TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Numerické simulace proudění na pohyblivých sítích

Disertační práce

Studijní program: P3901 – Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: 3901V055 – Aplikované vědy v inženýrství

Autor práce: **Ing. Václav Řidký**
Školitel: doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.

Liberec 2019

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Numerical simulation of flow on dynamic meshes

Dissertation

Studijní program: P3901 – Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: 3901V055 – Aplikované vědy v inženýrství

Autor práce: **Ing. Václav Řidký**
Školitel: doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.

Liberec 2019

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.
Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé disertační práce pro vnitřní potřebu TUL.
Užiji-li disertační práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL v tomto případě má TUL právo ode mne
požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.
Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím disertační práce a konzultantem.
Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Velice rád bych poděkoval vedoucímu disertační práce docentu Petru Šidlofovi za trpělivost, kterou mi věnoval během celého studia. Jeho podpora mi pomohla v okamžicích, když už jsem po nástupu do práce chtěl nechat disertační práci nedokončenou.

Dále bych těl poděkovat společnosti Škoda Auto za účast v doktorandském programu, který nastartoval mojí profesionální kariéru. Speciální poděkování patří celému oddělení EPO/5 do kterého jsem nastoupil. Jmenovitě pak kolegovi Aleši Lemperovi, za to že mi pomohl s částí věnované spalovacím motorům, ve které jsem byl úplným nováčkem.

Nakonec bych chtěl poděkovat i své rodině za poskytnuté zázemí a podporu.

Abstrakt

Disertační práce je zaměřena na paralelní numerické výpočty proudění na pohyblivých sítích v prostředí OpenFOAM a Vectis. Oba výpočetní softwary využívají k diskretizaci rovnic metodu konečných objemů s ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) přístupem pro dynamické sítě.

V disertaci jsou popsány matematické rovnice popisující proudění vazké tekutiny, přístupy k modelování turbulence a numerické řešení těchto rovnic pomocí metody konečných objemů. Dále je proveden rozbor několika metod pro výpočet polohy uzlů deformované sítě, včetně analýzy jejich vlivu na kvalitu výpočetní sítě a stabilitu výpočtu. Tyto metody a výsledky analýz jsou ověřeny na benchmarkové úloze a aplikovány na tři případy z reálné praxe.

V OpenFOAMu se kromě ověření na jednoduchém případě deformace sítě při obtékání kmitajícího válce řeší dvě úlohy. První je výpočet proudění v hlasivkovém traktu člověka. Hlasivky se modelují jako tuhé těleso s vynuceným pohybem se dvěma stupni volnosti. Numerické simulace jsou počítány na zjednodušeném geometrickém modelu hlasivkového traktu ve 2D a 3D. V práci jsou porovnána proudová pole a průtoky získané pomocí modelu stlačitelné a nestlačitelné vazké tekutiny a různých modelů turbulence. Druhým případem je obtékání leteckého profilu, který je pružně uložen se dvěma stupni volnosti v přípravku, ve kterém je umístěn do aerodynamického tunelu. Výsledkem numerických simulací je rozložení rychlosti a tlaku na povrchu leteckého profilu při různých fázích pohybu leteckého profilu. Tyto výsledky jsou porovnány s daty z tlakových senzorů a z interferogramů získaných v aerodynamickém tunelu. Pohyb hlasivek a leteckého profilu je v numerických simulacích předepisován jako okrajová podmínka. V obou úlohách je použita jedna výpočetní sít, která se vlivem pohybu hlasivek nebo leteckého profilu deformuje.

Třetí řešenou úlohou je výpočet výměny náplně válce spalovacího motoru 1.0 MPI v programu Vectis ve spolupráci se Škoda Auto a. s. Práce se zaměřuje na chování proudových polí během fáze sání a komprese u čtyřdobého spalovacího motoru. Správné proudění vzduchu do válce má pozitivní efekt na hoření, rozmísení paliva a vznik sazí. V práci jsou porovnávány vlivy dvou typů sacích kanálů na proudové pole uvnitř válce spalovacího motoru a parametry určující rozvíření směsi (Tumble a turbulentní kinetická energie).

Klíčová slova:

výpočetní mechanika tekutin – CFD, numerická simulace, dynamické sítě, metoda konečných objemů, biomechanika hlasu, proudění kolem křídel, proudění ve spalovacím motoru

Abstract

The dissertation is focused on parallel numerical simulations of flow on dynamic meshes in OpenFOAM and Vectis. Both computational softwares use the Finite Volume Method in Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation to discretize the governing equations on dynamic meshes.

The mathematical equations describing viscous fluid flow are described, together with turbulence modelling approaches and numerical solution of the governing equations by the Finite Volume Method. Further, the thesis describes and analyses various approaches for the computation of deformed grid point positions, including analysis of their impact on the mesh quality and stability of the numerical scheme. These methods and results are verified on a benchmark case and applied on three real-world problems.

In addition to a benchmark case of oscillating cylinder cross-flow, two problems are solved in OpenFOAM. The first case is numerical simulation of airflow in the human larynx. The vocal folds are modelled as solid bodies with two degrees of freedom. Numerical simulations are realized on a simplified geometric model of the human larynx in 2D and 3D. The unsteady flow fields and glottal flow rate waveforms simulated using incompressible and compressible flow models and various turbulence modelling approaches are compared. The second case is flow around an airfoil, which is elastically supported with two degrees of freedom in a wind tunnel. The result of numerical simulations is the velocity and pressure distribution on the airfoil surface at different phases of airfoil motion. These results are compared with data from the pressure sensors and from the interferograms obtained during wind tunnel measurements. The movement of vocal folds and airfoil is prescribed as a boundary condition in numerical simulations. In both cases, one mesh is generated which deforms due to oscillation of the vocal folds or the airfoil.

The third case is in-cylinder flow simulation of the 1.0 MPI internal combustion engine, which is simulated in the Vectis software in cooperation with Škoda Auto company. The study focuses on the flow field behaviour during the intake and compression phase of the four-stroke internal combustion engine. Correct airflow to the cylinder has a positive effect on combustion, fuel distribution and emissions. The work compares the effects of two types of intake port on the velocity field inside the cylinder and the parameters determining the flow of the mixture (Tumble and turbulent kinetic energy).

Keywords:

computational fluid dynamics – CFD, numerical simulation, dynamic mesh, finite volume method, human voice biomechanics, flow past airfoils, in-cylinder flow simulation

Obsah

Prohlášení **3**

Poděkování **4**

Abstrakt **5**

Abstract **6**

Obsah **7**

Seznam obrázků **10**

Seznam tabulek **13**

Seznam zkratek **14**

1 Úvod **15**

1.1 Cíle disertační práce 17

2 Rovnice popisující proudění tekutiny **18**

2.1 Vlastnosti tekutin 18

2.2 Rovnice popisující proudění 19

2.3 Turbulentní proudění 19

2.4 Modely turbulence 21

2.4.1 Přístupy k modelování turbulence *21*

2.4.2 RANS turbulentní modely *22*

2.5 Dvourovnicové modely turbulence 25

2.5.1 Model turbulence k-ε pro nestlačitelné proudění *25*

2.5.2 Model turbulence k-ω SST pro nestlačitelné proudění *26*

2.5.3 Turbulentní přenos tepla *28*

2.5.4 Model turbulence k-ε pro stlačitelné proudění *29*

2.5.5 Model turbulence k-ω SST pro stlačitelné proudění *30*

3 Numerické řešení rovnic pro proudění tekutiny **32**

3.1 Úvod do numerického řešení proudění 32

3.2 Prostorová diskretizace Navier-Stokesových rovnic 33

3.3 Diskretizace v čase 36

3.4 Algoritmus SIMPLE a PISO v OpenFOAMu 38

3.5 ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) metoda 42

4 Přístupy pro výpočty proudění na dynamických sítích **43**

4.1 Problematika deformace sítě 43

4.2 Kvalitativní parametry sítě ... 44
4.3 Algoritmy pro výpočet deformace sítě ... 46
4.3.1 Metoda založená na pružinové analogii ... 46
4.3.2 Metoda založená na řešení Laplaceovy rovnice ... 46
4.3.4 Metoda Pseudo-solid ... 47
4.3.5 Metoda SBRStress ... 48
4.4.6 Metoda RBF ... 48
4.4.7 Metoda MESQUITE ... 49

5 Úloha oscilujícího válce ... 51

6 Numerická simulace obtékání kmitajícího leteckého profilu ... 54
6.1 Úvod do aeroelasticity křídel a leteckých konstrukcí ... 54
6.2 Popis úlohy ... 55
6.3 Aplikace metod pro deformaci sítě a jejich výsledky ... 57
6.4 Numerické simulace pro nestlačitelné proudění ... 61
6.4.1 Okrajové podmínky pro nestlačitelné proudění ... 61
6.4.2 Výsledky simulací nestlačitelného proudění pro rychlost M = 0,2 ... 66
6.5 Numerické simulace pro stlačitelné proudění ... 73
6.5.1 Okrajové podmínky pro stlačitelné proudění ... 73
6.5.2 Výsledky simulací stlačitelného proudění pro rychlost M = 0,43 ... 76

7 Vypočet proudění v hlasivkovém kanálu ... 88
7.1 Úvod do problematiky numerických simulací proudění v hlasivkovém kanálu ... 88
7.2 Popis úlohy ... 89
7.3 Porovnání metod deformace sítě ... 91
7.4 Výpočet proudění vzduchu přes oscilující hlasivky ... 95
7.4.1 Okrajové podmínky pro nestlačitelné proudění ... 95
7.4.2 Okrajové podmínky pro stlačitelné proudění ... 97
7.4.3 Výsledky simulací průtoku přes hlasivkovou štěrbinu ... 99

8 Simulace výměna náplně válce spalovacího motoru ... 105
8.1 Úvod do problematiky modelování výměny náplně válce ... 105
8.2 Matematický model proudění ve válci motoru ... 108
8.3 Definice okrajových podmínek ... 109
8.3 Geometrie výpočetní oblasti, diskretizační síť a její deformace ... 111
8.4 Vliv tvaru sacího kanálu na proudové pole uvnitř válce ... 116

9 Závěr ... 123

Seznam vlastních publikací ... 125

Seznam použité literatury ... 126

A Obsah CD ... 132

B Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2631 133

C Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2636 135

D Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2636 137

Seznam obrázků

Obr. 1: Rozdělení matematických modelů pro řešení proudění. 21
Obr. 2: Porovnání výsledků jednotlivých metod modelování turbulentního proudění. [Halík 2004] 22
Obr. 3: Diskretizace na libovolném mnohostěnném kontrolním objemu. [Panton 2005] 33
Obr. 4: Interpolace hodnoty na stěně mezi dvěma kontrolními objemy. 35
Obr. 5: Změna topologie sítě, odebírání elementů při pohybu pístu ve válci. 43
Obr. 6: Změna topologie sítě, při otáčení míchacího zařízení. 44
Obr. 7: Ukázka určení šikmosti na rozhraní dvou elementů. Body *P* a *N* označují těžiště elementů, *f* je těžiště společné stěny. [Jasak 1996] 45
Obr. 8: Určení ortogonality sítě. [Jasak 1996] 45
Obr. 9: Ukázka deformace elementů trojúhelníkového elementu. Vlevo přípustná deformace elementu vpravo nepřípustná deformace (překlopení vrcholu). 46
Obr. 10: Target-matrix Paradigm. [Knupp 2009] 50
Obr. 11: Porovnání jednotlivých metod výpočtu deformace sítě a nedeformované sítě. 53
Obr. 12: Schéma uložení a měřící přípravek s leteckým profilem. [Šidlof a kol. 2016] 55
Obr. 13: Výpočetní síť vygenerovaná pomocí nástroje snappyHexMesh. 56
Obr. 14: Výpočetní síť vygenerovaná pomocí nástroje snappyHexMesh. 57
Obr. 15: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody Laplace. 59
Obr. 16: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody SBRStress. 60
Obr. 17: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody RBF. 61
Obr. 18: Pohyb leteckého profilu v průběhu jedné periody (55 ms) s maximální výchylkou v rotaci 29,5° a posuvem 2,1 mm. 62
Obr. 19: Výpočetní oblast a definice hranic. 63
Obr. 20: Rozložení tlakových senzorů na povrchu leteckého profilu. [Šidlof a kol. 2016] 66
Obr. 21: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p1. 67
Obr. 22: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p2. 68
Obr. 23: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p3. 68
Obr. 24: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p4. 69
Obr. 25: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p1. 70
Obr. 26 Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p2. 70
Obr. 27: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p3. 71
Obr. 28: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p4. 71
Obr. 29: Rozložení tlakového pole okolo leteckého profilu. 72
Obr. 30: Pohyb leteckého profilu v průběhu jedné periody (49 ms) s maximální výchylkou v rotaci 25,8° a posuvem 7,4 mm. 73

Obr. 31: Interferogram s vyznačenými místy doteku interferometrických proužků na profilu leteckého profilu – snímek 2631. 77
Obr. 32: Rozložení rychlosti na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631. 78
Obr. 33: Rozložení hustoty vzduchu na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631. 78
Obr. 34: Rozložení tlaku na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631. 79
Obr. 35: Rozložení tlaku okolo leteckého profilu – snímek 2631. 80
Obr. 36: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2631. 80
Obr. 37: Rozložení rychlost okolo leteckého profilu – snímek 2631. 81
Obr. 38: Interfeogram s vyznačenými místy doteku interferometrických proužků na profilu leteckého profilu – snímek 2637. 82
Obr. 39: Rozložení rychlosti na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637. 83
Obr. 40: Rozložení hustoty vzduchu na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637. 83
Obr. 41: Rozložení tlaku na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637. 84
Obr. 42 Rozložení tlaku okolo leteckého profilu – snímek 2637. 84
Obr. 43: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2637. 85
Obr. 44: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2637. 85
Obr. 45: Průběh tlaku na pozici senzoru p1 - 3D simulace. 86
Obr. 46: Průběh tlaku na pozici senzoru p1 – 2D simulace. 87
Obr. 47: 2D výpočetní oblast reprezentující zjednodušenou geometrii hlasivkového traktu. 89
Obr. 48: Pohyb hlasivek během jedné periody kmitání. 90
Obr. 49: Detail nedeformované sítě. 91
Obr. 50: Detail sítě deformované metodou Laplace při maximální deformaci. 92
Obr. 51: Detail sítě deformované metodou SBRStress při maximální deformaci. 92
Obr. 52: Detail sítě deformované sítě metodou MESQUITE při maximální deformaci. 93
Obr. 53: Průtok v závislosti na velikosti mezery mezi hlasivkami při tlakovém spádu 300 Pa. 93
Obr. 54: Detail sítě doformované sítě metodou MESQUITE při minimální mezeře tloušťky $\Delta x = 0{,}2$ mm. 94
Obr. 55: Detail sítě doformované metodou Pseudo-Solid při minimální mezeře tloušťky $\Delta x = 0{,}1$ mm horní obrázek a $\Delta x = 0{,}02$ mm (dolní obrázek). 94
Obr. 56: Názvy a rozložení hranic na výpočetní oblasti zjednodušeného modelu lidského hrtanu. 95
Obr. 57: Průběh hmotnostního toku přes hlasivkovou štěrbinu pro 2D simulaci 100
Obr. 58: Průběh hmotnostního toku přes hlasivkovou štěrbinu pro 3D simulaci. 101
Obr. 59: Průběh rychlosti v hlasivkové mezeře - 3D simulace. 101
Obr. 60: Průběh tlaku v hlasivkové mezeře – 3D simulace. 102
Obr. 61: Průběh rychlosti v hlasivkovém kanálu pro 3D simulaci stlačitelného proudění 103
Obr. 62: Průběh rychlosti v hlasivkovém kanálu pro 3D simulaci nestlačitelného proudění 103
Obr. 63: Proudění typu swirl vlevo a proudění typu tumble vpravo. [Scholz 2018] 106
Obr. 64: Výpočetní oblast pro numerické simulace výměny náplně válce. 111

Obr. 65: Topologie geometrie během sání obrázek vlevo a topologie během komprese vpravo. 112
Obr. 66: Znázornění pohybu ventilů a pístu v závislosti na natočení klikové hřídele.. 113
Obr. 67: Základní rozložení a velikost elementů v síti. 114
Obr. 68: Lokální zjemnění elementů mezi sedly ventilů a hlavou. 114
Obr. 69: Ukázka deformace sítě mezi dvěma crosslinky..... 115
Obr. 70: Porovnání tvaru dvou sacích kanálů……116
Obr. 71: Průběh Tumble number v průběhu sání a komprese……...117
Obr. 72: Rychlostní pole při maximální turbulentní kinetické energii a hodnoty Tumble number……...……117
Obr. 73: Vektorové rychlostní pole při maximální hodnotě Tumble number pro úhel natočení klikové hřídele 700°……118
Obr. 74: Průběh turbulentní kinetické energie v průběhu sání a komprese. 119
Obr. 75: Vektorové rychlostní pole při maximální hodnotě turbulentní kinetiky energie pro úhel natočení klikové hřídele 700°. 120
Obr. 76: Distribuce turbulentní kinetické ve spalovacím prostoru pro úhel natočení klikové hřídele 700°..... 121
Obr. 77 p-V diagram výfukové a sací fáze motoru..... 122

Seznam tabulek

Tab. 5. 1: Výpočetní čas deformace sítě. 51
Tab. 5. 2: Kvalitativní parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 2D sítě s 5000 elementy při maximální výchylce. 52
Tab. 5. 3: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 3D sítě se 2 miliony elementů v čase t = 0,001 s. 52
Tab. 6. 1: Výpočetní čas pro 100 časových kroků numerické simulace. 58
Tab. 6. 2: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 2D případ při maximální výchylce leteckého profilu. 58
Tab. 6. 3: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 3D případ při maximální výchylce leteckého profilu. 59
Tab. 6. 4: Okrajové podmínky pro rychlost a tlak. 64
Tab. 6. 5: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci. 65
Tab. 6. 6 : Okrajové podmínky pro rychlost, tlak a teplotu pro model stlačitelného proudění. 74
Tab. 6. 7: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci (model stlačitelného proudění). 75
Tab. 6. 8: Okrajové podmínky pro turbulentní dynamickou viskozitu a turbulentní tepelnou vodivost. 76
Tab. 7. 1: Parametry 2D sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace. 91
Tab. 7. 2: Parametry 3D sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace. 92
Tab. 7. 3: Časová náročnost výpočtu deformace sítě pro 2D a 3D případ. 92
Tab. 7. 4: Okrajové podmínky pro rychlost a tlak. 96
Tab. 7. 5: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro nestlačitelný k-ω-SST model turbulence. 97
Tab. 7. 6: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro nestlačitelný k-ε model turbulence. 97
Tab. 7. 7: Okrajové podmínky pro rychlost, tlak a teplotu pro výpočet stlačitelného proudění. 98
Tab. 7. 8: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro výpočet stlačitelného proudění. 99
Tab. 7. 9: Okrajové podmínky pro turbulentní dynamickou viskozitu a turbulentní tepelnou vodivost pro výpočet stlačitelného proudění. 99
Tab. 7. 10: Popis konfigurace nastavení modelu turbulence a proudění pro jednotlivé simulace. 100
Tab. 8. 1: Objemová účinnost pro jednotlivé sací kanály. 122

Seznam zkratek

ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
AMI	Arbitrary Mesh Interface
CFD	Computational fluid dynamics
CFL	Courant–Friedrichs–Lewy
DNS	Direct numerical simulation
DES	Detached eddy simulation
GGI	Generalized Grid Interface
LES	Large Eddy Simulation
MESQUITE	Mesh Quality Improvement
N-S	Navier-Stokes
NVD	Normalized Variable Diagram
PISO	Pressure-Implicit with Splitting of Operators
RANS	Reynolds-averaged Navier–Stokes equations
RBF	Radial Basis Function
RSM	Reynolds Stress Equation
SBRStress	Solid Body Rotation Stress
STL	Stereolithography
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations
TDV	Total Variation Diminishing

1 Úvod

S řešením proudění na dynamických geometriích se setkáváme v celé řadě úloh. Velkou skupinu tvoří řešení interakce proudící tekutiny a pružně uložených těles (mosty, drak letadel, výškové budovy atd.), které mohou být za určitých okolností rozkmitány samobuzenými oscilacemi, až dojde k jejich mechanickému poškození. Řešení interakce kromě odvrácení katastrof může pomoci i jinak – například u lidí, kteří vlivem nemoci nebo úrazu přišli o své vlastní hlasivky. Mnoho výzkumných týmů pracuje na vývoji protetické náhrady, která by lidem vrátila plnohodnotný hlas. Další skupinou problémů s prouděním na časově proměnných oblastech jsou úlohy zabývající se proudění v lopatkových strojích (turbínové mříže, vrtule větrných elektráren a míchací zařízení).

Numerické řešení je vedle experimentálního výzkumu čím dále častěji používaným přístupem, jak tyto problémy řešit. Analytické řešení rovnic popisující proudění (Navier-Stokesovy rovnice) až na velmi jednoduché případy nelze nalézt. Za pomoci numerického řešení Navier-Stokesových rovnic lze ale získat přibližné řešení zkoumaného problému. Výsledy numerických simulací by měly být vždy validovány za pomoci experimentu nebo benchmarkové úlohy.

Pro účely numerického řešení lze využít několik metod. První je metoda konečných diferencí, která se vyznačuje jednoduchou implementací, ale lze použít pouze na jednoduchých geometriích a strukturovaných sítích. Tato metoda je použita například v práci [Sciamarella 2008]. Druhou metodou je metoda konečných prvků. Základem této metody je rozdělení výpočetní oblasti na konečný počet elementů. V uzlech těchto elementů je pomocí bázových funkcí řešení parciálních diferenciálních rovnic převedeno na soustavu algebraických rovnic. Tato metoda, která lze použít i na složitých geometriích a nestrukturovaných sítích, se používá běžně i pro výpočet proudění. Konečně prvkové modely slouží i k výpočtům interakce hlasivek a proudu vzduchu v disertačních prací [Hrůza 2007; Matug 2015] a v článcích [Švancara 2008; Švancara 2008]. Třetí nejběžnější metodou je Metoda konečných objemů, která je použita pro výpočty v této práci. Metoda konečných objemů je popsána v kapitole 3. Numerické simulace touto metodou jsou prezentovány pro případy na pohyblivých sítích [Jasak 2004; Šidlof 2013], následující dva články se pak zaměřují na simulace proudění uvnitř spalovacích motorů [Saad 2013; Yin 2016]. Metoda kombinující přístup metody konečných objemů a elementů se nazývá Nespojitá Galerkinova metoda. S výhodou lze využít pro výpočty úloh s nespojitým průběhem řešení. Metoda je implementována do vlastních výpočetních kódů například v pracích [Feistauer 2011; Valášek 2016].

Tato disertace je zaměřena na numerické simulace proudění na dynamických geometriích v programech OpenFOAM a Vectis. Oba tyto softwary využívají k numerickému řešení úloh proudění metodu konečných objemů. Pomocí OpenFOAMu jsou řešeny dvě úlohy obtékání

pevných těles s předepsaným kmitáním. První je obtékání zjednodušeného modelu leteckého profilu se dvěma stupni volnosti. Druhá úloha je věnována řešení problematiky proudění v hlasivkovém kanálu opět s předepsaným kmitáním. V programu Vectis se řeší numerické simulace výměny náplně u motoru s vnitřním spalováním. Rešerše k jednotlivým aplikacím jsou uvedeny pro každý případ zvlášť na začátku kapitol 6, 7 a 8.

Výše zmíněné příklady jsou v této práci řešeny přístupem, při kterém je časové změna geometrie převedena na deformaci sítě. Během výpočtu je zachována sousednost elementů v síti i jejich celkový počet, ale přepočítává se poloha uzlů sítě. Různé metody pro přepočet polohy uzlů jsou vysvětleny v kapitole 4.3. Výhodou tohoto přístupu je, že není potřeba generovat při každé změně geometrie novou síť. Tento přístup má své limity a při velkých změnách geometrie selhává – vlivem příliš velkého posunu uzlů vznikají nevhodné elementy. Kvalitativní parametry, podle kterých se posuzuje tvar elementů jako je šikmost, ortogonalita, poměr stran a kladný objem elementů, jsou vysvětleny v kapitole 4.2. V případě úlohy výměny náplně válce spalovacího motoru, kdy dochází k velkým geometrickým změnám (otevírání a zavírání ventilu a posun pístu), se problém řeší kombinovaně pomocí deformace a občasného přesíťování výpočetní oblasti.

Existují i další metody výpočtu na pohyblivých geometriích, například pomocí metody vnořené hranice popsané v [Peskin 2002]. V tomto případě výpočetní sít nemusí přímo kopírovat tvar výpočetní oblasti. Výhodou této metody je využití pravoúhlé kartézské sítě, kdy poloha hranic oblasti leží mimo uzly výpočetní sítě. Síť zůstává neměnná i při změně výpočetní oblasti např. v důsledku pohybu obtékaných těles, zcela tedy odpadají všechny problémy s deformací sítě. Nevýhodou metody je to, že nelze jednoduše zadat okrajové podmínky. To se řeší dvěma způsoby, a to buď zavedením zdroje hybnosti a hmoty v okolí hranice do rovnic popisující proudění (metody zdrojových funkcí [Bandringa 2010]), nebo se modifikují elementy na hranicích (cut-cell metody [Mittal 2010]).

Text práce je rozdělen do čtyř tematických celků. První celek je obecný úvod do problematiky. Další je teorie rozdělená do tří kapitol: popis Navier-Stokesových rovnic pro laminární a turbulentní proudění (kapitola 2), metoda konečných objemů (kapitola 3) a problematika deformace sítě (kapitola 4). Třetí celek je tvořen praktickou částí rozdělenou podle jednotlivých úloh: výpočet deformace sítě okolo oscilujícího válce (kapitola 5), simulace obtékání leteckého profilu s předepsaným kmitáním (kapitola 6), simulace proudění v hlasivkovém kanálu (kapitola 7) a výměna náplně válce spalovacího motoru (kapitola 8). Disertační práci uzavírá závěrečné zhodnocení přínosu práce.

1.1 Cíle disertační práce

Cílem disertační práce je sestavit numerický model proudění na oblastech s časově proměnou geometrií s využitím konečně objemového řešiče OpenFoam a Vectis, tyto numerické modely ověřit na konkrétních úlohách a provést jejich optimalizaci, numerické výsledky získané při simulacích porovnat a v případech, kde jsou dostupná experimentální data, zhodnotit jejich shodu s měřením. Dílčí cíle práce lze formulovat následovně:

- Na benchmarkové úloze oscilujícího válce s předepsaným kmitáním s jedním stupněm volnosti ověřit stabilitu zvolených metod deformace sítí. Porovnat jejich výpočetní náročnosti na definované doméně s různým počtem elementů. Provést vyhodnocení deformované sítě pro zvolenou amplitudu kmitu dle kvalitativních parametrů sítě.

- Při modelování proudění v hlasivkovém kanále dosáhnout co nejnižší tloušťky mezi hlasivkové mezery při zachování stability řešení tak, aby se model co nejvíce přiblížil chování reálných lidských hlasivek. Porovnat vliv stlačitelnosti kapaliny na chování proudění v mezi hlasivkové mezeře pro turbulentní proudění.

- Na úloze oscilujícího leteckého profilu ověřit stabilitu metod pro výpočet deformace pro dva konkrétní případy předepsaného pohybu. Porovnat data z experimentu a simulací.

- V případě modelování výměny náplně válce u čtyřdobého spalovacího motoru sestavit stabilní model pro výpočet proudění v konkrétním pracovním bodu motoru, ověřit jeho funkčnost a porovnat s výsledky měření.

2 Rovnice popisující proudění tekutiny

2.1 Vlastnosti tekutin

Pro popis proudění tekutin se využívá předpokladu, že tekutina je kontinuum. Kapaliny se vyznačují tím, že mají slabé mezi molekulární vazby a to způsobuje, že tekutina nemá tvar jako pevná tělesa. Pokud je ideální tekutina v rovnováze, pro elementární objem platí podmínka rovnosti tlaku. Tenzor napětí τ_{ij} je pak roven:

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij} p, \tag{2.1}$$

kde p je tlak a δ_{ij} Kroneckerovo delta.

Tento zápis platí pro nevazkou tekutinu, při uvažovaní vzájemného odporu částic tekutiny mezi sebou se předchozí rovnice rozšíří o člen, který tyto interakce zahrnuje. Rovnice bude mít tvar:

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij} p + \tau'_{ij}. \tag{2.2}$$

Vazké smykové napětí $\boldsymbol{\tau}'_{ij}$ lze pro Newtonovské kapaliny vyjádřit jako součin dynamické viskozity μ a gradientu rychlosti. To lze zapsat pomocí zobecněného Hookeova zákona. Vazké smykové napětí je pro izotropní tekutinu (symetrický tenzor napětí) dáno vztahem:

$$\tau'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu S_{ij}, \tag{2.3}$$

kde $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ je tenzor rychlosti deformace, λ druhá viskozita a ϑ reprezentuje divergenci rychlosti $\vartheta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ a u_i jsou složky vektoru rychlosti. Dynamická viskozita je materiálová vlastnost tekutiny a je závislá na teplotě. Pro plyny s rostoucí teplotou roste a pro kapaliny klesá. U plynů je dynamická viskozita závislá také tlaku. Všechny tyto závislosti jsou převážně nelineární, ale z pohledu modelování proudění se dají považovat převážně za lineární nebo dokonce konstantní, jelikož se pracuje většinou v malém rozsahu tlaku a teploty [Nožička 2004].

Tekutiny se dělí na newtonovské, nenewtonovské a ideální. Ideální tekutina je tekutina bez vnitřního třemi, smyková napětí jsou nulová. V běžné praxi se setkáme s Newtonovskými kapalinami, ty se vyznačují lineární závislostí smykového napětí na gradientu rychlosti. Nenewtonovských kapalin je několik druhů, jsou rozlišeny dle závislostí tečného napětí na gradientu rychlosti, neplatí u nich Newtonův zákon viskozity.

2.2 Rovnice popisující proudění

Nyní se zaměříme na to, jak se změna tenzoru napětí projeví v pohybových rovnicích, a odvodíme pohybové rovnice, které se pro Newtonovskou viskózní tekutinu nazývají Navier-Stokesovy rovnice. Při odvození dle [Šembera 2004] se vychází z rovnice rovnováhy:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0\,, \tag{2.4}$$

kde F_i jsou objemové síly.

Rovnice rovnováhy se rozšíří o člen vyjadřující změnu rychlostního pole, který je způsoben nerovnováhou sil. Po úpravách vzniknou obecné pohybové rovnice tekutiny:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.5}$$

Dosazením upraveného tenzoru napětí (2.3) do obecné pohybové rovnice (2.5) získáme pro Newtonovskou tekutinu Navier-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right). \tag{2.6}$$

Pro nestlačitelnou kapalinu se Navier-Stokesova rovnice (2.6) zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = \frac{F_i}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \tag{2.7}$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je kinematická viskozita.

Po odvození Navier-Stokesových rovnic se zaměříme na rovnici kontinuity, která popisuje zákon zachování hmoty. Pro nestlačitelnou tekutinu je diferenciální tvar následující

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{2.8}$$

2.3 Turbulentní proudění

Turbulenci je obtížné přesně definovat, definice se proto obvykle nahrazuje souborem vlastností, kterými je možné turbulentní proudění popsat. První z těchto vlastností je náhodnost, která znamená, že malé počáteční poruchy v proudění můžou natolik zesílit, že vývoj těchto poruch se stává náhodný. Další chování proudění lze předpovědět ve formě statistiky.

Další vlastnost je difuzivita. Turbulentní proudění se vyznačuje rychlejším a chaotičtějším pohybem molekul tekutiny než při molekulární difuzi. Turbulence zvýší intenzitu promíchávání až o několik řádů.

Poslední z vlastností je vířivost. Turbulentní proudění se vyznačuje vysokými hodnotami rotační složky rychlosti neboli vířivostí. Pole vířivosti je časově proměnné a nehomogenní. Víry jsou charakterizovány širokou škálou délkových měřítek. Minimální velikost je dána hranicí, kdy vlivem disipace dochází k přeměně malých vírů v teplo. Velikost největších víru ve spektru je omezena velikostí výpočetní oblasti. Aby se zachovalo turbulentní proudění, neustále se odebírá energie z hlavního proudu tekutiny. K odběru energie dochází v horní části spektra (velké víry), malé struktury (malé víry) už nejsou schopny odebírat energii z proudící tekutiny. Energie je předávána menším vírům pomocí kaskádového přenosu energie až do té doby, než dojde k disipaci vírů na teplo [Uruba 2009].

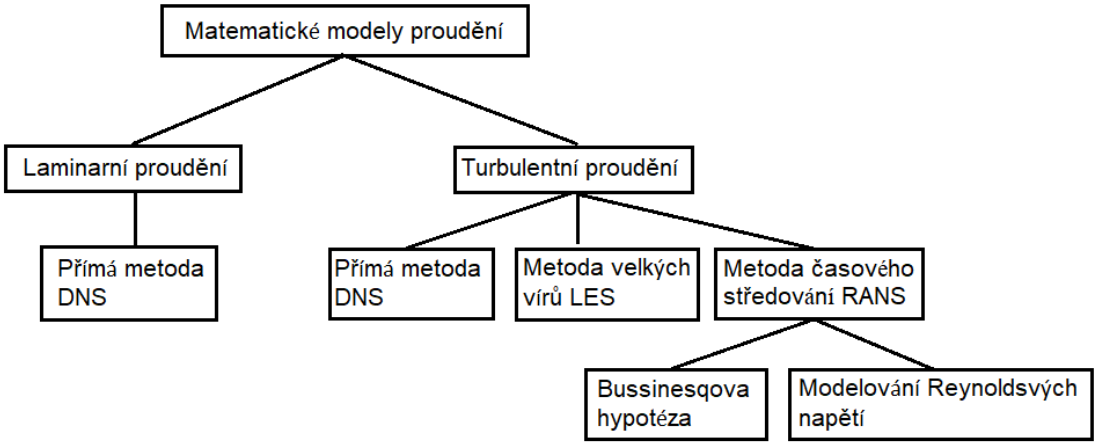
Kaskádový přenos energie je založen na předpokladu, že při rozpadu velkých vírů se uplatňuje zákon zachování energie. Vír má moment setrvačnosti J a otáčí se úhlovou rychlostí ω. Menší víry po rozpadu velkého víru mají menší hmotnost, aby docházelo k zachování energie víru, musí vzrůst jejich úhlová rychlost. Proto velké víry mají frekvenci otáčení malou, naopak víry malé se otáčejí mnohem rychleji. Tento postup pokračuje do té doby, než víry vlivem disipace zaniknou. Tento proces se nazývá kaskádovitý přenos energie [Uruba 2009; Halík 2004].

Poslední vlastností je nelinearita**.** Vývoj i interakci jednotlivých vírů v turbulentním poli lze popsat pouze nelineárním matematickým modelem.

Převážná část řešených problémů dynamiky tekutin se vyznačuje turbulentním prouděním. U turbulentního proudění se pohyb částic tekutiny skládá ze dvou složek. První je uspořádaný pohyb a druhou je náhodný pohyb. U turbulentního proudění vzniká tečné napětí jako u laminárního proudění, ale není určeno pouze viskozitou a gradientem rychlosti, ale i změnou hybnosti makroskopických částeček při promíchávání sousedních vrstev. Tento neuspořádaný pohyb vyvolá tzv. přídavná turbulentní napětí, také nazývaná Reynoldsova napětí [Halík 2004].

U turbulentního proudění lze pro určení tečného napětí využít Boussinesqovu hypotézu. Tato hypotéza předpokládá, že pro turbulentní smykové napětí platí vztah analogický k (2.3). Viskozita je nahrazena součtem turbulentní viskozity η_t a molekulární viskozity. Turbulentní viskozita není konstantou, v každém bodě se počítá z veličin určujících turbulentní proudění. Na tomto dopočítávaní jsou založeny dvourovnicové modely turbulence, které se v inženýrské praxi často používají [Uruba 2009].

Pro matematický popis proudění tekutin se využívá několik druhů matematických modelů, které jsou znázorněny na a podrobněji popsány v následujících odstavcích.



Obr. 1: Rozdělení matematických modelů pro řešení proudění.

2.4 Modely turbulence

2.4.1 Přístupy k modelování turbulence

Pro řešení turbulentního proudění se dá využít přímé simulace DNS (Direct Numerical Simulations), tedy přímé diskretizace Navier-Stokesových rovnic. Nevýhoda této metody je, že numerické řešení rovnic vyžaduje pro střední a vysoká Re velice jemnou síť, jelikož časová a prostorová diskretizace musí být schopna zachytit celé spektrum vírových struktur. Jemnost sítě je závislá na Reynoldsově čísle, závislost počtu uzlů sítě na Reynoldsově číslu je udávána v rozmezí od $Re^{9/4}$ do Re^{3}. Z této závislosti je patrné, že se přístup uplatní zejména pro proudění s malými Reynoldsovými čísly. Další důsledek, který tato závislost vyvolá je ten, že s rostoucím počtem uzlů se zmenšuje prostorový diskretizační krok. To má za následek zkracovaní i časového diskretizačního kroku díky CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) podmínce. CFL je nezbytnou podmínkou pro konvergenci numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic pro proudění při použití explicitního diskretizačního schématu. Podmínka je prezentována někdy jako Courantovo číslo a je dána předpisem:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} = Co < 1, \tag{2.9}$$

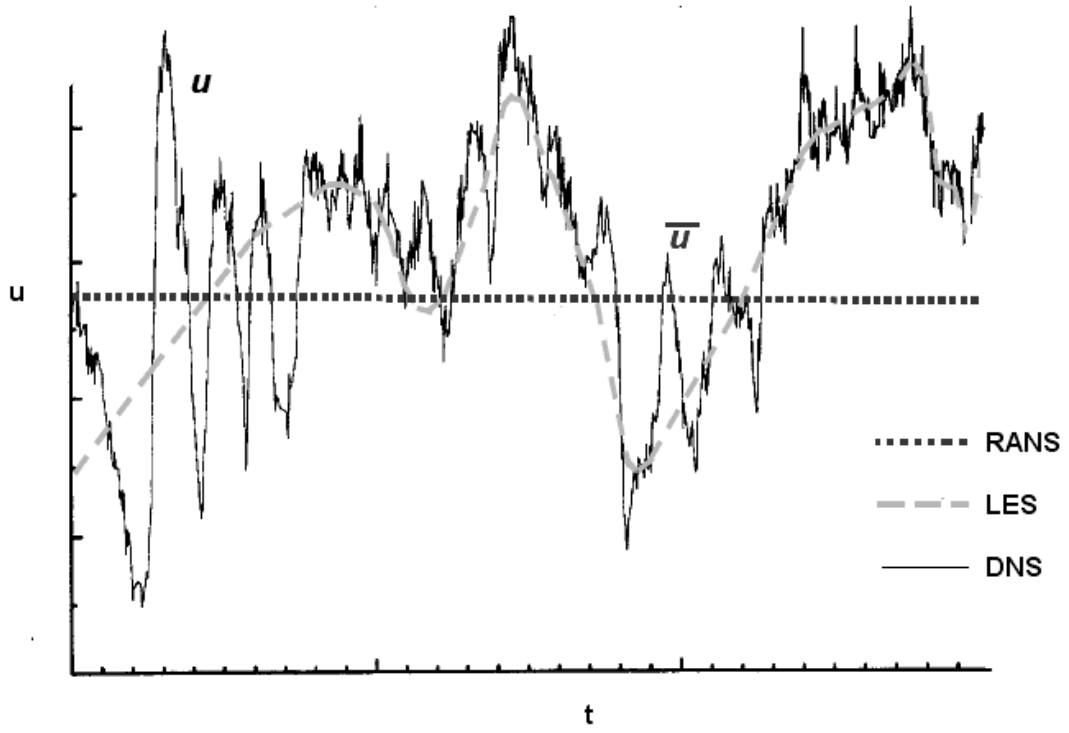
kde Δt je krok časové diskretizace, Δx je krok prostorové diskretizace a u je rychlost proudění.

Další metodou, která se používá pro matematické modelování turbulence, je metoda LES (Large Eddy Simulation), v českém překladu simulace velkých vírů. Tato metoda je založena na tom, že se řešený problém rozdělí na dvě části. Jedna část zahrnuje velké víry až po určitou mez a druhá část pak obsahuje malé víry. Mez víru je pak určena velikostí diskretizačního kroku sítě.

Obě části jsou však spolu provázány a nelze je tedy řešit nezávisle na sobě. Nejčastěji se používá pro řešení velkých vírů přímá metoda DNS a na řešení malých se pak používá tzv. *subgrid model*.

Poslední skupinou matematických modelů turbulence jsou metody založené na časovém středování Navier-Stokesových rovnic – RANS (Reynolds-Averaged Navier Stokes equations). Běžně využívanou variantou RANS jsou modely založené na Boussinesquově hypotéze, druhou možností je přímé modelování Reynoldsových napětí RSM (Reynolds Stress Models),které je výpočetně mnohem náročnější. RSM modely používají rovnice pro výpočet Reynoldsových napětí odvozené přímo z Navier-Stokesových rovnic. Výhodou těchto modelů je poskytnutí dobrého řešení i pro komplexní proudění v geometricky složité oblasti [Příhoda 2009].

Porovnání výsledků jednotlivých metod matematického modelování proudění demonstrováno na Obr. 2.



Obr. 2: Porovnání výsledků jednotlivých metod modelování turbulentního proudění. [Halík 2004]

2.4.2 RANS turbulentní modely

Pro řešení většiny inženýrských problémů se využívají metody odvozené z RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) neboli v českém překladu Reynoldsovo středování Navier-Stokesových rovnic. Jedná se o statistickou metodu, která je založena na časovém středování fyzikálních veličin a středování rovnic. Středování fyzikálních veličin (rychlosti, tlaku, teploty atd.) se pak provádí tak, že se okamžitá hodnota veličin rozdělí na dvě složky dle předpisu

$$\phi(x,t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x,t), \tag{2.10}$$

kde $\bar{\phi}(x)$ je střední hodnota veličiny a $\phi'(x,t)$ složka obsahující náhodné fluktuace. Při středování (2.9) je střední hodnota fluktuační složky nulová a zůstane pouze střední hodnota. Z tohoto důvodu pro středování součinu dvou veličin (zde složek rychlosti) platí

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'} \tag{2.11}$$

Dosazením rychlosti a tlaku rozložených dle rovnice (2.10) do Navier-Stokesových rovnic (2.7) pro nestlačitelné proudění a jejich středováním a využitím (2.11) se získá jejich středovaná forma

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i}\,\overline{u_j}\right) = \frac{F_i}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu\,\Delta\overline{u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{u_i'u_j'}\right). \tag{2.12}$$

Rovnice pro středovanou rychlost je formálně shodná s (2.7), pouze s dodatečným posledním členem vpravo. Rovnice není uzavřená a tenzor Reynoldsových napětí $-\overline{u_i'u_j'}$ je nutné modelovat.

Středováná je také rovnice kontinuity (2.8), která má pak následující tvar:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0. \tag{2.13}$$

Metod matematického modelování založených na RANS je několik, dále se dělí na dvě základní podskupiny. Hlavním rozdílem obou skupin je, jak se docílí toho, aby byl systém Reynoldsových rovnic uzavřen. U Reynoldsových rovnic je více proměnných, než kolik se dá z daných rovnic vypočítat. Těmito skupinami tedy jsou metody založené na Boussinesquově hypotéze a metoda modelování Reynoldsových napětí.

Na Boussinesquově hypotéze je založeno několik metod matematického modelování turbulentního proudění. Tuto hypotézu zavedl v roce 1877 Boussinesq a je obdobou Newtonova zákon vazkosti. Výsledná vazkost je pak dána součtem turbulentní vazkosti ν_t a molekulární vazkosti tekutiny. Turbulentní viskosita je však funkcí, a nikoliv konstantou a je závislá na prostoru a čase. Lze provést zjednodušení, že výsledná celková vazkost je rovna pouze turbulentní vazkosti, molekulová vazkost je v porovnání s turbulentní vazkostí zanedbatelná. Samotná turbulentní vazkost je však neznámou veličinou a neřeší tak uzavření Reynoldsových rovnic, proto se musí zavést další rovnice. Z tohoto důvodu se používá další dělení metod odvozených z Boussinesquovy hypotézy právě podle počtu přidaných rovnic [Halík 2004; Příhoda 2009].

Boussinesquova hypotéza o turbulentní viskozitě, podle které jsou Reynoldsova napětí úměrná středním gradientům rychlosti analogicky, jak je tomu u vazkých napětí (Newtonův zákon), je formulována takto:

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(k + \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}. \tag{2.14}$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}. \tag{2.15}$$

První případem založené na Boussinesquově hypotéze je Nularovnicový model neboli Algebraický model**.** Tento model je založen na směšovací délce L_m, kterou zavedl Prandtl. Směšovací délka udává vzdálenost, kterou vír urazí v mezní vrstvě, než zanikne. Tato směšovací délka slouží k určení turbulentní viskozity dle vztahu:

$$\nu_t = {L_m}^2 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}. \tag{2.16}$$

Algebraické modely jsou určeny především pro dvourozměrné proudění v mezní vrstvě nebo v úplavu. Pro prostorové řešení je tento model nevhodný. Jak se tato metoda postupně rozvíjela, bylo odvozeno mnoho modifikovaných algebraických modelů. Některé se používají v dnešní době v letectví, kde se podle nich modeluje obtékání leteckého profilu [Příhoda 2009].

Dalším případem jsou pak modely složitější, které pro určení turbulentní viskosity používají transportní rovnice. Prvním skupinu tvoří jednorovnicový model. Jednorovnicový model používá transportní rovnici pro určení turbulentní energie (2.15). Tato kinetické turbulentní energie slouží pro výpočet turbulentní viskosity, která je pak definována vztahem:

$$\nu_t = \sqrt{k} C_v L_m, \tag{2.17}$$

kde $\sqrt{k}$ je rychlostní měřítko turbulentního pohybu a L_m je délkové měřítko a $C_v = 0{,}09$ je konstanta.

Použití samostatného jednorovnicového modelu je v praxi velice omezené. Je vhodný pro výpočet tenkých smykových vrstev (mezní vrstva a proudění v blízkosti stěny). Jedním z nejpoužívanějších je tzv. dvouvrstvý model, který rozděluje oblast na dvě části. První část se nachází v blízkosti stěn a uplatňuje se zde jednorovnicový model a v oblasti vzdálené od stěn se naopak využívá dvourovnicový model. Výhodou tohoto spojení je nižší počet uzlů sítě, než kdyby byl použit jen dvourovnicový model.

Pro výpočet běžných technických problémů se využívají dvourovnicové modely. Výhodou těchto modelu oproti jednorovnicovým je jejich použitelnost i pro prostorové proudění. To je způsobeno tím, že zde není algebraický model pro délkové měřítko, které je závislé na

vzdálenosti od stěny. Místo délkového měřítka je veličina vyjádřena pomocí transportní rovnice [Příhoda 2009].

Nejběžnějším a nejpoužívanějším dvourovnicovým modelem je model *k-ε*. V tomto modelu je nahrazeno délkové měřítko rychlostí disipace energie ε**,** která je dána z transportních rovnicí. To má výhodu, že se v tomto modelu nevyskytuje algebraická závislost délkového měřítka. To se promítne i do určení turbulentní viskozity, která je dána vztahem:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{2.18}$$

kde C_μ= 0,09 je konstanta modelu.

Nevýhoda tohoto modelu je, že je použitelný pouze v dostatečné vzdálenosti od stěny. U stěn totiž není turbulence izotropní vlivem tlumení fluktuačních rychlostí kolmých na stěnu. Z tohoto důvodu existuje několik možností úprav standardního $k-\varepsilon$ modelu. Mezi tyto úpravy patří zavedení stěnových funkcí, úpravou na dvouvrstvý model nebo modifikace dvourovnicového modelu pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla. Bližší podrobnosti k těmto modifikacím jsou k nalezení v [Příhoda 2009].

Asi nejpoužívanější alternativou $k-\varepsilon$ modelu je model $k-\omega$ Tento model odstraňuje problémy s prouděním v blízkosti stěny tím, že rychlost disipace *ε* je nahrazena tzv. specifickou rychlostí disipace $\omega = \varepsilon/k$

2.5 Dvourovnicové modely turbulence

Tato kapitola se věnuje konkrétní implementaci modelů turbulence ve výpočetním balíku OpenFOAM. V knihovnách OpenFOAM je implementováno několik modelů pro výpočet turbulence. K výpočtům proudění pro jednotlivé úlohy byly využity dvourovnicové modely. Tyto modely byly zvoleny na základě jejich robustnosti, výpočetní náročnosti a přesnosti. Jejich popis vychází z práce [Spalding 1972; Spalding 1974] pro k-ε model turbulence a [Menter 2003] pro k-ω SST. Oba modely jsou implementovány do verze OpenFOAM 2.3.0.

2.5.1 Model turbulence k-ε pro nestlačitelné proudění

Nestlačitelné turbulentní proudění lze popsat středovanoi rovnicí kontinuity (2.12) a středovanými N-S rovnicemi (2.11). Takto zvolený soubor rovnic je potřeba doplnit o další rovnice, pomocí kterých získáme veličiny nutné pro výpočet turbulentní viskozity (2.18), aby byl systém rovnic uzavřený.

Pro k-ε model jsou koeficienty získány následujícími rovnicemi, kde první rovnice popisuje výpočet kinetické turbulentní energie k:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_\iota}\frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu + \alpha_k \nu_t)\frac{\partial k}{\partial x_i} = G - \varepsilon, \tag{2.19}$$

která obsahuje konstantu $\alpha_k = 1$, ε reprezentuje disipaci malých vírů na teplo a produkční člen G je roven

$$G = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_\jmath}}{\partial x_i}\right)\right). \tag{2.20}$$

Druhá rovnice pro specifickou disipaci ε pak popsána takto:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_\iota}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \alpha_\varepsilon \nu_t)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] = C_1 G\frac{\varepsilon}{k} - C_2\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{2.21}$$

kde jsou konstanty $\alpha_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44$ a $C_2 = 1{,}92$.

2.5.2 Model turbulence k-ω SST pro nestlačitelné proudění

Druhým běžně používaným dvourovnicovým modelem turbulence je model k-ω SST. Tento model je vhodný pro výpočty obtékání těles, model přepíná mezi modely k-ε ve vnějším proudu a modelem k-ω v blízkosti stěny. Tím je zaručeno přesnější řešení turbulentního proudění u stěny, protože je disipace ε nahrazena specifickou disipací ω. V porovnání se samotným modelem k-ε nevyžaduje, tak jemnou síť v mezní vrstvě. Toto přepínání je součástí rovnice pro turbulentní kinetickou energii

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_\jmath}\frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\upsilon + \alpha^* \nu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] = min(G, c\beta^* k\omega) - \beta^* k\omega. \tag{2.22}$$

a také v rovnici pro specifickou disipaci

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_\jmath}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\upsilon + \alpha \nu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] = -\beta\omega^2 + (F_1 - 1)CD_{k\omega} +$$

$$+\gamma min\left(\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_\jmath}}{\partial x_i}\right), \frac{c_1}{a_1}\beta^*\omega\big(max(a_1\omega,\ b_1 SF_{23})\big)\right), \tag{2.23}$$

V rovnici (2.22) je omezena minimální hodnota produkčního členu: $min(G, c_1\beta^* k\omega)$. Pro proudění ve volném proudu je produkční člen G dán rovnicí (2.20) a disipace je dána vztahem

$\varepsilon = \beta^* k\omega$. Tím získáme rovnici pro kinetickou energii stejnou jako pro turbulentní model k-ε (2.19), konstanta pro proudění ve volném proudu $\alpha^* = 1$. Pro proudění v blízkosti stěny je konstanta $\alpha^* = 0.5$, produkční člen je opět popsán vztahem (2.20).

