UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Pavlína Listíková

APLIKACE PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ

Olomouc 2015 vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne

Pavlína Listíková

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení bakalářské práce, poskytování cenných rad a za veškerý její čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Tématem mé bakalářské práce jsou Aplikace parciálních derivací. Volbu tématu jsem zvolila z toho důvodu, že při studiu matematiky na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci mě v předmětu Matematická analýza 3 parciální derivace velice zaujaly. Tudíž jsem se rozhodla jimi zabývat a především zjistit, jaké mají využití.

Cílem mé bakalářské práce je pojednat o parciálních derivacích a ukázat jejich využití na aplikačních úlohách.

Práci mám rozdělenou na čtyři hlavní kapitoly – parciální derivace, totální diferenciál, Taylorův vzorec a lokální extrémy funkcí více proměnných.

V první kapitole definuji parciální derivace 1. řádu a vyšších řádů, uvádím, jak se parciální derivace počítají a jaký mají geometrický význam. Na základě geometrické interpretace parciálních derivací vymezuji pojem tečná rovina a normála.

V druhé kapitole se zabývám totálním diferenciálem. Konkrétně totálním diferenciálem 1. řádu, jeho geometrickým významem, vztahem mezi diferenciálem a přírůstkem funkce a totálními diferenciály vyšších řádů.

K diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných neodmyslitelně patří Taylorův vzorec, kterému je věnována kapitola třetí.

Poslední kapitola bakalářské práce obsahuje důležité definice, věty a pojmy týkající se lokálních extrémů funkcí více proměnných. Zaměřila jsem se jen na vyšetřování lokálních extrémů funkcí dvou a tří proměnných.

Na závěr práce jsem přiložila přílohu se základními vzorci pro derivování, jejichž znalost je nezbytná k parciálnímu derivování.

Každá kapitola obsahuje podkapitolu příklady a podkapitolu aplikační úlohy. Příklady jsou založeny na procvičení základní problematiky, např. umět spočítat parciální derivaci, totální diferenciál apod. Zatímco aplikační úlohy jsou zaměřeny na jednotlivé aplikace. Zadáním příkladů a aplikačních úloh jsem se inspirovala ze sbírek a učebnic: [1],[2], [3], [4], [5], [8]. Jednotlivé příklady a úlohy jsem vždy vybírala neřešené a sama provedla jejich řešení.

Práci jsem se snažila zpestřit obrázky a grafy. Obrázky jsem vytvářela v programu Malování a prostřednictvím předdefinovaných obrazců ve Wordu. Grafy funkcí dvou proměnných jsem vykreslila pomocí programu Maple 7.

1 Parciální derivace

S pojmem parciální derivace se setkáváme u funkcí dvou a více proměnných. Kdežto u funkcí jedné proměnné hovoříme pouze o derivaci.

Počátky diferenciálního počtu funkcí více proměnných řadíme do druhé poloviny 18. století. Zmínit je třeba významné matematiky, kteří se v této době podíleli na vybudování teorie funkcí více proměnných. Byl to Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange a Adrien Marie Legendre.

V pozdější době se funkcemi více proměnných zabývali Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), Camille Jordan (1838−1922), Hermann Amandus Schwarz (1843−1921) a Otto Stolz (1842−1905). (Škrášek a Tichý, 1983)

1.1 Parciální derivace 1. řádu

Definice 1

Nechť funkce *f*: $R^2 \to R$ je definovaná v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.

To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

(Došlá, 2006, s. 25)

Poznámka:

Má-li funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace ve všech bodech množiny $N \subset D(f)$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Označujeme je $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, popřípadě $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, z_x, z_y, z'_x, z'_y.

(Došlá, 2006, s. 25)

Parciální derivace funkcí *n* proměnných

Počet parciálních derivací funkce $u = f(X)$ o n argumentech $x_1, \ldots, x_n$ je n. Jsou to tyto parciální derivace:

$$f'_{x_1}(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_1},$$
$$\vdots$$
$$f'_{x_n}(X) = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lim_{h_n \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_n}.$$

(Škrášek a Tichý, 1983, s. 612−613)

1.2 Počítání parciálních derivací

Parciální derivace počítáme tak, že proměnnou, podle které nederivujeme, považujeme za konstantu (Kotvalt, 2011). To plyne ze samotné definice parciální derivace.

Máme-li například parciálně zderivovat funkci dvou proměnných $f(x, y)$ podle proměnné x, tak x je pro nás proměnná a y konstanta. Obdobně je tomu při výpočtu parciální derivace podle proměnné y, kdy y považujeme za proměnnou a x za konstantu.

Při počítání parciálních derivací platí všechny vzorce a pravidla jako při derivování funkcí jedné proměnné. Seznam základních vzorců pro derivování je k dispozici v Příloze 1. Došlá (2006, s. 25−26) uvádí daná pravidla přímo pro funkci n proměnných v následující větě.

Věta 1

Nechť funkce $f, g : R^n \to R$ mají parciální derivaci podle proměnné x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci podle x_i a platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)+\frac{\partial}{\partial x_i}g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)-\frac{\partial}{\partial x_i}g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)}{g^2(x)},$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí za předpokladu, že $g(x)\neq 0$.

Důkaz:

Najdeme na s. 500 v literatuře Škrášek, J. a Z. Tichý. *Základy aplikované matematiky 1*. Praha: SNTL, 1983. 876 s. Bez ISBN.

1.3 Geometrický význam parciálních derivací

U funkcí jedné proměnné pojem derivace představuje směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Podobný geometrický význam mají i parciální derivace funkce dvou proměnných.

Z geometrického hlediska představuje parciální derivace $f'_x(x_0,y_0)$ směrnici $tg\,\alpha$ tečny t_1, sestrojené v bodě $B=[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ k řezu plochy $z=f(x,y)$, určenému rovnicemi $z=\varphi(x)=f(x,y_0)$, $y=y_0$.

Je tedy

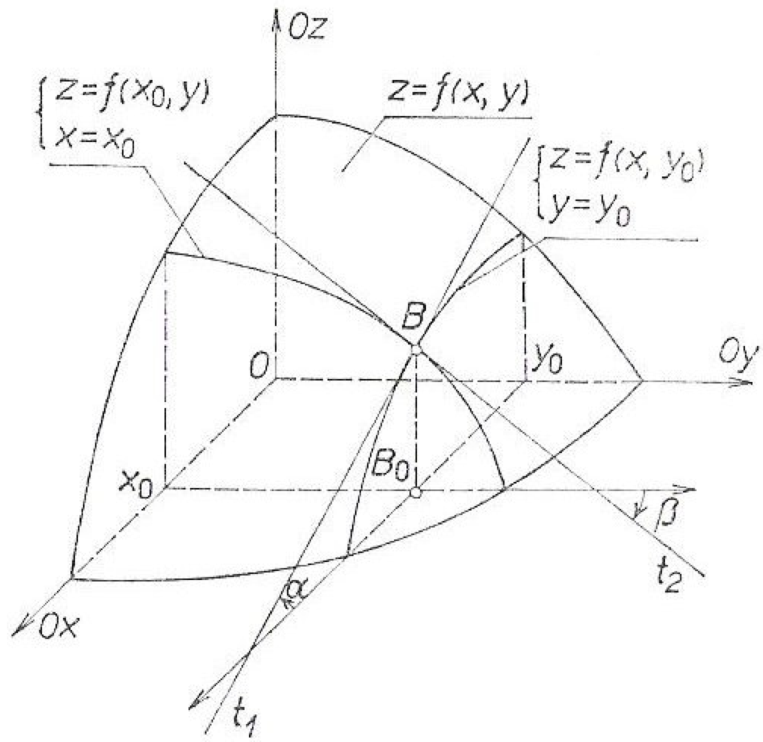
$$tg\,\alpha=f'_x(x_0,y_0),\text{ viz obrázek 1.}$$

Parciální derivace $f'_y(x_0,y_0)$ je směrnice $tg\,\beta$ tečny t_2, sestrojené v bodě $B=[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ k řezu plochy $z=f(x,y)$, určenému rovnicemi $z=\psi(y)=f(x_0,y)$, $x=x_0$.

Platí tedy

$$tg\,\beta=f'_y(x_0,y_0),\text{ viz obrázek 1.}$$

(Škrášek a Tichý, 1983, s. 613−614)



Obrázek 1. Geometrický význam parciálních derivací (zdroj: Škrášek a Tichý (1983))

1.4 Parciální derivace vyšších řádů

Definice 2

Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci parciální derivací 2. řádu podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo také $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci smíšenou parciální derivací 2. řádu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Obdobně se definují parciální derivace 2. řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Parciální derivace n-tého řádu $(n \geq 3)$ definujeme jako parciální derivace derivací $(n-1)$-ního řádu. (Došlá, 2006, s. 28)

Škrášek a Tichý (1983) se ve své publikaci zmiňují, že na označení parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ atd. se podílel slavný matematik Adrien Marien Legendre (1752-1833).

Příklad: Určete parciální derivace 2. řádu funkce $f(x, y) = 6x^2 + 2xy$.

Definiční obor této funkce je $D(f) = R^2$.

Nejprve vypočítáme parciální derivace 1. řádu

$$f_x'(x, y) = 12x + 2y,$$

$$f_y'(x, y) = 2x.$$

Parciální derivace 2. řádu jsou

$$f_{xx}''(x, y) = 12,$$

$$f_{xy}''(x, y) = 2,$$

$$f_{yx}''(x, y) = 2,$$

$$f_{yy}''(x, y) = 0.$$

Parciálních derivací 2. řádu funkce $f(x, y) = 6x^2 + 2xy$ je celkem 4 $(2^2 = 4)$.

Poznámka:

Podíváme-li se u předchozího příkladu na jednotlivé výsledky parciálních derivací 2. řádu, zjistíme, že f_{xy}'' a f_{yx}'' jsou si rovny. U těchto smíšených derivací nezáleželo na pořadí argumentů, podle nichž jsme derivovali.

Nyní si položme otázku: „ Je tomu tak vždy?“. Odpověď na tuto otázku nám dává Schwarzova věta.

Věta 2 (Schwarzova věta)

Jestliže smíšené parciální derivace f_{xy}'', f_{yx}'' existují na okolí $U(A)$ a jsou spojité v bodě $A=[x_0, y_0]$, pak nutně jsou si rovny, tj.

$$f_{xy}''(A) = f_{yx}''(A).$$

(Škrášek a Tichý, 1983, s. 616)

Důkaz:

Proveden na s. 616 v literatuře Škrášek, J. a Z. Tichý. *Základy aplikované matematiky1*. Praha: SNTL, 1983. 876 s. Bez ISBN.

1.5 Tečná rovina a normála

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má spojité parciální derivace v bodě $B_0 = [x_0, y_0]$. Z geometrického významu parciálních derivací víme, že $f_x'(B_0)$, $f_y'(B_0)$ představují směrnice tečen t_1 a t_2, sestrojených v bodě $B=[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ k řezům plochy $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$, popř. $x = x_0$ (viz obrázek 1).

