



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY
A BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ROZBOR MOŽNOSTÍ URČENÍ KRITICKÉ SÍLY
VZPĚRU U ŠROUBOVITÉHO PRUTU**

ANALYSIS OF POSSIBILITIES OF SOLUTION OF BUCKLING OF A SCREW-SHAPED BEAM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Pokorný

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Jan Pokorný
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojírenství
Vedoucí práce:	prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Rozbor možností určení kritické síly vzpěru u šroubovitého prutu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Šroubovitost prutu může mít příznivý vliv na zvýšení bezpečnosti prutu proti ztrátě vzpěrné stability, k jejímu hodnocení však nestačí vztahy pro kritickou sílu vzpěru známé z literatury. Úkolem je provést analýzu možností určení kritické síly vzpěru u takových prutů.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši literatury se zaměřením na řešení kritické síly vzpěru u neprizmatických prutů.
- 2) Využít znalostí z PP a prostudované literatury pro určení rozmezí kritické síly vzpěru pro volné šroubovitě pruty různých zvolených tvarů příčného průřezu při využití analytických metod řešení.
- 3) Pokusit se využít numerických metod řešení ke zpřesnění kritické síly vzpěru vyhodnocené analytickými přístupy.

Seznam literatury:

Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.,: Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno 2004.

Gere, J.M., Timoshenko, S.P.: Mechanics of materials, Springer, 2002.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

.....

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

.....

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Závěrečná práce se zabývá vlivem šroubovitosti prutu na zvýšení kritické síly ztráty vzpěrné stability, zaměřuje se na prut obdélníkového příčného průřezu. Tento problém je v práci rozdělen na dvě základní oblasti. První z nich představuje prut s velkým stoupáním závitů, druhou prut se stoupáním menším. Řešení je provedeno numericky s využitím prostředí MATLAB. Za pomoci konečno-prvkového programu je provedeno ověření použitých metod. Výsledkem této práce je grafické vyjádření závislosti zvýšení kritické síly vůči prizmatickému prutu stejných rozměrů na poměru délek stran obdélníkového příčného průřezu. Výsledky jsou zobrazeny pro oba typy uvažovaných prutů.

Klíčová slova

Vzpěrná stabilita, kritická síla, prut, šroubovitý prut, osazený prut, prizmatický prut, kvadratický moment, ohybová tuhost, rovnice průhybové čáry, volný prut, zvýšení kritické síly, numerické řešení, Newtonova metoda

Abstract

Bachelor's thesis deals with the effect of the pretwist of a column on the increase in buckling load and also focuses on a column with rectangular cross section. This problem is divided into two main parts. The first one is represented by the column with a large thread pitch, the second one by a small thread pitch. The results are obtained by a numerical approach using MATLAB software. The verification is carried out via finite element software. The outcome of this thesis is plotting the ratio of the critical loads of the twisted and prismatic columns against the ratio of the side lengths of the rectangular cross section. The results are shown for both types of considered columns.

Keywords

Buckling, critical load, column, rod, pretwisted beam, two-segment column, Euler column, cross section, second moment of inertia, flexural rigidity, free-standing, increase of first buckling load, large deformation, numerical solution, Newton's method

Bibliografická citace

POKORNÝ, J. Rozbor možností určení kritické síly vzpěru u šroubovitého prutu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 59 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D..

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Rozbor možností určení kritické síly vzpěru u šroubovitého prutu vypracoval samostatně s použitím odborné literatury, pramenů uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce, a na základě konzultací s vedoucím.

17. května 2016

.....
Jan Pokorný

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, připomínky a komentáře poskytované po celou dobu zpracovávání této bakalářské práce.

Obsah

1	Úvod	11
1.1	Co je to vzpěr?	12
1.2	Rozdělení vzpěru	12
2	Důležitost vzpěrné stability	13
3	Historický podtext	14
4	Vzpěrná síla ideálního volného prutu	15
4.1	Možné stavy	17
4.2	Rovina vybočení	18
5	Nepřizmatické typy prutů	18
5.1	Přímý prut s odstupňovaným průřezem	18
5.2	Přímý prut se zužujícím se průřezem	20
5.3	Šroubovitý prut	23
6	Řešení mírně zkrouceného prutu	25
6.1	Modifikace osazeného prutu	25
6.1.1	Numerická metoda	27
6.2	Numerické řešení	28
6.2.1	Varianta 1	28
6.2.2	Varianta 2	30
6.3	Volba délky a ohybové tuhosti jednotlivých úseků	31
7	Prut s více závitů	35
7.1	Prvotní odhad ohybové tuhosti	35
7.2	Průměrná ohybová tuhost	37
8	Ověření v programu ANSYS	39
9	Zhodnocení výsledků	43
10	Závěr	44
	Seznam použitých zdrojů	46
	Seznam použitých symbolů	47
	Seznam příloh	49

1 Úvod

Uvažujme přímý prut o neproměnném průřezu obdélníkového tvaru. Jakmile natočíme jeho podstavy vůči sobě kolem podélné osy, vznikne prut šroubovitý.

Téma šroubovitého prutu patří v česky psané literatuře k téměř neprobádanému území, přitom bývá tento typ prutů používán nejen pro součásti, jež vznikly díky konstrukčním požadavkům na zdokonalení estetického dojmu, jako jsou např. inovativní provedení visutých konstrukcí nebo jiných soustav prutů. Tyto pruty jsou také prvky okrasných plotů a dalších výtvorů uměleckých kovářů. Protože není vliv šroubovitosti prutu na kritickou sílu ztráty vzpěrné stability všeobecně známý, bývají tyto konstrukce dimenzovány podobně, jakoby se jednalo o struktury s přímými pruty, přestože je zřejmé, že šroubovitost prutu zvyšuje kritickou sílu vzpěru. Aspoň přibližná kvantifikace tohoto zvýšení je cílem předkládané bakalářské práce.

1.1 Co je to vzpěr?

Vypracováno podle [1],[2]

Jestliže zatížíme štíhlou konstrukci tlakovou silou a dané zatížení je dostatečně malé, pak je takto způsobená deformace uvažované konstrukce téměř nezpůsobitelná vzhledem ke geometrii a schopnosti přenášet zatížení. Jakmile však dosáhneme kritické hodnoty zatížení, uvažovaná konstrukce náhle vykazuje velkou deformaci a může dojít ke ztrátě schopnosti přenášet tuto zátěž. Právě tento okamžik označujeme ztrátou vzpěrné stability.

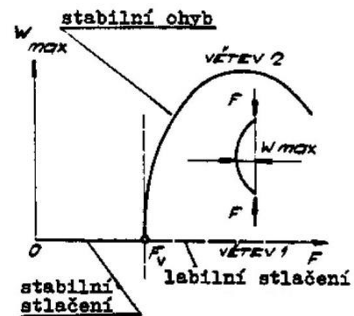
Danou situaci můžeme demonstrovat například na špejli, při malém silovém působení se mírně stlačí, jakmile ale dosáhneme kritické meze, špejle vybočí a není již dále schopná přenášet toto působení. Stabilitu však nemusí pozbyt pouze konstrukce modelově odpovídající přímému prutu, může to být tenký kroužek zatížený radiálně, nebo prut s křížovým tvarem příčného průřezu. V těchto případech nedojde k vybočení v laterálním směru, ale dojde ke zvlnění obvodu kruhu resp. ke zkroucení v případě prutu s křížovým průřezem.

1.2 Rozdělení vzpěru

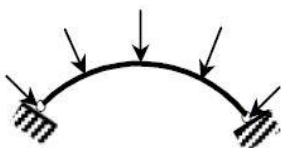
Vypracováno podle [1],[2],[3]

Ztrátu stability můžeme rozdělit do dvou základních kategorií.

První z nich se nazývá bifurkační vzpěr, tento typ vzpěru je charakteristický tím, že deformace způsobená zatížením přechází z jednoho směru do druhého, tj. z axiálního zkracování do prohýbání ve směru laterálním. Zatížení, které způsobí mezní stav vzpěrné stability, se nazývá kritická síla, při tomto zatížení vzniká bod bifurkace (rozdělení) rovnováhy. Stlačení vyskytující se před bodem bifurkace rovnováhy se označuje stabilní. Dále se vzrůstající silou se problém rozděluje na dvě větve, přičemž jedna z nich nese označení labilní stlačení, druhá stabilní ohyb viz *obr. 1.1*. V závislosti na konstrukci a zatížení může být křivka popisující druhou větev různých tvarů, může být symetrická či nikoliv a může vzrůstat nebo klesat nad resp. pod kritickou silou.



Obr. 1.1 Závislost průhybu na síle u bifurkačního vzpěru, převzato z [1]



Obr. 1.2 a) Ztráta tvarové stability oblouku bez bifurkace, převzato z [2]

Druhá kategorie obsahuje ztrátu tvarové stability způsobenou limitním zatížením, která nastává při kritické síle bez předchozí bifurkace, tj. pouze s jedním typem výchylky. Příkladem mohou být tlakově zatížené oblouky s relativně velkými poloměry, viz *obr. 1.2 a)*, a kulové části konstrukcí (světlíky) nebo vybočení duté válcové nádoby v důsledku vnějšího zatížení viz *obr. 1.2 b)*.

Další dělení pak může být prováděno v závislosti na zkoumaných attributech.



Obr. 1.2 b) Ztráta tvarové stability válcové nádoby bez bifurkace, převzato z [2]

2 Důležitost vzpěrné stability

Vypracováno podle [2],[3]

To, jaký vzhled bude určitá konstrukce mít, často záleží na pevnosti a tuhosti této konstrukce. Pevnost je definována jako schopnost konstrukce odolat zatížení, zatímco tuhost je její odpor vůči deformaci, tj. konstrukce má dostatečnou tuhost, aby se nedeformovala nad přípustnou mez. I přesto se však může daná konstrukce stát nestabilní mnohem dříve, než dojde k překročení mezních stavů pevnosti a deformace pro dané konstrukční provedení.

Tento jev lze jednoduše ukázat na příkladu 500mm dlouhého volného ocelového prutu o průměru 5 mm s mezí kluzu 300MPa. Zatěžující axiální síla potřebná k dosažení mezního stavu pružnosti odpovídá přibližně 5,9kN, zatímco síla, při níž dojde k vybočení, odpovídá zhruba 250N. Na tomto příkladu můžeme jasně vidět, že z pohledu tvaru a dimenzování musíme zvláště u štíhlých a lehkých konstrukcí upřednostňovat kontrolu možné ztráty vzpěrné stability před mezními stavu vycházejícími z pevnostních kritérií.

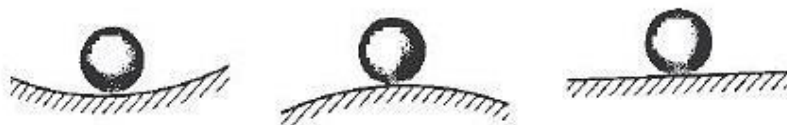
Lineárně elastický vzpěr konstrukčních prvků je elementárním případem ztráty vzpěrné stability jako takové. Jeho studium je nutným krokem k tomu, abychom mohli pochopit chování složitějších a komplexnějších konstrukcí, stejně tak, jako konstrukcí, které vykazují neelastické chování, obsahují počáteční imperfekce nebo zbytková napětí, atd.

Zatížení, při němž lineárně elastický vzpěr nastává, je taktéž velmi důležité. Bývá základem pro vztahy běžně používané nejen konstruktéry při navrhování jakýchkoli typů součástí, ale zabývají se jím i různé organizace vytvářející normy. Stejně tak v publikovaných vědeckých výzkumech nebo v jiné dostupné literatuře je kritická síla potřebná pro vzpěrné vybočení vyjadřována pro různé druhy konstrukcí podrobených mnoha druhům zatížení s různými typy okrajových podmínek.

U určitých problémů je však pořád nutné provádět hlubší analýzu, protože jsou zapotřebí stále přesnější výsledky, nebo jejich řešení zatím neznáme vůbec. Nutno říci, že kromě pár speciálních případů jako je např. elastický vzpěr dokonalého prizmatického prutu zatíženého axiální silou bývá obtížné rozumně odhadnout řešení, neřku-li získat exaktní řešení, daného problému.

Z tohoto důvodu je mnohdy třeba využít numerické metody. Pokud budeme hovořit o vyšetřování mezního zatížení u elastického typu vzpěru, přicházejí do úvahy numerické metody, které můžeme rozdělit na dva základní přístupy. Prvním z nich je vektorový přístup a druhému odpovídá energetický přístup. U vektorového přístupu se používá druhý Newtonův zákon k tomu, abychom získali požadované diferenciální rovnice, zatímco u energetického přístupu vyjadřujeme diferenciální rovnice tak, aby byla celková energie (součet vnitřní a potenciální energie v důsledku zatížení) minimální.

Tyto rovnice pak v podstatě odpovídají složitému problému vlastních čísel, přičemž vlastní číslo reprezentuje zatížení při vzpěru a vlastní vektor představuje mód vzpěrné stability. Získaná nejmenší vzpěrná síla se nazývá kritická síla a bývá spojována s volnou, neboli indiferentní rovnovážnou polohou viz *obr 2.1*. K tomu, abychom zjistili, zda je rovnovážná poloha stabilní nebo nestabilní, lze použít metody tzv. poruchové teorie nebo druhou derivaci celkové potenciální energie.



Obr. 2.1 Typy rovnovážných poloh, popis zleva: poloha stálá, vratká, volná; převzato z [3]

3 Historický podtext

Vypracováno podle [2], [4]

První studie elastické stability bývají přiřazovány Leonhardu Eulerovi (1707-1783), který využil teorie variačního počtu k tomu, aby získal rovnice rovnováhy a kritickou vzpěrnou sílu pro tlakově zatížený prut. Výsledky své práce zveřejnil v dodatku „De curvis elasticis“ knihy s názvem „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne and Geneva, 1744.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) následně zformuloval obecnější přístup, než byl, v té době již zavedený, Newtonův vektorový přístup, a to přístup energetický. Což přirozeně vedlo ke vzniku principu minimální celkové potenciální energie, jež je nástrojem nejen pro vyšetřování stability soustav.

Jules Henri Poincaré (1854–1912) je také známý jako zakladatel teorie bifurkace, tj. bodu rozdělení rovnováhy na stabilní a nestabilní větve při zatěžování prutu. Taktéž klasifikoval singulární body integrálních křivek důležitých pro řešení diferenciálních rovnic.

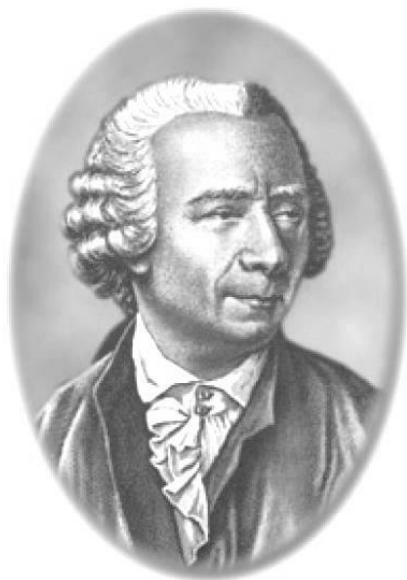
Dalším představitelem této doby byl Alexandr Michailovič Ljapunov (1857–1918). Postavil základy teorie pro řešení stability systémů a také představil mnohé energetické funkce, které po něm nesou název Ljapunovovy funkce (lze pomocí nich ověřit stabilitu obecných diferenciálních rovnic).

Pak také Lev Pontryagin (1908-1988) představil spolu s A. Andronovem důležitý topologický koncept strukturní stability, který vedl k vytvoření velmi známé teorie zveřejněné ve stati *Stabilite structurelle et morphogenese: Essai d'une theorie generale des modeles* (volně přeloženo jako *Strukturní stabilita a morfogeneze: Popis obecné teorie modelů*), jejímž autorem je R. Thom.

Theodore von Kármán (1881-1963) zaměřil svou činnost na vzpěrnou stabilitu neelastických prutů. Vytvořil model vysvětlující hysterezní smyčky a provedl výzkum zabývající se plastickou deformací nosníků.

Teorie k této problematice se neubírala kupředu, dokud se Warner Tjardus Koiter (1914–1997) ve své dizertační práci „Over de Stabieleit van het Elastisch Evenwicht“ nezaobíral klasickou nelineární teorií bifurkace. Zejména upozornil na přítomnost imperfekcí v materiálu, které významně snižují kritickou sílu pro vybočení.

Inovativní výzkumy byly poté dále prováděny mnohými odborníky jmenovitě například B. Budiansky, J. W. Hutchinson, F. Engesser, S. P. Timoshenko, G. R. Kirchhoff,...



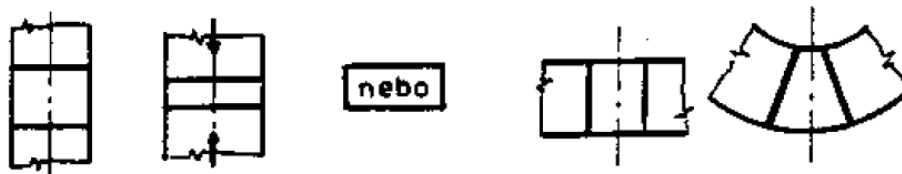
Obr. 3.1 Leonhard Euler, převzato z [2]

4 Vzpěrná síla ideálního volného prutu

Vypracováno podle [1],[5]

Abychom mohli přikročit k teorii pro neprizmatický typ prutů, je třeba si ukázat základní vztahy, ze kterých se následně při výpočtech vychází. U přímých prutů se všeobecně uplatňuje výše zmíněný bifurkační vzpěr, tzn. vzpěr po vzniku bodu rozdělení rovnováhy. Protože se však při něm prut prohýbá, nemůžeme uvažovat předpoklady vymezené pro prostý tlak, zejména pak axiom o přibližování příčných průřezů, ale je třeba tyto předpoklady doplnit o následující:

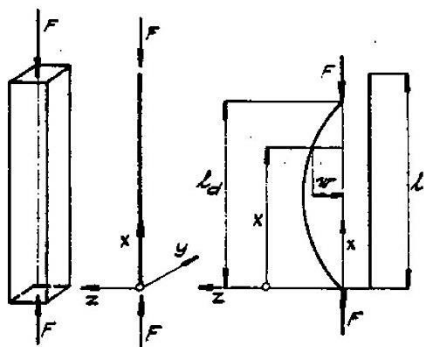
Příčné průřezy se přibližují, nebo se natáčejí, viz *obr. 4.1*.



