů prezentovány obrázkem.

Předkládaná práce může být použita jako sbírka příkladů pro učitele této problematiky, stejně tak jako i pro studenty a další zájemce. U čtenáře se předpokládá základní znalost diferenciálního a integrálního počtu a znalost řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich počátečních úloh v rozsahu [1],[7],[8] a [2],[4],[6]. Vzhledem k typům aplikací slovních úloh v Kapitole 3 předpokládáme dále u čtenáře zdravý selský rozum a schopnost sestavit ze zadání (ve finále mnohdy jednoduchou) diferenciální rovnici, jejíž řešení je pak už pouhým rutinním postupem známým z kurzu o Diferenciálních rovnicích. Zadání příkladů bylo čerpáno z přednášek a cvičení absolvovaných na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích a z osobních zdrojů vedoucí diplomové práce ([5] a [9]).

Úkolem nebylo vytvořit ucelenou učebnici včetně teorie, ale spíše praktickou sbírku vybraných zajímavých příkladů a možných způsobů jejich řešení.

Práce byla vysázena systémem LaTeX, obrázky nakresleny programem GeoGebra.

Kapitola 2

Aplikační úlohy vedoucí na integrály

2.1 Integrály řešené pomocí substituce

Příklad 2.1 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ *na intervalu* $(0, 9)$.

Řešení:

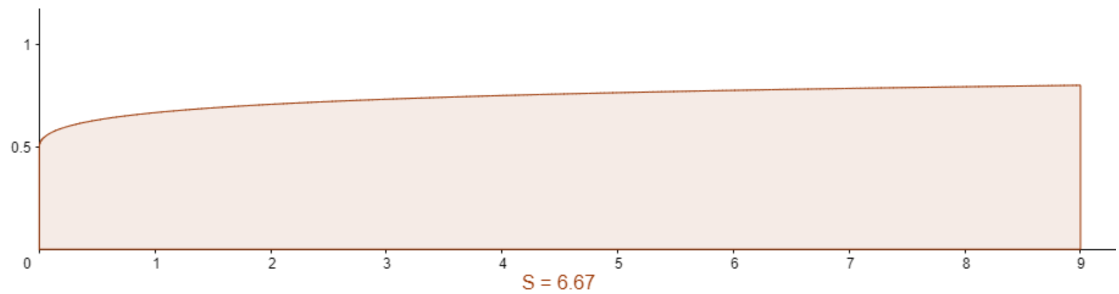
Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 9 \mapsto 3 \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{t+1}{t+2} \cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

po vydělení zlomků dostaneme

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\int_0^3 t-1\,\mathrm{d}t + 2\int_0^3 \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= 2\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^3 + 4\left[\ln|t+2|\right]_0^3\\
&= 2\left(\frac{9}{2}-3-0+0\right) + 4\ln 5 - 4\ln 2\\
&= 2\cdot\frac{3}{2} + 4\ln\frac{5}{2}\\
&= 3 + 4\ln\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

Plocha pod křivkou je $S = 3 + 4\ln\frac{5}{2}$ j^2. △



Obrázek 2.1: Geometrická interpretace

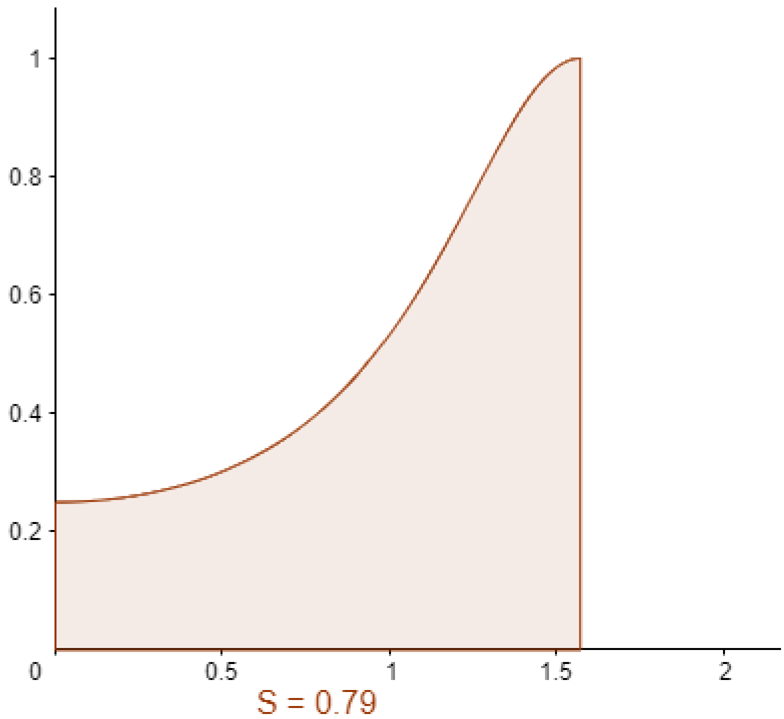
Příklad 2.2 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$ *na intervalu* $(0, \frac{\pi}{2})$.

<u>*Řešení:*</u>

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ 0 \mapsto 0 \\ \frac{\pi}{2} \mapsto +\infty \end{array}\right| &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{1+t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2+3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4(1+(\frac{t}{2})^2)}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} u = \frac{t}{2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \infty \mapsto \infty \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} 2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Plocha pod křivkou je $S = \dfrac{\pi}{4}$ j². △



Obrázek 2.2: Geometrická interpretace

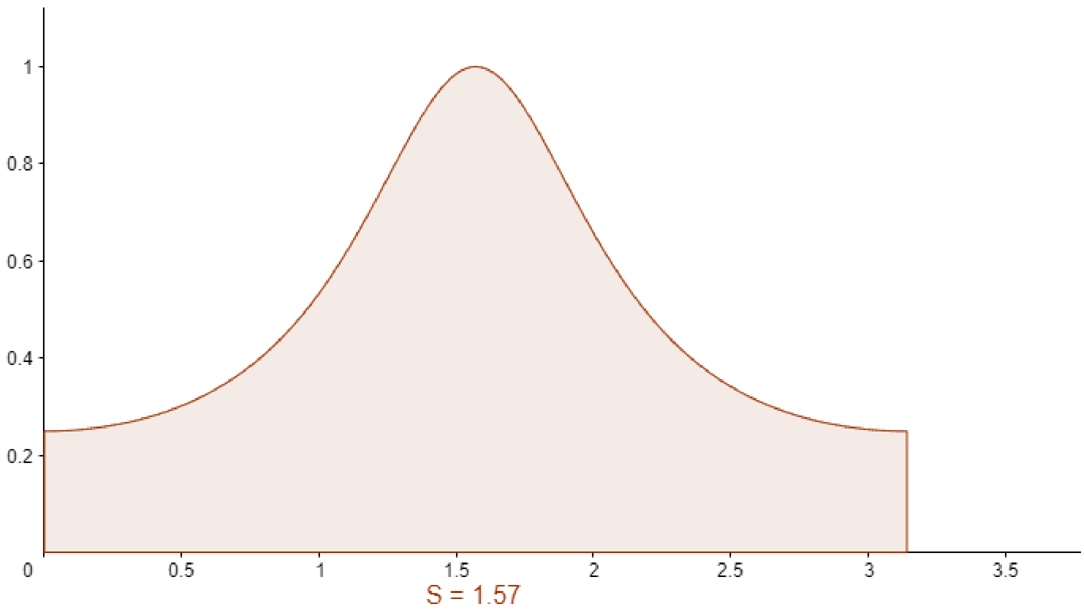
Příklad 2.3 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$ *na intervalu* $(0, \pi)$.

Řešení:

Řešením je určitý integrál $\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+3\cos^2 x} dx$. Určitý integrál je podobný integrálu v příkladě (2.3), který má jen jinou horní mez. Vzhledem k symetrii funkce $f(x) = \cos^2 x$ můžeme psát

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Plocha pod křivkou je $S = \dfrac{\pi}{2}$ j^2. $\triangle$



Obrázek 2.3: Geometrická interpretace

Příklad 2.4 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1}$ *na intervalu* $(0, \pi)$.

Řešení:

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^\pi \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \arctan t \\ x = 2\arctan t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \pi \mapsto \infty \\ \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right| = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{2t + 1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{2}{t^2 + 2t + 1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t$$

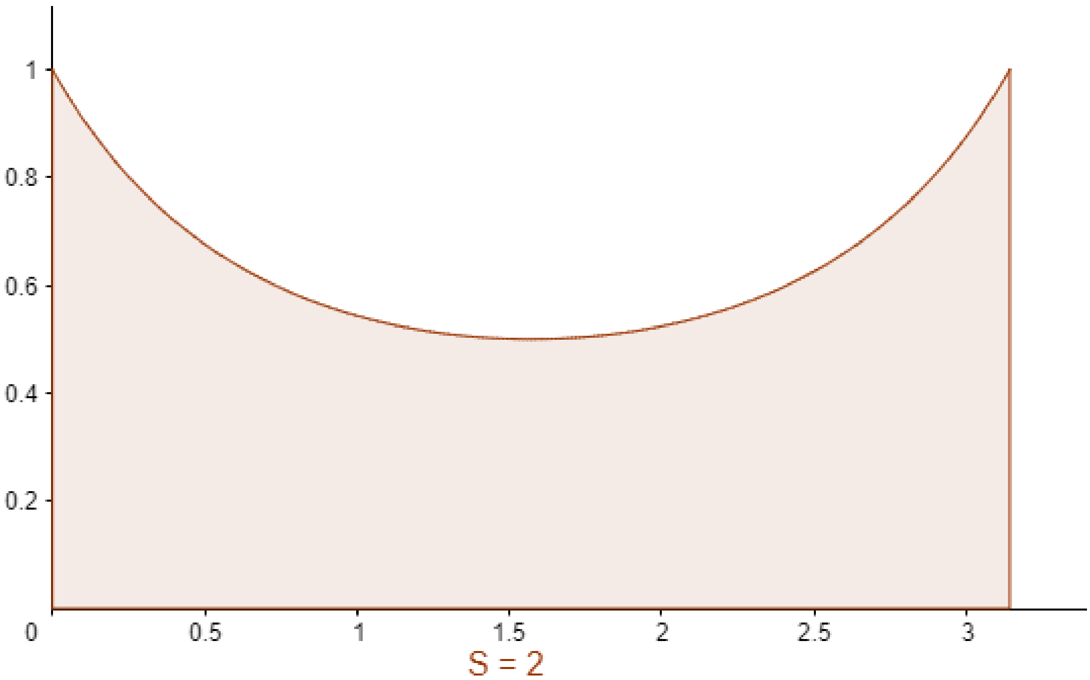
$$= 2\left[\frac{(t+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^\infty = 2\left[\frac{(t+1)^{-1}}{-1}\right]_0^\infty$$

$$= -2\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^\infty = \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^\infty$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{t+1}\right) - \frac{-2}{1}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

Plocha pod křivkou je $S = 2$ j^2. $\triangle$



Obrázek 2.4: Geometrická interpretace

Příklad 2.5 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 1}$ *na intervalu* $(0, \frac{\pi}{3})$.

Řešení:

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \arctan t \\ x = 2\arctan t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \frac{\pi}{3} \mapsto \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 1}{\frac{1-t^2}{t^2+1} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t + 1 + t^2}{1+t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1 - t^2 + t^2 + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

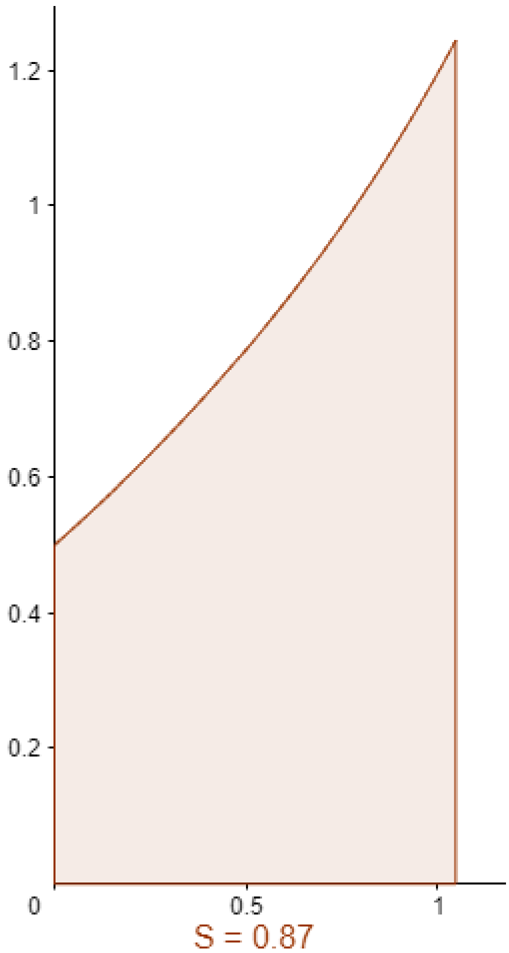
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(t+1)^2}{2} \cdot 21 + t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= [t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left| \begin{array}{c} u = 1 + t^2 \\ du = 2t\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 1\frac{1}{\sqrt{3}} \mapsto \frac{4}{3} \end{array} \right| = [t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + [ln|u|]_1^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3} - \ln 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3}.$$

Plocha pod křivkou je $S = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3}$ j^2. △



Obrázek 2.5: Geometrická interpretace

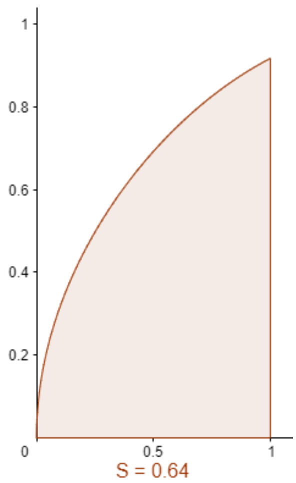
Příklad 2.6 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí $f(x) = \sin\sqrt{x}$ na intervalu $(0, 1)$.*

Řešení:

Řešením je určitý integrál $\int_0^1 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^1 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x} \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \sin t \cdot 2t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos t \end{vmatrix}$$
$$= 2\left([-\cos t \cdot t]_0^1\right) + \int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\left([-\cos t \cdot t]_0^1 + [\sin t]_0^1\right)$$
$$= 2\left(-\cos 1 + 0\cos 0 + \sin 1 - \sin 0\right)$$
$$= 2\left(\sin 1 - \cos 1\right).$$

Plocha pod křivkou je $S = 2(\sin 1 - \cos 1)$ j^2. △



Obrázek 2.6: Geometrická interpretace

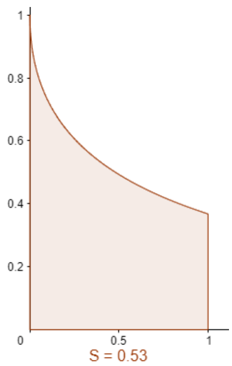
Příklad 2.7 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ na intervalu $(0,1)$.*

<u>Řešení:</u>

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x} \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}\right| &= \int_0^1 e^{-t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 e^{-t} t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{cc} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array}\right| \\
&= 2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^1\right) - \int_0^1 1\cdot(-e)^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left((-e^{-1} - 0) - \left[e^{-t}\right]_0^1\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{e} - e^{-1} + 1\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{2}{e}\right).
\end{aligned}
$$

Plocha pod křivkou je $S = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right)$ j^2. △



Obrázek 2.7: Geometrická interpretace

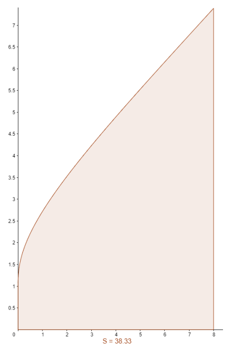
Příklad 2.8 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ *na intervalu* $(0, 8)$.