Rovnice (2.23) obsahuje spojovací funkci F_1, která zaručuje hladký přechod mezi modelem turbulence k-ε ($F_1 = 0$) a k-ω ($F_1 = 1$). Výpočet hodnoty spojovací funkce je dán vztahem:

$$F_1 = \tanh\left\{\left(min\left(min\left(max\left[\frac{\sqrt{k}}{\omega y \beta^*}, \frac{500v}{y^2\omega}\right], \frac{4\alpha_{\omega 2}k}{max(CD_{k\omega}, 10^{-10})y^2}\right)\right), 10\right)^4\right\}. \quad (2.24)$$

Tento vztah obsahuje člen zastupující příčnou difuzi

$$CD_{k\omega} = 2\alpha_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \quad (2.25)$$

Druhou spojovací funkcí je F_{23}, která určuje přechod mezi turbulentní vazkostí $F_{23} = 0$ a jednoduchým modelem Reynoldsových napětí $F_{23} = 1$. Oblast Reynoldsových napětí odpovídá $y^+ > 5$. Matematické vyjádření funkce je následující:

$$F_{23} = 1 - \tanh\left(\left(min\left[\frac{150v}{y^2\omega}, 10\right]\right)^4\right) \quad (2.26)$$

Pro proudění ve volném proudu je rovnice (2.23) upravena podle následujících předpokladů. První předpoklad je, že člen$(F_1 - 1)CD_{k\omega} = 0$ jelikož $CD_{k\omega} = 0$ ve volném proudu. I v tomto případě je omezena minimální hodnota produkčního členu výrazem $\gamma min\left(\left(\frac{G}{\nu_t}\right), \frac{c_1}{a_1}\beta^*\omega\big(max(a_1\omega,\ b_1 SF_{23})\big)\right)$.

Ve volném proudu je vyjádřen produkční člen pomocí výrazu $\gamma\left(\frac{G}{\nu_t}\right)$. Dále je specifická disipace ω nahrazena disipací ε ve tvaru $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$. Tím získáme rovnici pro specifickou disipaci ve volném proudu. Konstanty v této rovnici jsou $\alpha^* = 1, \alpha = \alpha_{\omega 2} = 0.856,\ \beta = 0.0828$ a $\gamma = 0.44$.

V blízkosti stěny již člen $CD_{k\omega} \neq 0$ a nedochází k náhradě specifické disipace, zdrojový člen zůstává stejný. Změna nastává u konstant, kdy pro popis proudění v blízkosti stěny jsou konstanty $\alpha^* = 0.5, \alpha = 0.5, \beta = 0.075$ a $\gamma = 1.92$. $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ je invariant tenoru rychlosti deformace.

Pro uzavření systému rovnic je potřeba dořešit turbulentní viskozitu. Ta je dána vztahem

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{max(a_1\omega, b_1 SF_{23})}, \tag{2.27}$$

kde je hodnota konstant $a_1 = 0{,}31,\ b_1 = 1$. Pro výpočet ve volném proudu je specifická disipace nahrazena $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$.

Oblast volného proudu, kdy je využit pouze k-ε model, je dána stěnovou souřadnicí $y^+ = 70$. Model k-ω je dominantní do hranice logaritmické oblasti $y^+ = 30$. Mezi těmito dvěma body pak dochází k pozvolnému přechodu mezi oběma modely. V této oblasti je také potřeba upravit konstanty pro jednotlivé modely. Úprava konstant je předepsána vztahem

$$\phi = F_1\phi_{k-\omega} + (1 - F_1)\phi_{k-\varepsilon}, \tag{2.28}$$

kde ϕ je hodnota modelové konstanty v modelu k-ω-SST a $\phi_{k-\omega}$ je hodnota modelové konstanty v modelu k-ω a $\phi_{k-\varepsilon}$ je hodnota modelové konstanty v modelu k-ε. Jednotlivé konstanty jsou definovány výše.

2.5.3 Turbulentní přenos tepla

Stlačitelné proudění se popisuje následujícími rovnicemi, kde (2.29) je rovnicí kontinuity a (2.30) jsou Navier-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\overline{u_\iota}) = 0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\overline{u_\iota})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_J}\bar{\rho}\overline{u_\iota}\right) - \frac{\partial\overline{\tau_{\iota J}}}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(\overline{\rho u_\iota{}' u_J{}'}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} = 0, \tag{2.30}$$

které obsahují dva tenzory, tenzor vazkého napětí (2.3) a turbulentního napětí (2.14)

Pro stlačitelné rovnice, je nutno ještě přidat další rovnici. Jedná se o rovnici zachování energie v následujícím tvaru:

$$\frac{\partial\rho\bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\bar{h}\right) + \frac{\partial\rho\overline{K}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\overline{K}\right) - \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} = \overline{\tau_{\iota J}\frac{\partial u_\iota}{\partial x_J}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{q_\iota} - \overline{\rho u_J h}\right), \tag{2.31}$$

$\bar{h} = \bar{e} + \bar{p}/\rho$ je specifická entalpie daná součtem vnitřní energie a kinematického tlaku, $\overline{K}$ je mechanická energie, dále $(\overline{q_\iota})$ je tepelný tok, $\left(\overline{\rho u_\iota h}\right)$ je turbulentní přenos tepla a $\overline{\tau_{\iota J}}$ je disipace vlivem vazkosti. Tepelný tok lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$q_i = -\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}\ ; \quad \lambda = \alpha\rho c_p,\ \mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \tag{2.32}$$

kde Pr je Prandlovo číslo, které se pro vzduch volí 0,72, c_p je tepelná kapacita za konstantního tlaku a poslední je tepelná vodivost α. Turbulentní přenos tepla lze nahradit gradientovou hypotézou, která je ekvivalentem Boussinesqově hypotéze o turbulentním přenosu hybnosti:

$$\overline{\rho u_j h} = -\frac{\mu_t}{Pr_t}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} = \alpha_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}, \tag{2.33}$$

kde Pr_t je turbulentní Prandtlovo číslo a jeho hodnota je pro použité výpočty konstanta $Pr_t = 0{,}9$ a α_t je turbulentní přenos tepla. Disipační člen vlivem vazkosti je pak rozepsán pomocí rovnice (2.3)

Pro výpočet dynamické viskozity μ je v knihovně OpenFOAM použit Sutherlandův zákon:

$$\mu = \frac{A_S\sqrt{\overline{T}}}{1 + \frac{T_S}{\overline{T}}}, \tag{2.34}$$

kde vzorec obsahuje Sutherlandův koeficient $A_S = 1.4792\,10^{-6}$, proměnou teplotou T a Sutherlandovu teplota $T_S = 110.4\ K$. Entalpie h z rovnice (2.30) je vyjádřena následovně:

$$\bar{h} = c_p \bar{T}, \tag{2.35}$$

kde se tepelná kapacita za konstantního tlaku se uvažuje jako konstanta c_p = 1007 J/kg*K. Pro výpočet hustoty se pak použije stavová rovnice:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{R\bar{T}}\bar{p}, \tag{2.36}$$

kde plynová konstanta pro vzduch R = 287,1.

Rovnici (2.31) lze po zanedbání členů obsahující mechanickou energii a disipace zjednodušit do tvaru:

$$\frac{\partial \overline{\rho}\overline{T}c_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\overline{u_j}\overline{T}c_p\right) - \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_p(\alpha + \alpha_t)\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}\right). \tag{2.37}$$

2.5.4 Model turbulence k-ε pro stlačitelné proudění

Model turbulence k-ε pro stlačitelné proudění je popsán následujícími rovnicemi, kde první rovnice je pro kinetickou turbulentní energii k

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \bar{\rho}\overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \alpha_k \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] = G - \frac{2}{3}\bar{\rho} k \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} - \bar{\rho}\varepsilon, \tag{2.38}$$

kde jsou všechny konstanty shodné s nestlačitelným modelem v kapitole 2.5.1. Ke změně došlo produkčního členu

$$G = \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial x_j} = \mu_t\left[\left(\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_\jmath}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}_\iota}{\partial x_j}\right)\right]. \tag{2.39}$$

Pro nestlačitelné proudění již nelze zanedbat člen $-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right)$. Celková produkce turbulentní energie je $G - \frac{2}{3}\bar{\rho} k \frac{\partial \overline{u_\jmath}}{\partial x_j}$.

Rovnice pro disipaci ε je rozšíření o člen $\left(\frac{2}{3}C_1 + C_3\right)\bar{\rho}\varepsilon\frac{\partial \overline{u_\iota}}{\partial x_i}$, na základě Rapid Distortion teorie popsané v [Tahry 1983].

$$\frac{\partial \bar{\rho}\varepsilon}{\partial t} + \bar{\rho}\overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \alpha_\epsilon \mu_t)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] = C_1 G\frac{\varepsilon}{k} - \left(\frac{2}{3}C_1 + C_3\right)\bar{\rho}\varepsilon\frac{\partial \overline{u}_\jmath}{\partial x_j} - C_2\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{2.40}$$

Modelové konstanty jsou následující $\alpha_k = 1, \alpha_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44,\ C_2 = 1.92$ a $C_3 = -0.33$. Turbulentní viskosita μ_t je pak vypočtena pomocí vztahu

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{2.41}$$

2.5.5 Model turbulence k-ω SST pro stlačitelné proudění

V knihovně OpenFOAMje pro nestlačitelné proudění uvažována transportní rovnice pro *k* ve tvaru.

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \bar{\rho}\overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \alpha^* \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] = min(G, c_1\beta^*\bar{\rho} k\omega) - \frac{2}{3}\bar{\rho} k \frac{\partial \overline{u}_\jmath}{\partial x_j} -$$

$$-\bar{\rho}\beta^* k\omega. \tag{2.42}$$

Produkční člen G je dán rovnicí (2.39) a je také omezuje minimální hodnotu jako v případě nestlačitelného proudění. Celková produkce turbulentní energie je definována výrazem

$$min(G, c_1\beta^*\bar{\rho} k\omega) - \frac{2}{3}\bar{\rho} k \frac{\partial \overline{u}_\jmath}{\partial x_j}. \tag{2.43}$$

Transportní rovnice pro specifickou disipaci ω má tvar

$$\frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial t} + \bar{\rho}\bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \alpha\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] = -\rho\beta^*\omega^2 + (1 - F_1)\rho CD_{k\omega} +$$

$$+\rho\gamma min\left(\frac{G}{\mu_t}, \frac{c_1}{a_1}\beta\omega * \left(max(a_1\omega,\ b_1\Omega F_{23})\right)\right) - \frac{2}{3}\gamma\bar{\rho}\omega\ \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j}. \qquad (2.44)$$

Spojovací funkce F_1 vychází z rovnici (2.24), kde je nahrazena kinematická viskozita ν dynamickou viskozitou μ. Ke stejné náhradě dojde i spojovací funkce F_{23} definované rovnicí (2.26). Celková produkce turbulentní energie pro stlačitelné proudění je reprezentována členy

$$\rho\gamma min\left(\frac{G}{\mu_t}, \frac{c_1}{a_1}\beta\omega * \left(max(a_1\omega,\ b_1 SF_{23})\right)\right) - \frac{2}{3}\gamma\bar{\rho}\omega\ \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j}. \qquad (2.45)$$

Hodnoty modelových konstant jsou uvedeny v kapitole 2.5.2. Poslední vztah definuje výpočet turbulentní viskozity

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{max(a_1\omega, b_1 SF_{23})}. \qquad (2.46)$$

3 Numerické řešení rovnic pro proudění tekutiny

3.1 Úvod do numerického řešení proudění

Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, kterými jsou i Navier-Stokesovy rovnice, je možné ve výpočetní mechanice tekutin řešit pomocí různých diskretizačních metod. Nejčastěji používané metody jsou metoda konečných objemů a konečných prvků. Popis metody konečných prvků pro problémy proudění lze nalézt v [Wesseling 2001], metodu konečných objemů pak například v knize [Ferziger a Peric 2002]. V dnešní době se v komerčních výpočetních balících a open-source balících pro řešení proudění nejčastěji používá metoda konečných objemů. V některých výpočetních softwarech se lze setkat i s metodou konečných prvků, ale toto zastoupení je menší.

Metoda konečných objemů vychází z integrálního tvaru dané úlohy. Základem metody je rozdělení řešené oblasti na systém vzájemně disjunktních kontrolních objemů, prostorová diskretizace výpočetní oblasti. Časovou diskretizaci lze provést dvěma způsoby, a to za pomoci implicitního a explicitního schématu. Explicitní schéma je rychlejší a nevyžaduje tak velké nároky na paměť, jako je tomu u implicitního schématu. Explicitní schéma je méně stabilní a vyžaduje splnění CFL podmínky definované rovnicí (2.9). Implicitní schéma naopak neklade žádné nároky na časovou diskretizaci a časový krok může být mnohem delší, než je tomu u explicitního schématu. Největším omezením implicitního schématu je nutnost v každém časovém kroku řešit soustavu lineárních rovnic z důvodu provázanosti výpočtu hodnoty proměnné v uzlu pro nový časový krok.

OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) je volně dostupný CFD nástroj s otevřeným kódem, licencovaný jako General Public License (GNU GPL). Jedná se o C++ objektově orientovanou knihovnu pro numerické simulace v mechanice kontinua. OpenFOAM je konečněobjemový nástroj pro řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic. V této práci jsou využity dvě verze OpenFOAMu a to vývojová (FOAM-extend-3.0) a oficiální (OpenFOAM 2.3.0). Obě verze jsou vyvíjeny nezávisle na sobě. Z tohoto důvodu jsou jisté rozdíly v implementacích částí kódu a verze jsou mezi sebou nekompatibilní.

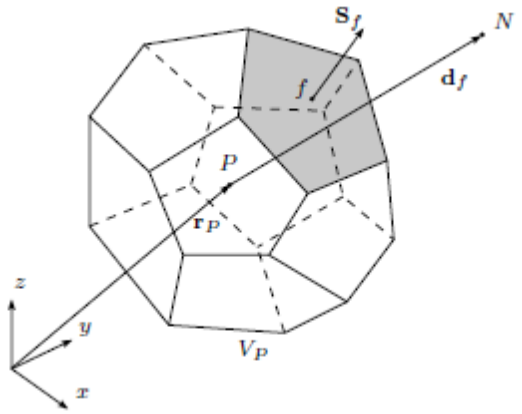
3.2 Prostorová diskretizace Navier-Stokesových rovnic

V práci jsou použity dva modely proudění plynu. Prvním modelem je vazké a nestlačitelné proudění a druhým je vazké a stlačitelné. Využití nestlačitelného modelu tekutiny je podloženo předpokladem, že změnu hustoty plynu lze zanedbat, pokud rychlost proudícího plynu nepřesáhne rychlost M = 0,3. Proudění plynné látky lze pak popsat pomocí rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění (2.8) a Navier-Stokesových rovnic (pohybových rovnic) (2.7). Tato kapitola bude věnována diskretizaci rovnic pro nestlačitelné vazké proudění.

Prostorová diskretizace matematických rovnic v balíku OpenFOAM využívá tzv. collocated uspořádání [Jasak 1996]. Toto uspořádání znamená, že se hodnoty všech proměnných počítají v těžišti kontrolních objemů. Metoda konečných objemů aproximuje hodnoty hledané funkce jako průměrnou hodnotu dané funkce v tomto objemu. Pro libovolný mnohostěnový kontrolní objem V_P s těžištěm v bodě P (viz Obr. 3) a těžištěm sousedního kontrolního objevu v bodě N je poloha těžiště kontrolního objemu dána bodem $\boldsymbol{x}_P$ a platí zde vztah

$$\int_{V_P} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_P})\ dV = 0 \tag{3.1}$$

Dva sousední elementy mají společnou stěnu f a normálovým vektorem $\boldsymbol{S}_f$ a d_f je vzdálenost mezi těžišti dvou sousedních elementů.



Obr. 3: Diskretizace na libovolném mnohostěnném kontrolním objemu. [Panton 2005]

Diskretizace metodou konečných objemů bude demonstrována na obecné transportní rovnici pro skalární veličinu ϕ. Po integraci přes kontrolní objem V_P má následující tvar:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \int_{V_P} \rho\phi\ dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\phi)\ dV - \int_{V_P} \nabla \cdot \left(\rho \Gamma_\phi \nabla\phi\right)\ dV = \int_{V_P} S_\phi\ dV, \tag{3.2}$$

kde Γ_ϕ je difuzivita

Pro nestlačitelný model s konstantní hustotou ρ a Taylorovým rozvojem skalární proměnné ϕ schématem druhého řádu může být objemový integrál vyjádřen následovně:

$$\int_{V_P} \rho\phi(\mathbf{x})dV = \rho \int_{V_P} (\phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)(\nabla\phi)_P)\, dV =$$

$$= \rho\phi_P \int_{V_P} dV + \left(\rho \int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)dV\right) \cdot (\nabla\phi)_P \approx \rho\phi_P V_P, \tag{3.3}$$

kde index *P* značí hodnotu veličiny v těžišti kontrolního objemu.

Plošný integrál libovolné vektorové veličiny $\boldsymbol{a}$ lze aproximovat

$$\int_f d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{S}_f \cdot \boldsymbol{a}_f, \tag{3.4}$$

kde $\boldsymbol{S}_f$ je vektor ve směru normály stěny o velikosti dané plochou stěny a $\boldsymbol{a}_f$ je vektor veličiny interpolované v těžišti stěny. Integrál z divergence a gradientních členů jsou převedeny pomocí Gaussovy věty. Díky této větě je možné přepsat objemový integrál divergence vektorové veličiny na plošný integrál jako sumaci přes všechny hraniční plochy:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \boldsymbol{a}\, dV = \oint_{S_{V_P}} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{a} = \sum_f \int_{S_f} d\boldsymbol{S_f} \cdot \boldsymbol{a} \approx \sum_f \boldsymbol{S_f} \cdot \boldsymbol{a}_f. \tag{3.5}$$

Dosazením druhého členu transportní (rovnice (3.2) do rovnice (3.5) dostaneme výsledek

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{u}\phi)\, dV = \sum_f (\rho\boldsymbol{u}\phi)_f \cdot \boldsymbol{S}_f = \sum_f \phi_f(\rho\boldsymbol{u_f}) \cdot \boldsymbol{S}_f. \tag{3.6}$$

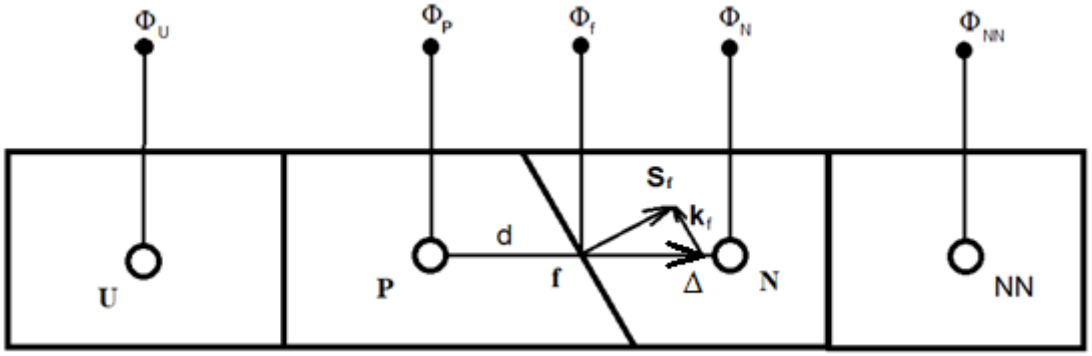
Obdobná operace se provede i pro gradient skalární veličiny ϕ

$$\int_{V_P} \nabla(\rho\phi)\, dV = \oint_{S_{V_P}} dS\, \rho\phi = \sum_f \int_{S_f} d\boldsymbol{S_f}\rho\phi \approx \sum_f \boldsymbol{S_f}\rho\phi_{\boldsymbol{f}}. \tag{3.7}$$

Z výše odvozených vztahů je patrné, že pro výpočet divergentních a gradientních členů s veličinou ϕ potřebujeme znát její hodnotu v těžišti stěny. Dále je také potřeba určit veličiny popisující tok ρ a $\boldsymbol{u}$. Tyto hodnoty lze získat pomocí interpolace hodnot v těžištích dvou sousedních kontrolních objemů. První možností je interpolace pomocí Centrálního diferenčního schématu:

$$\phi_f = f_x\phi_P + (1 - f_x)\phi_N, \tag{3.8}$$

kde f_x je poměr vzdáleností $\frac{\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P}{\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P}$, $\mathbf{x}_P$ je poloha těžiště objemu P, $\mathbf{x}_N$ je poloha těžiště objemu N a $\mathbf{x}_f$ je poloha těžiště společné stěny kontrolních objemů P a N (viz Obr. 4). Centrální diferenční schéma je ve výpočetním balíku OpenFOAM pojmenováno Gauss linear. Jelikož se jedná o lineární interpolaci 2. řádu, je zde riziko vzniku oscilací.



Obr. 4: Interpolace hodnoty na stěně mezi dvěma kontrolními objemy.

Dalším interpolačním schématem je Upwind, které definuje hodnotu veličiny na stěně ϕ_f, jako hodnotu v těžišti nejbližšího elementu v protisměru proudění

$$\phi_f = \begin{pmatrix} \phi_P & pokud & \phi_f(\rho\boldsymbol{u_f})\boldsymbol{S}_f \geqq 0 \\ \phi_N & pokud & \phi_f(\rho\boldsymbol{u_f})\boldsymbol{S}_f < 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Toto schéma potlačuje oscilace pro velké gradienty veličin, ale na druhou stranu má nízký řád přesnosti. V OpenFOAMU jej najdeme pod názvem Gauss Upwind.

Schématem využívajícím pro výpočet hodnoty ϕ_f hodnoty z více těžišť okolních kontrolních objemů je Upwind druhého řádu. Jedná se o lineární interpolaci v případě $\phi_f(\rho\boldsymbol{u_f})\boldsymbol{S}_f \geqq 0$ je vztah pro výpočet ϕ_f

$$\phi_f = \phi_P + \left(\frac{\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P}{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_U}\right)(\phi_P - \phi_U), \tag{3.10}$$

v případě $\phi_f(\rho\boldsymbol{u_f})\boldsymbol{S}_f < 0$

$$\phi_f = \phi_N + \left(\frac{\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_N}{\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{NN}}\right)(\phi_N - \phi_{NN}). \tag{3.11}$$

Pro lepší interpolaci hledané hodnoty ϕ_f na stěně se využívají metody vyššího řádu. Tyto metody kombinují vysokou přesnost a omezenost (potlačení oscilací). Mezi zástupce těchto

metod patří Normalized Variable Diagram (NVD) schéma, která normalizují hodnotu ϕ_f vůči okolním uzlům. Další schématem je Total Variation Dimishing (TDV), které zabraňuje zvětšování nebo zmenšování extrému hodnoty ϕ_f. Podrobnosti k těmto metodám lze nalézt v [Ferziger a Peric 2002].

Dalším členem rovnice (3.2) je difuzní člen. Jeho diskretizace vede k výrazu

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \left(\rho\Gamma_\phi \nabla\phi\right)\, dV = \sum_f \boldsymbol{S}_f \cdot \left(\rho\Gamma_\phi \nabla\phi\right)_f = \sum_f \left(\rho\Gamma_\phi\right)_f (\nabla\phi)_f \cdot \boldsymbol{S}_f \qquad (3.12)$$

Pro ortogonální sítě, kde je vektor spojující uzly sousedních kontrolních objemů $\boldsymbol{d}$ rovnoběžný s vektorem plochy $\mathbf{S}_\mathrm{f}$ definující společnou stěnu, lze vyjádřit gradient veličiny ϕ_f pomocí

$$(\nabla\phi)_f \boldsymbol{S}_f = \left|\boldsymbol{S}_f\right| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\boldsymbol{d}|}\,. \qquad (3.13)$$

V případě neortogonální sítě, kdy není splněna podmínka rovnoběžnosti $\boldsymbol{S}_f$ a $\boldsymbol{d}$ je nutné použít ortogonální korektor [Jasak 1996]

$$(\nabla\phi)_f \boldsymbol{S}_f = \left|\boldsymbol{S}_f\right| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\boldsymbol{d}|} + \boldsymbol{k}_f (\nabla\phi)_f, \qquad (3.14)$$

kde $\boldsymbol{k}_f$ je vektor neorotgonality mezi vektorem spojnice těžišť dvou sousedních elementů Δ a vektoru normály stěny $\boldsymbol{S}_f$ (viz. Obr. 3.2).

Posledním členem rovnice (3.2) je zdrojový člen, který je nutné nejprve linearizovat.

$$S_\phi(\phi) = S_1 + S_2\phi \qquad (3.15)$$

Linearizovaný zdrojový člen pak diskretizujeme přes kontrolní objem následovně

$$\int_{V_P} S_\phi(\phi)\, dV = S_1 V_P + S_2 V_P \phi_P \qquad (3.16)$$

3.3 Diskretizace v čase

Tato práce se zaměřuje na řešení neustáleného proudění, proto je nutné provést také časovou diskretizaci řešených rovnic. Časová diskretizace nahradí kontinuální časový úsek souborem diskrétních časových kroků. Časově závislou proměnou lze vyjádřit jako kombinaci hodnot z aktuálního časového kroku a předešlého v závislosti na použitém diskretizačním schématu. Pro časově poměnou veličinu ϕ lze zapsat aproximace časové derivace pomocí diskretizace prvního řádu jako časová diference

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^{n}}{\Delta t}, \tag{3.17}$$

kde index $n+1$ označuje hodnotu ϕ v novém časovém kroku a n v předešlém časovém kroku. Jedná se o implicitní časové schéma.

Abychom nahradili spojité řešení v čase u obecné transportní rovnice, musíme jí integrovat přes časový krok Δt, tím získáme

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi_P V_P) + \sum_f \phi_f (\rho \boldsymbol{u_f}) \cdot \boldsymbol{S}_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \boldsymbol{S}_f \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} (S_1 V_P + S_2 V_P \phi_P)\, \Delta t. \tag{3.18}$$

První člen rovnice (3.18) lze pomocí Eulerova zpětného schématu (v OpenFOAMu je toto schéma pojmenováno Euler implicit) zapsat

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} dt = \phi^{t+\Delta t}\, \Delta t. \tag{3.19}$$

Toto schéma zaručuje omezenost (potlačení oscilací), ale je pouze prvního řádu. Pro vyšší přesnost je vhodné využít schéma druhého řádu. Crank-Nicholson je schématem druhého řadu, které je založeno na lichoběžníkovém pravidlu

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} dt = \frac{1}{2}\left(\phi^{t+\Delta t} + \phi^{t}\right) \Delta t. \tag{3.20}$$

Jelikož je v simulacích, které jsou počítány v rámci této práce, z důvodu stability využito zpětné Eulerovo schéma, bude toto schéma použito pro diskretizaci transportní rovnice (3.18). Za předpokladu, že kontrolní objem V_P, hustota ρ a Γ_ϕ jsou v průběhu času konstantní, získáme

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^{n}}{\Delta t} \rho_P V_P + \sum_f \phi_f^{n+1} (\rho \boldsymbol{u})_f^{n+1} \cdot \boldsymbol{S}_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \nabla \phi_f^{n+1} \cdot \boldsymbol{S}_f$$

$$= S_1 V_P + S_2 V_P \phi_P^{n+1}. \tag{3.21}$$

Pro danou rovnici provedeme náhradu veličin na stěnách dle rovnic (3.8) pro konvektivní člen a rovnice (3.13) pro difusní člen na ortogonální síti. Získáme rovnici

$$\frac{\phi_P^{n+1}-\phi_P^n}{\Delta t}\rho_P V_P + \sum_f \left(f_x\phi_P^{n+1} + \left(1-f_x\right)\phi_N^{n+1}\right)(\rho\boldsymbol{u})_f^{n+1}\boldsymbol{S}_f +$$

$$+\sum_f \left(\rho\Gamma_\phi\right)_f |\boldsymbol{S}_f| \frac{\phi_N^{n+1}-\phi_P^{n+1}}{|\boldsymbol{d}|} = S_1 V_P + S_2 V_P \phi_P^{n+1}. \qquad (3.22)$$

Tato rovnice leze zapsat ve formě

$$a_P\phi_P^{n+1} + \sum_N a_N\,\phi_N^{n+1} = R, \qquad (3.23)$$

kde a_P obsahuje přírůstek od konvektivního a difuzního členu pro kontrolní objem s těžištěm v bodě P, časovou derivaci a lineární část zdrojového členu. Člen a_N obsahuje příspěvky od všech okolních elementů se společnou hranicí. Člen R obsahuje veškeré příspěvky od konvektivního, difuzního, zdrojového členu a časové derivace pro starý časový krok ϕ^n.

Časovou diskretizaci lze kromě implicitních schémat, zmíněných výše, použít i schémata explicitní, které mají výhodu v tom, že není potřeb řešit soustavu rovnic pro získání hodnoty v novém časovém kroku. Jsou však výrazně omezeny časovým krokem daným CFL podmínkou pomocí Courantova čísla, které lze na 3D nestrukturované síti vypočítat jako

$$Co = \frac{1}{2}\frac{\sum_f |\phi_f|}{V_P}\Delta t \qquad (3.24)$$

3.4 Algoritmus SIMPLE a PISO v OpenFOAMu

U řešení Navier-Stokesových rovnice se setkáme se dvěma problémy, a to s nelineárním členem $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ a také s provázaností tlak-rychlost. První problém se dá vyřešit Newtonovou linearizací na tvar

$$\int_{V_P}\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \sum_f\left((\boldsymbol{u})_f\otimes(\boldsymbol{u})_f\right)\cdot\ \boldsymbol{S}_f = a_P\boldsymbol{u_P} + \sum_f a_N\boldsymbol{u_N}, \qquad (3.25)$$

kde a_N , a_P jsou koeficienty závislé na rychlosti **u.** Tyto členy reprezentují diagonální a mimodiagonální prvky řídké matice vzniklé diskretizací rovnic metodou konečných objemů. Bližší informace k sestavení matice lze nalézt v práci [Jasak 1996].

Systém rovnic (2.7) a (2.8) se musí řešit jako sdružený systém a linearizovat nelineární člen, aby se nemusely využívat řešiče pro nelineární systém rovnic. Vzhledem k provázanosti

tlaku a rychlosti je nutné zavést úpravu, která toto propojení zajistí. K tomu lze využít semi-diskrétní formulaci pohybových rovnic:

$$a_P \boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) - \nabla p, \tag{3.26}$$

kde ∇p je nediskretizovyný gradient tlaku [Rhie a Chow 1983]. Člen $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ obsahuje konvektivní a zdrojovou část. Konvektivní obsahuje maticové koeficienty od všech sousedních objemů přenásobené rychlostí v těžištích těchto elementů, zdrojová část obsahuje všechny příspěvky zdrojů kromě tlakového a lze zapsat

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = -\sum_N a_N \boldsymbol{u}_N + \frac{\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} \tag{3.27}$$

Diskretizací rovnic kontinuity dle vztahu (3.5) získáme

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dV = \sum_f \boldsymbol{S}_f \cdot \boldsymbol{u}_f = 0 \tag{3.28}$$

Z rovnice (3.26) vyjádříme rychlost

$$\boldsymbol{u}_P = \frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p. \tag{3.29}$$

Stejným způsobem můžeme vyjádřit i rychlost na stěně kontrolního objemu

$$\boldsymbol{u}_f = \left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P}\right)_f - \left(\frac{1}{a_P}\right)_f (\nabla p)_f. \tag{3.30}$$

Takto vyjádřenou rychlost dosadíme zpětně do rovnice kontinuity za proměnou $\boldsymbol{u}$ a aproximací $\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P}\right)$ pomocí vztahu (3.5) získáme Laplaceovu rovnici pro tlak

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \left(\frac{1}{a_P} \nabla p\right) dV = \int_{V_P} \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P}\right) dV = \sum_f \boldsymbol{S}_f \left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P}\right)_f. \tag{3.31}$$

Rovnice lze zapsat takto

$$\sum_f \boldsymbol{S}_f \left(\left(\frac{1}{a_P}\right)_f (\nabla p)_f\right) = \sum_f \boldsymbol{S}_f \left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P}\right)_f. \tag{3.32}$$

Konečná diskretizace Navier-Stokesových rovnic vypadá následovně

$$a_P \boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) - \sum_f \boldsymbol{S}_f (\nabla p)_f . \tag{3.33}$$

Výpočet toku přes stěny konečných objemů se počítá dle vztahu:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}_f \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}_f \cdot \left(\left(\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right) (\nabla p)_f \right). \tag{3.34}$$

Z výsledné diskretizace N-S rovnic (3.33) a tlakové rovnice (3.31) získané z rovnice kontinuity je vidět provázanost rovnic pomocí rychlosti a tlaku a naopak. Souběžné řešení obou veličin najednou by bylo časově velice náročné, z tohoto důvodu se používá přístup, kdy se veličiny řeší zvlášť (algoritmy založené na segregévaném přístupu). Těmito algoritmy jsou PISO [Issa 1986] a SIMPLE [Patankar a Spalding 1972].

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) algoritmus se používá pro ustálené proudění. V tomto případě není nutné plně řešit lineární provázání tlaku a rychlosti, jak se mění mezi časovými kroky, jelikož tyto změny jsou malé. Průběh algoritmu je následující:

1. krok

   Nejprve je řešena pohybová rovnice (3.33) za použití tlakového gradientu z předchozího časového kroku. Řeší se pro každou složku rychlosti zvlášť. Nový tlakový gradient není ještě spočítán. Vyřešení této rovnice poskytne rychlostní pole a spočítá se tok přes stěny konečných objemů.

2. krok

   Vyřeší se tlaková rovnice (3.32) a za pomoci relaxačního koeficientu α_p se opraví vypočtený tlak

   $$p^{new} = p^{old} + \alpha_p (p^p - p^{old}) . \tag{3.35}$$

   kde p^{new} je finální aproximace tlaku, kterou lze využít v dalším iteračním kroku. Tlak p^{old} je získám z řešení pohybových rovnic p^p je tlak získaný z tlakové rovnice.

3. krok

   Přepočítá se tok přes stěny pomocí rovnice (3.34) a přepočítá se rychlostní pole na základě nového tlaku.

4. krok

   Vypočtené hodnoty tlaku a rychlosti se nastaví jako počáteční hodnoty.

Kroky 1-4 se provádí tak dlouho dokud nedojde ke konvergenci.

PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operator)se používá pro nestacionární úlohy a funguje následujícím způsobem:

1. krok

   Nejprve je řešena pohybová rovnice (3.33) za použití tlakového gradientu z předchozího časového kroku. Řeší se pro každou složku rychlosti zvlášť. Nový tlakový gradient není ještě spočítán.

2. krok

   Vyřešení pohybových rovnic poskytne rychlostní pole a spočítá se tok přes stěny konečných objemů.

3. krok

   Vyřeší se tlaková rovnice (3.32) a za pomoci relaxačního koeficientu α_p se opraví vypočtený tlak

   $$p^{new} = p^{old} + \alpha_p(p^p - p^{old}) . \qquad (3.35)$$

   kde p^{new} je finální aproximace tlaku, kterou lze využít v dalším iteračním kroku. Tlak p^{old} je získám z řešení pohybových rovnic p^p je tlak získaný z tlakové rovnice.

4. krok

   Přepočítá se tok přes stěny pomocí rovnice (3.34) a přepočítá se rychlostní pole na základě nového tlaku.

5. krok

   Vrátí se zpět na krok 2 dokud neproběhne počet zadaných korekcí.

6. krok

   Nataví se nový časový krok a proces začíná od kroku 1 s nově nastavenými počátečními hodnotami pro rychlost a tlak.

PIMPLE (kombinace PISO a SIMPLE) je algoritmus pro neustálené nestlačitelné proudění s velkým časovým krokem, implementovaný v OpenFOAMu. Algoritmus používá vnitřní PISO smyčku k získání počátečního řešení, které je pak opraveno za použití vnější

SIMPLE smyčky a relaxačního faktoru. Teoreticky tento algoritmus umožnuje výpočty s Courantovým číslem $Co > 1$, ale za cenu vícenásobné opravy v SIMPLE smyčce s relaxačním faktorem. To přináší problémy s časovým krokem, jelikož všechny děje, které trvají kratší dobu, než je časový krok, jsou v řešení potlačeny. Při použití PIMPLE algoritmu v OpenFOAMu je třeba mít neustále na paměti, že příliš velké Courantovo číslo snižuje přesnost řešení.

3.5 ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) metoda

Pokud se proudění řeší na oblastech s časově neměnnou geometrií, rovnice popisující proudění jsou diskretizovány pomocí Eulerova přístupu [Ferziger and Peric 2002]. Eulerův přístup je ale nevhodný pro výpočty proudění na pohyblivých sítích z důvodu proměnlivé hranice oblasti. Pokud se zaměříme na výpočty na dynamických sítích, které se deformují společně s tekutinou, lze použít tzv. Arbirary Lagrangian Eulerian formulace, zkráceně ALE [Donea 1982; Donea 2009].

Při diskretizaci rovnic na pohyblivých sítích již kontrolní objem není konstantní. Změna kontrolního objemu V_{Pt} je dána rychlostí pohybu hranice, nazývá se Space Conservation Law a platí pro ni vztah [Ferziger a Peric 2002]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{Pt}} dV - \oint_{S_{V_{Pt}}} \boldsymbol{n}\cdot u_S\, dS = 0. \tag{3.36}$$

Transportní rovnice (3.22) potom získá tvar

$$\frac{\phi_{Pt}^{n+1}\rho_{Pt}^{n+1}V_{Pt}^{n+1} - \phi_{Pt}^{n}\rho_{Pt}^{n}V_{Pt}^{n}}{\Delta t} + \sum_f (f_x\phi_P^{n+1} + (1-f_x)\phi_N^{n+1})(\rho\boldsymbol{u} - \rho\boldsymbol{u_S})_f^{n+1}\boldsymbol{S}_f +$$

$$+ \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f \left|\boldsymbol{S}_f\right| \frac{\phi_N^{n+1} - \phi_P^{n+1}}{|\boldsymbol{d}|} = S_1V_P + S_2V_P\phi_P^{n+1}, \tag{3.37}$$

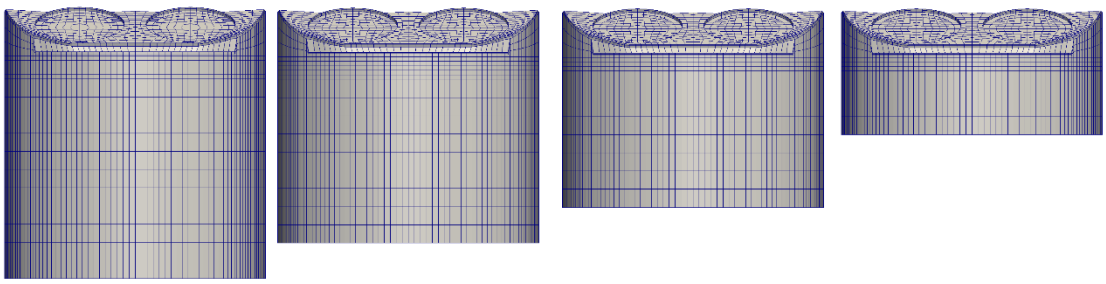
kde V_{Pt} je libovolný objem a $\boldsymbol{u_S}$ je rychlost pohybující se hranice kontrolního objemu.

4 Přístupy pro výpočty proudění na dynamických sítích

4.1 Problematika deformace sítě

Ve výpočetní mechanice tekutin se setkáme s případy proudění, kdy dochází ke změně geometrie výpočetní oblasti. Jedním ze zástupců těchto případů je interakce pevného tělesa a proudící tekutiny (dechové nástroje, hlasivky, kmitání leteckých konstrukcí, stavební konstrukce jako jsou mosty, chladící věže a výškové budovy). S časově proměnnými oblastmi se také setkáme u točivých strojů, jako jsou čerpadla, turbodmychadla, turbíny, ventilátory a lodní šrouby, u volně plujících těles atd.. Jednou z možností, jak řešit výpočty proudění na pohyblivých geometriích, je využít deformaci výpočetní sítě. Geometrický posun jakékoliv časti hranice nebo změna tvaru hranice vlivem deformace tělesa se rozpočítá do posunu uzlů všech elementů. Různé metody sloužící pro výpočet budou podrobněji popsány v kapitole 4.3. Při deformaci sítě je zachován stále stejný počet elementů a sousednost elementů výpočetní sítě. Předností této metody je, že v průběhu celého výpočtu je potřeba pouze jediná síť, a není nutné generovat nové sítě a mapovat na ně data. Tento přístup je možné uplatnit pouze v případě, že je během celého výpočtu zachována stejná topologie geometrie (nedojde k přidání nebo odebrání hranic nebo elementů).

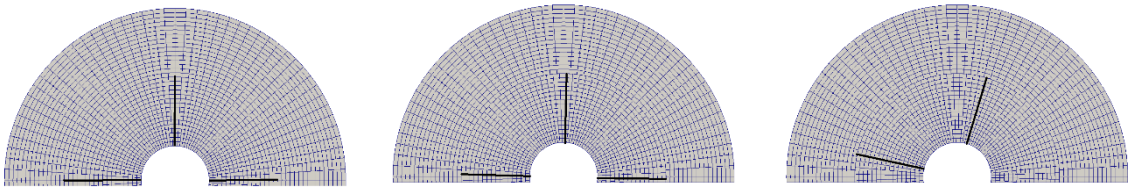
Dalším možným přístupem je změna topologie sítě, kdy vlivem pohybu hranic výpočetní oblasti dochází k přidávání nebo odebíraní elementů ze sítě (například píst ve válci motoru, viz Obr. 5), případně ke změně sousednosti elementů (úlohy s rotujícími částmi). Někdy je možné metody deformace sítě a změnu topologie kombinovat. Toho se dá využít při velkých změnách geometrie, kdy metody založené na výpočtu deformace sítě již danou síť nejsou schopny deformovat tak, aby nedocházelo ke zhoršení kvality sítě.



Obr. 5: Změna topologie sítě, odebírání elementů při pohybu pístu ve válci.

Pro úlohy s rotujícími částmi je síť rozdělena na dvě oblasti, a to na statickou a rotační, která se otáčí jako celek. Příklad je na Obr. 6, kde nedochází k deformacím sítě uvnitř rotující ani pevné části, tyto se vůči sobě pouze vzájemně otáčejí. V prostředí OpenFOAM se jedná o koncept

zvaný Arbitrary Mesh Interface (AMI) nebo Generalised Grid Interface (GGI). Na rozhraní rotační a statické části se řešení interpoluje mezi posunutými uzly.



Obr. 6: Změna topologie sítě, při otáčení míchacího zařízení.

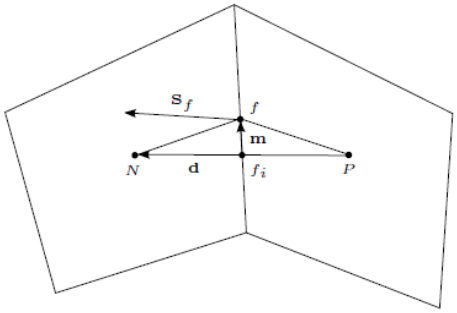
Pokud dochází k deformaci sítě na prostorově složité geometrii a metody zmíněné výše již nejsou schopné dodržet kvalitativní parametry sítě, je nutné využít přesíťování. K přesíťování celé výpočetní oblasti nedochází v každém časovém kroku z důvodu velké časové náročnosti síťovacího procesu. Po vygenerování nové sítě musí dojít k interpolaci vypočtených polí ze staré sítě na novou. Tím vnášíme do řešení chybu. Navíc tato operace stojí výpočetní čas, obzvláště pro rozsáhlé sítě s počtem elementů v řádu milionů.

Na všechny metody je kladen požadavek, aby kvalita sítě stále splňovala dané parametry jako je ortogonalita, šikmost a aby nedocházelo ke kolapsu hran a uzlů sítě. Zároveň zvolená metoda musí být dostatečně rychlá a efektivní, aby nenarůstal významně výpočetní čas.

4.2 Kvalitativní parametry sítě

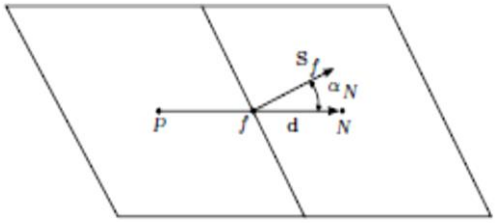
Každá síť musí splňovat několik parametrů, aby numerické řešení bylo přesné a stabilní. Těmito parametry je šikmost, ortogonalita, poměr stran a kladný objem elementů. Tyto parametry musí splňovat jak nedeformované, tak i deformované sítě.

Šikmost určuje odchylku mezi spojnicí těžišť dvou sousedních elementů a středem společné hrany. Šikmost je v prostředí OpenFOAM definovaná vztahem $\psi = \frac{|\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{d}|}$, kde vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{d}$ jsou vyznačeny na Obr. 7. Šikmost lze také vyjádřit pomocí poměru vnitřních úhlů elementu vůči referenčnímu úhlu pro daný element. Hodnota referenčních úhlů pro trojúhelník je 60° a pro čtyř úhelník 90°.



Obr. 7: Ukázka určení šikmosti na rozhraní dvou elementů. Body *P* a *N* označují těžiště elementů, *f* je těžiště společné stěny. [Jasak 1996]

Ortogonalita sítě se stejně jako šikmost určuje na rozhraní dvou sousedních elementů. Jedná se o úhel mezi spojnicí těžišť dvou sousedních elementů $\boldsymbol{d}$ a normálou ke společné stěně $\boldsymbol{S}_f$ (viz. Obr. 8).



Obr. 8: Určení ortogonality sítě. [Jasak 1996]

Poměr stran (aspect ratio) je u 2D sítě poměr mezi největší a nejmenší hranou elementu. Pro 3D síť je tento poměr dán výrazem

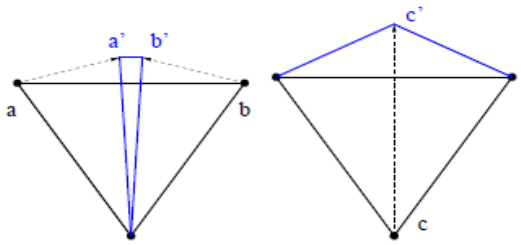
$$Aspect\ ratio = \frac{1}{3}\frac{|ax| + |ay| + |az|}{V^{\frac{1}{3}}}, \tag{4.1}$$

kde *ax, ay, az* je velikost jednotlivých hran a V je objem elementu.

4.3 Algoritmy pro výpočet deformace sítě

4.3.1 Metoda založená na pružinové analogii

Pružinová analogie vychází z předpokladu, že síť si lze představit jako soustavou pružin, které jsou spolu propojeny v uzlech [Batina 1990; Blom 2000]. Tato metoda vede na soustavu lineárních rovnic, která je získána z rovnováhy sil ve všech uzlech sítě. Tato intuitivní a snadno představitelná metoda bohužel trpí značnými nedostatky pro použití na nestrukturovaných nebo polyhedrálních sítích. Může zde docházet k překlopení vrcholů elementů a tím ke ztrátě konzistence sítě a vzniku záporných objemů (viz. Obr. 9). Toto lze odstranit zavedením nelineárních pružin, ale tím dramaticky naroste výpočetní náročnost. Z tohoto důvodu lze systém pružin rozšířit o torzní prvky v uzlech sítě [Farhat a kol. 1998; Degand a Farhat 2002], čímž se systém rozšíří o rovnice pro rovnováhu momentů v bodech.



Obr. 9: Ukázka deformace elementů trojúhelníkového elementu. Vlevo přípustná deformace elementu vpravo nepřípustná deformace (překlopení vrcholu).

Dále probírané metody jsou založeny na řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic popisujících deformaci sítě.

4.3.2 Metoda založená na řešení Laplaceovy rovnice

První z řady metod založených na řešení diferenciálních rovnic je řešení Laplaceovy rovnice pro posunutí $\boldsymbol{x}$ uzlů sítě [Löhner a Yang 1996; Helenbrook 2003] s konstantním nebo proměnným difusním koeficientem γ:

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.2}$$

Difuzní koeficient je vhodné volit jako inverzní funkci vzdálenosti od pohyblivé hranice [30]:

$$\gamma(r) = \frac{1}{r^m}. \tag{4.3}$$

Metoda výpočtu deformace sítě řešením Laplaceovy rovnice je implementována jak ve vývojové, tak v oficiální verzi OpenFOAM.

4.3.4 Metoda Pseudo-solid

Tato metoda je založena na řešení lineárních elastických rovnic – vychází z představy, že výpočetní síť se deformuje jako lineární elastické kontinuum. Rovnice lineární elasticity můžeme zapsat takto:

$$f_i = \nabla \cdot \sigma_{ij}, \tag{4.4}$$

kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí a f_i jsou složky vektor sil. Hookeův zákon pro izotropní kontinuum lze zapsat ve tvaru:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\theta + 2\mu\varepsilon_{ij}\,, \tag{4.5}$$

kde λ a μ jsou Laméovy koeficienty, δ_{ij} je Kroneckerovo delta, ε_{ij} je deformace a $\theta = \varepsilon_{ii}$ je stopa tenzoru deformace. Laméovy koeficienty určují vlastnosti elastického materiálu. Tyto koeficienty lze vyjádřit pomocí Youngova modulu E a Poissonova čísla υ:

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\,, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\,. \tag{4.6}$$

Pokud budeme uvažovat malé deformace lze vyjádřit tenzor deformace pomocí vektoru posunutí $\boldsymbol{x}$ takto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{x} + \nabla \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}). \tag{4.7}$$

Kombinací rovnic (4.6), (4.5) a (4.7) a derivací podle času získáme rovnice pro výpočet vektoru rychlosti posunutí uzlů sítě $\boldsymbol{u}_s$:

$$\nabla \cdot [\mu(\nabla \boldsymbol{u}_S + (\nabla \boldsymbol{u}_S)^T) + \lambda\, tr(\nabla \boldsymbol{u}_S)] = 0. \tag{4.8}$$

Pokud pak nahradíme Lamého koeficient λ kombinací Poissonova čísla a Lamého koeficientu μ, získáme finální rovnici pro řešení rychlosti posunutí uzlů sítě implementovanou v OpenFOAMu:

$$\nabla \cdot \left[\mu(\nabla \boldsymbol{u}_S + (\nabla \boldsymbol{u}_S)^T) + \frac{2\upsilon}{1+2\upsilon}\mu\, tr(\nabla \boldsymbol{u}_S)\right] = 0. \tag{4.9}$$

V prostředí OpenFOAM je tato metoda implementována tak, že se ve vstupních souborech zadává pouze hodnota jednoho parametru, a to Poissonova čísla υ. Lamého koeficent μ je pak zadán uvnitř kódu jako konstanta. Z tohoto důvodu je člen $\frac{2\upsilon}{1+2\upsilon}$ se znaménkem plus, i když po dosazení rovnic by měl být tento člen ve tvaru $\frac{2\upsilon}{1-2\upsilon}$. Tato změna je zde zavedena zřejmě proto, aby nedocházelo k dělení 0 při zadání $\upsilon = 0{,}5$.

Metoda výpočtu deformace sítě pomocí rovnic lineární elasticity je obsažena ve verzi FOAM-extend-3.0 a je řešena metodou konečných prvků. Celá výpočetní síť se proto musí nejprve rozdělit na tetrahedrální elementy, na kterých je pomocí MKP vypočítáno pole posunutí. To se poté zpětně interpoluje na původní polyhedrální konečněobjemovou síť.