Obr. 4.1 Převzato z [1]

Dále pak budeme uvažovat ideální prut s následujícími vlastnostmi:

- v nezatíženém stavu je střednice prutu ideálně přímá
- prut je prizmatický a nešroubovitý
- průřez prutu je tlustostěnný (tj. všechny rozměry příčného průřezu jsou řádově stejně velké)
- prut je zatížen dvěma rovnovážnými osamělými silami F , které působí v těžištích čel prutu, a jejich nositelky jsou totožné se střednicí prutu v nezatíženém stavu
- materiál prutu je homogenní, izotropní a bez omezení lineárně pružný
- v průběhu celého zatěžování platí prutové předpoklady prostého namáhání prutů



Obr. 4.2 Převzato z [1]

Nášim cílem je zejména určit, kdy je pro prut podstatná deformace stlačováním a kdy deformace prohýbáním. Třebaže je pro nás z tohoto důvodu podstatná normálová síla N a ohybový moment M_o , při ztrátě vzpěrné stability je dominantní ohybové namáhání, a proto se tato práce dále nevěnuje prostému tlaku. Pro následující rovnice tedy zvolme souřadný systém jako na *obr. 4.2*. Dále předpokládejme, že laterální výchylka bude v rovině ZX , a průhyb střednice prutu značme w jako na *obr. 4.2*.

Z hlediska daného prutu pak můžeme psát vztah pro ohybový moment v místě x prutu v deformovaném stavu:

$$M_o(x) = Fw, \text{ kde } w = w(x) \quad (4.1)$$

Následně potřebujeme diferenciální rovnici průhybové čáry prutu, její odvození je uvedeno např. v [5], která lze použít vzhledem k daným předpokladům. Po dosazení M_o ze (4.1) platí:

$$\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{Fw}{EJ_y} \quad (4.2)$$

Řešení této nelineární diferenciální rovnice (4.2) obsahuje dvě integrační konstanty C_1, C_2 , pro jejich určení je nutné zapsat dvě okrajové podmínky:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l_d \quad w = 0 \quad (4.3)$$

Řešení rovnice (4.2) na základě okrajových podmínek (4.3) je neschůdné, neznáme totiž vzdálenost mezi působícími zatěžujícími silami po deformaci prutu v laterálním směru l_d , je totiž samozřejmě menší než původní délka prutu l . Lagrange tuto rovnici řešil se zjednodušením $l \doteq l_d$ a dospěl k závěrům uvedených v kapitole 1.2, tj. k existenci kritické síly F_v a bodu rozdvojení rovnováhy. Toto Lagrangeovo řešení je třeba, pokud chceme do výpočtu zahrnout také stav po překročení kritické síly.

Pokud bychom ovšem měli toto složité řešení využívat při běžných aplikacích, nebylo by to příliš efektivní. Jestliže nás ale v rámci našeho problému nezajímá chování při zátěžné síle $F > F_v$, nýbrž chceme určit pouze kritickou sílu F_v , můžeme využít tzv. Eulerovo řešení. To vychází z předpokladu velmi malých průhybů, tj. řeší deformaci pouze do kritické síly. Díky tomu lze v rovnici (4.2) zanedbat w'^2 , neboť při daných předpokladech $w'^2 \ll 1$. Diferenciální rovnice (4.2) se pak zjednoduší takto:

$$w'' + \frac{F}{EJ} w = 0 \quad (4.4)$$

Vzhledem k malým deformacím $l_d \doteq l$ a okrajové podmínky tedy vyjádříme:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l \quad w = 0 \quad (4.5)$$

Díky těmto zjednodušením je průhyb w popsán lineární homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Označíme-li:

$$p^2 = \frac{F}{EJ} \quad (4.6)$$

Lze zapsat rovnici (4.4) v tzv. normovaném tvaru:

$$w'' + p^2 w = 0 \quad (4.7)$$

Je zřejmé, že její charakteristická rovnice má komplexně sdružený kořen¹ a řešení rovnice (4.7) pak existuje ve tvaru:

$$w = C_1 \sin px + C_2 \cos px \quad (4.8)$$

Z okrajových podmínek (4.5) v kombinaci s rovnicí (4.8) dostáváme tyto rovnosti:

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (4.9)$$

$$0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl \rightarrow C_1 \sin pl = 0 \quad (4.10)$$

Pokud do (4.10) dosadíme p ze vztahu (4.6), dostáváme:

$$C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EJ}} l \right) = 0 \quad (4.11)$$

¹ Kořen charakteristické rovnice je $\lambda_{1,2} = \mp i p$. Obecně platí, že pokud $\lambda_{1,2} = a \mp ib$, pak homogenní řešení je ve tvaru $w = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)$. Chceme-li se přesvědčit, že (4.8) je skutečně řešením (4.7), stačí provést jeho druhou derivaci a dosadit ji do (4.7).

4.1 Možné stavy

Vypracováno podle [1],[5]

Nyní je třeba prozkoumat případy, kdy rovnice (4.11) platí. Mohou nastat tři možnosti:

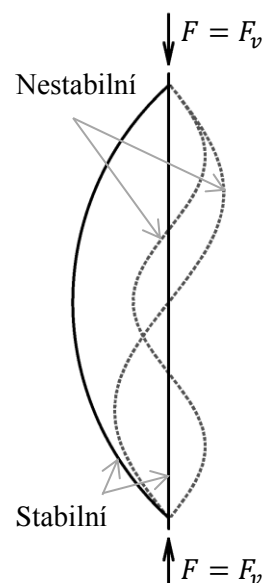
- $C_1 = 0, \sin pl \neq 0$, pak $w = 0$, a současně argument funkce \sin může nabývat libovolných hodnot, tzn., libovolných hodnot může nabývat také síla F a prut zůstává přímý. Prut by se však nacházel ve stavu labilní rovnováhy, což ve skutečnosti nikdy nenastane vlivem přítomnosti imperfekcí v zatížení nebo v materiálu prutu.
- $C_1 \neq 0, \sin pl = 0$, pak $C_1 \neq 0$ i $\sin px \neq 0$ pro $x \neq l$. Průhyb prutu nastává za podmínky:

$$\sin pl = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{F}{EJ}} l = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (4.12)$$

Protože veličiny l, E, J známe, platí následující vztah:

$$F = \frac{(k\pi)^2 EJ}{l^2}, \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

- Pro $k = 0$ je prut nezatížený, proto se nemůže deformovat.
- Pro $k = 1$ je $F = F_v = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \neq 0$ pro každý nenulový průřez. Znamená to, že průhyb je při kritické síle nenulový, ale zároveň je neurčitý². Při porovnávání tohoto výsledku s obecným řešením podle Lagrange zjistíme, že souhlasí v okolí bodu F_v , neboť pro malé průhyby sestavená tečna v tomto bodu je kolmá na osu síly F viz obr. 1.1. Díky tomu jsme z přibližného řešení získali přesnou hodnotu kritické síly pro ideální a ideálně zatížený prut.
- Pro $k > 1$ je však síla F ze vztahu (4.13) větší než síla kritická, což znamená, že pro tyto hodnoty k deformační stav prutu odpovídá stavu labilnímu neboli nestabilnímu. Jak už název tohoto stavu napovídá, v praxi samovolně nenastane, protože jediným stabilním deformovaným stavem je stav při F_v , což můžeme vidět na obr. 4.3.



Obr. 4.3
Vytvořeno
v grafickém editoru

Vhodnou změnou konstrukce však můžeme docílit stability prutu i za okolností, kdy by zatěžující síla přesáhla kritickou sílu pro nezměněný ideální prut. Můžeme např. zamezit pohybu prutu v určitém směru, nebo průběh příčného průřezu po délce střednice vhodně modifikovat, aby byla skutečná kritická síla větší než síla odpovídající F_v původního ideálního prutu. O tomto postupu, zvláště pak o zkroucení prutu kolem podélné osy do šroubovice s tímto záměrem, bude pojednáno v následujících kapitolách.

- $C_1 = 0, \sin pl = 0$ odpovídá situaci $F = F_v$ a současně $w = 0$, což je zahrnuto v bodě a. Ten uvádí, že při libovolné síle zůstává prut přímý.

Z této analýzy všech možností je zřejmé, že kritická síla získaná za předpokladu malých deformací je totožná s kritickou silou z obecného řešení. Při daném zjednodušení ale v žádném případě neobdržíme správný popis situace pro $F > F_v$. Předpoklad $w'^2 \ll 1$ je tedy použitelný pouze pro určení kritické síly.

²Neznáme hodnotu jeho velikosti.

4.2 Rovina vybočení

Vypracováno podle [1],[5]

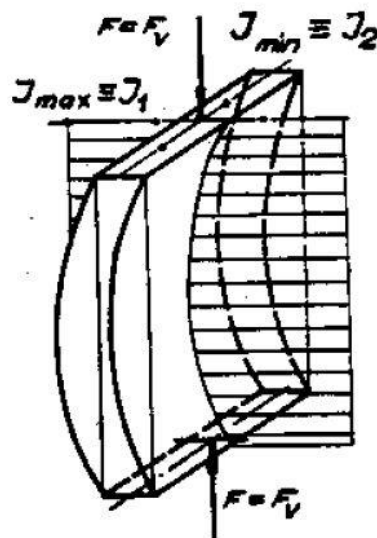
Cílem této podkapitoly bude najít rovinu průhybu ideálního prutu při ztrátě vzpěrné stability. Je zřejmé, že to bude taková rovina, pro kterou bude platit F_v je minimální. Aby totiž došlo k průhybu v jiných rovinách, byla by zapotřebí větší síla. Ze vztahu (4.13) je zřejmé, že kritická síla bude minimální, jestliže bude minimální kvadratický moment v průřezu J . Proto bude minimální pro menší z obou hlavních centrálních kvadratických momentů, který značíme J_2 .

Z toho jasně vyplývá, že osa kvadratického momentu J_2 bude neutrální osou pro ohyb a vybočení proběhne v rovině vytvořené osami J_1 příčných průřezů podél střednice prutu. V jiných směrech by průhyb vyžadoval větší hodnotu síly.

Takže na základě výše uvedeného platí:

$$F_v = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2} \quad (4.14)$$

Znázornění této situace můžeme vidět na obrázku 4.4 pro obdélníkový příčný průřez prutu. Neutrální osa ohybu J_2 a směr laterálního vybočení daný osou J_1 přesně odpovídá předchozím stanoviskům.



Obr. 4.4 Převzato z [1]

5 Neprizmatické typy prutů

Prizmaticnost prutu udává, že se jedná o prut s konstantním příčným průřezem. Určování kritické síly u neprizmatických prutů je však složitější, než je tomu u ideálních přímých prutů. Cílem této práce je zaměřit se právě na tento typ prutů, zvláště pak na šroubovité pruty a určit, zda mají jejich geometrické odchylky od prizmatického tvaru příznivý vliv na jejich kritickou sílu.

Pojďme se tedy podívat na některé z nich.

5.1 Příčný prut s odstupňovaným průřezem

Vypracováno podle [1],[5]

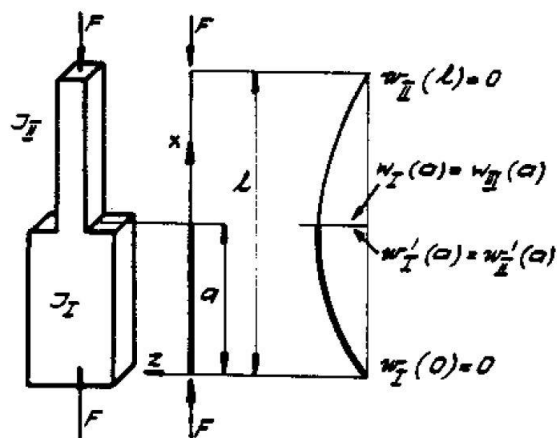
Předpokládejme, že má prut po délce proměnný příčný průřez nebo modul pružnosti. Pokud jsou takovéto úchytky od předpokladů vzpěru malé, tzn. průřez je málo proměnný nebo je průřez odstupňovaný, lze s dostatečnou přesností využít vztahů pro prostý ohyb. Proměnnost průřezu se projeví tak, že kvadratický moment $J = J(x)$ a člen $\frac{F}{EJ}$ v diferenciální rovnici průhybové čáry je pak také funkcí x . Analogický k tomu je případ při proměnnosti modulu pružnosti E po délce střednice. Diferenciální rovnice (4.4) se pak stává lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s proměnnými koeficienty, jejíž řešení v uzavřeném tvaru je možné jen ve speciálních případech. Proto se kritická síla u neprizmatických prutů určuje většinou numerickými metodami.

Nyní tedy k prutu, který je otázkou této podkapitoly. Uvažujme přímý prut odstupňovaný tak, že jde rozdělit na dva úseky o kvadratických momentech J_I pro úsek I a J_{II} pro úsek II viz *obrázek 5.1*.

Průhyb pak můžeme na každém z úseků popsat vztahy, které vyplývají z diferenciální rovnice průhybové čáry v normovaném tvaru (4.7), každému úseku tedy odpovídá její řešení (4.8) analogicky, jako v kapitole 4. Zápis pak vypadá takto:

$$w_I = C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x, \quad p_I = \sqrt{\frac{F}{EJ_I}}$$

$$w_{II} = D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x, \quad p_{II} = \sqrt{\frac{F}{EJ_{II}}}$$



Obr. 5.1 Převzato z [1]

Přitom je důležité splnit okrajové podmínky, abychom mohli dořešit neznámé integrační konstanty C_1, C_2, D_1, D_2 . Jeden typ okrajových podmínek souvisí s uložením na konci prutu, podobně jako je tomu u podmínek (4.5):

$$w_I(0) = 0; \quad w_{II}(l) = 0 \quad (5.1)$$

Druhý typ okrajových podmínek pak upravuje spojitost a hladkost střednice, je totiž potřeba splnit prutové předpoklady:

$$w_I(a) = w_{II}(a); \quad w_I'(a) = w_{II}'(a) \quad (5.2)$$

Po dosazení okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro řešení neznámých konstant:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \sin p_I 0 + C_2 \cos p_I 0 \\ 0 &= D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l \\ C_1 \sin p_I a + C_2 \cos p_I a &= D_1 \sin p_{II} a + D_2 \cos p_{II} a \\ C_1 p_I \cos p_I a - C_2 p_I \sin p_I a &= D_1 p_{II} \cos p_{II} a - D_2 p_{II} \sin p_{II} a \end{aligned} \quad (5.3)$$

Z předchozí soustavy (5.3) vyplývá, že $C_2 = 0$, tato soustava se nám tak zjednoduší na tvar:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 0 + D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l \\ 0 &= C_1 \sin p_I a - D_1 \sin p_{II} a - D_2 \cos p_{II} a \\ 0 &= C_1 p_I \cos p_I a - D_1 p_{II} \cos p_{II} a + D_2 p_{II} \sin p_{II} a \end{aligned} \quad (5.4)$$

Což je homogenní soustava pro neznámé C_1, D_1, D_2 . Protože v bodě bifurkace rovnováhy je malý průhyb neurčitý, musí platit, že matice soustavy (5.4) je singulární, tj. determinant matice je roven nule:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin p_{II} l & \cos p_{II} l \\ \sin p_I a & -\sin p_{II} a & -\cos p_{II} a \\ p_I \cos p_I a & -p_{II} \cos p_{II} a & p_{II} \sin p_{II} a \end{vmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

Po vyjádření determinantu a jeho úpravě pomocí goniometrických vzorců dostáváme pro určení kritické síly F_v rovnici:

$$-\tan(p_I a) \cotan(p_{II}(l - a)) = \frac{p_I}{p_{II}} \quad (5.6)$$

kteřou je třeba řešit numericky. Protože existuje řešení této transcendentní rovnice, existuje v tomto případě jak bod bifurkace, tak i kritická síla F_v .

5.2 Přímý prut se zužujícím se průřezem

Vypracováno podle [2]

Po výše uvedené teorii lze konstatovat, že stejně jako odstupňování prutu čili skoková změna kvadratického momentu odpovídá výpočtově náhlé změně modulu pružnosti, přičemž je jasně dán bod bifurkace případně kritická síla, tak odstupňovaný prut s mnoha úseky v podstatě odpovídá spojitě proměnnosti příčného průřezu. Odlišností je „pouze“ to, že odstupňovaný prut má po délce střednice počet úseků s rozdílnými parametry konečný, kdežto spojitě proměnný prut nikoliv. I přesto však konečný počet úseků navyšuje výpočtovou náročnost natolik, že je třeba využít numerické řešení, což je vhodné si uvědomit v souvislosti s prutem spojitě proměnným.

Třebaže se u prutů, jež jsou tématem této podkapitoly, po délce střednice mění jejich příčný průřez, pořád u nich zůstává stejná rovina vybočení, viz podkapitola 4.2. Nejčastěji jsou používány neprizmatické pruty, kde zůstává zachován tvar příčného průřezu a mění se pouze jeho rozměry. Pokud se omezíme pouze na případ, kdy neuvažujeme do řešení vlastní tíhu prutu, lze pro určité typy průřezů provést exaktní řešení a použít pro ně klasické okrajové podmínky. V tomto textu se budeme držet stejných okrajových podmínek jako v kapitole 4, tj. podmínky pro volný prut. Samozřejmě by bylo možné spojit dohromady více různých spojitě proměnných prutů, podobně jako při řešení osazeného prutu, řešením těchto případů se však zabývat nebudeme.

Nyní tedy k problému vytyčenému touto podkapitolou. Kvadratický moment v průřezu J je zde stejně jako v podkapitole (5.1) funkcí polohy podél střednice $J = J(x)$, délku prutu značíme l . Základní diferenciální rovnice popisující průhyb pak vypadá následovně:

$$(E J(x)w'')'' + F w'' = 0 \quad (5.7)$$

Současně $F \neq 0$ je koncové zatížení prutu. Po dvou integracích dostáváme následující vztah:

$$E J(x) w'' + F w = C_1 + C_2 x \quad (5.8)$$

Přičemž hodnota konstanty C_2 mimochodem souvisí s namáháním ve smyku. Obecné řešení diferenciální rovnice (5.7) je:

$$w = \frac{C_1}{F} + \frac{C_2}{F} x + w_h \quad (5.9)$$

Kde homogenní řešení w_h je popsáno následující rovností:

$$E J(x)w_h'' + F w_h = 0 \quad (5.10)$$

$J(x)$ se mění na základě proměnlivosti příčného průřezu. V závislosti na tom, jakého typu je charakteristický součin $E J(x)$, jinak řečeno ohybová tuhost, existují různá exaktní řešení homogenní rovnice (5.10). Například lze specifikovat $E J(x)$ právě tak, aby obecná diferenciální rovnice odpovídala rovnicím, které mají řešení v uzavřeném tvaru. Tyto rovnice popisuje např. Kamke nebo Murphy. Nicméně většina těchto řešení nemá fyzikální význam.