<u>*Řešení:*</u>

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto \sqrt[3]{8} = 2 \end{array}\right| = \int_0^2 e^t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^2 t^2 e^t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{cc} u = t^2 & v' = e^t \\ u' = 2t & v = e^t \end{array}\right| \\
&= 3\left(\left[t^2 e^t\right]_0^2\right) - \int_0^2 2te^t\,\mathrm{d}t \\
&= 3\left[(4e^2 - 0) - \left|\begin{array}{cc} u = t & v' = e^t \\ u' = 1 & v = e^t \end{array}\right| - 2\left[te^t\right]_0^2 + 2\int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t\right] \\
&= 3\left(4e^2 - 2(2e^2 - 0) + 2\left[e^t\right]_0^2\right) \\
&= 3\left(4e^2 - 4e^2 + 2e^2 - 2\right) \\
&= 3(2e^2 - 2) = 6e^2 - 6.
\end{aligned}
$$

Plocha pod křivkou je $S = 6e^2 - 6$ j^2. △



Obrázek 2.8: Geometrická interpretace

2.2 Integrály řešené metodou per partes

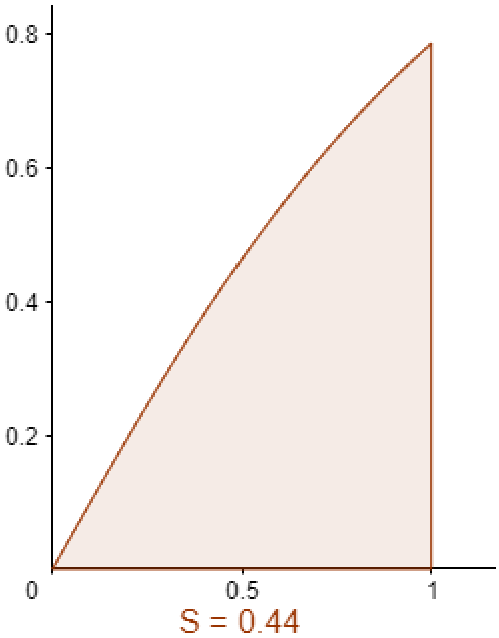
Příklad 2.9 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = \arctan x$ *na intervalu* $(0, 1)$.

<u>Řešení:</u>

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
S = \int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{cc} u = \arctan x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \left| \begin{array}{c} t = 1 + x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x \,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t} \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 \\
&= \arctan 1 - 0 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 1 \\
&= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Plocha pod křivkou je $S = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$ j^2. $\triangle$



Obrázek 2.9: Geometrická interpretace

Příklad 2.10 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí* $f(x) = e^x \sin x$ *na intervalu* $(0, \pi)$.

Řešení:

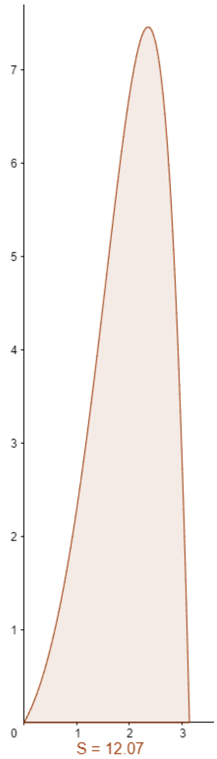
Řešením je určitý integrál $\int_0^\pi e^x \sin x \,\mathrm{d}x$. V tomto případě si ho označme jako I.

$$\begin{aligned} S = \int_0^\pi e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int_0^\pi e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{array} \right| \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int_0^\pi e^x \sin x \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zde je zřejmé, že bychom metodu per partes opakovali nekonečně krát a výsledku bychom nedosáhli. Můžeme ale integrál napsat jako rovnost

$$\begin{aligned}
I &= \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^\pi - I \\
2I &= \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^\pi \\
I &= \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_0^\pi \\
I &= \frac{1}{2}\left[e^\pi(0+1) - e^0(0-1)\right] \\
I &= \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)
\end{aligned}$$

Plocha pod křivkou je $S = \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)$ j^2. △



Obrázek 2.10: Geometrická interpretace

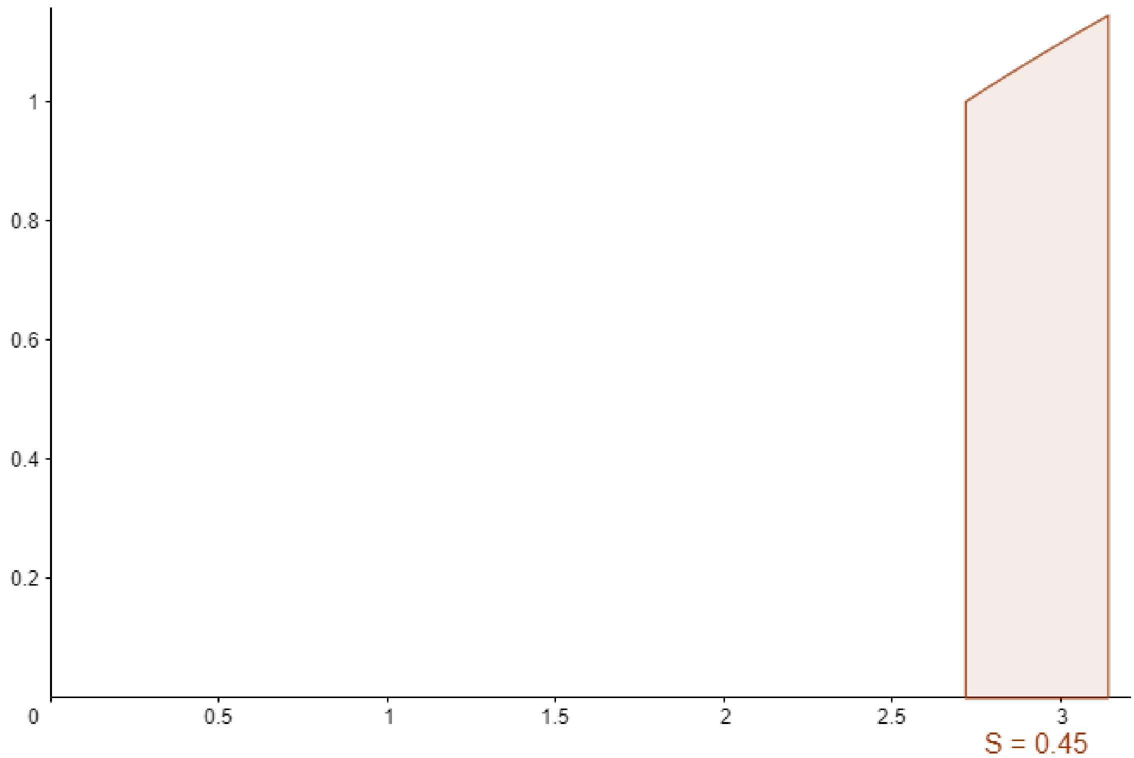
Příklad 2.11 *Určete obsah plochy ohraničené funkcí $f(x) = \ln x$ na intervalu (e, π).*

Řešení:

Řešením je určitý integrál $\displaystyle\int_e^\pi \ln x \, dx$.

$$S = \int_e^\pi \ln x \, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int_e^\pi 1 \, dx$$
$$= [x \ln x - x]_e^\pi = [x(\ln x - 1)]_e^\pi$$
$$= \pi(\ln \pi - 1) - 0) = \pi(\ln \pi - 1).$$

Plocha pod křivkou je $S = \pi(\ln \pi - 1)$ j^2. $\triangle$



Obrázek 2.11: Geometrická interpretace

2.3 Obsah obrazce omezeného křivkami

Příklad 2.12 *Určete obsah obrazce omezeného křivkami $y = x^3$ a $y = x$.*

<u>*Řešení:*</u>

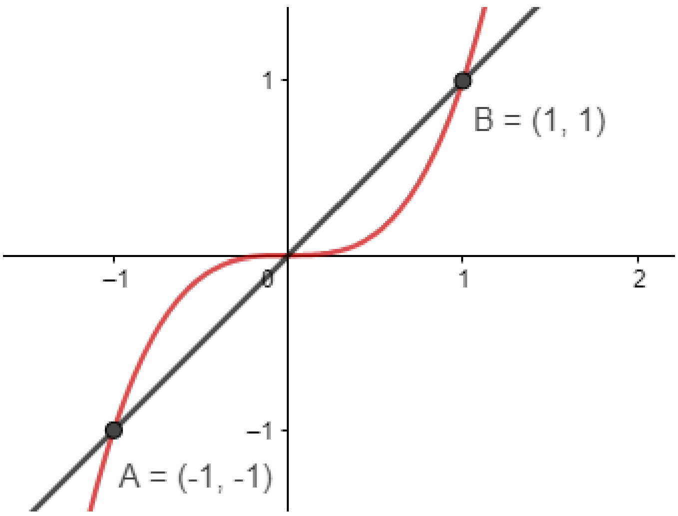
Nejdříve je nutné najít meze, musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ x &\in \{\pm 1; 0\} \end{aligned}$$

Kořeny rovnic nám příklad rozdělí na dva symetrické integrály.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x \\ = 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 2\left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{1}{2}$ j^2. △



Obrázek 2.12: Geometrická interpretace

Příklad 2.13 *Určete obsah obrazce omezeného křivkami* $y = \frac{1}{1+x^2}$ *a* $y = \frac{1}{2}x^2$.

Řešení:

Nejdříve je nutné najít meze, musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{x^2}{2} \\ 2 &= x^2(1+x^2), \text{ použijeme substituci } x^2 = t \\ 2 &= t(1+t) \\ t^2 + t - 2 &= 0 \\ (t+2)(t-1) &= 0 \\ t &\in \{-2; 1\}. \end{aligned}$$

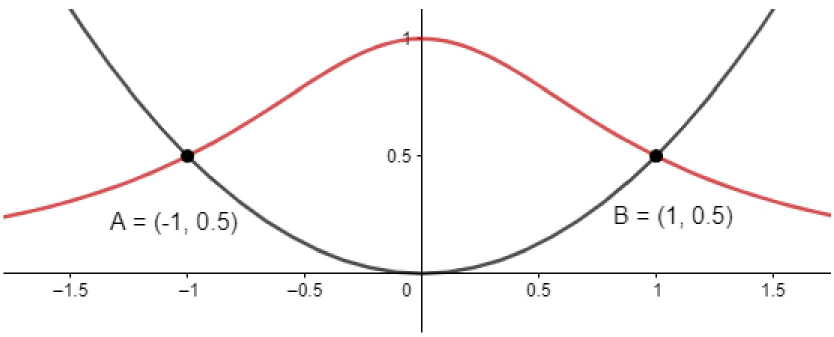
Po návratu k substituci $x^2 = t$ máme rovnici

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

Obsah obrazce tedy spočítáme jako

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-1}^{1} \\ &= \left[\arctan 1 - \frac{1}{6} - \arctan(-1) + \frac{1}{6}(-1) \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ j^2. $\triangle$



Obrázek 2.13: Geometrická interpretace

2.4 Délka křivky

V následujících sekcích budeme využívat známeho vzorce pro výpočet délky křivky dané rovnicí $y = f(x)$, $x \in (a, b)$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$

případně křivky dané parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (a, b),$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.14 *Určete délku křivky dané rovnicí* $y = \ln x$ *na intervalu* $(\sqrt{3}, \sqrt{8})$.

Řešení:

K výpočtu potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{t^2-1} \\ \mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ \sqrt{3} \mapsto 2 \\ \sqrt{8} \mapsto 3 \end{array} \right|$$

$$= \int_2^3 \sqrt{\frac{t^2-1+1}{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 1 + \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál vede na parciální zlomky

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$A(t-1) + B(t+1) = 1$$

Pro $t = 1$ máme

$$2B = 1$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Pro $t = -1$ máme

$$-2A = 1$$
$$A = \frac{-1}{2}$$

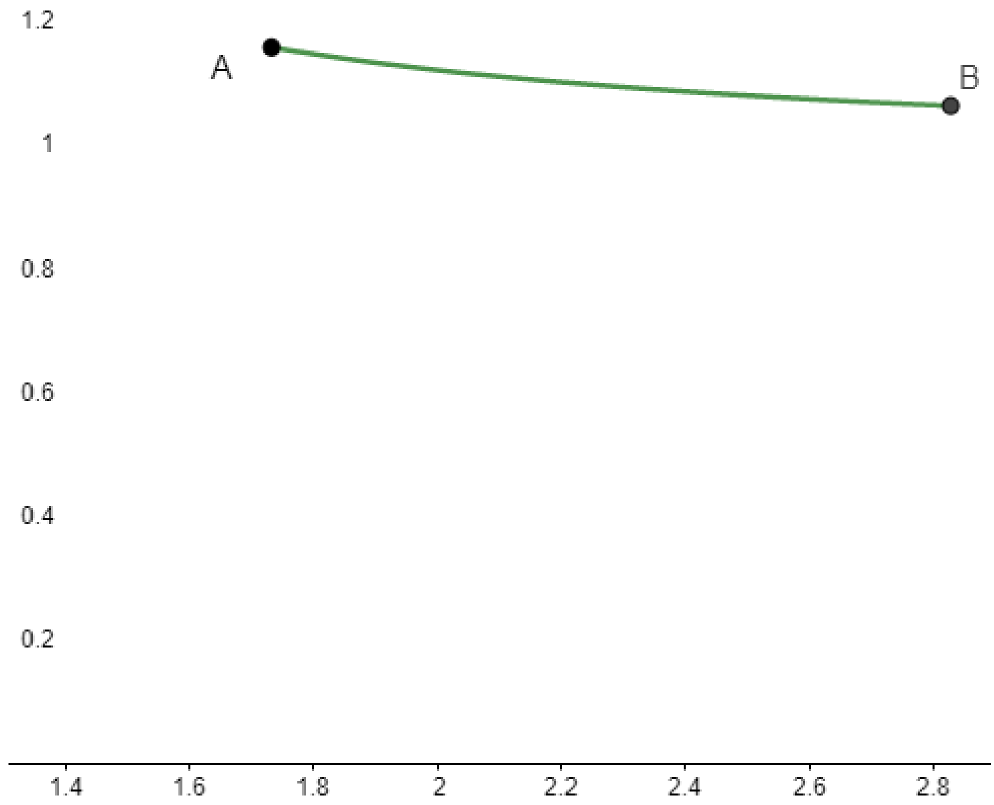
Platí tedy

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{1}{-2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)} \right) \mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) \mathrm{d}t$$

