Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra aplikované fyziky a techniky

Bakalářská práce

Sbírka řešených příkladů ze statiky

Vypracovala: Petra Šimanová
Vedoucí práce: PaedDr. Bedřich Veselý, Ph.D.

České Budějovice 2021

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

Datum: 20. dubna 2021

Petra Šimanová

Poděkování

Za nevšední ochotu a pomoc, za cenné rady a konzultace děkuji vedoucímu práce PaedDr. Bedřichu Veselému, Ph.D., který mi pomohl při vypracování této bakalářské práce.

ANOTACE

Práce je koncipována jako stručný učební text k předmětu Technická mechanika I na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. V práci jsou zahrnuta následující témata: síla a její moment, vyšetřování rovinné soustavy sil o společném působišti, vyšetřování rovinné soustavy dvou sil o různých působištích, vyšetřování obecné soustavy více rovinných sil, rovnováha sil v jednoduchých technických aplikacích, konkrétně páka a nosníky. Teorie je doplněna o příklady s komentovaným řešením, ve většině případů početním i grafickým. Práce může sloužit vyučujícím předmětu při přípravě na výuku a studentům při samostudiu nebo přípravě k různým zkouškám či testům.

Klíčová slova: síla, moment síly, soustava sil, výslednice, rovnováha, páka, nosník

ANNOTATION

The thesis is intended as a brief textbook for the subject Technical Mechanics I taught at the Faculty of Education, University of South Bohemia in České Budějovice. It includes the following topics: force and its torque, investigation of a system of forces acted in the same point of application, determination of resultant of two forces applied at different points, investigation of a general system of multiple plane forces, force equilibrium in simple technical applications, namely levers and beams. The theory is supported by examples with commented solution, in most cases both numerical and graphical. The work can be used by the teachers of the subject in lessons preparation as well as by students in self-education or in preparation for various exams or tests.

Keywords: force, torque, system of forces, resultant, equilibrium, lever, beam

OBSAH

1. Úvod práce ... 6
2. Úvod do statiky, základní pojmy ... 8
3. Síla a její moment ... 10
   3.1 Síla ... 10
   3.2 Určení výslednice sil ... 11
   3.3 Moment síly ... 12
   3.4 Moment soustavy sil ... 15
   3.5 Moment silové dvojice ... 15
   3.6 Rovnováha sil ... 16
4. Vyšetřování rovinné soustavy sil o společném působišti ... 18
   4.1 Síly působí v jedné přímce ... 18
   4.2 Síly různoběžné ... 20
5. Vyšetřování rovinné soustavy dvou sil o různých působištích ... 27
   5.1 Dvě síly působící v jedné přímce ... 27
   5.2 Dvě síly různoběžné ... 27
   5.3 Dvě síly rovnoběžné ... 27
6. Vyšetřování obecné soustavy více rovinných sil ... 33
   6.1 Početní řešení ... 33
   6.2 Grafické řešení ... 34
   6.3 Silový obrazec ... 34
   6.4 Vláknový obrazec ... 36
   6.5 Rovnováha obecné soustavy rovinných sil ... 39
7. Rovnováha sil v jednoduchých technických aplikacích ... 44
   7.1 Páka ... 44
   7.2 Nosník ... 46
8. Závěr ... 53

Použité zdroje ... 55

1. ÚVOD PRÁCE

Téma mé bakalářské práce jsem si zvolila především z důvodu, že mám na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity vystudovány bakalářské obory Finanční matematika a Učitelství odborných předmětů. Když jsem si chtěla rozšířit aprobaci o obor fyzika a technická výchova, zaujal mne předmět „Technická mechanika“, a to především technika řešení praktických úloh ve cvičeních. Ve snaze pochopit početní a grafické postupy v širších souvislostech jsem se snažila nalézt vhodné rozšiřující literární zdroje, které by byly podané pochopitelným a názorným způsobem na praktických řešených úlohách. Po poměrně rozsáhlém procházení, jak knižních, tak internetových zdrojů, jsem zjistila, že dostupné informace mohu rozdělit do dvou skupin. Jednou skupinou jsou zdroje bohaté na informace pojímající mechaniku z fyzikálního pohledu, tj. z pohledu základních principů mechaniky. Druhou skupinou jsou ryze technické publikace a skripta, obsahující specializované výpočty, vydávané specializovanými vysokými školami, např. FS ČVUT Praha, VUT Brno atp.