4.3.5 Metoda SBRStress

Metoda SBRStress (Solid Body Rotation Stress Equation) vychází z podobného základu jako předchozí metoda Pseudo-solid, ale rovnice (4.7) je rozšířena o nelineární člen [Dwight 2004]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{x} + \nabla \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} + \nabla \boldsymbol{x} \cdot \nabla \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}). \tag{4.10}$$

Tím získáme Green-Lagrangian tenzor deformace. Výsledná rovnice pro výpočet posunutí uzlů sítě $\boldsymbol{x}_s$ je dána kombinací (4.10), (4.5) a za předpokladu, že $\lambda = -E,\ \mu = E$ a $E = \gamma$:

$$\nabla \cdot (2\gamma \nabla \boldsymbol{x}_S) + \nabla\Big(\gamma(\nabla \boldsymbol{x}_S{}^{\boldsymbol{T}} - \nabla \boldsymbol{x}_S)\Big) - \gamma\, tr(\nabla \boldsymbol{x}_S) = 0. \tag{4.11}$$

Difuzní koeficient γ určuje rozložení deformace sítě v prostoru stejně jako v případě řešení Laplaceovy rovnice. Tato metoda je implementována v obou verzích OpenFOAMu a řeší se na rozdíl od předcházejícího přístupu metodou konečných objemů. Výhodou této metody je že i přestože obsahuje nelineární členy její výpočetní náročnost je srovnatelná s řešením Laplaceovy rovnice

4.4.6 Metoda RBF

Základem metody RBF (Radial Basis Function) je nalezení interpolační funkce pro posuny všech bodů sítě [de Boer 2007 a kol.; Bos a kol. 2010]. Interpolační funkce popisuje posun všech bodů pomocí aproximace součtu základních funkcí:

$$s(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N_b} \gamma_j \phi\left(\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{b_j}\right\|\right) + q(\boldsymbol{x}), \tag{4.12}$$

kde $\boldsymbol{x}_{b_j}$ jsou posuny hranic, q je polynom, N_b je počet bodů sítě, bázová funkce ϕ je dána jako funkce Eukleidovské vzdálenosti $\|\boldsymbol{x}\|$. Polynom q je závislý na bázové funkci ϕ [de Boer 2007 a kol.]. Pokud jsou bázové funkce pozitivně definitní, lze použít lineární polynom [Beckert a Wadland 2001]. Potom je polynom q definován pomocí koeficientu γ_j.

První krokem při řešení (4.12) je vyhodnocení interpolační funkce $s(\boldsymbol{x})$ bez mezery v hraničních bodech:

$$s\left(\boldsymbol{x}_{b_j}\right) = \Delta\boldsymbol{x}_{b_j}\,. \tag{4.13}$$

Zde $\Delta\boldsymbol{x}_{b_j}$ obsahuje známé diskrétní hodnoty posunu okrajových bodů. Po vyřešení těchto rovnic následuje výpočet posunutí všech vnitřních bodu sítě:

$$\Delta\boldsymbol{x}_{in_j} = s\left(\boldsymbol{x}_{in_j}\right). \tag{4.14}$$

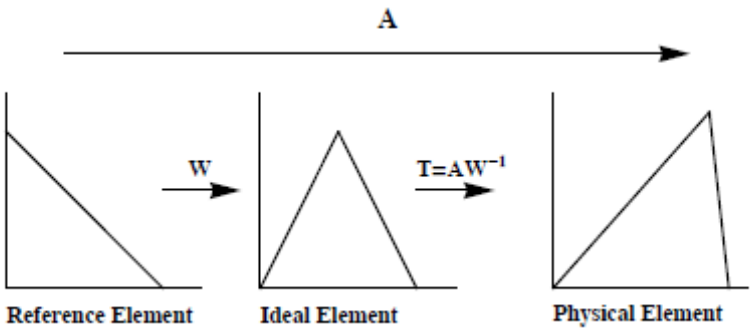
Bližší informace jsou k nalezení v disertační práci [Bos 2009].

K výpočtu deformace sítě pomocí této metody dochází na vymezeném prostoru okolo pohyblivé hranice. Tato vzdálenost je vymezena dvěma parametry udávajícími vzdálenost od pohyblivé hranice. V případě obtékání leteckého profilu je definován prstenec, ve kterém dochází k deformaci sítě, zbylá část sítě je statická (viz kapitola 6.3).

4.4.7 Metoda MESQUITE

Metoda MESQUITE (Mesh Quality Improvement) je založena na principu, při kterém se deformovaná síť pomocí definované metriky přepočítá, tak aby se tvar elementů sítě co nejvíce přiblížil tvaru referenčních elementů. Proto se v prostředí OpenFOAM používá společně s výpočtem deformace sítě pomocí Laplaceovy rovnice.

Způsobů, jak opravit síť po výpočtu deformace je několik. Prvním je vyhlazení, často se využívá Laplacovské vyhlazení [Hansbo 1995]. Druhým způsobem je využití metriky pro měření kvality sítě. Tento přístup se nazývá Target-matrix Paradigm [Knupp 2006; Knupp 2009], viz Obr. 10.



Obr. 10: Target-matrix Paradigm. [Knupp 2009]

5 Úloha oscilujícího válce

Testování metod deformace sítě bylo nejprve provedeno na jednoduché úloze kmitajícího válce s jedním stupněm volnosti. Pro potřeby výpočtu byly generovány tři 2D sítě o různé hustotě elementů a jedna 3D síť. Síť je generována jako blokově strukturovaná hexahedrální síť v generátoru blockMesh. V prvním kroku byly porovnány výpočetní časy jednotlivých metod na těchto sítích. Výsledky jsou shrnuty do tabulky 5.1, kde je zaznamenán čas výpočtu deformace bez výpočtu proudění na jednom jádru. Výpočetní stanice je osazena procesorem Intel Core-i7 2,8 GHz a 4 GB RAM. Aby bylo možné metody mezi sebou porovnat, byl stanoven stejný časový krok pro výpočet u všech metod a sítí. Tento časový krok byl zvolen $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ s tak, aby všechny metody deformace sítě počítaly stabilně. Při delším časovém kroku je Laplaceova metoda nestabilní.

Délka simulace odpovídá pro 2D sítě půl periodě kmitaní válce, tedy t = 0,02 s (20000 časových kroků). Amplituda kmitání byla zvolena jako ¼ výšky výpočetní oblasti. Pro výpočet na 3D síti byl čas numerické simulace zkrácen na t = 0,001s z důvodu velké výpočetní náročnosti na jednom výpočetním jádře.

Tab. 5. 1: Výpočetní čas deformace sítě.

Počet elementů sítě	Výpočetní čas jednotlivých metod				
	Laplace	SBRStress	RBF	Pseudo-solid	Mesquite
5 000 (2D)	34 s	38 s	39 s	64 s	42 s
47 000 (2D)	195 s	216 s	215 s	1217 s	235 s
200 000 (2D)	1020 s	1186 s	1345 s	8360 s	1500 s
2 000 000 (3D)	11 980 s	14 589 s	16235 s	95 000 s	N/A

V tabulce Tab. 5. 1 chybí záznam času pro výpočet na 3D síti pomocí metody Mesquite. Tato metoda bohužel pro 3D případ nepracuje správně, na rozhraní povrchu válce a bočních stěnách výpočetní oblasti dochází ke kolapsu elementů. Nejrychlejší metodou je řešení Laplaceovy rovnice. Výpočetně nejnáročnější metodou je metoda Pseudo-solid založená na metodě konečných prvků, časová náročnost oproti ostatním metodám je 6 až 9 krát vyšší.

Po vyhodnocení časové náročnosti metod se vyhodnotil vliv na kvalitu sítě. Kvalitativní parametry jsou zmíněny v kapitole 4.2. Porovnány jsou metody mezi sebou a také se sítí na počátku bez deformace. Nejmenší ztráty kvality deformované sítě, kterou dle tabulek Tab. 5. 2 a Tab. 5. 3 můžeme vidět, je docíleno metodou Pseudo-solid. Parametry deformované se nejvíce blíží parametrům nedeformované sítě. Nejrychlejší metoda, založená na řešení Laplaceovy rovnice, poskytuje pro úlohu kmitajícího válce s jedním stupněm volnosti dobré výsledky. Pokud ale tuto metodu využijeme pro výpočet složitějších pohybů s velkými výchylkami, je tato metoda

nestabilní. Proto je dobré ji nahradit metodou SBRStress, která je také dostatečně rychlá a poskytuje u složitějšího pohybu lepší výsledky.

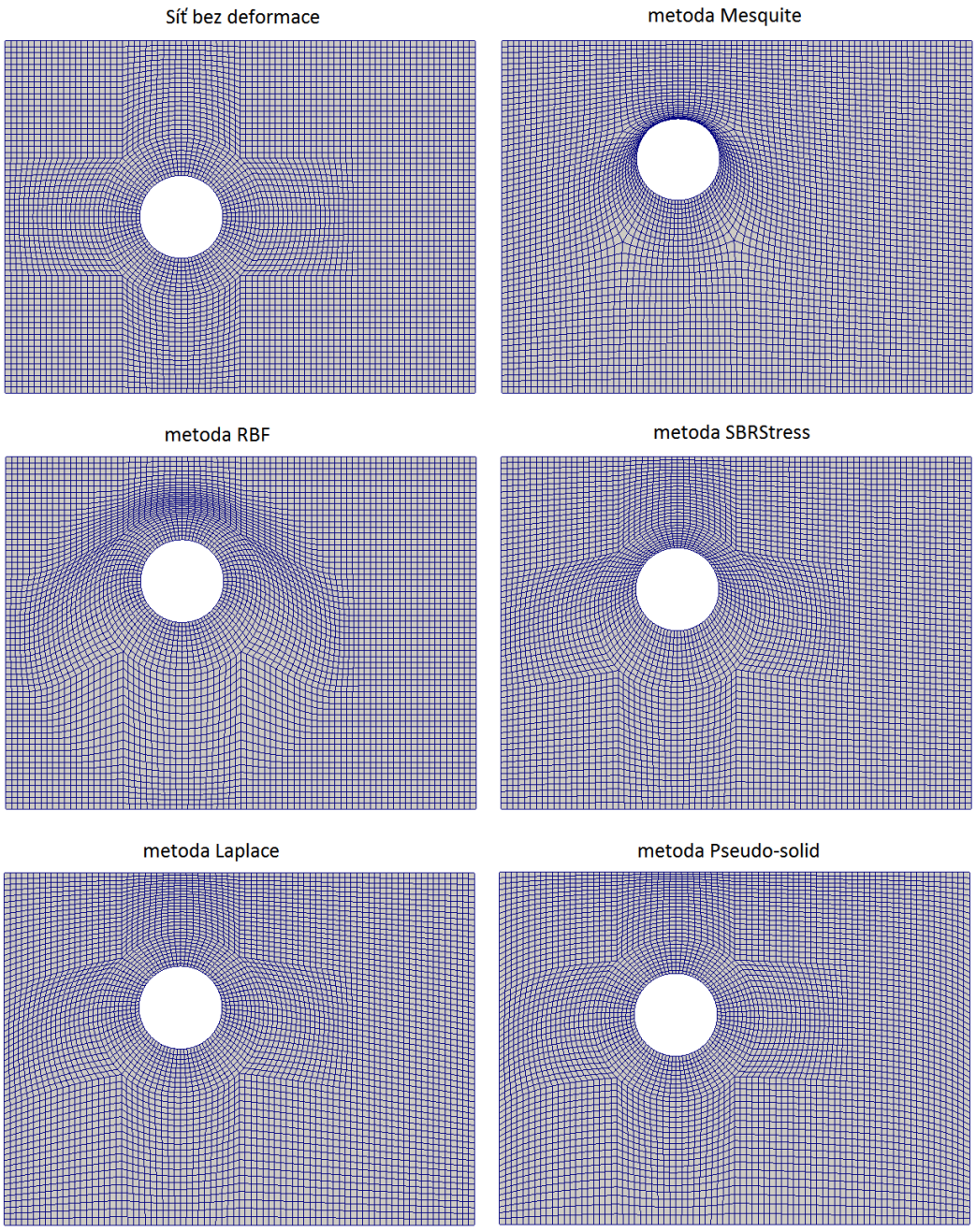
Tab. 5. 2: Kvalitativní parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 2D sítě s 5000 elementy při maximální výchylce.

	Laplace	SBRStress	RBF	Pseudo-solid	Mesquite	Nedeformovaná síť
průměrná ortogonalita	12,338	13,034	15,191	12,496	10,699	8,761
maximální ortogonalita	53,370	57,186	64,841	46,271	66,164	41,258
poměr stran	4,618	7,231	8,018	3,865	85,901	3,145
šikmost	0,553	0,924	0,419	0,661	0,495	0,403

Tab. 5. 3: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 3D sítě se 2 miliony elementů v čase t = 0,001 s.

	Laplace	SBRStress	RBF	Pseudo-solid	Nedeformovaná síť
průměrná ortogonalita	8,880	7,805	7,555	7,504	7,368
maximální ortogonalita	44,633	44,570	47,792	44,525	44,413
poměr stran	20,222	20,036	19,981	20,027	19,980
šikmost	0,436	0,434	0,434	0,434	0,434

Na Obr. 11 jsou ukázky deformace 2D sítě pro jednotlivé výpočetní metody. Pro přehlednost jsou pak v tabulce 5.2 uvedeny parametry pro tuto síť. Z tabulky 5.2 i obrázku 5.4 je vidět, že všechny metody pro případ translačního pohybu s jedním stupněm volnosti na hexahedrální síti fungují dobře. Pouze metoda Mesquite výrazně deformuje elementy na povrchu válce. To při zadání ještě větší amplitudy kmitu vedlo ke kolapsu elementů na povrchu válce. K obdobnému problému také začalo docházet u metody RBF, jelikož u této metody je deformace koncentrována do vymezené oblasti. Tato metoda se pak především osvědčila u pohybu se dvěma stupni volnosti, kde byla dominantní rotace.



Obr. 11: Porovnání jednotlivých metod výpočtu deformace sítě a nedeformované sítě.

6 Numerická simulace obtékání kmitajícího leteckého profilu

6.1 Úvod do aeroelasticity křídel a leteckých konstrukcí

Aeroelasticita se zabývá interakcí proudící tekutiny a pružných těles. Důsledkem aeroelastických jevů mohou být samobuzené oscilace, které mohou mít v případě nosných a manévrovacích ploch letadel katastrofické následky. Aeroelasticita se zabývá odhalováním těchto nestabilit a jejich předcházení. V případě zjednodušeného modelu leteckého profilu se dvěma stupni volnosti (zdvih a náklon) jsou známy dva základní druhy nestability: divergence – statická nestabilita, kdy vlivem proudění dochází k exponenciálnímu nárůstu výchylky, a flutter – dynamická nestabilita, kdy interakce s prouděním vyvolá kmitání s amplitudou exponenciálně rostoucí v čase [Naudasher 1994; Dowell 1995].

Numerická náročnost řešení aeroelastických problémů je obecně značná. Vyžaduje zahrnutí časové změny výpočetní oblasti a provázání rovnic popisujících elastickou strukturu a proudění. Úplným řešením aeroelastických rovnic se zabývá například práce [Le Tallec 2001]. Pokud uvažujeme navíc viskozitu a vliv turbulence, soubor a náročnost řešených rovnic se ještě zvýší.

Pro modelování turbulence při obtékání leteckého profilu se nejčastěji používají modely založené na Reynoldsově středování Navier-Stokesových rovnic (RANS) [Pope 2000]. S výpočtem turbulentního proudění při řešení aeroelasticity se lze setkat v práci [Srinivasan 1995], kde je využita metoda sítí pro 2D případ kmitajícího leteckého profilu NACA 0015. Kmitání je zde předepsané. V práci bylo testováno pět modelů turbulence a vzájemně byly porovnány. Dalším případem s předepsaným kmitáním je práce [Lian 2003]. Zde byl použit RANS přístup a model turbulence k-ε, proudění bylo uvažováno jako nestlačitelné a hodnota Reynoldsova čísla je Re = 80000. Tento případ byl počítán metodou konečných objemů na pohyblivé síti.

Na aplikaci algebraického modelu turbulence se autoři zaměřují v článcích [Dubcová a kol. 2008; Dubcová a kol. 2009]. V obou případech se jedná o 2D výpočty proudění okolo profilu lopatky se dvěma stupni volnosti a s interakcí. S interakcí ve 2D se lze setkat v [Zhao a kol. 2009; Zhao a kol. 2009a]. Výpočtu pro transsonické proudění ve 2D se věnuje [Geissler 2003]. Letecký profil se pohybuje se dvěma stupni volnosti a model pro výpočet turbulence je zde algebraický model Spalart-Allmaras.

Transsonickým prouděním se také zabývá práce [Wang a Zha 2011]. Turbulence je modelována metodou Detached Eddy Simulation (DES). V případě modelu křídla v této práci je předepsané kmitání s velkou výchylkou a modelem turbulence k-omega SST. S touto problematikou se lze setkat v práci [Feistauer 2011], která se věnuje výpočtům nestlačitelného

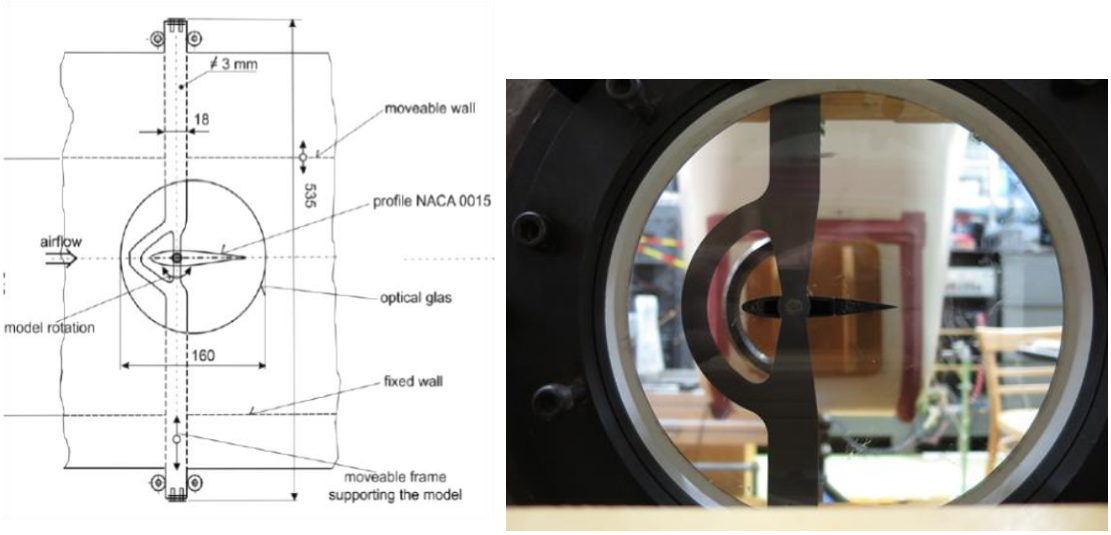
vazkého proudění pomocí metody konečných prvků ve 2D. Na vzájemné porovnání turbulentních modelů k-omega a Spalart-Allmaras je zaměřena práce [Feistauer 2015]. Letecký profil má tři stupně volnosti a simulace je počítána metodou konečných prvků. Profil v tomto článku může kmitat v rozsahu 40° na obě strany od nulového úhlu náběhu.

Tato disertační príce se zaměřuje na:

- Řešení úlohy turbulentního proudění na pohyblivých sítích ve 2D i ve 3D
- Výpočet pro vazké stlačitelné i nestlačitelné proudění
- Porovnání s daty z aerodynamického tunelu

6.2 Popis úlohy

Tato úloha navazuje na experiment, který se zabývá měřením účinků flutteru na letecký profil NACA 0015 (viz Obr. 12). Data získaná z experimentálních měření jsou použita pro porovnání s výsledky numerických simulací. V numerických simulacích je kmitání leteckého profilu předepsáno podle naměřených výchylek. Profil kmitá se dvěma stupni volnosti (rotace kolem elastické osy leteckého profilu a zdvih rámu, ve kterém je letecký profil uložen).



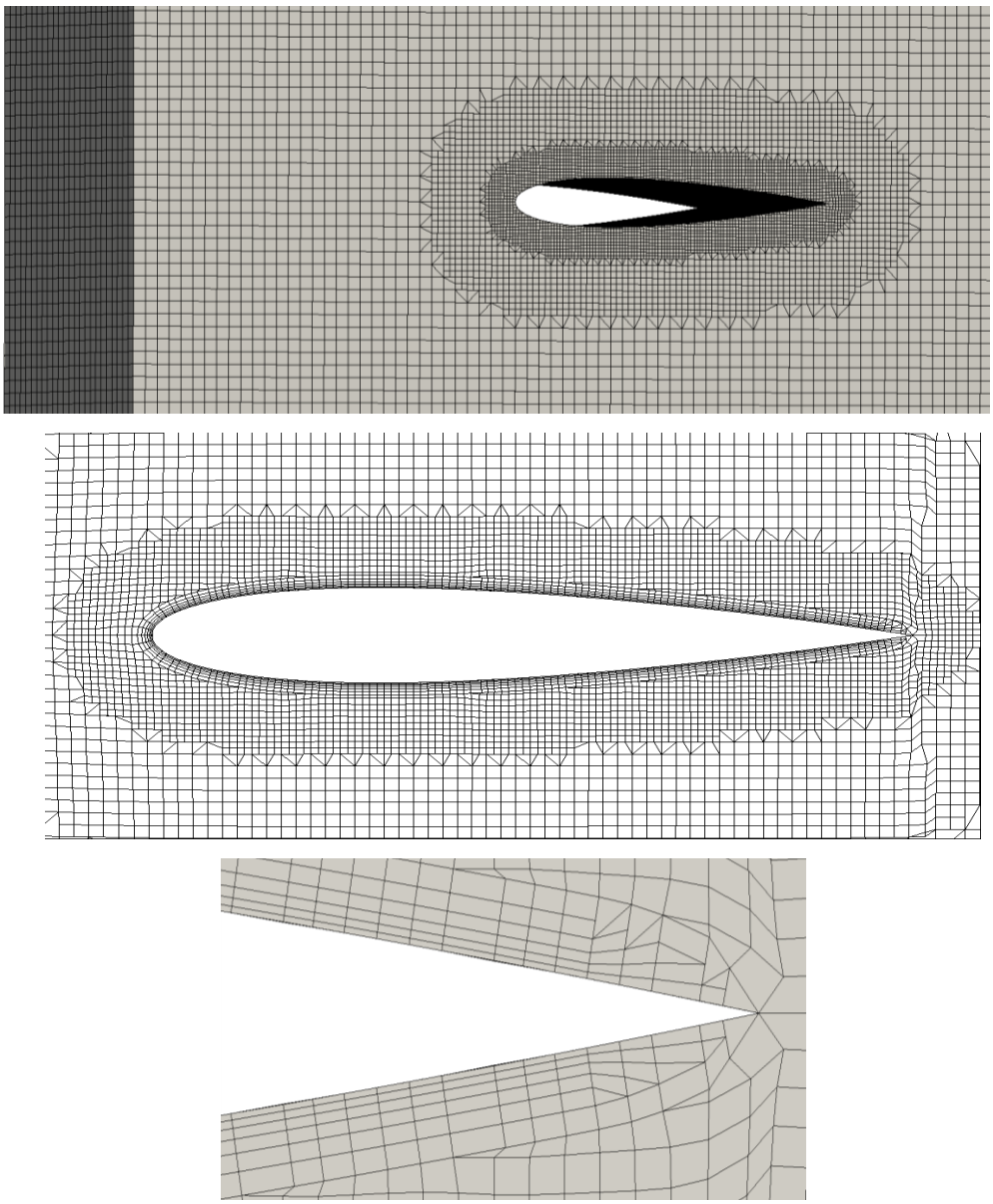
Obr. 12: Schéma uložení a měřící přípravek s leteckým profilem. [Šidlof a kol. 2016]

Geometrie leteckého profilu NACA 0015 je popsána pomocí rovnice:

$$y = \frac{t}{0{,}2}\left[0{,}2969\sqrt{\frac{x}{c}} - 0.1260\left(\frac{x}{c}\right) - 0.3516\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0{,}2843\left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0{,}1015\left(\frac{x}{c}\right)^4\right], \quad (6.1)$$

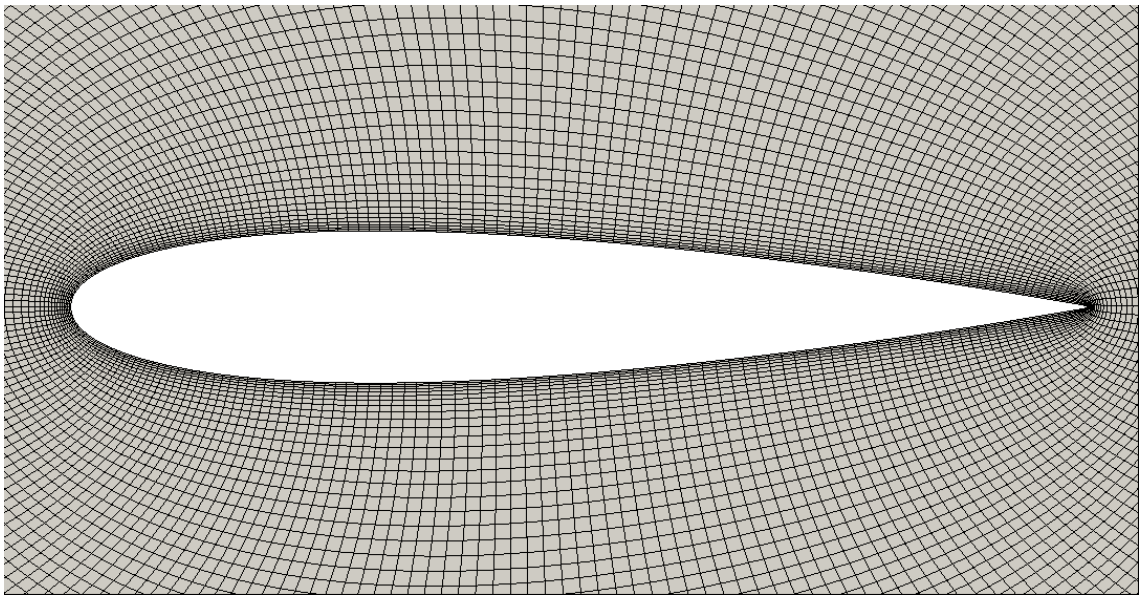
kde $t = 0{,}15$ je poměr největší tloušťky profilu k délce tětivy, c je délka tětivy, x je průběžná poloha bodu na profilu podél tětivy od 0 do c a y je poloviční tloušťka profilu pro danou hodnotu x.

Numerická simulace je řešena metodou konečných objemů ve výpočetním balíku OpenFOAM. V prvotní fázi byl proveden výpočet na statických sítích, aby se ověřily okrajové a počáteční podmínky. Na Obr. 13 je znázorněná nestrukturovaná hexa-dominatní polyhedralní síť vygenerovaná pomocí nástroje snapyHexMesh, která byla využita v článcích [Řidký a Šidlof 2013; Řidký a Šidlof 2014]. Délka tětivy leteckého profilu byla c = 65,5 mm a šířka 80 mm. Proudění bylo modelováno jako nestlačitelné, bez modelu turbulence a s předepsaným kmitáním, pro které byla implementována nová okrajová podmínka.



Obr. 13: Výpočetní síť vygenerovaná pomocí nástroje snappyHexMesh.

V další fázi byl tento případ upraven, jelikož shoda s experimentem nebyla příliš dobrá. Dalším důvodem byla špatná deformace elementů na odtokové hraně. Proto byl přidán model turbulence k-ω SST a simulace byly počítány na strukturované hexagonální síti generované v programu GridPro (viz **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**). Tato síť se vyznačuje větší stabilitou při velkých deformacích a výsledky lépe korespondují s experimentem. Tato síť také vykazovala výrazně menší náchylnost na špatnou deformaci elementů na odtokové hraně než síť v předchozím případě. Z důvodu změny fyzikálního modelu leteckého profilu byla upravena také geometrie výpočetní oblasti. Nový letecký profil byl oproti předchozímu menší a délka jeho tětivy činí c = 59,5 mm.



Obr. 14: Výpočetní síť vygenerovaná pomocí nástroje snappyHexMesh.

6.3 Aplikace metod pro deformaci sítě a jejich výsledky

Oproti případu popsaném v kapitole 5 se zde jedná o pohyb tělesa se dvěma stupni volnosti, a tím pádem i složitější pohyb uzlů sítě. Síť obsahuje zhuštěné vrstvy elementů na povrchu leteckého profilu pro lepší zachycení mezní vrstvy. Časový krok je stejně jako v předchozím případě stanoven na $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ s.

Metoda Pseudo-solid je v tomto případě vynechána. Důvodem je problém s implementací okrajové podmínky pro pohyb sítě. Tato metoda je založena na metodě konečných prvků na rozdíl od ostatních metod, které jsou založeny na metodě konečných objemů. Třída, ze které jsou odvozeny okrajové podmínky pro pohyb, má zcela jiný přístup k souborům se sítí. Navíc, jak již bylo ukázáno v kapitole 5, metoda Pseudo-Solid je časově velice náročná a ostatní metody

poskytují dostatečně kvalitní výsledek s výrazně menšími výpočetními náklady. Metoda Mesquite funguje pro 2D sítě, pro 3D je ale nestabilní. U metod (Laplace a SBRStress) využívajících difuzního koeficientu γ pro rozložení deformace, bylo s tímto koeficientem variováno. Jelikož pro zvolený úhel náklonu byl výpočet při rovnoměrném rozložení deformace nestabilní. U Laplaceovy metody docházelo ke špatné deformaci buněk již při 15° náklonu. Nakonec bylo zvoleno inverzní rozložení koeficientu γ (u elementů v blízkosti stěny velmi vysoké číslo s rostoucí vzdáleností klesá), tak aby se buňky blízko leteckého profilu deformovaly co nejméně.

Přehled výpočetních časů pro 100 časových kroků výpočtu deformace sítě pro dvě různé sítě je v tabulce Tab. 6. 1Tab. 6. 1**: Výpočetní čas pro 100 časových kroků numerické simulace.**.

Tab. 6. 1: Výpočetní čas pro 100 časových kroků numerické simulace.

Počet elementů sítě		Výpočetní čas jednotlivých metod		
	Laplace	SBRStress	RBF	Mesquite
42480	25 s	28 s	29 s	35 s
1 359 360	737 s	888 s	915 s	N/A

Výpočetní oblast má rozměry pro 2D případ 780 x 210 x 4 mm. V prostředí OpenFOAM je za 2D síť považována 3D síť s jednou vrstvou elementů ve směru osy z. Proto obě sítě jsou totožné, jen ve 3D má síť ve směru osy z 32 vrstev elementů a rozměr výpočetní oblasti je 780 x 210 x 80 mm. Parametry sítě jsou porovnávány pro maximální výchylku křídla, získanou při měření v aerodynamickém tunelu. Amplituda náklonu je pro tento případ 25,8° a maximální zdvih ve směru osy *y* je 7,3 mm, frekvence je 20,4 Hz. Pro tento případ byly testovány metody Laplace, SBRStress a RBF.

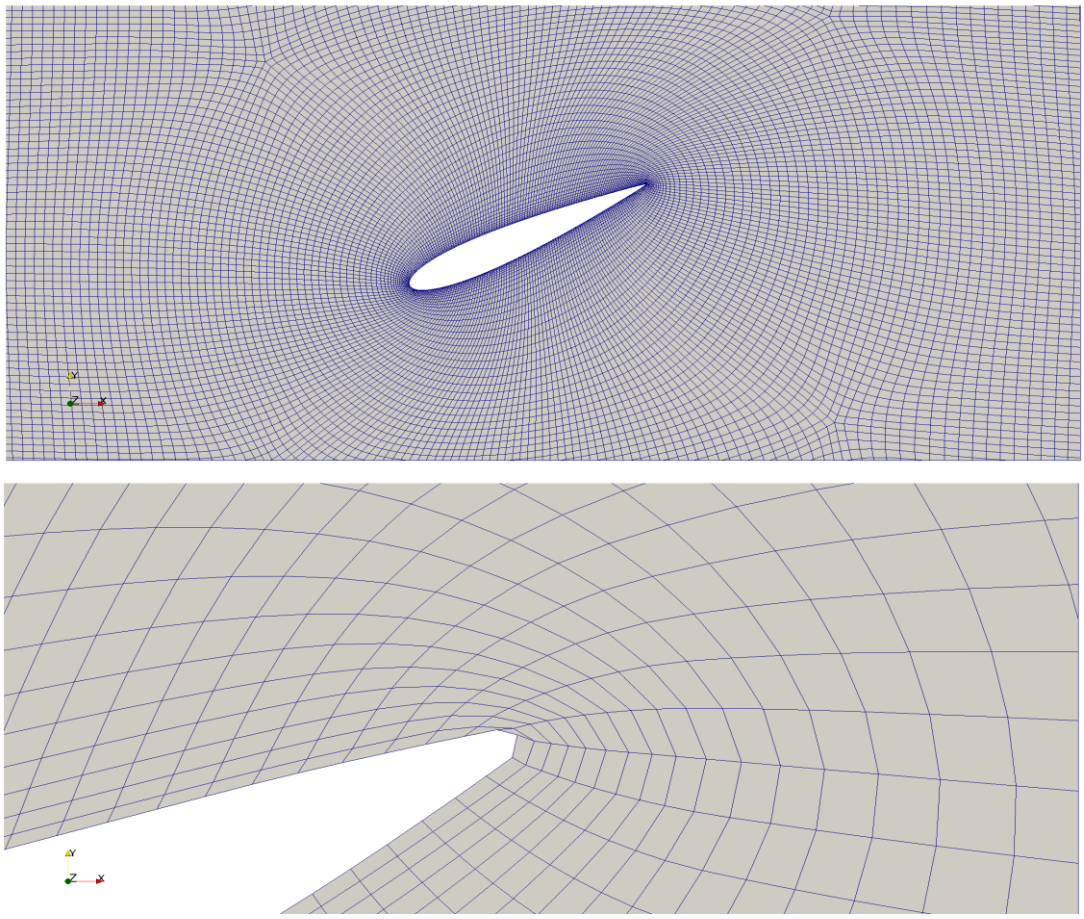
Tab. 6. 2: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 2D případ při maximální výchylce leteckého profilu.

	Laplace	SBRStress	RBF	Nedeformovaná síť
průměrná ortogonalita	9,046	10,84	12,394	4,834
maximální ortogonalita	79,857	65,598	60,428	46,665
poměr stran	4,720	3,787	4,653	3,780
šikmost	2,128	1,277	1,039	1,039

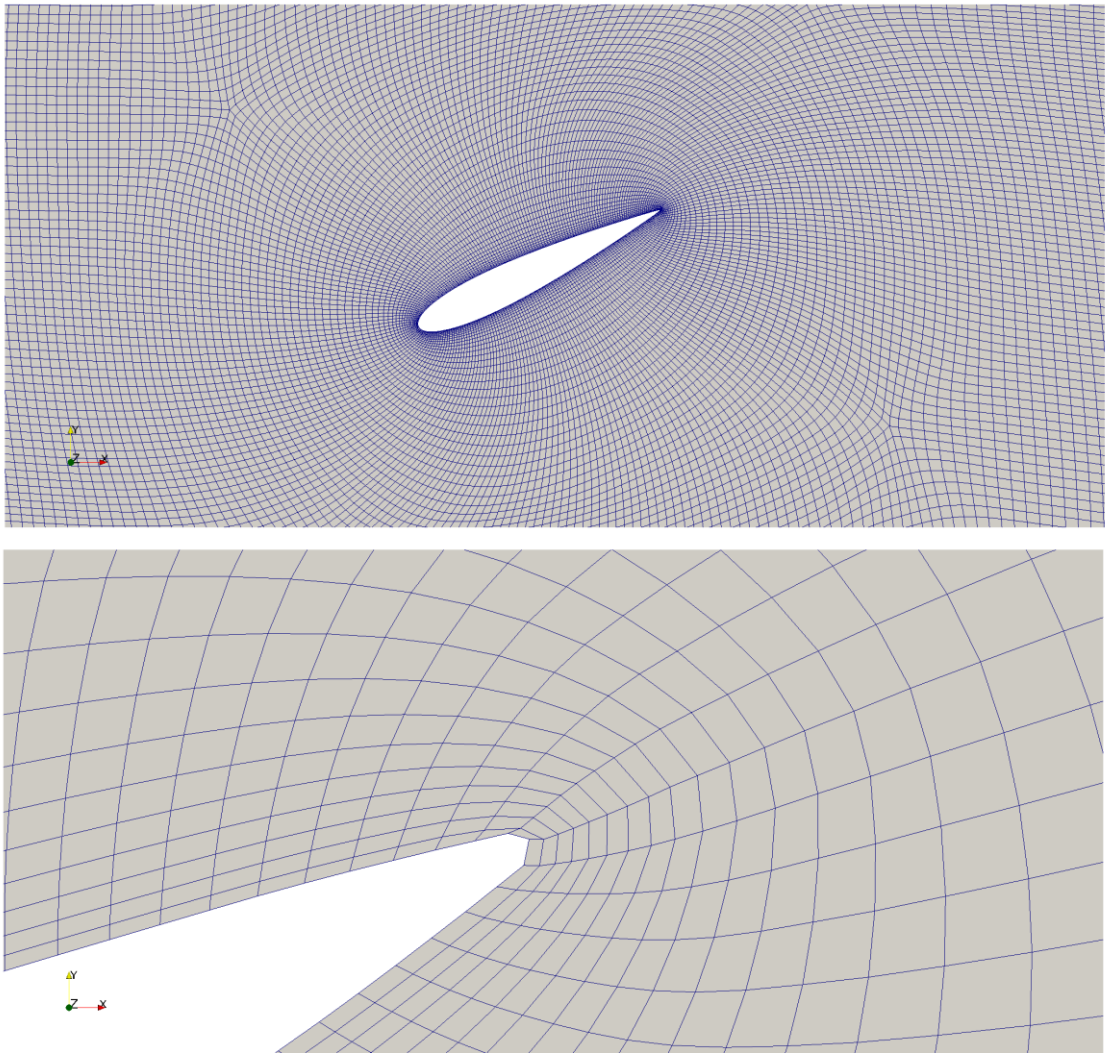
Tab. 6. 3: Parametry sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace 3D případ při maximální výchylce leteckého profilu.

	Laplace	SBRStress	RBF	Nedeformovaná síť
průměrná ortogonalita	7,567	8,974	9,856	3,963
maximální ortogonalita	89,653	65,621	63,543	46,664
poměr stran	75,416	70,9	53,127	42,290
šikmost	2,134	1,276	1,042	1,039

V tabulkách Tab. 6. 2 a Tab. 6. 3 jsou uvedeny parametry sítě při maximální výchylce leteckého profilu v porovnání s nedeformovanou sítí pro 2D i 3D případ. Na následujících obrázcích Obr. 15, Obr. 16 a Obr. 17 je znázorněna oblast, kde dochází k největší deformaci sítě (odtoková hrana leteckého profilu). U použití Laplaceovy metody dochází k největší deformaci elementu přímo na odtokové hraně, což je vidět na Obr. 15. To má za následek, že i při využití neortogonálních korektorů dochází k pádu numerické simulace.

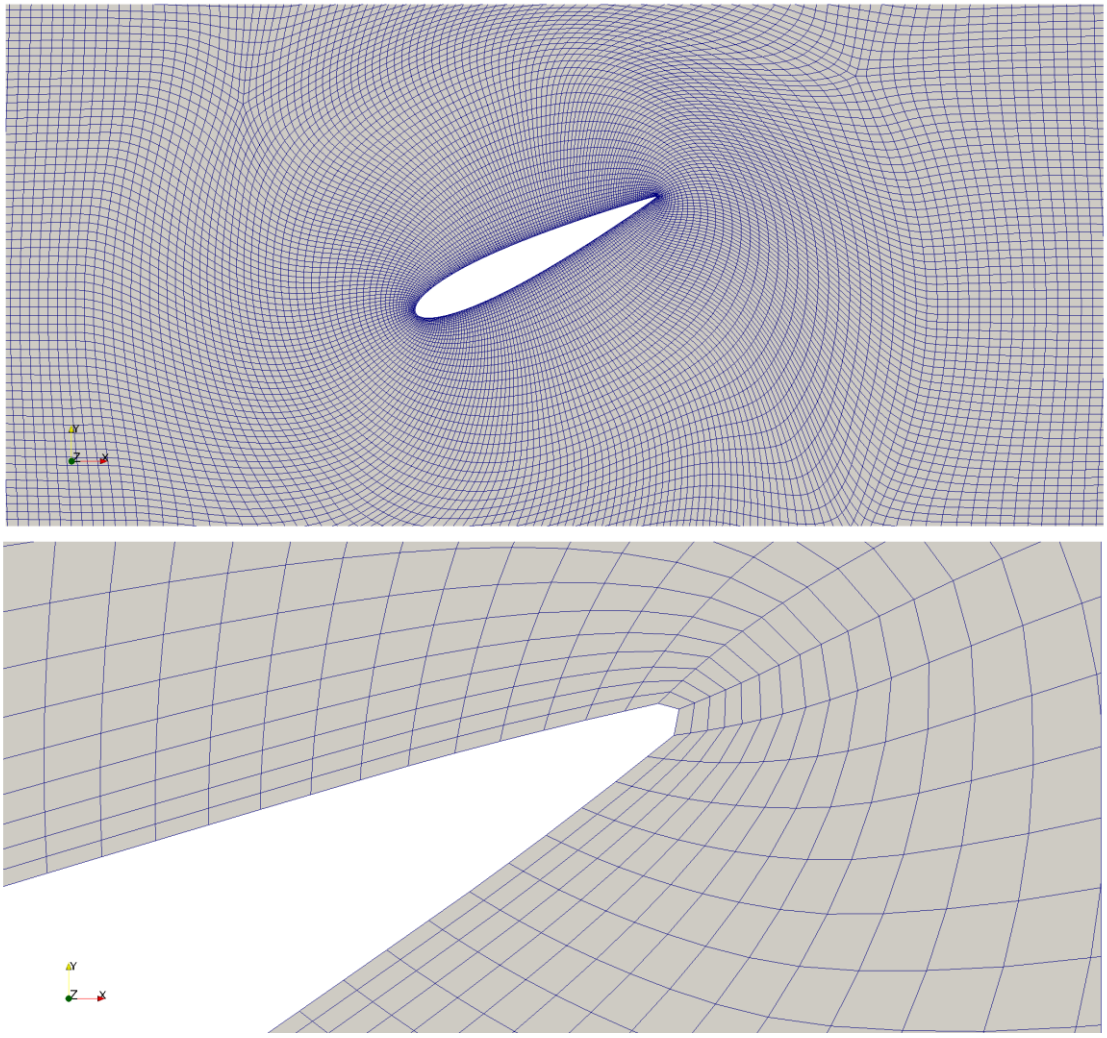


Obr. 15: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody Laplace.



Obr. 16: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody SBRStress.

Nejlepších výsledků je dosaženo při využití RBF metody, jelikož síť je v blízkosti leteckého profilu zafixována a veškeré deformace se koncentrují do vymezené oblasti. Bohužel tato metoda není součástí distribuce OpenFOAM 2.3.0, ale vývojové verze FOAM-extend. Zde je podstatný problém při paralelních výpočtech, kdy při spuštění paralelního výpočtu je špatně sestavena matice pro výpočet deformace (singulární matice) a výpočet se ukončí. V numerických simulacích proudění vzduchu okolo kmitajícího leteckého profilu byla tedy pro výpočet deformace sítě použita metoda SBRStress z důvodu spolehlivosti a robustnosti i pro 3D simulace. V některých případech velkého náklonu křídla lze využít RBF, ale pouze ve 2D.



Obr. 17: Deformovaná síť při maximálním náklonu 25,8° při použití metody RBF.

6.4 Numerické simulace pro nestlačitelné proudění

6.4.1 Okrajové podmínky pro nestlačitelné proudění

První numerickou simulací leteckého profilu byl případ pro nestlačitelné proudění. Tato simulace se počítala na 2D i 3D síti. Na základě experimentu [Šidlof a kol. 2016] jsou specifikovány okrajové podmínky pro numerickou simulaci. Numerická simulace pro nestlačitelné vazké proudění je popsána rovnicí kontinuity (2.12), Navier-Stokesovými rovnicemi (2.13) s modelem turbulence k-ω SST s rovnicí pro kinetickou energii (2.22) a specifickou disipaci (2.23).

Pohyb leteckého profilu je předepsán jako okrajová podmínka pro posun uzlů sítě. Okrajová podmínka byla pro tento pohyb navržena a implementována do výpočetního balíku OpenFOAM. Pohyb je dán kombinací rotačního a translačního pohybu. Tento pohyb je harmonický a je popsán rovnicemi

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Phi \sin(2\pi f * t + \alpha), \tag{6.2}$$

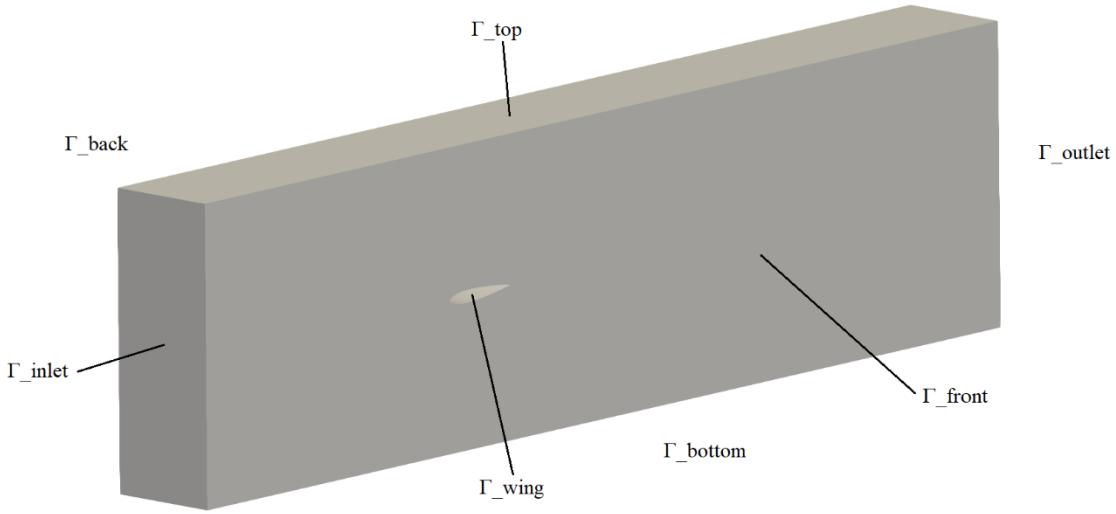
$$x(t) = x_0 + X \sin(2\pi f * t + \beta). \tag{6.3}$$

První rovnice popisuje rotační pohyb, kde φ je aktuální úhel natočení leteckého profilu, Φ je amplituda rotačního pohybu, X je amplituda translačního pohybu, f je frekvence, φ_0 a x_0 hodnoty zdvihu a natočení okolo kterých bude letecký profil kmitat, α a β jsou fáze pohybu. Hodnoty dosazené do rovnic (6.2) a (6.3) jsou získány z experimentu při samobuzeném kmitání profilu v aerodynamickém tunelu pro rychlost vstupního proudu vzduchu 70 m/s: Φ = 29,5°, X = 2,1 mm a f = 18,2 Hz a $\varphi_0 = x_0 = \alpha = \beta = 0$.

Na Obr. 18 je vyobrazena poloha leteckého profilu v různých časech jedné periody kmitání

Obr. 18: Pohyb leteckého profilu v průběhu jedné periody (55 ms) s maximální výchylkou v rotaci 29,5° a posuvem 2,1 mm.

Geometrie výpočetní oblasti s popisem hranice je na Obr. 19. Poloha náběžné hrany leteckého profilu je 240 mm od hranice *Γ_inlet*. Křídlo má tětivu 59,5 mm a 76,6 mm na šířku. Šířka sekce aerodynamického tunelu je větší, než šířka leteckého profilu a to 80 mm, aby bylo možné křídlo uložit na ližiny, po kterých se pohybuje. V numerických simulacích je letecký profil přes celou šíři výpočetní oblasti.



Obr. 19: Výpočetní oblast a definice hranic.

Okrajové podmínky pro rychlost a tlak jsou shrnuty v tabulce Tab. 6. 4. Tlak na vstupu se zadává v podobě kinematického tlaku jako poměr dynamického tlaku $p = 98825\,Pa$ a hustoty $\varrho = 1{,}18\ \frac{kg}{m^3}$. Proudové pole je v tomto případě řízeno rychlostí předepsanou na vstupu. Hodnoty rychlosti a tlaku odpovídají podmínkám při experimentu. Pro 2D simulaci je na přední (*Γ_front*) a zadní straně (*Γ_back*) výpočetní oblasti předepsaná okrajová podmínka *empty*. Jedná se o okrajovou podmínku, která se používá pro 2D výpočty. Pro rychlost je na povrchu leteckého profilu předepsána okrajová podmínka, která počítá rychlost z pohybu leteckého profilu. Na pevných stěnách se předepisuje nulová rychlost na pohyblivé hranici je rychlost proudění rovna rychlost křídla $\boldsymbol{u}_{wing}$

Tab. 6. 4: Okrajové podmínky pro rychlost a tlak.

hranice	rychlost (u)	Kinematický tlak (p)
Γ_inlet	$\boldsymbol{u} = 70\ m/s$	$p = 83800\ \frac{m^2}{s^2}$
Γ_outlet	$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_top	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_bottom	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_front	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$ (2D: empty)	∂p / ∂n = 0 (2D: empty)
Γ_back	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$ (2D: empty)	∂p / ∂n = 0 (2D: empty)
Γ_wing	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{wing}$	∂p / ∂n = 0

Po zavedení okrajových podmínek pro rychlost a tlak je nutné zavést také okrajové podmínky pro veličiny přidané turbulentním modelem. Tyto hodnoty nejsou součástí experimentu, ale dopočítávají se ze známých veličin. Prvním je turbulentní kinetická energie na vstupu

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2, \tag{6.4}$$

kde I je intenzita turbulence a U je velikost rychlosti vstupního proudu. Intenzita turbulence je měřitelná veličina a v případě aerodynamického tunelu, ve kterém bylo prováděno měření, je její hodnota od 2–5 %. Pro simulace byla zvolena hodnota 2,5 %. Další veličinou je specifická disipace na vstupu

$$\omega = C_\mu \frac{\rho * k^2}{\nu}\left(\frac{\nu_t}{\nu}\right),^{-1} \tag{6.5}$$

kde $\frac{\nu_t}{\nu} = 100$ je poměr turbulentní a kinematické viskozity a $C_\mu = 0{,}09$. Okrajové podmínky pro tyto veličiny jsou shrnuty v tabulce Tab. 6. 5.

Tab. 6. 5: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci.

hranice	**turbulentní kinetická energie k**	**Specifická disipace ω**	**Turbulentní viskozita ν_t**
Γ_inlet	k = 4,6 m^2/s^2	ω= 2300 $1/s$	calculated
Γ_outlet	k = 4,6 m^2/s^2	ω= 2300 $1/s$	calculated
Γ_top	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction
Γ_bottom	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction
Γ_front	kqRWallFunction (2D: empty)	omegaWallFunction (2D: empty)	nutkWallFunction (2D: empty)
Γ_back	kqRWallFunction (2D: empty)	omegaWallFunction (2D: empty)	nutkWallFunction (2D: empty)
Γ_wing	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction

Jelikož velikost elementů u stěn je větší než y^+ = 1, kde y^+ je bezrozměrná vzdálenost od stěny ve směru normály, zavádějí se na pevných hranicích aproximace pomocí stěnových funkcí. Rovnice pro výpočet y^+ je dána vztahem

$$y^+ = \frac{y}{\nu} * u_\tau \,, \tag{6.6}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}}, \tag{6.7}$$

$$\tau_W = \nu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \,, \tag{6.8}$$

kde u_τ je třecí rychlost, τ_w je stěnové smykové napětí, u_y je rychlost proudění paralelní k obtékané stěně a y je vzdálenost od stěny ve směru normály.