Po dosazení zpět do příkladu dostáváme

$$\begin{aligned}
L &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) \mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| \right]_2^3 \\
&= \left[t + \frac{1}{2}\left(\ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \right]_2^3 = 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4} - 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Délka oblouku křivky je $L = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$ j. $\triangle$



Obrázek 2.14: Geometrická interpretace

Příklad 2.15 *Určete délku křivky dané rovnicí* $y = \ln(\sin x)$ *na intervalu* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Řešení:

K výpočtu potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\ -\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \frac{\pi}{3}\mapsto\frac{1}{2}\\ \frac{2\pi}{3}\mapsto\frac{-1}{2}\end{array}\right|$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}-\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Tento integrál vede na parciální zlomky

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}\right)\mathrm{d}t$$

$$A(1-t)+B(1+t)=1$$

Pro $t=1$ máme

$$A\cdot 0+2B=1$$

$$B=\frac{1}{2}$$

Pro $t=-1$ máme

$$2A=1$$

$$A=\frac{1}{2}$$

Platí tedy

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2(1-t)}\right)\mathrm{d}t$$

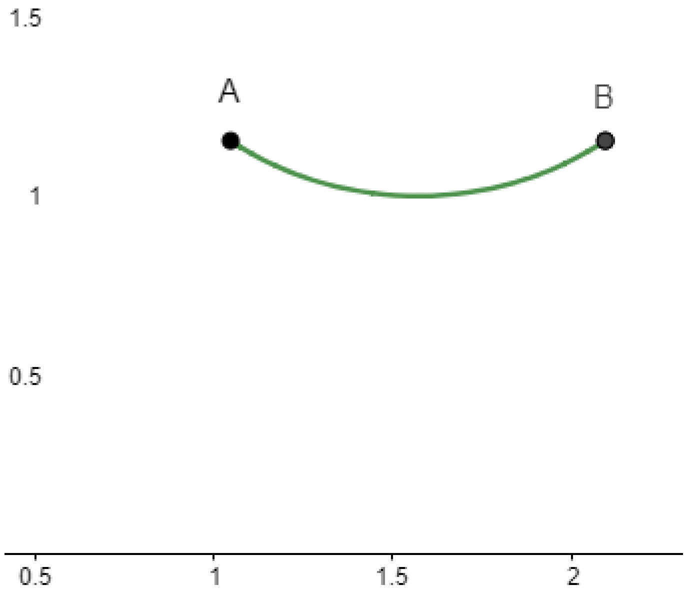
Po dosazení zpět do příkladu dostáváme

$$L=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2(1-t)}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left[-\ln|1-t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\ln|1+t|-\ln|1-t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}-\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 3=\ln 3.$$

Délka oblouku křivky je $L=\ln 3$ j. $\triangle$



Obrázek 2.15: Geometrická interpretace

2.5 Příklady pro odvození známých vzorců

V následující sekci budeme využívat vzorců z předchozích sekcí a vzorce pro objem a povrch rotačního tělesa daného rotací křivky $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ kolem osy x

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 2.16 *Určete obsah elipsy dané rovnicí* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Řešení:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a, b > 0$. Rovnici elipsy si můžeme upravit na $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in (-a, a)$. Protože je elipsa symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma.

$$S = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ a \mapsto \frac{\pi}{2} \\ -a \mapsto \frac{-\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= 2\frac{b}{a}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2b\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2b\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= ab\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t\,\mathrm{d}t = ab\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= ab\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(-\pi)\right] = \pi ab.$$

Obsah elipsy je $S = \pi ab$. $\triangle$

Příklad 2.17 *Určete délku kružnice dané rovnicemi* $y = r\cdot\cos t$ *a* $y = r\cdot\sin t$ *pro* $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$.

Řešení:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} = [rt]_0^{2\pi} = 2\pi r - 0 = 2\pi r$$

Délka kružnice je $L = 2\pi r$. $\triangle$

Příklad 2.18 *Určete obsah kruhu daného rovnicí* $r^2 = x^2 + y^2$ *pro* $r > 0$.

Řešení:

Rovnici obvodové kružnice daného kruhu si můžeme upravit na $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (-r, r)$. Protože je kruh symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma.

$$S = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ r \mapsto \frac{\pi}{2} \\ -r \mapsto \frac{-\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2 t} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2t}{2}\,\mathrm{d}t = r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= r^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= r^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(-\pi)\right] = r^2\pi.$$

Obsah kruhu je $S = \pi r^2$. $\triangle$

Příklad 2.19 *Určete povrch koule dané rotací křivky $x^2 + y^2 = r^2$ kolem osy x.*

Řešení:

Rovnici křivky (kružnice) si můžeme upravit na $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Protože je koule symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma. K výpočtu ještě potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x$$
$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2} \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[rx \right]_{-r}^{r} = 2\pi(r^2 + r^2) = 4\pi r^2$$

Povrch koule je $S = 4\pi r^2$. $\triangle$

Příklad 2.20 *Určete objem kužele, který rotuje kolem přímky* $y = \frac{rx}{v}$ *a kolem osy* x *na intervalu* $(0, v)$.

Řešení:

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{rx}{v} \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \left(\frac{1}{3} v^3 \right) = \frac{\pi r^2 v}{3}.$$

Objem kužele je $V = \dfrac{\pi r^2 v}{3}$. $\triangle$

2.6 Slovní úlohy

Příklad 2.21 *Spotřebu dřeva ve světě v letech 1991 - 2000 popisuje funkce*

$$f(x) = 52 + 0,008 \cdot x^3,$$

kde x *je pořadí roku sledování a* $f(x)$ *je rychlost (intenzita) spotřeby v mil.* m^3 *za rok na konci roku* $1990 + x$. *Jaká byla celková spotřeba dřeva od začátku roku 1991 do konce roku 2000? Jaká byla průměrná roční spotřeba v tomto období? Jaká byla spotřeba dřeva v roce 1993?*

Řešení:

Abychom zjisitli celkovou spotřebu dřeva za deset let, musíme spočítat určitý integrál $\int_0^{10} f(x)$, tedy

$$\int_0^{10} 52 + 0,008x^3 \, \mathrm{d}x = \left[52x + \frac{0,008}{4} x^4 \right]_0^{10} = 520 + \frac{80}{4} - 0 = 540. \quad (2.1)$$

Pro výpočet průměrné spotřeby ve sledovaném období nám stačí, abychom výsledek (2.1) vydělili 10, tedy

$$\frac{\int_0^{10} 52 + 0,008x^3 \,\mathrm{d}x}{10} = \frac{540}{10} = 54.$$

Zajímá-li nás spotřeba v roce 1993, musíme meze určitého integrálu změnit od 2 do 3, tedy

$$\begin{aligned}\int_2^3 52 + 0,008x^3 \,\mathrm{d}x &= \left[52x + \frac{0,008}{4}x^4\right]_2^3 \\ &= \left(156 + \frac{0,008}{4} \cdot 81 - 104 - \frac{0,008}{4} \cdot 16\right) \\ &= 156 + 0,002 \cdot 81 - 104 - 4 \cdot 0,008 = 52,13.\end{aligned}$$

Celková spotřeba dřeva od roku 1991 do roku 2000 byla 540 milionů m^3. Průměrná spotřeba v tomto období byla 54 milionů m^3. Spotřeba dřeva v roce 1993 byla 52,13 milionů m^3. $\triangle$

Příklad 2.22 *Ze skládky uniká do okolí kontaminovaná voda. Velikost průsaku charakterizuje funkce*

$$f(x) = \frac{360}{(x+1)^3},$$

kde x je počet dní od začátku pozorování a $f(x)$ je intenzita průsaku v litrech za den na konci x-tého dne. Kolik kontaminované vody prosáklo do okolí během prvního dne? Kolik kontaminované vody prosáklo během druhého dne? Kolik kontaminované vody prosáklo do okolní za prvních pět dní pozorování? Jaký byl průměrný průsak v prvních pěti dnech pozorování?

Řešení:

Abychom zjistili, kolik kontaminované vody prosáklo do okolí za první den, musíme spočítat určitý integrál $\int_0^1 f(x)$, tedy

$$\int_0^1 \frac{360}{(x+1)^3} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x+1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{360}{t^3} \,\mathrm{d}t = \int_1^2 360 \cdot t^{-3} \,\mathrm{d}t$$

$$= \left[360 \cdot \frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left[-180 \cdot \frac{1}{t^2}\right]_1^2 = \frac{-180}{4} + 180 = 135.$$

Pro výpočet kontaminace během druhé dne bude mít integrál pouze jiné meze (primitivní funkce navíc transformované meze) a to

$$\int_1^2 \frac{360}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-180 \cdot \frac{1}{t^2}\right]_2^3 = \frac{-180}{9} + \frac{180}{4} = -20 + 45 = 25.$$

Obdobně spočítáme hodnotu pro pět dní jako

$$\int_0^5 \frac{360}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-180 \cdot \frac{1}{t^2}\right]_1^6 = \frac{-180}{36} + \frac{180}{1} = -5 + 180 = 175. \tag{2.2}$$

Pro výpočet průměrného průsaku za pět let nám stačí, abychom výsledek (2.2) vydělili 5, tedy

$$\frac{\int_0^5 \frac{360}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x}{5} = \frac{175}{5} = 35.$$

Během prvního dne prosáklo do okolí 135 l kontaminované vody. Během druhého dne prosáklo do okolí 25 l kontaminované vody. Během pěti dní prosáklo do okolí 175 l kontaminované vody, průměrně tedy 35 l denně. △

Příklad 2.23 *Rybolov na sledovaném území charakterizuje funkce*

$$f(x) = 100 + 20x - x^2,$$

kde $f(x)$ je intenzita rybolovu v tunách za rok na konci roku $2000 + x$. Jaká byla celková hmotnost ryb vylovených od ledna 2001 do prosince 2009? Kolik ryb se ulovilo v letech 2004 - 2006?
Jaký byl průměrný úlovek v letech 2004 - 2006?

Řešení:

Abychom zjistili hmotnost vylovených ryb od ledna 2001 do prosince 2009, musíme spočítat určitý integrál

$$\int_0^9 100 + 20x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[100x + 10x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^9 = 900 + 810 - 243 - 0 = 1467.$$

V případě úlovku v letech 2004 - 2006 musíme spočítat určitý integrál

$$\begin{aligned}\int_3^6 100 + 20x - x^2\,\mathrm{d}x &= \left[100x + 10x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_3^6 \\ &= 600 + 360 - 72 - 300 - 90 + 9 = 507.\end{aligned} \tag{2.3}$$

V případě výpočtu průměrného výdělku za toto období vydělíme integrál (2.3) číslem 3,

$$\frac{\int_3^6 100 + 20x - x^2 \, \mathrm{d}x}{3} = \frac{507}{3} = 169.$$

Hmotnost ryb vylovených od ledna 2001 do prosince 2009 byla 1467 t. Od roku 2004 do roku 2006 se ulovilo 507 t ryb, průměrně 169 t ryb ročně. $\triangle$

Příklad 2.24 *Teplota čerstvě udělané kávy je 90 °C a klesá rychlostí*

$$f(x) = 7e^{-0,1x},$$

kde x je čas v minutách počítaný od okamžiku uvaření kávy a $f(x)$ je rychlost poklesu teploty ve °C za minutu na konci x-té minuty. Jaká bude teplota kávy po pěti, deseti a dvaceti minutách?

Řešení:

Abychom zjistili teplotu kávy po pěti minutách, musíme spočítat určitý integrál

$$\int_0^5 7e^{-0,1x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = -0,1x \\ \mathrm{d}t = -0,1 \, \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 5 \mapsto -0,5 \end{array} \right| = \int_0^{-0,5} 7e^t \frac{1}{-0,1} \, \mathrm{d}t = -7 \cdot 10 \int_{-0,5}^0 e^t \, \mathrm{d}t$$
$$= \left[-70e^t\right]_{-0,5}^0 = -70\left(1 - e^{-0,5}\right) \doteq -27,5.$$

Tuto hodnotu přičteme k výchozí teplotě kávy a dostáváme

$$90 - 27,5 = 62,5.$$

V případě uplynutí 10 a 20 minut bude integrál téměr stejný, kromě nezbytné změny mezí.
Pro teplotu kávy po deseti minutách dostáváme

$$\int_0^{10} 7e^{-0,1x} \, \mathrm{d}x = -7 \cdot 10 \int_{-1}^0 e^t \, \mathrm{d}t = \left[-70e^t\right]_{-1}^0 = -70 + \frac{70}{e} \doteq -44,3.$$

Tuto hodnotu přičteme k výchozí teplotě kávy a dostáváme

$$90 - 44,3 = 45,7.$$

Pro teplotu kávy po dvaceti minutách dostáváme

$$\int_0^{20} 7e^{-0,1x}\,\mathrm{d}x = -7 \cdot 10 \int_{-2}^{0} e^t\,\mathrm{d}t = \left[-70e^t\right]_{-2}^{0} = -70 + \frac{70}{e^2} \doteq -60,5.$$

Tuto hodnotu přičteme k výchozí teplotě kávy a dostáváme

$$90 - 60,5 = 29,5.$$

Teplota kávy po pěti minutách bude asi 62,5 $°C$, po deseti minutách bude asi 45,7 $°C$ a po dvaceti minutách bude asi 29,5 $°C$. $\triangle$

Kapitola 3

Aplikační úlohy vedoucí na diferenciální rovnice

Příklad 3.1 *Naftalínové kuličky se vypařují rychlostí přímo úměrnou povrchu kuličky. Předpokládejme, že poloměr kuličky se zmenší z 0,5 cm na 0,25 cm za 6 měsíců.*
Za jak dlouho naftalínová kulička zmizí?