Ve snaze nalézt kompromis mezi oběma pojetími jsem obrátila svou pozornost k informačním zdrojům určeným pro střední odborné školy, kde je učebnic a učebních textů dostatek a nechybí v nich ani sbírky příkladů s uvedením výsledků v závěru publikace. Co mi ale chybělo, byla sbírka s podrobným, názorným a dobře pochopitelným výkladem postupu řešení úloh, jak početního, tak i grafického. Uvedení konečného grafického řešení dané úlohy totiž mnohdy neosvětlí postup, kterým toto řešení vznikalo, a tedy je pro samostudium naprosto nedostačující.

Jsem učitelka s již delší pedagogickou praxí, rozhodla jsem se takový text vypracovat a to tak, aby byl ve vyučovací praxi dobře použitelný jak pro pedagogy, tak i pro studenty při jejich přípravě. Protože se pohybuji na rozhraní vysoce odborných technických oblastí mechaniky a fyzikálních principů pojetí mechaniky, chci popisovanou oblast pojmout především z pohledu pedagoga s důrazem na dobrou pochopitelnost a názornost v postupech směřujících k vyřešení těchto typických úloh.

Hned na začátku jsem se potýkala s vymezením rozsahu a hloubky dané problematiky. Dalším problémem byla snaha dělit kvalifikační práci standardně na teoretickou a praktickou část. Oddělení teoretického vysvětlení postupu výpočtu a ukázky řešení konkrétního příkladu jsem považovala z hlediska metodiky výuky za nepraktické. Za velmi obtížné při výběru úloh považuji především volbu vhodných vstupních hodnot pro výpočet. Je důležité vždy vyzkoušet, jak výsledky budou vycházet, aby odpovídaly realitě, podporovaly u studentů jejich odhad a pěstovaly v nich názorné představy o mechanických veličinách a jejich velikostech v reálných souvislostech, tj. aby studenti nebrali výsledek jako pouhé číslo, ale aby uvažovali i o tom, zda vypočtená hodnota odpovídá realitě. Dalším důvodem podporujícím důležitost vhodné volby konkrétních vstupních hodnot jsou specifické požadavky grafických řešení na kreslicí plochu. Je nezbytné, aby se celé řešení vešlo na kreslicí list, ale aby i přesto bylo grafické řešení přehledné. Je tedy nutné nekumulovat čáry a průsečíky do příliš malého nepřehledného prostoru.

Jsem si vědoma, že splnit všechna předsevzatá kritéria budoucího textu bude náročné a že se nemusí vždy vše plně podařit. Jsem však přesvědčena, že pokus o vytvoření takového textu stojí za to a že většina této práce nalezne uplatnění ve vyučovací praxi jak na vysokých školách, v oborech jako je Technická výchova a praktické činnosti na Pedagogické fakultě JU či v technických oborech jiných fakult (Zemědělská, Přírodovědecká, Strojní, Stavební …), tak na některých typech středních odborných škol.

2. ÚVOD DO STATIKY, ZÁKLADNÍ POJMY

Statika je nauka o rovnováze těles a o nahrazování silových soustav [1]. Je to část mechaniky, která se zabývá vzájemným působením těles. Vzájemné působení je vyjádřeno vzájemným působením sil (silovými účinky). Úlohy ve statice se řeší početně nebo graficky [2].

Tuhé těleso

je těleso, které se nedeformuje působením libovolných sil. To znamená, že nemění svůj tvar ani objem vlivem těchto sil. Zavádí se pro zjednodušení výpočtů. Působení síly pak bude mít pouze pohybový účinek, nikoli deformační.

Pružné těleso

je těleso, které při působení libovolných sil změní svůj tvar. Pokud síly přestanou působit, vrátí se do původního stavu (bez deformace). Někdy se objevuje termín pružná či elastická deformace.

Nepružné těleso

je těleso, které při působení libovolných sil změní svůj tvar. Pokud síly přestanou působit, zůstane těleso zdeformované. Někdy se objevuje termín trvalá či plastická deformace.