Okrajová podmínka kqRWallFunction pro turbulentní kinetickou energii k na stěnách je dána vztahem:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt[2]{C_\mu} y}. \tag{6.9}$$

Chování specifické disipace na stěně je dáno okrajovou podmínkou omegaWallFunction, která je vyjádřena vztahem:

$$\omega = \sqrt[2]{\left(\frac{6\nu}{\beta y^2}\right)^2 + \left(\frac{u_\tau}{\sqrt[4]{C_\mu} y \kappa}\right)^2}. \tag{6.10}$$

Nakonec je potřeba ještě pro výpočet turbulentní viskozity ν_t blízko stěny předepsat okrajovou podmínku nutkWallFunction pro výpočet turbulentní viskozity

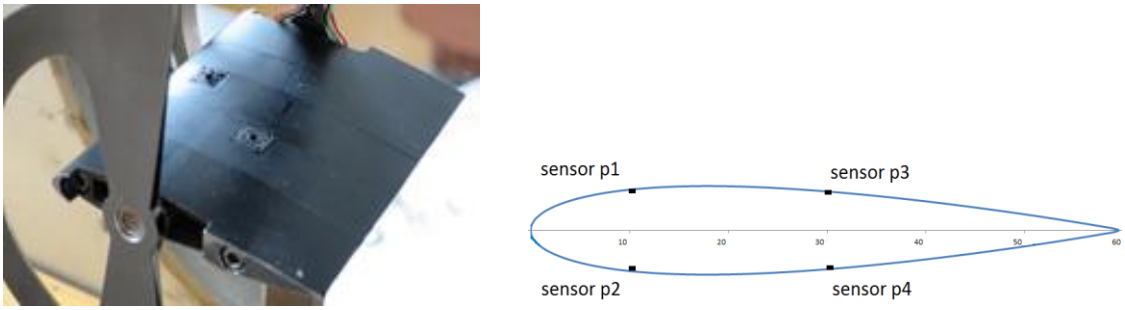
$$\nu_t = \nu\left(\frac{y^+\kappa}{log(Ey^+) - 1}\right), \tag{6.11}$$

kde jsou hodnoty konstant $\beta = 0{,}75$, $\kappa = 0{,}41$ *a* $E = 9{,}8$.

Na vstupu Γ_inlet a výstupu Γ_outlet se předepisují hodnoty spočítané ze vztahů (6.4) pro kinetickou turbulentní energii a (6.5) pro specifickou disipaci. Turbulentní veličiny na stěnách se dopočítávají až během simulace podle výše uvedených vztahů (6.9) – (6.11).

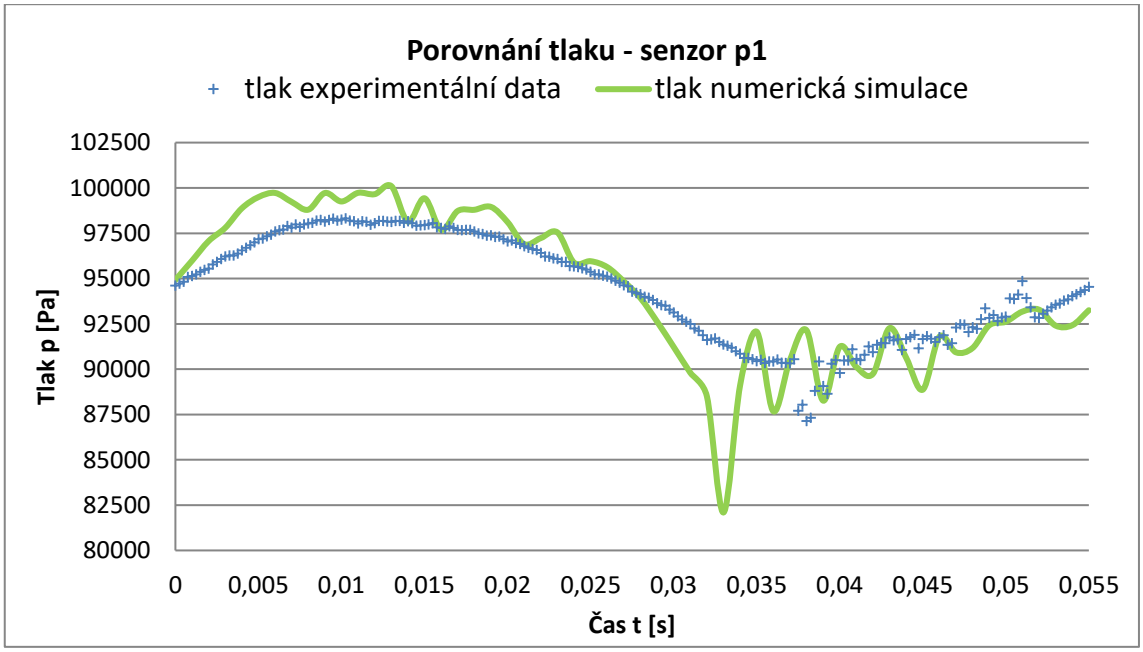
6.4.2 Výsledky simulací nestlačitelného proudění pro rychlost M = 0,2

Numerická simulace se řeší paralelně jako nestacionární pomocí řešiče pro nestlačitelné proudění na dynamických sítích pimpleDyMFoam. Výpočet je prováděn na výpočetním clusteru na 32 výpočetních jádrech. Délka simulace je stanovena na 5 period kmitů leteckého profilu (t = 276 ms), časový krok simulace je dán CFL podmínkou pro Courantovo číslo Co = 1. Porovnávají se výsledky numerické simulace, jak ve 2D, tak i ve 3D s daty z tlakových senzorů rozmístěných na leteckém profilu. Pohyb profilu je v simulaci předepsán na základě změřených průběhů zdvihu a náklonu modelu při samobuzeném kmitání v aerodynamickém tunelu. Okrajové podmínky pro vstupní rychlost a tlak pochází ze stejného experimentu. Na obrázku Obr. 20 je ukázána poloha jednotlivých snímačů tlaku. Tlakové senzory jsou umístěny na obou stranách leteckého profilu stejně. Souřadnice senzoru p1 jsou 10 mm od náběžné hrany a 47 mm od levého okraje leteckého profilu. Stejnou polohu má i senzor p2, jen je umístěn na dolní straně leteckého profilu. Senzor p3 je vzdálen 30 mm od náběžné hrany a 30 mm od levého okraje leteckého profilu. Měření bylo prováděno v aerodynamickém tunelu Ústavu termomechaniky AV ČR v Novém Kníně [Šidlof a kol. 2016].

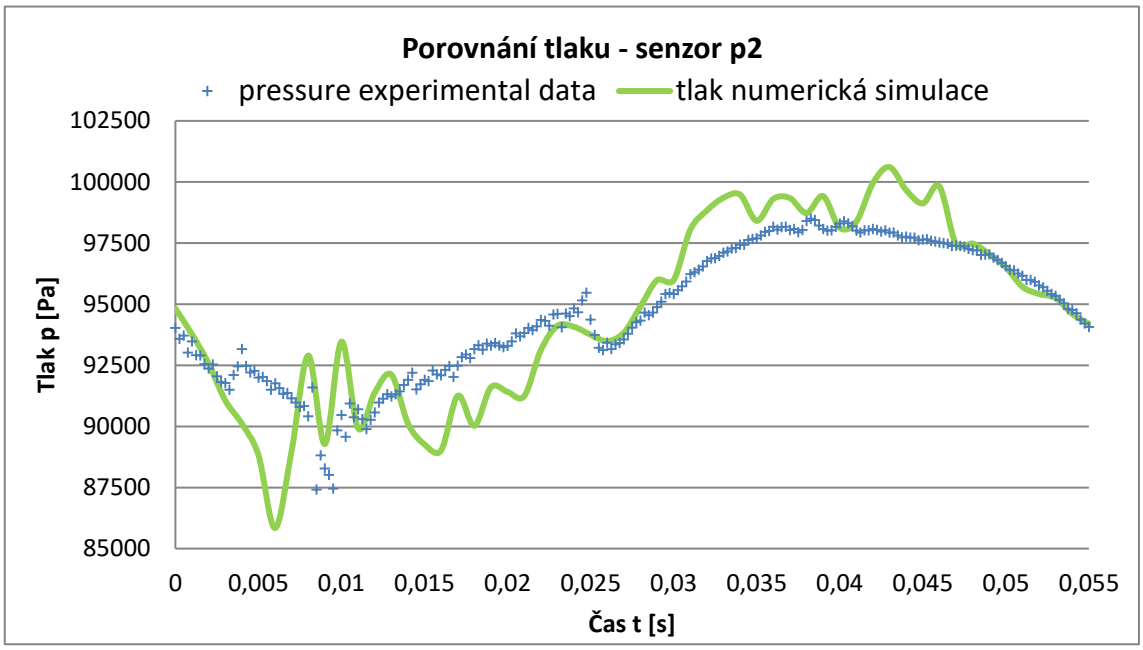


Obr. 20: Rozložení tlakových senzorů na povrchu leteckého profilu. **[**Šidlof a kol. 2016**]**

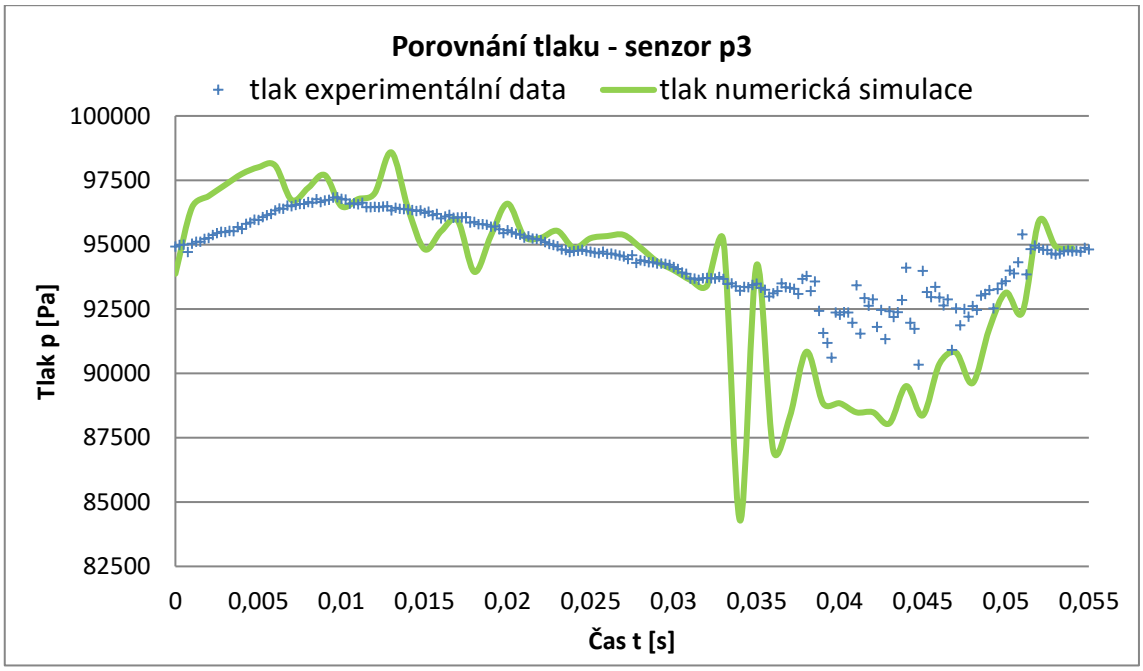
Výsledky numerické simulace je nutné před porovnáním zpracovat, jelikož uzly výpočetní sítě přímo nekorespondují se souřadnicí středu tlakového senzoru. V případě 2D simulace je hodnota interpolována ze dvou nejbližších uzlů sítě. Pro 3D sítě je hodnota interpolována ze čtyřech nejbližších uzlů sousedících s pozicí tlakového senzoru. Data jsou navíc průměrována z posledních dvou period výpočtu. Velikost elementu na povrchu křídla je relativně malá, na horním povrchu jich je celkem 100 na celou délku (délka elementu < 1 mm). Rozdíl tlaku na dvou sousedních elementech je do 1%. Bohužel se zde projevuje problematika výpočtu turbulence na 2D síti a výsledky jsou výrazně rozkolísané, jak můžeme vidět na obrázcích Obr. 21 až Obr. 24. Jev, který se neblaze projevuje na shodě, je odtržení proudu od náběžné hrany. To se projevuje zakolísáním tlaku v experimentálních datech. Při numerické simulaci k tomuto odtržení dochází dříve než při experimentu. Odtržení je složitý děj, který je závislý na okolních podmínkách a mnoha parametrech, které v numerické simulaci nejsou zahrnuty, proto zde nelze očekávat, že tento jev bude zachycen přesně. Simulace turbulentního proudění ve 2D nezachytí komplexní chování turbulence, která je prostorovým jevem. Pro zachycení základního trendu postačuje. Proto je zde pozorována poměrně dobrá shoda experimentu a numerické simulace. Lze tak získat dobré výsledky za cenu výrazně menších nákladů, než je tomu pro 3D výpočet.



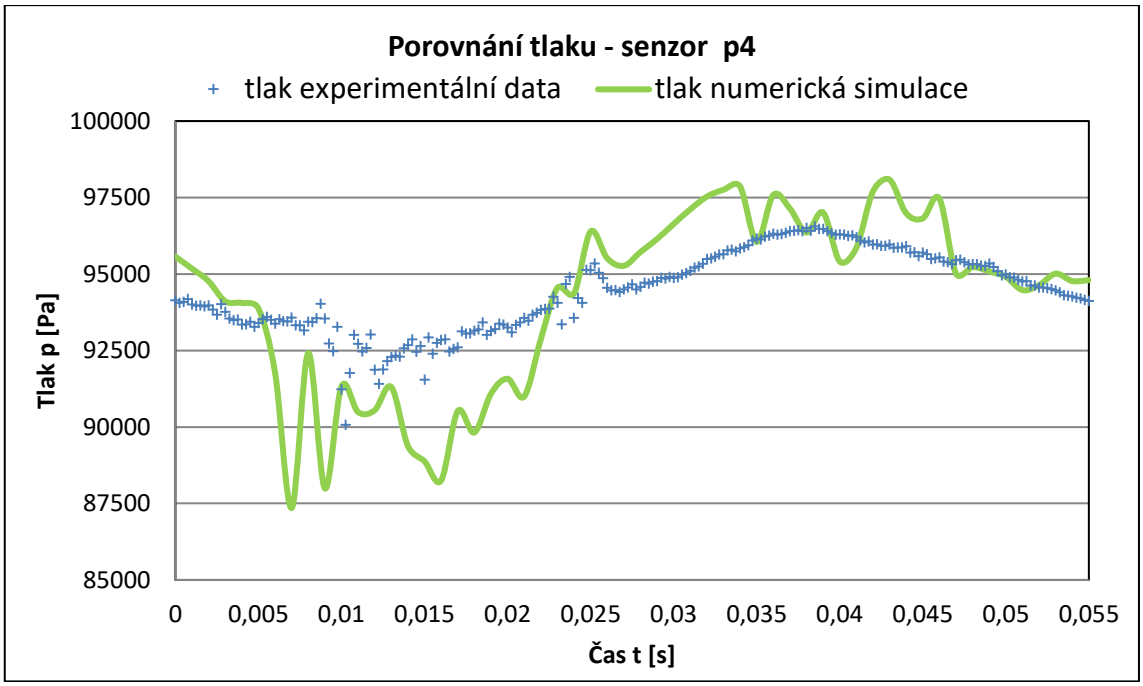
Obr. 21: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p1.



Obr. 22: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p2.

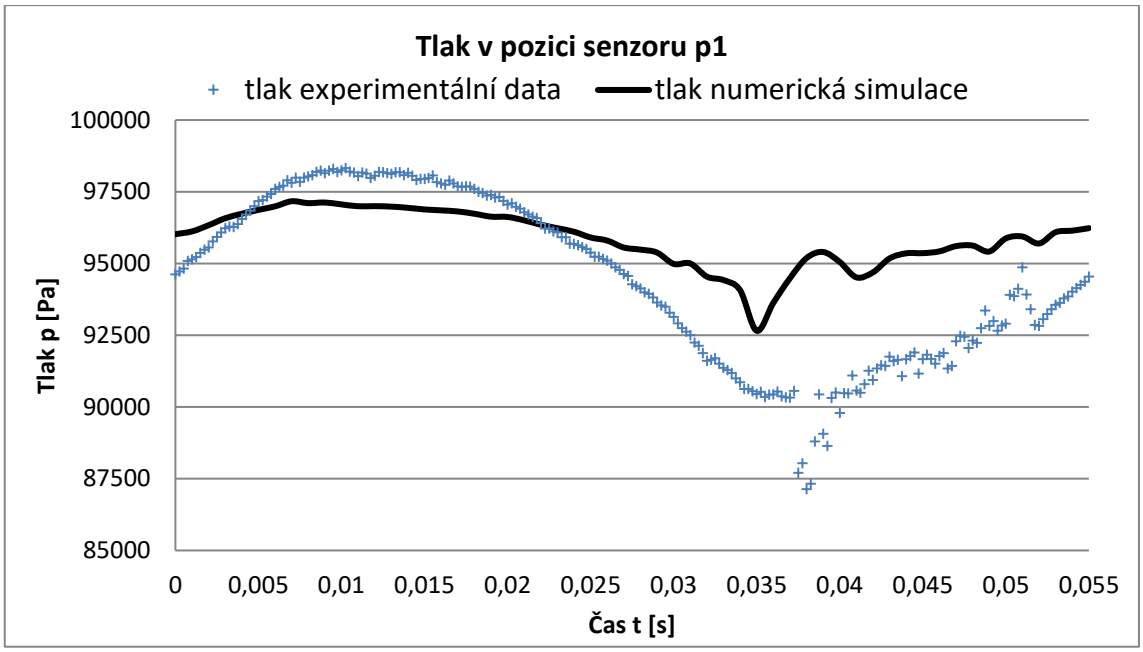


Obr. 23: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p3.

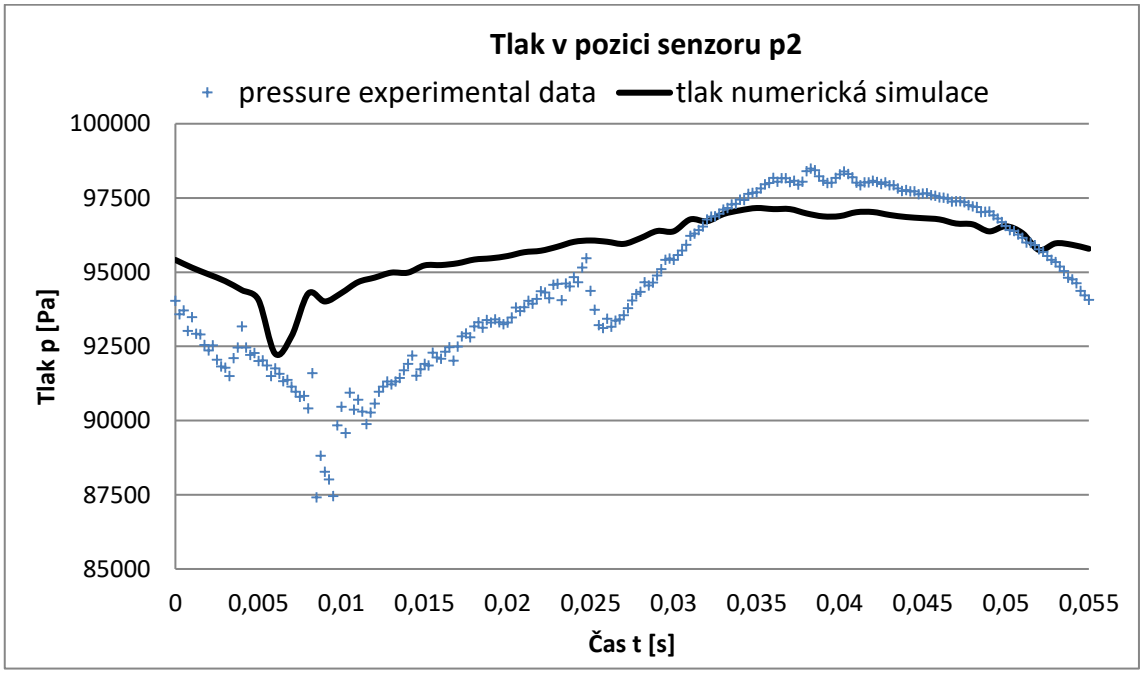


Obr. 24: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 2D numerické simulace a z tlakového senzoru p4.

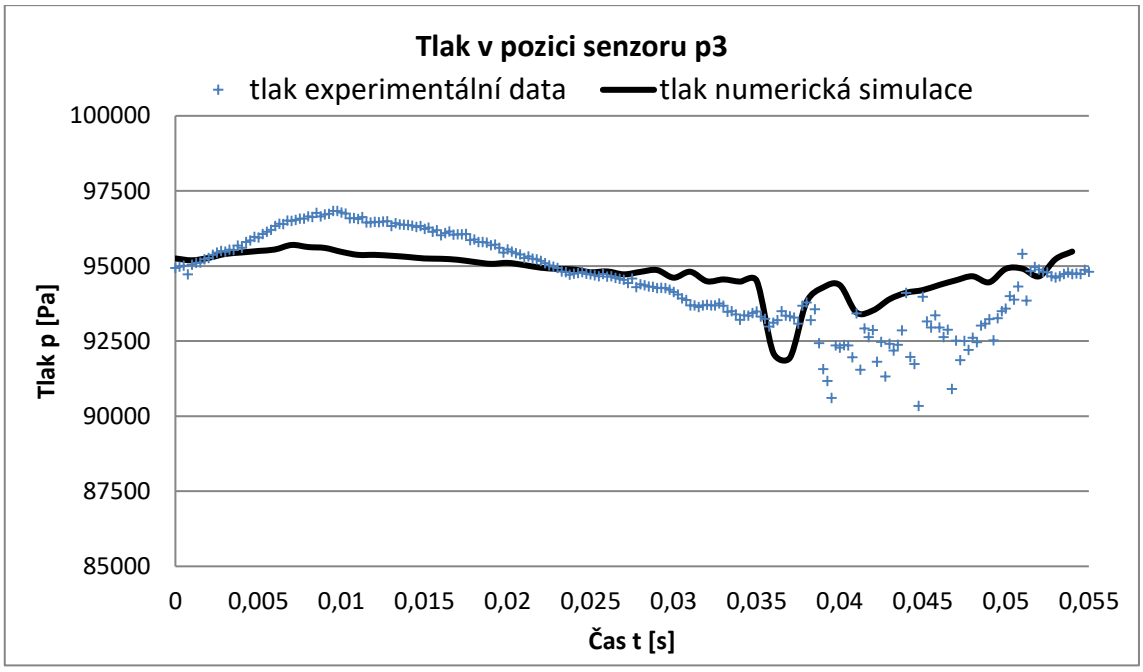
U 3D simulací zobrazených na obrázcích Obr. 25 až Obr. 28 již tlak není tak rozkolísaný, jako tomu bylo u 2D simulace. To je způsobeno tím, že simulace ve 3D je schopna lépe zachytit chování turbulence, které je prostorové. Výsledky numerické simulace jsou opět zpracovány a tentokrát je hodnota tlaku určena interpolací ze čtyř uzlů nejblíž k tlakovému senzoru. Porovnávané hodnoty se spolu poměrně dobře shodují, 3D simulace také lépe vystihne fázi, kdy dojde k odtržení, a tudíž k výraznému zákmitu na průběhu tlaku.



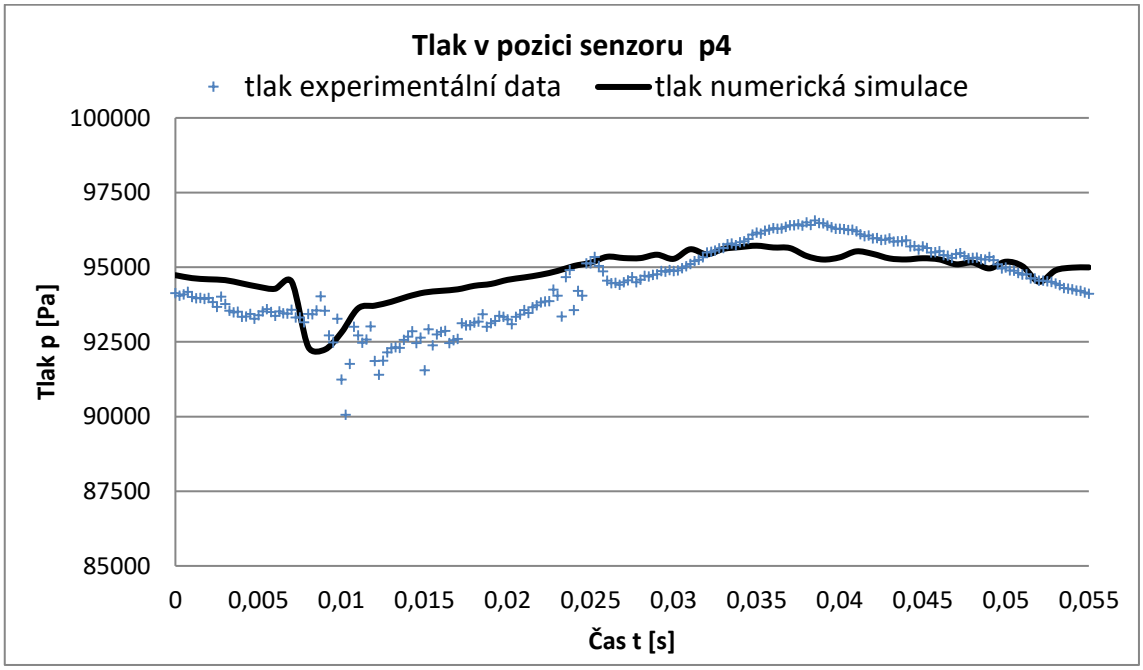
Obr. 25: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p1.



Obr. 26 Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p2.



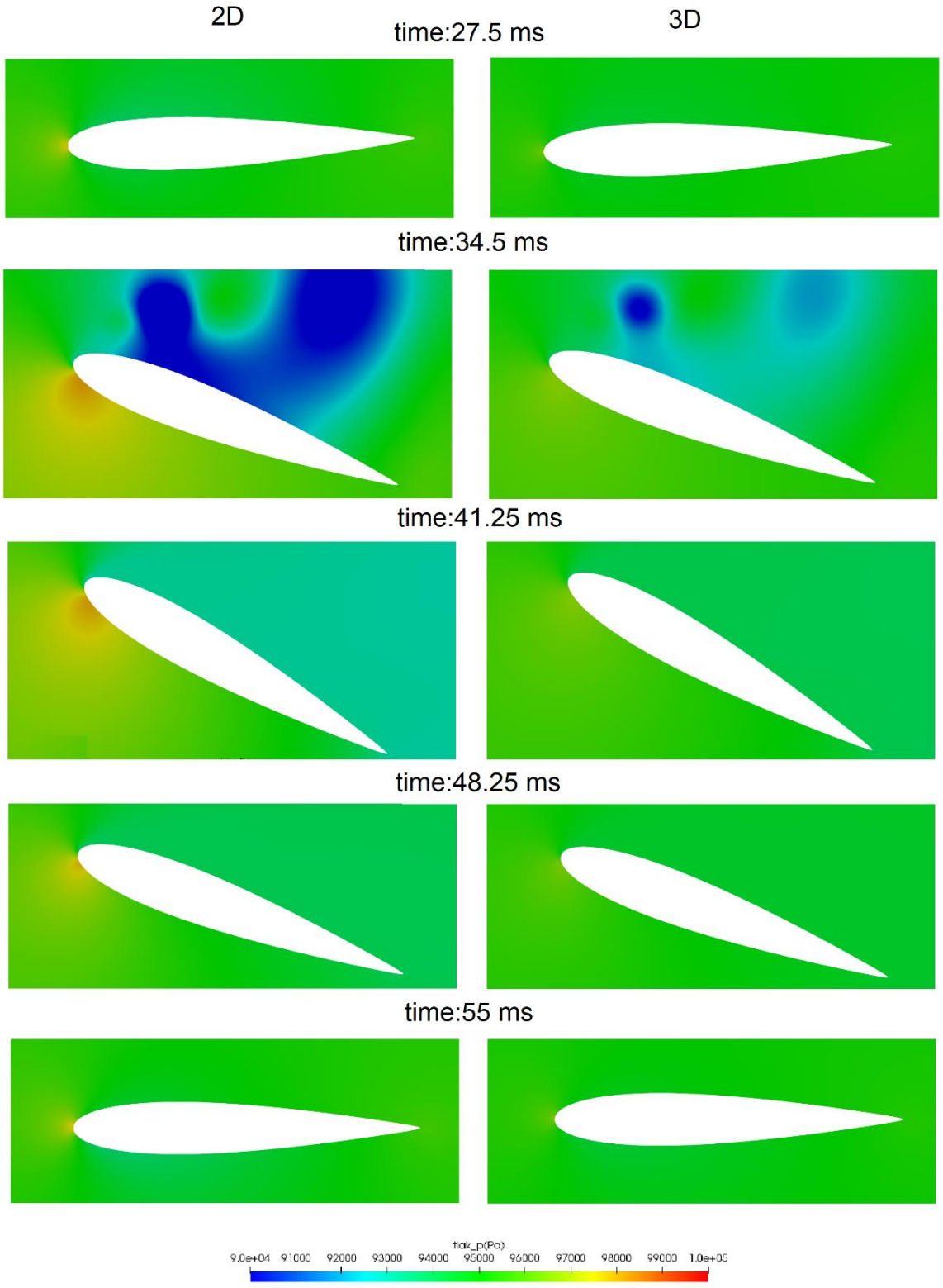
Obr. 27: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p3.



Obr. 28: Porovnání rozložení tlaku získané pomocí 3D numerické simulace a z tlakového senzoru p4.

Na Obr. 29 je znázorněno rozložení tlaku pro polovinu periody. Na levé straně jsou výsledky 2D simulace a napravo pak 3D simulace. V případě 3D simulace je patrné že tlakové

pole je více homogenní. To je způsobeno lepším zachycením chování turbulence u 3D modelu jak již bylo zmíněno výše.



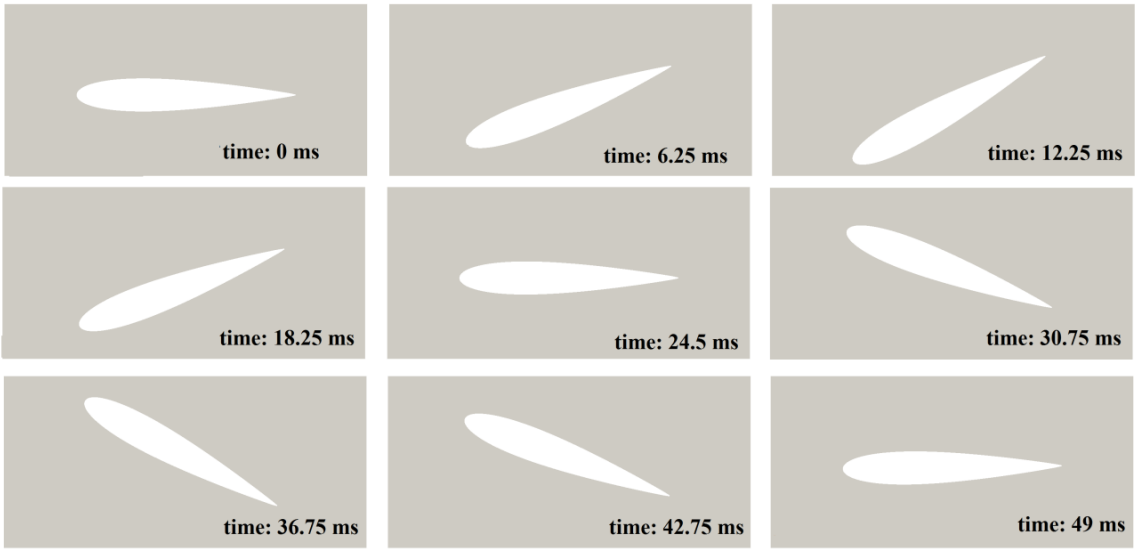
Obr. 29: Rozložení tlakového pole okolo leteckého profilu.

6.5 Numerické simulace pro stlačitelné proudění

6.5.1 Okrajové podmínky pro stlačitelné proudění

V dalším kroku bylo studováno kmitání leteckého profilu pro případ stlačitelného proudění. Vstupní data pro simulaci opět pocházela z experimentu. Během experimentu byly pořízeny interferogramy, ze kterých lze vyhodnotit rozložení hustoty, a za předpokladu izentropického proudění i rychlost a tlak na povrchu leteckého profilu. Rychlost vstupního proudu pro tento případ byla M = 0,43 a atmosférický tlak před vstupem do aerodynamického tunelu byl 98825 Pa.

Na základě experimentu byl identifikován pohyb leteckého profilu (zdvih a náklon při samobuzeném kmitání) znázorněný na Obr. 30. Frekvence harmonického pohybu f = 20,4 Hz, amplituda rotačního pohybu Φ = 25,8 ° a amplituda translačního pohybu X = 7,4 mm.



Obr. 30: Pohyb leteckého profilu v průběhu jedné periody (49 ms) s maximální výchylkou v rotaci 25,8° a posuvem 7,4 mm.

Okrajové podmínky pro rychlost, tlak a teploty jsou shrnuty v tabulce Tab. 6. 6. Proudové pole je řízeno opět rychlostí předepsanou na vstupu. Pro rychlost na výstupu Γ_outlet je předepsána Neumannova okrajová podmínka. Oproti předchozímu případu je potřeba definovat okrajové podmínky pro teplotu. Na stěnách je předepsána teplota odpovídající teplotě během experimentu. Zbytek okrajových podmínek pro tlak a rychlost zůstává stejný, jako u simulace nestlačitelného proudění.

Tab. 6. 6 : Okrajové podmínky pro rychlost, tlak a teplotu pro model stlačitelného proudění.

hranice	**rychlost ($\boldsymbol{u}$)**	**tlak ($\boldsymbol{p}$)**	**teplota ($\boldsymbol{T}$)**
Γ_inlet	$\boldsymbol{u} = 153\ m/s$	$p = 98825\ Pa$	$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_outlet	$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_top	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$T = 291\ K$
Γ_bottom	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$T = 291\ K$
Γ_front	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$ (2D: empty)	$\partial p / \partial n = 0$ (2D: empty)	$T = 291\ K$ (2D: empty)
Γ_back	$\boldsymbol{u} = 0\ m/s$ (2D: empty)	$\partial p / \partial n = 0$ (2D: empty)	$T = 291\ K$ (2D: empty)
Γ_wing	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{wing}$	$\partial p / \partial n = 0$	$T = 291\ K$

Dále je potřeba předepsat okrajové podmínky pro turbulentní kinetickou energii a specifickou disipaci pro stlačitelné proudění. Turbulentní kinetická energie je definovaná vztahem (6.4). Specifická disipace na vstupu je:

$$\omega = C_\mu \frac{\rho * k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right),^{-1} \tag{6.12}$$

kde $\frac{\mu_t}{\mu} = 100$ je poměr turbulentní a dynamické viskozity a $C_\mu = 0{,}09$. Okrajové podmínky pro tyto veličiny jsou shrnuty v tabulce Tab. 6. 7.

Pro elementy na stěnách platí že $y^+ > 1$. Výpočet y^+ pro stlačitelné proudění v OpenFOAMU je dána vztahem:

$$y^+ = \sqrt[4]{C_\mu} \sqrt{\frac{k\varrho}{\mu}}. \tag{6.13}$$

Okrajová podmínky pro turbulentní kinetickou energii v blízkosti stěny compressible::kqRWallFunction a pro specifickou disipaci specifickou disipaci compressible::omegaWallFuncti se shodují s rovnicemi popsanými pro nestlačitelné proudění (6.9 a 6.10).

Tab. 6. 7: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci (model stlačitelného proudění).

hranice	**turbulentní kinetická energie** k	**Specifická disipace** ω
Γ_inlet	k = 22 m^2/s^2	ω= 52700 $1/s$
Γ_outlet	k = 22 m^2/s^2	ω= 52700 $1/s$
Γ_top	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction
Γ_bottom	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction
Γ_front	compressible::kqRWallFunction (2D: empty)	compressible::omegaWallFunction (2D: empty)
Γ_back	compressible::kqRWallFunction (2D: empty)	compressible::omegaWallFunction (2D: empty)
Γ_wing	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction

Dále se předepisuje i okrajová podmínka mutkWallFunction na stěnách pro turbulentní viskozitu:

$$\mu_t = \mu * \left(\frac{y^+ \kappa}{log(E * y^+) - 1} \right), \tag{6.14}$$

kde hodnoty konstant jsou $\beta = 0{,}75$, $\kappa = 0{,}41$ *a* $E = 9{,}8$.

Poslední okrajovou podmínkou na stěnách je compressible::alphatWallFunction, která je počítána vztahem:

$$\alpha_t = \frac{v_t}{Pr_t}, \tag{6.15}$$

kde $Pr_t = 0{,}85$ je turbulentní Prandtlovo číslo na stěně. Přiřazení jednotlivých okrajových podmínek pro turbulentní dynamickou viskozitu a turbulentní tepelnou vodivost je pro přehlednost zpracována do tabulky Tab. 6. 8.

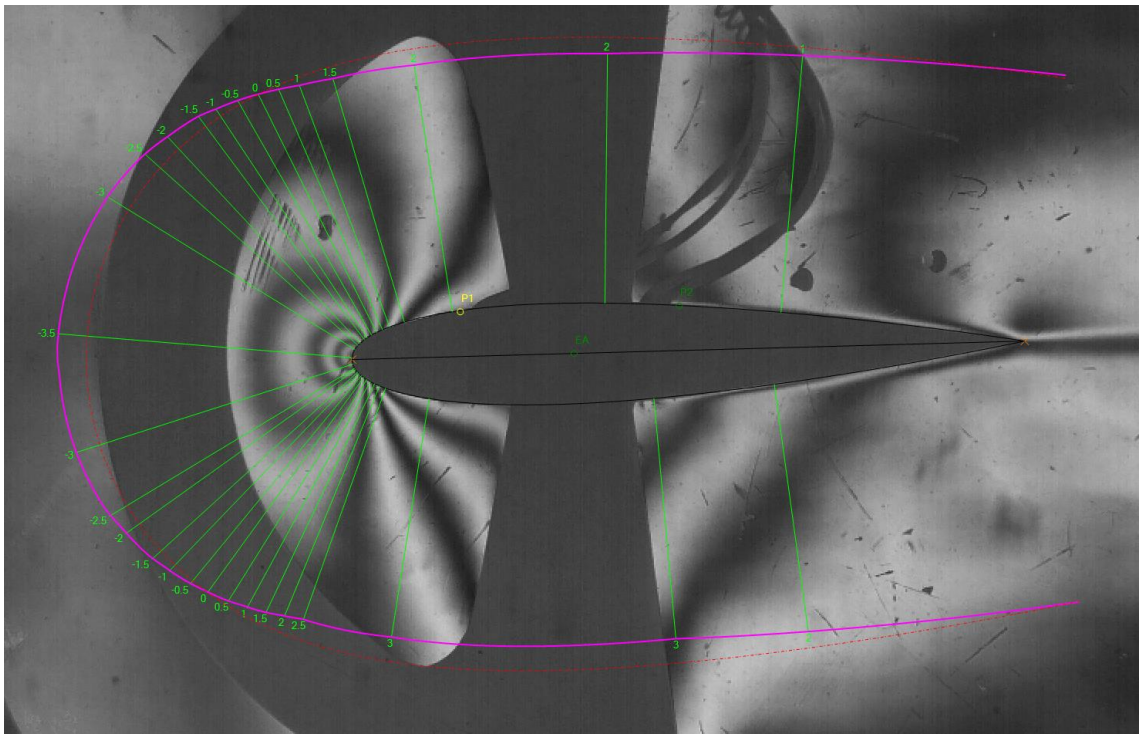
Tab. 6. 8: Okrajové podmínky pro turbulentní dynamickou viskozitu a turbulentní tepelnou vodivost.

hranice	Turbulentní dynamická viskozita mut	Turbulentní tepelná vodivost alphat
Γ_inlet	calculated	calculated
Γ_outlet	calculated	calculated
Γ_top	mutkWallFunction	compressible::alphatWallFunction
Γ_bottom	mutkWallFunction	compressible::alphatWallFunction
Γ_front	mutkWallFunction (2D: empty)	compressible::alphatWallFunction (2D: empty)
Γ_back	mutkWallFunction (2D: empty)	compressible::alphatWallFunction (2D: empty)
Γ_wing	mutkWallFunction	compressible::alphatWallFunction

6.5.2 Výsledky simulací stlačitelného proudění pro rychlost M = 0,43

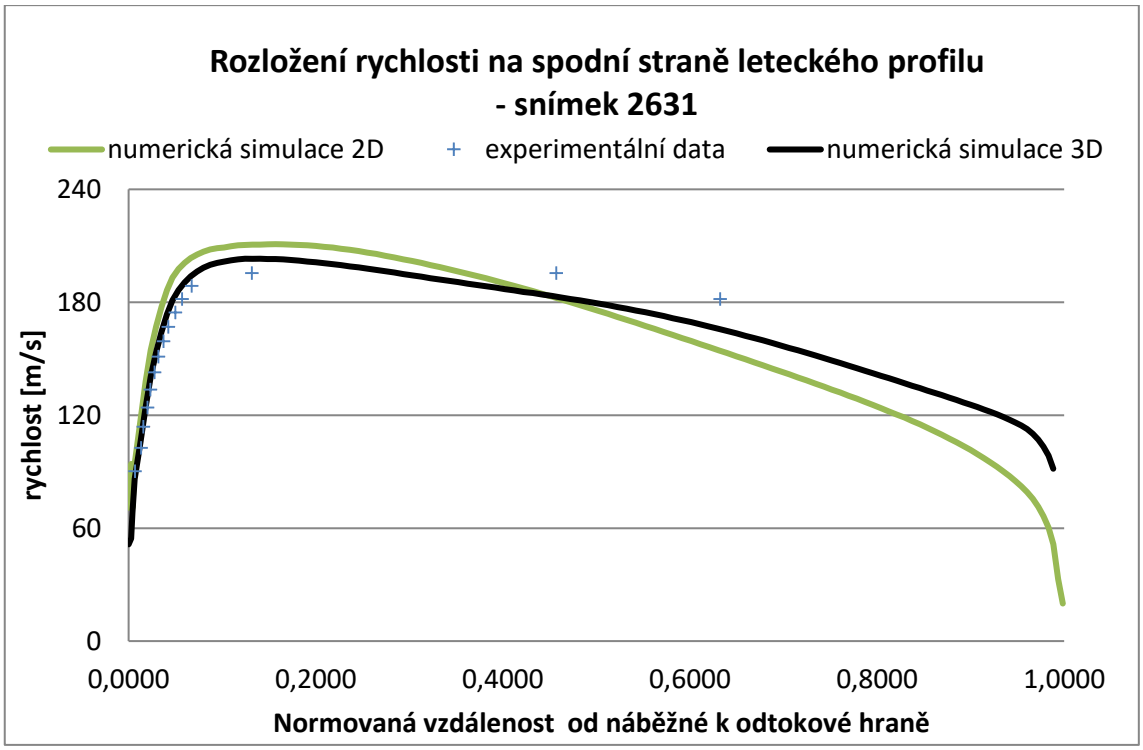
Numerická simulace stlačitelného proudění je řešena jako nestacionární úloha pomocí řešiče rhoPimpleDyMFoam s modelem turbulence pro stlačitelné proudění k-ω-SST popsaného v kapitole 2.5.2. Délka výpočtu je stejně jako v předchozím případě stanovena na pět period kmitu (t = 45 ms). Simulace se počítala na 2D i 3D sítích.

V první fázi vyhodnocování byla porovnána data získaná z interferogramů. Na Obr. 31 je zobrazeno rozložení interferenčních proužků pro snímek číslo 2631. Na základě těchto interferenčních proužků je určeno rozložení rychlosti tlaku a hustoty na povrchu leteckého profilu.

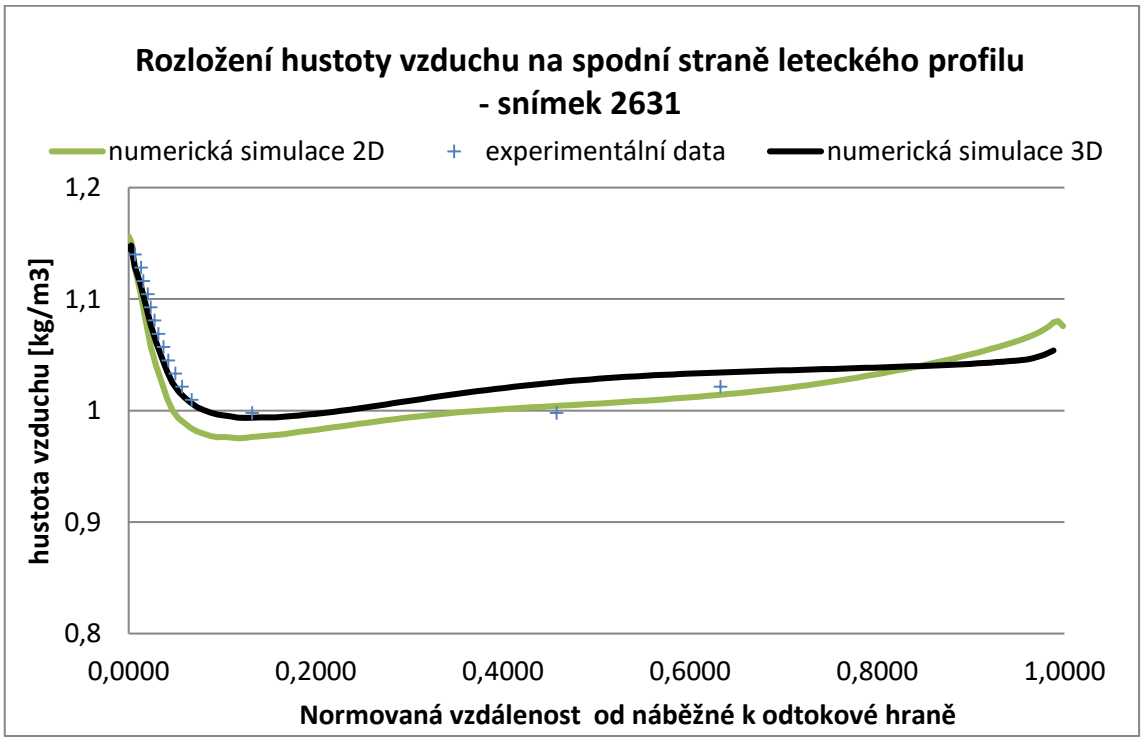


Obr. 31: Interferogram s vyznačenými místy doteku interferometrických proužků na profilu leteckého profilu – snímek 2631.

Na obrázku Obr. 32 je porovnáno rozložení rychlosti na spodním povrchu leteckého profilu. Jak je vidět, 2D i 3D simulace výborně zachytily průběh rychlosti v blízkosti stagnačního bodu na náběžné hraně. V oblasti úplavu se výsledky numerických simulací od experimentálních dat vzdalují. U 3D simulace bylo dosaženo celkově lepší shody pro rozložení rychlosti na celém spodním povrchu oproti 2D simulaci.



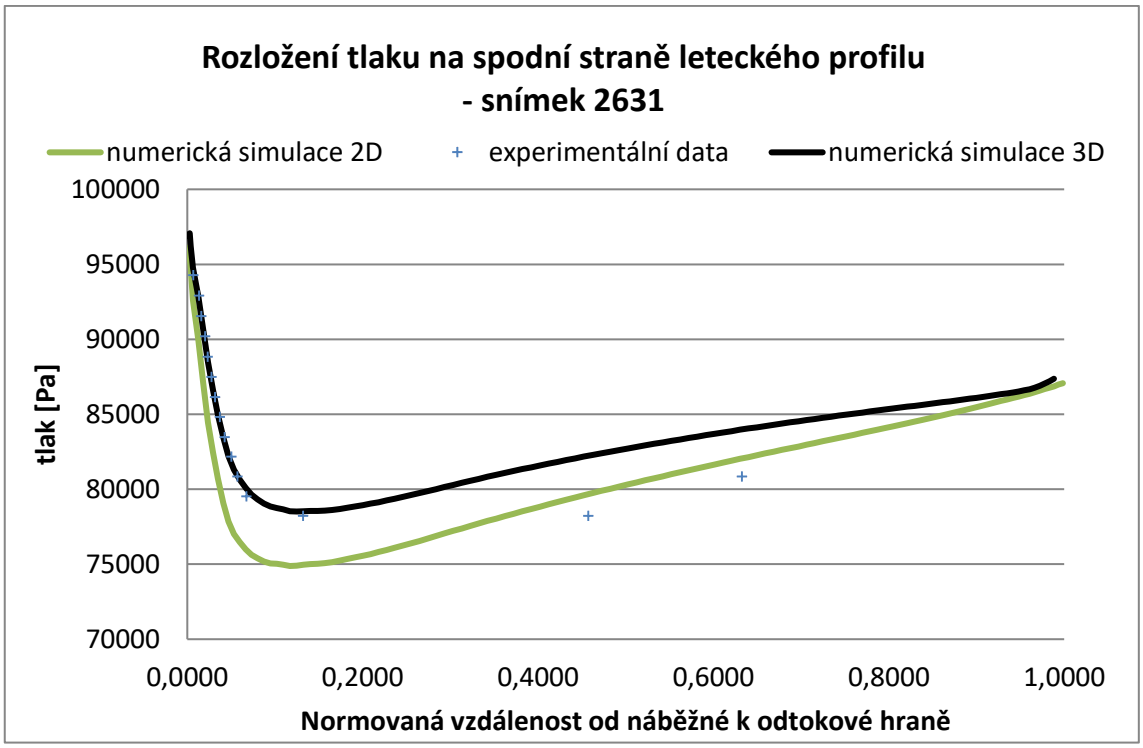
Obr. 32: Rozložení rychlosti na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631.



Obr. 33: Rozložení hustoty vzduchu na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631.

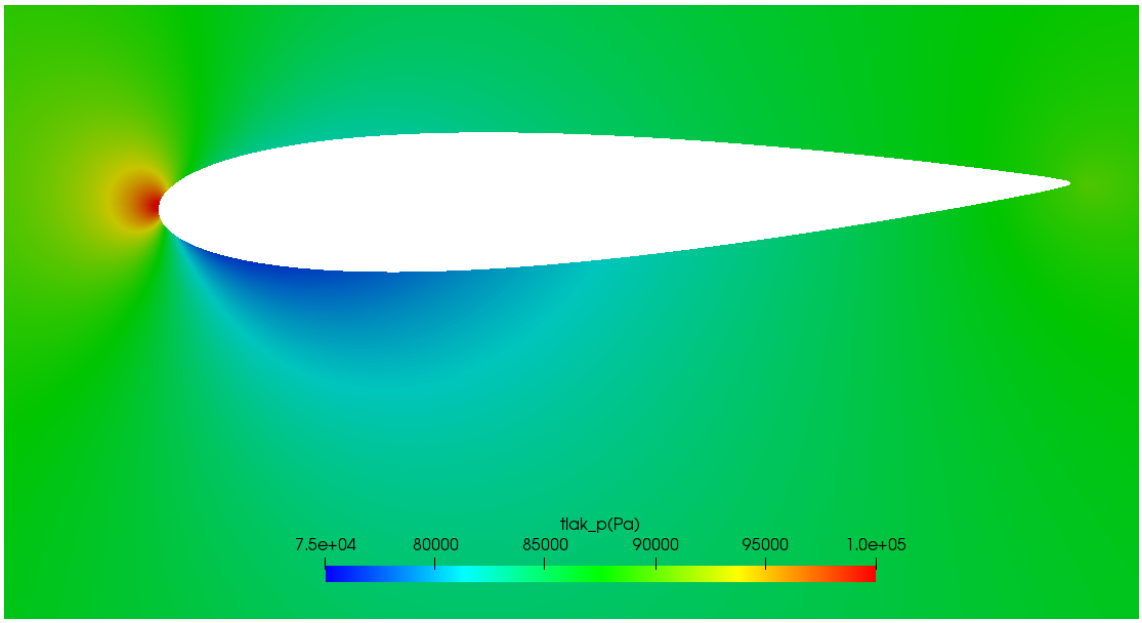
Na dalším obrázku Obr. 33 je zobrazeno rozložení hustoty na spodním povrchu leteckého profilu. I zde bylo dosaženo výborné shody v oblasti stagnačního bodu. Výsledky numerické simulace na 3D síti kopírují rychlý pokles hustoty na náběžné hraně leteckého profilu. Stejný výsledky byl získány i pro rozložení tlaku (viz Obr. 34). Opět bylo dosaženo lepších výsledků pro 3D simulaci.