Řešení:

Objem koule je dán vztahem $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ a povrch $S = 4\pi r^2$. Díky přímé úměrnosti vypařování kuličky závislé na povrchu můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = KS,$$

po dosazení za V a S potom

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\mathrm{d}t} = K4\pi r^2.$$

To po zderivování

$$\frac{4\pi}{3}3r^2r' = K4\pi r^2$$

vede na rovnici

$$r' = K.$$

Obecné řešení této rovnice má tvar

$$r(t) = K(t + c), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.
Ze zadání nám plynou dvě počáteční podmínky

$$r(0) = 0,5 \quad \text{a} \quad r(6) = 0,25.$$

Díky nim dopočítáme konstantu K

$$\begin{aligned} 0,5 &= Kc \\ 0,25 &= K(6+c) \\ 0,25 &= 6K + Kc \\ 0,25 - 0,5 &= 6K \\ K &= -\frac{0,25}{6}. \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu $0,5 = Kc$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{K} &= c \\ c &= -12. \end{aligned}$$

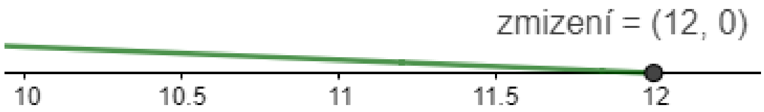
Konkrétní řešení diferenciální rovnice je tedy

$$r(t) = -\frac{0,25}{6}(t-12), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pokud chceme zjistit, za jaký čas t kulička zmizí, musíme vyřešit úlohu $r(t) = 0$. V našem případě máme

$$\begin{aligned} -\frac{0,25}{6}(t-12) &= 0 \\ t - 12 &= 0 \\ t &= 12. \end{aligned}$$

Naftalínová kulička zmizí za 12 měsíců. $\triangle$



Obrázek 3.1: Řešení pro rozpuštění kuličky

Příklad 3.2 *Led taje rychlostí nepřímo úměrnou své tloušťce. Předpokládejme, že za hodinu se vrstva ledu ztenčí z 10 cm na 5 cm.*
Za jak dlouho led zcela roztaje?

Řešení:

Označme tloušťku ledu v čase t jako $x(t)$. Změnu tloušťky ledu můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{x}$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K.$$

Integrací postupně dostáváme

$$\int xx'(t)\,\mathrm{d}t = K\int 1\,\mathrm{d}t$$
$$\int x\,\mathrm{d}x = K(t+c)$$
$$\frac{x^2}{2} = K(t+c).$$

Obecné řešení pak je ve tvaru

$$x(t) = \sqrt{2K(t+c)}, \quad t \in (-\infty, -c],$$

kde vzhledem k tání ledu je $K < 0$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plynou dvě počáteční podmínky

$$x(t_0) = 10, \qquad x(t_0+1) = 5.$$

Z první vyjádříme konstantu K Máme

$$\begin{aligned}
2K(t_0 + c) &= 100 \\
c &= \frac{100}{2K} - t_0 \\
K &= \frac{100}{2(t_0 + c)} \\
K &= \frac{50}{t_0 + c}.
\end{aligned}$$

Ze druhé vyjádříme

$$2K(t_0 + 1 + c) = 25.$$

Máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
K(t_0 + c) &= 50 \qquad (3.1) \\
K(t_0 + c + 1) &= 12,5.
\end{aligned}$$

Rovnice od sebe od sebe odečteme a dostaneme

$$-K = 50 - 12,5$$

$$K = -37,5.$$

Z rovnice (3.1) máme

$$\begin{aligned}
t_0 + c &= \frac{50}{K} \\
c &= \frac{50}{K} - t_0 \\
c &= \frac{50}{-37,5} - t_0.
\end{aligned}$$

Dostáváme tak konkrétní řešení ve tvaru

$$x(t) = \sqrt{-75t - 75\left(\frac{50}{-37,5} - t_0\right)},$$

zjednodušeně

$$x(t) = \sqrt{-75\left[t - \left(\frac{4}{3} + t_0\right)\right]}, \quad t \le t_0 + \frac{4}{3}.$$

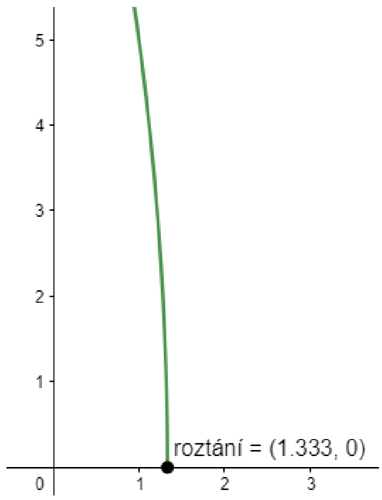
Chceme-li zjistit, za jak dlouho led zcela roztaje, musíme vyřešit úlohu $x(t) = 0$. V našem případě to znamená

$$t - \left(\frac{4}{3} + t_0\right) = 0$$

$$t = \frac{4}{3} + t_0, \qquad \text{pro } t_0 = 0$$

$$t = \frac{4}{3}.$$

Led zcela roztaje za 1 hodinu a 20 minut. △



Obrázek 3.2: Řešení pro roztání

Příklad 3.3 *Intenzita slunečního světla pod vodou klesá rychlostí přímo úměrnou intenzitě světla v dané hloubce.*
Pokud 8 metrů vody absorbuje 15 % světla, v jaké hloubce bude v poledne stejně jasno jako na hladině vody při úplňku? Intenzita slunce v poledne je 300 000krát větší než intenzita při úplňku.

Řešení:

Označme intenzitu světla jako I a hloubku jako h. Pokles intenzity světla $I = I(h)$ pod hladinou vody můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}h} &= KI, \text{ pro } I \neq 0 \\
\frac{I'}{I} &= K \\
\int \frac{I'}{I}\,\mathrm{d}h &= \int K\,\mathrm{d}h \\
\int \frac{1}{I}\,\mathrm{d}I &= Kh + c, \text{ pro } I > 0 \\
\ln I &= Kh + c \\
I &= e^{Kh+c}
\end{aligned}$$

z čehož dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$I(h) = e^{Kh}c_1, \quad h \geq 0,$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plynou dvě počáteční podmínky

$$I(0) = I_0, \quad I(8) = 0,85I_0.$$

Díky nim vyjádříme konstanty c_1 a K.

$$\begin{aligned}
c_1e^0 &= I_0 \\
c_1 &= I_0 \\
I_0e^{8K} &= 0,85I_0 \\
e^{8K} &= 0,85 \\
8K &= \ln 0,85 \\
K &= \frac{1}{8}\ln 0,85.
\end{aligned}$$

Konkrétní řešení diferenciální rovnice je tedy

$$I(h) = e^{\frac{1}{8}\ln 0{,}85 h} I_0, \quad h \geq 0.$$

Zajímá nás, v jaké hloubce bude intenzita v poledne stejná jako na hladině při úplňku, když víme, že v poledne je 300 000krát větší.
Musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} I_0 e^{Kh} &= \frac{1}{300000} I_0 \\ e^{Kh} &= \frac{1}{300000} \\ Kh &= -\ln 300000 \\ h &= \frac{-\ln 300000}{\frac{1}{8}\ln 0,85} \\ h &\doteq 621. \end{aligned}$$

V hloubce asi 621 m bude v poledne stejně jasno jako na hladině při úplňku.
$\triangle$

Příklad 3.4 *První měsíc růstu rostliny u některých významných průmyslových plodin je okamžitá rychlost růstu hmotnosti rostliny přímo úměrná již dosažené hmotnosti. Pokud čas měříme na dny, tak u bavlníku je koeficient této přímé úměrnosti roven 0,21. Předpokládejme, že bavlníková rostlinka dnes váží 70 mg.*
Za jak dlouho se její hmotnost zdvojnásobí?
Kolik bude vážit za měsíc?

Řešení:

Označme hmotnost rostliny v čase t jako $m = m(t)$. Rychlost růstu hmotnosti rostliny je přímo úměrná její hmotnosti, proto můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0,21m.$$

Odtud postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{m'}{m} &= 0,21\\
\int \frac{1}{m}\,\mathrm{d}m &= \int 0,21\,\mathrm{d}t\\
\ln m &= 0,21t + c\\
m &= e^{0,21t+c}\\
m &= e^{0,21t}c_1.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$m(t) = c_1 e^{0,21t}, \quad t \geq 0,$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $m(0) = 70$. Díky ní zjistíme hodnotu konstanty c_1

$$\begin{aligned}
c_1 e^0 &= 70\\
c_1 &= 70.
\end{aligned}$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

$$m(t) = 70e^{0,21t}, \quad t \geq 0.$$

Zajímá nás, za jak dlouho se hmotnost rostliny zdvojnásobí. Řešíme tedy rovnici

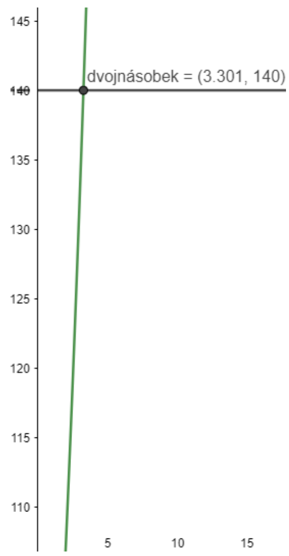
$$\begin{aligned}
140 &= 70e^{0,21t_1} \\
2 &= e^{0,21t_1} \\
\ln 2 &= 0,21t_1 \\
t_1 &= \frac{\ln 2}{0,21} \\
t_1 &= 3,3.
\end{aligned}$$

Hmotnost rostliny se zdvojnásobí asi za 3,3 dne.

Dále nás zajímalo, kolik bude rostlina vážit za měsíc. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
m(30) &= x \\
x &= 70e^{0,21\cdot 30} \\
x &= 70e^{6,3} \\
x &\doteq 38120.
\end{aligned}$$

Za měsíc bude rostlina vážit asi 38,12 g. $\triangle$



Obrázek 3.3: Řešení pro dvojnásobnou délku

Příklad 3.5 *Pravděpodobnost, že řidič s 0 ‰ alkoholu v krvi se stane účastníkem dopravní nehody, je rovna 1 %. Při 1 ‰ alkoholu v krvi řidiče je pravděpodobnost dopravní nehody 7 %. Obecně lze říci, že čím větší je pravděpodobnost nehody pro daný obsah alkoholu v krvi, tím rychleji tato pravděpodobnost roste.*
Určete, jaká je pravděpodobnost nehody, jestliže řidič má v krvi 1,5 ‰ alkoholu, 2 ‰ alkoholu.
Při jakém obsahu alkoholu v krvi je nehoda jistá?
V USA mají neprofesní řidiči nad 21 let povoleno 0,8 ‰ alkoholu v krvi. Kolikrát větší je pravděpodobnost nehody řidiče s 0,8 ‰ než řidiče s 0 ‰ alkoholu v krvi?

Řešení:

Označme množství alkohoholu v krvi jako A a pravděpodobnost jako P. Čím větší je pravděpodobnost nehody pro daný obsah alkoholu v krvi, tím rychleji pravděpodobnost roste, proto můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A} = KP$$

pro nějakou konstantu K. Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= K \\ \int \frac{P'}{P}\,\mathrm{d}A &= \int K\,\mathrm{d}A \\ \int \frac{\mathrm{d}P}{P} &= KA + c \\ \ln P &= KA + c \\ P &= e^{KA+c}. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$P(A) = e^{KA}c_1, \quad A \geq 0,$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $P(0) = 0,01$.
Díky ní určíme konstantu c_1

$$\begin{aligned} 0,01 &= e^0 c_1 \\ c_1 &= 0,01. \end{aligned}$$

Nyní je potřeba vyjádřit konstantu K a to díky počáteční podmínce $P(1) = 0,07$.

$$\begin{aligned}
0,07 &= 0,01e^{K\cdot 1}\\
\frac{0,07}{0,01} &= e^K\\
e^K &= 7\\
K &= \ln 7.
\end{aligned}$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

$$P(A) = 0,01e^{A\ln 7}.$$

Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost nehody řidiče s $1,5$‰ alkoholu, respektive s 2‰ alkoholu. Dosazením do našeho řešení máme

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0,01e^{1{,}5\ln 7}\\
P(A) &\doteq 0,185,
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0,01e^{2\ln 7}\\
P(A) &\doteq 0,49.
\end{aligned}$$

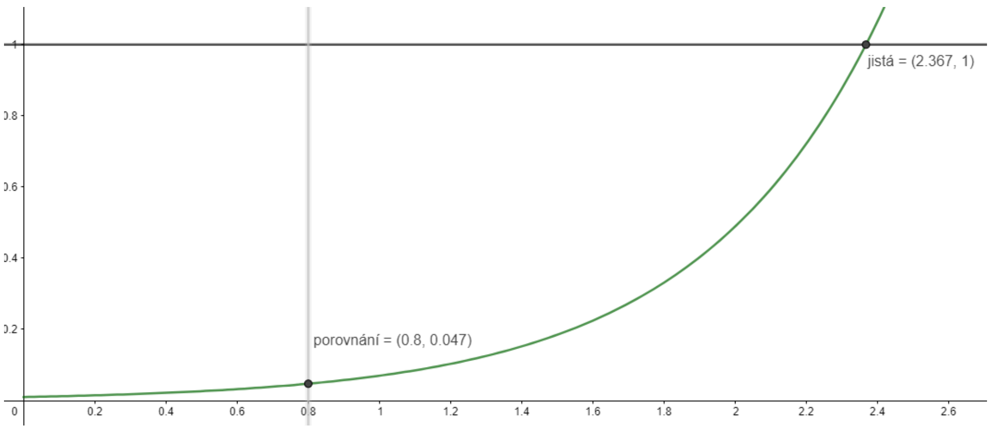
Zajímá-li nás, při jakém obsahu alkoholu v krvi je nehoda jistá, řešíme rovnici $P(A) = 1$.

$$\begin{aligned}
0,01e^{A\ln 7} &= 1\\
e^{A\ln 7} &= 100\\
A\ln 7 &= \ln 100\\
A &= \frac{\ln 100}{\ln 7}\\
A &\doteq 2,36.
\end{aligned}$$

Chceme-li získat porovnání s USA, musíme zjistit pravděpodobnost nehody pro řidiče s $0,8‰$ alkoholu. Dosazením do řešení plyne

$$P(A) = 0,01e^{0,8 \ln 7}$$
$$P(A) \doteq 0,047.$$

Pravděpodobnost nehody pro řidiče s $1,5$ ‰ alkoholu v krvi je asi $18,6$ %. Pravděpodobnost nehody pro řidiče s 2 ‰ alkoholu v krvi je asi 49 %. Pravděpodobnost nehody řidiče s $0,8‰$ alkoholu v krvi je asi $4,7$krát vyšší než u řidiče bez alkoholu v krvi. $\triangle$



Obrázek 3.4: Řešení pro jistou nehodu a pro 0,8 ‰ alkoholu

Příklad 3.6 *Z lidského organismu se alkohol odbourává rovnoměrně, každou hodinu se ho rozloží 10 až 15 %. V USA mají neprofesní řidiči nad 21 let povoleno 0,8 ‰ alkoholu v krvi, pro řidiče taxi a autobusů je limit 0,1 ‰. Po bujaré oslavě se druhý den domů autem vrací taxikář, jehož organismus alkohol rozkládá rychlostí 15 %.*
O kolik dříve by mohl odjet domů, kdyby nebyl taxikářem?
V málo přístupné oblasti USA došlo k dopravní nehodě, o 2 hodiny později v nemocnici řidiči naměřili 0,7 ‰ alkoholu v krvi.
Splňoval řidič v době nehody povolený limit 0,8‰?