Rovina, která je určená tečnami t_1, t_2, se nazývá **tečná rovina** plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B=[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Nyní určíme rovnici zmíněné tečné roviny. Rovina prochází bodem $B=[x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$, takže její rovnice má tvar

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=z-z_0.$$

Normálový vektor $\vec{n} = (-a, -b, 1)$ dané roviny je kolmý k oběma tečnám t_1, t_2, a tedy i k jejich směrovým vektorům

$$\vec{s}_1 = (1, 0, f_x'(B_0)),\ \vec{s}_2 = (0, 1, f_y'(B_0)).$$

Odtud plyne, že

$$\vec{n}\cdot\vec{s}_1 = -a + f_x'(B_0) = 0,\ \vec{n}\cdot\vec{s}_2 = -b + f_y'(B_0) = 0,$$

tedy

$$a = f_x'(B_0),\ b = f_y'(B_0).$$

Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B=[x_0, y_0, z_0]$ je tvaru

$$\boxed{z - z_0 = (x - x_0) f_x'(B_0) + (y - y_0) f_y'(B_0)}.$$

Přímka, která je kolmá na tečnou rovinu plochy v jejím bodě dotyku B, se nazývá **normála** plochy v bodě B. Její směrový vektor je proto normálový vektor

$$\vec{n} = (-f_x'(B_0), -f_y'(B_0), 1),$$

takže její parametrické rovnice mají tvar

$$x = x_0 - f_x'(B_0) \cdot t,$$

$$y = y_0 - f_y'(B_0) \cdot t,$$

$z = z_0 + t$, kde $t \in R$ a $z_0 = f(B_0)$.

(Škrášek a Tichý, 1983)

1.6 Příklady

1. příklad Spočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu těchto funkcí:

a) $f(x, y, z) = 6x^2 y + 2xz - 3yz^3$;

b) $f(x, y) = xy + \dfrac{x}{y}$;

c) $f(x, y) = arctg\, \dfrac{y}{x}$.

Řešení:

a) $f(x, y, z) = 6x^2 y + 2xz - 3yz^3$

$D(f) = R^3$.

Funkce $f(x, y, z)$ bude mít 3 parciální derivace 1. řádu a 9 parciálních derivací 2. řádu.

Parciální derivace 1. řádu jsou

$$f_x'(x, y, z) = 12xy + 2z,$$

$$f_y'(x, y, z) = 6x^2 - 3z^3,$$

$$f_z'(x,y,z) = 2x - 9yz^2 .$$

Spočítat parciální derivace 2. řádu znamená, že budeme počítat parciální derivace funkce $f_x'(x,y,z) = 12xy + 2z$, $f_y'(x,y,z) = 6x^2 - 3z^3$ a $f_z'(x,y,z) = 2x - 9yz^2$ podle každé proměnné. Derivace jednotlivých funkcí si postupně rozepíšeme, abychom na žádnou nezapomněli.

Tedy funkce $f_x'(x,y,z) = 12xy + 2z$ má parciální derivace

$$f_{xx}''(x,y,z) = 12y$$

$$f_{xy}''(x,y,z) = 12x$$

$$f_{xz}''(x,y,z) = 2 ,$$

funkce $f_y'(x,y,z) = 6x^2 - 3z^3$

$$f_{yx}''(x,y,z) = 12x$$

$$f_{yy}''(x,y,z) = 0$$

$$f_{yz}''(x,y,z) = -9z^2$$

a funkce $f_z'(x,y,z) = 2x - 9yz^2$

$$f_{zx}''(x,y,z) = 2$$

$$f_{zy}''(x,y,z) = -9z^2$$

$$f_{zz}''(x,y,z) = -18yz .$$

b) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y} = xy + xy^{-1}$

$D(f) = \{[x,y] \in R^2 : y \neq 0\}$

$f_x'(x,y) = y + \dfrac{1}{y}$

$f_y'(x,y) = x + (-xy^{-2}) = x - \dfrac{x}{y^2}$

$$f''_{xx}(x, y) = 0$$

$$f''_{xy}(x, y) = 1 + (-1)y^{-2} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = 0 - (-2)xy^{-3} = \frac{2x}{y^3}$$

c) $f(x, y) = arctg\,\dfrac{y}{x}$

$$D(f) = \{[x, y] \in R^2 : x \neq 0\}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{(-y)}{x^2} = \frac{-y}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x} = \frac{1}{x + \frac{y^2}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{(-1) \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

1.7 Aplikační úlohy

1. úloha Určete rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z=\dfrac{1}{xy}$ v bodě $B = [1;1;?]$.

Řešení:

Rovnice tečné roviny τ: $z-z_0=(x-x_0)f_x'(B_0)+(y-y_0)f_y'(B_0)$.

Dopočítáme třetí souřadnici bodu B

$$z_0 = \frac{1}{1\cdot 1} = 1,$$

takže bod $B = [1;1;1]$.

$B_0 = [x_0, y_0] = [1,1]$.

Potřebujeme spočítat parciální derivace 1. řádu v bodě $B_0 = [x_0, y_0] = [1,1]$

$$f_x'(x,y) = \frac{0\cdot xy - 1\cdot y}{(xy)^2} = -\frac{1}{x^2 y}, \qquad f_x'(1,1) = -\frac{1}{1^2\cdot 1} = -1,$$

$$f_y'(x,y) = \frac{0\cdot xy - 1\cdot x}{(xy)^2} = -\frac{1}{xy^2}, \qquad f_y'(1,1) = -\frac{1}{1\cdot 1^2} = -1.$$

V tuto chvíli jsme již schopni zapsat rovnici tečné roviny

$$\tau:\ z-1 = (x-1)\cdot(-1) + (y-1)\cdot(-1)$$

$$\tau:\ z-1 = -x+1-y+1$$

$$\tau:\ x+y+z-3 = 0.$$

Normálový vektor $\vec{n} = (1;1;1)$.

Parametrické rovnice normály n:

$$x = 1+t$$

$$y = 1+t$$

$$z = 1+t, \text{ kde } t\in R.$$

2. úloha Napište rovnici tečné roviny τ plochy $z = \ln(x^2 + 2y)$, která je rovnoběžná s rovinou α : $x + y - z - 4 = 0$. Určete bod dotyku *T*.

Řešení:

Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ je tvaru

$$z - z_0 = (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0).$$

V našem případě $z = f(x, y) = \ln(x^2 + 2y)$.

Parciální derivace 1. řádu v bodě $[x_0, y_0]$

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + 2y_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{2}{x_0^2 + 2y_0}.$$

Normálový vektor tečné roviny τ je

$$\vec{n}_\tau = \left(\frac{2x_0}{x_0^2 + 2y_0}, \frac{2}{x_0^2 + 2y_0}, -1 \right)$$

Normálový vektor roviny α je $\vec{n}_\alpha = (1,1,-1)$.

Tečná rovina τ má být rovnoběžná s rovinou α, proto musí platit

$$\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + 2y_0}, \frac{2}{x_0^2 + 2y_0}, -1 \right) = k \cdot (1,1,-1).$$

Z toho plyne, že

$$\frac{2x_0}{x_0^2 + 2y_0} = k \quad (1)$$

$$\frac{2}{x_0^2 + 2y_0} = k \quad (2)$$

$$-1 = -k \Rightarrow k = 1$$

$k = 1$ dosadíme do vztahu (1), (2) a řešíme soustavu 2 rovnic o dvou neznámých

$$\frac{2x_0}{x_0^2 + 2y_0} = 1$$

$$\frac{2}{x_0^2 + 2y_0} = 1$$

$$2x_0 = x_0^{\,2} + 2y_0$$
$$2 = x_0^{\,2} + 2y_0$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_0 &= x_0^{\,2} + 2y_0 \\ -2 &= -x_0^{\,2} - 2y_0 \end{aligned}\right\} +$$

$$2x_0 - 2 = 0$$
$$x_0 = 1$$

Dosazením $x_0 = 1$ například do $2x_0 = x_0^{\,2} + 2y_0$, dostaneme $y_0 = \dfrac{1}{2}$.

Třetí souřadnici z_0 bodu T dopočítáme jako $z_0 = f(1, \frac{1}{2}) = \ln(1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = \ln 2$.

Bod dotyku T má souřadnice $T = \left[1, \dfrac{1}{2}, \ln 2\right]$.

Abychom mohli zapsat rovnici tečné roviny τ, je zapotřebí ještě spočítat parciální derivace 1. řádu v bodě $[x_0, y_0] = \left[1, \dfrac{1}{2}\right]$

$$f_x'(1, \tfrac{1}{2}) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 1,$$

$$f_y'(1, \tfrac{1}{2}) = \frac{2}{1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

Rovnice tečné roviny τ

$$\tau\colon\; z - \ln 2 = (x - 1) \cdot 1 + (y - \tfrac{1}{2}) \cdot 1$$

$$\tau\colon\; z - \ln 2 = x - 1 + y - \frac{1}{2}$$

$$\tau\colon\; x + y - z - \frac{3}{2} + \ln 2 = 0\,.$$

2 Totální diferenciál

Po zavedení parciálních derivací se budeme zabývat totálním diferenciálem. Totální diferenciál je v některých literaturách označován úplným diferenciálem.

2.1 Totální diferenciál 1. řádu

Definice 3

1. Má-li funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y na okolí $U(B_0;\delta)$, nazýváme úplným (nebo totálním) diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0, y_0]$ výraz

$$df(B_0) = f'_x(B_0)h + f'_y(B_0)p,$$

kde $h = x - x_0$, $p = y - y_0$ jsou libovolné přírůstky argumentů x, y, pokud bod $P = [x, y] = [x_0 + h, y_0 + p]$ patří do okolí $U(B_0;\delta)$.

2. Analogicky u funkce $u = f(X)$ o n argumentech $x_1, \ldots, x_n$, která má spojité všechny parciální derivace prvního řádu na okolí $U(A;\delta)$, nazýváme úplným (totálním) diferenciálem funkce $f(X)$ v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ výraz

$$df(A) = f'_{x_1}(A)h_1 + f'_{x_2}(A)h_2 + \ldots + f'_{x_n}(A)h_n,$$

kde $h_v = x_v - a_v$ $(v = 1, 2, \ldots, n)$ jsou libovolné přírůstky argumentů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pokud bod $X = [x_1, \ldots, x_n]$ patří do okolí $U(A;\delta)$.