Předpokládejme však, že jsme našli dvě nezávislá řešení rovnice (5.10) a označme si je $U(z)$ a $V(z)$. Tyto funkce vytváří fundamentální systém řešení, kde $z = z(x)$. Obecné řešení je pak:

$$w = \frac{C_1}{F} + \frac{C_2}{F} x + C_3 U(z) + C_4 V(z) \quad (5.11)$$

Necht'

$$z_0 = z(0), \quad z_1 = z(l) \quad (5.12)$$

$$U_0 = U(z_0), \quad V_0 = V(z_0) \quad (5.13)$$

$$U_1 = U(z_1), \quad V_1 = V(z_1) \quad (5.14)$$

Potom kritérium stability pro okrajové podmínky odpovídající volnému prutu má následující tvar:


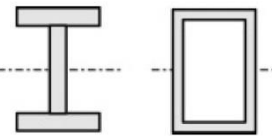
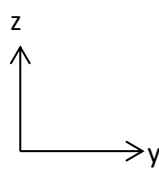
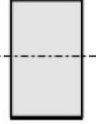
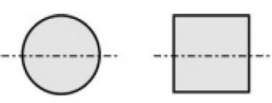
$$U_1 V_0 - V_1 U_0 = 0 \quad (5.15)$$

Dále existuje závislost mezi rozměrem $h(x)$ plošně se měnícího příčného průřezu a kvadratickým momentem v průřezu $J(x)$, pro některé významné druhy průřezů viz *tabulka 5.1*.

$$J(x) = C h(x)^n \quad (5.16)$$

Kde C, n jsou kladné konstanty; hodnoty n navíc leží v intervalu čísel od 1 do 4 podle tvaru příčného průřezu, viz *tabulka 5.1*.

Tabulka 5.1 Přepracováno podle [2]

Souř. systém	Tvar	Popis	n
		Tenký obdélníkový průřez; konstantní rozměr v ose z, proměnný v ose y	$n=1^3$
		I-profil, dutý profil; konstantní rozměr v ose y, proměnný v ose z	$n=2,1$ až $2,6$
		Plný obdélníkový průřez; konstantní rozměr v ose y, proměnný v ose z	$n=3$
		Plné průřezy zachovávající geometrickou podobnost po délce prutu; proměnné rozměry v obou směrech	$n=4$

Takto lze pomocí *tabulky 5.1* a závislosti (5.16) vyjádřit $J(x)$, je však nutné znát závislost proměnnosti průřezu $h(x)$ a navíc ještě konstantu C , z tohoto důvodu se tato metoda hodí pro jen velmi málo případů. V praxi jsou však důležitější dva typy součinu $EJ(x)$ charakterizujícího ohybovou tuhost, jež se aplikují pro pruty s exponenciální a lineární závislostí zúžení.

Jestliže tedy ohybová tuhost odpovídá exponenciálnímu průběhu, lze situaci zapsat následovně:

$$EJ(x) = \alpha e^{-Ax} \quad (5.17)$$

kde α, A jsou kladné konstanty. Řešení homogenní rovnice (5.10) se potom skládá z tzv. Besselových funkcí nultého řádu. Obecné řešení následně odpovídá:

$$w = \frac{C_1}{F} + \frac{C_2}{F} x + C_3 J_0(z) + C_4 Y_0(z) \quad (5.18)$$

³ Ve zdrojové literatuře [2] byla uvedena hodnota $n = 2$ s vedoucím jsme se však shodli na uvedené hodnotě $n = 1$.

Přičemž si lze všimnout podobnosti mezi výše uvedeným řešením a řešením (5.11)

V tomto obecném řešení je:

$$z = \frac{2}{A} \sqrt{\frac{F}{\alpha}} e^{Ax/2} \quad (5.19)$$

Jestliže označíme:

$$U(z) = J_0(z), \quad V(z) = Y_0(z) \quad (5.20)$$

$$z_0 = \frac{2}{A} \sqrt{\frac{F}{\alpha}}, \quad z_1 = \frac{2}{A} \sqrt{\frac{F}{\alpha}} e^{A l/2} \quad (5.21)$$

pak kritérium stability odpovídá dříve uvedenému vztahu (5.15). Pokud by konstanta A nabývala nulové hodnoty, vztahy by odpovídaly neproměnnému průřezu.

Dále uvažujme závislost ohybové tuhosti danou mocninnou funkcí:

$$E J(x) = \alpha(1 - Bx)^A \quad (5.22)$$

Kde α, A jsou kladné konstanty, $Bl \leq 1$. Pro $A \neq 2$ necht':

$$C = \left| \frac{1}{2-A} \right|, \quad k = \frac{F}{\alpha B^2} \quad (5.23)$$

$$z = 1 - Bx \quad (5.24)$$

Pak homogenní řešení rovnice (5.10) je:

$$U(z) = \sqrt{z} J_C(2\sqrt{k}cz^{1/2C}), \quad V(z) = \begin{cases} \sqrt{z} J_{-C}(2\sqrt{k}cz^{1/2C}) \\ \sqrt{z} Y_C(2\sqrt{k}cz^{1/2C}) \end{cases} \quad (5.25)$$

Přičemž horní tvar $V(z)$ použijeme, pokud C není celé číslo, spodní v ostatních případech⁴.

Jestliže však $A = 2$, forma řešení se významně změní.

Potom:

$$r = \sqrt{\left| k - \frac{1}{4} \right|} \quad (5.26)$$

Řešení má následující tvar:

$$U(z) = z^{r+1/2}, \quad V(z) = z^{-r+1/2} \quad \text{pro } k < 1/4 \quad (5.27)$$

$$U(z) = \sqrt{z}, \quad V(z) = \sqrt{z} \ln z \quad \text{pro } k = 1/4 \quad (5.28)$$

$$U(z) = \sqrt{z} \cos(r \ln z), \quad V(z) = \sqrt{z} \sin(r \ln z) \quad \text{pro } k > 1/4 \quad (5.29)$$

Kritérium stability následně znovu odpovídá tvaru (5.15). Pro případ platnosti podmínky $k > 1/4$ Freudenthal vyjádřil z rovnice (5.29) řešení v uzavřené formě pro speciální typ volného prutu:

$$\frac{F}{\alpha B^2} = \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{\ln(1-Bl)} \right)^2 \quad (5.30)$$

⁴ $J_\nu(z)$ a $J_{-\nu}(z)$ jsou lineárně nezávislé Besselovy funkce.

5.3 Šroubovitý prut

Vypracováno podle [6],[7]

Uvažujme prizmatický prut s obdélníkovým příčným průřezem axiálně zatížený silou. Jak již víme, jakmile tlaková zátěžná síla F dosáhne první kritické síly hodnoty F_v , tento prut ztratí vzpěrnou stabilitu ve směru roviny vytvořené osami J_1 , tj. ve své méně tuhé rovině viz kapitola 4.2. Necht' kvadratické momenty průřezu pro zmíněné dvě roviny možného vybočení jsou právě takové, že laterální vybočení ve druhém módu se odehrává v rovině s větší tuhostí. Následně uvažujme podobný prut se stejným příčným průřezem a délkou, ale s tou odlišností, že je šroubovitý. Základním znakem šroubovitosti je totiž spojení „slabší“ roviny vybočení s rovinou „silnější“. Díky tomu můžeme intuitivně odhadnout, že první kritická síla takového prutu bude větší, než je tomu u prizmatického prutu. Dále z toho také plyne, že pro čtvercový příčný průřez k žádnému zvýšení velikosti kritické síly nedochází, neboť má tento prut obě dvě (vlastně všechny) roviny možného vybočení stejně tuhé.

Zkroucení prutu má skutečně kladný vliv na kritickou sílu pro ztrátu vzpěrné stability. Přestože tato vlastnost negativně ovlivňuje sílu pro druhý vzpěrný mód, v praxi není tato síla příliš důležitá, takže převažují pozitivní účinky.

Zkroucené pruty mají širokou škálu aplikací, a to nejen jako nosníky zatížené axiálním tlakem. Používají se např. jako vrtule helikoptér, lopatky turbín, některé případy výztuh litých disků kol, atd. Spolu s konstrukčními požadavky na zlepšení vzhledu součástí se pak tento typ tvarů objevuje v nových konstrukčních provedeních, jako jsou visuté konstrukce pro zastřešení, skořepinové konstrukce na principu membránové napjatosti nebo jiné soustavy prutů. Lze uvést, že takových konstrukčních prvků bylo využito např. při stavbě olympijského stadionu Ptáci hnízdo, čínské věže Guangzhou Tower nebo u konceptu tzv. Möbiova mostu⁵.



Obr. 5.2 Převzato z [1]

Vraťme se však k otázce této kapitoly. Abychom získali rovnice rovnováhy pro ztrátu vzpěru šroubovitého prutu, vycházíme z energetického pohledu, přičemž je třeba znát vztahy mezi silou a kinematickými veličinami. Jsou to takzvané konstitutivní vztahy, jejichž tvar později ukážeme. Opět je třeba vycházet z diferenciální rovnice průhybové čáry zjednodušené pro malé průhyby viz rovnice (4.4).

Protože se však jedná o popis šroubovitého prutu, průhyb nenastává pouze v jedné rovině. V tomto případě budeme operovat se dvěma průhyby ve dvou na sebe kolmých rovinách, proto uvádím tvary použitých veličin včetně indexů, které směry charakterizují.

Jak víme $M_{oy} = Fw$, pro náš popis tedy do předchozí rovnice zavedeme právě M_{oy} :

$$w'' + \frac{M_{oy}}{EJ_y} = 0 \quad (5.31)$$

⁵ Koncept mostu konstrukčně vychází ze vzhledu Möbiovy pásky, tedy plochy s pouze jednou stranou a jednou hranou.

To, jak bude daná rovnice průhybové čáry vypadat, ale také závisí na znaménkové konvenci momentu M_{oy} a orientaci globálního souřadného systému. V souvislosti s tím, je třeba vědět, za jakého předpokladu vznikly dále uvedené konstitutivní vztahy. Vztahy jsou odvozeny pro konvenci uvolňování prutu zprava (osa Z orientována směrem nahoru), což neodpovídá konvenci použité v předešlých kapitolách. Tuto odchylku jednoduše odstraníme změnou znaménka ohybového momentu M_{oy} vzhledem k původnímu vztahu. Z rovnice (5.31) tedy dospějeme ke vztahu:

$$M_{oy} = w'' EJ_y \quad (5.32)$$

Což můžeme vyjádřit pomocí natočení, $\varphi_z = \frac{dw}{dx}$:

$$M_{oy} = \varphi_z' EJ_y \quad (5.33)$$

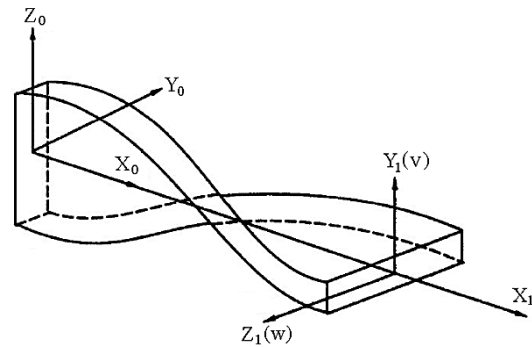
Protože je prut šroubovitý, je nutné psát průhybovou rovnici ve dvou rovinách možného vybočení vzájemně otočených o 90° viz *obr. 5.3*. Konstitutivní vztahy jsou pak následující:

$$M_{oy} = E J_y (\varphi_z' - \psi \varphi_y) \quad (5.34)$$

$$M_{oz} = E J_z (\varphi_y' + \psi \varphi_z) \quad (5.35)$$

Příčemž prut je rovnoměrně šroubovitý a ψ odpovídá velikosti natočení hlavních os čel prutu v úhlové míře, viz *obrázek 5.2*.

Je zřejmé, že by se v těchto vztazích měly vyskytovat také rovnice zahrnující namáhání smykem, pro dostatečně štíhlý prut v kombinaci s malou velikostí zkroucení ψ však lze tyto rovnice bez větší chyby zanedbat.



Obr. 5.3 Převzato z [6]

Pro další úpravy vztahů (5.34) a (5.35) se dále vychází z principu minimální celkové potenciální energie.

Energii napjatosti prutu tvořenou ohybovou složkou (smykovou složku zanedbáváme) lze vyjádřit:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \{E J_1 (\varphi_z' - \psi \varphi_y)^2 + E J_2 (\varphi_y' + \psi \varphi_z)^2\} dx \quad (5.36)$$

Potenciální energie vnějších sil pak odpovídá:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \{F(v' - \psi w)^2 + F(-w' - \psi v)^2\} dx \quad (5.37)$$

Pomocí variačního principu je následně provedeno mnoho ne příliš jednoduchých úprav, ze kterých plyne, že položíme-li úhlová přetvoření rovna nule (což vyplývá z předpokladu zanedbatelnosti smykového namáhání), získáme vztahy mezi natočeními a deformačními posuvy.

$$\varphi_z = -w' - \psi v \quad (5.38)$$

$$\varphi_y = v' - \psi w \quad (5.39)$$

Jestliže tyto předešlé vztahy dosadíme do původních rovnic (5.34) a (5.35) dostáváme výsledné diferenciální vyjádření našeho problému:

$$M_{oy} = EJ_1 (-w'' - 2\psi v' + \psi^2 w) \quad (5.40)$$

$$M_{oz} = EJ_2 (v'' - 2\psi w' - \psi^2 v) \quad (5.41)$$

Jestliže bychom z těchto vztahů chtěli vyjádřit přímo kritickou sílu F_v , jednoduše je lze na základě vlastností momentů přepsat:

$$F w = EJ_1(-w'' - 2\psi v' + \psi^2 w) \quad (5.42)$$

$$F v = EJ_2(v'' - 2\psi w' - \psi^2 v) \quad (5.43)$$

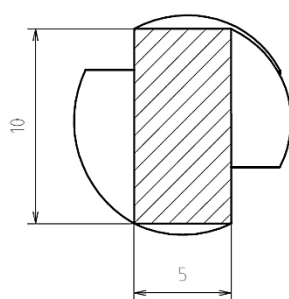
Takto vzniklá soustava dvou diferenciálních rovnic druhého řádu je exaktním řešením kritické síly při problému vzpěrné stability u šroubovitých prutů, její řešení však přesahuje naše možnosti. Při určování této kritické síly proto půjdeme jinou cestou, o které bude ještě pojednáno dále.

Je však třeba si uvědomit, že se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu jenom díky tomu, že vycházíme z předpokladu volného štíhlého prutu a zanedbáváme působení smyku. Pro staticky neurčitý stav prutu by řešení vedlo na soustavu dvou diferenciálních rovnic čtvrtého řádu, a pokud bychom předpoklad o štíhlosti neudělali, řešení by sestávalo ze soustavy čtyř diferenciálních rovnic druhého řádu.

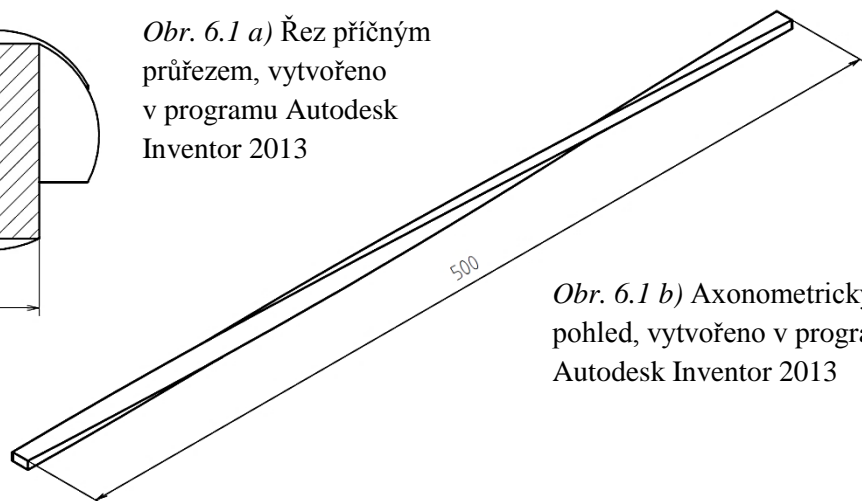
6 Řešení mírně zkrouceného prutu

6.1 Modifikace osazeného prutu

Jak již bylo zmíněno, exaktní řešení šroubovitého prutu je příliš obtížné, pojďme se tedy podívat na to, jakou cestou se dále ubírat. K lepšímu přiblížení, než je Eulerova kritická síla pro prizmatický prut stejných rozměrů, nám pro mírně zkroucený prut stačí vycházet z modifikované úlohy pro osazený prut. Modifikace bude spočívat v tom, že rozšíříme počet úseků osazení ze dvou na tři a vhodně upravíme velikosti jednotlivých kvadratických momentů na jednotlivých úsecích tak, aby co nejlépe popisovaly problém šroubovitého prutu. Řešení této modifikované úlohy budeme provádět numericky, je proto třeba si nejprve definovat rozměry a další parametry našeho prutu viz *obr. 6.1 a)* a *obr. 6.1 b)*.



Obr. 6.1 a) Řez příčným průřezem, vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013



Obr. 6.1 b) Axonometrický pohled, vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013

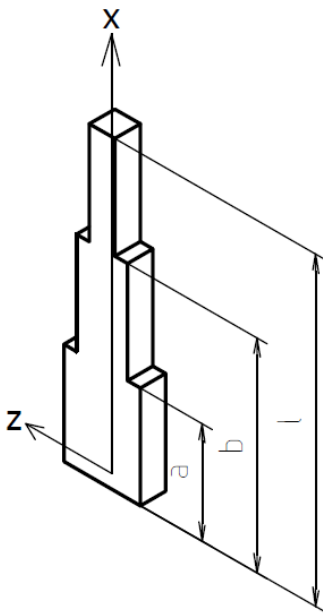
Můžeme vidět, že rozměry příčného průřezu jsou $s = 10 \text{ mm}$, $h = 5 \text{ mm}$, délka prutu $l = 500 \text{ mm}$ a natočení hlavních os čel prutu $\psi = 180^\circ$.

Nyní k modifikaci samotné. Budeme vycházet z diferenciální rovnice průhybové čáry analogicky jako v kapitole 5.1. Napišme si tedy její řešení pro každý ze tří úseků:

$$w_1 = A_1 \sin p_1 x + A_2 \cos p_1 x, \quad p_1 = \sqrt{\frac{F}{EJ_I}} \quad (6.1)$$

$$w_2 = B_1 \sin p_2 x + B_2 \cos p_2 x, \quad p_2 = \sqrt{\frac{F}{EJ_{II}}} \quad (6.2)$$

$$w_3 = C_1 \sin p_3 x + C_2 \cos p_3 x, \quad p_3 = \sqrt{\frac{F}{EJ_{III}}} \quad (6.3)$$



Obr. 6.2 Schéma tří úseků, vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013

Obdobně jako v kapitole 5.1 si napíšeme okrajové podmínky pro výpočet integračních konstant $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, které plynou z uložení na konci prutu a spojitosti a hladkosti střednice:

$$w_1(0) = 0; \quad w_3(l) = 0 \quad (6.4)$$

$$w_1(a) = w_2(a); \quad w_2(b) = w_3(b) \quad (6.5)$$

$$w_1'(a) = w_2'(a); \quad w_2'(b) = w_3'(b) \quad (6.6)$$

Značení v okrajových podmínkách odpovídá obr. 6.2.