Řešení:

Označme množství alkoholu v krvi v čase t jako $A = A(t)$, povolené množství alkoholu pro neprofesní řidiče jako A_N a pro profesní řidiče jako A_P. Protože se alkohol z lidského organismu odbourává rovnoměrně a rozloží se ho až 15% za hodinu, můžeme psát diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -0,15A.$$

Postupným řešením dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{A'}{A} &= -0,15 \\
\int \frac{A'}{A}\,\mathrm{d}t &= \int -0,15\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}A}{A} &= -0,15t + c \\
\ln A &= -0,15t + c \\
A &= e^{-0,15t+c} \\
A &= c_1 e^{-0,15t}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$A(t) = c_1 e^{-0,15t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $t(0) = A_N = 0,8$, kterou jsme umístili do okamžiku poklesu hodnoty alkoholu v krvi na povolenou hodnotu pro neprofesního řidiče.
Díky ní vyjádříme konstantu c_1.

$$\begin{aligned}
0,8 &= c_1 e^0 \\
0,8 &= c_1.
\end{aligned}$$

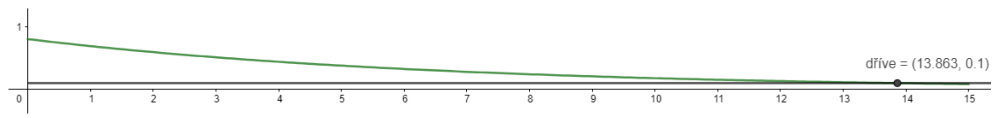
Konkrétní řešení rovnice tedy je

$$A(t) = 0,8e^{-0,15t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

V případě taxikáře nás zajímá, jak dlouho "musel ještě čekat", než mu množství alkoholu v krvi pokleslo na hodnotu $A_P = 0,1 < A_N$, aby mohl v klidu odjet domů. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
0,1 &= 0,8e^{-0,15t} \\
\frac{0,1}{0,8} &= e^{-0,15t} \\
\ln\frac{1}{8} &= -0,15t \\
-\ln 8 &= -0,15t \\
t &= \frac{\ln 8}{0,15} \\
t &\doteq 14.
\end{aligned}$$

Taxikář mohl odjet domů o 14 hodin dříve, kdyby nebyl profesní řidič.



Obrázek 3.5: Řešení pro dřívější odjezd

Dále nás zajímala situace u dopravní nehody, kde jsme potřebovali zjistit, jestli řidič v době nehody splnil povolený limit 0,8 ‰ alkoholu v krvi, když mu v nemocnici 2 hodniny po nehodě naměřili 0,7‰ alkoholu v krvi. Zvolme okamžik měření alkoholu v nemocnici jako čas $t_0 = 0$. Dosadíme obecné řešení (3.2) – s konstantou označenou tentokrát jako c_2 – do podmínky

$$A(0) = 0,7.$$

a máme

$$\begin{aligned}
0,7 &= c_2 e^{-0,15 \cdot 0} \\
c_2 &= 0,7.
\end{aligned}$$

Protože se nehoda stala o dvě hodiny dříve, Zajímá nás, zda hodnota tohoto řešení

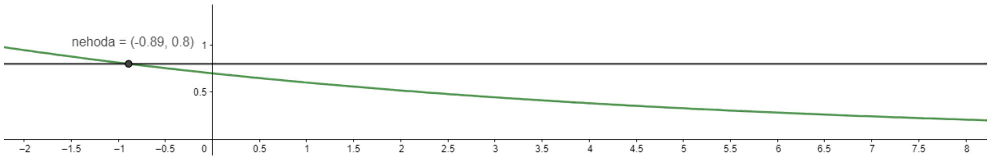
$$A_2(t) = 0,7e^{-0,15t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

v čase $t = -2$ překračovala povolených $A_N = 0,8$. Ptáme se tedy, jestli platí nerovnost

$$A_2(-2) = 0,7e^{-0,15\cdot(-2)} \leq 0,8$$

Vzhledem k tomu, že $0,7e^{-0,15\cdot(-2)} \doteq 0,9 > 0,8$, tato nerovnost neplatí.

Řidič v době nehody limit alkoholu v krvi nesplňoval. $\triangle$



Obrázek 3.6: Řešení pro 0,8 ‰ alkoholu a porovnání

Příklad 3.7 *Velmi silný kuřák vykouří každou hodinu 5 cigaret. Z každé cigarety se do krevního objehu uvolní 0,4 mg nikotinu. Nikotin se v těle odbourává rychlostí přímo úměrnou jeho aktuálnímu množství, přičemž koeficient této přímé úměrnosti je roven 0,346 (při měření času v hodinách). Předpokládejme, že v 7 hodin ráno (těsně po probuzení) není v krvi tohoto kuřáka žádný nikotin.*
Kolik nikotinu se se v jeho krvi bude vyskytovat v 11 hodin večer, až půjde spát?
Na jaké množství se obsah nikotinu sníží během osmihodinového spánku, jestliže kuřák nebude v noci kouřit?
Jak se situace změní, pokud ve 3 hodiny ráno vykouří jednu cigaretu?

Řešení:

Označme množství nikotinu v krvi v čase t jako $n = n(t)$. Protože se nikotin odbourává přímo úměrně jeho aktuálnímu množství s daným koeficientem k, můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -kn.$$

Musíme vzít v úvahu fakt, že kuřák vykouří každou hodinu pět cigaret, úloha se tedy změní na

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} &= -kn + 5 \cdot 0,4 \\ n' &= -kn + 2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jelikož se jedná o nehomogenní rovnici, vyřešíme nejprve úlohu homogenní

$$\begin{aligned} n' + kn &= 0, \\ n' &= -kn, \end{aligned}$$

jejíž obecné řešení je tvaru

$$n_H(t) = c_1 e^{-kt} \tag{3.4}$$

s nějakou konstantou $c_1 \in \mathbb{R}$. Víme, že řešení nehomogenní úlohy hledáme ve tvaru $n(t) = n_H(t) + n_P(t)$. Partikulární řešení $n_P(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru pravé strany, t.j. konstantní $n_P = A$, a to pomocí metody neurčitých koeficientů. Pro takovéto n_P je $n_P' = 0$ a po dosazení do nehomogenní rovnice (3.3) máme

$$\begin{aligned} 0 + kA &= 2 \\ A &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Tím dostáváme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$n(t) = c_1 e^{-kt} + \frac{2}{k}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $t(0) = 0$. Díky ní vyjádříme konstantu c_1

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 e^0 + \frac{2}{k} \\ c_1 &= -\frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Číselné vyjádření vede na hodnotu

$$c_1 = -\frac{2}{0,346} \doteq -5,78.$$

Dosazením do (3.5) dostáváme konkrétní řešení rovnice

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{2}{-k} e^{-kt} + \frac{2}{k} \\ n(t) &= \frac{2}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pomocí takového řešení nehomogenní rovnice můžeme spočítat, kolik nikotinu se v těle kuřáka bude vyskytovat v 11 hodin večer. Jelikož jsme počáteční hodnotu, která udávala množství nikotinu v 7 hodin ráno označili jako $n(0)$, musíme hledanou hodnotu nikotinu v 11 hodin večer vzít jako $n(16)$. Dostáváme tedy rovnost

$$\begin{aligned} n(23:00) = n(16) &= \frac{2}{k}\left(1 - e^{-k \cdot 16}\right) \\ n(16) &= 5,78 \cdot \left(1 - e^{-0,346 \cdot 16}\right) \\ n(16) &\doteq 5,757. \end{aligned}$$

Dále nás zajímalo, jaké množství nikotinu bude v jeho těle po osmi hodinách spánku. K tomu budeme potřebovat obecné řešení homogenní úlohy (3.4), t.j.

$$n_2(t) = n_H(t) = c_2 e^{-kt}.$$

Musíme dopočítat konstantu c_2 z počáteční podmínky $n_2(0) = n(16) = 5,757$ nastavené na hodnotu nikotinu ve 23:00, tedy

$$\begin{aligned} c_2 e^{-kt} &= 5,757 \\ c_2 e^{0} &= 5,757 \\ c_2 &= 5,757, \end{aligned} \tag{3.6}$$

která dává řešení v době od 23:00 do 7:00 ve tvaru

$$n_2(t) = 5,757 e^{-kt}.$$

Pro náš případ musíme zjistit $n_2(8)$. Tedy

$$\begin{aligned} n(7:00) = n_2(8) &= 5,757 e^{-k\cdot 8} \\ n_2(8) &= 5,757 e^{-0,346\cdot 8} \\ n_2(8) &\doteq 0,362. \end{aligned}$$

Dále nás zajímalo, jak se obsah nikotinu změní, když ve 3 hodiny ráno kuřák vykouří cigaretu. V takovém případě musíme skloubit jak řešení dvě řešení homogenní úlohy (3.4) přerušené ve 3:00 dodanou dávkou nikotinu z jedné cigarety.
V prvních 4 hodinách kuřák spí od 23:00 hodin do 3:00 hodin (stejně jako v první části úlohy), použijeme tedy řešení $n_2(t)$. Zajímá nás hodnota ve tři hodiny ráno, tedy $n_2(4)$

$$\begin{aligned} n(3:00) = n_2(4) &= 5,757 e^{-k\cdot 4} \\ n_2(4) &= 5,757 e^{-0,346\cdot 4} \\ n_2(4) &\doteq 1,443 \end{aligned}$$

Ve tři hodiny ráno se kuřák probudí a dá si jednu cigaretu, o kterou se mu zvýší počáteční podmínka pro další 4 hodiny spánku. Má tedy v sobě

$$n_3(0) = n_2(4) + 0,4 = 1,443 + 0,4 = 1,843 \tag{3.7}$$

mg nikotinu, kde číslo $0,4$ je množství nikotinu z jedné cigarety. Od této doby do probuzení chybí 4 hodiny, během kterých nekouří a proto budeme počítat s obecným řešením homogenní úlohy (3.4)

$$n_3(t) = c_3 e^{-kt}.$$

Konstantu c_3 dopočítáme z počáteční podmínky (3.7)

$$\begin{aligned} c_3 e^{-kt} &= 1,843 \\ c_3 e^{0} &= 1,843 \\ c_3 &= 1,843. \end{aligned}$$

Díky tomu můžeme určit obsah nikotinu po dalších čtyřech hodinách spánku.

$$\begin{aligned} n(7:00) = n_3(4) &= 1,843e^{-0,346\cdot 4} \\ n_3(4) &= 1,843e^{-1,384} \\ n_3(4) &\doteq 0,462. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že v 7 hodin ráno není v těle kuřáka žádný nikotin, potom při pravidelných dávkách (každou hodinu 5 cigaret) bude v 11 hodin večer v jeho těle asi 5,757 mg nikotinu. Během osmi hodin spánku se hladina nikotinu sníží na 0,362 mg. A v případě, že se během spánku kuřák ve 3 hodiny ráno probudí a vykouří jednu cigaretu, bude v jeho těle v 7 hodin ráno následujícího dne 0,462 mg nikotinu. △

Příklad 3.8 *Pesticidy se z lidského těla odbourávají rychlostí 3% za den. Předpokládejme, že sledovaná osoba se dostala do prostředí, kde konzumuje 10 mg pesticidů denně.*
Kolik pesticidů bude mít v organismu po 1 měsíci, po 1 roce?
K jaké hodnotě bude obsah pesticidů v organismu konvergovat při trvalém pobytu v tomto prostředí?

Řešení:

Označme množství pesticidů v těle v čase t jako $p = p(t)$. Protože se pesticidy odbourávají rychlostí 3% za den, můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \text{přírůstek} - \text{úbytek} \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 10 - 0,03p \\
p' &= 10 - 0,03p \\
p' + 0,03p &= 10.
\end{aligned}
$$

Jelikož se jedná o nehomogenní rovnici, vyřešíme nejprve úlohu homogenní

$$
\begin{aligned}
p' + 0,03p &= 0 \\
p' &= -0,03p \\
p_H(t) &= c_1 e^{-0,03t}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.
Víme, že řešení nehomogenní úlohy hledáme ve tvaru $p(t) = p_H(t) + p_P(t)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice $p_P(t)$ budeme hledat vzhledem ke konstantní pravé straně též konstantní a to pomocí metody neurčitých koeficientů. Zvolme tedy $p_P = A$ a máme $p'_P = 0$,

$$
\begin{aligned}
0 + 0,03A &= 10 \\
0,03A &= 10 \\
A &= \frac{1000}{3}.
\end{aligned}
$$

Tím dostáváme obecné řešení rovnice ve tvaru

$$
p(t) = c_1 e^{-0,03t} + \frac{1000}{3}, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $p(0) = 10$. Díky ní vyjádříme konstantu c_1

$$\begin{aligned} 10 &= c_1 e^0 + \frac{1000}{3} \\ 10 - \frac{1000}{3} &= c_1 \\ c_1 &= -\frac{970}{3}. \end{aligned}$$

Díky tomu dostáváme konkrétní řešení nehomogenní rovnice

$$p(t) = -\frac{970}{3} e^{-0{,}03t} + \frac{1000}{3}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dále nás zajímá, kolik pesticidů bude mít v těle člověk po 1 měsíci a po 1 roce. V případě jednoho měsíce řešíme úlohu

$$\begin{aligned} p(30) &= x \\ x &= -\frac{970}{3} e^{-0{,}03 \cdot 30} + \frac{1000}{3} \\ x &= -\frac{970}{3} e^{-0{,}9} + \frac{1000}{3} \\ x &\doteq 202. \end{aligned}$$

V případě jednoho roku řešíme úlohu

$$\begin{aligned} p(365) &= y \\ y &= -\frac{970}{3} e^{-0{,}03 \cdot 365} + \frac{1000}{3} \\ y &= -\frac{970}{3} e^{-10{,}95} + \frac{1000}{3} \\ y &\doteq 333. \end{aligned}$$

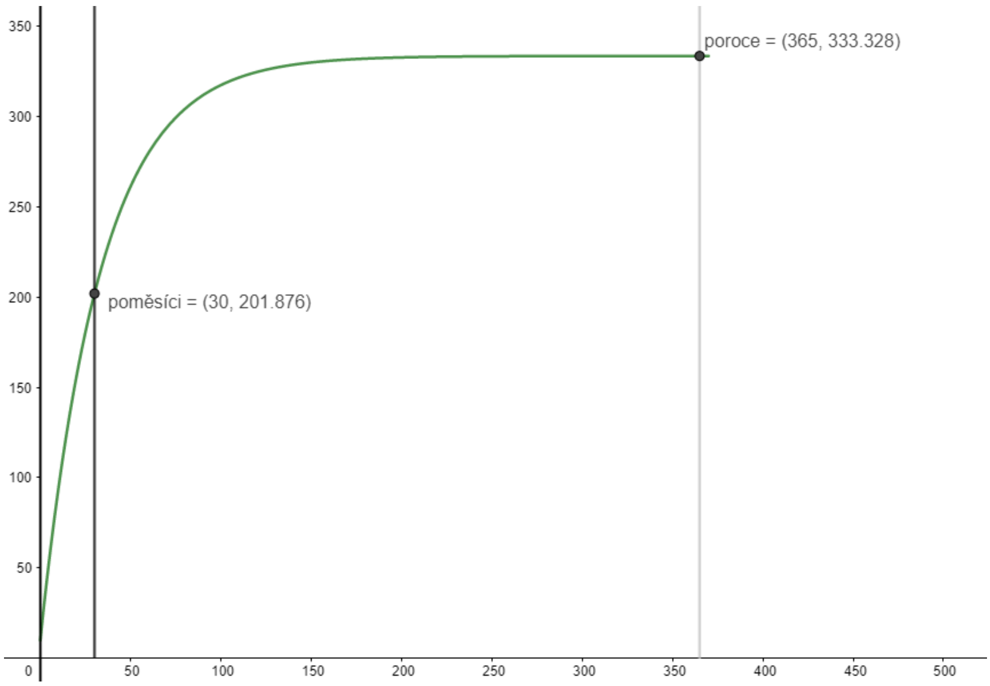
Zajímá-li nás, k jaké hodnotě bude obsah pecticidů konvergovat při trvalém pobytu v tomto prostředí, musíme vypočítat limitu

$$\lim_{t \to \infty} \left(-\frac{970}{3} e^{-0{,}03t} + \frac{1000}{3} \right).$$