(Škrášek a Tichý, 1983, s. 620−621)

Definice 4

Funkce $z = f(x, y)$ se nazývá diferenciabilní v bodě B_0, existují-li v okolí $U(B_0)$ parciální derivace f'_x, f'_y. Jsou-li v bodě B_0 navíc spojité, nazývá se funkce spojitě diferenciabilní v bodě B_0. (Navrátil, 2005, s.43)

Druhý tvar totálního diferenciálu

Vezmeme-li v úvahu funkci $f(x, y) = x$, pak pro její úplný diferenciál platí

$$dx = 1 \cdot h + 0 \cdot p = h\,.$$

Podobně pro funkci $f(x, y) = y$ dostaneme úplný diferenciál

$$dy = 0 \cdot h + 1 \cdot p = p$$

Z toho vyplývá, že přírůstky h, p můžeme považovat za diferenciály argumentů x, y. Tedy vzorec pro úplný diferenciál $df(B_0) = f'_x(B_0)h + f'_y(B_0)p$ lze psát ve tvaru

$$\boxed{dz = f'_x(B_0)dx + f'_y(B_0)dy.}$$

(Škrášek a Tichý, 1983, s. 621)

2.2 Geometrický význam totálního diferenciálu

Porovnáme-li rovnici tečné roviny v bodě $B = [x_0, y_0, z_0]$ na ploše $z = f(x, y)$

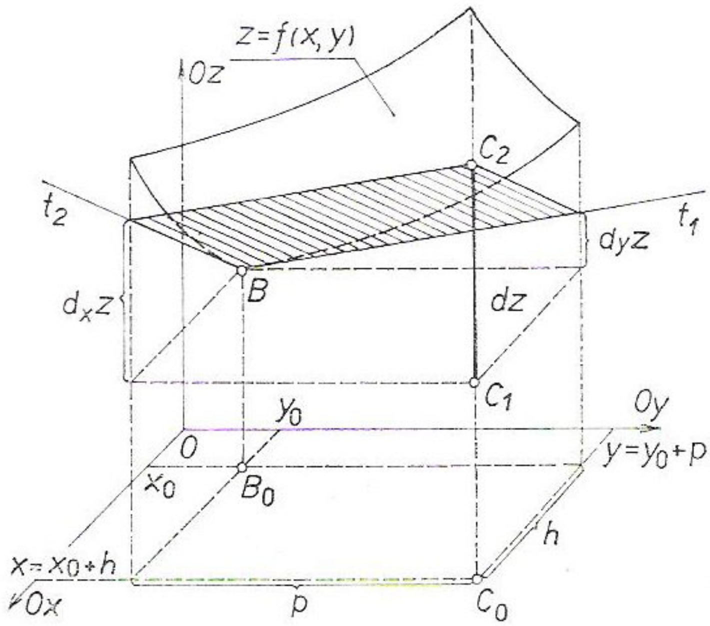
$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(B_0) + (y - y_0)f'_y(B_0)$$

se vzorcem totálního diferenciálu v bodě $B_0 = [x_0, y_0]$

$$df(B_0) = f'_x(B_0)h + f'_y(B_0)p, \text{ kde } h = x - x_0,\ p = y - y_0,$$

vidíme, že platí vztah $z - z_0 = df(B_0)$.

Z toho vyplývá, že totální diferenciál $df(B_0)$ funkce $z = f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0, y_0]$ představuje přírůstek třetí (z-ové) souřadnice bodu C_2 tečné roviny, která se dotýká plochy $z = f(x, y)$ v bodě B, jestliže z bodu B_0 přejdeme do bodu $C_0 = [x, y] = [x_0 + h, y_0 + p]$. Na obrázku 2 je totální diferenciál $df(B_0)$ znázorněn délkou úsečky C_1C_2.



Obrázek 2. Totální diferenciál (zdroj: Škrášek a Tichý (1983))

2.3 Vztah mezi diferenciálem a přírůstkem funkce

Nechť je funkce $z = f(x, y)$ diferenciabilní na okolí $U(B_0;\delta)$. Označme symbolem $\Delta f(B_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ přírůstek funkce a $df(B_0)$ její totální diferenciál v bodě $B_0 = [x_0, y_0]$ pro přírůstky $h = x - x_0$ a $p = y - y_0$. Pak lze dokázat, že platí $\lim\limits_{(h,p)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f(B_0) - df(B_0)}{\sqrt{h^2 + p^2}} = 0$.

Díky tomuto vztahu lze pro malé přírůstky $|h|$, $|p|$ nahradit přírůstek funkce diferenciálem, tj. $\boxed{\Delta f(B_0) \cong df(B_0)}$.

Pomocí totálního diferenciálu můžeme vypočítat přibližně funkční hodnotu v okolí bodu B_0, v němž známe funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací. Výpočet je dán vztahem $f(x+h, y+p) = f(x, y) + \Delta f(B_0) \cong f(x, y) + df(B_0)$. (Navrátil, 2005)

2.4 Totální diferenciály vyšších řádů

Škrášek a Tichý (1983, s. 624) ve své publikaci definují totální diferenciály vyšších řádů následovně:

Definice 5

1. Je-li funkce $z = f(x, y)$ dvakrát spojitě diferenciabilní na okolí $U(B)$, pak druhým úplným diferenciálem (nebo úplným diferenciálem řádu 2) funkce $z = f(x, y)$ v bodě *B* nazýváme výraz

$$d^2 z = d^2 f(B) = f''_{xx}(B)h^2 + 2f''_{xy}(B)hp + f''_{yy}(B)p^2 .$$

Poznámka: Druhý úplný diferenciál funkce $z = f(x, y)$ dostaneme jako diferenciál úplného diferenciálu *dz*, to je

$$d^2 z = d(dz) = d(f'_x h + f'_y p) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x h + f'_y p)h + \frac{\partial}{\partial y}(f'_x h + f'_y p)p =$$
$$= (f''_{xx} h + f''_{yx} p)h + (f''_{xy} h + f''_{yy} p)p = f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hp + f''_{yy} p^2 ,$$

neboť podle Schwarzovy věty platí $f''_{xy} = f''_{yx}$.

2. Obecně, je-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $B = [x, y]$ aspoň *k-krát* spojitě diferenciabilní, má v bodě *B* úplný diferenciál řádu *k*. Přitom je

$$d^k z = d(d^{k-1} z).$$

Můžeme jej napsat v symbolickém tvaru

$$d^k z = (h\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y})^k f(B).$$

Tento symbol znamená, že výraz v závorce umocníme na *k*, symboly pro parciální derivace násobíme výrazem $f(B)$ a považujeme pak symboly tvaru

$$\frac{\partial^k f(B)}{\partial x^j \partial y^{k-j}}$$

za parciální derivace řádu *k* podle uvedených argumentů *x*, *y*, přičemž derivujeme *x* celkem *j*-krát, kdežto podle *y* celkem $(k - 1)$ -krát.

2.5 Příklady

2. příklad Najděte totální diferenciál prvního a druhého řádu funkce $f(x,y)=e^{xy}$.

Řešení:

$f(x,y)=e^{xy}$

totální diferenciál 1. řádu $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

totální diferenciál 2. řádu $d^2 f = f''_{xx} \cdot dx^2 + 2f''_{xy} \cdot dx \cdot dy + f''_{yy} \cdot dy^2$

Vypočteme všechny potřebné parciální derivace funkce $f(x,y)=e^{xy}$

$$f'_x(x,y) = e^{xy} \cdot y,$$

$$f'_y(x,y) = e^{xy} \cdot x,$$

$$f''_{xx}(x,y) = e^{xy} \cdot y \cdot y = y^2 \cdot e^{xy},$$

$$f''_{xy}(x,y) = e^{xy} \cdot x \cdot y + e^{xy} \cdot 1 = e^{xy} \cdot (xy+1),$$

$$f''_{yy}(x,y) = e^{xy} \cdot x \cdot x = x^2 \cdot e^{xy}.$$

Výpočty dosadíme do vzorce pro konkrétní diferenciál.

Totální diferenciál 1. řádu

$$df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

$$df = e^{xy} \cdot y \cdot dx + e^{xy} \cdot x \cdot dy = e^{xy} \cdot (y \cdot dx + x \cdot dy)$$

Totální diferenciál 2. řádu

$$d^2 f = f''_{xx} \cdot dx^2 + 2f''_{xy} \cdot dx \cdot dy + f''_{yy} \cdot dy^2$$

$$d^2 f = y^2 \cdot e^{xy} \cdot dx^2 + 2 \cdot e^{xy} \cdot (xy+1) \cdot dx \cdot dy + x^2 \cdot e^{xy} \cdot dy^2 =$$
$$= e^{xy} \cdot \left[y^2 \cdot dx^2 + 2 \cdot (xy+1) \cdot dx \cdot dy + x^2 \cdot dy^2 \right]$$

3. příklad Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 y + \sin x$ v bodě $B_0 = [0,2]$ pro $h = 0,1$; $p = -0,2$.

Řešení:

$f_x' = 3x^2 - 6xy + \cos x \qquad f_x'(B_0) = 1$

$f_y' = 3y^2 - 3x^2 \qquad f_y'(B_0) = 12$

$df(B_0) = f_x'(B_0)h + f_y'(B_0)p$

$df(B_0) = 1 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot (-0{,}2) = -2{,}3$

2.6 Aplikační úlohy

3. úloha Vypočítejte přibližně $1{,}04^{2,02}$.

Řešení:

Výraz $1{,}04^{2,02}$ vznikl z $f(x, y) = x^y$, kde $x = 1{,}04$ a $y = 2{,}02$.

Počítat budeme totální diferenciál funkce $f(x, y) = x^y$ v bodě $[1;2]$ pro přírůstky $dx = 0{,}04$, $dy = 0{,}02$.

$f(1,2) = 1^2 = 1$

$f_x' = y \cdot x^{y-1} = y \cdot x^y \cdot x^{-1} = \dfrac{y \cdot x^y}{x} \qquad f_x'(1,2) = \dfrac{2 \cdot 1^2}{1} = 2$

$f_y' = x^y \cdot \ln x \qquad f_y'(1, 2) = 1^2 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$df(1, 2) = 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = 0{,}08$

$1{,}04^{2,02} \cong f(1,2) + df(1,2) = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$

Pro srovnání, zadáme-li hodnotu $1{,}04^{2{,}02}$ přímo do kalkulačky, tak na displeji se nám zobrazí výsledek 1,082448755. Tím jsme dospěli k závěru, že náš přibližný výpočet pomocí diferenciálu je správný a neliší se příliš od skutečné hodnoty.

4. úloha Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{1{,}98^3 + 1{,}03^4}$.

Řešení:

Výraz $\sqrt{1{,}98^3 + 1{,}03^4}$ vznikl z $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^4}$, kde $x = 1{,}98$ a $y = 1{,}03$.