Vyhodnocení rychlosti, hustoty a tlaku na horním povrchu leteckého profilu je umístěno v příloze (příloha B). Bylo dosaženo výborné shody jako je tomu u dolního povrchu, dokonce i v případě 2D simulací. Při takto malém náklonu nedochází ani na jedné straně k odtržení proudění což se pozitivně projeví na přesnosti numerické simulace.

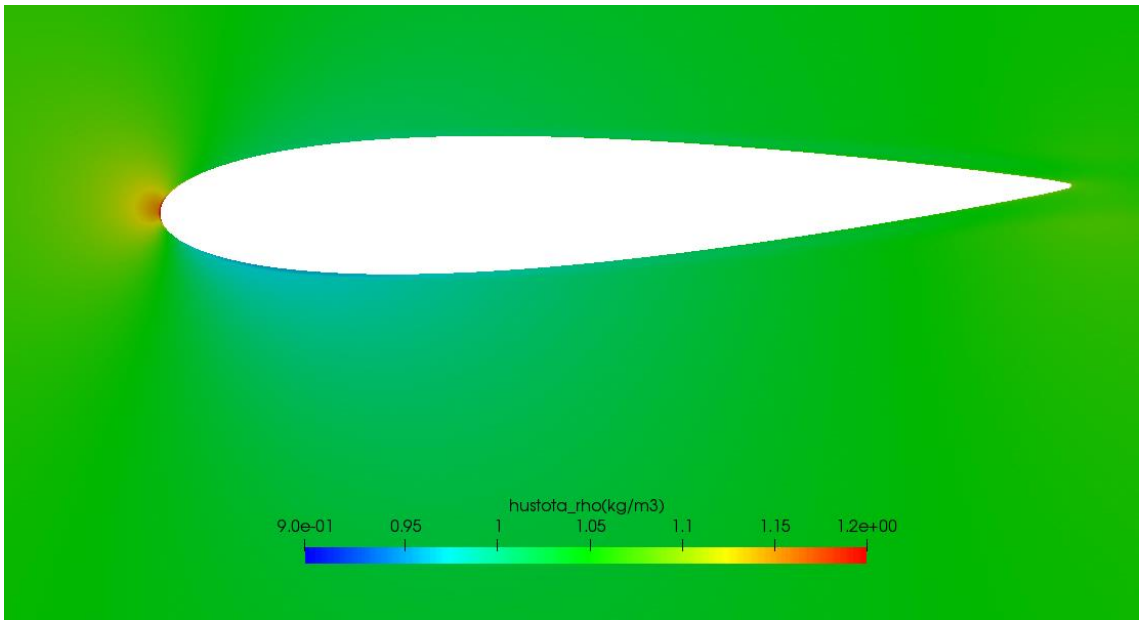


Obr. 34: Rozložení tlaku na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2631.

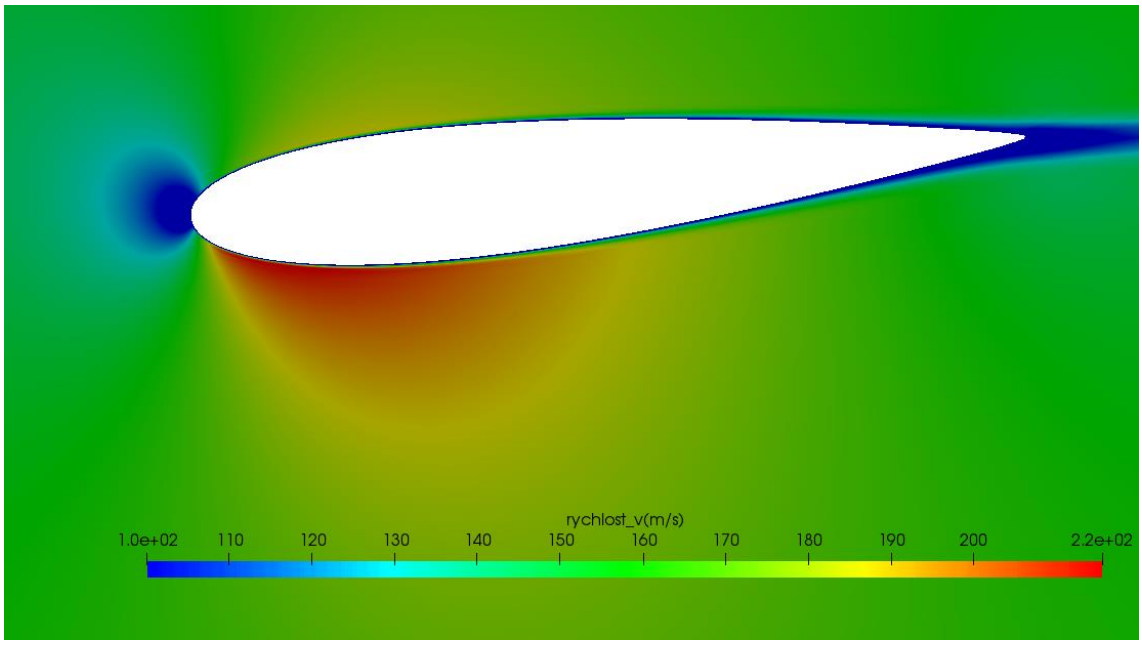
Pro lepší představu rozložení tlaku, hustoty a rychlosti v blízkosti leteckého profilu jsou ještě přiloženy obrázky Obr. 35 – Obr. 37 z 3D numerické simulace. Pro dané natočení leteckého profilu je vidět, že úhel náběhu proudění je malý a ani na jedné straně leteckého profilu nevznikají vírové útvary vzniklé při odtržení proudění.



Obr. 35: Rozložení tlaku okolo leteckého profilu – snímek 2631.

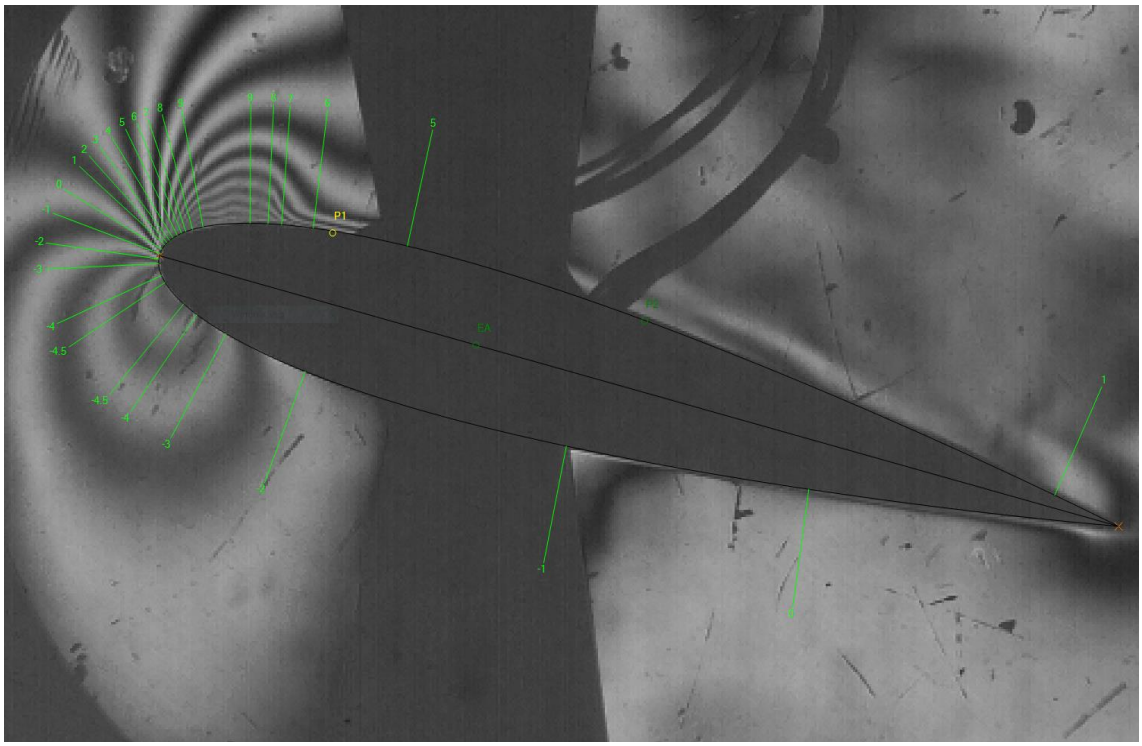


Obr. 36: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2631.



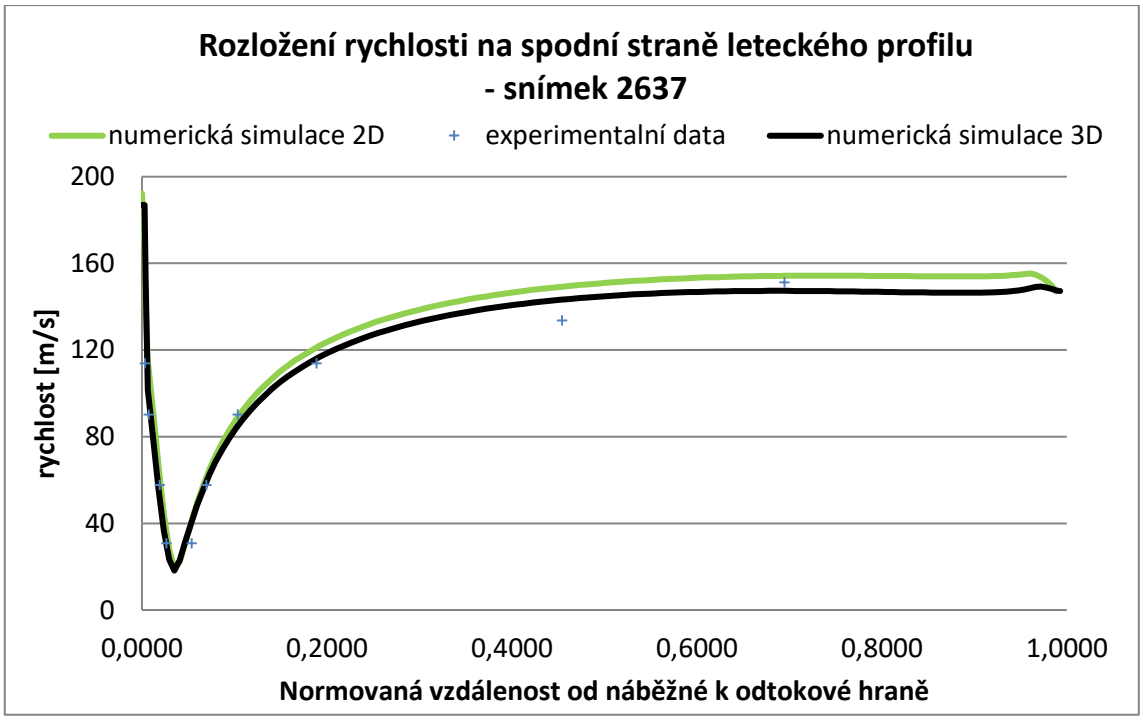
Obr. 37: Rozložení rychlost okolo leteckého profilu – snímek 2631.

V rámci práce byl ještě vyhodnocen druhý interferogram s označením 2637 (viz Obr. 38). Na tomto snímku je vidět větší náklon leteckého profilu. Při tomto náklonu dochází při numerické simulaci na horním povrchu k obdržení proudění. Během experimentu k odtržení nedochází K odtržení proudění dochází blízko náběžné hrany leteckého profilu. Grafy s průběhem na horní hraně jsou umístěny do přílohy C. Na těchto grafech se toto odtržení negativně projeví na shodě experimentu se simulací v části za odtržením. V případě rychlosti dojde za tímto bodem ke skokovému propadu rychlosti, jelikož zde ihned vzniká úplav. To samé lze prohlásit i o ostatních veličinách na povrchu leteckého profilu.

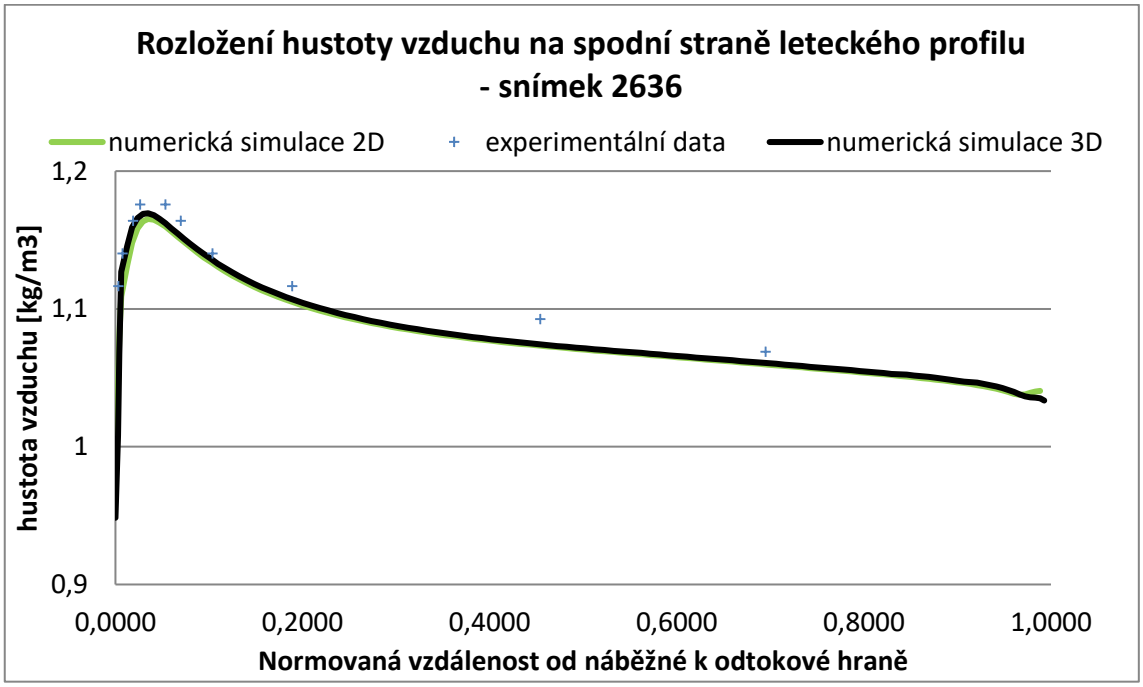


Obr. 38: Interfeogram s vyznačenými místy doteku interferometrických proužků na profilu leteckého profilu – snímek 2637.

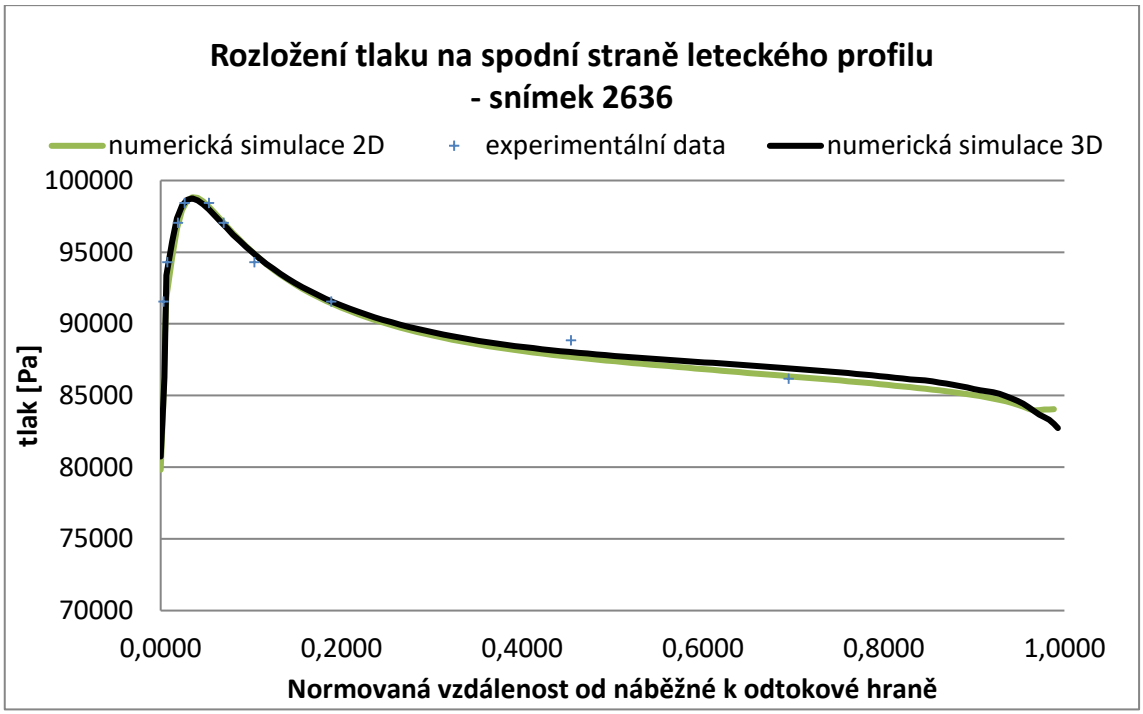
Pozitivní shodu experimentu s numerickými simulacemi lze pozorovat na opačné straně leteckého profilu. Na spodní hraně nedochází k odtržení proudění a proud je po celou dobu svého obtékání přimknut ke spodnímu povrchu leteckého profilu. Na obrázku Obr. 39, kde je zachycen průběh rychlosti, je dosaženo vynikající shody experimentu a 3D i 2D simulace. Stagnační bod je zachycen velice přesně, ať už z pohledu polohy, tak poklesu rychlosti v tomto bodu. Průběh hustoty vyobrazený na obrázku Obr. 40 získaný výpočtem se vyznačuje taktéž vynikající shodou. K menšímu odklonu dochází přibližně v polovině délky povrchu stejně jako u rychlosti, ale poté se opět přiblíží k experimentálním datům. Poslední z vyhodnocovaných veličin na povrchu je tlak (viz Obr. 41). I zde je dosaženo vynikající shody s experimentem.



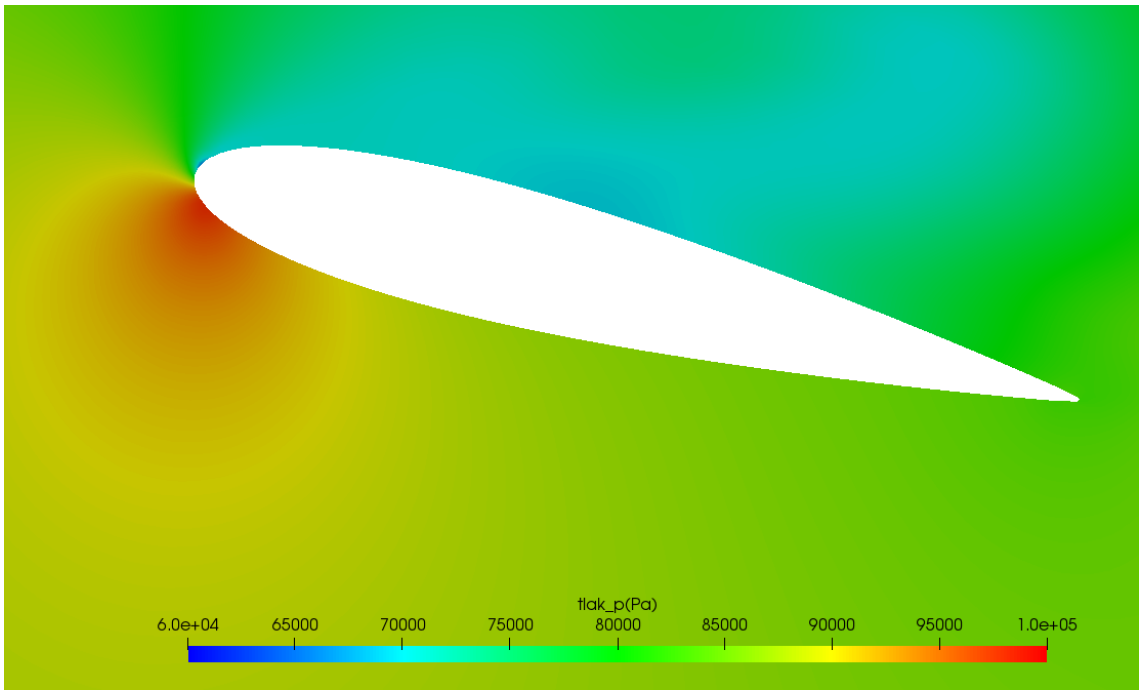
Obr. 39: Rozložení rychlosti na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637.



Obr. 40: Rozložení hustoty vzduchu na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637.



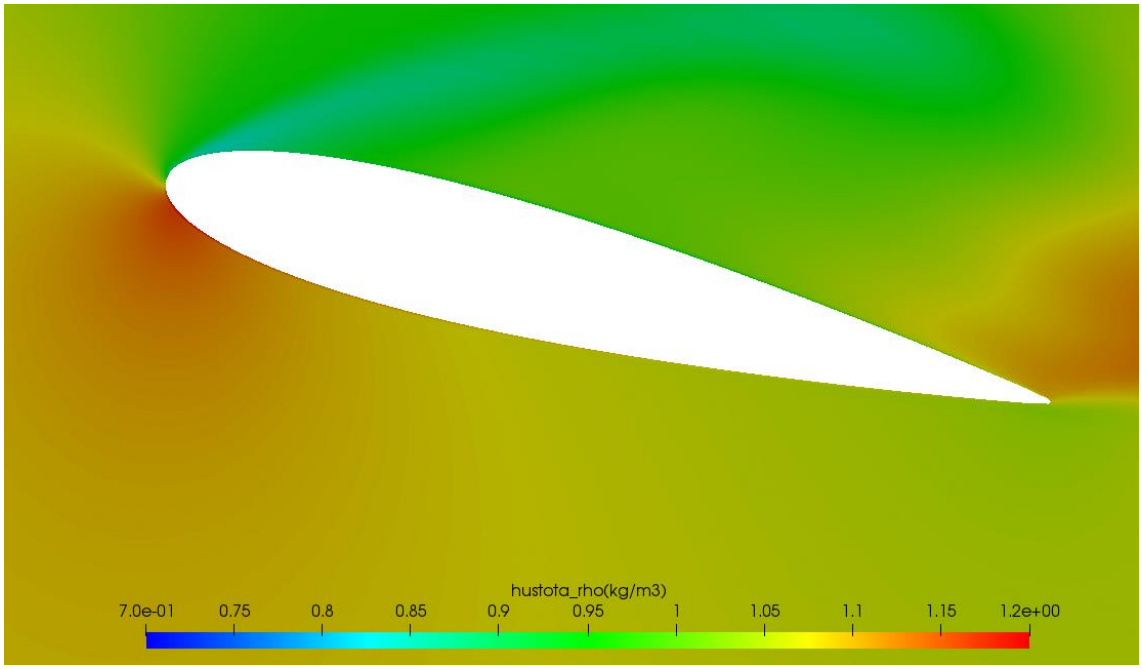
Obr. 41: Rozložení tlaku na spodní straně leteckého profilu pro stlačitelné proudění – snímek 2637.



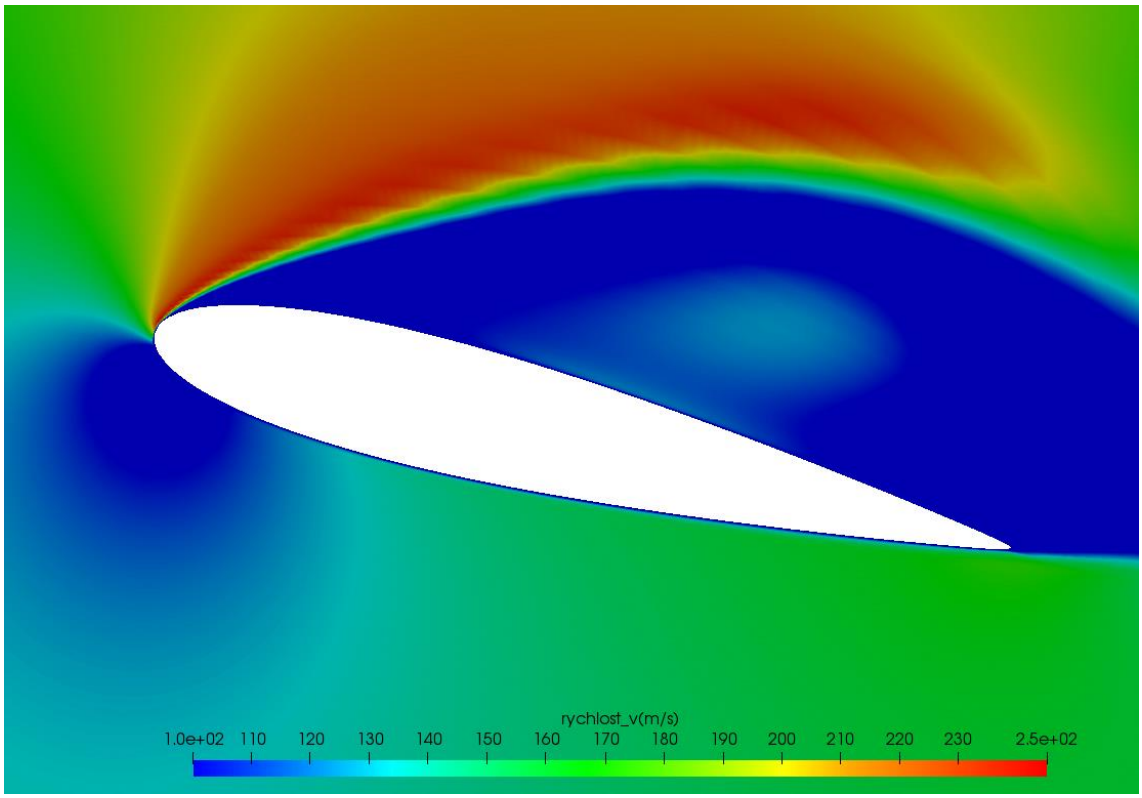
Obr. 42 Rozložení tlaku okolo leteckého profilu – snímek 2637.

I pro pozici leteckého profilu odpovídající snímku 2637 jsou přiloženy obrázky znázorňující rozložení tlaku, hustoty a rychlosti (Obr. 42 – Obr. 44) okolo leteckého profilu. Na těchto obrázcích je vidět, že na horní straně dochází vlivem velkého úhlu natočení k masivnímu odtržení

proudění. Tento děj je natolik složitý, že není snadné ho popsat a zvolený model turbulence ho nezachytí zcela správně.



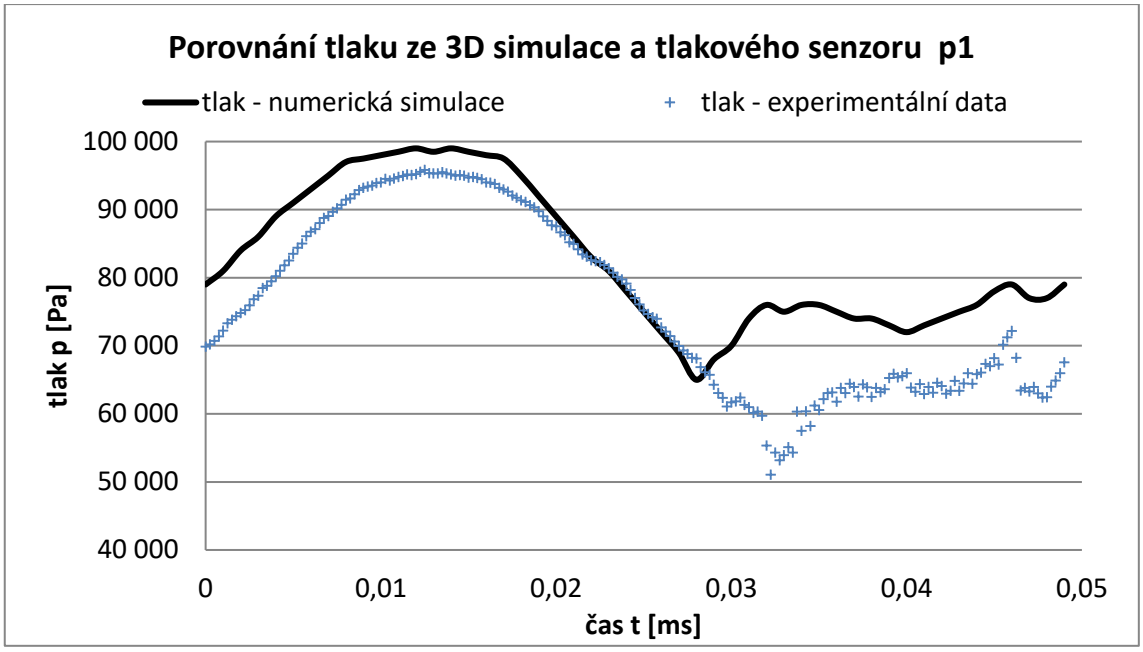
Obr. 43: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2637.



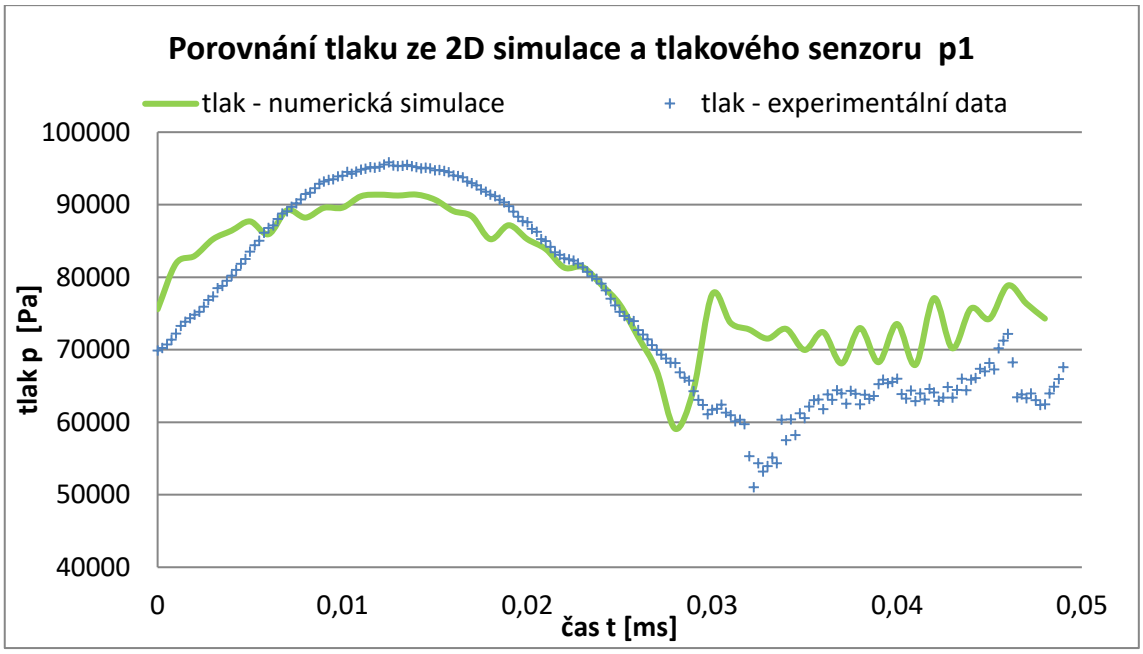
Obr. 44: Rozložení hustoty okolo leteckého profilu – snímek 2637.

Během experimentu byla také ukládána data z tlakových senzorů rozmístěných na povrchu leteckého profilu, stejně jako u příkladu v kapitole 6.4.2. Pro interpolaci dat z numerických do platí stejná pravidla jako v případě nestlačitelného proudění.

Na následujících obrázcích je ukázáno porovnání 3D simulace (Obr. 45) a 2D simulace (Obr. 46) s daty z tlakového senzoru p1. Z výsledků je patrné, že nedochází k optimální shodě. Největší rozdíl nastává v momentě odtržení proudění, což je vidět i v předchozích výsledcích. Poloha tlakového senzoru je přibližně v jedné třetině normované délky leteckého profilu a zde již byl patrný rozdíl mezi simulací a daty z interferogramů. Lepší shody je opět dosaženo pomocí 3D simulace. Výsledky 2D simulací více oscilují.



Obr. 45: Průběh tlaku na pozici senzoru p1 - 3D simulace.



Obr. 46: Průběh tlaku na pozici senzoru p1 – 2D simulace.

Pro přehlednost jsou výsledky porovnání pro tlakový senzor p2, p3 a p4 uvedeny v příloze D. Data pro senzor p2 vykazují podobné vlastnosti jako pro senzor p1. Pro senzory p3 a p4, které jsou umístěny přibližně ve vzdálenosti 0,55 normované délky, je vidět vetší odchylka od experimentu než u senzorů blíže k náběžné hraně leteckého profilu. U senzorů p3 a p4 došlo k určitému paradoxu v případě 2D simulace, kdy bylo dosaženo lepší shody s experimentem. Příčinou tohoto výsledku může být průměrování dat z posledních dvou period, kdy může dojít k vzájemnému vyrušení oscilací a průběh je tak hladší.

7 Vypočet proudění v hlasivkovém kanálu

7.1 Úvod do problematiky numerických simulací proudění v hlasivkovém kanálu

Motivace, která vede k řešení této problematiky, je snaha o vývoj hlasivkových protéz u lidí, kteří vlivem nemoci úrazu či jiných problémů mají své vlastní hlasivky poškozeny nebo o ně přišli zcela. Účelem numerických simulací je studium biomechaniky generování lidského hlasu, a to zejména rozložení tlakových a rychlostních polí v hlasivkovém traktu.

S nejjednodušším přístupem, se kterým se lze v literatuře setkat, je výpočet proudění mezi nepohyblivými hlasivkami, kdy se během výpočtu nemění tvar hlasivek ani mezera mezi nimi. Tento přistup je publikován v [Suh a kol. 2007], kde je hlasivkový trakt idealizován do rovinného kanálu. V článku je porovnáván vliv polohy a tvaru hlasivek na proudové pole v oblasti za hlasivkami v konvergentním a divergentním postavení. Minimální tloušťka štěrbiny mezi hlasivkami je 0,4 mm.

Práce [Decker a Thomson 2007] se zaměřuje na simulace s pevnými i pohyblivými hlasivkami. Autor se zaměřil na určení bodu odtržení proudu za hlasivkovou štěrbinou, proudové pole a rozložení tlaku v hlasivkové štěrbině. Tvar hlasivkového traktu byl zjednodušen na 2D model. Bod odtržení a vlastnosti proudového pole jsou vypočítané, jak pro statické hlasivky různého tvaru, tak i pro harmonicky kmitající hlasivky s frekvencí kmitu 447 Hz. Stejnému tématu se věnují autoři v příspěvku [Horáček a kol. 2008], kde předepisují amplitudu výchylky vrcholu hlasivky a upravují tvar hlasivky. Proudění je popsáno Navier-Stokesovými rovnicemi pro stlačitelné neustálené proudění, cílem výpočtu je opět predikovat bod odtržení proudění hlasivkovou štěrbinou při jejím uzavírání. Predikci bodu odtržení pro statické a pohyblivé hlasivky se věnuje autorka v [Sciamerella a Quéré 2008]. K výpočtu nestacionárního proudového pole využívá metodu konečných diferencí s vnořenými hranicemi. Pohyb hlasivek je předepsán a na vstupu před hlasivkovou štěrbinou je zadána konstantní rychlost. Výsledkem numerických simulací je, že predikce bodu odtržení nelze obecně definovat a je zřídka kvazi-statická.

S řešením nestacionárního proudění mezi kmitajícími hlasivkami se zabýval Alipour se svým týmem v [Alipour a kol. 1996]. K výpočtu využívá metodu konečných objemů a porovnává její výsledky s experimentálními daty. V simulacích byl kromě harmonického pohybu hlasivek s frekvencí 100 Hz předepsán harmonický průběh toku na vstupu. Tím je docíleno harmonického chování rychlostního a tlakového pole za hlasivkovou štěrbinou. Ve všech dříve zmíněných pracích byla oblast za hlasivkami nahrazena rovinným kanálem a nebyl tak zahrnut vliv

ventrikulárních řas nacházejících se hned za hlasivkami. Vliv ventrikulárních řas na proudění je ukázán v [Zhang a kol. 2002] pro konkrétní případ fonace, kterému odpovídá i pohyb hlasivek.

S řešením interakce mezi hlasivkou a prouděním se lze setkat v disertační práci [Hrůza 2007]. V této práci je pro numerické simulace použit výpočetní program ANSYS, který je založen na metodě konečných prvků. Autor se v práci zaměřuje na stavbu modelu hlasivky, nejprve použil rovinný model (2D) a po jeho odladění jí rozšířil o prostorový model (3D). Prostorový model obsahuje detailnější popis jednotlivých struktur hlasivky a tím je dosaženo přesnějšího tvaru povrchu hlasivky během interakce. Autor také naprogramoval do výpočetního softwaru funkci umožňující úplné uzavření vzduchové mezery mezi hlasivkami, čímž lze přerušit proud vzduchu. Prostorový model umožnil díky fixaci konců hlasivek se přiblížit skutečnému tvaru otevřených hlasivek. Na tuto disertační práci navazuje svou prací [Matug 2015], kde je modelována náhrada lidské hlasivky pomocí plátkového elementu. Rozvijí matematický model interakce a simuluje specifické hlasové projevy jako je generace hlásek šeptem a hlasité mluvení.

Konečně prvkový model hlasivek prezentovaný v [Hrůza 2007] ve svých článcích rozšířil Švancara [Švancara a kol. 2008, Švancara a kol. 2011]. Rozšíření se týkalo geometrie a sítě v oblasti mezi hlasivkového prostoru, a dále úpravy algoritmu pro kontakt hlasivek a změnou v modelu proudění, který byl řízen proudem vzduchu z plic. Simulace hlasivek zaměřena na interakci je pomocí vlastních kódů počítána v práci [Valašek a kol. 2016]. Model je založen na metodě konečných prvků a článek prezentuje vliv okrajových podmínek na vstupu na chování hlasivek.

Nakonec zmíním práci svého školitele [Šidlof a kol. 2013; Šidlof a kol. 2015; Zörner a kol. 2016], ze které vycházím a rozšiřuji jí o nové metody deformace sítě, model turbulence a stlačitelné proudění.

7.2 Popis úlohy

V následujících odstavcích je popsána numerická simulace proudění kolem kmitajících hlasivek pomocí metody konečných objemů, kdy kmitání hlasivek je předepsáno pomocí okrajové podmínky pro pohyb.

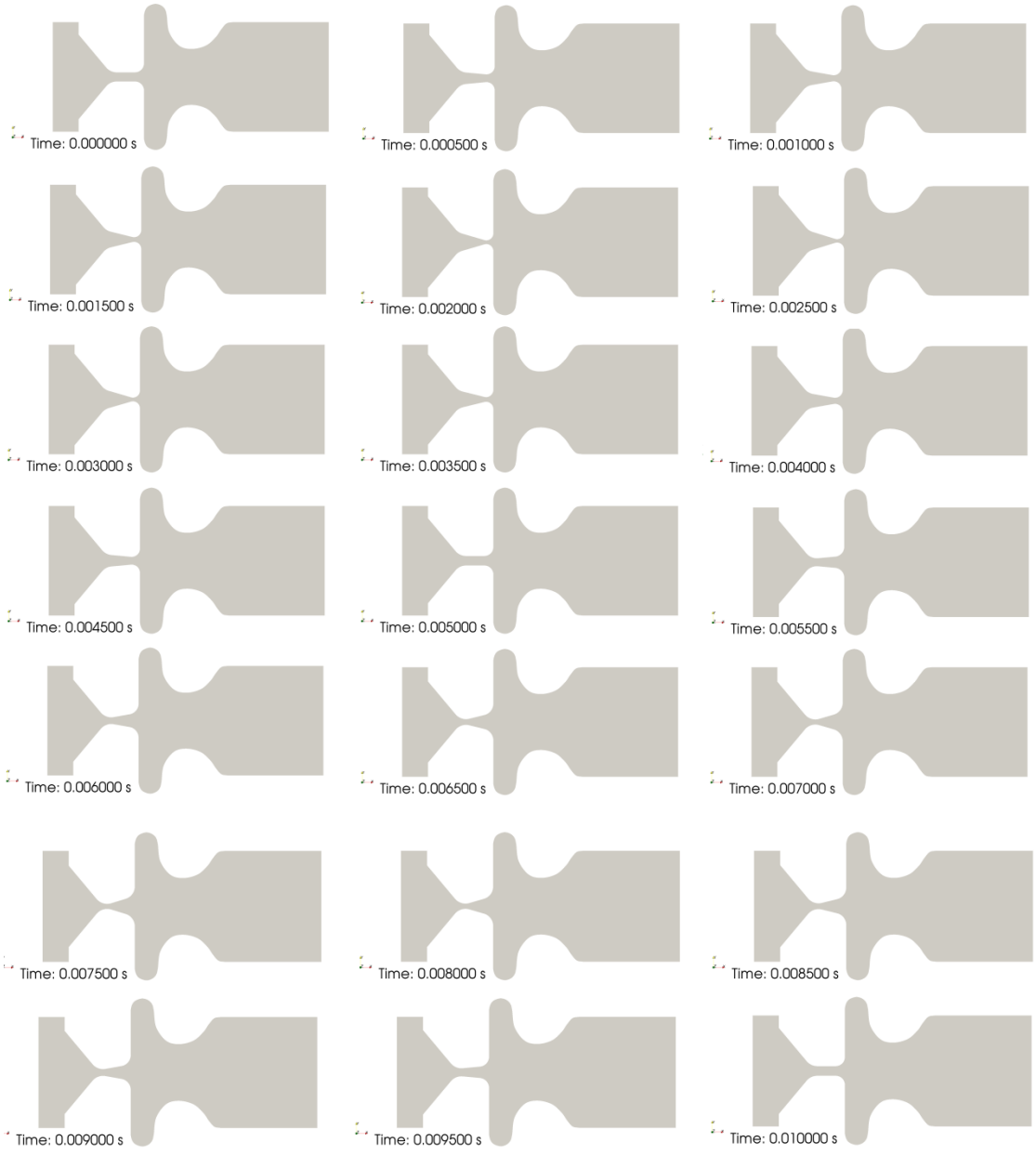
Obr. 47: 2D výpočetní oblast reprezentující zjednodušenou geometrii hlasivkového traktu.

Každý vrchol hlasivky (viz Obr. 47) se pohybuje harmonickým pohybem ve vertikálním směru, fázový posun mezi pohyby je 90° a je popsán rovnicemi:

$$x_1(t) = x_{10} + \mathrm{X}_1 \sin(2\pi f * t) \tag{7.1}$$

$$x_2(t) = x_{20} + \mathrm{X}_2 \sin\left(2\pi f * t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{7.2}$$

Pohyb hlasivek je znázorněn na obrázku Obr. 48, kde je zaznamenán pohyb během jedné periody kmitání. Délka jedné periody je 10 ms, frekvence kmitání je 100 Hz. Tato frekvence odpovídá mluvenému mužskému hlasu.

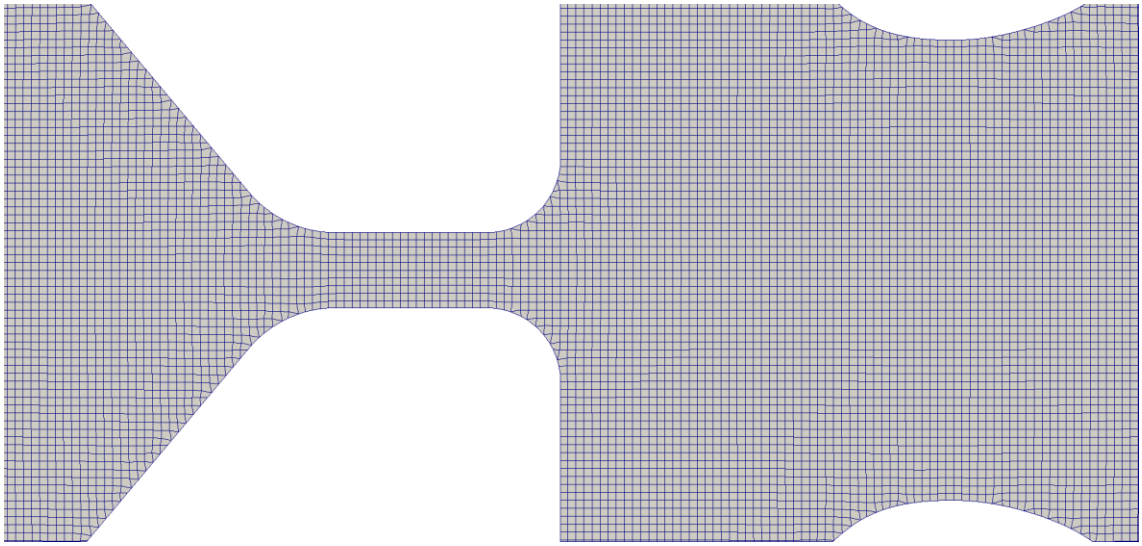


Obr. 48: Pohyb hlasivek během jedné periody kmitání.

Simulace deformace sítě se počítají ve výpočetním balíku OpenFOAM. Výpočetní oblast je zjednodušený model hlasivkového traktu člověka, který je ukázán na obrázku 7.2, kde je vidět 2D oblast. Pro 3D simulace je použita stejná výpočetní oblast, jen je protažena ve směru osy z.

7.3 Porovnání metod deformace sítě

Na obrázku Obr. 49 je vidět nedeformovaná výpočetní síť. Síť je nestrukturovaná a generovaná pomocí nástroje snappyHexMesh. K maximální deformaci dochází v okamžik, když je výchylka jednoho z vrcholů největší. Pro tento případ jsou porovnávány parametry sítě, jak ve 2D simulaci, tak ve 3D výpočtu. Ve všech případech výpočtu deformace je zvolena maximální výchylka vrcholů X_1 = X_2 = 0,38 mm.



Obr. 49: Detail nedeformované sítě.

Tab. 7. 1: Parametry 2D sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace.

	Laplace	SBRStress	MESQUITE	Nedeformovaná síť
Průměrná ortogonalita	2,27	2,23	2,12	0,86
maximální orthogonalita	44,34	45,93	47,01	28,20
poměr stran	47,29	47,1	44,25	37,42
šikmost	1,56	1,47	1,68	0,82

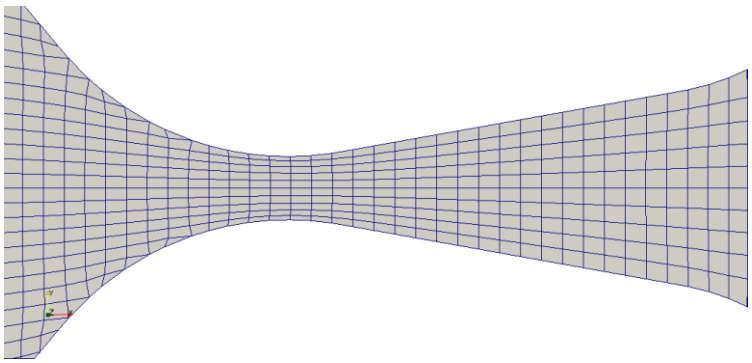
Tab. 7. 2: Parametry 3D sítě pro jednotlivé metody výpočtu deformace.

	Laplace	SBRStress	MESQUITE	Nedeformovaná síť
průměrná ortogonalita	2,35	2,31	2,18	0,86
maximální orthogonalita	47,6	48,64	49,4	28,20
poměr stran	51,3	56,8	46,45	37,42
šikmost	1,63	1,49	1,7	0,82

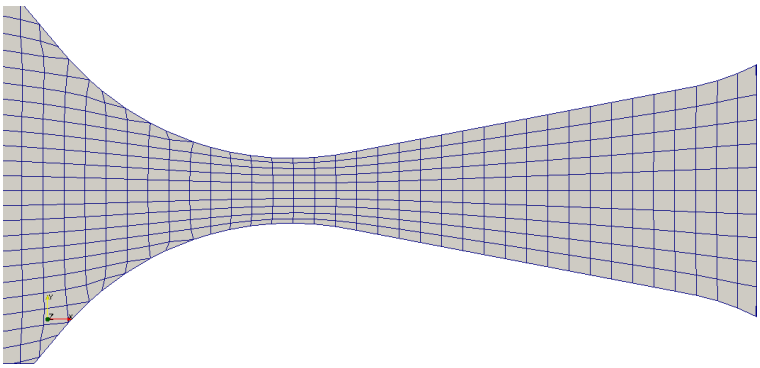
Pro zvolenou velikost posunu vrcholových bodů hlasivky dosáhly všechny metody přibližně stejných výsledků, jak je vidět z obrázků Obr. 50, Obr. 51 a Obr. 52 i tabulek Tab. 7. 1 a Tab. 7. 2. Metody deformace se však výrazně liší v časové náročnosti, která je shrnuta do tabulky Tab. 7. 3. Výpočetní čas je uveden pro 100 časových kroků o délce $\Delta t = 1e^{-6}\ s$. Je zde vidět výrazně vyšší výpočetní náročnost u metody MESQUITE.

Tab. 7. 3: Časová náročnost výpočtu deformace sítě pro 2D a 3D případ.

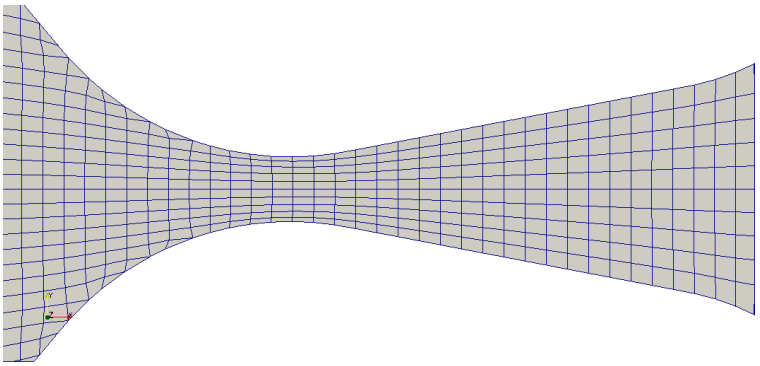
	Laplace	SBRStress	MESQUITE
2D případ 46 000 elementů	96 s	127 s	372 s
3D případ 2 500 000 elementů	157 s	204 s	593 s



Obr. 50: Detail sítě deformované metodou Laplace při maximální deformaci.