Pevnost

je schopnost materiálu odolávat vnějším silám. Jednotky jsou v megapascalech [MPa], což odpovídá [$N \cdot mm^{-2}$].

Tuhost

znamená schopnost materiálu odolávat deformaci. Je definována modulem pružnosti. Měří se opět v megapascalech [MPa].

Houževnatost

je to materiálová vlastnost. Jedná se o schopnost materiálu zůstat při deformování nebo nárazech vcelku bez tvorby trhlin, nebo zamezovat růstu existujících trhlin. Je to opak křehkosti.

Křehkost

je opak houževnatosti. Vznik a růst trhlin závisí mimo jiné i na tvaru materiálu a vnitřním pnutí [3].

Tvrdost

je povrchová vlastnost. Schopnost materiálu odolávat pronikání jiného tělesa do daného materiálu.

Tažnost

je deformace, při které materiál praskne. Je zjišťována zkouškou tahem a tvoří se pracovní diagram. Tento diagram udává závislost poměrného prodloužení ε na napětí σ (nebo celkové prodloužení ΔL na zatěžující síle F) [4]. Vyjadřuje se jako poměrná deformace $\varepsilon \cdot 100$ [%] dosažená do přetržení, tedy o kolik procent se vzorek prodlouží, než dojde k přetržení.

Veličiny a jejich jednotky

délka (l) – metr [m]

čas (t) – sekunda [s]

hmotnost (m) – kilogram [kg]

rychlost (v) – metr za sekundu [$m \cdot s^{-1}$]

zrychlení (a) – metr za sekundu na druhou [$m \cdot s^{-2}$]

síla (F) – newton [N]

moment síly (M) – newton metr [N·m]

3. SÍLA A JEJÍ MOMENT

3.1 Síla

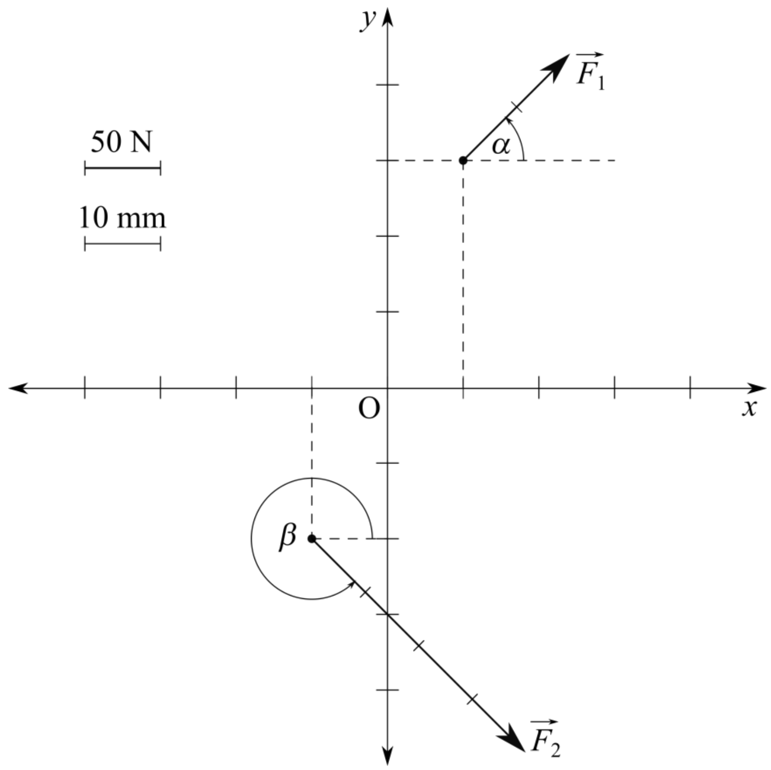
Síla je definována jako vzájemné působení hmotných útvarů (těles). Je to vektorová veličina, která má velikost, směr, smysl a působiště. Velikost je dána v početním řešení číslem v odpovídajících jednotkách, v grafické podobě délkou orientované úsečky. Směr je dán sklonem přímky, tzv. nositelky, na které síla leží. Sklon nositelky je určen velikostí orientovaného úhlu nositelky ke kladné poloose x, přičemž orientace úhlu se určuje v kladném smyslu, tj. ve směru proti chodu hodinových ručiček. V grafickém řešení smysl představuje šipkou vyznačenou orientaci síly na dané nositelce, v početním řešení je dán znaménkem + či –. Působiště je bod na nositelce, ve kterém daná síla působí. Je dán kartézskými souřadnicemi ve vhodně zvoleném systému souřadnic. Sílu označujeme F, její jednotkou je 1 newton, jehož značkou je N.