Počítat budeme totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^4}$ v bodě $[2;1]$ pro přírůstky $dx = -0{,}02$, $dy = 0{,}03$.

$$f(2,1) = \sqrt{2^3 + 1^4} = \sqrt{9} = 3$$

$$f_x' = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + y^4)^{\frac{-1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{(x^3 + y^4)}} \qquad f_x'(2,1) = \frac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot \sqrt{2^3 + 1^4}} = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2$$

$$f_y' = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + y^4)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4y^3 = \frac{2y^3}{2 \cdot \sqrt{(x^3 + y^4)}} \qquad f_y'(2,1) = \frac{2 \cdot 1^3}{\sqrt{2^3 + 1^4}} = \frac{2}{3}$$

$$df(2,1) = 2 \cdot (-0{,}02) + \frac{2}{3} \cdot 0{,}03 = -0{,}04 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{100} = -0{,}04 + 0{,}02 = -0{,}02$$

$$\sqrt{1{,}98^3 + 1{,}03^4} \cong f(2,1) + df(2,1) = 3 + (-0{,}02) = 2{,}98$$

Přesná hodnota $\sqrt{1{,}98^3 + 1{,}03^4}$ z kalkulačky je 2,98125826.

5. úloha Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $2{,}98 \cdot tg 44^\circ \cdot \ln(\sqrt{3{,}99} - 1)$.

Řešení:

Úlohu řešíme stejným způsobem jako u předchozích dvou příkladů. Akorát si musíme dát pozor, abychom hodnoty ve stupních převedli na radiány.

Opět si zapíšeme, jakým způsobem výraz vznikl

$$f(x, y, z) = x \cdot tg y \cdot \ln(\sqrt{z} - 1), \text{ kde } x = 2{,}98 \text{ , } y = 44^\circ \text{ a } z = 3{,}99 \text{ .}$$

Nejvhodnější bude počítat totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x \cdot tg y \cdot \ln(\sqrt{z} - 1)$ v bodě $\left[3; \frac{\pi}{4}; 4\right]$ pro přírůstky $dx = -0{,}02$, $dy = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$, $dz = -0{,}01$.

$$f(3; \frac{\pi}{4}; 4) = 3 \cdot tg \frac{\pi}{4} \cdot \ln(\sqrt{4} - 1) = 3 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0$$

$$f_x' = tg\, y \cdot \ln(\sqrt{z} - 1)$$

$$f_y' = x \cdot \ln(\sqrt{z} - 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$f_z' = x \cdot tg\, y \cdot \frac{1}{\sqrt{z} - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = x \cdot tg\, y \cdot \frac{1}{\sqrt{z} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$f_x'(3; \frac{\pi}{4}; 4) = tg \frac{\pi}{4} \cdot \ln(\sqrt{4} - 1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

$$f_y'(3; \frac{\pi}{4}; 4) = 3 \cdot \ln(\sqrt{4} - 1) \cdot \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{4})^2} = 3 \cdot \ln 1 \cdot 1 = 0$$

$$f_z'(3; \frac{\pi}{4}; 4) = 3 \cdot tg \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{4} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

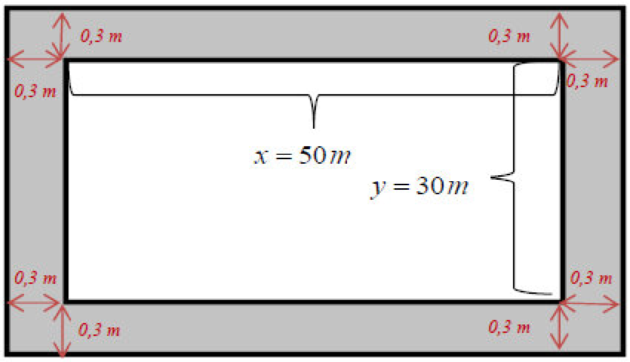
$$df(3; \frac{\pi}{4}; 4) = 0 \cdot (-0{,}02) + 0 \cdot (-\frac{\pi}{180}) + 0{,}75 \cdot (-0{,}01) = 0 + 0 + (-0{,}0075) = -0{,}0075$$

$$2{,}98 \cdot tg\, 44^\circ \cdot \ln(\sqrt{3{,}99} - 1) \cong f(3; \frac{\pi}{4}; 4) + df(3; \frac{\pi}{4}; 4) = 0 + (-0{,}0075) = -0{,}0075$$

Zadáme-li výraz $2{,}98 \cdot tg44^{\circ} \cdot \ln(\sqrt{3{,}99} - 1)$ přímo do kalkulačky, vyjde nám $-7{,}20790277 \cdot 10^{-3}$. Tudíž náš přibližný výpočet je správný.

6. úloha Pozemek 50 *m* dlouhý a 30 *m* široký je omezen betonovým chodníkem šířky 0,3*m*. Užitím totálního diferenciálu odhadněte plošný obsah chodníku.

Řešení:



Obrázek 3. Pozemek omezený chodníkem

Obsah S obdélníka o stranách x, y vypočítáme jako $S = x \cdot y$. Uvažujme tedy funkci dvou proměnných $S(x, y) = x \cdot y$. K této funkci budeme hledat totální diferenciál, neboť $\Delta S \cong dS$.

Tudíž platí

$$\Delta S \cong dS = S'_x dx + S'_y dy.$$

Pro přehlednost si vypíšeme stručné zadání:

$x = 50m$

$y = 30m$

přírůstky $dx = dy = 0{,}6\,m$

Nyní si spočítáme parciální derivace 1. řádu funkce $S(x, y) = x \cdot y$:

$$S'_x = y,$$

$$S'_y = x.$$

Příslušné parciální derivace dosadíme do vzorce pro totální diferenciál:

$$dS = y \cdot dx + x \cdot dy \ .$$

Dosadíme-li konkrétní hodnoty (tj. $x = 50\,m$, $y = 30\,m$, $dx = dy = 0{,}6\,m$), tak dostáváme

$$\Delta S \cong dS = y \cdot dx + x \cdot dy = 30 \cdot 0{,}6 + 50 \cdot 0{,}6 = 48\,m^2 .$$

Plošný obsah chodníku je přibližně $48\ m^2$.

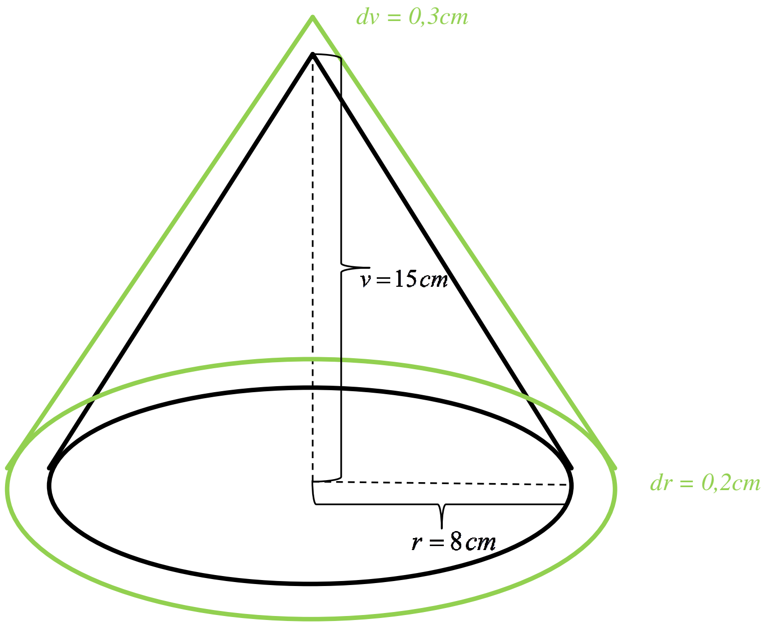
Poznámka: Úloha by se dala samozřejmě řešit i přesným výpočtem, což by určitě dokázali i děti na základních školách. Obsah chodníku bychom dostali jako rozdíl obsahů dvou obdélníků. To znamená, že od většího obdélníku (se začleněným chodníkem) odečteme menší obdélník (bez chodníku). Pro snazší představu viz obrázek 3.

Výpočet by vypadal následovně:

$S(chodníku) = (50{,}6 \cdot 30{,}6) - (50 \cdot 30) = 48{,}36\,m^2$

7. úloha Výška kužele je $v = 15\ cm$ a poloměr základny $r = 8\,cm$. O kolik se přibližně změní objem kužele, když výška se zvětší o $0{,}3\ cm$ a poloměr základny se zvětší o $0{,}2\ cm$?

Řešení:



Obrázek 4. Kužel

$v = 15\ cm$, $dv = 0{,}3\, cm$

$r = 8\, cm$, $dr = 0{,}2\, cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

Objem kužele závisí na poloměru *r* a na výšce *v*. Zapíšeme jej jako funkci 2 proměnných

$$V = f(r, v) = \frac{1}{3}\pi r^2 v\,.$$

Přírůstek funkce nahradíme diferenciálem

$$\Delta V \cong dV = V_r' dr + V_v' dv.$$

dr a dv známe, dopočítáme V_r' , V_v'

$$V_r' = \frac{2}{3}\pi\, rv$$

$$V_v' = \frac{1}{3}\pi\, r^2$$

$$\Delta V \cong dV = \frac{2}{3}\pi\, rv\, dr + \frac{1}{3}\pi\, r^2 dv = \frac{1}{3}\pi\, r\cdot(2v\, dr + r\, dv) = \frac{1}{3}\pi\cdot 8\cdot(2\cdot 15\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}3) =$$

$$= \frac{8}{3}\pi\cdot(6 + 2{,}4) = \frac{8}{3}\pi\cdot 8{,}4 = \frac{112}{5}\pi = 22{,}4\cdot 3{,}14 = 70{,}336\, cm^3$$

Objem kužele se zvětší přibližně o $70{,}336\, cm^3$.

Poznámka: Označme objem kužele s původními rozměry ($v_1 = 15\ cm$, $r_1 = 8\ cm$) jako V_1 a objem kužele s novými rozměry ($v_2 = 15{,}3\, cm$, $r_2 = 8{,}2\, cm$) jako V_2 . Při řešení úlohy přesným výpočtem bychom od objemu kužele s novými rozměry odečetli objem kužele s původními rozměry (viz obrázek 4).

Tedy

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi\, r_2^{\,2} v_2 - \frac{1}{3}\pi\, r_1^{\,2} v_1 = \frac{1}{3}\pi\cdot(r_2^{\,2} v_2 - r_1^{\,2} v_1)$$

a dosazením konkrétních hodnot dostáváme, že

$$\Delta V = \frac{1}{3}\pi\cdot(8{,}2^2\cdot 15{,}3 - 8^2\cdot 15) = 71{,}98136\ \ cm^3 \text{, kde } \pi \cong 3{,}14\,.$$

8. úloha Jak se přibližně změní plánované roční náklady na výrobu tří druhů výrobků, změní-li se výroba prvního výrobku z 25 tun na 25,2 tuny, druhého výrobku z 50 tun na 49,9 tuny a třetího výrobku z 92 tun na 92,3 tuny, je-li nákladová funkce dána vztahem $N(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 3x + 2y + 10z$.