Následně uveďme soustavu rovnic pro výpočet těchto neznámých konstant:

$$A_2 = 0$$

$$C_1 \sin p_3 l + C_2 \cos p_3 l = 0$$

$$A_1 \sin p_1 a + A_2 \cos p_1 a = B_1 \sin p_2 a + B_2 \cos p_2 a$$

$$B_1 \sin p_2 b + B_2 \cos p_2 b = C_1 \sin p_3 b + C_2 \cos p_3 b$$

$$A_1 p_1 \cos p_1 a - A_2 p_1 \sin p_1 a = B_1 p_2 \cos p_2 a - B_2 p_2 \sin p_2 a$$

$$B_1 p_2 \cos p_2 b - B_2 p_2 \sin p_2 b = C_1 p_3 \cos p_3 b - C_2 p_3 \sin p_3 b$$

Je zřejmé, že konstanta $A_2 = 0$, dostáváme tedy soustavu pěti rovnic o pěti neznámých A_1, B_1, B_2, C_1, C_2 , maticově soustavu pak lze vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin p_3 l & \cos p_3 l \\ \sin p_1 a & -\sin p_2 a & -\cos p_2 a & 0 & 0 \\ 0 & \sin p_2 b & \cos p_2 b & -\sin p_3 b & -\cos p_3 b \\ p_1 \cos p_1 a & -p_2 \cos p_2 a & p_2 \sin p_2 a & 0 & 0 \\ 0 & p_2 \cos p_2 b & -p_2 \sin p_2 b & -p_3 \cos p_3 b & p_3 \sin p_3 b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soustava (6.7)

Protože v bodě bifurkace rovnováhy je průhyb neurčitý (předpoklad malých průhybů přestává platit), musí platit, že výše uvedená matice soustavy je singulární, proto položíme její determinant roven nule:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin p_3 l & \cos p_3 l \\ \sin p_1 a & -\sin p_2 a & -\cos p_2 a & 0 & 0 \\ 0 & \sin p_2 b & \cos p_2 b & -\sin p_3 b & -\cos p_3 b \\ p_1 \cos p_1 a & -p_2 \cos p_2 a & p_2 \sin p_2 a & 0 & 0 \\ 0 & p_2 \cos p_2 b & -p_2 \sin p_2 b & -p_3 \cos p_3 b & p_3 \sin p_3 b \end{vmatrix} = 0 \quad (6.8)$$

Je zřejmé, že determinant (6.8) by bylo zbytečné jakýmkoli analytickým způsobem upravovat, pro další řešení je zapotřebí využít nějakou numerickou metodu. Pro tento účel jsem v programovacím jazyce MATLAB vytvořil skript, který numerické řešení provede.

Abych však mohl pokračovat popisem kroků vlastního řešení, je nutné uvést základní teorii numerické metody, jež jsem pro řešení použil.

6.1.1 Numerická metoda

Vypracováno podle [8]

Kořeny složitější nelineární rovnice $f(x) = 0$ nedokážeme obecně vyjádřit explicitně, proto k řešení takovýchto rovnic využíváme také iterační metody, tj. z počátečních aproximací hledaného kořene vytvoříme konvergující posloupnost ke kořenu x^* . Existuje hned několik metod, jimiž lze výše uvedenou rovnici řešit; u některých je zapotřebí stanovit interval obsahující hledaný kořen, jiné potřebují udát počáteční aproximaci v jeho dostatečné blízkosti.

V prvním kroku tedy potřebujeme určit počáteční aproximaci hledaného kořene. Můžeme s výhodou využít výpočet dvou kritických sil Eulerova typu pro minimální a maximální kvadratický moment, ze všech úseků, které vstupují do výpočtu. Tak dostaneme interval, v němž bude ležet naše hledané řešení. Počáteční aproximaci hledaného kořene pak můžeme zvolit např. uprostřed tohoto intervalu.

Ve druhém kroku následně získaný odhad zpřesňujeme. K tomuto účelu můžeme použít různé metody: metoda bisekce (založená na principu znaménkových změn), Newtonova metoda, metoda sečen, metoda regula falsi (podobně jako metoda bisekce konverguje vždy), Steffensenova metoda, metoda inverzní kvadratické interpolace, atd.

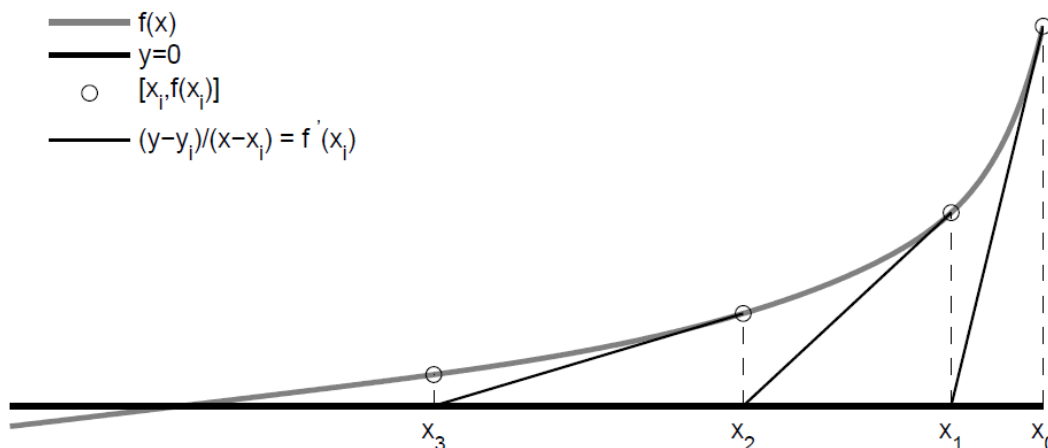
Pro náš účel jsem využil **Newtonovu metodu** neboli metodu tečen. Tato metoda vždy konverguje za předpokladu, že počáteční aproximaci zvolíme dostatečně blízko hledaného kořene, a její konvergence je druhého řádu, tj. konverguje kvadraticky. Kontrolu konvergence můžeme provést např. pomocí Fourierovy podmínky. $f(x_0) * f''(x_0) > 0$, v našem případě však lze předpokládat, že se nacházíme v dostatečné blízkosti kořene a další derivace by pouze zvýšila výpočtovou náročnost.

Jak již název metody napovídá, přesnějších odhadů docílíme za pomoci tečen k dané funkci a při její aplikaci proto musíme znát derivaci dané funkce. Pokud bychom zvolili příliš vzdálený počáteční bod, mohla by metoda divergovat, je proto vhodná pro zpřesňování již získaného odhadu jinou metodou např. půlením intervalů, v našem případě ale využijeme bod uprostřed intervalu Eulerových kritických sil (viz výše).

Newtonova metoda je dána vztahem:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6.9)$$

Znázornění funkce této metody tečen je zobrazeno na *obrázku 6.3*:

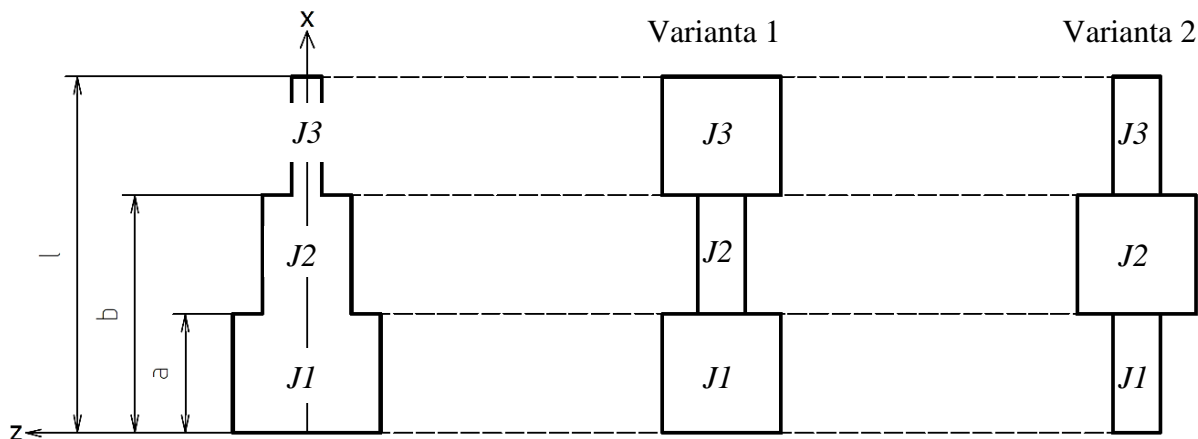


Obr. 6.3 Převzato z [8]

6.2 Numerické řešení

Ted', kdy již máme prut s odstupňovaným průřezem rozdělený na tři úseky, můžeme upravit proporce jednotlivých úseků tak, aby tato modifikace odstupňovaného prutu lépe vystihovala náš problém.

Kvůli tomu, že v programu MATLAB není možné provádět zápis indexů, budeme v následujících řádcích jednotlivé momenty úseků J_I, J_{II}, J_{III} značit $J1, J2, J3$, přičemž čísla těchto momentů začínají v počátku osy x (obr. 6.4) a nemusí se číselně v označení shodovat s hlavními kvadratickými momenty.



Obr. 6.4 Schéma modifikace tří úseků, vytvořeno v Autodesk Inventor 2013

Bude ale zapotřebí vhodně zvolit délky jednotlivých úseků. Pro začátek zvolme např. $a = 125\text{mm}$, $b = 375\text{mm}$, $l = 500\text{mm}$, v dalších odstavcích se následně podíváme na volbu těchto rozměrů poněkud podrobněji.

Variantu 1 a 2 si můžeme představit, jak je znázorněno na obr. 6.5, tj. jako dva různé pohledy na tři kvádry se stejnými podstavami o výškách vyhovujícím našim požadavkům. Kvádry jsou vzájemně pootočený o 90° a jsou dokonale spojeny tak, aby nenarušovaly spojitost a hladkost střednice prutu jimi vytvořeného.

Intuitivně můžeme předpokládat, že varianta 2 bude vykazovat větší kritickou sílu F_v , nežli varianta 1, největší ohybový moment je totiž ve střední části prutu, jejíž průhyb potom bude dominovat v celkové deformaci. Tudíž pro nás nebude tak zajímavá z hlediska řešení, protože ve skutečnosti dříve nastává případ o menší kritické síle. Pojďme si však tento předpoklad potvrdit.

6.2.1 Varianta 1

Nyní můžeme začít skriptem v programu MATLAB pro variantu 1, nejprve načteme hodnoty jednotlivých proměnných:

```
%zadání hodnot proměnných
s=input('Zadej velikost s');
h=input('Zadej velikost h');
l=input('Zadej velikost l');
a=input('Zadej velikost a');
b=input('Zadej velikost b');
E=210000;
```



Obr. 6.5 Vytvořeno v Autodesk Inventor 2013

Jak víme, $s = 10 \text{ mm}$ a $h = 5 \text{ mm}$ jsou rozměry příčného průřezu, viz *obr. 6.1 a*), hodnota E pak odpovídá modulu pružnosti v tahu v MPa. Následně vypočítáme kvadratické momenty průřezu, pro daný obdélníkový průřez platí $J_1 = \frac{h s^3}{12}$, $J_2 = \frac{s h^3}{12}$:

```
%výpočet - kvadratické momenty průřezu
J1=(h*s^3)/12
J2=(s*h^3)/12
J3=J1
```

Příloha A, řádek 14-17, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Přičemž je zřejmé, že kvadratické momenty J_1 a J_3 popsané v *příloze A*, ř. 14-17, jsou stejně velké, což plyne ze symetrie šroubovitého prutu.

Dále vypočítáme interval, ve kterém bude ležet výsledná hodnota kritické síly, k tomuto účelu využijeme Eulerovy kritické síly pro kvadratické momenty J_1 a J_2 viz kapitola 4:

```
%Eulerovy kritické síly
Fv1=(pi^2*E*J2)/l^2
Fv2=(pi^2*E*J1)/l^2
```

Příloha A, řádek 18-20, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Poté nadefinujeme hodnoty výrazů p_1, p_2, p_3 viz rovnice (6.1) až (6.3):

```
syms F positive;
p1=sqrt(F/(E*J1));
p2=sqrt(F/(E*J2));
p3=sqrt(F/(E*J3));
```

Příloha A, řádek 23-26, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

A zapíšeme matici soustavy z rovnice (6.7), vyjádříme její determinant (6.8) a pro potřeby metody tečen tento determinant také zderivujeme podle síly F :

```
%Soustava rovnic (6.7) pro výpočet integračních konstant
M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a), -sin(p2*a), -
cos(p2*a), 0, 0; 0, sin(p2*b), cos(p2*b), -sin(p3*b), -
cos(p3*b); p1*cos(p1*a), -p2*cos(p2*a), p2*sin(p2*a), 0, 0;
0, p2*cos(p2*b), -p2*sin(p2*b), -p3*cos(p3*b), p3*sin(p3*b)];
%Determinant matice (6.8)
D=det(M);
%Derivace determinantu
derD=diff(D);
```

Příloha A, řádek 28-37, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Potom z determinantu (6.8) a jeho derivace vytvoříme zápis funkce, aby bylo možné získat funkční hodnoty v různých bodech odpovídajících zadané síle, definujeme také první aproximaci této síly jako polovinu intervalu vytvořeného na základě *přílohy A*, ř. 18-20:

```
%Zápis funkcí
f=inline(D);
fd=inline(derD);
%Počáteční aproximace kritické síly
F=(Fv1+Fv2)/2;
```

Příloha A, řádek 41-45, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Nyní už jen definujeme počáteční hodnoty cyklu pro provedení výpočtu metodou tečen, zvolíme požadovanou přesnost výpočtu síly a pak následuje cyklus samotný. Nakonec zobrazíme výslednou hodnotu výpočtu včetně kontroly počtu provedených cyklů a funkční hodnotu výsledné síly ve výchozí funkci determinantu (viz příloha A, ř. 42), tato hodnota se musí blížit nule:

```
%Požadovaná přesnost výpočtu
Eps=1*10^(-1);
%počáteční hodnoty cyklu
Er=10^7;i=0;

while Er>Eps
i=i+1;
Er=F;
F=F-(f(F)/fd(F));
Er=abs(Er-F);
end;

disp('Kritická síla Fv je:');disp(F);
disp('Počet kroků výpočtu:');disp(i);
disp('Funkční hodnota pro výslednou sílu:');disp(f(F));
```

Příloha A, řádek 47-61, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Pro výše uvedené hodnoty získáváme spuštěním skriptu po zaokrouhlení následující výsledky, vzhledem k charakteru tohoto řešení je zaokrouhlení výsledků nezbytností:

$F_{v1} = 864\text{N}$

$F_{v2} = 3\,454\text{N}$

Kritická síla F_v je: 990N

Počet kroků výpočtu 4

Funkční hodnota pro výslednou sílu: 1,2e-13

6.2.2 Varianta 2

Pro tuto variantu mírně upravíme výše použitý skript, prozatím kvůli možnosti srovnávání zachováme rozměry a, b, l, s, h na předchozích hodnotách. Jak je výše uvedeno, pro tuto variantu předpokládáme výslednou kritickou sílu větší než pro předchozí případ, proto by pro nás neměla být tak zajímavá.

Pro řešení samotné se změní výpočet kvadratických momentů v jednotlivých úsecích, viz část přílohy A, ř. 14-17, obdobně jako v předchozím případě budou momenty J_1 a J_3 stejné:

```
%výpočet - kvadratické momenty průřezu
J1=(s*h^3)/12
J2=(h*s^3)/12
J3=J1
```

Příloha B, řádek 14-17, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Aby byly Eulerovy kritické síly vytvářející interval možného řešení seřazeny podle velikosti, je třeba jejich zápis prohodit:

```
%Eulerovy kritické síly
Fv1=(pi^2*E*J1)/l^2
Fv2=(pi^2*E*J2)/l^2
```

Příloha B, řádek 18-20, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Jinak není třeba provádět ve skriptu žádnou změnu a je možné jej spustit.

Pro tuto konfiguraci dostáváme následující výsledky:

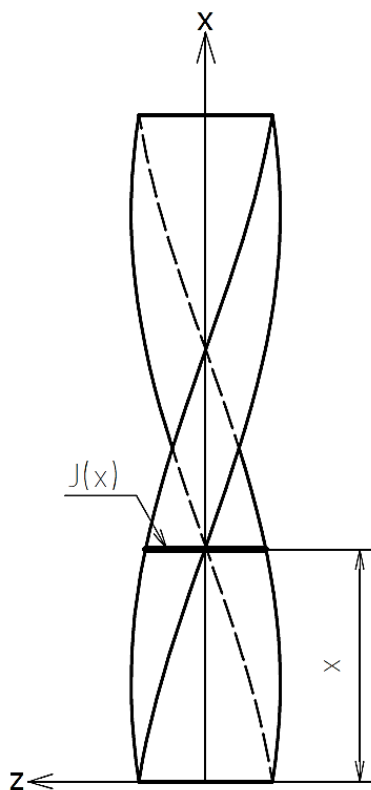
Kritická síla Fv je: 2 120N

Počet kroků výpočtu 3

Funkční hodnota pro výslednou sílu: 1,03e-20

Což splňuje náš počáteční předpoklad o velikosti této kritické síly, tj. že bude větší než kritická síla pro variantu 1. Protože je náš prut volný, může se deformovat ve kterémkoli směru, proto skutečně hledané kritické síle neodpovídá tato síla. Pro další podkapitolu tedy budeme vycházet z toho, že řešení prozatím odpovídá nejlépe varianta 1.

6.3 Volba délky a ohybové tuhosti jednotlivých úseků



Obr. 6.6 Vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013

Předchozí varianta 1 však odhaduje výsledek kritické síly šroubovitěho prutu příliš konzervativně, kvůli tomu, že hodnoty rozměrů a , b , byly pouze voleny a velikosti kvadratických momentů J_I, J_{II}, J_{III} na jednotlivých úsecích odpovídaly maximální resp. minimální hodnotě této průřezové charakteristiky, viz výše. Abychom se přiblížili skutečnému výsledku více než v dosavadních úvahách, je třeba vhodně délky a kvadratické průřezy jednotlivých úseků určit. Při zachování geometrického rázu prutu totiž není možné výrazně měnit délky jednotlivých úseků, aniž bychom současně s touto změnou nenahradili hodnoty kvadratických momentů na těchto úsecích.

Pokusme se nyní vyjádřit závislost kvadratického momentu J na souřadnici podél střednice prutu x . Můžeme si všimnout, že tento průběh má goniometrickou závislost, viz obr 6.6. Od poloviny délky prutu je pak tato závislost symetricky souměrná, pokud uvažujeme velikost natočení hlavních os čel $\psi = \pi$ stejně jako v předchozích případech. Tuto souměrnost je možné popsat druhou mocninou goniometrické funkce. Je zřejmé, že krajním hodnotám závislosti odpovídají hodnoty hlavních centrálních kvadratických momentů J_1, J_2 .

Tuto závislost zapíšeme následovně:

$$J(x) = J_2 + (J_1 - J_2) \cos^2\left(\frac{x\pi}{l}\right) \quad (6.10)$$

Následně, když už hledanou závislost máme, zbývá otázka, jakým způsobem ji lze využít.