Protože první člen má limitu díky exponenciále nulovou, výsledná hodnota limity je tedy

$$0 + \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \doteq 333.$$

Po jednom měsíci bude organismus obsahovat asi 202 mg pesticidů, po jednom roce asi 333 mg pesticidů. Zůstane-li organismus v takovém prostředí trvale, hodnota pesticidů bude konvergovat k 333 mg. $\triangle$



Obrázek 3.7: Řešení pro množství pesticidů po měsíci a po roce

Příklad 3.9 *V přírodním parku na každý cm^2 za rok spadnou 3 gramy listí. Díky procesu tlení se každoročně 75 % listové hmoty rozloží. Předpokládejme, že park je čistě shrabán, ale bylo rozhodnuto, že se v něm již listí hrabat nebude.*
Jak bude park vypadat za 2 roky, za 5 let, za 10 let?
K jaké hodnotě bude množství listí konvergovat s rostoucím časem?
Předpokládejme, že do parku bylo navezeno listí z města a rovnoměrně rozprostřeno v množství 10 gramů na cm^2.
Jak bude park vypadat za 1 rok, 2 roky, 5 let, 10 let? Jaké bude limitní množství listí v tomto případě?

Řešení:

Označme hmotnost listí v čase t jako $m = m(t)$. Víme, že se každoročně rozloží 75% listí. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \text{přírůstek} - \text{úbytek} \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= 3 - 0,75m \\ m' &= 3 - 0,75m. \end{aligned}$$

Jelikož se jedná o nehomogenní rovnici, vyřešíme nejprve úlohu homogenní

$$\begin{aligned} m' + 0,75m &= 0 \\ m' &= -0,75m \\ m_H(t) &= c_1 e^{-0,75t}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Víme, že řešení nehomogenní úlohy hledáme ve tvaru
$m(t) = m_H(t) + m_P(t)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice $m_P(t)$ budeme hledat konstantní pomocí metody neurčitých koeficientů, tedy pro $m_P = A$ máme $m'_P = 0$,

$$\begin{aligned} 0 + 0,75m &= 3 \\ 0,75A &= 3 \\ A &= \frac{3}{\frac{3}{4}} \\ A &= 4. \end{aligned}$$

Tím dostáváme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$m(t) = c_1 e^{-0,75t} + 4.$$

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $m(0) = 3$. Díky ní vyjádříme konstantu c_1.

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 + 4 \\ c_1 &= -1. \end{aligned}$$

Díky tomu dostáváme konkrétní řešení rovnice

$$m(t) = -e^{-0{,}75t} + 4.$$

Dále nás zajímá, kolik listí bude v parku za 2 roky, 5 let a 10 let. Nesmíme zapomenout, že listí začalo tlít až po prvním roce. Takže počet let musíme o jeden rok zmenšit. V případě dvou let řešíme úlohu

$$\begin{aligned} m(1) &= x \\ x &= -e^{-0{,}75\cdot 1} + 4 \\ x &= -e^{-0{,}75} + 4 \\ x &\doteq 3{,}53. \end{aligned}$$

V případě pěti let řešíme úlohu

$$\begin{aligned} m(4) &= x \\ x &= -e^{-0{,}75\cdot 4} + 4 \\ x &= -e^{-3} + 4 \\ x &\doteq 3{,}95. \end{aligned}$$

V případě deseti let řešíme úlohu

$$\begin{aligned} m(9) &= x \\ x &= -e^{-0{,}75\cdot 9} + 4 \\ x &= -e^{-6{,}75} + 4 \\ x &\doteq 4. \end{aligned}$$

Zajímá-li nás, k jaké hodnotě bude množství listí konvergovat s rostoucím časem, musíme vypočítat limitu

$$\lim_{t\to\infty} \left(-e^{-0{,}75t} + 4\right).$$

Protože první člen má limitu díky exponenciále nulovou, výsledná hodnota limity je tedy
$$0 + \lim_{t\to\infty} (4) = 4.$$

Za dva roky bude v parku asi 3,53 gramů listí na cm^2. Za pět let bude v parku asi 3,95 gramů listí na cm^2. Za deset let budou v parku asi 4 gramy listí na cm^2. S roustocím časem bude množství listí v parku konvergovat k hodnotě 4 gramy listí na cm^2. $\triangle$

Změní-li se úloha tak, že do parku bylo listí přivezeno a rovnoměrně rozprostřeno v množství 10 gramů na cm^2, změní se i hodnoty pro údaje v 1 roce, 2 letech, 5 letech, i 10 letech. Díky výše uvedenému se změní i konstanta c_1, protože $m(0) = 10$.

$$\begin{aligned} 10 &= c_2 + 4 \\ c_2 &= 6. \end{aligned}$$

A konkrétní řešení je potom
$$m(t) = 6e^{-0{,}75t} + 4.$$

V případě jednoho roku řešíme úlohu
$$\begin{aligned} m(1) &= x \\ x &= 6e^{-0{,}75\cdot 1} + 4 \\ x &= 6e^{-0{,}75} + 4 \\ x &\doteq 6,83. \end{aligned}$$

V případě dvou let řešíme úlohu
$$\begin{aligned} m(2) &= x \\ x &= 6e^{-0{,}75\cdot 2} + 4 \\ x &= 6e^{-1{,}5} + 4 \\ x &\doteq 5,34. \end{aligned}$$

V případě pěti let řešíme úlohu

$$
\begin{aligned}
m(5) &= x \\
x &= 6e^{-0,75\cdot 5} + 4 \\
x &= 6e^{-3,75} + 4 \\
x &\doteq 4,14.
\end{aligned}
$$

V případě deseti let řešíme úlohu

$$
\begin{aligned}
m(10) &= x \\
x &= 6e^{-0,75\cdot 10} + 4 \\
x &= 6e^{-7,5} + 4 \\
x &\doteq 4.
\end{aligned}
$$

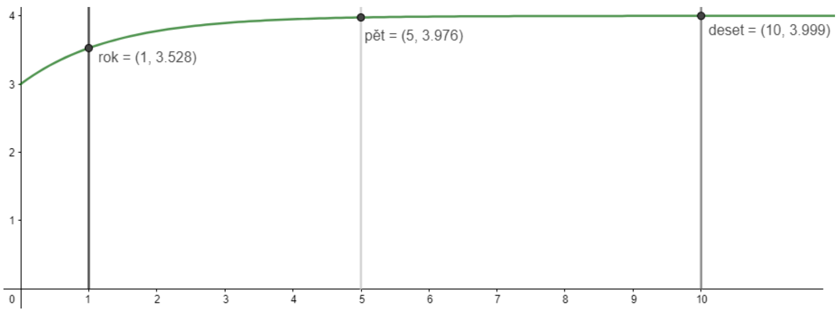
Zajímá-li nás, k jaké hodnotě bude množství listí konvergovat s rostoucím časem, musíme vypočítat limitu

$$\lim_{t\to\infty} \left(6e^{-0,75t} + 4\right).$$

Protože první člen má limitu díky exponenciále nulovou, výsledná hodnota limity je tedy

$$0 + \lim_{t\to\infty} (4) = 4.$$

Po jednom roce bude v parku asi 6,83 gramů listí na cm^2. Za dva roky bude v parku asi 5,34 gramů listí na cm^2. Za pět let bude v parku asi 4,14 gramů listí na cm^2. Za deset let budou v parku asi 4 gramy listí na cm^2. S roustocím časem bude množství listí v parku konvergovat k hodnotě 4 gramy listí na cm^2. $\triangle$



Obrázek 3.8: Řešení pro množství listí po 1, 5, 10 letech

Příklad 3.10 *Von Bertalanffyův model růstu se používá na předpovídání délky těla živočichů v závislosti na čase. Pokud L je maximální délka konkrétního živočišného druhu, tak model předpokládá, že rychlost růstu jedince tohoto druhu je přímo úměrná délce, která mu v daném okamžiku chybí do délky L.*
Pro tresku třívousou platí model od délky 10 cm. Maximální délka tohoto druhu je 53 cm, koeficient výše uvedené přímé úměrnosti je 0,2 (při měření času v letech).
Za jak dlouho se velikost tresky zdvojnásobí?
Jak je treska dlouhá po 3 letech, po 5 letech?
Kdy dosáhne délky 50 cm?

Řešení:

Označme maximální délku živočišného druhu jako L_M a aktuální délku v čase t jako $L = L(t)$. Víme, že rychlost růstu jedince je přímo úměrná délce, která v okamžiku chybí do maximální délky L_M. Můžeme tedy psát

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k(L_M - L)$$

pro $k = 0,2$. Řešením této rovnice postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{L'}{L_M - L} &= k \\
\int \frac{\mathrm{d}L}{L_M - L} &= \int k\,\mathrm{d}t,\ L < L_M \\
-\ln(L_M - L) &= e^{kt+c} \\
L_M - L &= c_1 e^{-kt}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice má tedy tvar

$$L(t) = L_M - c_1 e^{-kt}, \quad t \geq 0$$

Díky počáteční podmínce $L(0) = 10$ a znalosti maximální délky tresky můžeme dopočítat konstantu c_1.

$$\begin{aligned}
10 &= L_M - c_1 e^{-kt} \\
10 &= 53 - c_1 e^{0} \\
10 &= 53 - c_1 \\
c_1 &= 43
\end{aligned}$$

Tím dostáváme konkrétní řešení rovnice

$$L(t) = 53 - 43e^{-0,2t}, \quad t \geq 0.$$

Dále nás zajímá, kdy se velikost tresky zdvojnásobí, musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned}
L(t_2) &= 20 \\
20 &= 53 - 43e^{-0,2t_2} \\
33 &= 43e^{-0,2t_2} \\
\frac{43}{33} &= e^{0,2t_2} \\
\ln \frac{43}{33} &= 0,2t_2 \\
t_2 &= \frac{\ln \frac{43}{33}}{0,2} \\
t_2 &\doteq 1,32.
\end{aligned}$$

Další otázkou bylo, jak je treska dlouhá po 3 a po 5 letech.
V případě tří let řešíme rovnici

$$\begin{aligned}
L(3) &= x \\
x &= 53 - 43e^{-3 \cdot 0,2} \\
x &= 53 - 43e^{-0,6} \\
x &= 53 - 24 \\
x &= 29.
\end{aligned}$$

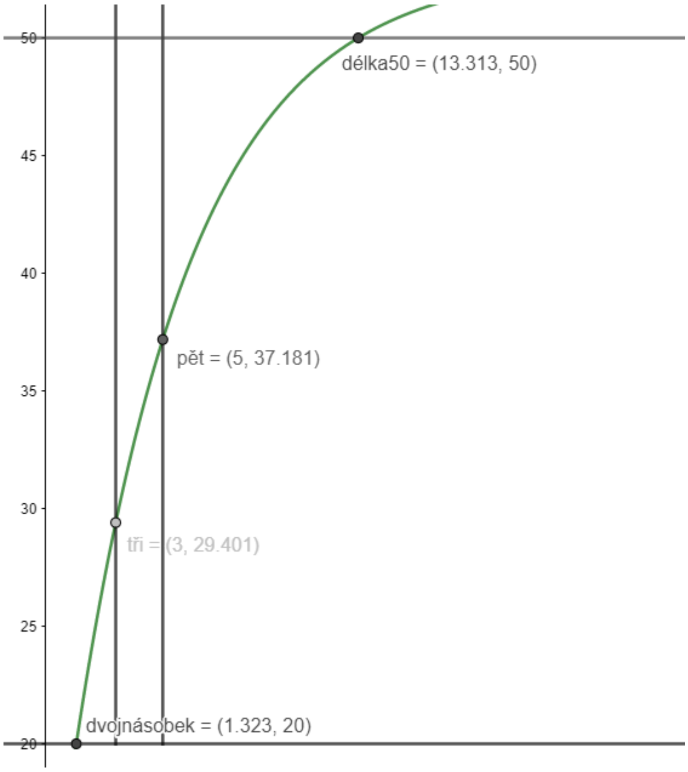
V případě pěti let řešíme rovnici

$$
\begin{aligned}
L(5) &= y\\
y &= 53 - 43e^{-5\cdot 0,2}\\
y &= 53 - 43e^{-1}\\
y &= 53 - 16\\
y &= 37.
\end{aligned}
$$

Další otázkou bylo, kdy treska dosáhne délky 50 cm. Musíme tedy vyřešit rovnici

$$
\begin{aligned}
L(t_{50}) &= 50\\
53 - 43e^{-0,2\cdot t_{50}} &= 50\\
3 &= 43e^{-0,2\cdot t_{50}}\\
\frac{3}{43} &= e^{-0,2\cdot t_{50}}\\
\frac{\ln\frac{43}{3}}{0,2} &= t_{50}\\
5\ln\frac{43}{3} &= t_{50}\\
t_{50} &\doteq 13,3.
\end{aligned}
$$

Velikost tresky se zdvojnásobí asi po 1,32 letech. Po třech letech bude treska dlouhá 29 cm a po pěti letech bude dlouhá 37 cm. Délky 50 cm dosáhne asi za 13,3 let. $\triangle$



Obrázek 3.9: Řešení pro dvojnásobnou velikost, pro velikost po 3, 5 letech, pro délku 50 cm

Příklad 3.11 *Tělo oběti vraždy bylo nalezeno v poledne v místnosti s konstantní teplotou 18 °C. Teplota nalezeného těla byla 33 °C. O dvě hodiny později mělo tělo teplotu 31 °C. Předpokládejme, že teplota těla klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty těla a teploty místnosti.*
Kdy došlo k vraždě?
Kdy došlo k vraždě, jestliže zavražděný měl horečku (38 °C nebo dokonce 39 °C)?