Řešení:

$x_0 = 25\,t$, $\quad x = 25{,}2\,t$, $\quad dx = x - x_0 = 25{,}2 - 25 = 0{,}2\,t$

$y_0 = 50\,t$, $\quad y = 49{,}9\,t$, $\quad dy = y - y_0 = 49{,}9 - 50 = -0{,}1\,t$

$z_0 = 92\,t$, $\quad z = 92{,}3\,t$, $\quad dz = z - z_0 = 92{,}3 - 92 = 0{,}3\,t$

Nákladová funkce $N(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 3x + 2y + 10z$.

$\Delta N(x_0,y_0,z_0) \cong dN(x_0,y_0,z_0) = N'_x(x_0,y_0,z_0)dx + N'_y(x_0,y_0,z_0)dy + N'_z(x_0,y_0,z_0)dz$

Parciální derivace funkce $N(x,y,z)$

$$N'_x = 4x + 3,$$

$$N'_y = 8y + 2,$$

$$N'_z = 2z + 10.$$

Zjistíme, jakých hodnot nabývají parciální derivace v bodě (x_0, y_0, z_0)

$$N'_x(x_0,y_0,z_0) = N'_x(25{,}50{,}92) = 4 \cdot 25 + 3 = 103,$$

$$N'_y(x_0,y_0,z_0) = N'_y(25{,}50{,}92) = 8 \cdot 50 + 2 = 402,$$

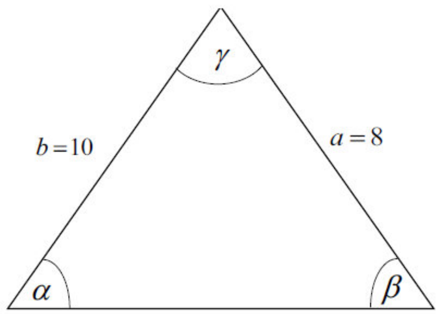
$$N'_z(x_0,y_0,z_0) = N'_z(25{,}50{,}92) = 2 \cdot 92 + 10 = 194.$$

$$\Delta N(x_0,y_0,z_0) \cong dN(x_0,y_0,z_0) = 103 \cdot 0{,}2 + 402 \cdot (-0{,}1) + 194 \cdot 0{,}3 = 20{,}6 - 40{,}2 + 58{,}2 = 38{,}6$$

Roční náklady na výrobu se zvýší přibližně o 38,6 jednotek.

9. úloha Strany $a=8$, $b=10$ trojúhelníka byly změřeny s maximální chybou $da = db = 0{,}05$, úhel $\gamma=\frac{\pi}{4}$ s maximální chybou $d\gamma = 0{,}01$. Určete přibližnou absolutní a relativní chybu při výpočtu obsahu trojúhelníka.

Řešení:



Obrázek 5. Trojúhelník zadaný 2 stranami a 1 úhlem

$a=8$, $da = 0{,}05$

$b=10$, $db = 0{,}05$

$\gamma=\frac{\pi}{4}$, $d\gamma = 0{,}01$

Známe-li 2 strany a, b trojúhelníka a úhel γ jimi sevřený, pak obsah trojúhelníka spočítáme pomocí vzorce

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma\,.$$

Ze vzorce vidíme, že daný obsah trojúhelníka závisí na straně a, b a úhlu γ. Budeme tedy uvažovat funkci tří proměnných

$$S(a,b,\gamma) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma\,.$$

Absolutní chybu ΔS vypočteme jako totální diferenciál funkce $S(a,b,\gamma)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$

$$\Delta S \cong dS = S'_a\cdot da + S'_b\cdot db + S'_\gamma\cdot d\gamma = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin\gamma\cdot da + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sin\gamma\cdot db + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot d\gamma =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(b\cdot\sin\gamma\cdot da + a\cdot\sin\gamma\cdot db + a\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot d\gamma)\,.$$

Dosazením konkrétních hodnot dostáváme, že absolutní chyba

$$\Delta S \cong dS = \frac{1}{2}\cdot(10\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}05 + 8\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}05 + 8\cdot 10\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}01) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}05 + 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}05 + 8\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}01) \cong 0{,}60104\,.$$

Relativní chyba δ je vyjádřena vztahem

$$\delta = \frac{\Delta S}{S} \cong \frac{dS}{S}$$

a po dosazení

$$\delta \cong \frac{0{,}60104}{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{0{,}60104}{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}0212 = 2{,}1\%\,.$$

Při výpočtu obsahu trojúhelníka se dopouštíme absolutní chyby přibližně 0,60104 a relativní chyby přibližně 2,1%.

3 Taylorův vzorec

V této kapitole si představíme velice důležitou větu. Řeč bude o Taylorově větě, která byla pojmenována podle anglického matematika Brooka Taylora.

Věta 3 (Taylorova věta)

Nechť $f(x,y)$ je na okolí $U(B_0)$ bodu $B_0=[x_0,y_0]$ aspoň $(n+1)$-krát spojitě diferenciabilní. Pak v bodě $B=[x_0+h, y_0+p]\in U(B_0)$ platí Taylorův vzorec tvaru

$$f(B)=f(B_0)+\frac{1}{1!}df(B_0)+\frac{1}{2!}d^2f(B_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(B_0)+R_n,$$

kde

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta p)$$

je Taylorův zbytek, přičemž ϑ je vhodné číslo z intervalu $(0,1)$ a $d^\nu f(B_0)$ je ν-tý úplný diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě B_0, takže pro $\nu=1,2,\ldots,n+1$ platí

$$d^\nu f(B_0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y})^\nu f(B_0).$$

(Škrášek a Tichý, 1983, s.649)

Důkaz:

Najdeme na s. 649-650 v literatuře Škrášek, J. a Z. Tichý. *Základy aplikované matematiky 1*. Praha: SNTL, 1983. 876 s. Bez ISBN.

Poznámky:

Je-li bod $B_0=[0,0]$, hovoříme o tzv. ***Maclaurinově vzorci***.

Vynecháme-li zbytek R_n z Taylorova vzorce, dostáváme Taylorův polynom.

(Škrášek a Tichý, 1983; Ošťádalová, 2000)

Taylorův vzorec se tedy skláda z Taylorova polynomu a zbytku. Taylorova věta udává velikost chyby, které se dopouštíme při nahrazování funkce Taylorovým polynomem. Taylorův polynom využíváme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. (Došlá, 2006)

3.1 Příklady

4. příklad Užitím Taylorovy věty rozviňte funkci $f(x,y)=x^3+2y^2-xy$ v okolí bodu $B_0=[1,2]$.

Řešení:

Taylorův vzorec $f(B)=f(B_0)+\frac{1}{1!}df(B_0)+\frac{1}{2!}d^2f(B_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(B_0)+R_n$

Funkce $f(x,y)=x^3+2y^2-xy$ je polynom třetího stupně. Parciální derivace čtvrtého řádu a všechny parciální derivace vyšších řádů budou rovny nule, tudíž Taylorův zbytek bude nulový.

Nejdříve si spočítáme všechny potřebné výpočty, které potom přímo dosadíme do Taylorova vzorce.

Funkční hodnota v bodě $B_0=[1,2]$

$$f(B_0)=f(1,2)=1^3+2\cdot 2^2-2\cdot 1=1+8-2=7.$$

Hodnoty parciálních derivací prvního, druhého a třetího řádu v bodě $B_0=[1,2]$

$f'_x=3x^2-y$ $\quad$ $f'_x(B_0)=1$

$f'_y=4y-x$ $\quad$ $f'_y(B_0)=7$

$f''_{xx}=6x$ $\quad$ $f''_{xx}(B_0)=6$

$f''_{xy}=-1$ $\quad$ $f''_{xy}(B_0)=-1$

$f''_{yy}=4$ $\quad$ $f''_{yy}(B_0)=4$

$f'''_{xxx}=6$ $\quad$ $f'''_{xxx}(B_0)=6$

$f'''_{xxy}=0$ $\quad$ $f'''_{xxy}(B_0)=0$

$f'''_{xyy}=0$ $\quad$ $f'''_{xyy}(B_0)=0$

$f'''_{yyy}=0$ $\quad$ $f'''_{yyy}(B_0)=0$

Přírůstky h, p

$$h=x-x_0=x-1,$$

$$p=y-y_0=y-2.$$

Totální diferenciál 1. řádu

$$df(B_0)=f'_x(B_0)h+f'_y(B_0)p$$

$$df(B_0)=1\cdot(x-1)+7\cdot(y-2)=(x-1)+7\cdot(y-2).$$

Druhý totální diferenciál

$$d^2 f(B_0)=f''_{xx}(B_0)h^2+2f''_{xy}(B_0)hp+f''_{yy}(B_0)p^2$$

$$d^2 f(B_0)=6\cdot(x-1)^2+2\cdot(-1)\cdot(x-1)\cdot(y-2)+4\cdot(y-2)^2=$$
$$=6\cdot(x-1)^2-2\cdot(x-1)(y-2)+4\cdot(y-2)^2\ .$$

Třetí totální diferenciál

$$d^3 f(B_0)=f'''_{xxx}(B_0)h^3+3f'''_{xxy}(B_0)h^2p+3f'''_{xyy}(B_0)hp^2+f'''_{yyy}(B_0)p^3$$

$$d^3 f(B_0)=6\cdot(x-1)^3+3\cdot0\cdot(x-1)^2\cdot(y-2)+3\cdot0\cdot(x-1)\cdot(y-2)^2+0\cdot(y-2)^3=6\cdot(x-1)^3.$$

Výpočty dosadíme do Taylorova vzorce

$$f(x,y)=7+\frac{1}{1!}\cdot[(x-1)+7\cdot(y-2)]+\frac{1}{2!}\cdot\left[6\cdot(x-1)^2-2\cdot(x-1)\cdot(y-2)+4\cdot(y-2)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot6\cdot(x-1)^3=7+(x-1)+7\cdot(y-2)+3\cdot(x-1)^2-(x-1)\cdot(y-2)+2\cdot(y-2)^2+(x-1)^3\ .$$

Danou funkci $f(x,y)$ jsme nahradili Taylorovým polynomem 3. řádu beze zbytku. To znamená, že naše aproximace je úplně přesná.

Přesvědčit se o tom můžeme jednoduchou zkouškou, kdy roznásobením Taylorova polynomu 3. řádu, tj.

$$7+(x-1)+7\cdot(y-2)+3\cdot(x-1)^2-(x-1)\cdot(y-2)+2\cdot(y-2)^2+(x-1)^3,$$

musíme dostat zpětně funkci $f(x,y)=x^3+2y^2-xy$.

3.2 Aplikační úlohy

10. úloha Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočítejte přibližně $arctg\frac{1{,}04}{0{,}98}$.

Řešení:

Přibližnou hodnotu výrazu $arctg\frac{1{,}04}{0{,}98}$ vypočítáme jako Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y)=arctg\frac{x}{y}$ v bodě $B_0=[1,1]$ s přírůstky $h=0{,}04$, $p=-0{,}02$.