Pomocí ní můžeme do průmětu prutu do roviny xz vepsat tři obdélníky odpovídající třem úsekům osazeného prutu právě tak, že prostřední z nich bude charakterizován minimálním

kvadratickým momentem J_2 a charakteristika zbylých dvou bude nabývat hodnoty $J(a)$, viz *obr. 6.7*. S těmito parametry pak můžeme v závislosti na délce a sledovat změnu kritické vzpěrné síly.

Dokonce, pokud např. graficky zaznamenáme závislost výše zmíněné kritické síly, jsme schopni navrhnout optimální hodnotu rozměru a tak, aby byla kritická síla co možná největší, tzn. co nejbližší realitě.

Při řešení tohoto problému využijeme skript v programu MATLAB použitý pro řešení varianty 1. Tento skript ale samozřejmě upravíme tak, abychom dosáhli daného cíle. Tento skript je celý uveden v *příloze C*.

Přikročíme tedy ke skriptu, znovu je třeba načíst hodnoty jednotlivých proměnných:

```
s=10;
h=5;
l=500;
N=20;
a=linspace(100,200,N);
Fv=zeros(1,N);
K=zeros(1,N);
Ch=zeros(1,N);
b=l-a;
E=210000;
```

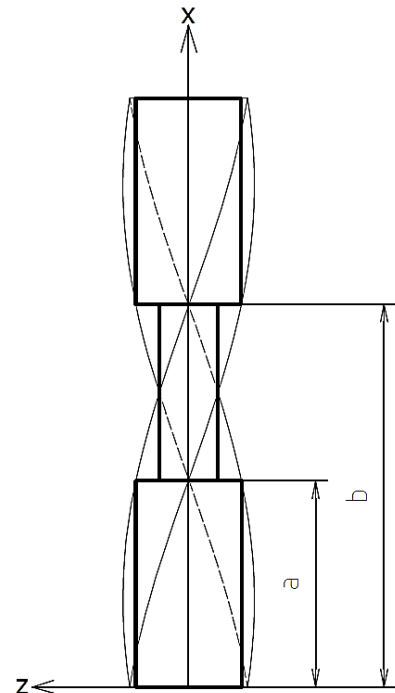
Příloha C, ř. 6-15, vytvořeno v MATLAB R2012b

Můžeme vidět, že rozměry s, h, l zůstávají stejné jako v předchozích případech, změna nastala u rozměru a , jehož hodnota je proměnná v intervalu od 100mm do 200mm , proto je zapsán ve formě řádkového vektoru, přičemž hodnota N značí počet složek tohoto vektoru. Rozsah vektoru a vychází z předpokladu, že nemá smysl uvažovat prut s rozměrem a kratším než 100mm , neboť, jak již víme, při deformaci dominuje průhyb prostřední části. Ohybová tuhost této prostřední části odpovídá kvadratickému momentu J_2 a její délka je už při této námi zvolené hraniční hodnotě příliš velká. Druhá mez rozměru a je zase dána přílišným oslabením ohybové tuhosti krajních částí prutu, tato tuhost totiž sleduje funkční zápis (6.10), tzn. čím větší rozměr a zvolíme, tím menší je hodnota $J(a)$.

Dále také můžeme předpokládat, že výchozím bodem závislosti kritické síly na rozměru a (bod, kdy $a = 0$) bude první Eulerova kritická síla odpovídající kvadratickému momentu J_2 a tatáž síla bude stejně tak i bodem koncovým pro $a = 250\text{mm}$.

Kvůli tomu, že rozměr a se stal vektorem hodnot, výpočet jednotlivých kritických sil bude probíhat cyklicky po složkách a výsledný zápis kritické síly bude také vektor o stejném počtu prvků. Definován je tedy také vektor kritických sil F_v , vektor počtu kroků výpočtu pro jednotlivou složku, podobně vektor chyb, případně rozměr b .

Nyní analogicky jako v *příloze A, ř. 14-17*, definujeme jednotlivé kvadratické momenty, vzhledem k cyklickému přepisování si je však lokálně označíme I_1, I_2, I_3 a dále dopočítáme Eulerovy kritické síly, viz část *přílohy A (ř. 18-20)*, pomocí těchto momentů.



Obr. 6.7 Vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013

Poté je třeba vytvořit cyklus pro výpočet kritických sil po složkách vektorů a, b , který obsahuje výpočet aktuálních kvadratických momentů na základě dříve definovaných $I1, I2$ a $I3$. Indexace cyklu je provedena proměnnou n .

```
J1=I2+(I1-I2)*cos(pi*a(n)/l)^2;
J2=I2;
J3=J1;
```

Příloha C, řádek 30-32, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Následuje stejný krok jako v *příloze A, ř. 23-26*, avšak matici pro výpočet soustavy rovnic, viz vztah (6.7), je nutné správně přeindexovat z důvodu následného výpočtu pouze s určitou složkou vektorů.

```
%Soustava rovnic
M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a(n)), -
sin(p2*a(n)), -cos(p2*a(n)), 0, 0; 0, sin(p2*b(n)),
cos(p2*b(n)), -sin(p3*b(n)), -cos(p3*b(n)); p1*cos(p1*a(n)),
-p2*cos(p2*a(n)), p2*sin(p2*a(n)), 0, 0; 0, p2*cos(p2*b(n)),
-p2*sin(p2*b(n)), -p3*cos(p3*b(n)), p3*sin(p3*b(n))];
```

Příloha C, řádek 40-45, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Poté následují kroky popsané v *příloze A, ř. 41-61*, změněna je pouze přesnost výpočtu na nižší, abychom výpočtovou náročnost tohoto problému snížili a alespoň trochu se přiblížili náročnosti výpočtu předchozího.

Na konci každého cyklu je dále nutné zapsat výslednou hodnotu do příslušné složky vektoru a také vymazat hodnotu uloženou v proměnné charakterizující kritickou silou pro daný cyklus, aby mohl výpočet proběhnout znovu:

```
Fv(n)=F;K(n)=i;Ch(n)=Er;
n=n+1;
clear F;
```

Příloha C, řádek 71-73, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Nakonec vytvoříme výpis výsledků vektorů dříve již definovaných na části *přílohy C, ř. 6-15*, a necháme vykreslit graf kritické síly v závislosti na rozměru a :

```
%výpis
disp('Vektor kritických sil: ');disp(Fv);
disp('Vektor počtu kroků výpočtu: ');disp(K);
disp('Vektor chyb v jednotlivých krocích [N]:');disp(Ch);
%graf
plot(a,Fv);
grid on;
xlabel('a / mm'); ylabel('F / N');
title('Závislost kritické síly F na délce a');
```

Příloha C, řádek 76-84, vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Tento skript následně můžeme spustit a zobrazit tak hledané výsledky a grafické znázornění závislosti kritické síly na zvoleném rozměru a . Dostáváme tyto výsledky:

Vektor kritických sil [N]:

$1.0e+03 *$

0.9202	0.9284	0.9372	0.9465	0.9561	0.9661	0.9763	0.9865	0.9965	1.0060
1.0147	1.0223	1.0284	1.0326	1.0344	1.0335	1.0296	1.0225	1.0122	0.9989

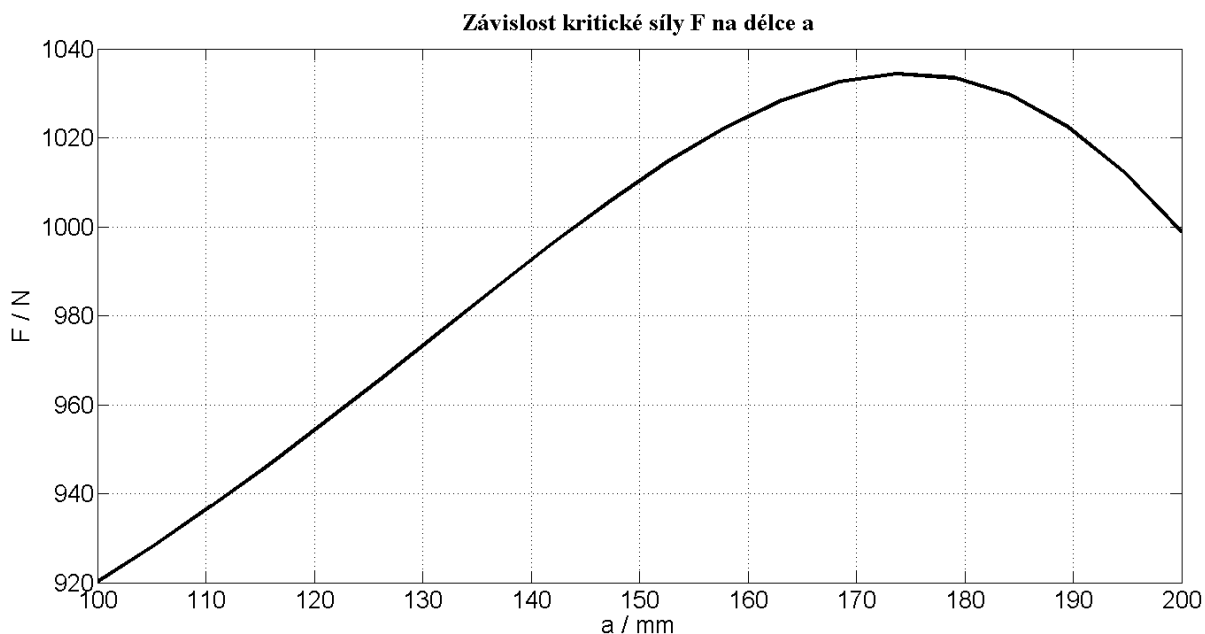
Vektor počtu kroků výpočtu [-]:

6	5	5	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	3	3	4	4	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Vektor chyb v jednotlivých krocích [N]:

0.0008	0.0328	0.0009	0.1314	0.0111	0.0003	0.0074	0.4039	0.0009	0.0017
0.0018	0.0011	0.0003	0.1070	0.1179	0.0025	0.0447	0.4401	0.0105	0.0003

Grafické znázornění pak vypadá takto:



Graf 6.1 Vytvořeno v programu MATLAB R2012b

Z uvedeného grafu 6.1 můžeme vyčíst, že optimální rozměr a leží v rozmezí $170 \div 180 \text{ mm}$. Nevykreslená část grafu skutečně, jak jsme předpokládali, začíná na hodnotě první kritické síly 864N a končí na stejné hodnotě. Teď již tedy není problém dopočítat kritickou sílu odpovídající rozměru $a = 175 \text{ mm}$ pro tento model, získaný úpravou varianty 1:

Kritická síla F_v je: 1 034N

Počet kroků výpočtu 4

Funkční hodnota pro výslednou sílu: $3e-19$

Tato kritická síla je skutečně větší než pro variantu 1, vzhledem k danému problému je ale méně konzervativním odhadem. Při pohledu na obr 6.7 totiž můžeme vidět, že se stále nacházíme na bezpečné straně, protože průmět našeho modelového případu do roviny xz nepřekračuje obrys průmětu vlastního šroubovitého prutu ani tento průmět nevyplňuje. Skutečná kritická síla vzpěru by tedy měla být ještě o něco málo větší, z hlediska našeho modelu však nejsme schopni její hodnotu více zpřesnit.

7 Prut s více závitů

Při předchozích úvahách jsme využívali předpokladu malého natočení hlavních os čel ψ . Šroubovitý prut však může být charakterizován i větším zkroucením, může tedy mít více závitů a pro odhad jeho kritické síly je nutné využít jiného postupu. Na takovýto prut se totiž lze dívat jako na celek o určité průměrné ohybové tuhosti, kterou je třeba pro výpočet kritické síly určit. Výpočet kritické síly vzpěru pak můžeme provádět, jako by se jednalo o prizmatický prut a do vztahu pro výpočet této síly (4.14) dosazovat určený průměrný kvadratický moment namísto momentu J_2 .

7.1 Prvotní odhad ohybové tuhosti

Při řešení otázky této podkapitoly je tu možnost vycházet ze závislosti kvadratického momentu na souřadnici podél střednice (6.10). Tuto závislost je samozřejmě možné integrovat přes střednici prutu a výsledek vydělit délkou prutu. Touto operací tak získáme průměrný kvadratický moment J_{av} , právě ten moment, který bude dosazen do známého Eulerova vztahu pro kalkulaci kritické síly.

$$J_{av} = \frac{\int_0^l J(x) dx}{l} \quad (7.1)$$

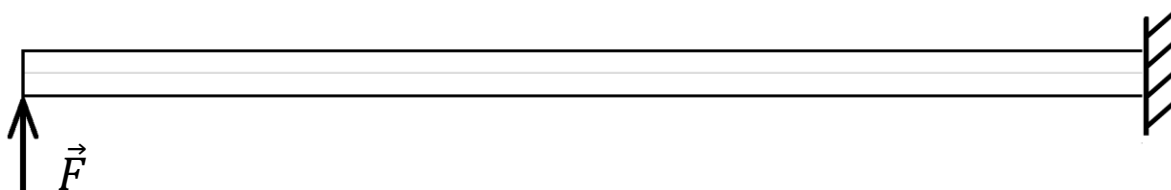
Dosazením ze vztahu (6.10) přejde rovnice (7.1) do tvaru:

$$J_{av} = \frac{\int_0^l [J_2 + (J_1 - J_2) \cos^2(\frac{x\pi}{l})] dx}{l} \quad (7.2)$$

Následně provedeme numerickou integraci pomocí programu MATLAB⁶, přičemž hodnoty vstupních veličin jsou stejné jako v kapitole 6, $J_2 \doteq 104,2mm^4$ a $J_1 \doteq 416,6mm^4$, takto dostáváme výsledek:

$$J_{av} \doteq 260,4mm^4$$

kteřý lze srovnat s výše uvedenými kvadratickými momenty J_2, J_1 . Kritická síla vypočítaná na základě tohoto průměrného kvadratického momentu by mu pak byla přímo úměrná. Než však uděláme jednoznačný závěr a kritickou sílu dopočítáme, je třeba tento postup výpočtu verifikovat nebo případně vyvrátit. K tomuto účelu využijeme modelový příklad vetknuté poloviny prutu na konci zatížené silou o velikosti F , viz *obr. 7.1*, u níž budeme počítat maximální průhyb při dosazení dvou různých ohybových tuhostí. Tento příklad odpovídá využití symetrie pro prut na dvou podporách s dvojnásobným zatížením uprostřed.



Obr. 7.1 Vytvořeno v grafickém editoru

V první fázi kontroly průhybu dané polovině prutu přiřadíme příčný průřez modelově odpovídající šroubovitému prutu⁷, jenž má vcelku pět závitů a délku $l = 500mm$. Použijeme

⁶ Viz skript v příloze D.

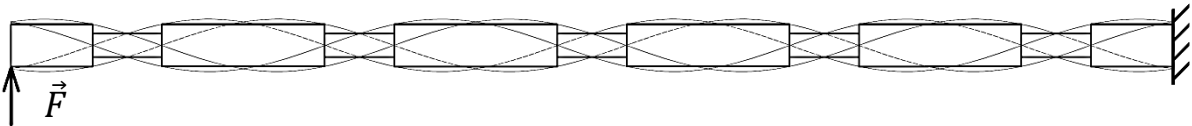
⁷ Jedná se o model s vepsanými obdélníky v průmětu skutečného prutu do roviny XZ analogicky jako na *obr. 6.7*, kap. 6.3.

prut s pěti závitů, protože takovýto prut můžeme považovat za dostatečně zkroucený⁸ a každý další závit by nám výpočet tohoto modelového příkladu dělal obtížnější, neboť k určení průhybu budeme používat Castiglianovu větu.

Ve fázi druhé tomuto prutu přiřadíme průměrný příčný průřez odpovídající výše vypočítanému momentu J_{av} a budeme prut považovat za prizmatický.

Získáním maximálních průhybů pro obě kontrolní fáze můžeme porovnat jednotlivé ohybové tuhosti obou případů. Díky tomu budeme schopni rozhodnout o použitelnosti výše uvedeného výpočtu průměrného momentu J_{av} .

Znázornění modelu poloviny šroubovitého prutu pro výpočet průhybu v první kontrolní fázi je zobrazeno na obr. 7.2.



Obr. 7.2 Vytvořeno v programu Autodesk Inventor 2013

Lze na něm vidět, že hodnoty ohybové tuhosti delších úseků odpovídají hodnotě $J(175)$ podle rovnice (6.10), viz závěr kapitoly 6.3, a kratší úseky jsou svázané s momentem J_2 .

Nyní tedy přikročíme k obecnému zápisu výpočtu průhybu podle Castiglianovy věty:

$$w_{1max} = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left[M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F} \right] dx \quad (7.3)$$

Pro uvažované zatížení je zřejmý zápis ohybového momentu po délce střednice $M(x) = Fx$ vstupujícího do předchozího vztahu. Polovina prutu má délku $l/2 = 250\text{mm}$, tu je třeba rozpočítat na jednotlivé integrační meze, abychom mohli provést integraci. Jestliže si označíme délky delších úseků d a délky kratších k , vztah pro integraci bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} w_{1max} = & \frac{\int_0^{\frac{1}{2}d} Fx^2 dx + \int_{\frac{1}{2}d+k}^{\frac{3}{2}d+k} Fx^2 dx + \int_{\frac{3}{2}d+2k}^{\frac{5}{2}d+2k} Fx^2 dx + \int_{\frac{5}{2}d+3k}^{\frac{7}{2}d+3k} Fx^2 dx + \int_{\frac{7}{2}d+4k}^{\frac{9}{2}d+4k} Fx^2 dx + \int_{\frac{9}{2}d+5k}^{\frac{5d+5k}{2}} Fx^2 dx}{EJ(175)} \\ & + \frac{\int_{\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d+k} Fx^2 dx + \int_{\frac{3}{2}d+k}^{\frac{3}{2}d+2k} Fx^2 dx + \int_{\frac{5}{2}d+2k}^{\frac{5}{2}d+3k} Fx^2 dx + \int_{\frac{7}{2}d+3k}^{\frac{7}{2}d+4k} Fx^2 dx + \int_{\frac{9}{2}d+4k}^{\frac{9}{2}d+5k} Fx^2 dx}{EJ_2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Vzhledem k délce poloviny prutu a počtu jednotlivých úseku lze jednoduše vyjádřit hodnoty $d = 35\text{mm}$ a $k = 15\text{mm}$. Po dosazení do vztahu (6.10) dostáváme $J(175) = 168,6\text{mm}^4$. Zatěžující sílu volíme $F = 100\text{N}$.

Po dosazení všech potřebných hodnot do vztahu (7.4) dostáváme maximální průhyb:

$$w_{1max} = 17,41\text{mm} \quad (7.5)$$

Teorie lineární pružnosti je zde použitelná, protože maximální úhel natočení střednice prutu je menší než 6° .

⁸ Ve srovnání s prutem uvažovaným v kapitole 6 má desetkrát větší šroubovitost, tj. desetkrát menší stoupání závitů.