Řešení:

Označme si aktuální teplotu těla jako $T = T(t)$ a teplotu místnosti jako $T_M = 18$. Dobu nálezu těla ve 12:00 zvolme $t = 0$ a teplotu těla v době nálezu označme $T_0 = 33$. Protože změna teploty je přímo úměrná rozdílu teploty těla a místnosti (s konstantou úměrnosti $k > 0$), můžeme psát diferenciální rovnici pro teplotu těla

$$T' = k(T_M - T).$$

Jejím řešením postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{T'}{T_M - T} &= k \\
\int \frac{T'}{T_M - T}\,\mathrm{d}t &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}T}{T_M - T}\,\mathrm{d}t &= kt + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
-\ln|T_M - T| &= kt + c \\
\ln|T_M - T| &= -kt + c \\
T_M - T &= \pm c_1 e^{-kt}, \quad c_1 \neq 0 \\
T_M - T &= c_2 e^{-kt}, \quad c_2 > 0 \text{ pro } T > T_M \\
T &= T_M + c_2 e^{-kt}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$T(t) = T_M + c_2 e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Díky počáteční podmínce $T(0) = 33$ můžeme dopočítat konstantu c_2.

$$\begin{aligned}
T &= T_M + c_2 e^{-kt} \\
33 &= 18 + c_2 e^0 \\
33 - 18 &= c_2 \\
c_2 &= 15.
\end{aligned}$$

Další počáteční podmínka $T(2) = 31$ nám umožní dopočítat konstantu k.

$$\begin{aligned}
T &= T_M + c_2 e^{-kt} \\
31 &= 18 + 15e^{-2k} \\
13 &= 15e^{-2k} \\
\frac{13}{15} &= e^{-2k} \\
-2k &= \ln\frac{13}{15} \\
2k &= \ln\frac{15}{13} \\
k &= \ln\sqrt{\frac{15}{13}} \\
k &\doteq 0,07.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy konkrétní řešení rovnice

$$T(t) = T_M + 15e^{-0{,}07t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Pokud chceme vědět, kdy došlo k vraždě, musíme zjistit, kdy (v jakém čase) teplota daná funkcí (3.8) nabývala teploty živého lidského těla. Tu budeme uvažovat postupně pro zdravého člověka $T_A = 36,6°\mathrm{C}$, pro člověka s horečkou $T_B = 38°\mathrm{C}$ a $T_C = 39°\mathrm{C}$. Řešíme tedy rovnici

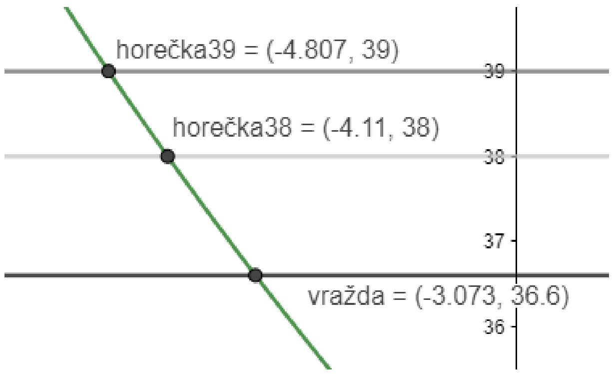
$$\begin{aligned} T_M + 15e^{-0{,}07t_A} &= T_A \\ 15e^{-0{,}07t_A} &= T_A - T_M \\ e^{-0{,}07t_A} &= \frac{T_A - T_M}{15} \\ -0,07t_A &= \ln \frac{T_A - T_M}{15} \\ t_A &= -\frac{100}{7} \ln \frac{T_A - T_M}{15} \\ t_A &\doteq 3.073\,\mathrm{h} \doteq 3\mathrm{h}\,4\mathrm{min}. \end{aligned}$$

Obdobně bychom dostali časy

$$t_B = -\frac{100}{7} \ln \frac{T_B - T_M}{15} \doteq 4.11\,\mathrm{h} \doteq 4\mathrm{h}\,6,6\mathrm{min}.$$

$$t_C = -\frac{100}{7} \ln \frac{T_C - T_M}{15}. \doteq 4.8\,\mathrm{h} \doteq 4\mathrm{h}\,48,4\mathrm{min}.$$

Vzhledem k počáteční době 12:00 nám vychází doby vražd v 8:56 u zdravého jedince, v 7:54 u člověka s horečkou 38°C a v 7:12 u člověka s horečkou 39°C. △



Obrázek 3.10: Řešení pro doby vražd při různých teplotách

Příklad 3.12 *V 5 hodin odpoledne vyndala maminka koláč z trouby, měl teplotu 100 °C. V 5:10 hodin byla teplota koláče 80 °C, v 5:20 hodin měl koláč teplotu 65 °C. Předpokládejme, že teplota koláče klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty koláče a teploty místnosti.*
Jaká je teplota místnosti?

Řešení:

Označme teplotu koláče v čase t jako $T = T(t)$ a teplotu místnosti jako T_M. Víme, že teplota koláče klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty koláče a teploty místnosti, konstantu úměrnosti označíme $k > 0$. Můžeme tedy psát

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_M)$$

$$\begin{aligned}
\frac{T'}{T - T_M} &= -k \\
\int \frac{T'}{T - T_M}\,\mathrm{d}t &= -\int k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_M} &= -kt + c\ ,\ T - T_M > 0 \\
T - T_M &= c_1 e^{-kt},
\end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.
Obecné řešení rovnice má tvar

$$T(t) = c_1 e^{-kt} + T_M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ze zadání nám plynou tři počáteční podmínky (časy uvažujeme v minutách)

$$T(0) = 100, \quad T(10) = 80, \quad T(20) = 65.$$

Díky nim dostáváme nelineární soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned}
c_1 e^{-0k} + T_M &= 100 \\
c_1 e^{-10k} + T_M &= 80 \\
c_1 e^{-20k} + T_M &= 65.
\end{aligned}$$

Pro zjednodušení použijeme substituci $E_K = e^{-10k}$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
c_1 + T_M &= 100 \\
c_1 E_K + T_M &= 80 \\
c_1 E_K^2 + T_M &= 65.
\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme T_M a dosadíme do zbylých dvou

$$T_M = 100 - c_1 \tag{3.9}$$
$$c_1 E_K + 100 - c_1 = 80 \tag{3.10}$$
$$c_1 E_K^2 + 100 - c_1 = 65. \tag{3.11}$$

Z rovnic (3.10), (3.11) vytkneme c_1.

$$c_1(E_K - 1) = -20 \tag{3.12}$$
$$c_1(E_K^2 - 1) = -35. \tag{3.13}$$

Rovnici (3.13) můžeme rozložit na součin

$$c_1(E_K - 1)(E_K + 1) = -35$$

a je vidět, že jeho první dva členy jsou stejné jako levá strana rovnice (3.12), můžeme tedy psát

$$-20(E_K + 1) = -35.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\begin{aligned} E_K + 1 &= \frac{-35}{-20} \\ E_K &= \frac{35}{20} - \frac{20}{20} \\ E_K &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vraťme se zpět k substituci $E_K = e^{-10k}$ a vypočítejme pro úplnost hodnotu k

$$\begin{aligned} e^{-10k} &= \frac{3}{4} \\ -10k &= \ln\frac{3}{4} \\ k &= -\frac{1}{10}\ln\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Díky rovnici (3.12) můžeme vypočítat konstantu c_1

$$\begin{aligned} c_1(E_K - 1) &= -20 \\ c_1 &= \frac{-20}{E_K - 1} \\ c_1 &= \frac{20}{1 - E_K} \\ c_1 &= \frac{20}{0,25} \\ c_1 &= 80. \end{aligned}$$

Pomocí rovnice (3.9) lze dopočítat teplotu místnosti

$$\begin{aligned} T_M &= 100 - c_1 \\ T_M &= 20. \end{aligned}$$

Teplota místnosti je 20 $°C$. $\triangle$

Příklad 3.13 *Ve velké nádrži je 500 galonů 4% piva. Rychlostí 5 galonů za minutu se do nádrže přidává 6% pivo. Piva se v nádrži důkladně rozmíchají a vzniklá směs se stejnou rychlostí vypouští ven.*
Jak silné pivo bude v nádrži po 1 hodině, po 2 hodinách?
K jakému pivu bude situace konvergovat s rostoucím časem?

Řešení:

Označme si množství piva v nádrži v čase t jako $p = p(t)$. Ze zadání víme, že momentální koncentrace piva v nádrži je $K(t) = \dfrac{p(t)}{500}$. Přítok je roven $0,06 \cdot 5 = 0,3$ galonů za minutu. Odtok je potom roven $\dfrac{p(t) \cdot 5}{500}$.
Změnu množství piva v nádrži můžeme napsat jako

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \text{přítok} - \text{odtok} \\
p' &= 0,3 - \frac{p(t) \cdot 5}{500} \\
p' &= 0,3 - \frac{p(t)}{100} \\
p' &= \frac{30 - p(t)}{100}.
\end{aligned}$$

Řešením postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{p'}{30 - p(t)} &= \frac{1}{100} \\
\int \frac{p'}{30 - p(t)} \,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{100} \,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{30 - p(t)} \,\mathrm{d}p &= \frac{1}{100} t + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
-\ln|30 - p| &= \frac{t}{100} + c \\
\ln|30 - p| &= -\frac{t}{100} + c \\
|30 - p| &= e^{\frac{-t}{100}} \cdot c_1, \text{ pro } c_1 > 0, p \in (0, 30) \\
30 - p &= c_1 e^{-\frac{t}{100}} \\
p &= 30 - c_1 e^{-\frac{t}{100}}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice má tvar

$$p(t) = 30 - c_1 e^{\left(\dfrac{-t}{100}\right)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je libovolná kostanta.
Díky počáteční podmínce $p(0) = 20$ můžeme dopočítat konstantu c_1

$$\begin{aligned} 30 - c_1 e^0 &= 20 \\ 30 - c_1 &= 20 \\ c_1 &= 10. \end{aligned}$$

Tím dostáváme konkrétní řešení rovnice

$$p(t) = 30 - 10e^{\left(\dfrac{-t}{100}\right)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zajímá nás, jak silné pivo bude v nádrži po jedné hodině a po dvou hodinách.
V případě jedné hodiny řešíme rovnici

$$\begin{aligned} p(60) &= x \\ x &= 30 - 10e^{\frac{-60}{100}} \\ x &= 30 - 10e^{-0,6} \\ x &\doteq 24,5. \end{aligned}$$

V případě dvou hodin řešíme rovnici

$$\begin{aligned} p(120) &= y \\ y &= 30 - 10e^{\frac{-120}{100}} \\ y &= 30 - 10e^{-1,2} \\ y &\doteq 27. \end{aligned}$$

Víme, že momentální koncetraci piva vypočítáme jako $K(t) = \frac{p(t)}{500}$. Proto v případě jedné hodiny bude koncentrace piva $K_1 = \frac{24,5}{500} = 0,049$ a v případě dvou hodin bude koncentrace piva $K_2 = \frac{27}{500} = 0,054$.

Zajímá-li nás, k jakému pivu bude situace konvergovat s rostoucím časem, musíme vypočítat limitu

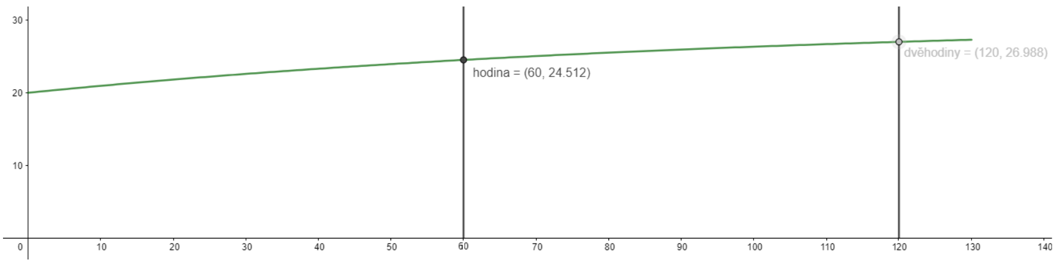
$$\lim_{t\to\infty}\left(30 - 10e^{\frac{-t}{100}}\right).$$

Protože druhý člen má limitu díky exponenciále nulovou, výsledná hodnota limity je tedy

$$\lim_{t\to\infty}(30) - 0 = 30.$$

Pro aktuální koncentraci piva bude tedy platit $K_3 = \frac{30}{500} = 0,06$.

Po jedné hodině bude v nádrži asi 4,9% pivo, po dvou hodinách bude v nádrži asi 5,4% pivo. S rostoucím časem bude síla piva v nádrži konvergovat k hodnotě 6 %. △



Obrázek 3.11: Řešení pro situaci po 1 a po 2 hodinách

Příklad 3.14 *V nejmenovaném státě mají v oběhu bankovky v celkové hodnotě 10 miliard korun. Každý den proteče bankami 50 miliónů korun. Centrální banka začala vydávat novou emisi bankovek a banky každý den vymění všechny své staré bankovky za nové. Občané si sami bankovky měnit nechodí. Za jak dlouho bude vyměněno 50 % bankovek a za jak dlouho bude vyměněno 90 % bankovek?*

Řešení:

Označme staré bankovky jako S a nové bankovky jako N. Víme, že banky každý den vymění všechny staré bankovky za nové, tedy můžeme psát, že rychlost výměny v je $v = 50000000$ a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= v \\ N' &= v \\ \int N' \,\mathrm{d}t &= \int v \,\mathrm{d}t \\ N &= vt + c. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice má tvar

$$N(t) = vt + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Díky počáteční podmínce $N(0) = 0$ vyjádříme konstantu c.

$$\begin{aligned} v \cdot 0 + c &= 0 \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

$$N(t) = 5 \cdot 10^7 \cdot t.$$

Zajímá nás, za jak dlouho bude vyměněno 50 % bankovek a za jak dlouho bude vyměněno 90 % bankovek.
V případě 50 % bankovek dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} vt_{50} &= 0,5 \cdot 10^{10} \\ 5 \cdot 10^7 \cdot t_{50} &= 5 \cdot 10^9 \\ t_{50} &= 10^2 \\ t_{50} &= 100. \end{aligned}$$

V případě 90 % bankovek dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} vt_{90} &= 0,9 \cdot 10^{10} \\ 5 \cdot 10^7 \cdot t_{90} &= 9 \cdot 10^9 \\ 5 \cdot t_{90} &= 9 \cdot 10^2 \\ t_{90} &= 180. \end{aligned}$$

50 % bankovek bude vyměněno za 100 dní a 90 % bankovek bude vyměněno za 180 dní. $\triangle$

Příklad 3.15 *Oxid uhelnatý (CO) je nebezpečný, překročí-li jeho koncentrace limit 0,12 litrů na m^3 vzduchu. V podzemní garáži o objemu 10 000 m^3 je obsaženo 1 800 litrů CO. V garáži je větrací systém, který do ní přivádí 10 m^3 čistého vzduchu za sekundu, promíchává čistý vzduch se znečištěným a vzniklou směs odvádí stejnou rychlostí z garáže pryč.*
Za jak dlouho bude v garáži podlimitní obsah CO?
Jak by se tato doba prodloužila, kdyby větrací systém měl poloviční kapacitu?