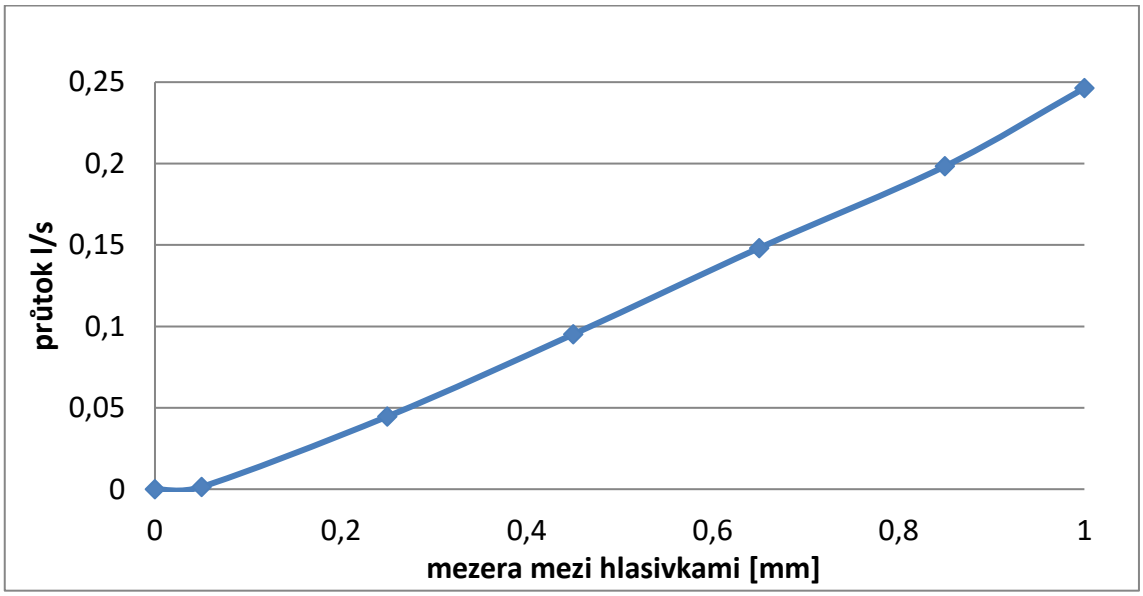


Obr. 51: Detail sítě deformované metodou SBRStress při maximální deformaci.



Obr. 52: Detail sítě deformované sítě metodou MESQUITE při maximální deformaci.

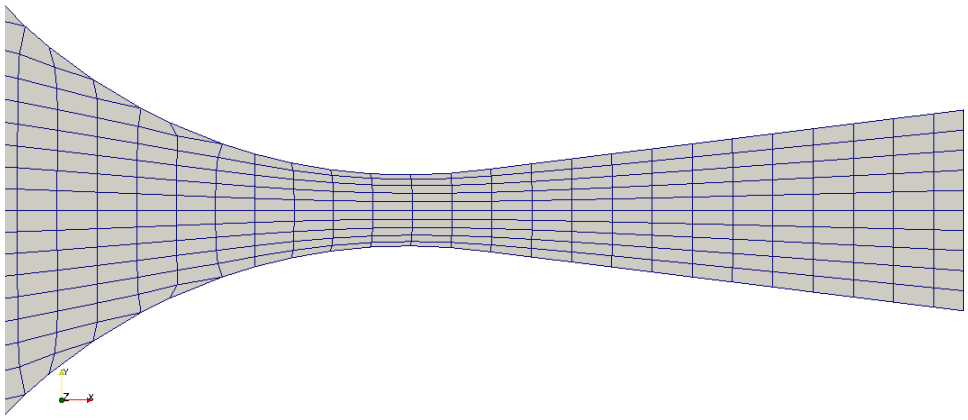
Rozdíl metod je však patrný, pokud chceme danou mezeru mezi hlasivkami zmenšit (zvýšit amplitudu posuvu vrcholů). Důvodem, proč zmenšit mezeru mezi hlasivkami je to, aby bylo dosaženo co nejnižšího průtoku a tím došlo, pokud možno k přerušení toku, stejně jako při kmitání skutečných hlasivek. Závislost průtoku na velikosti mezery je prezentována na obrázku Obr. 53, byla spočítaná na statické síti. Síť pro tyto účely nebyla deformována, ale generována s proměnou vzdáleností hlasivek. Hodnoty průtoku jsou počítány pro nestlačitelné vazké proudění na 3D síti při konstantním tlakovém spádu.



Obr. 53: Průtok v závislosti na velikosti mezery mezi hlasivkami při tlakovém spádu 300 Pa.

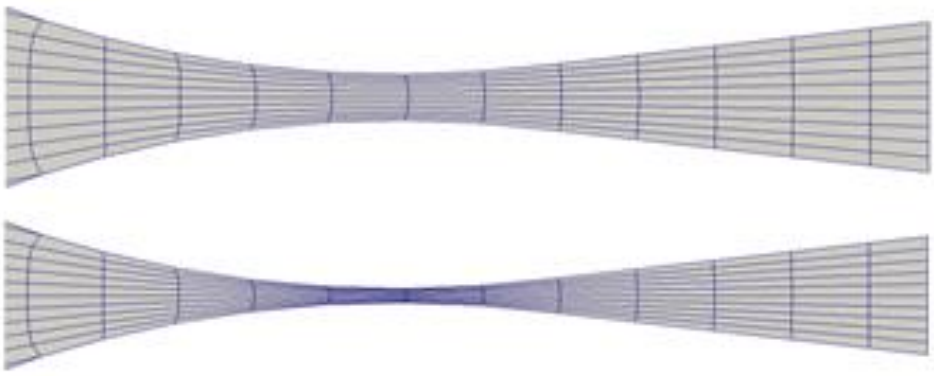
Při nastavení výchylek vrcholů hlasivek X_1= 0,38 mm a X_2 = 0,38 mm pouze pro účely výpočtu deformace sítě bez proudění bylo dosaženo nejmenší tloušťky mezery mezi hlasivkami Δx = 0,4 mm. To je mez, kdy jsou všechny metody stabilní. Při tloušťkách menších než Δx = 0,4 mm dochází velice rychle ke kolapsu Laplaceovy metody. Pomocí metody SBRstress je možné

se dostat na hodnotu Δx = 0,3 mm. Nejmenší mezery lze pak dosáhnout využitím metody MESQUITE, a to tloušťky Δx = 0,2 mm zobrazené na obrázku Obr. 54.



Obr. 54: Detail sítě doformované sítě metodou MESQUITE při minimální mezeře tloušťky Δx = 0,2 mm.

Nakonec byla otestována ještě metoda Pseudo-Solid, se kterou se podařilo dosáhnout ještě výraznějšího zmenšení mezery, a to do konce až na tloušťku $\boldsymbol{\Delta x}$ = 0,02 mm (Obr. 7.10). Tato metoda však kromě velké výpočetní náročnosti přináší problém s implementací pohybu se dvěma stupni volnosti, diskutovaný už v případě leteckého profilu. Takto implementovaná podmínka nefunguje správně.



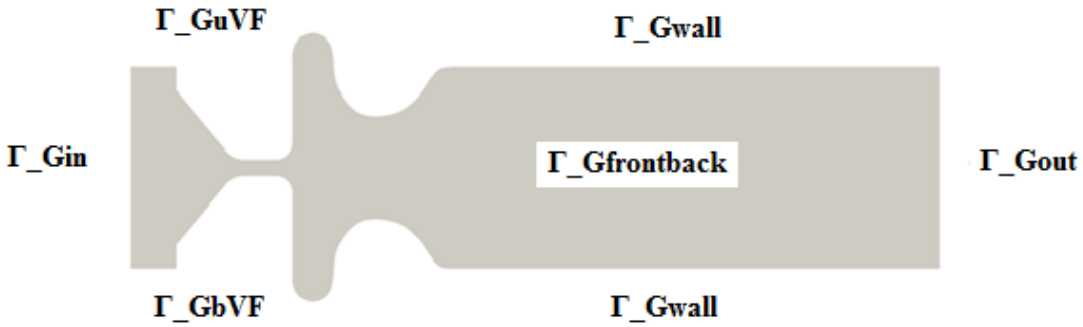
Obr. 55: Detail sítě doformované metodou Pseudo-Solid při minimální mezeře tloušťky Δx = 0,1 mm horní obrázek a Δx = 0,02 mm (dolní obrázek).

7.4 Výpočet proudění vzduchu přes oscilující hlasivky

7.4.1 Okrajové podmínky pro nestlačitelné proudění

Po dořešení problematiky deformace sítě byly provedeny výpočty proudění na dynamických sítích skrz hlasivkovou štěrbinu a získán průběh průtoku vzduchu hlasivkovou štěrbinou v závislosti na čase. Při všech výpočtech proudění byl použit řešič deformace sítí SBRstress. Pohyb hlasivek byl předepsán s amplitudou zdvihu vrcholů hlasivky X_1= 0,38 mm a X_2 = 0,38 mm (viz rovnice (7.1) a (7.2)). První série obsahovala výpočty s nestlačitelným modelem tekutiny dle rovnic (2.12) a (2.13). Byla zvolena varianta bez modelu turbulence a s modelem turbulence k-ω-SST nebo k-ε, které jsou popsány v kapitole 2.5.1 a kapitole 2.5.2.

Síť použitá pro výpočty proudění zůstala stejná, jako pro výpočet deformace sítě. Nejprve jsou předepsány okrajové podmínky pro pohyb vrcholů hlasivek, kdy na plochy hlasivek byl předepsán pohyb pomocí rovnic (7.1) a (7.2), který se přepočetl na rychlost v každém kroku výpočtu. Proudové pole je řízeno tlakovým spádem Δp = 300 Pa mezi vstupem Γ_Gin a výstupem Γ_$Gout$. Geometrie výpočetní oblasti s popsanými hranicemi je na obrázku Obr. 56.



Obr. 56: Názvy a rozložení hranic na výpočetní oblasti zjednodušeného modelu lidského hrtanu.

Okrajové podmínky pro rychlost a tlak na jednotlivých hranicích jsou shrnuty do tabulky Tab. 7. 4. Na vstupu **Γ_*Gin*** je předepsán totální tlak, který je definován vztahem

$$p_{static} = p_{total} - \frac{1}{2}\frac{\phi}{S}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\,, \tag{7.3}$$

kde ϕ je objemový tok vzduchu $[kg/m^3]$, $\boldsymbol{u}$ $[m/s]$ je střední rychlost proudícího vzduchu a S je plocha vstupní oblasti. Na výstupu je definován tlak p = 100000 $\frac{m^2}{s^2}$. Na ostatních hranicích je předepsána nulový tok přes hranici.

Rychlost na vstupu Γ_Gin se dopočítává z hmotnostního toku:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}\,\frac{\phi}{S}. \tag{7.4}$$

Na hranicích pro dolní hlasivku Γ_GbVF je předepsána rychlost $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GbVF}$ a na horní hlasivku Γ_GuVF je rychlost $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GuVF}$.

Tab. 7. 4: Okrajové podmínky pro rychlost a tlak.

hranice	**rychlost $\boldsymbol{u}$**	**tlak $\boldsymbol{p}$**
Γ_Gin	pressureDirectedInletVelocity	p_{total} = 10257 $\frac{m^2}{s^2}$
Γ_Gout	$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	p = 100000 $\frac{m^2}{s^2}$
Γ_GbVF	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GbVF}$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_GuVF	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GuVF}$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$
Γ_G_frontback	$\boldsymbol{u}$ = 0 m/s (2D: empty)	∂p / ∂n = 0 (2D: empty)
Γ_Gwall	$\boldsymbol{u}$ = 0 m/s	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$

Dalším krokem jsou okrajové podmínky pro turbulentní veličiny jednotlivých turbulentních modelů. Stanovení hodnot turbulentní kinetické energie k na vstupu Γ_Gin je popsáno rovnicí (6.3), specifická disipace ω vztahem (6.4). Intenzita turbulence byla zvolena I = 2,5 %.

Disipace ε je vypočtena pomocí vztahu:

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}, \tag{7.5}$$

kde konstanta $C_\mu = 0{,}09$ a L je délkové měřítko turbulence. Pro tento případ bylo zvoleno $L = 0{,}05\,d$, kde d je velikost štěrbiny při maximálním zavření hlasivky.

Přehled nastavení konkrétních hodnot turbulentních veličin pro simulace je uveden v tabulkách Tab. 7. 5 a Tab. 7. 6. Tyto podmínky byly stejné u 2D i 3D simulace pro model nestlačitelného prodění.

Tab. 7. 5: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro nestlačitelný k-ω-SST model turbulence.

hranice	**turbulentní kinetická energie k**	**Specifická disipace ω**	**Turbulentní viskozita ν_t**
Γ_Gin	k = 5e-5 m^2/s^2	ω= 200 $1/s$	calculated
Γ_Out	k = 5e-5 m^2/s^2	ω= 200 $1/s$	calculated
Γ_GbVF	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction
Γ_GuVF	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction
Γ_Gfrontback	kqRWallFunction (2D: empty)	omegaWallFunction (2D: empty)	nutkWallFunction (2D: empty)
Γ_Gwall	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction

Vztahy pro turbulentní veličiny k-omega modelu jsou uvedeny v předchozí kapitole a to rovnicemi (6.8) – (6.10). Jediným nedefinovaným vztahem tak zůstává popis stěnové funkce

$$epsilonWallFunction = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa y}, \qquad (7.6)$$

kde $\kappa = 0{,}41$ a y určuje vzdálenost od stěny.

Tab. 7. 6: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro nestlačitelný k-ε model turbulence.

hranice	**turbulentní kinetická energie k**	**Specifická disipace ε**	**Turbulentní viskozita ν_t**
Γ_Gin	k = 5e-5 m^2/s^2	ε = 0,028 m^2/s^3	calculated
Γ_Out	k = 5e-5 m^2/s^2	ε = 0,028 m^2/s^3	calculated
Γ_GbVF	kqRWallFunction	epsilonWallFunction	nutkWallFunction
Γ_GuVF	kqRWallFunction	epsilonWallFunction	nutkWallFunction
Γ_Gfrontback	kqRWallFunction /empty	epsilonWallFunction /empty	nutkWallFunction /empty
Γ_Gwall	kqRWallFunction	epsilonWallFunction	nutkWallFunction

7.4.2 Okrajové podmínky pro stlačitelné proudění

Pro stlačitelný model je oproti nestlačitelnému modelu přidána okrajová podmínka pro teplotu. Teplota je definována na vstupu Γ_Gin a její hodnota je T = 30 °C, na zbytku hranic je nulový tok

přes hranici ve směru normály. Tlak pro stlačitelné proudění se zadává jako dynamický (v Pascalech), konkrétně p = 116500 Pa při teplotě 30°C. Změna nastane i u výpočtu rychlosti, který je definován následujícím vztahem:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}\frac{\Phi}{\rho S}\,, \tag{7.7}$$

kde Φ je tok v kg/s, $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor a S je plocha v m^2. Hodnoty veličin a stěnové funkce popisující okrajové podmínky pro jednotlivé hranice jsou uvedeny v tabulkách Tab. 7. 7 – Tab. 7. 9.

Tab. 7. 7: Okrajové podmínky pro rychlost, tlak a teplotu pro výpočet stlačitelného proudění.

hranice	**rychlost ($\boldsymbol{u}$)**	**tlak ($\boldsymbol{p}$)**	**teplota ($\boldsymbol{T}$)**
Γ_Gin	pressureDirectedInletVelocity	totalPressure	T = 303 K
Γ_Out	$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	p = 116500 Pa	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$
Γ_GbVF	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GuVF}$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$
Γ_GuVF	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{GuVF}$	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$
Γ_Gfrontback	$\boldsymbol{u}$ = 0 m/s (2D: empty)	∂p / ∂**n** = 0 (2D: empty)	∂T / ∂**n** = 0 (2D: empty)
Γ_Gwall	$\boldsymbol{u}$ = 0 m/s	$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$

Vztahy pro popis ostatních veličin již byly uvedeny v předešlé kapitole věnované proudění okolo leteckého profilu. Okrajová podmínka *compressible::kqRWallFunction* je popsána rovnicí (6.8), *compressible::omegaWallFunction* v (6.9), mutkWallFunction vztahem (6.13) a nakonec *compressible::alphatWallFunction* vztahem (6.14). Výjimku tvoři definice pro disipaci, která je totožná jako pro nestlačitelné proudění (7.5).

Tab. 7. 8: Okrajové podmínky pro kinetickou energii a specifickou disipaci pro výpočet stlačitelného proudění.

hranice	**turbulentní kinetická energie** k	**Specifická disipace** ω
Γ_Gin	k = 5e-5 m^2/s^2	ω= 200 $1/s$
Γ_Out	k = 5e-5 m^2/s^2	ω= 200 $1/s$
Γ_GbVF	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction
Γ_GuVF	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction
Γ_Gfrontback	compressible::kqRWallFunction (2D: empty)	compressible::omegaWallFunction (2D: empty)
Γ_Gwall	compressible::kqRWallFunction	compressible::omegaWallFunction

Tab. 7. 9: Okrajové podmínky pro turbulentní dynamickou viskozitu a turbulentní tepelnou vodivost pro výpočet stlačitelného proudění.

hranice	**Turbulentní dynamická viskozita** η_t	**Turbulentní tepelná vodivost** α_t	**Disipace** ε
Γ_Gin	calculated	calculated	ε = 0,028 m^2/s^3
Γ_Out	calculated	calculated	ε = 0,028 m^2/s^3
Γ_GbVF	mutkWallFunction	compressible:: alphatWallFunction	compressible:: epsilonWallFunction
Γ_GuVF	mutkWallFunction	compressible:: alphatWallFunction	compressible:: epsilonWallFunction
Γ_Gfrontback	mutkWallFunction (2D: empty)	compressible:: alphatWallFunction (2D: empty)	compressible:: epsilonWallFunction (2D: empty)
Γ_Gwall	mutkWallFunction	compressible:: alphatWallFunction	compressible:: epsilonWallFunction

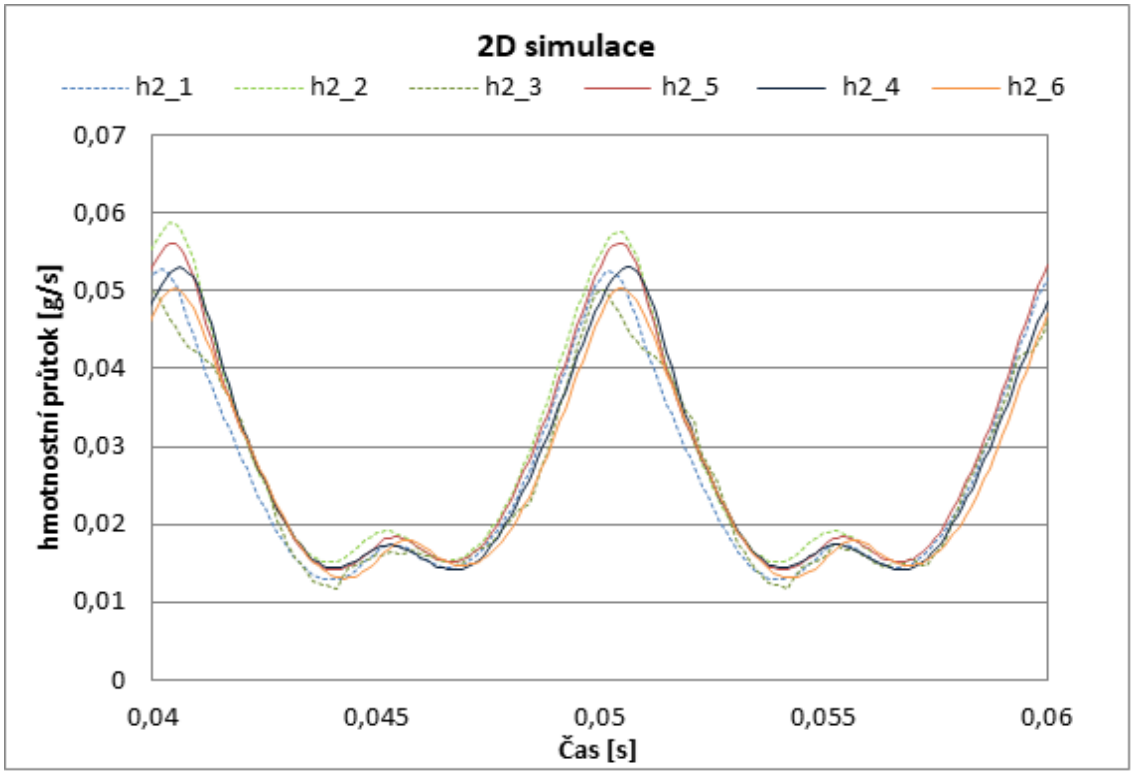
7.4.3 Výsledky simulací průtoku přes hlasivkovou štěrbinu

Bylo realizováno 12 2D a 3D numerických simulací s různým nastavením modelu turbulence a stlačitelnosti. Konfigurace jednotlivých případů, označených h2_1 až h3_6, jsou uvedeny v tabulce Tab. 7. 10.

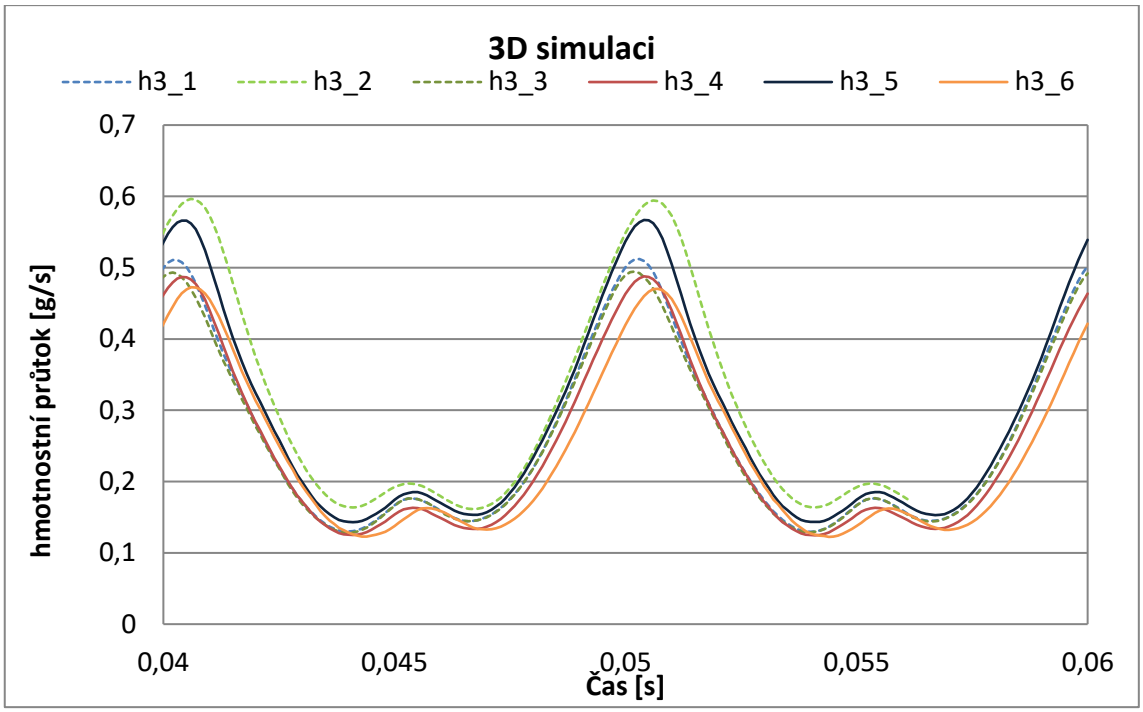
Tab. 7. 10: Popis konfigurace nastavení modelu turbulence a proudění pro jednotlivé simulace.

2D simulace			3D simulace		
případ	model proudění	model turbulence	případ	model proudění	model turbulence
h2_1	stlačitelné	laminární	h3_1	stlačitelné	laminární
h2_2	stlačitelné	k-epsilon	h3_2	stlačitelné	k-epsilon
h2_3	stlačitelné	k-omega SST	h3_3	stlačitelné	SST k-omega
h2_4	nestlačitelné	laminární	h3_4	nestlačitelné	laminární
h2_5	nestlačitelné	k-epsilon	h3_5	nestlačitelné	k-epsilon
h2_6	nestlačitelné	k-omega SST	h3_6	nestlačitelné	SST k-omega

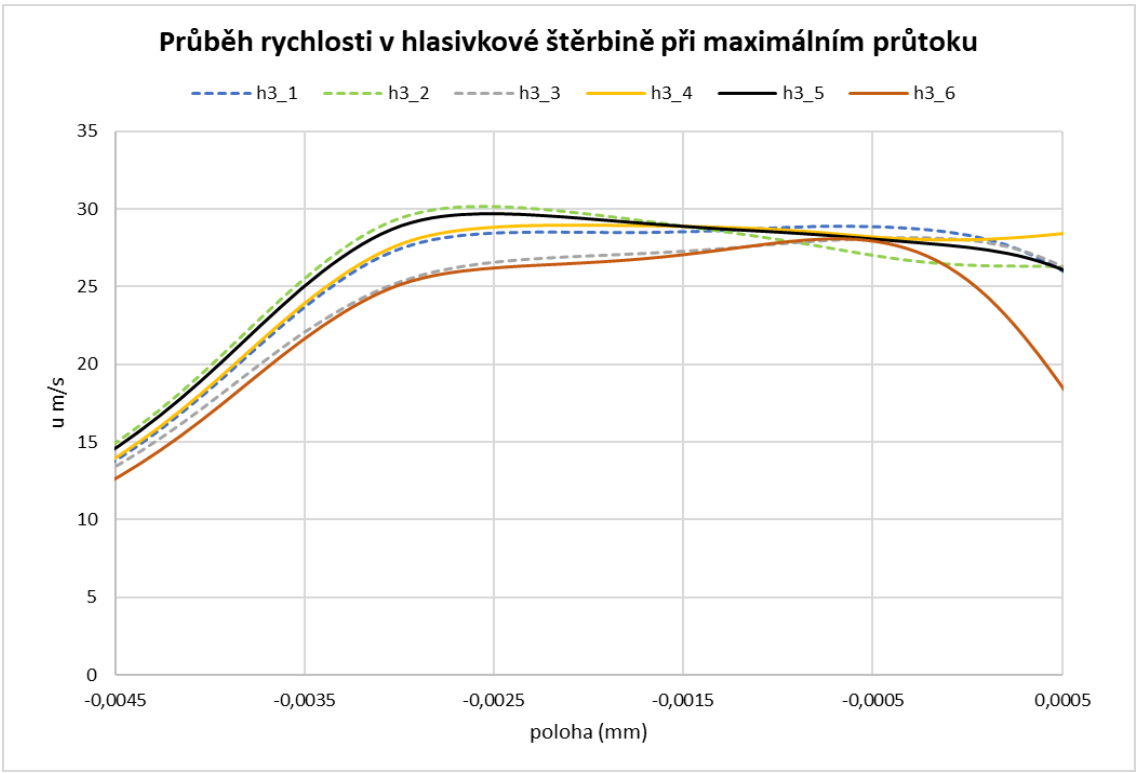
Jako první se vyhodnotil průtok v hlasivkovém kanálu, při konstantním tlakovém spádu 257 Pa. Je vyhodnocen vliv použitého modelu turbulence a stlačitelné a nestlačitelné tekutiny znázorněný na obrázcích Obr. 57 a Obr. 58. Na průtok hlasivkovým kanálem mám velký vliv model turbulence. K největšímu průtoku dochází u turbulentních modelů k-ε. Tento jev by se dal vysvětlit tím, že u tohoto modelu dochází k nejmenšímu vzniku vírových struktur v oblasti za hlasivkami. Nedochází ke zpětnému toku masy vzduchu a proud skrze štěrbinu není, tak zpomalován. Nejmenší průtok skrz hlasivkovou štěrbinu docházelo při požití modelu turbulence k-ω SST. V porovnání s laminárním modelem je zde vyšší vazkosti vlivem turbulentní vazkosti, která zpomaluje proudění ve štěrbině.



Obr. 57: Průběh hmotnostního toku přes hlasivkovou štěrbinu pro 2D simulaci

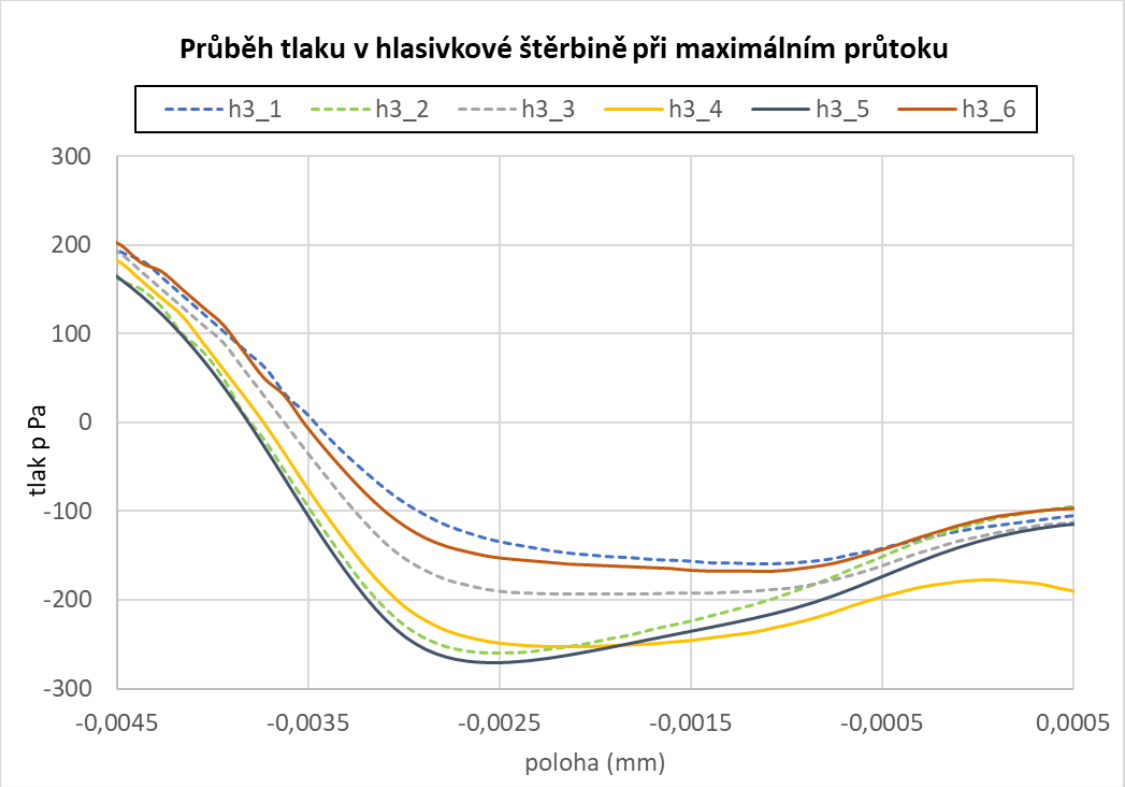


Obr. 58: Průběh hmotnostního toku přes hlasivkovou štěrbinu pro 3D simulaci.



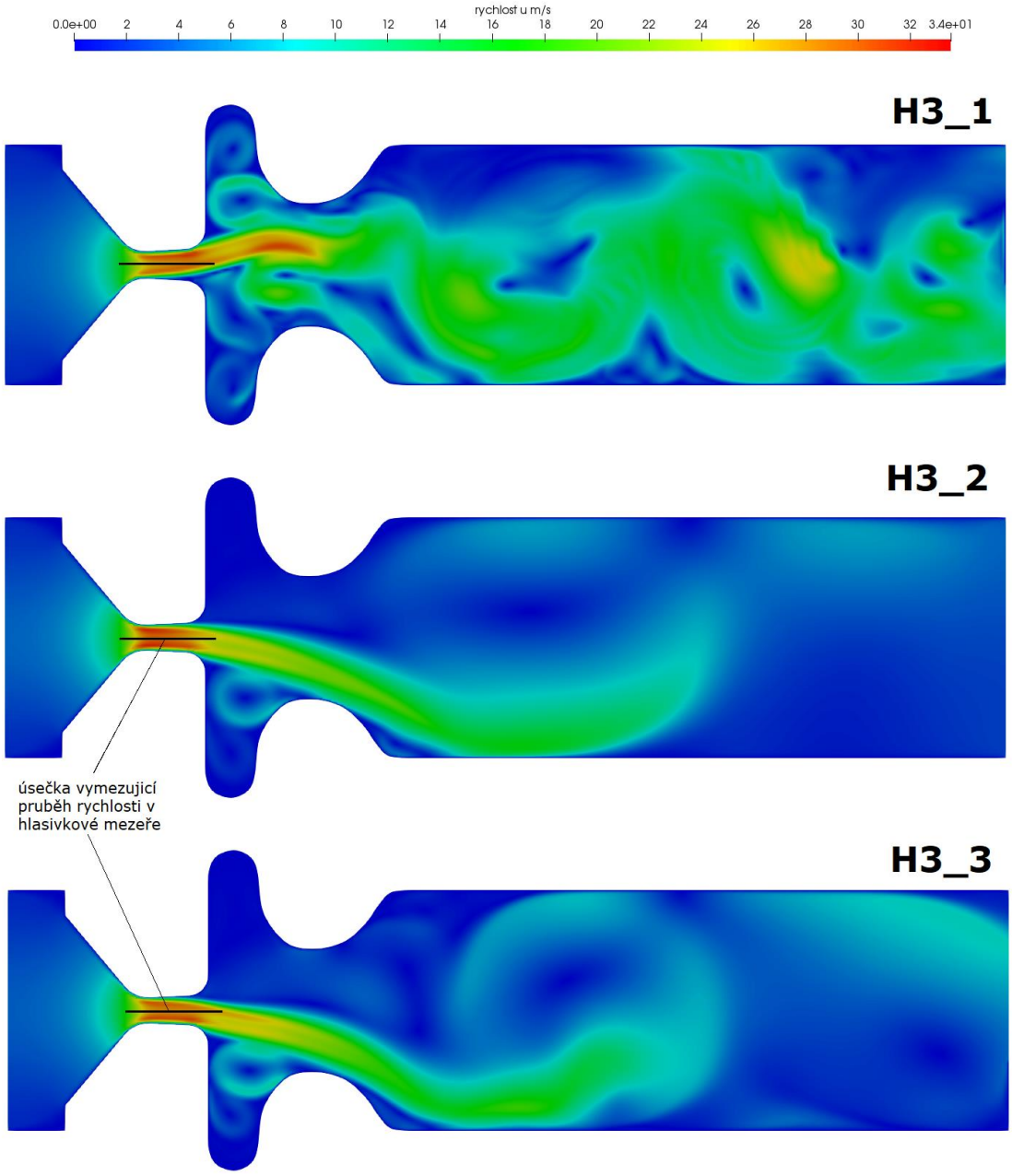
Obr. 59: Průběh rychlosti v hlasivkové mezeře - 3D simulace.

Nejvýznamnější vliv na celkový průtok hlasivkovým kanálem má štěrbina mezi hlasivkami. V tomto místě dochází k velkému zaškrcení a tím i k velkému nárustu gradientu rychlosti. Pro lepší názornost chování proudění v hlasivkové štěrbině byly do grafů vyneseny průběhy rychlosti (Obr. 59) a tlaku (Obr. 60). Výsledky průběhu rychlosti ukazují, že nejmenší rychlosti proudění je dosaženo u modelu turbulence k-ω SST.

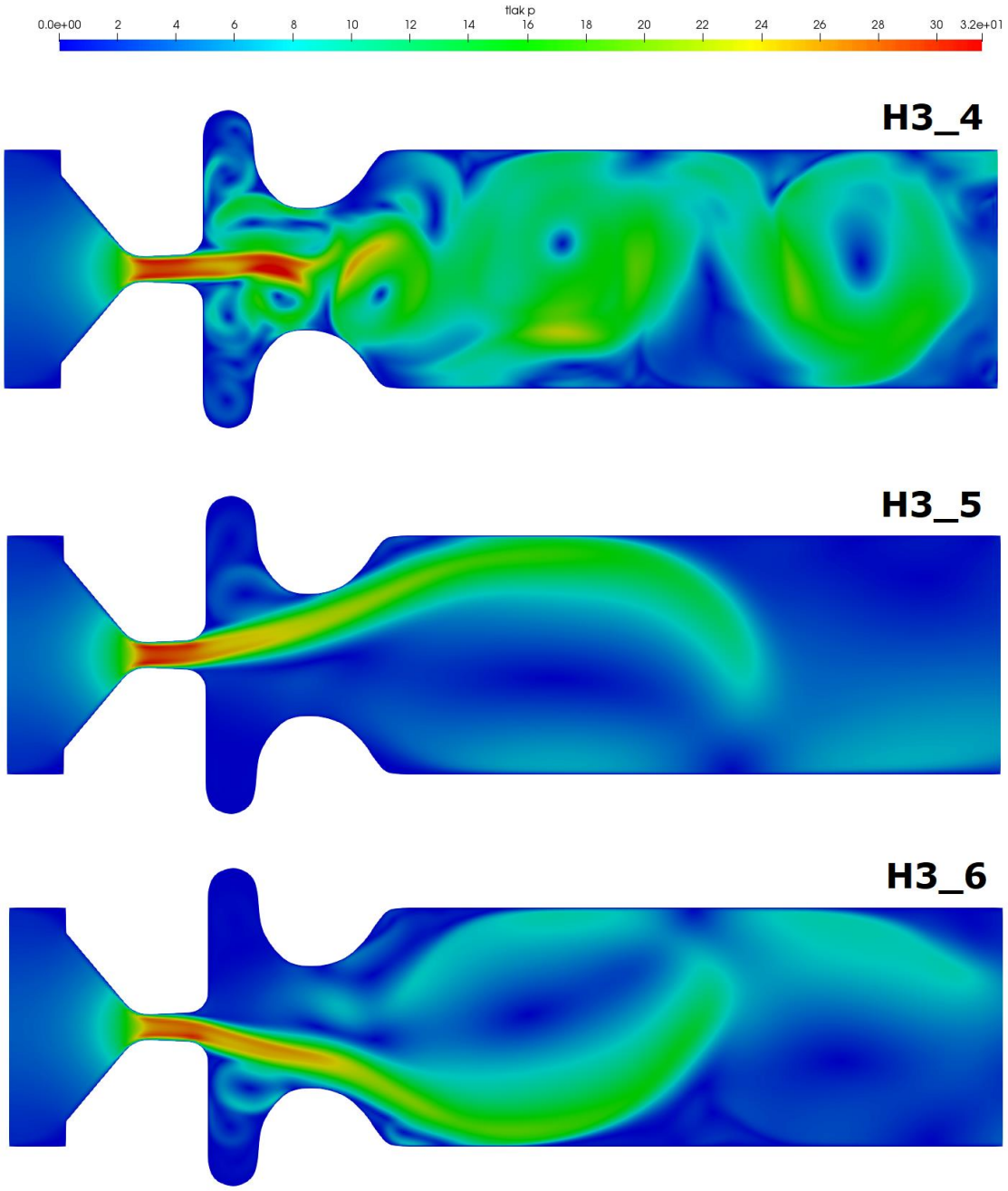


Obr. 60: Průběh tlaku v hlasivkové mezeře – 3D simulace.

Na následujících obrázcích Obr. 61 a Obr. 62 je vyobrazeno proudové pole při maximálním průtoku hlasivkovým kanálem. Tento bod byl vybrán záměrně, jelikož je z de dosaženo největších rozdílů mezi modely turbulence a modelu tekutiny. Nejznatelnější rozdíl v chování proudového pole je vidět za hlasivkovou štěrbinou. Vlivem jetu, který se střídavě přimyká k horní a dolní hlasivce vznikají vírové struktury. U případu bez modelu turbulence nejsou tyto vírové struktury utlumeny turbulentní vazkostí. K největšímu útlumu vírů dochází při použití modelu turbulence k-ε. Tento efekt by chtělo ještě dále ověřit požitím jemnější sítě, jelikož na šířku hlasivkového kanálu je 10 elementů. To sebou, ale přináší problém s deformací sítě při maximálním přiblížení hlasivek.



Obr. 61: Průběh rychlosti v hlasivkovém kanálu pro 3D simulaci stlačitelného proudění



Obr. 62: Průběh rychlosti v hlasivkovém kanálu pro 3D simulaci nestlačitelného proudění.

8 Simulace výměna náplně válce spalovacího motoru

8.1 Úvod do problematiky modelování výměny náplně válce

Poslední úlohou, zaměřenou na výpočty proudění na pohyblivých sítích, je simulace výměny náplně válce u čtyřdobého zážehového motoru. Tato problematika je řešena ve spolupráci se ŠKODA AUTO a. s. U tohoto motoru dochází k přípravě směsi paliva a vzduchu mimo spalovací prostor. Ke vstřikování paliva dochází v jednotlivých sacích kanálech, proto má tento motor označení MPI (Multi-Point Injection). V literatuře se také využívá označení PFI (Port Fuel Injection).

Spalovací motory pracují ve velkém spektru otáček a zatížení. Pro všechny tyto pracovní body je potřeba docílit co nejefektivnější přeměny energie uloženou v palivu na mechanickou energii. Proto je velice důležité, aby směs paliva a vzduchu byla dobře připravena. To znamená dostat dovnitř spalovacího prostoru co nejvíce vzduchu a zároveň zajistit co nejrovnoměrnější rozložení par paliva, aby docházelo k jeho dokonalému spálení. Příprava směsi je ovlivněna proudovým polem, které se vytvoří ve válci motorů během fáze sání a komprese. Aby bylo možné posoudit, zda je směs dobře připravena, jsou hodnoceny základní parametry proudového pole uvnitř motoru.

Prvním parametrem je Tumble number, který určuje, jak se otáčí náplň uvnitř válce ve směru kolmém na osu válce (Obr. 62). Rychlost otáčení náplně válce je počítána pomocí momentu hybnosti k ose y. Oblast, ze které se stanovuje moment hybnosti, se během výpočtu posouvá v závislosti na zdvihu pístu. Vztah pro výpočet úhlové rychlosti otáčení náplně válce kolem osy y je:

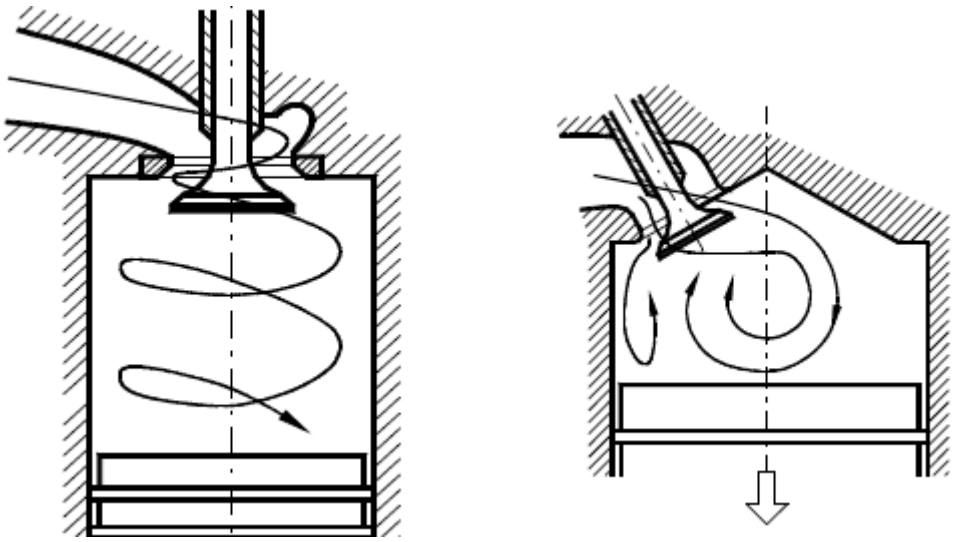
$$\omega_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i[(z_i - z_0)u_i - (x_i - x_0)w_i]}{\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(z_i - z_0)^2 + (x_i - x_0)^2]}, \tag{8.1}$$

kde x_0 a z_0 jsou souřadné body osy otáčení, m_i je hmotnost tekutiny v elementu, n je počet elementů v oblasti, ze které je počítán moment hybnosti. Dále x_i a z_i jsou souřadnice středů elementů a u_i a w_i jsou složky rychlosti ve směru osy x a z. Tumble number se pak určí jako poměr otáček náplně válce a otáček motoru:

$$TN_y = \frac{\omega_y}{2\pi N}. \tag{8.2}$$

Hodnota Tumble number je velmi ovlivněna tvarem sacího kanálu a polohou ventilu. Tumbleového proudění se využívá u zážehového motoru se spalovacím prostorem v hlavě válců,

což jsou všechny počítané příklady. Tumble pomáhá k lepšímu rozložení směsi a hoření, proto je jeho vysoká hodnota žádoucí i v době před zapálením směsi.



Obr. 62: Proudění typu swirl vlevo a proudění typu tumble vpravo. [Scholz 2018]

Turbulentní kinetická energie je parametr, který určuje, jak velká je turbulentní složka rychlosti v náplni válce. Turbulentní fluktuace pomáhají lepšímu rozložení paliva ve válci před zážehem a zvyšují rychlost prohořívání směsi paliva vzduchu. Tato veličina je počítána rovnicí (8.7), která je dána použitím konkrétního modelu turbulence. Výsledná hodnota uváděná v grafech je pak integrální hodnotou z celého objemu válce pro daný úhel natočení klikového hřídele.

Dalším parametrem, který se vyhodnocuje u motorů, je Swirl number. Opět udává poměr mezi otáčením náplně válce a otáčkami motoru. Swirlové neboli tečné proudění je proudění kolem osy válce. Využívá se u spalovacích motorů se spalovacím prostorem uvnitř válce (spalovací prostor není v hlavě válců). V simulacích, které jsou zde počítány, je hodnota Swirlu velmi malá a osciluje kolem nuly, jelikož sací kanál je symetrický a potlačuje tečně proudění. Ve výsledcích proto není uveden.

Pro určení kvality sacích kanálů slouží i objemová účinnost. Tato veličina určuje, jak efektivní je fáze sání. Vzorec pro výpočet je následující

$$\eta_{Volume} = \frac{m_{Air}}{V\rho}, \tag{8.3}$$

Kde V je zdvihový objem válce motoru, m_{Air} je hmotnost nasátého vzduchu a ρ hustota vzduchu za atmosférických podmínek při měření. Hodnota hustoty použitá pro vyhodnocení objemové účinnosti v této práci je $\rho = 1.183\ kg/m^3$

Proudění v motoru je v dnešní době v automobilovém průmyslu odvětví, kterému se věnuje velká pozornost. Je zde snaha část měření nahradit výpočty z důvodu rychlejšího získání výsledků a snížení nákladů na výrobu prototypů. S měřením rychlostního pole ve válci spalovacího motoru se můžeme setkat v disertační práci [Hatschbach 1995]. Další prací zaměřující se na experimentální měření proudových polí uvnitř válce spalovacích motorů je [Stone 1992], měření je zde prováděno anemometrem se žhaveným drátkem a laserovou dopplerovskou anemometrii. S použitím metody PIV (Particle Image Velocimetry) pro měření proudových polích během fáze sání se setkáme v [Buschbeck 2012], kde byl měřen vliv turbulence proudění na mezicyklovou variabilitu rozložení směsi před zápalem.

Jednou z prvních prací, kde se můžeme setkat s numerickými výpočty, je [Grosman a kol. 1984]. Metoda konečných prvků pro výpočty sání a komprese spalovacího motoru byla použita v práci [Mao a kol. 1994]. Ve velké části případů výpočtů proudového pole uvnitř spalovacího motoru se využívá metody konečných objemů. Se simulacemi zaměřenými na sledování vlivu tvaru a polohy sacího potrubí a kanálu na proudění uvnitř válce se můžeme setkat v [Falfari a kol. 2014]. Autor porovnává vliv natočení sacího kanálu o 6°, aby vstupní proud směřoval více na výfukovou stranu malého motoru, a porovnává vliv hodnoty Tumble number při saní a kompresi. V [Falfari a kol. 2012] autoři realizovali simulace za účelem vyhodnocení několika geometrických parametrů sacího potrubí na Tumble number během saní a komprese. Další práce věnovaná vlivu sacích kanálů na turbulentní kinetickou energii a další parametry u dieselového motoru je [Saad a kol. 2013]. Do sacího potrubí je vložen prvek s různou délkou lopatek, který způsobuje roztočení proudění v tečném směru k ose sacího potrubí.

Vliv na průběh turbulentní kinetické energie a Tumble number má i tvar koruny pístu. Práci s touto tematikou lze najít v [Falfari a kol 2012], kde se autor věnuje tvaru spalovacího prostoru v pístu a jeho vliv na Tumble number ve válci u motoru s malým vrtáním a velkým zdvihem. Vliv tvar pístu na proudění je zkoumám v [Yin a kol. 2016]. Jedná se o rozsáhlou studii chování proudění uvnitř válce a procesu hoření v závislosti na úpravě sacího kanálů. Kanál je vybaven clonkou směrující vstupní proud tak, aby vytvářel Tumbleové proudění. Dále se zde ověřují čtyři vrchní plochy pístu a jejich vliv na turbulentní kinetickou energii a Tumble number. Porovnávání vlivu čtyř variant pístů na turbulentní kinetickou energii na konci sání se věnuje práce [Mallikarjuna a kol. 2013].

I v této dizertační práci je využita metoda konečných objemů pro výpočty proudění ve válci spalovacího motoru. Pro simulace je využit software Vectis od společnosti Ricardo. Vectis umožňuje simulace kompletního cyklu spalovacího motoru včetně vstřikování, odpařovaní paliva, interakce vstřikovaného paliva se stěnou, hoření a dalších dějů. V programu jsou implementovány rovnice popisující všechny tyto děje. Do dizertační práce jsou zařazeny pouze rovnice přímo související s výměnou náplně válce. Jsou vybrány rovnice popisující stlačitelné vazké turbulentní proudění. Jejich tvar je v některých případech odlišný od předešlé části, kde se

simulace počítaly ve výpočetním balíku OpenFOAM. Jsou totiž optimalizovány pro výpočty spalovacích motorů. Proto jsou již dříve použité rovnice uvedeny v této kapitole znovu, ale ve tvaru, v kterém jsou použity v programu Vectis.

8.2 Matematický model proudění ve válci motoru

Ve Vectisu [Vectis 2016] je implementována rovnice kontinuity v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = S_d^m \,, \tag{8.4}$$

kde u_i je složka vektor rychlosti, ρ je hustota a člen S_d^m vyjadřuje příspěvek odpařeného paliva. Pohybové rovnice popisující turbulentní proudění ve válci pak jsou popsány následovně

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \rho u_i) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu_L + \mu_t)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] - \frac{\partial (p + \rho k)}{\partial x_i} + F_i + S_D^U, \tag{8.5}$$

kde μ_L je molekulární dynamická viskozita a μ_t je turbulentní viskozita, člen F_i reprezentuje objemové síly, jako je vztlaková síla $F_i = -\rho g_i$, k je turbulentní kinetická energie a nakonec S_D^U je zdroj hybnosti od kapalné fáze. Další implementovanou rovnicí je energetická rovnice

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(H \rho u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\mu_L}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial p}{\partial t} + S_D^U + q_W + q_{rad}, \tag{8.6}$$

kde H je absolutní entalpie, q_W je tepelný tok stěnou, q_{rad} je energie dodaná radiací, S_D^U je energie dodána kapalnou fází a dále konstanty $\mathrm{Pr} = 0{,}75$ Prandtlovo číslo a $Pr_t = 0{,}85$ je turbulentní Prandtlovo číslo. Pro turbulentní proudění je pro uzavření soustavy rovnic potřeba přidat rovnice modelující turbulentní člen. Je využit model turbulence založený na Boussinesqově hypotéze, konkrétně k-ε model. Ve Vectisu je implementován k-ε model turbulence dle [Han a Reitz 1994], turbulentní viskozita je popsána rovnicí (2.16). Ta je definována turbulentní kinetickou energie a disipací. Transportní rovnice pro k a ε jsou v programu Vectis v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu_L + \frac{\mu_t}{\alpha_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] = G - \varrho\varepsilon, \tag{8.7}$$

, kde člen G reprezentuje zdroj turbulentní energie

$$G = -\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu_L + \frac{\mu_t}{\alpha_\epsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right] = C_1 G \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \varrho \frac{\varepsilon^2}{k} - C_3 \varrho \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \qquad (8.9)$$

$$\alpha_k = 1 \ ; \ \alpha_\epsilon = 1.22 \ ; \ C_1 = 1.44 \ ; \ C_2 = 1.92 \ ; \ C_3 = 0.373$$

Takto definovaný k-ε model turbulence nedokáže dostatečně správně postihnout chování proudění s odtržením. U motorů přitom dochází na hranách sedlových ventilů k masivnímu odtrhávaní proudění. Tento děj nastává, jak během nasávání směsi do válce, tak během otevírání výfukového ventilu, kdy expandovaný plyn proudí vysokou rychlostí ven z válce spalovacího prostoru. Standartní model je tedy upraven dle [Durbin 1996; Durbin 2009] tak, aby nedocházelo k velkému nárůstu turbulentní kinetické energie v oblasti stagnačního bodu, vlivem velkého gradientu rychlosti. Do výpočtu turbulentní viskozity je přidáno časové měřítko kombinující horní stupnici turbulentního časového měřítka T_r danou vztahem:

$$T_r = \frac{C_{lim}}{C_\mu S} \qquad (8.10)$$

kde S a je definováno rovnicí (2.21), C_{lim} je konstanta odpovídající omezení dle [Durbim 2009] a její hodnota $C_{lim} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, může být uživatelem uzpůsobena dané simulaci. Dolní hranice je dána Kolmogorovým časovým měřítkem T_t:

$$T_t = \max\left(\min\left(\frac{k}{\varepsilon}, T_r\right), 10\sqrt{\frac{\mu}{\sigma\varepsilon}}\right). \qquad (8.11)$$

Výsledkem je pak vztah pro turbulentní viskozitu:

$$\mu_t = \rho C_\mu k T_t \qquad (8.12)$$

8.3 Definice okrajových podmínek

Okrajové podmínky lze rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří okrajové podmínky předepisované na vstup (sání) a na výstup (výfuk). Druhá skupina nám pak tvoří okrajové podmínky předepsané na stěnách.