Nyní pokračujeme druhou fází výpočtu a vypočítejme si průhyb pro uvažovaný prizmatičký prut o kvadratickém momentu J_{av} . Obdobně využijeme řešení poloviny prutu plynoucí ze symetrie úlohy spolu s Castiglianovou větou:

$$w_{2max} = \frac{1}{EJ_{av}} \int_0^{l/2} Fx^2 dx = \frac{F}{EJ_{av}} \frac{1}{3} [x^3]_0^{l/2} = \frac{100}{210\,000 \cdot 260,4 \cdot 3} \cdot 250^3 \quad (7.6)$$

Tento výraz vede na výsledek:

$$w_{2max} = 9,52 \text{ mm} \quad (7.7)$$

Tento průhyb následně můžeme srovnat s průhybem dosaženým v předchozí fázi. Na první pohled je vidět, že jednotlivé ohybové tuhosti jsou zcela odlišné, a tudíž nelze použít pro výpočet kritické síly výše určený průměrný kvadratický moment vyplývající z rovnice (7.2). Tento vztah by bylo pravděpodobně možné použít v případě, pokud by byl průhyb popsán lineární závislostí, což v tomto případě neplatí⁹.

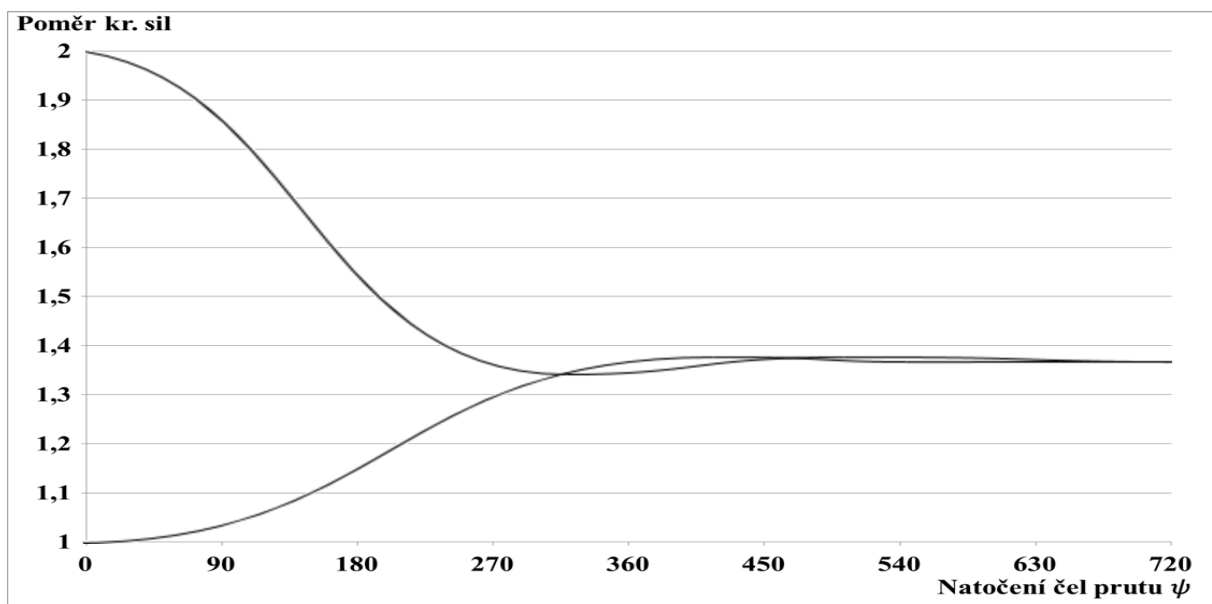
7.2 Průměrná ohybová tuhost

Protože se nám v předchozí podkapitole nepodařilo nalézt platnou hodnotu průměrného kvadratického momentu J_{av} , je třeba zkusit hledat v dostupné literatuře.

Vypracováno podle [6]

Již víme, že prizmatičký prut obdélníkového příčného průřezu má dva hlavní centrální kvadratické momenty. Těmto momentům jsou přiřazeny na základě vztahu (4.14) dvě kritické síly, přičemž jejich poměr odpovídá poměru těchto kvadratických momentů. Abychom zjistili, jaký vliv má natočení ψ na ohybovou tuhost ve vzpěru, je na místě vykreslit graf závislosti poměru obou kritických sil pro uvažovaný obdélníkový průřez na zkroucení ψ ve stupních.

Tato závislost je znázorněna *grafem 7.1*.



Graf 7.1 Přepřacováno podle [6]

Na grafickém znázornění můžeme vidět, že postupně se vzrůstajícím zkroucením ψ ve stupních dochází k očekávanému růstu tuhosti ve vzpěru pro první zatěžovací mód, zatímco u kritické síly pro druhý mód dostáváme pokles. V blízkosti hodnoty zkroucení $\psi = 360^\circ$

⁹ Po integraci vztahu z Castiglianovy věty je průhyb w nelineární funkcí proměnných J_{av} a x .

začínají tyto dva módy konvergovat s mírnou fluktuací k jedné hodnotě, která závisí na počátečním poměru první a druhé kritické síly pro prizmatický (nezkroucený) prut stejného příčného průřezu. Tento trend se dále opakuje s ještě menšími výchylkami pro větší úhly zkroucení.¹⁰ Jakmile je pak šroubovitost prutu dostatečně velká, tyto dva zatěžovací módy splynou dohromady. Dále také můžeme vidět, že hodnota, k níž se asymptoticky blíží první kritická síla vzpěru v oblasti většího zkroucení, je o 33% větší¹¹ než u prizmatického prutu stejného příčného průřezu.

Z předchozího je v [6] vyvozen závěr, že pro dostatečně velké zkroucení hlavních os čel prutu přejdou vztahy vyjadřující rovnici průhybové čáry, viz (5.31), na tento tvar:

$$w'' = -\frac{M_{0y}}{EJ_{av}}, \quad v'' = \frac{M_{0z}}{EJ_{av}} \quad (7.8)$$

kde J_{av} je obdobně jako v předchozí podkapitole průměrný kvadratický moment. Dále pak:

$$\frac{2}{J_{av}} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \quad \text{resp.} \quad J_{av} = \frac{2J_1J_2}{J_1+J_2} \quad (7.9)$$

Přičemž podle velikosti poměru hlavních kvadratických momentů můžeme vztah (7.9) dále upravovat, např. pro $J_1/J_2 = 2$ lze napsat:

$$J_{av} = \frac{2J_1J_2}{J_1+J_2} = \frac{4J_2J_2}{2J_2+J_2} = \frac{4}{3}J_2 \quad (7.10)$$

Pokud bychom tento postup aplikovali na prut s parametry, pro které jsme prováděli výpočet v předchozích kapitolách, tj. $s = 10 \text{ mm}$, $h = 5 \text{ mm}$, dostáváme následující:

$$\frac{J_1}{J_2} = 4; \quad J_{av} = \frac{8}{5} J_2 \quad (7.11)$$

Z předchozího víme, že $J_2 \doteq 104,2 \text{ mm}^4$. J_{av} pak podle vztahu (7.11) bude nabývat hodnoty:

$$J_{av} \doteq 166,7 \text{ mm}^4 \quad (7.12)$$

Tento průměrný kvadratický moment nyní můžeme využít k výpočtu kritické síly pro prut s větší šroubovitostí, než byla uvažována v kapitole 6. Z uvedené teorie vyplývá, že již prut se zkroucením $\psi = 360^\circ$ má předpoklady blízké k tomu, aby bylo možné použít tuto průměrnou ohybovou tuhost. Kritická síla pro uvažovaný prut pak nabývá hodnoty:

$$F_v = \frac{\pi^2 E J_{av}}{l^2} \quad (7.13)$$

Což našemu dostatečně šroubovitému prutu o délce l určuje hodnotu $F_v = 1380 \text{ N}$.

¹⁰ Tyto poznatky poprvé zveřejnil Frisch-Fay v roce 1973.

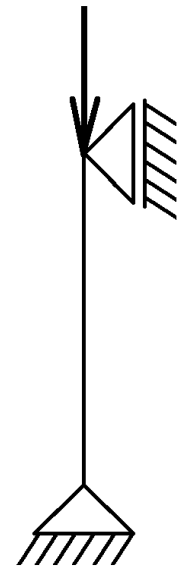
¹¹ Platí pro prut s poměrem kvadratických momentů $J_1/J_2 = 2$ (je předmětem zdroje [6]).

8 Ověření v programu ANSYS

Cílem této kapitoly je kontrola a porovnání výsledků dosažených ve výše uvedených odstavcích s výsledky určenými metodou konečných prvků. Při komparaci se ke slovu dostane zjednodušený model mírně zkrouceného prutu počítaný s využitím modifikované úlohy pro osazený prut a dále pak prut s více závitů. Aby bylo možné provést řešení velikosti síly vzpěru touto nezávislou metodou, bylo nutné vytvořit v programu Autodesk Inventor 2013 trojrozměrné modely výše uvedených dvou šroubovitých prutů, jejichž specifikace samozřejmě vycházejí z kapitoly 6 resp. 7.

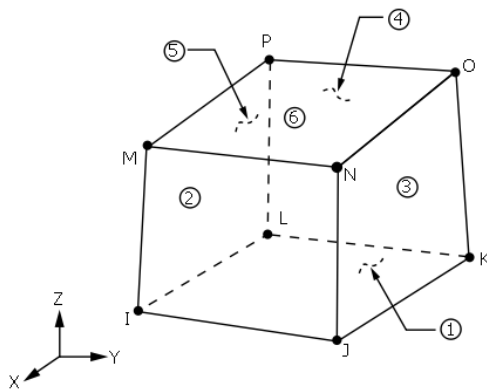
Geometrie těchto šroubovitých prutů byla importována do programu ANSYS 16.2 a výpočet probíhal v prostředí Workbench, přesněji v modulu strukturální analýzy propojeným s doplňujícím modulem pro vyhodnocování vzpěrné stability.¹²

Pro provedení výpočtu pomocí metody konečných prvků je dále nutné vyšetřované těleso doplnit o vazby, aby model byl vázán nepohyblivě a staticky určitě. Jinak řečeno dodat dostatečný počet okrajových podmínek, a zajistit tak jednoznačné řešení matice soustavy. Proto je třeba volný prut uvažovaný v této práci, nahradit z hlediska řešení prutem kloubově uloženým na obou koncích, viz *obr. 8.1*.



Obr. 8.1

Přepřacováno podle [5]



Obr. 8.2 Prvek Solid 185, převzato z [9]

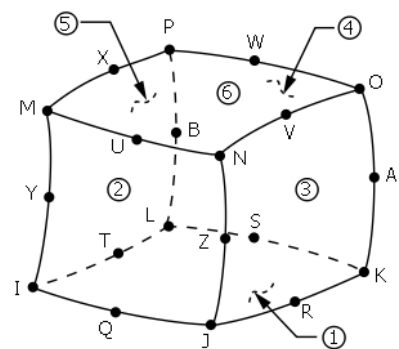
typy prvků, které je možno použít. Prvním z nich je lineární šestistěn označený Solid 185 viz *obr. 8.2*, jenž má osm uzlových bodů se třemi stupni volnosti¹⁴.

Druhým je šestistěn Solid 186, který lépe vystihuje zakřivené tvary, na rozdíl od prvku předchozího je totiž doplněn o další uzly, viz *obr. 8.3*, což s sebou však přináší vyšší výpočtovou náročnost. Analogicky má v každém uzlu tři stupně volnosti.

Pro možnost srovnání výsledků a vyhodnocení potřebné hustoty sítě tedy obě úlohy počítáme

Abychom zajistili nepohyblivost modelu, je třeba provést některé operace. Zamezíme tedy ve výpočtovém prostředí rotaci prutu kolem vlastní osy. Na jedné podstavě zamezíme všem posuvům a na druhé provedeme obdobnou operaci, přičemž jí ponecháme volný axiální posuv. Navíc tuto podstavu volně pohyblivou v jednom směru zatížíme osově silou $F = 1N$ ¹³. Tato konfigurace byla ověřena pomocí volného prizmatického prutu, přičemž byla nalezena shoda s analytickým řešením.

Pro výpočet je následně nutná diskretizace úlohy na jednotlivé prvky. Geometrie šroubovitého prutu s obdélníkovým příčným průřezem předurčuje dva



Obr. 8.3 Prvek Solid 186, převzato z [9]

¹² Názvy modulů v angličtině jsou „Static Structural“ a „Eigenvalue Buckling“

¹³ Modul pro výpočet vzpěru vyhodnocuje, při jakém násobku zatížení nastane ztráta vzpěrné stability, při zadání hodnoty $F = 1N$ je tedy tento násobek přímo roven velikosti kritické síly.

¹⁴ Posuvy ve směrech os znázorněných na *obrázku 8.2*.

s využitím obou typů prvků a provádíme postupné zjemňování sítě, tj. používáme prvky o velikosti 10; 5 a 2,5mm.

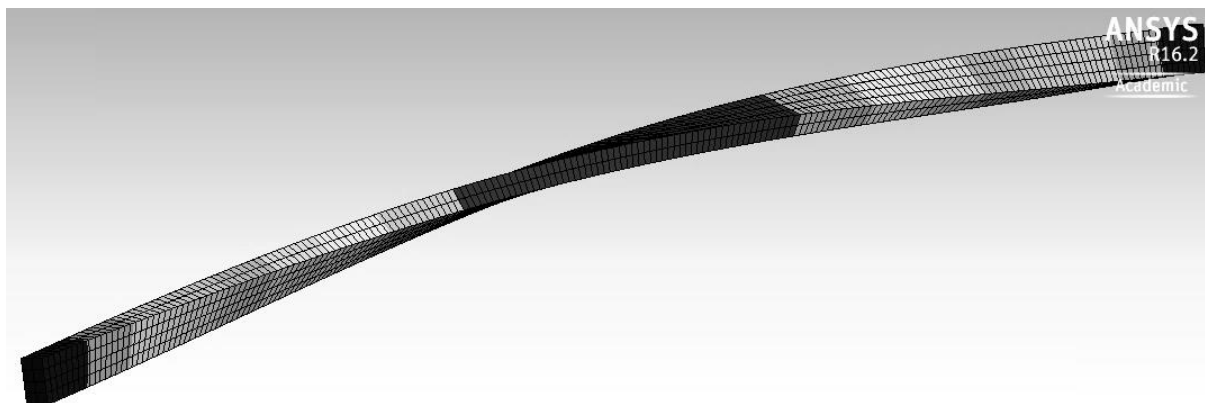
Po provedení výpočtů v programu ANSYS 16.2 dostáváme pro prut se zkroucením $\psi = 180^\circ$ výsledky popsané v *tabulce 8.1*.

Tabulka 8.1

Velikost [mm]	Typ prvku	Počet uzlů	Kritická síla [N]
10	Solid 185	208	1027,8
	Solid 186	620	1024,9
5	Solid 185	612	1025,3
	Solid 186	1 932	1024,8
2,5	Solid 185	3 030	1025,0
	Solid 186	10 489	1024,9

V *tabulce 8.1* můžeme vidět, že jednotlivé výsledky jsou velmi podobné a již prvky o největší velikosti typu Solid 186 dávají velice přesný odhad kritické síly. Jemnější síť vykazuje výsledky rozdílné řádově o setiny procent. Pro srovnání lze uvést výsledek z kapitoly 6.3, kde $F_v = 1034N$.

Vizualizace deformace prutu pro tuto úlohu je zobrazena na *obr. 8.4*. Protože cílem je pouze určení kritické síly vzpěru, není přiložena legenda velikosti deformací.



Obr. 8.4 Vytvořeno v programu ANSYS 16.2

Dále následuje *tabulka 8.2* s výsledky pro prut s větším zkroucením (úhel zkroucení 1800° , tj. pět plných otáček), jenž je analyticky řešen v kapitole 7.

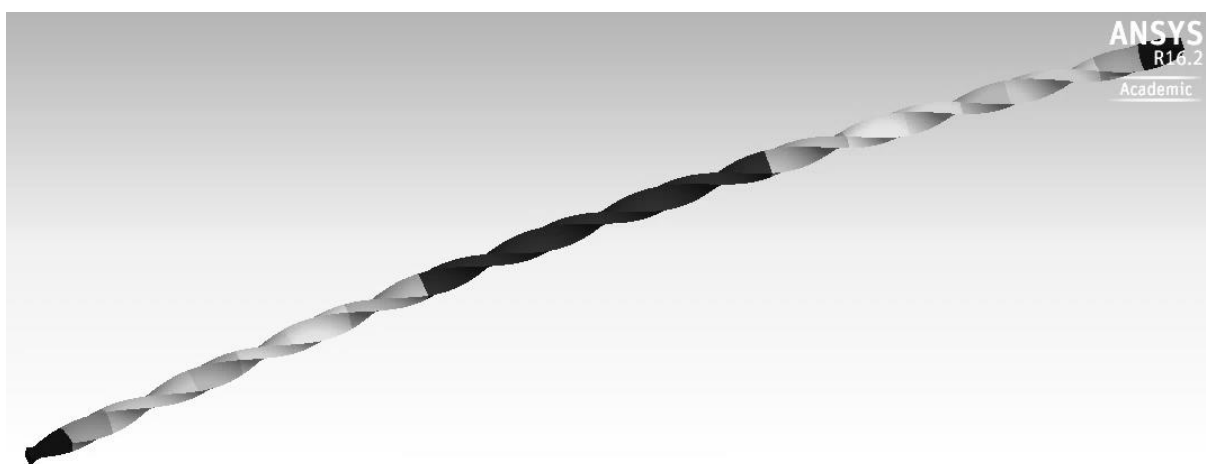
Tabulka 8.2

Velikost [mm]	Typ prvku	Počet uzlů	Kritická síla [N]
10	Solid 185	216	1571
	Solid 186	644	1296
5	Solid 185	642	1332
	Solid 186	2027	1298
2,5	Solid 185	3195	1315
	Solid 186	11 061	1305

Pohledem do *tabulky 8.2* zjistíme, že přesnější výsledky dává znovu nelineární hexaedrický prvek Solid 186, přičemž kvůli složitějšímu tvaru je rozdíl při zjemňování sítě mezi jednotlivými výsledky větší než v předchozím výpočtu. Pro porovnání zde znovu uvádím výsledek z kapitoly 7.2, kde $F_v = 1380N$.

Rozdíl mezi analytickým a numerickým řešením je větší (cca 5%), zejména kvůli většímu vlivu smykových napětí zanedbaných v analytickém řešení. Tento vliv je čitelný z rozboru¹⁵ poměru smykových napětí a axiálních napětí v podélném řezu daného prutu. Pro prut s velkým stoupáním závitu (mírně zkroucen) odpovídá tento poměr pro extrémní hodnoty 12% a v kritickém místě se smykové napětí podílí pouze 7%. Na rozdíl od toho u prutu s menším stoupáním závitu se poměr maximálních hodnot těchto napětí vyšplhal na 45% a v kritickém místě na 22%. Proto vzniká výše uvedený rozdíl mezi analytickou a numerickou metodou výpočtu.