Píšeme, že

$$arctg\frac{1{,}04}{0{,}98}\cong f(B_0)+\frac{1}{1!}df(B_0)+\frac{1}{2!}d^2f(B_0),$$

kde

$$df(B_0)=f'_x(B_0)h+f'_y(B_0)p,$$

$$d^2f(B_0)=f''_{xx}(B_0)h^2+2f''_{xy}(B_0)hp+f''_{yy}(B_0)p^2.$$

$$f(x,y)=arctg\frac{x}{y}$$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot y}=\frac{1}{y+\frac{x^2}{y}}=\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y}}=\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{(-x)}{y^2}=\frac{-x}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot y^2}=\frac{-x}{y^2+x^2}$$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{0\cdot(y^2+x^2)-y\cdot 2x}{(y^2+x^2)^2}=\frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{1\cdot(y^2+x^2)-y\cdot 2y}{(y^2+x^2)^2}=\frac{y^2+x^2-2y^2}{(y^2+x^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{0\cdot(y^2+x^2)-(-x)\cdot 2y}{(y^2+x^2)^2}=\frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

$$f_x'(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$f_y'(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xx}''(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}''(1,1) = \frac{0}{4} = 0$$

$$f_{yy}''(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$arctg\,\frac{1,04}{0,98} \cong \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,04 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-0,02\right) + \frac{1}{2!} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0,04^2 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-0,02\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0,02 + 0,01 + \frac{1}{2} \cdot (-0,0008 + 0,0002) = \frac{\pi}{4} + 0,02 + 0,01 - 0,0003 = \frac{\pi}{4} + 0,0297$$

Výraz $arctg\frac{1,04}{0,98}$ se přibližně rovná $\frac{\pi}{4} + 0,0297$.

4 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Velký význam mají parciální derivace především při vyšetřování lokálních extrémů funkcí více proměnných. V této práci se zaměříme pouze na vyšetřování lokálních extrémů funkcí dvou a tří proměnných. Nyní přejděme na nejdůležitější definice a věty, které následně využijeme při řešení příkladů a zajímavých aplikačních úloh.

Definice 6

Řekneme, že funkce $f : R^n \to R$ nabývá v bodě $x^* \in R^n$ **lokálního maxima** (resp. **minima**), jestliže existuje okolí $U(x^*)$ bodu x^* takové, že pro $\forall x \in U(x^*)$ platí

$$f(x) \le f(x^*),$$

$$(\text{resp. } f(x) \ge f(x^*)).$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $x \ne x^*$ ostré (tzn. <, >), mluvíme o **ostrých lokálních maximech** a **minimech**. (Ostrá) lokální maxima a minima budeme souhrnně nazývat (ostrými) lokálními extrémy.

(Došlá, 2006, s. 64)

Definice 7

Nechť $f : R^n \to R$. Řekneme, že bod $x^* \in R^n$ je **stacionární bod** funkce *f*, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce *f* a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0,\ i = 1, \dots, n\ .$$

(Došlá, 2006, s. 65)

Věta 4 (Fermatova věta)

Nechť funkce $f : R^n \to R$ má v bodě $x^* \in R^n$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce *f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.

Důkaz:

Najdeme na s. 65 v literatuře Došlá, Z. a O. Došlý. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 144 s. ISBN 80-210-4159-5.

Fermatova věta je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, nikoliv postačující. To znamená, že ve stacionárním bodě nemusí extrém existovat. Ukážeme si tuto situaci na konkrétním příkladě.

Například mějme dánu funkci 2 proměnných $f(x,y)=x^2-y^2$.

Jako první si musíme spočítat parciální derivace 1. řádu

$$f_x' = 2x,$$

$$f_y' = -2y.$$

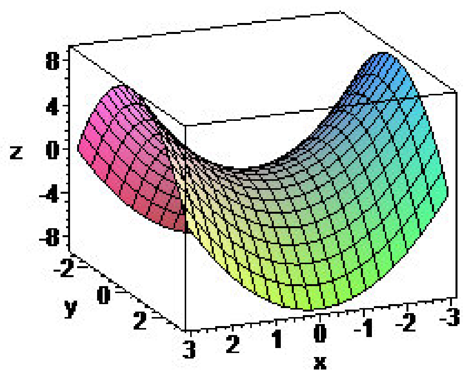
Vypočtené parciální derivace položíme rovny 0 a řešíme soustavu

$$\begin{array}{l} 2x=0 \\ -2y=0 \\ \hline x=0 \\ y=0 \end{array}$$

$\Rightarrow$stacionární bod je $[0,0]$.

Nyní se podíváme, jak se chovají funkční hodnoty funkce f ve stacionárním bodě a v jeho okolí. Zjistíme, že funkční hodnota funkce $f(x,y)=x^2-y^2$ v bodě $[0,0]$ je rovna nule. Co se týče libovolného okolí bodu $[0,0]$, tak pro $\forall x\neq 0$ je $f(x,0)=x^2>0$ a pro $\forall y\neq 0$ je $f(0,y)=-y^2<0$. Z toho plyne závěr, že funkce f nemá ve stacionárním bodě $[0,0]$ lokální extrém, neboť v jeho libovolném okolí funkce nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.

Takový bod nazýváme ***sedlovým bodem***, protože graf funkce $f(x,y)=x^2-y^2$ (obrázek 6) připomíná koňské sedlo. Graf takovéto funkce nazýváme ***sedlovou plochou***. (Navrátil, 2005; Gavalcová, 2013)



Obrázek 6. Graf funkce $f(x,y)=x^2-y^2$

4.1 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Věta 5

Nechť funkce $f : R^2 \to R$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace 2. řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod.

Jestliže

$$D(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 \quad > 0,$$

pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o maximum.

Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Jestliže $D(x_0, y_0) = 0$, pak nelze tímto způsobem rozhodnout o existenci lokálního extrému.

(Došlá, 2006, s. 66–67)

Důkaz:

Najdeme na s. 67 v literatuře Došlá, Z. a O. Došlý. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 144 s. ISBN 80-210-4159-5.

Poznámka:

Vztah $D(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2$ není nic jiného než determinant

$$D\ (x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

4.2 Lokální extrémy funkce tří proměnných

Lokální extrémy funkcí tří proměnných vyšetřujeme podle následující věty.

Věta 6

Buď $B = [x_0, y_0, z_0]$ stacionární bod funkce $f(x, y, z)$, tedy bod, ve kterém platí $f'_x(B) = 0$, $f'_y(B) = 0$, $f'_z(B) = 0$. Nechť funkce $f(x, y, z)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná v okolí bodu B. Nechť $f''_{xx}(B)$, $f''_{xy}(B)$, $f''_{xz}(B), \ldots,$ $f''_{zz}(B)$ jsou hodnoty parciálních derivací ve stacionárním bodě B.

Označme

$$D_1(B) = f''_{xx}(B),$$

$$D_2(B) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(B) & f''_{xy}(B) \\ f''_{yx}(B) & f''_{yy}(B) \end{vmatrix},$$

$$D_3(B) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(B) & f''_{xy}(B) & f''_{xz}(B) \\ f''_{yx}(B) & f''_{yy}(B) & f''_{yz}(B) \\ f''_{zx}(B) & f''_{zy}(B) & f''_{zz}(B) \end{vmatrix}.$$

Je-li $D_2(B) > 0$, $D_1(B) > 0$, $D_3(B) > 0$ má funkce ve stacionárním bodě B lokální minimum. Je-li $D_2(B) > 0$, $D_1(B) < 0$, $D_3(B) < 0$ má funkce ve stacionárním bodě B lokální maximum.

(Navrátil, 2005, s. 66)

4.3 Příklady

5. příklad Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$.

Řešení:

Parciální derivace 1. řádu

$$f'_x(x, y) = -2x,$$

$$f'_y(x, y) = -2y.$$

Stacionární body

$$\begin{array}{l} -2x = 0 \\ \underline{-2y = 0} \\ x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \text{stacionární bod } A = [0,0] \end{array}$$

Parciální derivace 2. řádu

$$f''_{xx}(x, y) = -2$$

$$f''_{yy}(x, y) = -2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0$$

Vypočítáme hodnoty parciálních derivací 2. řádu v bodě $f(x,y)=5-x^2-y^2$.

$$f''_{xx}(0,0) = -2$$

$$f''_{yy}(0,0) = -2$$

$$f''_{xy}(0,0) = 0$$

Na základě věty 5 rozhodneme o extrému

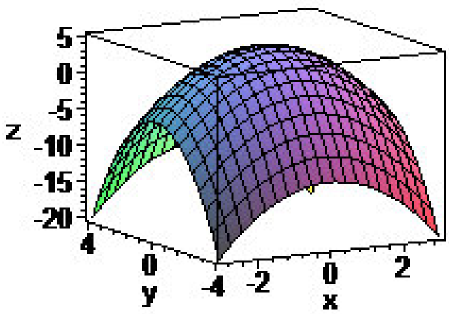
$$D(A) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix}$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0 \qquad \Rightarrow \text{v bodě } A = [0,0] \text{ nastává extrém}$$

$f''_{xx}(0,0) = -2 < 0 \Rightarrow$ jedná se o lokální maximum

Funkce $f(x,y)=5-x^2-y^2$ má v bodě $[0,0]$ lokální maximum.

Hodnota maxima je $f(0,0)=5-0^2-0^2=5$.



Obrázek 7. Graf funkce $f(x,y)=5-x^2-y^2$

6. příklad Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^2-(y-1)^2$.

Řešení:

Parciální derivace 1. řádu

$$f'_x(x,y) = 2x\,,$$

$$f'_y(x,y) = -2\cdot(y-1) = -2y+2\,.$$

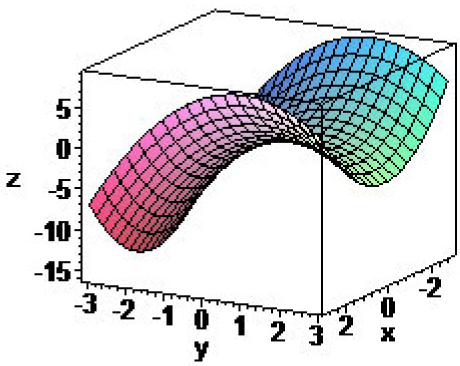
Stacionární body

$$-2x = 0$$
$$\underline{-2y + 2 = 0}$$
$$x = 0$$
$$y = 1 \Rightarrow \text{stacionární bod } A = [0,1]$$

Druhé parciální derivace

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \qquad f''_{xx}(0,1) = 2$$
$$f''_{yy}(x,y) = -2 \qquad f''_{yy}(0,1) = -2$$
$$f''_{xy}(x,y) = 0 \qquad f''_{xy}(0,1) = 0$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{v bodě } A = [0,1] \text{ není extrém}$$



Obrázek 8. Graf funkce $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

7. příklad Vyšetřete lokální extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Řešení:

Parciální derivace 1. řádu

$$f'_x(x,y,z) = 2x + 2$$
$$f'_y(x,y,z) = 2y + 4$$

$$f'_z(x,y,z) = 2z - 6$$

Stacionární body

$$2x + 2 = 0$$

$$2y + 4 = 0$$

$$\underline{2z - 6 = 0}$$

$$2x + 2 = 0 \qquad 2y + 4 = 0 \qquad 2z - 6 = 0$$

$$2x = -2 \qquad 2y = -4 \qquad 2z = 6$$

$$x = -1 \qquad y = -2 \qquad z = 3$$

Stacionární bod $B = [-1;-2;3]$.