Program Vectis umožnuje řízení proudového pole pomocí předepsaného průtoku nebo totálního tlaku na vstupu v kombinaci s průtokem nebo statickým tlakem na výstupu. Ve všech případech je rychlost vstupního proudu dopočítávána stejně jako turbulentní veličiny:

$$k = \frac{2}{3} I U^2; \quad \varepsilon = C_\mu^{0.75} \frac{\sqrt[3]{k^2}}{l}.$$

Intenzita turbulence *I* a délkové měřítko *l* jsou zadávány jako konstanta v souboru s okrajovými podmínka pro teplotu teplotou a tlak.

Okrajové podmínky na stěnách v případě turbulentního proudění upravují chovaní u stěny, jelikož zde neplatí stejné předpoklady jako u volného proudu. Zavádějí se stěnové funkce. Průběh rychlosti na stěně vychází z logaritmického zákona stěny

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & pro\ y^+ \leq 11{,}6 \\ \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & pro\ y^+ > 11{,}6 \end{cases}$$

$$y^+ = \frac{\rho\sqrt[4]{C_\mu}\sqrt{k}\,y}{\mu}\ , \tag{8.13}$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \tag{8.14}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}, \tag{8.15}$$

kde κ a E jsou konstanty a pro zvolený k-ε model mají hodnoty $\kappa = 0{,}419$ a $E = 9{,}793$. Hodnota normované vzdálenosti y^+ = 11,6 udává vzdálenost viskózní podvrstvy od stěny. Dalšími veličinami jsou vzdálenost středu buňky od stěny y , stěnové smykové napětí u_τ, stěnové smykové napětí τ_W a $\bar{u}$ složka rychlosti kolmá na normálu stěny.

Pro výpočet disipace turbulentní energie blízko stěny je transportní rovnice (8.9) nahrazena funkcí definovanou v [Vectis 2016]. Tato funkce je založena na změně délkového měřítka v závislosti na vzdálenosti od stěny:

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa y}. \tag{8.16}$$

Výpočet turbulentní kinetické energie v blízkosti stěny je pomocí upravené transportní rovnice (8.6) specifikován tak že difuzní člen jen roven nule disipační člen jsou nahrazen [Vectis 2016]

$$\varrho\varepsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}} u^+}{y}\ V, \tag{8.17}$$

kde V je objem elementu na stěně, a zdrojový člen nahrazen výrazem

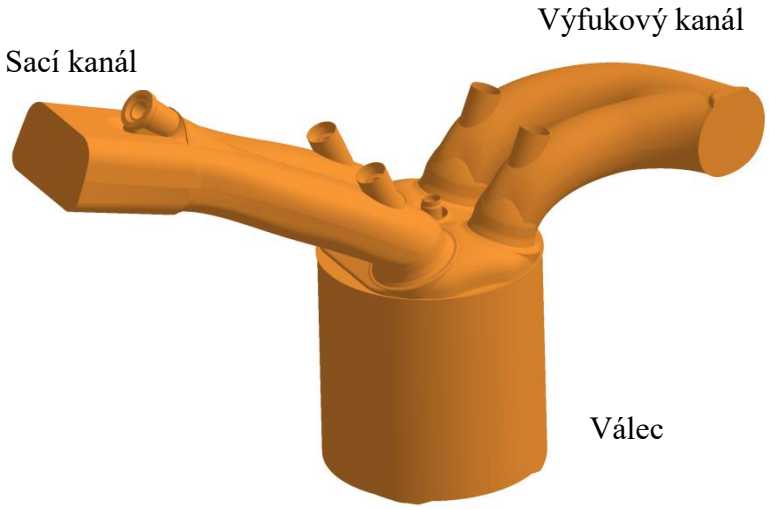
$$G = \tau_W \frac{\bar{u}}{y} V \,. \tag{8.18}$$

Smykové napětí τ_W v rovnici (8.18) je definováno následujícím vztahem

$$\tau_W = \frac{\rho \sqrt[4]{C_\mu} \sqrt{k} u^+ \kappa}{\ln(E y^+)}. \tag{8.19}$$

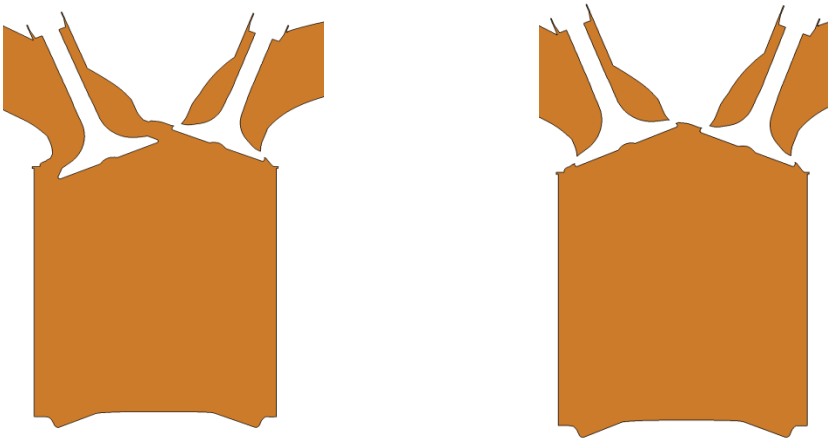
8.3 Geometrie výpočetní oblasti, diskretizační síť a její deformace

Tato kapitola je zaměřena na geometrii výpočetní oblasti a její topologické a geometrické změny během cyklu sání a komprese. S tím přímo souvisí problematika generování sítě a její deformace. Geometrie popisuje vnitřní objem motoru (Obr. 64).



Obr. 63: Výpočetní oblast pro numerické simulace výměny náplně válce.

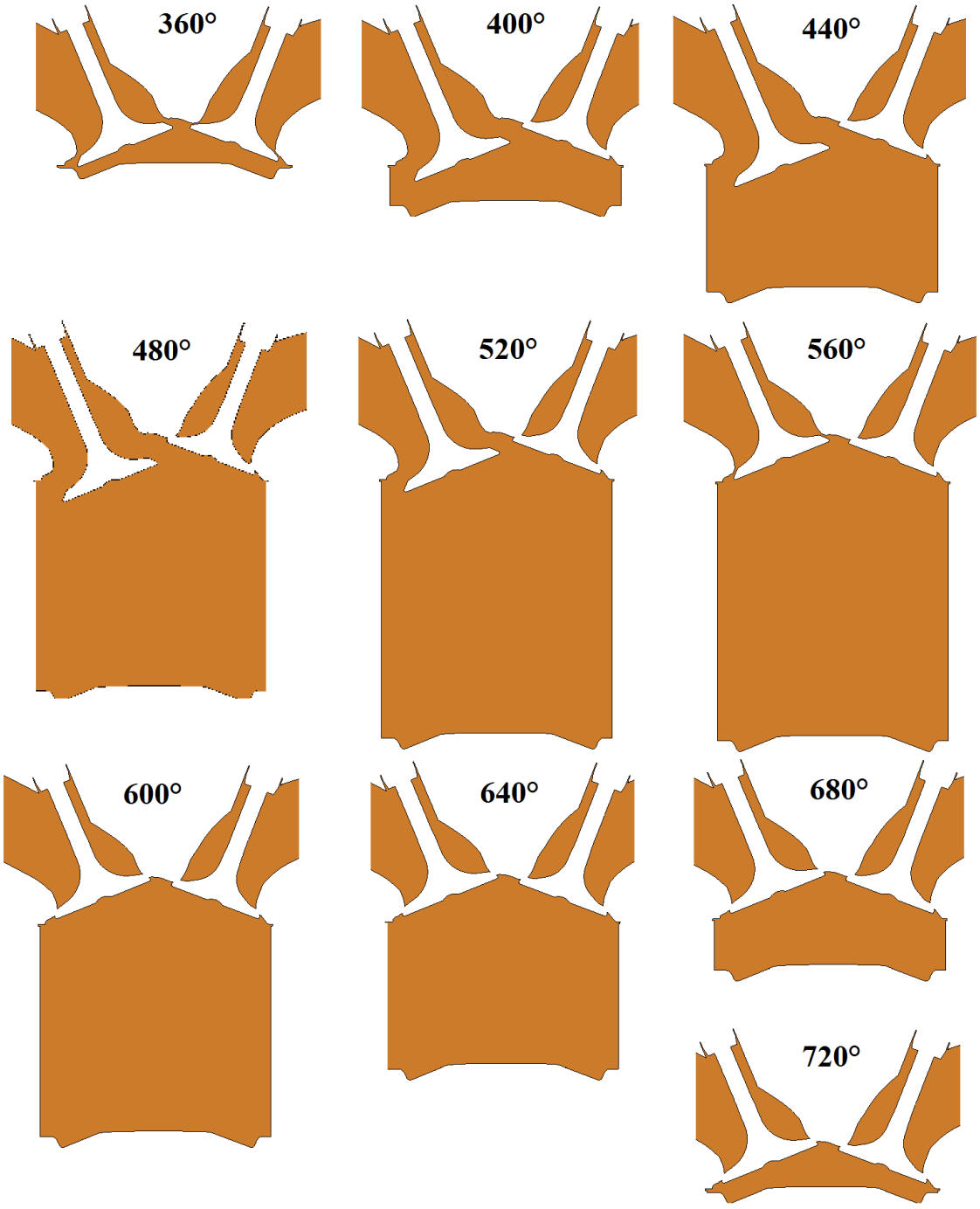
Celý cyklus čtyřdobého spalovacího motoru probíhá od 0° až 720° natočení klikové hřídele. Ve výpočtech motorů se místo času pracuje právě s úhly natočení klikové hřídele z důvodu lepšího přehledu, v jaké fázi se motor aktuálně nachází. Ve výsledcích prezentovaných v této práci je zahrnuta pouze fáze saní a komprese, což odpovídá rozsahu 340° - 720° natočení klikového hřídele. Tyto výpočty vyžadují dvě topologie sítě, kdy topologie během sání má otevřeny sací ventily a výfukové ventily zavřeny. V případě komprese jsou všechny ventily uzavřeny (Obr. 64).



Obr. 64: Topologie geometrie během sání obrázek vlevo a topologie během komprese vpravo.

Výpočetní geometrie má několik pohyblivých částí, jsou jimi oba sací ventily a objem prezentující korunu pístu. Pohyb pístu je harmonický s amplitudou zdvihu 76,4 mm. Pohyb sacích ventilů je vyvolán vačkovým mechanizmem. Šířka zdvihu je dána konkrétním typem vačky a pracovním bodem, ve kterém je motor provozován. Pro tento příklad je použita vačka šířky 210° natočení klikové hřídele, tedy mezi 350° - 560° natočení klikové hřídele, v obou těchto bodech je zdvih 1 mm. Maximální zdvih ventilu je 9 mm. Minimální výška zdvihu v simulaci je uvažována 0,3 mm (při otevírání je skoková změna ze zavřeného ventilu na zdvih 0,3 mm a v případě zavírání je skoková změna ze zdvihu 0,3 mm na uzavřený ventil).

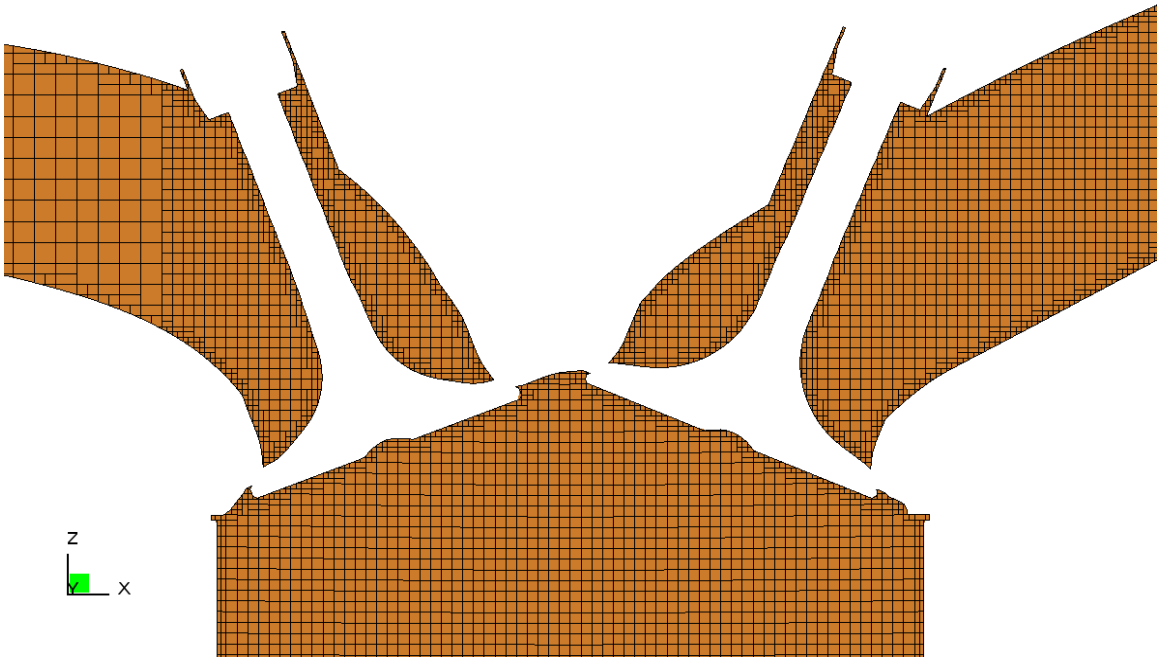
Pro názornou ukázku pohybu ventilu a pístu bude vyobrazen řez geometrii vedený přes osu sacího ventilu (Obr. 65). U jednotlivých fází je uveden údaj o úhlu natočení klikové hřídele.



Obr. 65: Znázornění pohybu ventilů a pístu v závislosti na natočení klikové hřídele.

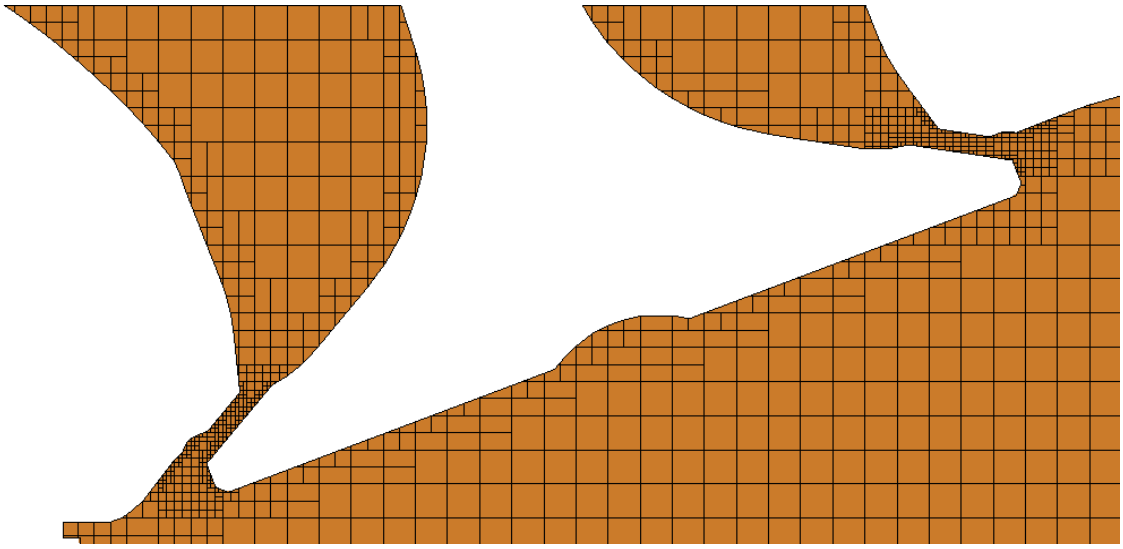
Sítě jsou generovány nástrojem, který je součástí programu Vectis. Vstupními daty do tohoto generátoru jsou povrchové sítě výpočetní oblasti ve formátu STL (stereolithography). Sítě generované pomocí toho nástroje jsou kartézské se zjemněním elementů na hranici. Velikost elementů sítě udává základní kartézskou síť, kterou definuje uživatel. Hustota sítě v jednotlivých směrech souřadného systému může být různá. Dále je možné definovat bloky, kde dojde ke zjemnění základní kartézské sítě. Pro všechny později zmíněné simulace jsou požity sítě se

stejnými parametry. Velikost základního elementu je 2 mm, v oblasti spalovacího prostoru a sacího kanálu 1 mm (Obr. 66).



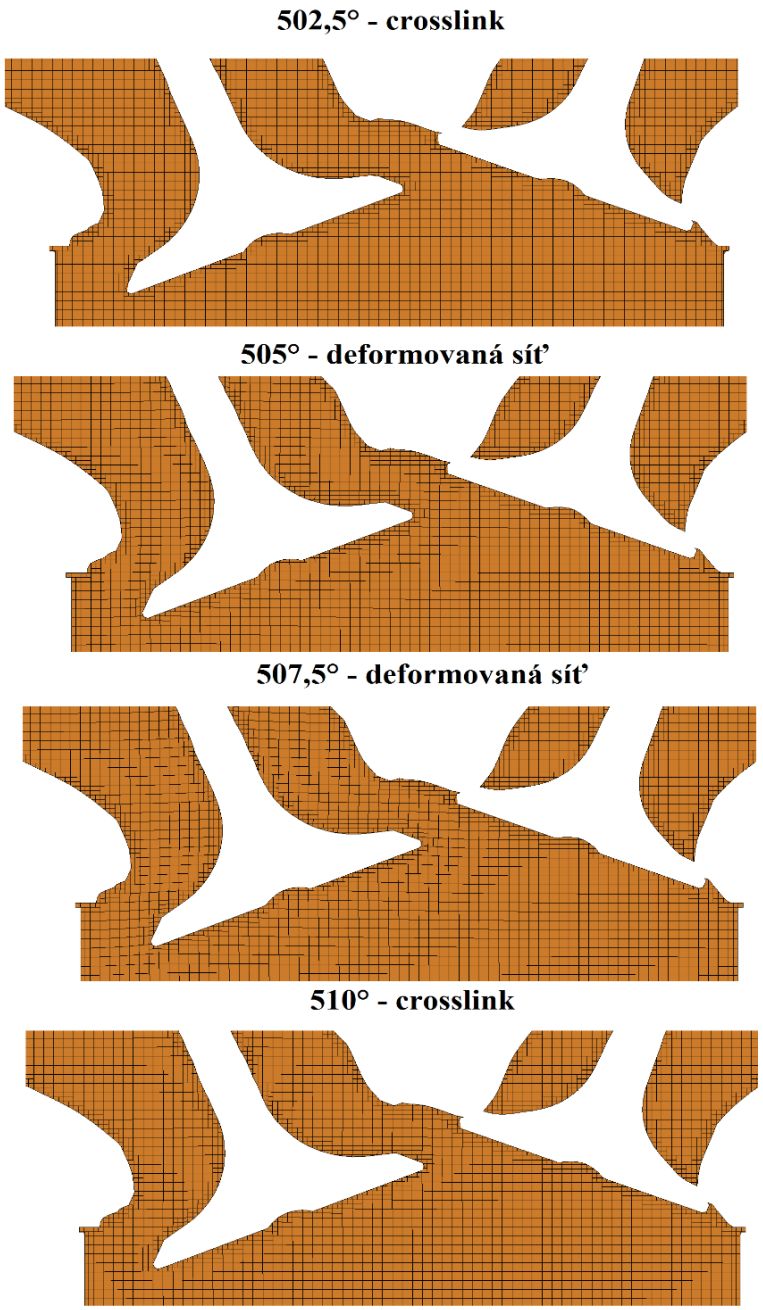
Obr. 66: Základní rozložení a velikost elementů v síti.

Byly také použity sítě s velikostí elementu 0,5mm a 0,25 mm v oblasti mezi sedly ventilů a ventilem, ale tyto výpočty byly nestabilní. Rozložení elementů s velikostí 0,25 mm mezi sedly ventilů a sacím ventilem je na Obr. 67.



Obr. 67: Lokální zjemnění elementů mezi sedly ventilů a hlavou.

Pro každou simulaci je generováno několik sítí. Důvody pro větší počet sítí jsou dva. První je že během výpočtu se mění topologie geometrie, druhým pak to, že síť je během výpočtu deformována. Pro výpočet deformace se využívá metoda založená na řešení Laplaceovy rovnice (4.2) a bi-harmonického operátoru s konstantním difusním koeficientem zmíněná v kapitole 4.3.2. Tato metoda není vhodná pro velké deformace sítě. Aby se zajistilo, že síť bude plnit veškeré kvalitativní parametry zmíněné v kapitole 4.2 ve všech polohách ventilů a pístu, je generována síť (crosslink) v závislosti na změně posunu pohyblivých částí. Ukázka deformace sítě mezi dvěma po sobě jdoucími crosslinky je na Obr. 68. Počet takto vygenerovaných sítí je přibližně 60.

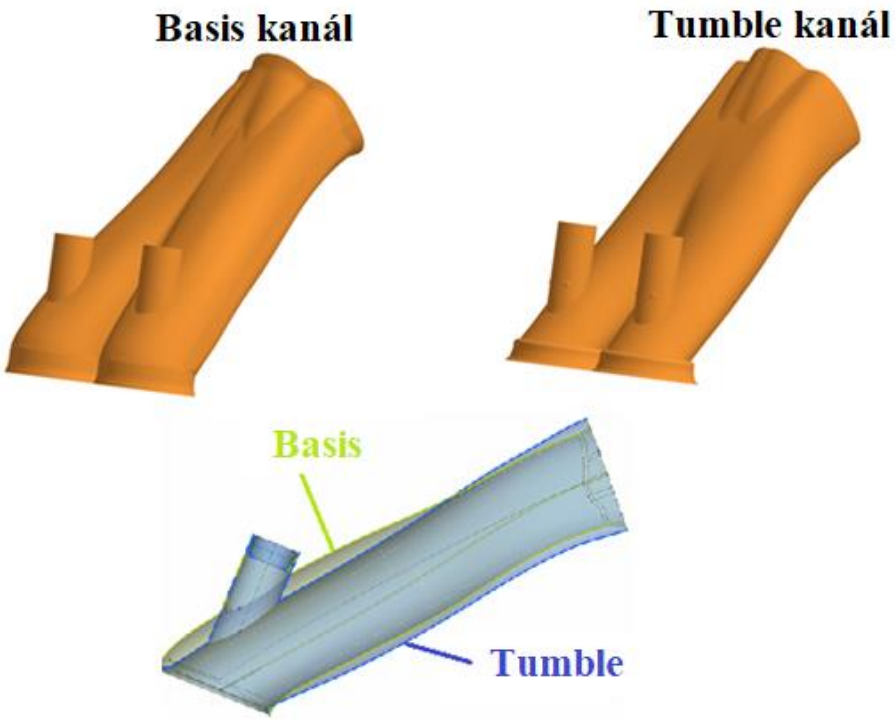


Obr. 68: Ukázka deformace sítě mezi dvěma crosslinky.

8.4 Vliv tvaru sacího kanálu na proudové pole uvnitř válce

V této kapitole se zaměřím na simulace výměny náplně v jednom válci. Simulace se počítá pro pracovní bod motoru na 3500 ot/min a při plném zatížení. Pro tento pracovní bod byly dodány okrajové podmínky vygenerované v programu GT-Power. Takto definovaný tlak v sobě již obsahuje tlakové pulzace vybuzené celým systémem sacího potrubí, Není tedy nutně do simulací zahrnovat celý systém saní, který by výpočet výrazně prodloužil.

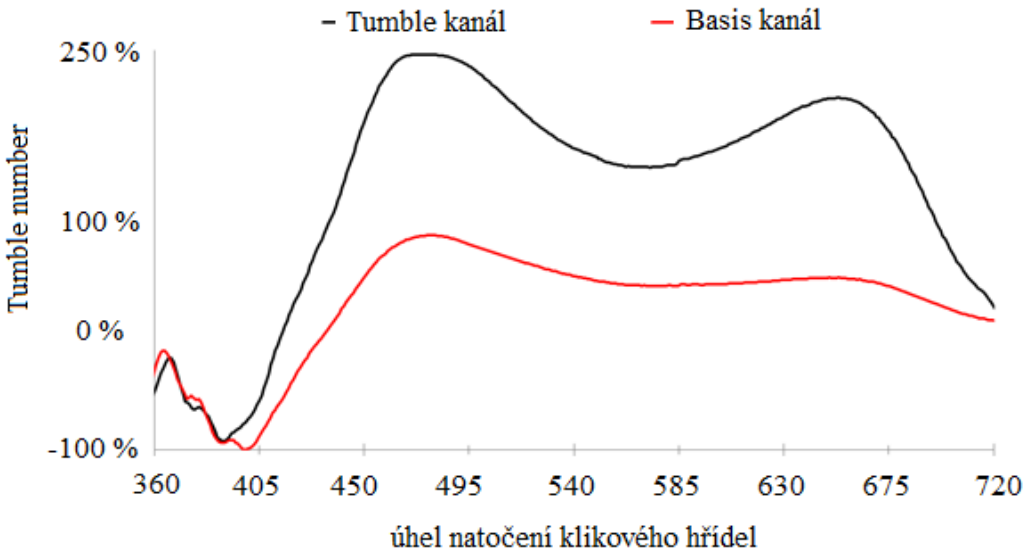
Cílem simulace je porovnat vliv tvaru sacích kanálů na proudění ve válci. Porovnávány jsou dvě varianty sacích kanálů. První je kanál s označením Basis, jedná se o plnící tvar kanálu. Druhou variantou je Tumble kanál, který je navržen tak, aby vytvářel tumbleové proudění ve válci. Oba válce jsou připojeny k válci s vrtáním 74,5 mm a zdvihem 76,4 mm. Zdvihový objem válce je 333 cm^3. Geometrie obou kanálů a jejich vzájemné porovnání je na Obr. 70.



Obr. 70: Porovnání tvaru dvou sacích kanálů.

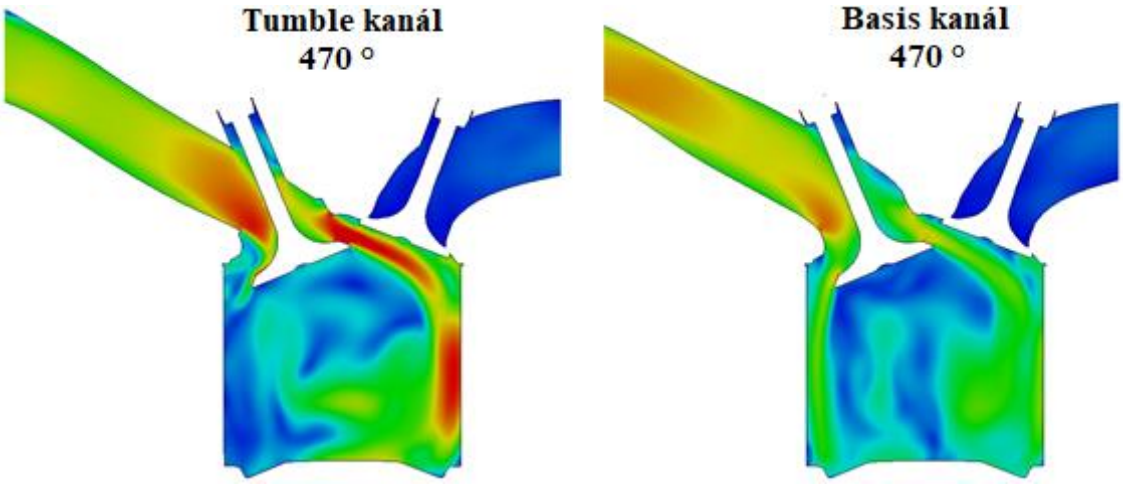
Z průběhů Tumble number v grafu Obr. 71 je vidět, že kanál Tumble kanál výrazně podporuje vznik proudění typu Tumble. Hodnota Tumble number v průběhu sání je vyšší, než tomu je v případě kanálu Basis. Oba průběhy dosahují první maxima přibližně při úhlu natočení klikového hřídele 470°. Hodnota maxima pro kanál Tumble kanál dosahuje 2,5 násobku hodnoty pro kanál Basis. V případě kanálu K108 je dosaženo i druhého maxima, a to v 653° úhlu natočení klikového hřídele, tedy během komprese. Proudění typu Tumble se tedy zachová i během

komprese a zaniká, až když se píst blíží horní úvrati. U kanálu Basis je toto proudění postupně utlumováno v průběhu celé komprese. Rozkmit na začátku je způsoben zpětným tokem díky tlakové pulzaci na vstupu a současným otevřením sacího a výfukového ventilu.



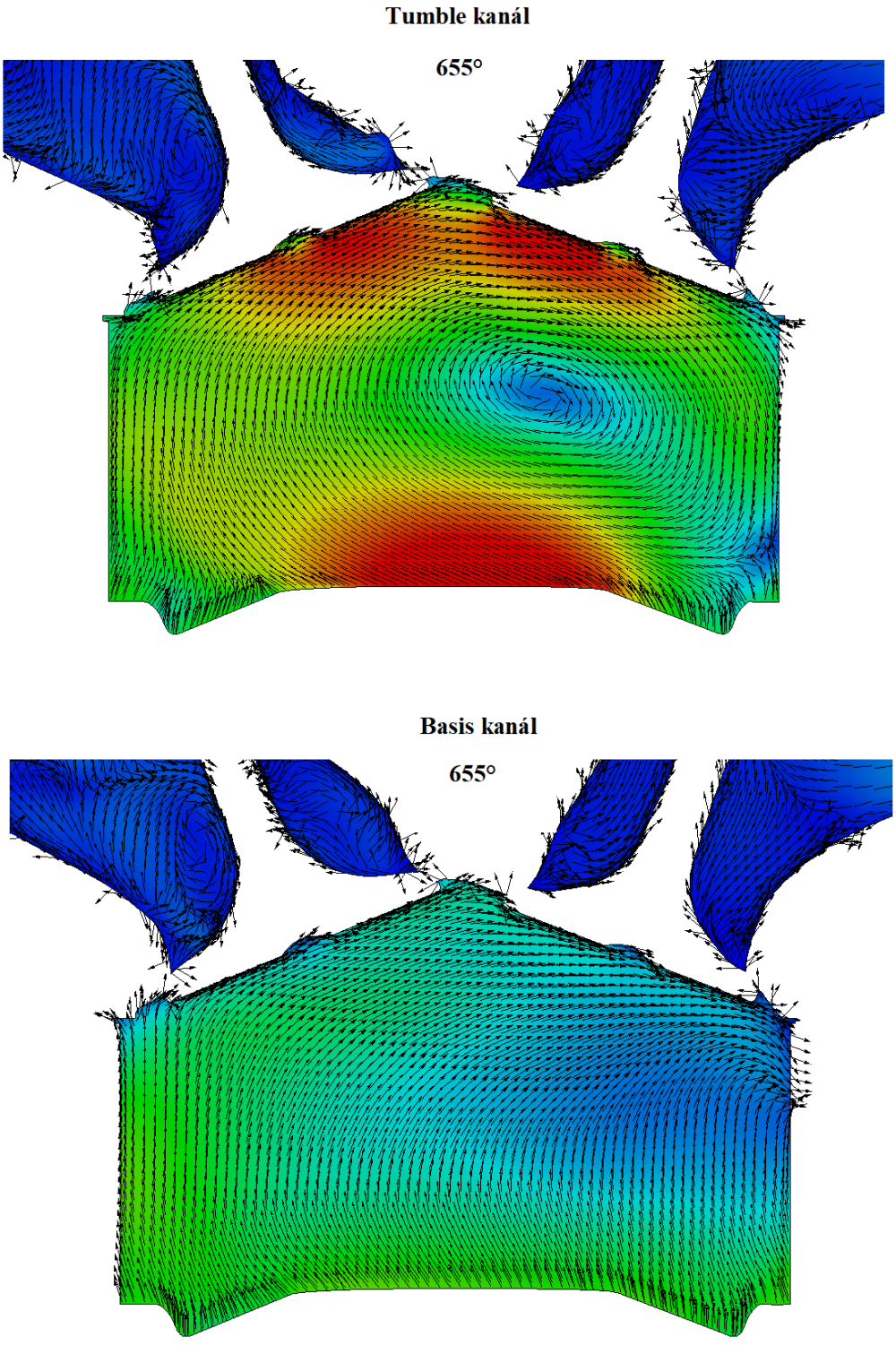
Obr. 71: Průběh Tumble number v průběhu sání a komprese.

Obr. ukazuje rychlostní pole v blízkosti prvního maxima Tumble number. Na obrázku Obr. 72 je vidět, jak je proud vzduchu u Tumble kanálu tlačen mezerou mezi ventilem a hlavou válce směrem k výfukové straně. Jen malá část vzduchu pak prochází dolů směrem k pístu. U kanálu Basis je proud směřující směrem k pístu větší a oslabuje tak horní proud, který vytváří tumbleové proudění.



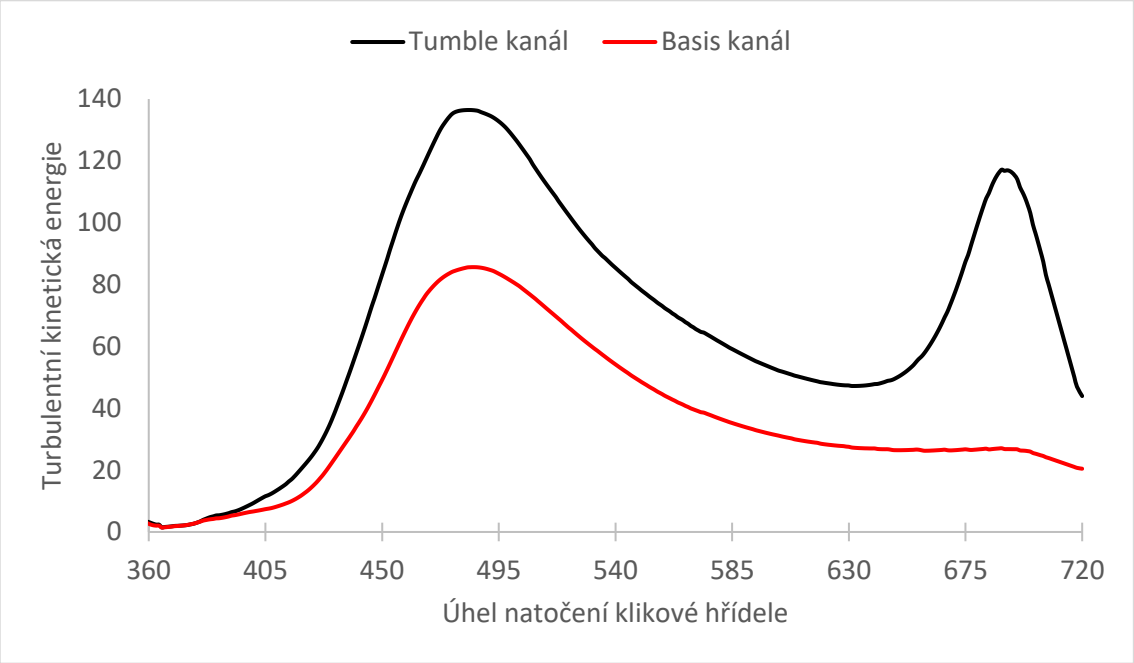
Obr. 72: Rychlostní pole při maximální turbulentní kinetické energii a hodnoty Tumble number.

Na obrázku Obr. je pak znázorněno vektorové rychlostní pole z kompresní fáze, kdy je dosaženo druhého maxima Tumble number. To odpovídá úhlu natočení klikového hřídele 655°. V případě Tumblového kánálu je znatelný velký vír typu Tumble. U kanálu Basis, kde bylo tumblové proudění výražně menší od počátku sací fáze. Tumblové proudění je již v této fázi zaniklé vlivem disipace.

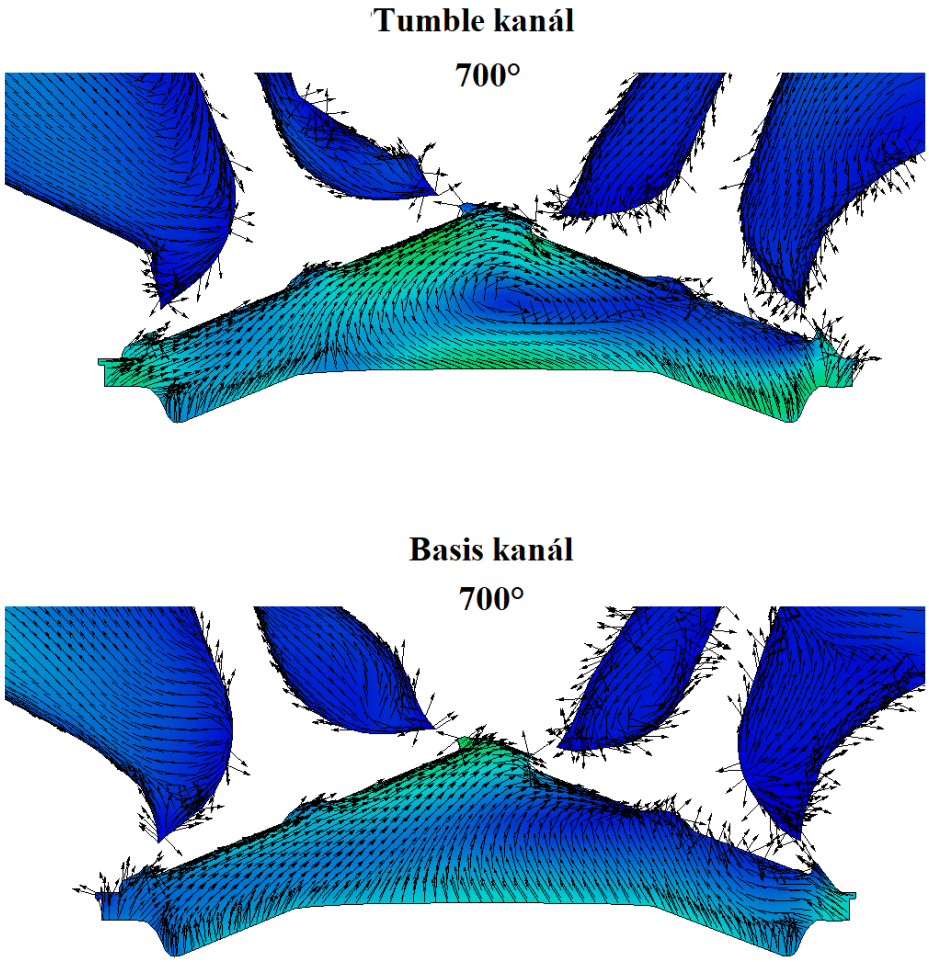


Obr. 73: Vektorové rychlostní pole při maximální hodnotě Tumble number pro úhel natočení klikové hřídele 700°.

Průběh turbulentní kinetické energie (viz Obr. 69) během fáze sání a komprese má podobné rozložení maxim jako Tumble number. To může být způsobeno rozpadem hlavního víru na menší víry, které zvýší velikost fluktuačních složek rychlost a tím dojde i ke zvýšení kinetické turbulentní energie. Pokud má hlavní vír větší energii, tak i víry vzniklé jeho rozpadem budou mít větší energii. To vysvětluje výrazně větší hodnoty turbulentní kinetické energie u Tumble kanálu. Druhé maximum turbulentní kinetické energie u tohoto kanálu je způsobeno rozpadem hlavního víru v posledních fázích komprese. Rozpad tohoto víru je znázorněn na dalším obrázku (Obr. 75), který zobrazuje rychlostní pole pro úhel natočení klikového hřídele 700°.

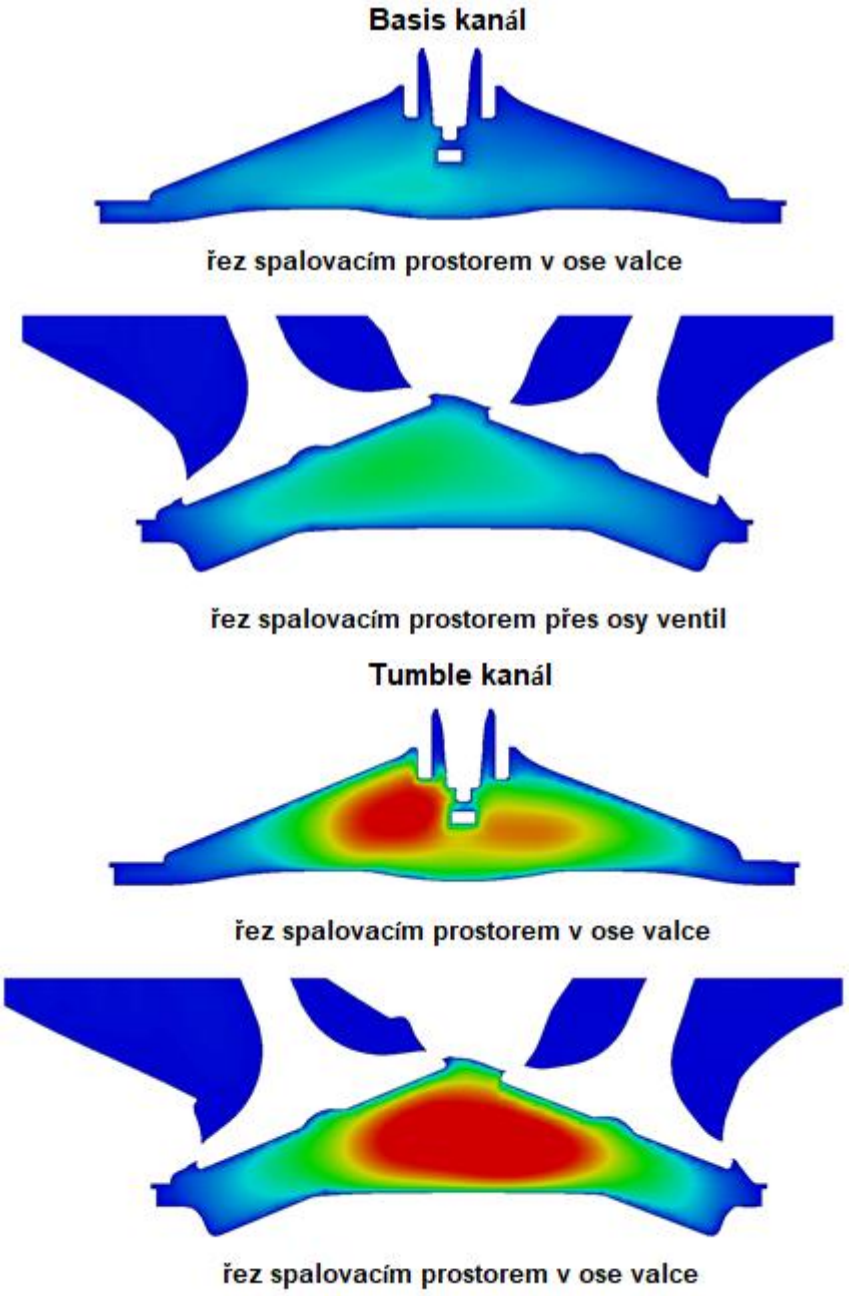


Obr. 69: Průběh turbulentní kinetické energie v průběhu sání a komprese.



Obr. 70: Vektorové rychlostní pole při maximální hodnotě turbulentní kinetiky energie pro úhel natočení klikové hřídele 700°.

Na následujícím obrázku (Obr. 71) je znázorněna distribuce turbulentní kinetické energie ve spalovacím prostoru pro úhel (700°). Tento úhel odpovídá výskytu druhého maxima turbulentní kinetické energie v grafu (Obr. 69). Její vyšší hodnota podporuje rychlejší prohořívání směsi ve spalovacím prostoru. To bylo potvrzeno i při měření motoru na brzdovém stanovišti.



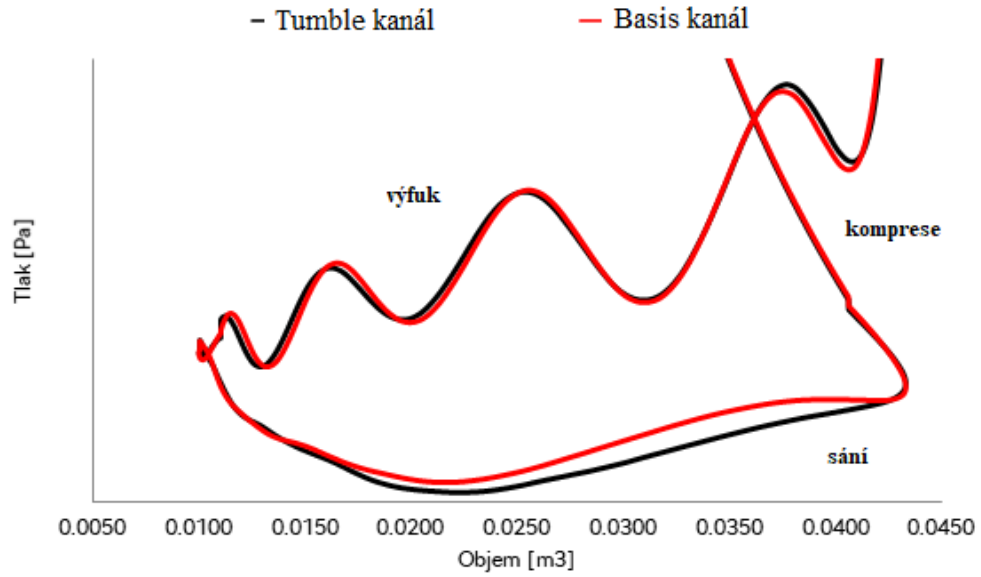
Obr. 71: Distribuce turbulentní kinetické ve spalovacím prostoru pro úhel natočení klikové hřídele 700°.

Dalším parametrem, který proudové pole ovlivní, je objemová účinnost sacího kanálu. Obecně se snažíme do spalovacího prostoru přivést co nejvíce čerstvého vzduchu, aby bylo dosaženo co největšího výkonu.

Tab. 8. 1: Objemová účinnost pro jednotlivé sací kanály.

	Basis kanál	**Tumble kanál**
Hmotnost nasátého vzduchu m_{Air}	0,356 g	0,352 g
Objemová účinnost η_{Volume}	0,906	0,897

Z tabulky Tab. 8. 1 je vidět, že lepší objemové účinnosti bylo dosaženo pro Basis kanál. To koresponduje s teorií, jelikož Tumblové kanály nevyužívají celého průřezu kanálu v oblasti ventilů a směřují proudění pouze do horní části nad ventilem, jak je vidět z Obr. .



Obr. 72 p-V diagram výfukové a sací fáze motoru.

Část p-V diagramu znázorněná na Obr. 72 zobrazuje práci, která je potřeba na výměnu náplně válce. Práci odpovídá obsah plochy, která je z vrchu omezena tlakem ve spalovacím prostoru při výfuku a ze spodu tlakem při nasávání čerstvého vzduchu. Průběh tlaku při výfuku je pro obě varianty sacích kanálu shodný. To je dáno tím, že výfukový kanál je pro obě varianty stejný. Během sací fáze je patrný nižší tlak ve spalovacím prostoru u varianty Tumble kanálu. Pro nasátí čerstvého vzduchu je potřeba větší tlakový spád. Energie potřebná na výměnu náplně je pro Tumble kanál tedy vyšší.

9 Závěr

Disertační práce shrnuje teoretické a praktické poznatky o metodách zaměřených na numerické simulace proudění na pohyblivých sítích. Poznatky jsou aplikovány na tři konkrétní úlohy. V případě simulace kmitajícího leteckého profilu je provedeno porovnání s experimentem.

V prvním kroku byla ve výpočetním balíku OpenFOAM otestována celá řada metod pro výpočet deformace sítě od řešení Laplaceovy rovnice až po výpočet pomocí metody konečných prvků. Pro tyto účely byla vybrána jednoduchá úloha kmitajícího válce s předepsaným pohybem s jedním stupněm volnosti (posuv bez natáčení). Testování proběhlo na sítí o celkovém počtu elementů 5000 až po 2 miliony. Na těchto sítích byla vyhodnocena kvalita elementů při maximální amplitudě kmitu. U této úlohy dopadla nejlépe metoda Pseudo-Solid, která je v porovnání s ostatními metodami výpočetně náročnější a se zvyšujícím se počtem elementů tato náročnost ještě dále roste. Druhého nejlepšího výsledku bylo dosaženo při řešení Laplaceovy rovnice. Metody SBRStress (Solid body rotation stress equation) a RBF (Radial Basis Function) jsou výpočetně náročnější než řešení Laplaceovy rovnice (maximálně o 50 %). Horší kvalita elementů pro posuvný pohyb u těchto metod je způsobena tím, že tyto metody jsou spíše optimalizovány pro rotační pohyb. Metoda Mesquite (**Mesh Quality** Improvement) výrazně deformuje elementy na povrchu válce.

Při výpočtu proudění v hlasivkovém kanálu se také provedlo testování metod pro výpočet deformace sítě pro různé šířky mezihlasivkové štěrbiny s cílem najít metodu, která umožní co největší přiblížení hlasivek. Při tomto testování bylo dosaženo nejlepšího výsledku s metodou Pseudo-Solid, kdy bylo dosaženo tloušťky mezery pouhých 0,02 mm. Při této tloušťce je průtok štěrbinou vlivem vazkosti blízký nule. Pro svojí výpočetní náročnost je tato úloha reálně využitelná pouze pro 2D simulace.

Na základě výsledků získaných z předchozích dvou úloh proběhlo testování výpočtu deformace sítě pro případ kmitání leteckého profilu pouze pomocí tří metod (řešení Laplaceovy rovnice, metoda RBF a SBRStress). Letecký profil kmital se dvěma stupni volnosti s výraznou rotační složkou pohybu. Amplituda náklonu byla 26 ° a zdvihu 7 mm. V této úloze byla problematická oblast na odtokové hraně, kde docházelo ke kolapsu elementů u metody řešení Laplaceovy rovnice. RBF metoda při paralelním výpočtu vykazovala nestabilitu vlivem singulární matice pro rovnice pohybu sítě. Z tohoto důvodu pro všechny výpočty proudění byla vybrána metoda SBRStress.

V další kapitole je popsána numerická simulace proudění okolo leteckého profilu pro rychlost nabíhajícího proudu $u = 70\ m/s$. Simulace byla doplněna o model turbulence k-ω-SST. Na základě výsledků lze říci, že v případě 2D simulace bylo dosaženo poměrně dobré shody s experimentem v oblastech, kde nedocházelo k odtrhávání proudění. Bohužel se zde projevuje problematika výpočtu turbulence na 2D síti a výsledky jsou více rozkolísané než v případě 3D

simulace (turbulence je prostorovým jevem). Pro zachycení základního trendu 2D simulace postačuje. Lze tak získat dobré výsledky za cenu výrazně menších nákladů, než je tomu pro 3D výpočet. Problém nastává v oblasti odtržení proudu, kde ani 3D výpočet nezachytí přesné místo odtržení. Odtržení je fyzikálně velmi složitý děj, který je pomocí přibližných modelů turbulence velmi obtížné zachytit.