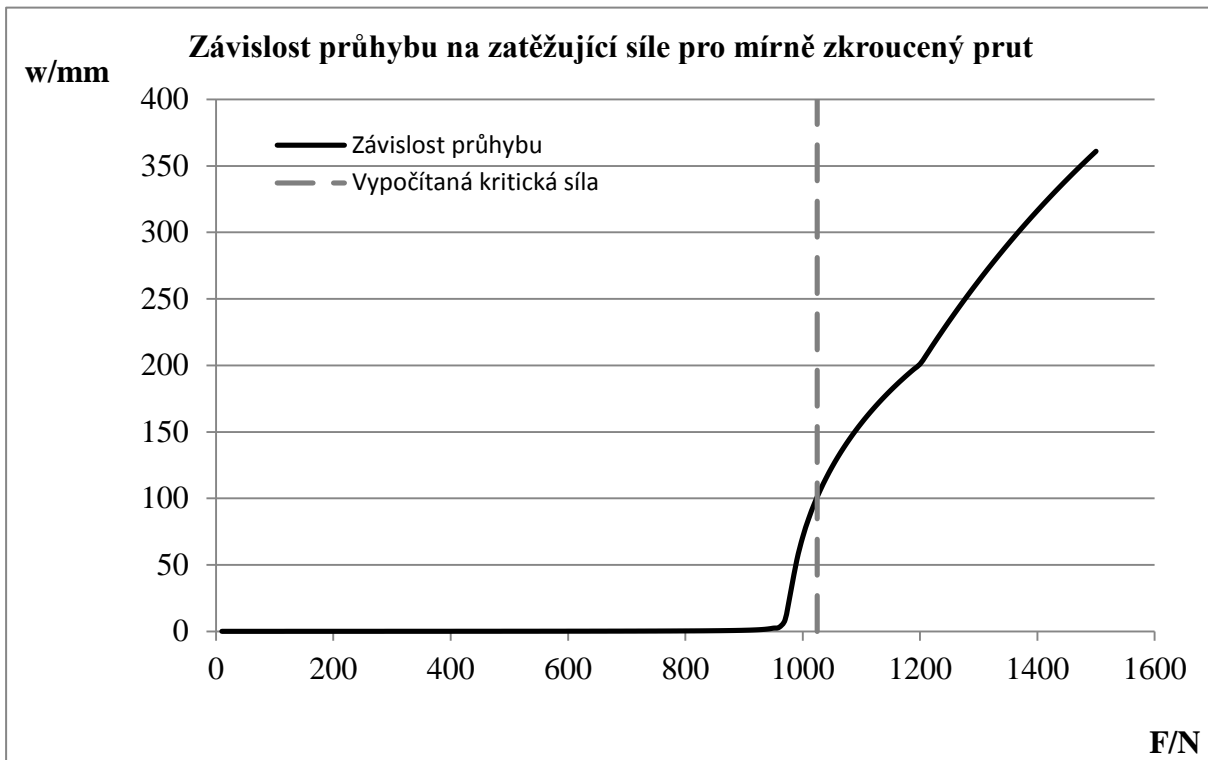
Vizualizaci deformace prutu s více závity nyní zobrazuje *obr. 8.5*.



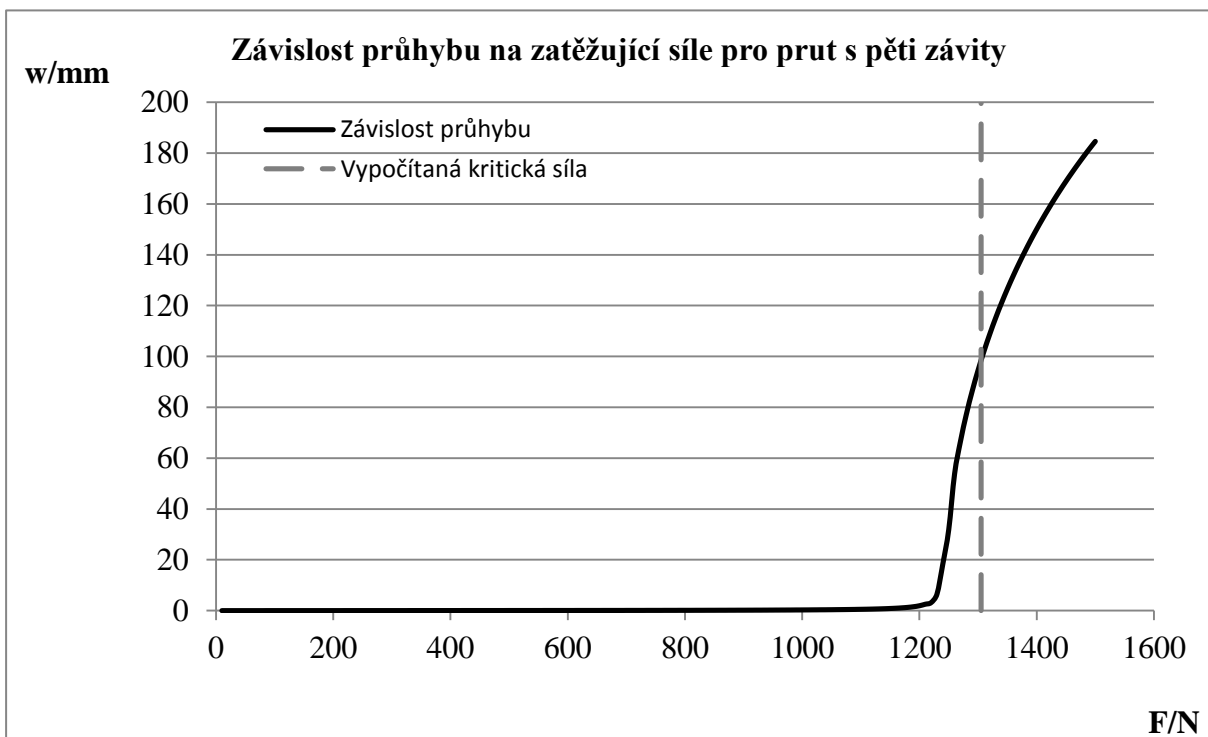
Obr. 8.5 Vytvořeno v programu ANSYS 16.2

Pro objasnění funkce modulu provádějícího kalkulaci kritické síly vzpěru byl následně v programu ANSYS 16.2 proveden výpočet velikosti průhybu prutu v závislosti na krokově se zvyšující zatěžující síle. Z těchto výsledků je sestaven *graf 8.1* a *graf 8.2* zobrazující tuto závislost. Tyto grafy se nacházejí na následující straně.

¹⁵ Rozbor byl proveden v programu ANSYS 16.2 s využitím geometrií obou typů prutů.



Graf 8.1 Vytvořeno v programu Microsoft Excel



Graf 8.2 Vytvořeno v programu Microsoft Excel

Na grafech lze vidět, že program při výpočtu označí za kritickou tu zatěžující sílu, která odpovídá laterální výchylce $w = 100\text{mm}$ prutu o našich rozměrech. Můžeme si také všimnout, že se znázorněné chování těchto součástí velmi blíží vzpěru s bifurkací rovnováhy, viz kapitola 1.2.

9 Zhodnocení výsledků

Na počátku byl odhad kritické síly pro mírně zkroucený prut postaven pouze na dvou pilířích odpovídajícím dvěma krajním hodnotám intervalu, které byly utvořeny z Eulerových kritických sil pro hlavní kvadratické momenty příčného průřezu. Rešeršní část však ukázala, že exaktní řešení úlohy šroubovitého prutu překračuje naše možnosti, proto další směr udala myšlenka upravit řešení odstupňovaného prutu tak, aby bylo použitelné pro zkroucený typ prutů.

Základním stavebním kamenem pro tyto úvahy byla teorie pro prizmatické pruty s rozšířením o neprizmatické typy prutů, přičemž jsem se omezil na jejich tři základní druhy. Začátek tohoto popisu pojednával o osazeném typu prutu, následoval prut se spojitě proměnným zužujícím se příčným průřezem a největší pozornost byla samozřejmě věnována šroubovitému prutu.

Poznatky nabyté v rešeršní části následně mohly být aplikovány na řešení kritické síly šroubovitého prutu zvolených rozměrů, a to ve dvou úrovních. První z nich zahrnovala řešení prutu s mírným zkroucením hlavních os čel, druhá obsahovala prut s větší šroubovitostí, tj. s menším stoupáním, protože zvýšení kritické síly v důsledku šroubovitosti je pro tyto dva případy odlišné.

Problém mírně zkrouceného prutu vycházel z modifikace řešení odstupňovaného prutu s využitím numerického řešení počítaného programem MATLAB. Tato úloha byla rozšířena na tři úseky, jež při dosazení hlavních kvadratických momentů pouze velmi hrubě napodobovala šroubovitý prut. Až vhodné určení délek jednotlivých úseků a jejich ohybových tuhostí na základě funkční závislosti pro kvadratický moment proměnný po délce střednice prutu, dalo tomuto zjednodušenému modelu předpoklady pro přesnější odhad kritické síly.

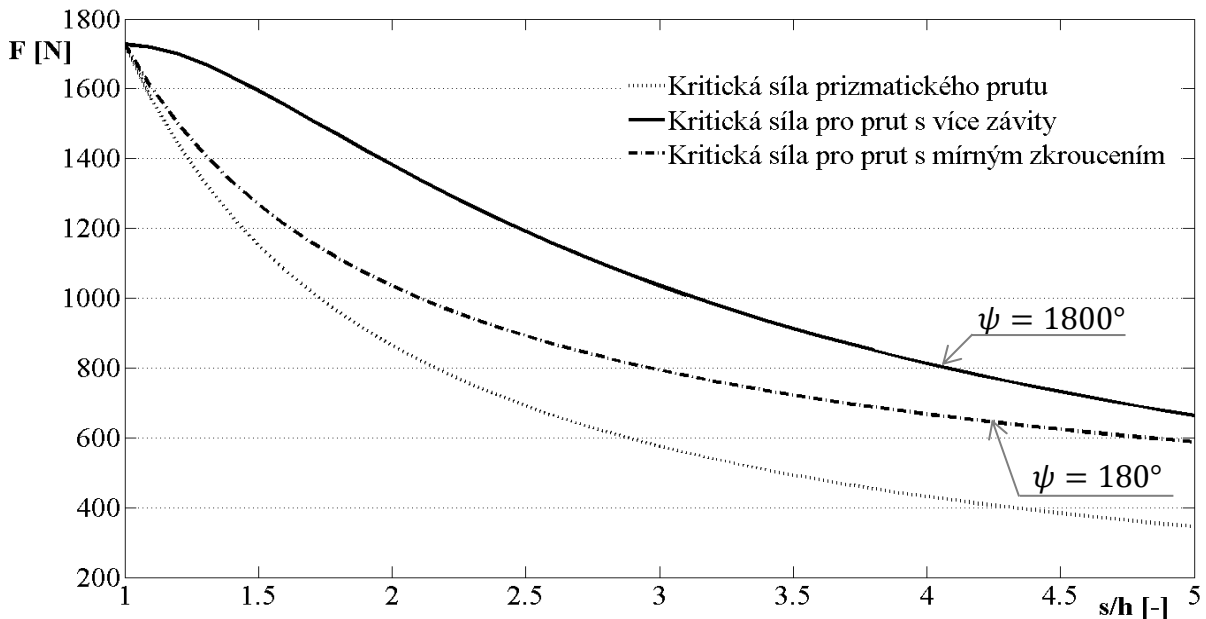
Následně byl řešen prut s větším zkroucením, který původně také stál na stejných dvou pilířích z Eulerových kritických sil, jak se ale později ukázalo, tyto pilíře měly ještě mnohem větší dopad na řešení než v předchozím, neboť výsledek kritické síly pro tento případ prutu přímo souvisí s poměrem hlavních centrálních kvadratických momentů, který se shoduje s odpovídajícím poměrem těchto Eulerových sil.

Nakonec bylo provedeno ověření uvažovaných úloh s výpočty dosaženými konečno-prvkovým programem, přičemž bylo zjištěno, že rozdíl mezi použitými analytickými vztahy a numerickým řešením je v rámci cca 5%, důvod tohoto rozdílu je popsán v kapitole 8.

10 Závěr

Cílem této práce bylo kvantifikovat zvýšení kritické síly vzpěru prutu v důsledku vzájemného natočení podstav kolem podélné osy, tzn. vlivem šroubovitosti.

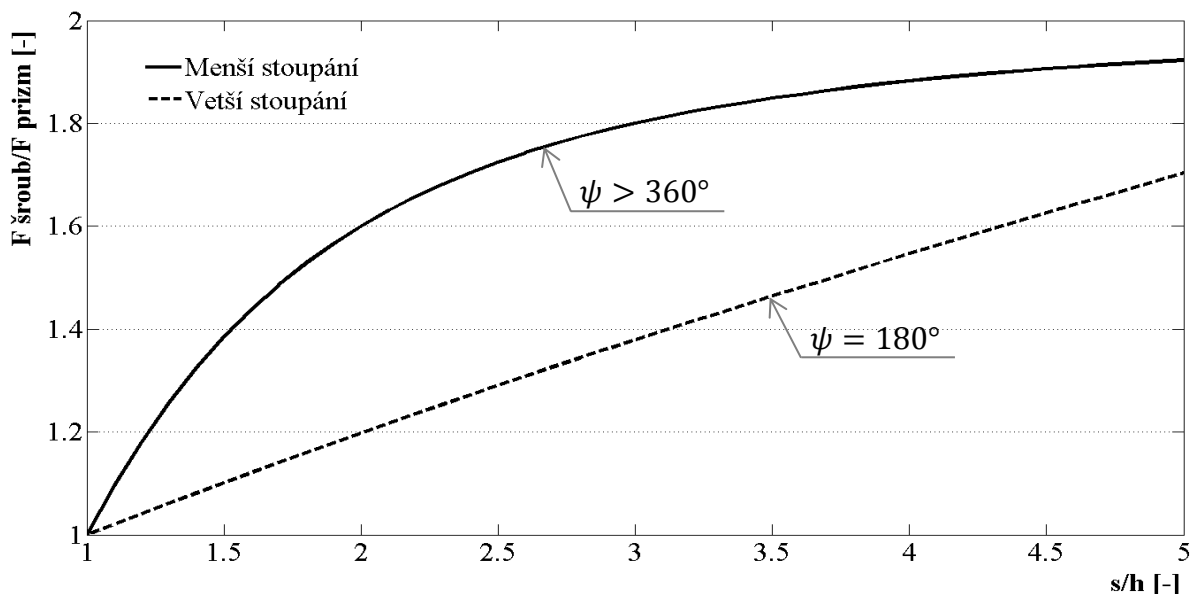
Díky rešeršní části byl nalezen přístup, který byl použit pro vlastní řešení kritické síly takto konstrukčně modifikovaných prutů. Bylo zjištěno, že prut s velkým stoupáním závitu (mírně zkroucený) vykazuje odlišné chování než prut se stoupáním menším (více závitů). Pro lepší představu této situace jsem vytvořil *graf 10.1*, jenž zobrazuje závislost kritických sil pro tyto dva druhy prutů na poměru délek stran obdélníkového příčného průřezu s/h . Byla dodržena konstantní velikost obsahu příčného průřezu $S = 50\text{mm}^2$ a délka prutu $l = 500\text{mm}$.



Graf 10.1 Velikost kritické síly vzpěru prutu s obdélníkovým příčným průřezem pro různé míry šroubovitosti. (Skript v příloze F)

Volný prut s mírným zkroucením v zobrazeném grafu odpovídá prutu s polovinou závitu ($\psi = 180^\circ$), prut s více závitů pak zkroucení o pět plných otáček ($\psi = 1800^\circ$).

Ještě zajímavějším závěrem je pak zobecnění předešlého grafu do *grafu 10.2*.



Graf 10.2 Poměrné zvýšení kritické síly vzpěru prutu s obdélníkovým příčným průřezem pro různé míry šroubovitosti. (Skript v příloze F)

Graf 10.2 totiž zobrazuje závislost podílu kritické síly volného šroubovitého prutu $F_{\text{šroub}}$ a odpovídající kritické síly prutu prizmatického F_{prizm} na poměru délek stran prutu s/h ¹⁶. Na tomto grafu lze navíc vidět vliv šroubovitosti prutu na zvýšení kritické síly pro celou škálu rozměrů uvažovaných prutů s ohledem na zachování dostatečné štíhlosti. Analogicky také tento graf vychází z předpokladu stejného obsahu příčných průřezů.

Křivka představující prut s malým stoupáním závitů v podstatě vymezuje možné zvýšení kritické síly vlivem šroubovitosti, což plyne z teorie uvedené v kapitole 7, protože zmenšování stoupání závitů se od hodnoty celkového zkroucení $\psi \doteq 360^\circ$ již přestává projevovat na zvyšování kritické síly. Prut pak lze charakterizovat průměrným kvadratickým momentem J_{av} , ten je limitován poměrem dvou hlavních kvadratických momentů J_1/J_2 , který se rovná druhé mocnině poměru s/h použitého v grafu.

Je důležité neopomenout situaci, kdy je příčný průřez čtvercový. Pro takovýto prut šroubovitost nepřináší zvýšení kritické síly vzpěru, protože v tomto případě nejsou ohybové tuhosti charakterizované hlavními kvadratickými momenty průřezu rozdílné a při jejich kombinaci dostáváme hodnotu s nimi totožnou. Na druhé straně ale z hlediska velikosti kritické síly tato konfigurace znamená lepší volbu než obdélníkový příčný průřez, který při stejném obsahu příčného průřezu nedosáhne stejně velké síly ani vlivem šroubovitosti.

Již tedy víme, že pokud umělecký kovář vytvoří šroubovitý prut s obdélníkovou podstavou, docílí tak nejen zlepšení estetického dojmu, ale také navýší kritickou sílu potřebnou k dosažení mezního stavu vzpěrné stability. Tato síla bude záležet nejen na poměru délek stran obdélníkového průřezu, ale také na celkovém zkroucení ψ uvažovaného prutu. Podle těchto parametrů lze pak velikost zvýšení kritické síly odečíst z uvedeného grafu 10.2 pro uvažovaný rozsah hodnot.

¹⁶ Obvykle se značí b/h , v této práci má však symbol b jiný význam.

Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3., přeprac. vyd., v Akademickém nakl. CERM 1. Brno: CERM, 2004, 287 s., ISBN 80-214-2592-x
- [2] WANG, C. M.; WANG, Chang Yi. Exact solutions for buckling of structural members. 2004, CRC press, ISBN 0-8493-2222-7
- [3] TIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James M.: Solutions manual for Mechanics of materials. Boston: Brooks/Cole Engineering, 1985. ISBN 9780534031008
- [4] BLOOM, Frederick; COFFIN, Douglas. Handbook of thin plate buckling and postbuckling. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000. ISBN 1584882220.
- [5] HORNÍKOVÁ, Jana. Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text [online]. 1. vyd. Brno: CERM, 2003 [cit. 2016-02-15]. ISBN 80-720-4268-8. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>
- [6] TABARROK, B., et al. On buckling of pretwisted columns. International journal of solids and structures, 1990, 26.1: 59-72, ISSN 0020-7683
- [7] HUANG, Ying; CHEN, Changhong. Elastic flexural-torsional buckling behavior of pre-twisted bar under axial pressure. In: Mechanic Automation and Control Engineering (MACE), 2011 Second International Conference on. IEEE, 2011. p. 7340-7343. ISSN 2278-067X
- [8] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [9] ANSYS, Inc., ANSYS Help Viewer, Version 16.2.0, Build Date 30. 6. 2015.