Parciální derivace 2. řádu

$$f''_{xx}(x,y,z) = 2 \qquad f''_{xy}(x,y,z) = 0 \qquad f''_{xz}(x,y,z) = 0$$

$$f''_{yy}(x,y,z) = 2 \qquad f''_{yz}(x,y,z) = 0$$

$$f''_{zz}(x,y,z) = 2$$

Hodnoty parciálních derivací 2. řádu v bodě $B = [-1;-2;3]$

$$f''_{xx}(-1;-2;3) = 2 \qquad f''_{xy}(-1;-2;3) = 0 \qquad f''_{xz}(-1;-2;3) = 0$$

$$f''_{yy}(-1;-2;3) = 2 \qquad f''_{yz}(-1;-2;3) = 0$$

$$f''_{zz}(-1;-2;3) = 2$$

Vypočítáme determinanty

$$D_1(B) = f''_{xx}(B) = 2 > 0$$

$$D_2(B) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(B) & f''_{xy}(B) \\ f''_{yx}(B) & f''_{yy}(B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$$

$$D_3(B) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(B) & f''_{xy}(B) & f''_{xz}(B) \\ f''_{yx}(B) & f''_{yy}(B) & f''_{yz}(B) \\ f''_{zx}(B) & f''_{zy}(B) & f''_{zz}(B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 0 = 8 > 0$$

$$f(-1;-2;3) = (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) - 6 \cdot (3) = 1 + 4 + 9 - 2 - 8 - 18 = -14$$

Funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$ má v bodě $B=[-1;-2;3]$ lokální minimum, protože $D_2(B)>0$, $D_1(B)>0$, $D_3(B)>0$. Přičemž hodnota minima je $f(-1;-2;3)=-14$.

4.4 Aplikační úlohy

11. úloha Součet tří kladných čísel je 21. Určete jednotlivé sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

Řešení:

Nechť proměnné x, y, z představují tři kladná čísla.

Projejich součet platí

$$x+y+z=21\,.$$

Součin můžeme zapsat jako funkci tří proměnných

$$f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z\,.$$

Ze vztahu $x+y+z=21$ vyjádříme proměnnou z

$$x+y+z=21$$

$$z=21-x-y$$

Vyjádřené z dosadíme do $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$ a dostáváme místo funkce tří proměnných funkci dvou proměnných

$$f(x,y)=x\cdot y\cdot(21-x-y)$$

Hledáme tedy maximum funkce $f(x,y)=x\cdot y\cdot(21-x-y)$.

Funkci si upravíme, aby se nám snadněji derivovalo

$f(x,y)=x\cdot y\cdot(21-x-y)=21xy-x^2y-xy^2$.

Parciální derivace 1. řádu

$$f'_x(x,y)=21y-2xy-y^2,$$

$$f'_y(x,y)=21x-x^2-2xy\,.$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$21y-2xy-y^2=0 \qquad (1)$$

$$\underline{21x-x^2-2xy=0} \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vyjádříme proměnnou x

$$21y-2xy-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{21y-y^2}{2y}=\frac{21-y}{2}$$

x dosadíme do rovnice (2)

$$21x-x^2-2xy=0$$

$$21\cdot\frac{21-y}{2}-\left(\frac{21-y}{2}\right)^2-2\cdot\frac{21-y}{2}\cdot y=0$$

$$\frac{441-21y}{2}-\frac{(441-42y+y^2)}{4}-21y+y^2=0 \;/\cdot 4$$

$$882-42y-441+42y-y^2-84y+4y^2=0$$

$$3y^2-84y+441=0 \;/\cdot\frac{1}{3}$$

$$y^2-28y+147=0$$

Řešíme kvadratickou rovnici $y^2-28y+147=0$

$$D=(-28)^2-4\cdot 147=784-588=196$$

$$\sqrt{D}=14$$

$$y_{1,2}=\frac{\pm 14}{2}$$

$$y_1=7$$

$$y_2=-7$$

Kořen $y_2=-7$ nebudeme brát v úvahu, protože x, y, z mají být čísla kladná.

Číslo x dostaneme tak, že kořen $y_1=7$ dosadíme do $x=\frac{21-y}{2}$

$$x=\frac{21-y}{2}=\frac{21-7}{2}=7\,.$$

Stacionární bod: $[7,7]$

Nyní musíme ověřit, zda skutečně v bodě $[7,7]$ nastává maximum.

Vypočítáme parciální derivace 2. řádu

$$f''_{xx}(x,y) = -2y \qquad f''_{xx}(7,7) = -14$$

$$f''_{yy}(x,y) = -2x \qquad f''_{yy}(7,7) = -14$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 21 - 2x - 2y \qquad f''_{xy}(7,7) = f''_{yx}(7,7) = -7 \ .$$

Na základě determinantu rozhodneme o extrému

$$D(7,7) = \begin{vmatrix} -14 & -7 \\ -7 & -14 \end{vmatrix} = (-14)\cdot(-14) - (-7)\cdot(-7) = 196 - 49 = 147 > 0 \Rightarrow \quad \text{v bodě} \quad [7,7]$$

nastává extrém

$f''_{xx}(0,0) = -2 < 0 \Rightarrow$ lokální maximum

Na závěr zbývá jen dopočítat číslo z

$$z = 21 - x - y$$

$$z = 21 - 7 - 7 = 7 \ .$$

Výsledkem jsou tři sčítance stejné hodnoty a to 7,7,7.

12. úloha Nejmenovaná prodejna prodává jen 2 druhy vína. Prodejce nakupuje první druh za cenu 2 € za 1 láhev a druhý druh za cenu 3 € za 1 láhev. Jsou-li x, y ceny v euro za 1 láhev prvního, resp. druhého vína, pak prodejce odhaduje, že zákazníci budou kupovat denně $8 - 10x + 8y$ lahví prvního vína a $6 + 12x - 14y$ lahví druhého vína. Jak má prodejce stanovit ceny x, y, aby dosáhl maximálního zisku z prodeje? Kolik bude činit maximální zisk?

Řešení:

Zisk z prodeje zapíšeme funkcí $f(x,y) = (8 - 10x + 8y)\cdot(x-2) + (6 + 12x - 14y)\cdot(y-3)$.

Máme určit maximální zisk, to znamená, že hledáme její maximum.

První parciální derivace

$$f'_x(x,y) = -10\cdot(x-2) + (8 - 10x + 8y)\cdot 1 + 12\cdot(y-3) + (6 + 12x - 14y)\cdot 0 =$$
$$= -10x + 20 + 8 - 10x + 8y + 12y - 36 = -20x + 20y - 8$$

$$f'_y(x,y) = 8\cdot(x-2) + (8 - 10x + 8y)\cdot 0 + (-14)\cdot(y-3) + (6 + 12x - 14y)\cdot 1 =$$
$$= 8x - 16 - 14y + 42 + 6 + 12x - 14y = 20x - 28y + 32$$

První derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu 2 rovnic o dvou neznámých

$$-20x + 20y - 8 = 0 \qquad (1)$$

$$\underline{20x - 28y + 32 = 0} \qquad (2)$$

K řešení použijeme sčítací metodu, tj. k rovnici (1) přičteme rovnici (2)

$$-8y + 24 = 0$$

$$y = 3$$

$y = 3$ dosadíme do rovnice (1)

$$-20x + 20 \cdot 3 - 8 = 0$$

$$-20x + 52 = 0$$

$$x = \frac{52}{20} = 2{,}6$$

Získali jsme stacionární bod $[2{,}6;3]$.

Užitím věty 5 vyšetříme, zda funkce $f(x, y)$ má v bodě $[2{,}6;3]$ lokální maximum.

Nejprve si spočítáme potřebné parciální derivace 2. řádu

$$f''_{xx}(x, y) = -20 \qquad f''_{xx}(2{,}6;3) = -20$$

$$f''_{yy}(x, y) = -28 \qquad f''_{yy}(2{,}6;3) = -28$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 20 \qquad f''_{xy}(2{,}6;3) = f''_{yx}(2{,}6;3) = 20 .$$

$$D(2{,}6;3) = \begin{vmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -28 \end{vmatrix} = (-20)\cdot(-28) - (20\cdot 20) = 560 - 40 = 520 > 0 \Rightarrow \text{ v bodě } [2{,}6;3]$$

nastává extrém

$f''_{xx}(2{,}6;3) = -20 < 0 \Rightarrow$ lokální maximum

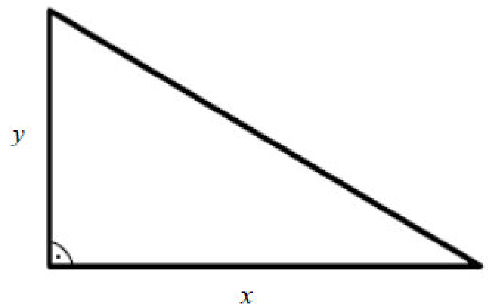
Hodnota maximálního zisku

$f(2{,}6;3) = (8 - 10 \cdot 2{,}6 + 8 \cdot 3) \cdot (2{,}6 - 2) + (6 + 12 \cdot 2{,}6 - 14 \cdot 3) \cdot (3 - 3) = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$.

Prodejce dosáhne maximálního zisku, když bude prodávat 1 láhev prvního druhu vína za 2,6 € a 1 láhev druhého druhu vína za 3 €. Maximální zisk za den bude činit 3,6 €.

13. úloha Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem odvěsen *2p* určete ten, který má největší obsah.

Řešení:



Obrázek 9. Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami *x*, *y*

Součet odvěsen *x*, *y* se rovná *2p*

$$x + y = 2p\ ,$$

odtud

$$y = 2p - x\ .$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách *x*, *y* spočítáme jako

$$S = \frac{x \cdot y}{2}.$$

Máme najít maximum funkce $S(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

y dosadíme do $S(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{2}$

$$S(x) = \frac{x \cdot (2p - x)}{2} = \frac{2px - x^2}{2} = px - \frac{x^2}{2}\ .$$

Dostali jsme funkci jedné proměnné $S(x) = px - \dfrac{x^2}{2}$.