Poté proběhl výpočet na stejném modelu křídla pro rychlost nabíhajícího proudu $u = 153\,m/s$. V tomto případě byl použit model stlačitelného proudění. Data jsou opět porovnávána s experimentem. Při těchto vyšších rychlostech jsou k dispozici interferogramy znázorňující rozložení veličin (tlak, rychlost a hustota) na povrchu leteckého profilu. Z výsledků je vidět, že 2D i 3D simulace velice dobře zachycuje rozložení těchto veličin pro malý úhel náklonu. V případě 3D simulace výsledky simulace kopírují experimentální data, k odchylce dochází až v oblasti ve vzdálenosti 1/3 normované vzdálenosti mezi náběžnou a odtokovou hranou. Při větším náklonu v numerické simulaci dochází k odtržení proudění blíže za náběžnou hranou než u experimentů. Z výsledků je patrné, že nedochází k optimální shodě. Největší rozdíl nastává v momentě odtržení proudění. Lepší shody je opět dosaženo pomocí 3D simulace. Výsledky 2D simulací více oscilují.

V úloze spalovacího motoru je v práci prezentována pouze část komplexní simulace. Komplexní simulace obsahovala výpočet pěti celých cyklů čtyřdobého spalovacího motoru (vstřikování a odparovaní paliva, hoření, výfuk a sání). Tato problematika je v automobilovém průmyslu velmi řešeným tématem. Stavba prototypů je finančně náročná, a proto je snaha aplikovat virtuální vývoj. Při těchto simulacích se řeší rozložení palivové směsi ve válci a průběh hoření. Optimalizace spalování snižuje emise CO_2 a množství sazí ve výfukových plynech. Jednou z možností, jak toho docílit, je optimální proudění směsi paliva a vzduchu během fáze saní a komprese. V práci je popsána simulace proudění směsi pomocí dvou typů sacích kanálů. Jeden z kanálů je tvarován tak, aby do válce dostal co největší množství směsi (Basis) a druhý tak, aby vyvolal ve válci prouděni typu Tumble, které podporuje rozvíření směsi a tím její lepší homogenizaci. Výsledky numerických simulací potvrdily konstrukční předpoklady. Samotné práci pak předcházelo zavedení této metodiky na výpočetní oddělení a plně jí odladit pro potřeby výpočtů atmosférických motorů.

Seznam vlastních publikací

Článek v impaktovaném časopise:

P. Šidlof, J. Horáček, V. Řidký, Parallel CFD simulation of flow in a 3D model of vibrating human vocal folds, Computers & Fluids 80, 2013, pp 290-300,

Příspěvky na mezinárodních konferencích:

V. Řidký, P. Šidlof Numerical simulation of flow around oscillating airfoil with large angle of rotation, Experimental fluid mechanics 2015, EPJ Web of Conferences 114, 2016

V. Řidký, Numerical Simulation of Flow in the Human Vocal Tract, Engineering Mechanics 2015, pp. 262-263, ISBN 978-80-86246-42-0. ISSN 1805-8248.

V. Řidký, P. Šidlof, Numerical simulation of deformation of dynamic mesh in the human vocal tract model, Experimental fluid mechanics 2014, EPJ Web of Conferences 92, 2015

V. Řidký, P. Šidlof, Parallel numerical computation of distribution of pressure past an oscillating airfoil NACA0015, Engineering Mechanics 2014, ISBN 978-80-214-4872-8 ISSN 1805-8256

V. Řidký, P. Šidlof, Parallel numerical simulation of oscillating airfoil NACA0015 in the channel due to flutter instability, Experimental fluid mechanics 2013, EPJ Web of Conferences 67, 2014

V. Řidký, P. Šidlof, V. Vlček, Parallel numerical simulation of airflow past an oscillating NACA0015 airfoil, Engineering Mechanics 2013, pp 497-501 ISBN 978-80-87012-47-5. ISSN 1805-8256.

V. Řidký, P. Šidlof, V. Vlček, Numerical simulations of the flow with the prescribed displacement of the airfoil and comparison with experiment, Experimental fluid mechanics 2012, EPJ Web of Conferences 45, 2013

P. Šidlof, J. Horáček, V. Řidký, Analysis of the flow field in a 3D model of convergent and divergent vocal folds, International Conference on Physiology and Biomechanics Germany, 2012

Seznam použité literatury

ALIPOUR, F., CH. FAN and R. C. SCHERER, 1996. A numerical simulation of laryngeal flow in a forced-oscillation glottal model. Computer Speech and Language 10. page 75-93.

BANDRINGA, H., 2010. *Immersed boundary methods*. Master's thesis. University of Groningen. Faculty of Mathematics and Natural Sciences.

BATINA, J. T., 1990. *Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes*. AIAA Journal. page 1381-1388.

BECKERT, A., H. WENDLAND, 2001. *Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions.* Aerospace Science and Technology. page 125–134.

de BOER, A., M. S. van der SCHOOT and H. BIJL, 2007. *Mesh deformation based on radial basis function interpolation*. Computers & Structures. page 784–795.

BOS, F. M., 2009. *Numerical simulations of flapping foil and wing aerodynamics*, PhD thesis. Delft.

BOS, F. M., B. W. van OUDHEUSDEN and H. BIJL, 2010. *Mesh deformation techniques for flapping flight*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

BUSCHBECK, M., N. BITTNER, T. HALFMANN and S. ARNDT, 2012. *Dependence of combustion dynamics in a gasoline engine upon the in-cylinder flow field, determined by high-speed PIV*. Exp. Fluids 53. page 1701-1712.

BLOM, F. J., 2000. *Considerations on the spring analogy*. International Journal for Numerical Methods in Fluids. page 647-668.

DECKER, G. Z., S. L. THOMSON, 2007. *Computational Simulations of Vocal Fold Vibration: Bernoulli Versus Navier-Stokes*. Journal of Voice. Vol. 21. No. 3. pp. 273-284.

DEGAND, C. and C. FARHAT, 2002. *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. Computers and Structures. page 305-316.

DONEA J., 1982. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient fluid-structure interactions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. page 689-723.

DONEA, J., 2009. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods.* Encyclopedia of Computational Mechanics.

DOWELL, E.H, 1995. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

DUBCOVÁ, L., M. FEISTAUER, J. HORÁČEK and P. SVÁČEK, 2008. *Numerical simulation of airfoil vibrations induced by turbulent flow*. Journal Comput. Appl. Math. 218. page 34-42.

DUBCOVÁ, L., M. FEISTAUER, J. HORÁČEK and P. SVÁČEK, 2009. *Numerical simulation of interaction between turbulent flow and a vibrating airfoil*. Comput. Vis. Sci. 12. page 207-225.

DURBIN, P. A., 1996. *On the k-epsilon stagnation point anomaly*. Int. J. Heat and Fluid Flow. 17. page 89–90.

DURBIN, P. A., 2009. *Limiters and wall treatments in applied turbulence modelling*. Fluid Dynamics Research. 41. page 1–18.

DWIGHT, R. P., 2006. *Robust mesh deformation using the linear elasticity equations*. Computational Fluid Dynamics. Springer.

DWIGHT, R. P., 2014. *Robust mesh deformation using the linear elasticity equations*. H. Deconinck & E. Dick. Springer.

FALFARI, S., GM. BIANCHI and L. NUTI, 2012. *Numerical Comparative Analysis of In-Cylinder Tumble Flow Structures in Small PFI Engines Equipped by Heads Having different Shapes and Squish Areas*. ICES2012-81095: Proceedings of ASME Internal Combustion Engine Division. Spring Technical Conference.

FALFARI, S., F. BRUSIANI and P. PELLONI, 2014. *3D CFD Analysis of the Influence of Some Geometrical Engine Parameters on Small PFI Engine Performances – the Effects on the Tumble Motion and the Mean Turbulent Intensity Distribution*. Energy Procedia. 45. page 701-710.

FALFARI, S., F. BRUSIANI and GM. BIANCHI, *Assessment of the Influence of Intake Duct Geometrical Parameters on the Tumble Motion Generation in a Small Gasoline Engine*. SAE 2012-32-0095. SETC Congress. Madison, USA.

FARHAT, C., C. DEGAND, B. KOOBUS, M. LESOINNE, 1998. *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. page 231-245.

FEISTAUER, M., J. HORÁČEK and P. SVÁČEK, 2011. *Numerical analysis of flow induced nonlinear vibrations of an airfoil with three degrees of freedom*. Comput. Fluids 49. page 110-127.

FEISTAUER, M., J. HORÁČEK and P. SVÁČEK, 2015. Numerical Simulation of Airfoil Vibrations Induced by Turbulent Flow. Commun. Comput. Phys. 17. page 146-188.

FERZIGER, J. H. and M. PERIC, 2002. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin.

FOŘT, J., K. KOZEL, P. LOUDA a J. FÜRST, 2004. *Numerické metody řešení problémů proudění III.* 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze. 95 s, ISBN 987-80-01-02877-1.

GEISSLER, W., 2003. *Numerical study of buffet and transonic flutter on the NLR 7301 airfoil*, Aerosp. Sci. Tech. page 540-550.

GROSMAN, A. D., Y.Y. TSUI and A.P. WATKINS, 1984. *Calculation of three dimensional air motion model engines*. SAE Paper.

HALÍK, J., 2008. *Hydrodyamika a hydrodynamické stroje* [online]. Vysoká škola bánská-Technická univerzita Ostrava. [vid. 1. 11. 2014]. Dostupné z: http://www.338.vsb.cz/PDF/JanalikHYDRODYNAMIKAAHYDRODYNAMICKESTROJE.pdf

HAN, Z. and R.D. REITZ, 1995. *Turbulence modeling of internal combustion engines using RNG k-ε models*. Combustion Sci. Technol., 106. page 267-295.

HANSBO, P., 1995. *Generalized Laplacian smoothing of unstructured grids*. Comm. Num. Meth. Engr.. page 455–464.

HATSCHBACH, P., 1995. *Měření rychlostního pole ve válci spalovacího motoru pomocí integrálních metod a laserové dopplerovské anemometrie*. Disertační práce. ČVUT v Praze. fakulta strojní.

HELENBROOK, B. T., 2003. *Mesh deformation using the biharmonic operator*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. page 1007– 1021.

HORÁČEK, J., K. KOZEL, P. PUNČOCHÁŘOVÁ, and J. FÜRST, 2008. *Unsteady numerical computation of airflow through vocal folds*. Proc. The 6th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics. Tampere. Finland. page 161-171.

HRŮZA, V., 2007. Modelování funkce hlasivek pomocí MKP. Dizertační práce, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007.

ISSA, R. I., 1986. *Solution of the implicitly discretized fluid flow equation by operator splitting*. Journal of Computational Physics 62. page 40–65.

JASAK, H., 1996. *Error analysis and estimation in the finite volume method with applications to fluid flow*. PhD thesis, Imperial College. University of London

JASAK, H., H. G. WELLER and A. D. Gosman, 1999. *High resolution NVD difference scheme for arbitrary unstructured meshes*. International Journal for Numerical Methods in Fluids 31. page 431–449.

JASAK, H. and Z. TUKOVI´C, 2004. *Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method*. Journal of Computational Physics.

JONES, W.P. and B.E. LAUNDER, 1972. *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15. page 301–314.

KOZUBKOVÁ, M., 2010. *Modelování proudění tekutin FLUENT, CFX* [online]. Vysoká škola bánská-Technická univerzita Ostrava. [vid. 12. 9. 2015].
Dostupné z: http://www.338.vsb.cz/PDF/Kozubkova-Fluent.pdf

KNUPP, P., 2006. *Formulation of a target-matrix paradigm for mesh optimization*. Technical Report SAND2006-2730J. Sandia National Laboratories. Albuquerque. NM.

KNUPP, P., 2009. *Target-matrix construction algorithms*. Technical Report SAND2009-7003P. Sandia National Laboratories. Albuquerque. NM.

LAUDER, B. E. and D. B. SPALDING, 1972. *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press. 1972.

LAUDER, B. E. and D. B. SPALDING, 1974. C*omputational Methods for Turbulent Flows*. Comp. Meth in Appl Mech & Eng'g. Vol 3. page 269-289.

LIAN, Y., J. STEEN, M. TRYGG-WILANDER and W. SHYY, 2003. *Low Reynolds number turbulent flows around a dynamically shaped airfoil*. Comput. Fluids 32. page 287-303.

LÖHNER, R. and C. YANG, 1996. *Improved ale mesh velocities for moving bodies*. Communications in Numerical Methods in Engineering. page 599–608.

MALLIKARJUNA, B. and J. M. HARSHAVARDHAN, 2013. *CFD Analysis of in-Cylinder Flow and Air-Fuel Interaction on Different Combustion Chamber Geometry in DISI Engine*. International Journal on Theoretical and Applied Research in Mechanical Engineering. 2. page 104-108.

MAO, Y. M. BUFFAT and D. JEANDEL, 1994. *Simulation of the turbulent flow inside the combustion chamber of a reciprocating engine with a finite element method*. J. Fluid Eng., 116. page 363-369.

MATUG, M., 2015. *Náhradní hlasivky pro generování zdrojového hlasu: Počítačové modelování funkce hlasivek.* Dizertační práce, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. 147 s.

MENTER, Fr., M. KUNTZ, and R. LANGTRY, 2003. *Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*. Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. HANJALIC, Y. NAGANO, and M. TUMMERS. Begell House. page 625 - 632.

NAUDASHER, E. and D. ROCKWELL, 1994. *Flow-Induced Vibrations*. A.A. Balkema. Rotterdam.

NOŽIČKA, J., 2004. *Mechanika tekutin*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze. 165 s. ISBN 80-01-02865-8.

Open FOAM - *The Open Source CFD Toolbox* User Guide. [online] Version 2.3.0. 25th August 2014. [vid. 6. 10. 2015].
Dostupné z: http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/UserGuide.pdf

PANTON, R. L., 2005. *Incompressible Flow*. John Wiley & Sons.

PATANKAR, S. V. and D. B. SPALDING, 1972. *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows.* International Journal of Heat and Mass Transfer 15.

PESKIN, C. S, 2002. *The immersed boundary method*. Acta Numerica. page 479–517.

POPE, S.B., 2000. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press. Cambridge

RHIE, C. M. and W. L. CHOW, 1983. *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing-edge separation*. AIAA Journal 21. page 1525–1532.

PŘÍHODA, J., P. LOUDA, 2009. *Matematické modelování turbulentního proudění*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze. 111 s. ISBN 987-80-01-03623-5.

ŘIDKÝ, V. and P. ŠIDLOF, 2013. *Parallel numerical simulation of airflow past an oscillating naca0015 airfoil,* Engineering Mechanics - Svratka 2013.

ŘIDKÝ, V. and P. ŠIDLOF, 2014 Parallel numerical simulation of oscillating airfoil NACA0015 in the channel due to flutter instability, EPJ Web of Conferences 67.

SAAD, I., S. BARI and S. N. HOSSAIN, 2013. *In-cylinder air flow characteristic generated by guide vane swirl and tumble device to improve air-fuel mixing in diesel engine using biodiesel*. Procedia Engineering. 56. page 363-383.

SCHOLZ, C., 2018. *Učební texty www.kvm.tul.cz*. [online] [vid. 28.6.2018]. Dostupné z: http://www.kvm.tul.cz/getFile/id:1958

SCIAMARELLA, D. and P. L. QUÉRÉ, 2008. *Solving for unsteady airflow in a glottal model with immersed moving boundaries*. European Journal of Mechanics - B/Fluids 27. page 42-53.

SRINIVASAN, G.R, J.A. EKATERINARIS and W. J. MC CROSKEY, 1995. *Evaluation of turbulence models for unsteady flows of an oscillating airfoil*. Comput. Fluids 24. page 833-861.

STONE, R., 1992. *Introduction to Internal Combustion Engines*. The Macmillan Press Ltd.. London.

SUH, J., S. H. FRANKEL, 2007. *Numerical simulation of turbulence transition and sound radiation for flow through a rigid glottal model*. J. Acoust. Soc. Am.. Vol. 121. No. 6. page 3728-3739.

ŠEMBERA, J.. 2004. *Mechanika tekutin* [online]. Technická univerzita v Liberci [vid. 15. 1.2014]. Dostupné z: http://www.nti.tul.cz/cz/images/e/e9/METskr.pdf

ŠIDLOF, P., J. HORÁČEK and V. ŘIDKÝ, 2013. *Parallel CFD simulation of flow in a 3D model of vibrating human vocal folds*. Computers & Fluid. Vol. 80. page 290-300.

ŠIDLOF P., S. ZÖRNER and A. HÜPPE, 2015. *A hybrid approach to computational aeroacoustics of human voice production*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology 14. page 473-488.

ŠIDLOF P., V., VLČEK, M. and ŠTĚPÁN, 2016. *Experimental investigation of flow induced vibration of a pitch-plunge NACA 0015 airfoil under deep dynamic stall*. Journal of Fluids and Structures 67. page 48-59. DOI 10.1016/j.jfluidstructs.2016.08.011.

ŠVANCARA, P., J. HORÁČEK and V. HRŮZA, 2008. *Development of FE Model of Interaction between Oscillating Vocal Folds and Acoustic Space of the Vocal Tract*. Proceedings of the 6th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics. Tampere. Finland. page 161-171.

ŠVANCARA, P., J. HORÁČEK and V. HRŮZA, 2011. *FE modelling of the fluid-structure-acoustic interaction for the vocal folds self-oscillation.* Vibration Problems ICOVP. page 801-807.

Le TALLEC, P. and J. MOURO, 2001. *Fluid structure interaction with large structural displacements*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engr. 190. page 3039-3067.

El TAHRY, S.H.. 1983. *K-epsilon equation for compressible reciprocating engine flows* AIAA Journal of Energy 7. page 345-353.

URUBA, V., 2009. *Turbulence*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze. 130 s. ISBN 987-80-01-04330-1.

VALÁŠEK, J., P. SVÁČEK and J. HORÁČEK, 2016. *Numerical solution of fluid-structure interaction represented by human vocal folds in airflow*. EPJ Web of Conferences. 114. 02130. 10.1051/epjconf/201611402130.

Vectis 2016. Vectis user manual. Version 2016.1. Ricardo Software.

WANG, B. and G. ZHA, 2011. *Detached-eddy simulation of transonic limit cycle oscillations using high order schemes*. Comput. Fluids 52. page 58-68.

WESSELING, P., 2001. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer- Verlag Berlin.

WHITE, F. M., 2006. *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill.

XUE, Q., X. ZHENG, R. MITTAL, S. BIELAMOWICZ, 2014. *Subject-specific computational modeling of human phonation.* J. Acoust. Soc. Am.. Vol. 135. No. 3. page 1445-1456.

YE, T., R. MITTAL, H. UDAYKUMAR, and W. SHYY, 2000. *An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries.* Journal of Computational Physics 156. page 1121–1151.

YIN, C., Z. ZHANG, Y. SUN, T. SUN and R. ZHANG, 2016. *Effect of the piston top contour on the tumble flow and combustion features of a GDI engine with a CMCV: a CFD study*. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 10. page 311-329.

ZHANG, CH., W. ZHAO, S. H. FRANKEL and L. MONGEAU, 2002. *Computational aeroacoustics of phonation, Part II: Effects of flow parameters and ventricular folds*. J. Acoust. Soc. Am.. Vol. 112. page. 2147-2154.

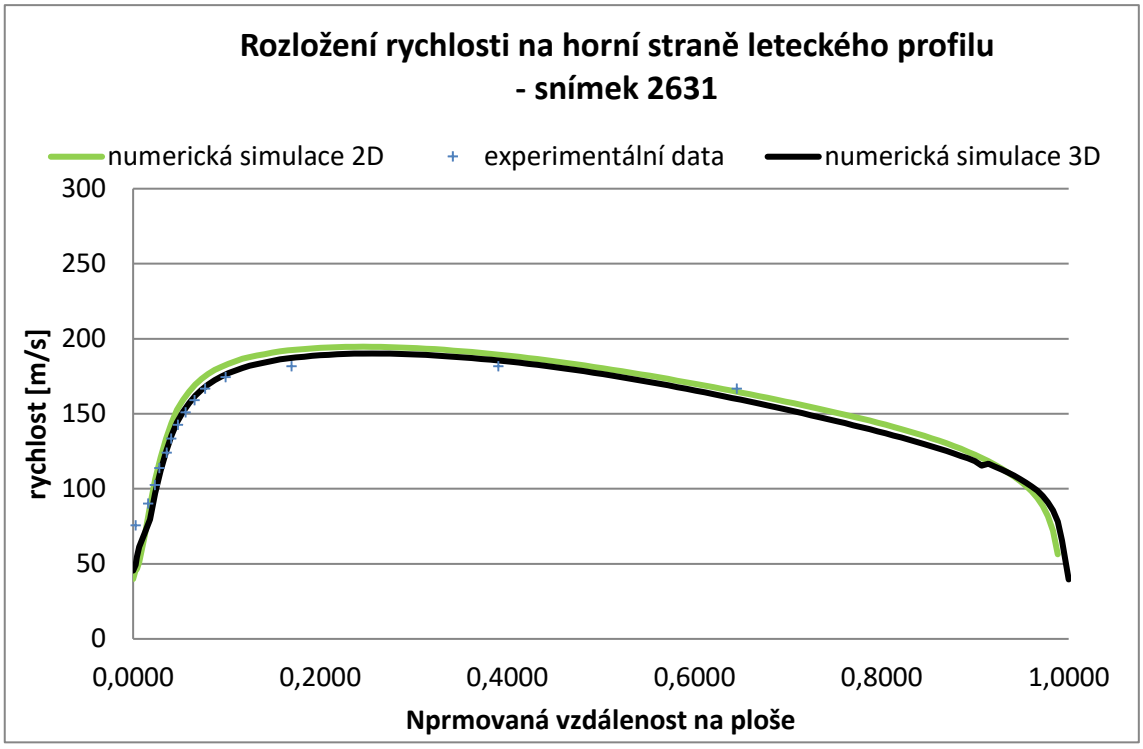
ZHAO, D., Q. ZHANG and Y. TAN, 2009. *Random flutter of a 2-DOF nonlinear airfoil in pitch and plunge with freeplay in pitch*. Nonlinear Dynamics 58. page 643-654.

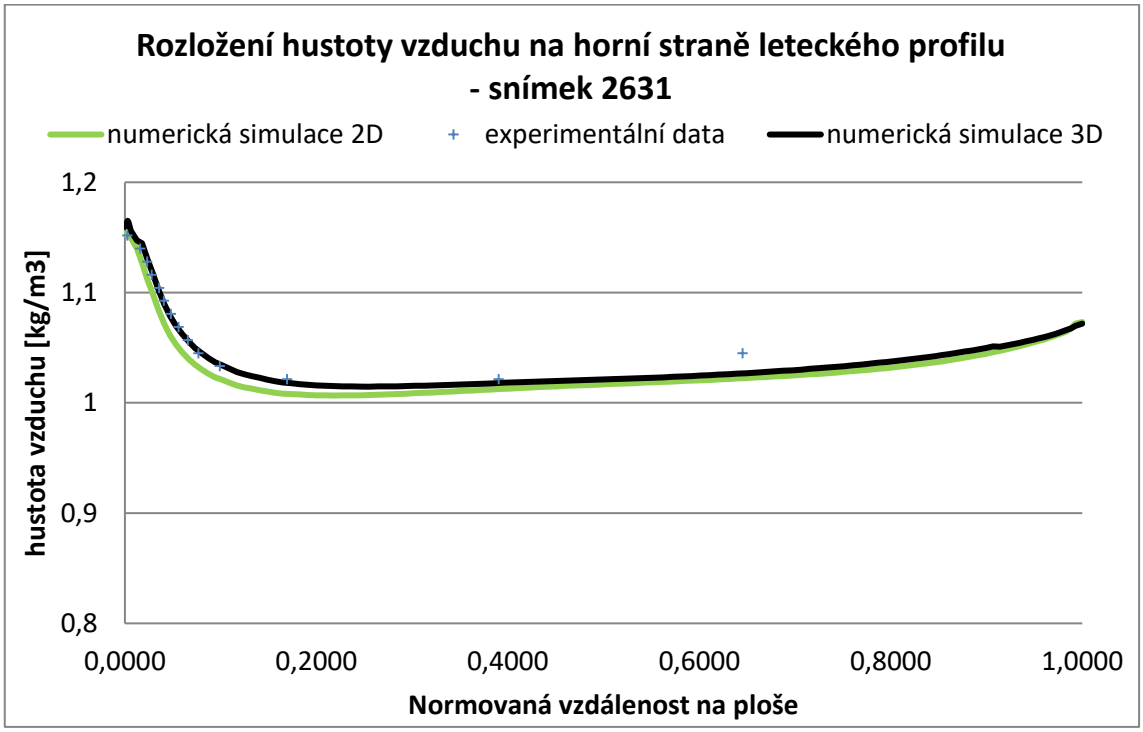
ZHAO, D., Q. ZHANG and W. WANG, 2009a. *Random bifurcation and power spectrum analysis of a 2-DOF airfoil with freeplay nonlinearity in pitch*. J. Vib. Shock 28. page 86-89.

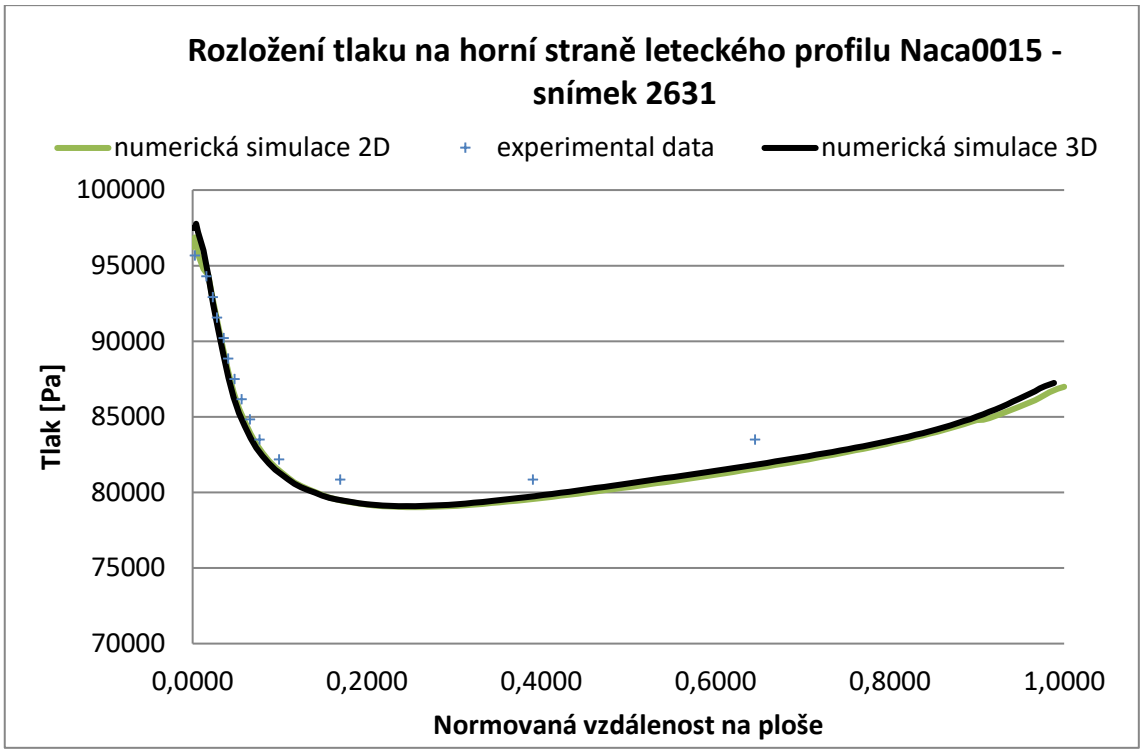
ZÖRNER, S., P. ŠIDLOF, A. HÜPPE and M. KALTENBACHER, 2016. *Flow and Acoustic Effects in the Larynx for Varying Geometries*. Acta Acustica united with Acustica 102(2). page 257-267.

A Obsah CD

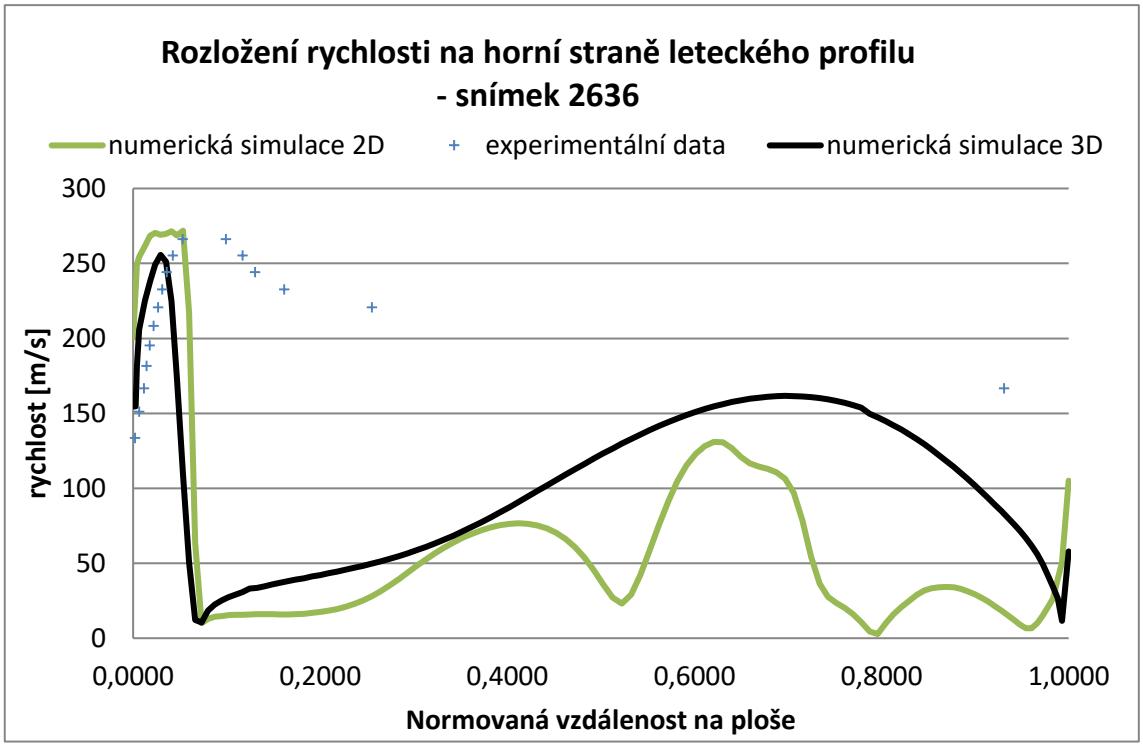
B Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2631

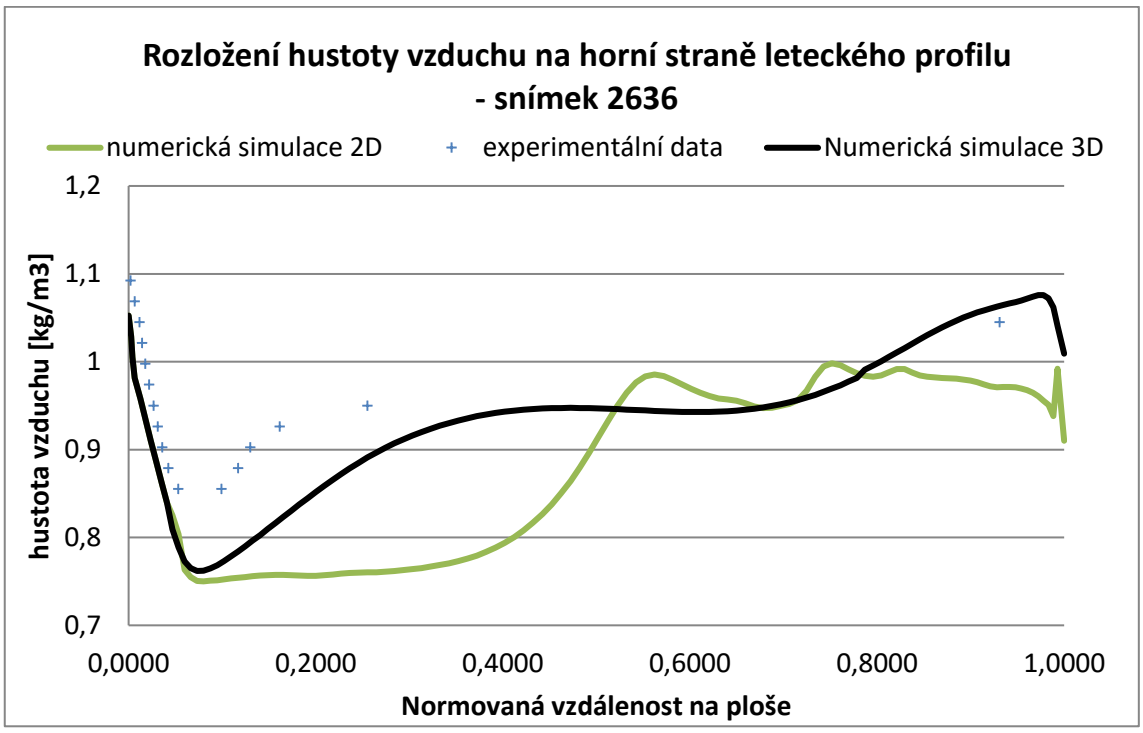


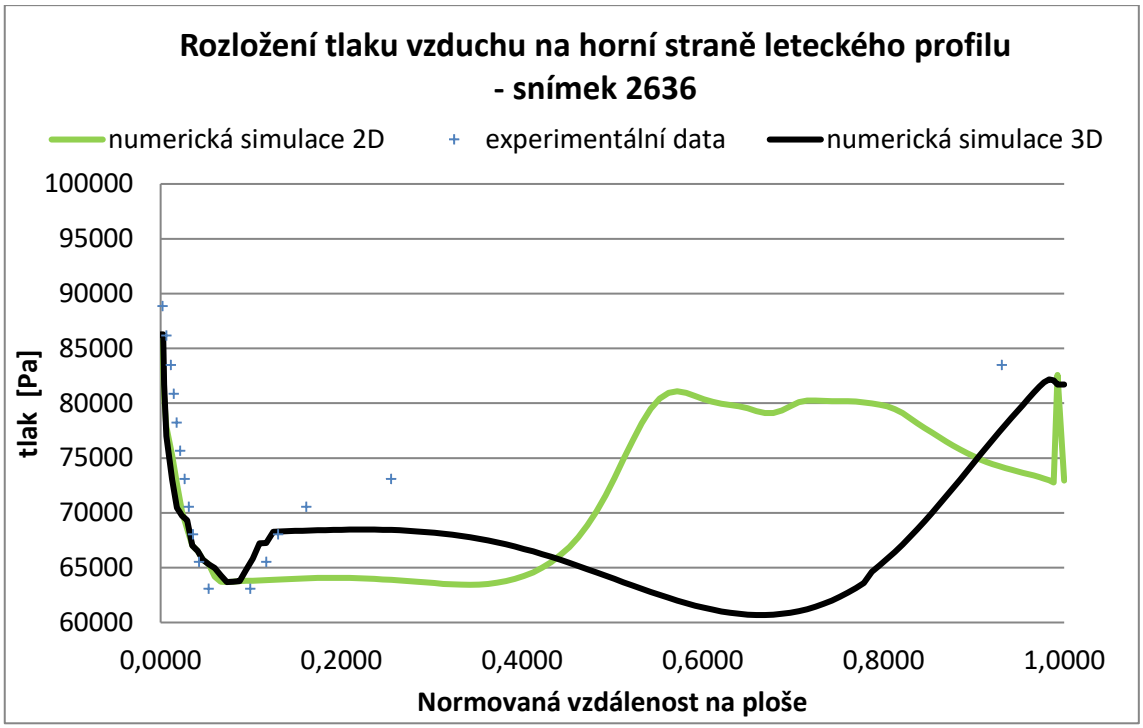



Rozložení tlaku na horní straně leteckého profilu Naca0015 - snímek 2631
numerická simulace 2D
experimental data
numerická simulace 3D
100000
95000
90000
85000
80000
75000
70000
Tlak [Pa]
0,0000
0,2000
0,4000
0,6000
0,8000
1,0000
Normovaná vzdálenost na ploše

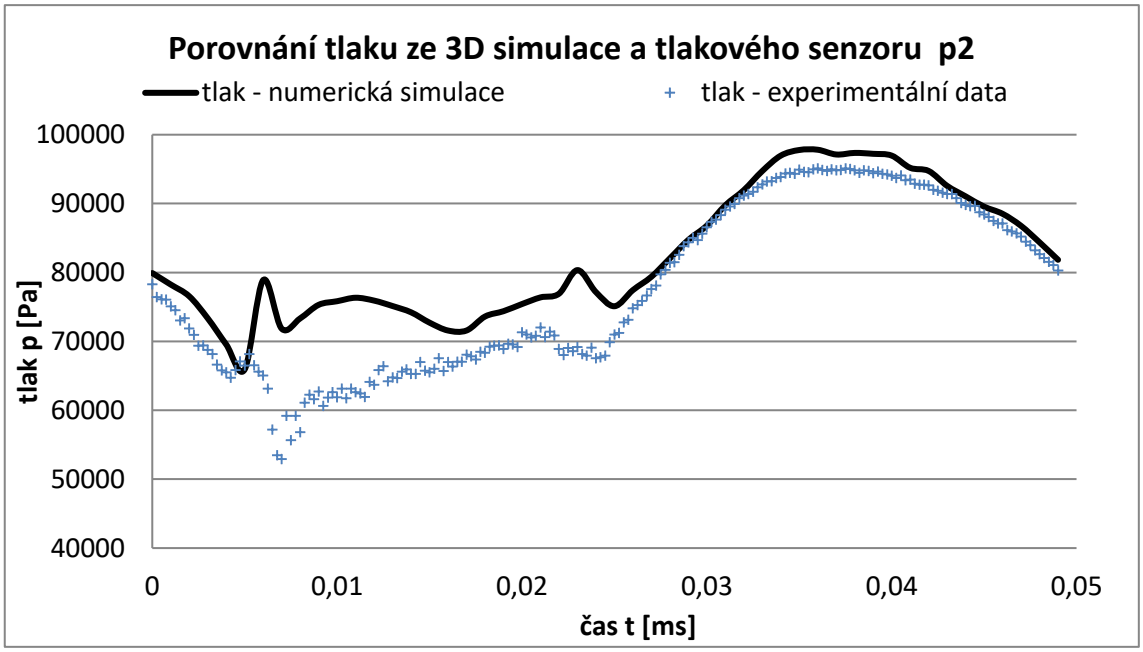
C Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2636

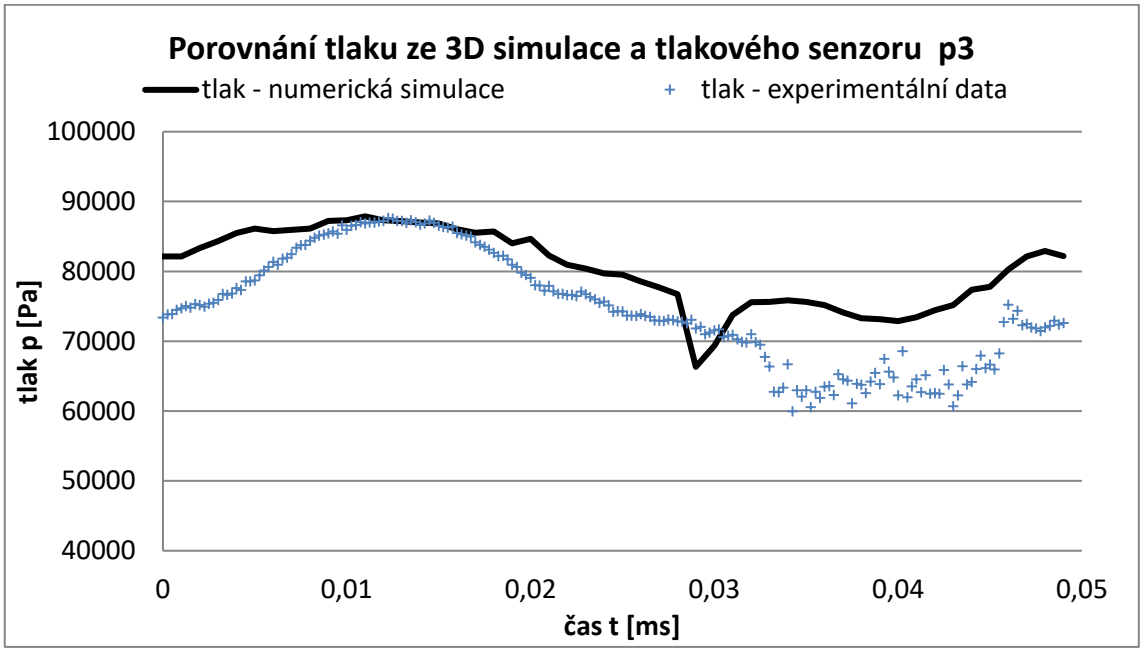


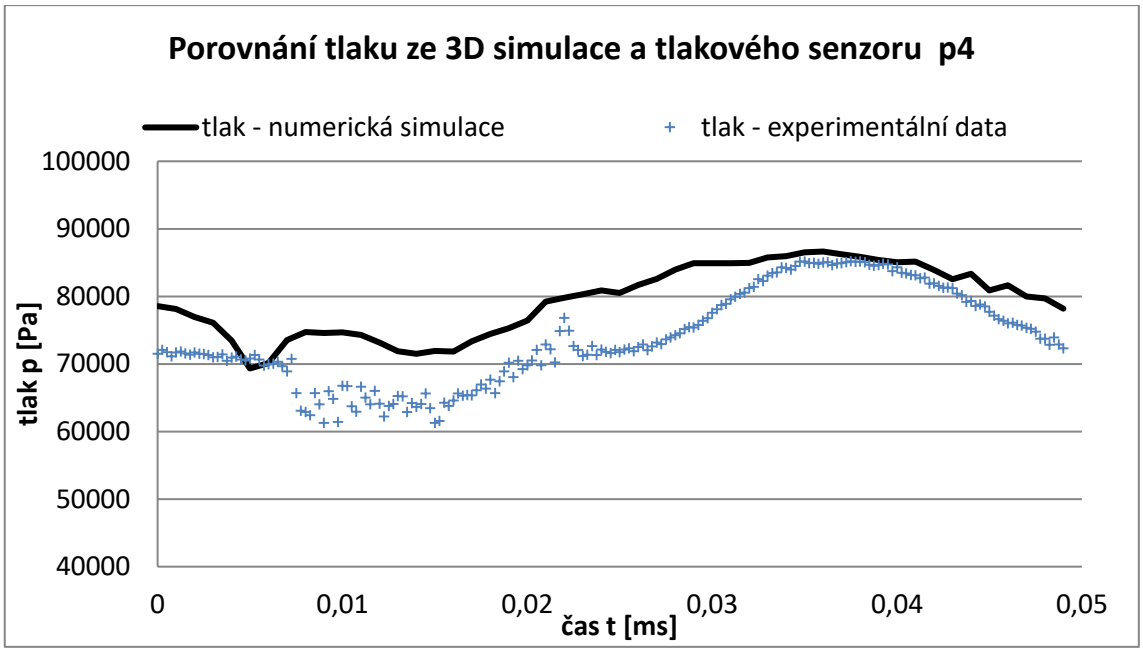


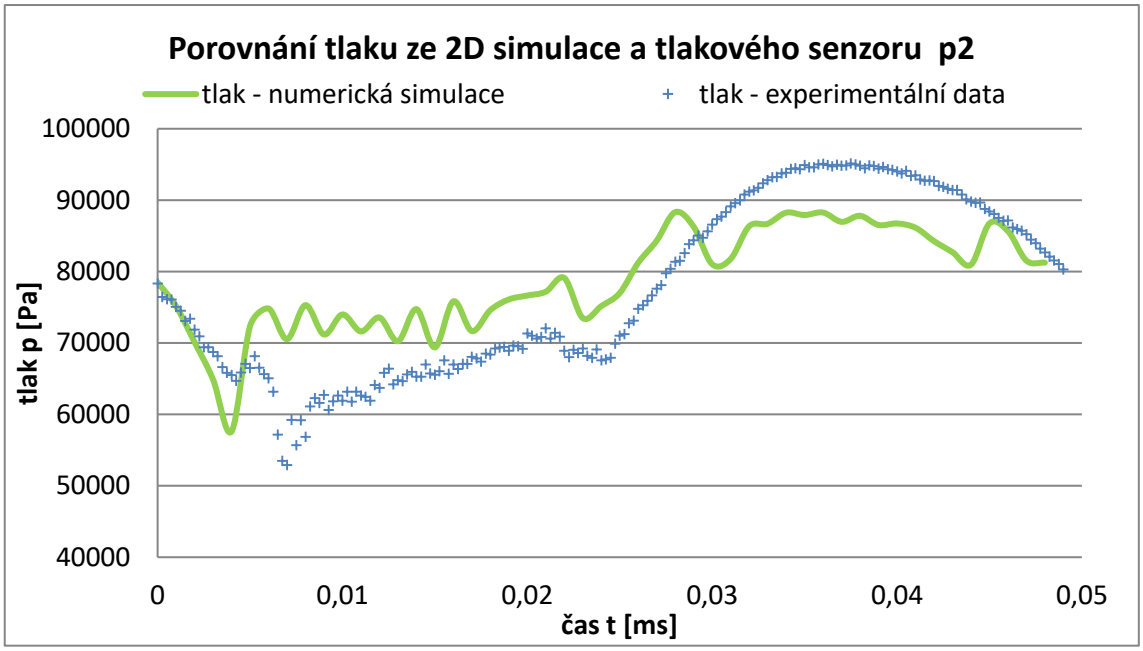

Rozložení tlaku vzduchu na horní straně leteckého profilu
- snímek 2636
numerická simulace 2D
experimentální data
numerická simulace 3D
100000
95000
90000
85000
80000
75000
70000
65000
60000
tlak [Pa]
0,0000
0,2000
0,4000
0,6000
0,8000
1,0000
Normovaná vzdálenost na ploše

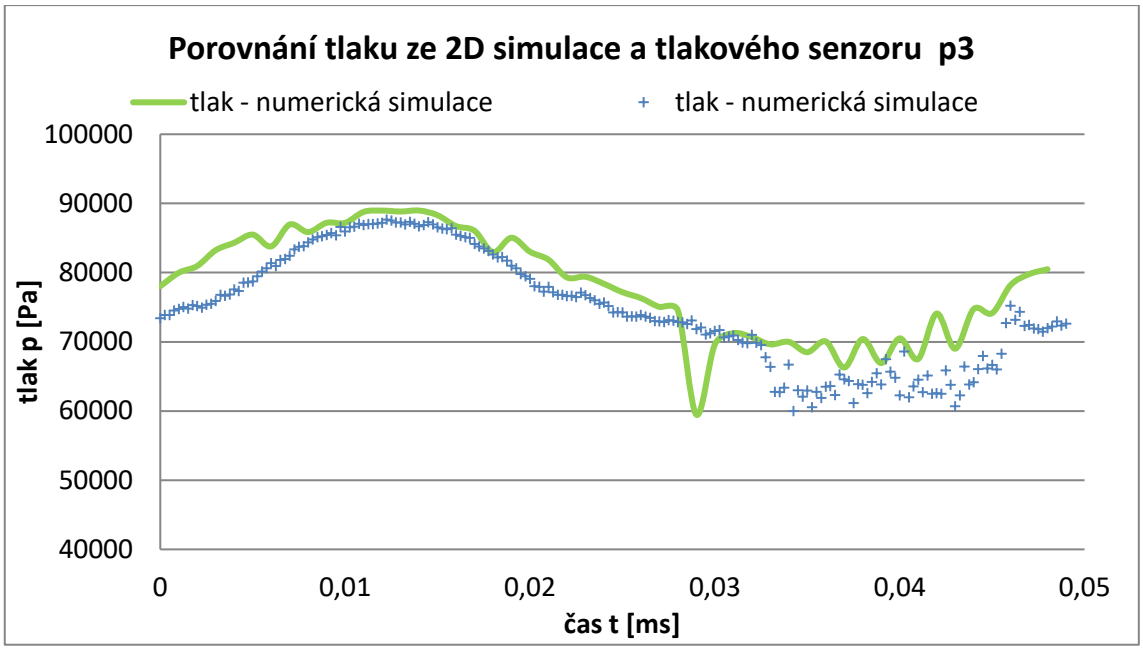
D Rozložení tlaku rychlosti a hustoty na horním povrchu leteckého profilu pro snímek 2636

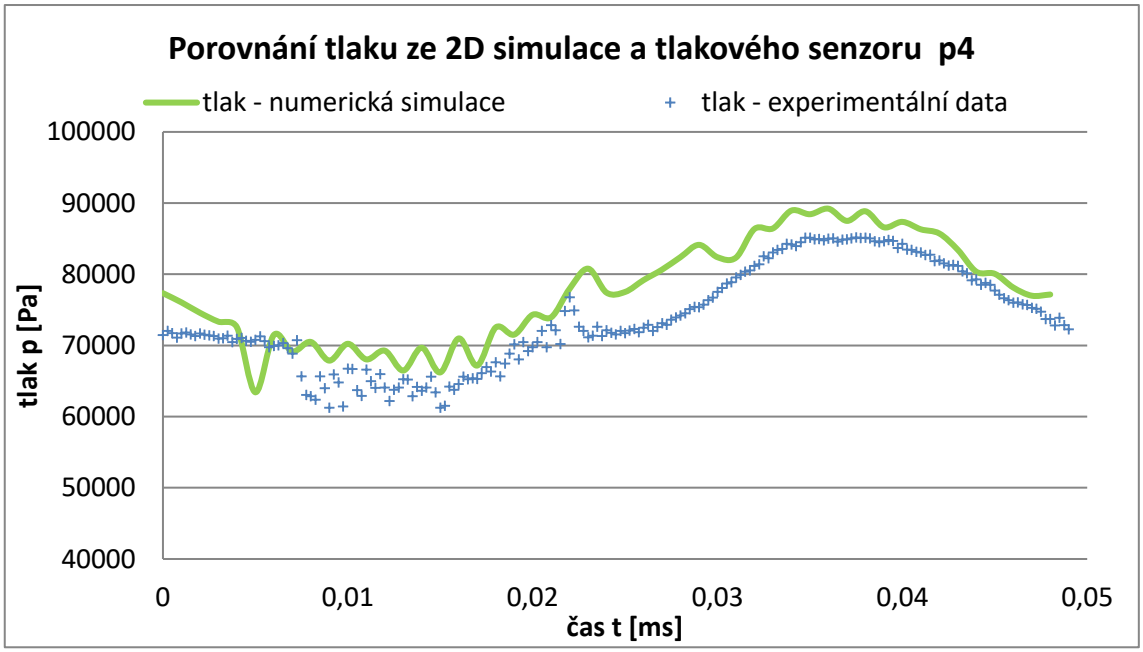





Porovnání tlaku ze 3D simulace a tlakového senzoru p4
tlak - numerická simulace
tlak - experimentální data
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
tlak p [Pa]
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
čas t [ms]


Porovnání tlaku ze 2D simulace a tlakového senzoru p2
tlak - numerická simulace
tlak - experimentální data
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
tlak p [Pa]
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
čas t [ms]


Porovnání tlaku ze 2D simulace a tlakového senzoru p3
tlak - numerická simulace
tlak - numerická simulace
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
tlak p [Pa]
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
čas t [ms]


Porovnání tlaku ze 2D simulace a tlakového senzoru p4
tlak - numerická simulace
tlak - experimentální data
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
tlak p [Pa]
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
čas t [ms]