Řešení:

Označme si kritickou míru koncetrace oxidu uhelnatého jako c_c, objem garáže jako V_g. Množství oxidu uhlenatého jako $m(0)$ pro množství na začátku, m_{in} pro množství, které přichází, m_{out} pro množství, které odchází. Dále rychlost dovnitř označme jako v_{in} a rychlost ven v_{out}. Můžeme tedy psát

$$m' = m_{in} - m_{out},$$

a pokud do garáže žádný CO nevniká ani v ní nevzniká, máme

$$m' = -m_{out}.$$

Chceme-li vyjádřit, jaké množstvé CO jde z garáže ven, platí

$$m_{out} = \frac{m}{V_g} \cdot v_{out}.$$

Změnu množství CO v garáži tedy můžeme popsat rovnicí

$$m' = -\frac{m}{V_g} \cdot v_{out}$$
$$m' = -\frac{v_{out}}{V_g} \cdot m.$$

Označme $k := \dfrac{v_{out}}{V_g}$ a dostaneme rovnici

$$m' = -k \cdot m.$$

Jejím řešením postupně dostáváme

$$\frac{m'}{m} = -k$$
$$\int \frac{m'}{m}\, \mathrm{d}t = \int -k\, \mathrm{d}t$$
$$\int \frac{\mathrm{d}m}{m}\, \mathrm{d}t = -k + c, \text{ pro } m > 0$$
$$\ln m = -kt + c$$
$$m = c_1 e^{-kt}.$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$m(t) = c_1 e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ pro } k = \frac{v_{out}}{V_g},$$

c_1 je libovolná konstanta.
Díky počáteční podmínce $m(0) = 1800$ vyjádříme konstantu c_1.

$$\begin{aligned} c_1 e^0 &= 1800 \\ c_1 &= 1800. \end{aligned}$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

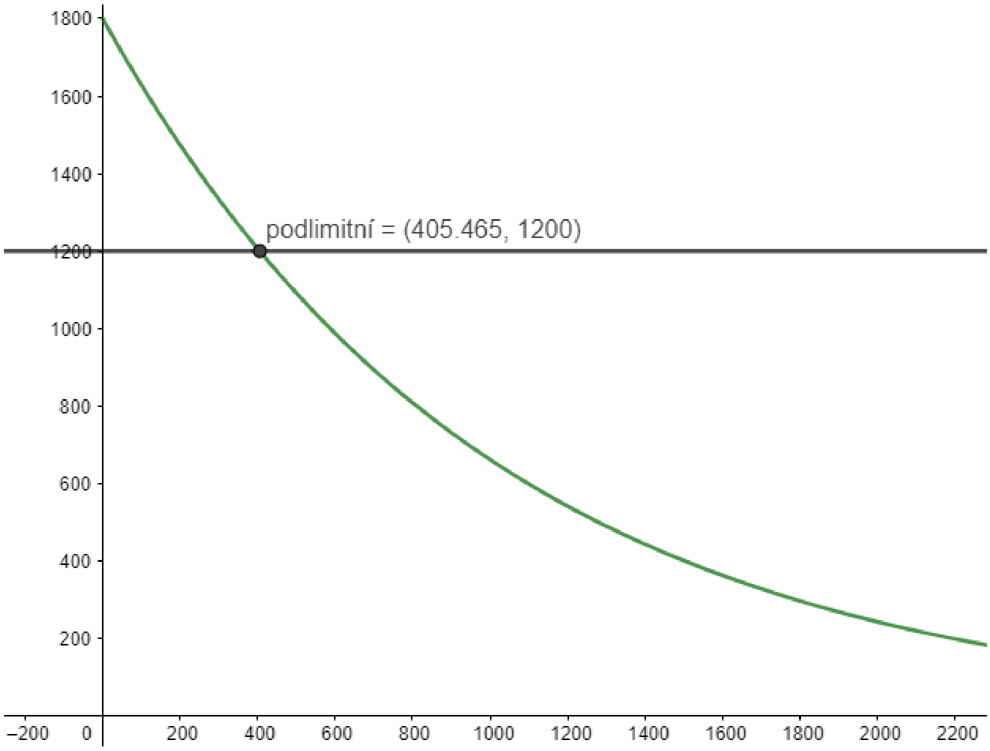
$$m(t) = 1800 e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ pro } k = \frac{v_{out}}{V_g}.$$

Zajímá nás, za jak dlouho bude v garáži podlimitní obsah CO. Potřebujeme tedy vypočítat nerovnici

$$\begin{aligned} \frac{m(t)}{V_g} &\leqq c_c \\ m(t) &\leqq c_c \cdot V_g \\ m(t) &\leqq 0,12 \cdot 10000 \\ m(t) &\leqq 1200 \\ 1800 e^{-kt} &\leqq 1200 \\ e^{-kt} &\leqq \frac{12}{18} \\ e^{-kt} &\leqq \frac{2}{3} \\ -kt &\leqq \ln \frac{2}{3} \\ t &\geqq \frac{1}{-k} \cdot \ln \frac{2}{3} \\ t &\geqq \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{3}{2} \\ t &\geqq \frac{10000}{v_{out}} \cdot \ln \frac{3}{2} \\ t &\geqq \frac{10000}{10} \cdot \ln \frac{3}{2} \\ t &\geqq 1000 \cdot \ln \frac{3}{2} \\ t &\geqq 405. \end{aligned}$$

Další otázkou bylo, jak by se tato doba prodloužila, kdyby systém měl poloviční kapacitu. Díky poloviční kapacitě bude mít systém poloviční rychlost a z toho vyplývá, že čas bude dvakrát tak větší.

Podlimitní obsah CO bude v garáži za 405 sekund (6, 75 minuty). V případě poloviční kapacity systému se tato doba zvětší na 810 sekund (13,5 minuty). △



Obrázek 3.12: Řešení pro podlimitní množství CO

Příklad 3.16 *Rybáři nasadili do jezera 400 ryb, přičemž předpokládají, že kapacita jezera je 10 000 ryb. Po roce se počet ryb v jezeře ztrojnásobil. Za jak dlouho bude v jezeře 5 000 ryb?*

Řešení:

Označme si počet ryb v čase t jako $p = p(t)$, nosnou kapacitu prostředí jako K a rychlost růstu jako r. Můžeme tedy psát

$$p' = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right)$$

$$\frac{p'}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)} = r$$

$$\int \frac{p'}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)}\,\mathrm{d}t = \int r\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)} = rt + c. \tag{3.14}$$

Integrál vlevo označme jako I

$$I = \int \frac{1}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)}\,\mathrm{d}p = \int \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{1 - \frac{p}{K}}\right)\mathrm{d}p$$

a budeme ho řešit pomocí parciálních zlomků

$$1 = A\left(1 - \frac{p}{K}\right) + Bp$$

Pro $p = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot 1 + 0 \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Pro $p = K$ máme

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot 0 + B \cdot K \\ B &= \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Integrál I tedy vyjádříme jako

$$\int \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{1-\frac{p}{K}} \,\mathrm{d}p \right) = \int \frac{1}{p} \,\mathrm{d}p + \int \frac{1}{K\left(1-\frac{p}{K}\right)} \,\mathrm{d}p = \int \frac{1}{p} \,\mathrm{d}p + \int \frac{1}{K-p} \,\mathrm{d}p =$$

$$= \ln|p| - \ln|K-p| = \ln\left|\frac{p}{K-p}\right|.$$

Nyní se vraťmě k rovnici (3.14)

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{p}{K-p}\right| &= rt + c, \text{ pro } p \in (0, K) \\
\frac{p}{K-p} &= c_1 e^{rt} \\
p &= c_1 e^{rt}(K-p) \\
0 &= c_1 e^{rt} K - c_1 e^{rt} p - p \\
0 &= c_1 e^{rt} K - p(c_1 e^{rt} + 1) \\
-c_1 e^{rt} K &= -p(c_1 e^{rt} + 1) \\
\frac{c_1 e^{rt} K}{c_1 e^{rt} + 1} &= p \\
\frac{K}{c_2 e^{-rt} + 1} &= p.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$p(t) = \frac{K}{c_2 e^{-rt} + 1}.$$

Díky počáteční podmínce $p(0) = 400 =: p_0$ vyjádříme konstantu c_1

$$\frac{K}{(c_1 e^{-rt} + 1)} = 400$$

$$\frac{K}{(c_1 e^{0} + 1)} = 400$$

$$\frac{K}{(c_1 + 1)} = 400$$

$$K = 400c_1 + 400$$

$$\frac{K - 400}{400} = c_1$$

$$\frac{K - p_0}{p_0} = c_1.$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

$$p(t) = \frac{K}{\frac{K - p_0}{p_0} e^{-rt} + 1},$$

což lze upravit jako

$$p(t) = \frac{K}{\frac{(K - p_0)e^{-rt} + p_0}{p_0}}$$

$$p(t) = \frac{K p_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt}}.$$

Poznamenejme, že toto řešení je pro $0 < p_0 < K$ definováno na celém $\mathbb{R}$.

Víme, že počet ryb se po prvním roce ztrojnásobil, čili můžeme psát

$$p(1) = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-r\cdot 1}} = 3p_0$$

$$\frac{K}{p_0 + (K - p_0)e^{-r}} = 3$$

$$K = 3p_0 + 3(K - p_0)e^{-r}$$

$$\frac{K - 3p_0}{3(K - p_0)} = e^{-r}$$

$$\ln \frac{K - 3p_0}{3(K - p_0)} = -r$$

$$r = \ln \frac{3(K - p_0)}{K - 3p_0}$$

$$r = \ln \frac{3(10000 - 400)}{10000 - 1200}$$

$$r = \ln \frac{28800}{8800}$$

$$r = \ln \frac{36}{11}.$$

Zajímá nás, za jak dlouho bude v jezeře 5000 ryb. Musíme tedy vyřešit rovnici

$$p(t) = \frac{K}{2}$$

$$\frac{K}{\frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1} = \frac{K}{2}$$

$$2 = \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1$$

$$1 = \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}$$

$$p_0 = (K-p_0)e^{-rt}$$

$$\frac{p_0}{K-p_0} = e^{-rt}$$

$$\ln\frac{p_0}{K-p_0} = -rt$$

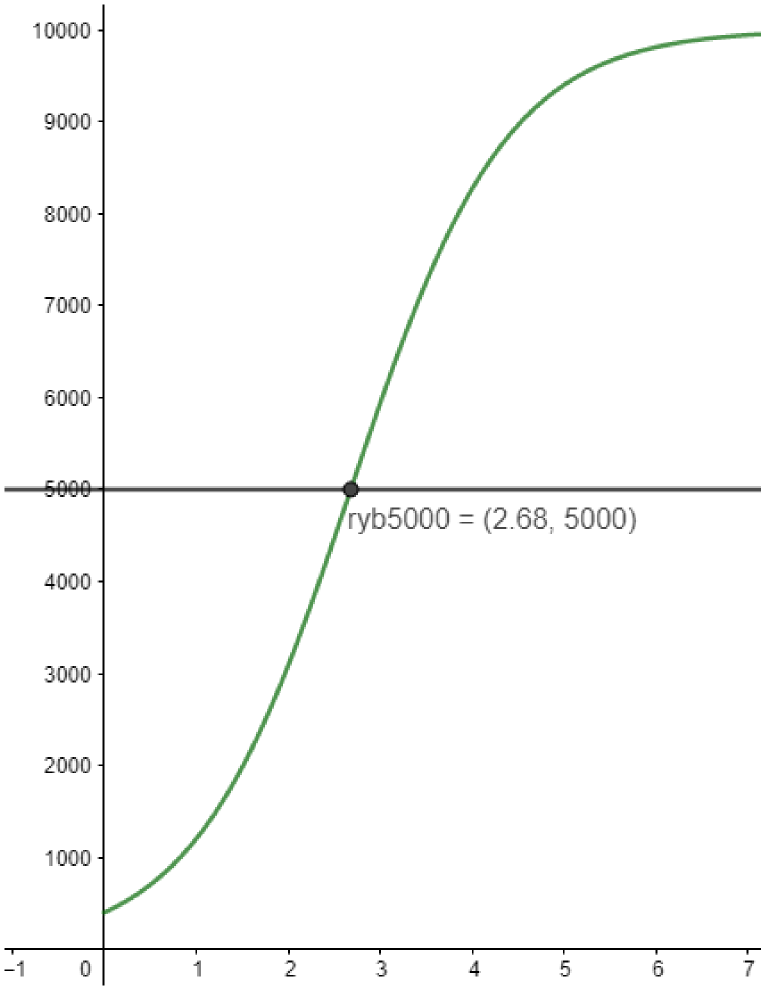
$$rt = \ln\frac{K-p_0}{p_0}$$

$$t = \frac{1}{r}\ln\frac{K-p_0}{p_0}$$

$$t = \frac{1}{\ln\frac{36}{11}}\ln\frac{10000-400}{400}$$

$$t \doteq 2,68.$$

V jezeře bude 5000 ryb asi za 2,68 roku, což jsou asi 2 roky a 8 měsíců. △



Obrázek 3.13: Řešení pro 5000 ryb

Kapitola 4

Závěr

Práce předkládá vyřešené vybrané příklady z integrálního počtu a diferenciálních rovnic. Při řešení příkladů bylo třeba nejprve převést slovní úlohy do matematického jazyka a následně víceméně standartními metodami vyřešit příslušný integrál nebo diferenciální rovnici. Vznikla tak praktická sbírka zajímavých příkladů na danou problematiku.

Práce může obohatit rozhledy jak studentům, tak i vyučujícím daných předmětů právě díky nestandartním zadáním slovních úloh.

Literatura

[1] DANĚČEK, Josef et al. Sbírka příkladů z matematiky I. 5., dopl. a opr. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 110 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-7204-467-2.

[2] EDWARDS, C a David E PENNEY. E*lementary differential equations.* 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, c2008, x, 623, I-6 p. ISBN 01-323-9730-7.

[3] KOFROŇ, Josef. *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru.* 2. vyd. Praha: Karolinum, 2004, 285 s. Učební texty (Univerzita Karlova). ISBN 80-246-0946-0.

[4] KRAJC, Bohumil a Petr BEREMLIJSKI. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Ostrava, Plzeň, 2012. Učební text. Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.

[5] KŘIVAN Vlastimil. *Přednášky předmětu UMB 572 Matematická analýza IV.* Přírodovědecká fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, léto 2013.

[6] KURZWEIL, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice: úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s.

[7] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. Integrální počet funkcí jedné proměnné. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-x.

[8] SAMKOVÁ, Libuše. Matematické modelování v biologických disciplínách. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-300-4.

[9] SAMKOVÁ Libuše. *Přednášky z předmětu KMA DFR Diferenciální a funkcionální rovnice.* Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, zima 2015