První derivace

$$S_x'(x) = p - x\ .$$

Stacionární bod

$$p - x = 0$$
$$x = p$$

Pomocí druhé derivace se přesvědčíme, jestli funkce $S(x)$ má v bodě $x=p$ maximum

$$S''_{xx}(x)=-1$$

$$S''_{xx}(p)=-1<0 \Rightarrow \text{nastane lokální maximum}$$

Odvěsnu y dopočítáme tak, že $x=p$ dosadíme do vztahu $y = 2p - x$

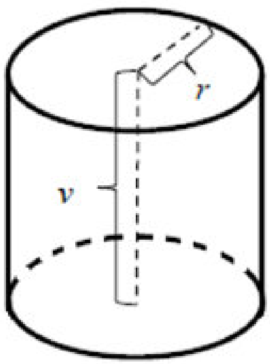
$$y = 2p - x$$

$$y = 2p - p = p\,.$$

Pravoúhlý trojúhelník se součtem odvěsen $2p$ má největší obsah v případě, že obě odvěsny mají velikost p.

14. úloha Určete rozměry válce o největším objemu, jestliže jeho povrch $S = 6\pi$.

Řešení:



Obrázek 10. Rotační válec

Z obrázku 10 jasně vidíme, že pro objem V a povrch S válce platí

$$V=\pi r^2 v,$$

$$S = S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r\cdot(r+v)\,.$$

Objem válce závisí na r a v, tudíž V je funkcí proměnných r, v

$$V(r,v)=\pi r^2 v$$

Víme, že

$$S = 6\pi$$

a

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv.$$

Z toho plyne

$$6\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rv$$

$$3 = r^2 + rv$$

$$3 - r^2 = rv$$

$$v = \frac{3 - r^2}{r}.$$

Z funkce dvou proměnných dostáváme funkci jedné proměnné

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{3 - r^2}{r} = \pi r \cdot (3 - r^2) = 3\pi r - \pi r^3.$$

Pomocí první derivace určíme stacionární bod

$$V'_r = 3\pi - 3\pi r^2 = 3\pi \cdot (1 - r^2)$$

$$3\pi \cdot (1 - r^2) = 0$$

$$1 - r^2 = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$|r| = 1$$

$$r_{1,2} = \pm 1$$

Kořen -1 nebudeme vůbec uvažovat, protože poloměr kružnice r je vždy kladný. Stacionárním bodem je tedy pouze $r = 1$.

Prostřednictvím druhé derivace zjistíme, zda v bodě $r = 1$ má funkce $V(r)$ lokální maximum

$$V''_{rr}(r) = -6\pi r$$

$$V''_{rr}(1) = -6\pi < 0 \Rightarrow \text{nastane lokální maximum.}$$

Výšku válce v jednoduše dopočítáme ze vztahu $v = \frac{3 - r^2}{r}$

$$v = \frac{3 - r^2}{r} = \frac{3 - 1^2}{1} = 2.$$

Válec má poloměr podstavy $r = 1$ a výšku $v = 2$.

Závěr

V bakalářské práci jsem se zaměřila na parciální derivace a jejich aplikace. S pojmem parciální derivace se neodmyslitelně pojí totální diferenciál, Taylorův vzorec a lokální extrémy funkcí více proměnných. Všem těmto matematickým termínům jsem se snažila dostatečně věnovat pozornost postupně v jednotlivých kapitolách práce. Uvedla jsem přehled důležitých definic a vět, které jsou potřebné k řešení příkladů a aplikačních úloh.

Převážnou část teoretických poznatků jsem čerpala z odborné literatury Škrášek, J. a Z. Tichý. Základy aplikované matematiky 1; Došlá, Z. a O. Došlý. Diferenciální počet funkcí více proměnných; Navrátil, M. Matematika - Diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných.

Na základě aplikačních úloh jsem zjistila, jaké mohou mít parciální derivace využití. Z geometrického hlediska jimi můžeme určit rovnici tečné roviny a normály. Díky znalosti totálního diferenciálu jsme schopni vypočítat přibližnou funkční hodnotu, což určitě přijde vhod v případě, když nebudeme mít k dispozici při ruce kalkulačku. Totálním diferenciálem lze také spočítat přibližnou změnu obsahu rovinného obrazce nebo objemu tělesa, změní-li se rozměry daného obrazce nebo tělesa. Rovněž má význam pro stanovení přibližné absolutní a relativní chyby. Pomocí Taylorova polynomu jsme schopni spočítat přibližnou hodnotu výrazu. Důležitou aplikaci představují parciální derivace zejména při hledání lokálních extrémů funkcí více proměnných.

Některé úlohy by se daly samozřejmě řešit i bez znalosti diferenciálního počtu více proměnných. Ale mým cílem bylo právě ukázat užití parciálních derivací na aplikačních úlohách. Tím se prokazuje, jaká je matematika zajímavá věda.

Velký význam mají parciální derivace také v teorii parciálních diferenciálních rovnic. Jsou to rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace hledané funkce dvou nebo více proměnných. Své opodstatnění mají ve fyzice a řadě technických oborů. Problematikou parciálních diferenciálních rovnic jsem se nezabývala, poněvadž jejich teorie je velice obsáhlá a vyžaduje velké množství času ke správnému pochopení.

Parciální derivace mají svůj význam i v ekonomii, ve fyzice a dalších přírodovědných oborech.

Zajímavým přínosem pro mě bylo vykreslování grafů funkcí dvou proměnných v programu Maple 7. Sama jsem se přesvědčila, že pracovat v tomto matematickém programu není jednoduché, obzvlášť pro začátečníky. Je zapotřebí znát přesné syntaxe, aby se daná funkce vykreslila.

Byla bych velmi ráda, kdyby moje bakalářská práce posloužila studentům matematické analýzy na naší fakultě jako podpůrný text při studiu a samozřejmě všem zájemcům matematiky.

Seznam použité literatury

[1] BERMAN, G. N. *Zbierka úloh z matematickej analýzy*. 2. nezmenené vydanie. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1957. 458 s.

[2] DEMIDOVIČ. B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. 460 s. ISBN 80-7200-587-1.

[3] DOŠLÁ, Z. a O. DOŠLÝ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 144 s. ISBN 80-210-4159-5.

[4] GAVALCOVÁ, T. *Sbírka úloh z matematiky 2*. Hradec Králové : Gaudeamus, 2013. 197 s. ISBN 978-80-7435-269-0.

[5] HÁJEK, J. *Cvičení z matematické analýzy: Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Brno: Masarykova univerzita, 1993. 112 s. ISBN 80-210-0685-4.

[6] KOTVALT, V. *Základy matematiky pro přírodovědné obory*. 2. přeprac. vydání. Praha : Karolinum, 2011. 224 s. ISBN 978-80-246-1572-1.

[7] NAVRÁTIL, M. *Matematika - Diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných*. 2. nezměněné vydání. Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2005. 123 s. ISBN 80-7157-903-3.

[8] OŠŤÁDALOVÁ, E. a V, ULMANNOVÁ. *Diferenciální počet II: funkce dvou a více proměnných*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2000. 112 s. ISBN 80-7078-770-8.

[9] ŠKRÁŠEK, J a Z. TICHÝ. *Základy aplikované matematiky 1*. Praha: SNTL, 1983. 876 s. Bez ISBN.

Seznam matematického značení

R	množina všech reálných čísel
R^2	druhá kartézská mocnina množiny R
R^n	*n*-tá kartézská mocnina množiny R
N	množina všech přirozených čísel
$f(x, y)$	funkce *f* dvou proměnných *x*, *y*
$f(x, y, z)$	funkce *f* tří proměnných *x*, *y*, *z*
$D(f)$	definiční obor funkce *f*
$U(B_0;\delta), U(B_0)$	δ -okolí bodu B_0, interval $(B_0-\delta, B_0+\delta)$ pro $\delta>0$
$f'_x(x_0, y_0)$	parciální derivace 1. řádu funkce *f* podle proměnné *x* v bodě $[x_0, y_0]$
$f'_y(x_0, y_0)$	parciální derivace 1. řádu funkce *f* podle proměnné *y* v bodě $[x_0, y_0]$
$f'_x(x, y)$	parciální derivace 1. řádu funkce *f* podle proměnné *x*
$f'_y(x, y)$	parciální derivace 1. řádu funkce *f* podle proměnné *y*
$f''_{xx}(x, y)$	parciální derivace 2. řádu funkce *f* dvakrát podle *x*
$f''_{xy}(x, y)$	parciální derivace 2. řádu funkce *f* nejprve podle *x* a pak podle *y*
$f''_{yx}(x, y)$	parciální derivace 2. řádu funkce *f* nejprve podle *y* a pak podle *x*
$f''_{yy}(x, y)$	parciální derivace 2. řádu funkce *f* dvakrát podle *y*
$df(B_0)$	úplný (totální) diferenciál funkce *f* v bodě B_0
$d^2f(B_0)$	úplný (totální) diferenciál 2. řádu funkce *f* v bodě B_0
$d^kf(B_0)$	úplný (totální) diferenciál *k*-tého řádu funkce *f* v bodě B_0

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha 1. Základní vzorce pro derivování

- $(c)' = 0$, kde c je libovolná konstanta, pro $\forall c \in R$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $\forall x \in R$ a $\forall n \in N$
- $(x^s)' = sx^{s-1}$ pro $\forall x \in R$, $x > 0$ a $\forall s \in R$
- $(e^x)' = e^x$ pro $\forall x \in R$
- $(a^x)' = a^x \ln a$ pro $\forall x \in R$ a $\forall a \in R$, $a > 0$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ pro $\forall x \in R$, $x > 0$ a $\forall a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $\forall x \in R$
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $\forall x \in R$
- $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ pro $\forall x \in R$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ a $\forall k \in Z$
- $(\cot g\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ pro $\forall x \in R$, $x \neq k\pi$ a $\forall k \in Z$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $\forall x \in R$, $|x| < 1$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $\forall x \in R$, $|x| < 1$
- $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ pro $\forall x \in R$
- $(arc\cot g\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ pro $\forall x \in R$

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Pavlína Listíková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Aplikace parciálních derivací
Název v angličtině:	Applications of partial derivatives
Anotace práce:	Bakalářská práce pojednává o parciálních derivacích a ukazuje jejich využití na aplikačních úlohách. Konkrétně se věnuje parciálním derivacím, totálnímu diferenciálu, Taylorově vzorci a lokálním extrémům. Grafy funkcí dvou proměnných jsou vykresleny pomocí programu Maple.
Klíčová slova:	aplikace, parciální derivace, totální diferenciál, Taylorův vzorec, lokální extrémy
Anotace v angličtině:	The bachelor's thesis deals with topic of partial derivatives and how it can be used for application examples. This thesis examines partial derivatives, total differential, Taylor's formula and local extremes. Graphs of functions of two variables are created with assistance of Maple software.
Klíčová slova v angličtině:	applications, partial derivatives, total differential, Taylor's formula, local extremes
Přílohy vázané v práci:	Příloha 1. Základní vzorce pro derivování
Rozsah práce:	59 stran
Jazyk práce:	český jazyk