Seznam použitých symbolů

Symbol	Popis	Jednotka
A	Kladná konstanta	-
A_1, A_2	Integrační konstanta	-
B	Kladná konstanta	-
B_1, B_2	Integrační konstanta	-
C	Kladná konstanta	-
C_1, C_2, C_3, C_4	Integrační konstanta	-
D_1, D_2	Integrační konstanta	-
E	Youngův modul pružnosti v tahu	MPa
F	Zatěžující síla	N
F_v	Kritická síla ztráty vzpěrné stability	N
F_{v1}	První kritická síla, zápis pro MATLAB	N
F_{v2}	Druhá kritická síla, zápis pro MATLAB	N
Ch	Vektor chyb v jednotlivých krocích cyklu	-
$I1, I2, I3$	Lokální značení kvadratického momentu na úsecích prutu	mm ⁴
$J(x)$	Osový kvadratický moment	mm ⁴
$J1, J2, J3$	Lokální značení kvadratického momentu na úsecích prutu	mm ⁴
J_1	Maximální hlavní centrální kvadratický moment	mm ⁴
J_2	Minimální hlavní centrální kvadratický moment	mm ⁴
J_{av}	Průměrný osový kvadratický moment pro prut s více závitů	mm ⁴
$J_C, J-C$	Lineárně nezávislé Besselovy funkce	-
J_b, J_{II}, J_{III}	Kvadratické momenty jednotlivých úseků prutu	mm ⁴
J_y	Kvadratický moment k ose y	mm ⁴
J_z	Kvadratický moment k ose z	mm ⁴
K	Vektor počtu kroků v cyklu	-
M_o	Ohybový moment	Nm
M_{oy}	Ohybový moment kolem osy y	Nm
M_{oz}	Ohybový moment kolem osy z	Nm
N	Normálová síla	N
S	Obsah příčného průřezu	mm ²
$U(z), V(z)$	Nezávislá řešení rovnice (5.10)	-
a	Souřadnice x pro koncový bod prvního úseku prutu	m
b	Souřadnice x pro koncový bod druhého úseku prutu	m
$f(x_i)$	Hodnota funkce v bodě x_i	-
$f'(x_i)$	Hodnota derivace funkce v bodě x_i	-
h	Rozměr výšky příčného průřezu prutu	m

$h(x)$	Proměnný rozměr výšky příčného průřezu	m
l	Původní celková délka prutu	m
l_d	Délka prutu po deformaci	m
n	Exponent $h(x)$	-
p^2	Substituční proměnná	m^{-2}
p_1, p_2, p_3	Substituční proměnná pro dané úseky prutu	m^{-1}
p_1^2, p_2^2	Substituční proměnná na daném úseku prutu	m^{-2}
s	Rozměr šířky příčného průřezu prutu	m
u	Deformační posuv v ose x	m
v	Deformační posuv v ose y	m
v'	Derivace posuvu v ose y (natočení)	rad
v''	Druhá derivace posuvu v ose y (křivost)	m^{-1}
$w(x)$	Deformační posuv v ose z (průhyb)	m
$w'(x)$	První derivace posuvu v ose z (natočení)	rad
$w''(x)$	Druhá derivace posuvu v ose z (křivost)	m^{-1}
w_1, w_2, w_3	Průhyb v jednotlivých úsecích prutu pro kap. 6	m
w_{1max}, w_{2max}	Maximální průhyb daného modelového příkladu	m
w_h	Homogenní řešení diferenciální rovnice pro průhyb	m
$w_I(x), w_{II}(x)$	Průhyb v ose z pro daný úsek prutu, kap. 5	m
$w'_I(x), w'_{II}(x)$	Natočení v ose z pro daný úsek prutu	m
x	Délková souřadnice podél střednice prutu	m
x^*	Hledaný kořen numerickou metodou	-
α	Kladná konstanta	-
$\lambda_{1,2}$	Kořen charakteristické rovnice	-
ϕ_y	Natočení dv/dx	rad
ϕ'_y	Derivace natočení d^2v/dx^2	m^{-1}
ϕ_z	Natočení dw/dx	rad
ϕ'_z	Derivace natočení d^2w/dx^2	m^{-1}
ψ	Celkové natočení hlavních os čel prutu	rad

Seznam příloh

Příloha A - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 6.2.1

Příloha B - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 6.2.2

Příloha C - skript v jazyce MATLAB pro numerické řešení dle podkapitoly 6.3

Příloha D - skript v jazyce MATLAB pro numerickou integraci dle rovnice (7.2)

Příloha E - skript v jazyce MATLAB pro vykreslení grafů 10.1 a 10.2

Příloha A

```

1  %newtonova metoda pro modifikovaný osazený prut
2  clear all
3  clc
4  format long
5
6  %zadání hodnot proměnných
7  s=input('Zadej velikost s(10)');
8  h=input('Zadej velikost h(5)');
9  l=input('Zadej velikost l(500)');
10 a=input('Zadej velikost a(125)');
11 b=input('Zadej velikost b(375)');
12 E=210000;
13
14 %kvadratické momenty průřezu
15 J1=(h*s^3)/12
16 J2=(s*h^3)/12
17 J3=J1
18 %Eulerovy kritické síly
19 Fv1=(pi^2*E*J2)/l^2
20 Fv2=(pi^2*E*J1)/l^2
21
22
23 syms F positive;
24 p1=sqrt(F/(E*J1));
25 p2=sqrt(F/(E*J2));
26 p3=sqrt(F/(E*J3));
27
28 %Soustava rovnic (6.7) pro výpočet integračních konstant
29 M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a), -sin(p2*a), -
30 cos(p2*a), 0, 0; 0, sin(p2*b), cos(p2*b), -sin(p3*b), -
31 cos(p3*b); p1*cos(p1*a), -p2*cos(p2*a), p2*sin(p2*a), 0, 0;
32 0, p2*cos(p2*b), -p2*sin(p2*b), -p3*cos(p3*b),
33 p3*sin(p3*b)];
34 %Determinant předešlé matice (6.8)
35 D=det(M);
36 %Derivace determinantu
37 derD=diff(D);
38
39 %Vlastní Newtonova metoda
40
41 %Zápis funkcí
42 f=inline(D);
43 fd=inline(derD);
44 %Počáteční aproximace kritické síly
45 F=(Fv1+Fv2)/2;
46
47 %Požadovaná přesnost výpočtu
48 Eps=1*10^(-1);

```

```
49 %počáteční hodnoty cyklu
50 Er=10^7;i=0;
51
52 while Er>Eps
53 i=i+1;
54 Er=F;
55 F=F-(f(F)/fd(F));
56 Er=abs(Er-F);
57 end;
58
59 disp('Kritická síla Fv je:');disp(F);
60 disp('Počet kroků výpočtu:');disp(i);
61 disp('Funkční hodnota pro výslednou sílu:');disp(f(F));
```

Příloha B

```

1  %newtonova metoda pro osazený prut
2  clear all
3  clc
4  format long
5
6  %zadání hodnot proměnných
7  s=input('Zadej velikost s(10)');
8  h=input('Zadej velikost h(5)');
9  l=input('Zadej velikost l(500)');
10 a=input('Zadej velikost a(150)');
11 b=input('Zadej velikost b(350)');
12 E=210000;
13
14 %výpočet - kvadratické momenty průřezu
15 J1=(s*h^3)/12
16 J2=(h*s^3)/12
17 J3=J1
18 %Eulerovy kritické síly
19 Fv1=(pi^2*E*J1)/l^2
20 Fv2=(pi^2*E*J2)/l^2
21
22
23 syms F positive;
24 p1=sqrt(F/(E*J1));
25 p2=sqrt(F/(E*J2));
26 p3=sqrt(F/(E*J3));
27
28 %Soustava rovnic (6.7) pro výpočet integračních konstant
29 M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a), -sin(p2*a), -
30 cos(p2*a), 0, 0; 0, sin(p2*b), cos(p2*b), -sin(p3*b), -
31 cos(p3*b); p1*cos(p1*a), -p2*cos(p2*a), p2*sin(p2*a), 0, 0;
32 0, p2*cos(p2*b), -p2*sin(p2*b), -p3*cos(p3*b),
33 p3*sin(p3*b)];
34 %Determinant předešlé matice (6.8)
35 D=det(M);
36 %Derivace determinantu
37 derD=diff(D);
38
39 %Vlastní Newtonova metoda
40
41 %Zápis funkcí
42 f=inline(D);
43 fd=inline(derD);
44 %Počáteční aproximace kritické síly
45 F=(Fv1+Fv2)/2;
46
47 %Požadovaná přesnost výpočtu
48 Eps=1*10^(-1);

```

```
49 %počáteční hodnoty cyklu
50 Er=10^7;i=0;
51
52 while Er>Eps
53 i=i+1;
54 Er=F;
55 F=F-(f(F)/fd(F));
56 Er=abs(Er-F);
57 end;
58
59 disp('Kritická síla Fv je:');disp(F);
60 disp('Počet kroků výpočtu:');disp(i);
61 disp('Funkční hodnota pro výslednou sílu:');disp(f(F));
```

Příloha C

```

1  %závislost změny kritické síly na rozměru a
2  clear all
3  clc
4
5  %zadání hodnot proměnných
6  s=10;
7  h=5;
8  l=500;
9  N=20;
10 a=linspace(100,200,N);
11 Fv=zeros(1,N);
12 K=zeros(1,N);
13 Ch=zeros(1,N);
14 b=l-a;
15 E=210000;
16
17
18 %výpočet - kvadratické momenty průřezu
19 I1=(h*s^3)/12;
20 I2=(s*h^3)/12;
21 I3=I1;
22
23 %Eulerovy kritické síly
24 Fv1=(pi^2*E*I2)/l^2;
25 Fv2=(pi^2*E*I1)/l^2;
26
27 %cyklus
28 n=1;
29 while n<=N
30 J1=I2+(I1-I2)*cos(pi*a(n)/l)^2;
31 J2=I2;
32 J3=J1;
33
34 syms F positive;
35
36 p1=sqrt(F/(E*J1));
37 p2=sqrt(F/(E*J2));
38 p3=sqrt(F/(E*J3));
39
40 %Soustava rovnic
41 M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a(n)), -
42 sin(p2*a(n)), -cos(p2*a(n)), 0, 0; 0, sin(p2*b(n)),
43 cos(p2*b(n)), -sin(p3*b(n)), -cos(p3*b(n)); p1*cos(p1*a(n)),
44 -p2*cos(p2*a(n)), p2*sin(p2*a(n)), 0, 0; 0, p2*cos(p2*b(n)),
45 -p2*sin(p2*b(n)), -p3*cos(p3*b(n)), p3*sin(p3*b(n))];
46 %Determinant matice
47 D=det(M);

```

```
48 %Derivace determinantu
49 derD=diff(D);
50
51 %Newtonova metoda
52 %Zápis funkcí
53 f=inline(D);
54 fd=inline(derD);
55
56 %Počáteční aproximace kritické síly
57 F=(Fv1+Fv2)/2;
58
59 %Požadovaná přesnost výpočtu
60 Eps=5*10^(-1);
61 %počáteční hodnoty cyklu
62 Er=10^7;i=0;
63
64 while Er>Eps
65 i=i+1;
66 Er=F;
67 F=F-(f(F)/fd(F));
68 Er=abs(Er-F);
69 end;
70
71 Fv(n)=F;K(n)=i;Ch(n)=Er;
72 n=n+1;
73 clear F;
74
75 end;
76 %výpis
77 disp('Vektor kritických sil: ');disp(Fv);
78 disp('Vektor počtu kroků výpočtu: ');disp(K);
79 disp('Vektor chyb v jednotlivých krocích:');disp(Ch);
80 %graf
81 plot(a,Fv);
82 grid on;
83 xlabel('a / mm'); ylabel('F / N');
84 title('Závislost kritické síly F na délce a');
```

Příloha D

```
1 %numerická integrace
2 clear all
3 clc
4
5 %zadání vstupních parametrů
6 s=10;
7 h=5;
8 l=500;
9 E=210000;
10 J1=(h*s^3)/12;
11 J2=(s*h^3)/12;
12
13 %funkční zápis kvadratického momentu
14 J=@(x) J2+(J1-J2)*cos(pi*x/l).^2;
15 %průměrný kvadratický moment viz kap. 7.1
16 Jav=integral(J,0,l)/l;
17
18
19 %výpočet průměrné ohybové tuhosti viz kap. 7.2
20 Jav2=(2*J1*J2)/(J1+J2);
21
22 %srovnání kritických sil pro oba přístupy
23 FJav1=(pi^2*E*Jav)/l^2;
24 FJav2=(pi^2*E*Jav2)/l^2;
25
26 disp('Průměrný kvadratický moment (kap. 7.1) je:');disp(Jav);
27 disp('Průměrný kvadratický moment (kap. 7.2) je:');disp(Jav2);
28 disp('Kritická síla dle prvního přístupu:');disp(FJav1);
29 disp('Kritická síla dle druhého přístupu:');disp(FJav2);
```


Příloha E**Část 1:**

```

1  %hledání kritických sil prutu s více závitů
2  %vykreslení grafu těchto sil na poměru s/h
3  %počet kroků
4  J=41;
5  E=210000;
6  l=500;
7  %vstupní parametry
8  h=zeros(1,J);
9  s=zeros(1,J);
10 J1=zeros(1,J);J2=zeros(1,J);
11 beta=zeros(1,J);alfa=zeros(1,J);
12 %poměr s/h
13 gama=linspace(1,5,J);
14
15 i=1;
16 while i<=J
17 h(i)=sqrt(50/gama(i));
18 s(i)=gama(i)*h(i);
19 J1(i)=(h(i)*s(i)^3)/12;
20 J2(i)=(s(i)*h(i)^3)/12;
21 %poměr J1/J2
22 beta(i)=J1(i)/J2(i);
23 %poměr Fšroub/Fprizm
24 alfa(i)=(2*beta(i))/(beta(i)+1);
25 Fk(i)=(pi^2*E*J2(i))/l^2;
26 F(i)=Fk(i)*alfa(i);
27 i=i+1;
28 end
29 %graf 10.1 - první a druhá řada
30 plot(gama,Fk,gama,F)
31 %graf 10.2 - první řada
32 figure;plot(gama,alfa)

```

Část 2:

```

1  %hledání kritických sil mírně zk. prutu v závislosti na
2  proměnném rozměru /a/
3  %vykreslení grafu těchto sil na poměru s/h
4  clc
5  %počet kroků v prvním cyklu
6  J=41;
7  %vstupní parametry
8  E=210000;
9  l=500;
10 %parametry průřezu
11 h=zeros(1,J);
12 s=zeros(1,J);
13 I1=zeros(1,J);I2=zeros(1,J);I3=zeros(1,J);
14 Fv1=zeros(1,J);Fv2=zeros(1,J);

```

```

15 %vektor podílu s/h
16 gama=linspace(1,5,J);
17
18 j=1;
19 while j<=J
20 h(j)=sqrt(50/gama(j));
21 s(j)=gama(j)*h(j);
22 %Výpočet - kvadratické momenty průřezu
23 I1(j)=(h(j)*s(j)^3)/12;
24 I2(j)=(s(j)*h(j)^3)/12;
25 I3(j)=I1(j);
26 %Eulerovy kritické síly
27 Fv1(j)=(pi^2*E*I2(j))/l^2;
28 Fv2(j)=(pi^2*E*I1(j))/l^2;
29 j=j+1;
30 end
31
32 %počet kroků druhého cyklu
33 N=21;
34 %vstupní parametry
35 a=linspace(150,220,N);
36 Fv=zeros(1,N);
37 K=zeros(1,N);
38 Ch=zeros(1,N);
39 Fvm=zeros(J,N);
40 Km=zeros(J,N);
41 Chm=zeros(J,N);
42 b=l-a;
43 %vektor poč. aproximací na základě části 1
44 B=linspace(1700,700,J);
45 %cyklický výpočet
46 j=1;
47 while j<=J
48 n=1;
49 while n<=N
50 J1=I2(j)+(I1(j)-I2(j))*cos(pi*a(n)/l)^2;
51 J2=I2(j);
52 J3=J1;
53
54 syms F positive;
55
56 p1=sqrt(F/(E*J1));
57 p2=sqrt(F/(E*J2));
58 p3=sqrt(F/(E*J3));
59
60 M=[0, 0, 0, sin(p3*l), cos(p3*l); sin(p1*a(n)), -
61 sin(p2*a(n)), -cos(p2*a(n)), 0, 0; 0, sin(p2*b(n)),
62 cos(p2*b(n)), -sin(p3*b(n)), -cos(p3*b(n)); p1*cos(p1*a(n)),
63 -p2*cos(p2*a(n)), p2*sin(p2*a(n)), 0, 0; 0, p2*cos(p2*b(n)),
64 -p2*sin(p2*b(n)), -p3*cos(p3*b(n)), p3*sin(p3*b(n))];
65 D=det(M);
66 derD=diff(D);

```

```

67 %Newtonova metoda
68 f=inline(D);
69 fd=inline(derD);
70
71 %Počáteční aproximace kritické síly
72 A=B(j);
73 %Požadovaná přesnost výpočtu
74 Eps=1*10^(-1);
75 %počáteční hodnoty cyklu
76 Er=10^7;i=0;
77
78 while Er>Eps
79 i=i+1;
80 Er=A;
81 A=A- (f(A)/fd(A));
82 Er=abs(Er-A);
83 end;
84
85 Fv(n)=A;K(n)=i;Ch(n)=Er;
86 n=n+1;
87 clear F;
88 end;
89 %zápis výsledků do matic
90 Fvm(j,:)=Fv;
91 Km(j,:)=K;
92 Chm(j,:)=Ch;
93 j=j+1;
94 clear F p1 p2 p3 M D derD f fd;
95 end;
96
97 %výpis
98 disp('Matice krit. sil v závislosti na rozměru a: ');
99 disp(Fvm);
100 disp('Matice počtu kroků výpočtu: ');disp(Km);
101 disp('Matice chyb v jednotlivých krocích:');disp(Chm);
102
103 %zápis vektoru kritických sil
104 j=1;
105 V=zeros(1,J);
106 while j<=J
107 V(j)=max(Fvm(j,:));
108 j=j+1;
109 end
110 disp('Vektor kritických sil: ');disp(V);
111
112 %Vykreslení grafu 10.1 - třetí řada
113 plot(gama,V)
114 %graf 10.2 - druhá řada
115 figure;plot(gama,V./Fk)

```