Typický příklad zadání sil může být následující

F_1 (x = 10 mm, y = 30 mm, α = 45°, 100 N),

F_2 (x = – 10 mm, y = – 20 mm, β = 315°, 200 N),

grafické znázornění ve zvoleném měřítku v soustavě souřadnic Oxy je na obr. 1.



Obr. 1: Grafické znázornění zadaných sil

Síla může mít na těleso dvojí účinek – pohybový a deformační. Pohybový účinek lze ještě dělit na posuvný a otáčivý. Síly můžeme dělit podle povahy na akční a reakční, síly akční jsou primární a síly reakční jsou druhotné. Také lze síly dělit v prostoru na vnitřní a vnější. Vnitřní síly se navenek neprojevují, navzájem se ruší podle zákona akce a reakce a jsou uvnitř nějakého celku složeného z dílčích hmotných útvarů. Naproti tomu síly vnější působí na těleso z vnějšku dané soustavy.

3.2 Určení výslednice sil

Pokud na těleso působí více jak jedna síla, hovoříme o soustavě sil. Účinky těchto sil můžeme nahradit stejným účinkem jediné síly. Tuto sílu pak nazýváme výslednicí této soustavy sil, která má stejně jako jednotlivé síly své působiště, směr, smysl a velikost. Velikost, směr a smysl výslednice lze vypočítat jako vektorový součet několika sil působících na těleso, tedy

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n. \qquad (1)$$

Výslednice nahrazuje všechny síly uvažované soustavy co do posouvajících i otáčivých účinků na dané těleso. Způsob určení výslednice soustavy sil závisí na směru, velikosti a smyslu vektorů představujících jednotlivé síly. Ne vždy mají síly působící na těleso stejné působiště, potom je nutno síly přesunout do společného působiště. Změna mechanického účinku nenastane, pokud budeme jednotlivé síly posouvat po jejich nositelce a to do libovolného bodu této přímky. V jednotlivých úlohách ve statice se setkáváme s různými situacemi působení soustavy sil.

Početně lze výslednici sil, její velikost, směr a smysl počítat i následujícím způsobem, který je univerzální pro libovolné soustavy sil (musíme však dát pozor na případné záporné hodnoty složek výslednice).

1) Začneme rozkladem každé i-té síly F_i na složky (viz např. síla F_1 v obr. 1)

   $$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i,$$
   $$F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i. \qquad (2)$$

2) Dále zjistíme výslednice obou přímkových soustav sil v souřadnicových osách, tzv. složky výslednice sil

   $$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix},$$
   $$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \qquad (3)$$

3) Určíme velikost výslednice podle Pythagorovy věty

   $$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \qquad (4)$$

4) Určíme směrový úhel výslednice rovinného svazku sil

$$\tan\omega = \frac{F_y}{F_x}. \tag{5}$$

3.3 Moment síly

Síla má obecně na těleso dva pohybové účinky – otáčivý a posuvný. Posuvný účinek je pro všechny body tělesa stejný, tj. všechny body tělesa se posunou v daném směru o stejnou vzdálenost, a je nezávislý na poloze působiště síly. Otáčivý účinek závisí nejen na velikosti síly, ale i na poloze působiště síly.

Moment síly k bodu

Moment síly k bodu vyjadřuje otáčivý účinek síly k pevnému bodu. Závisí na velikosti síly a vzdálenosti její nositelky od bodu otáčení. Proto moment síly k bodu je dán jako vektorový součin polohového vektoru působiště síly vzhledem k bodu otáčení ($\vec{r}$) a působící síly ($\vec{F}$) a je vyjádřen rovnicí

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{6}$$

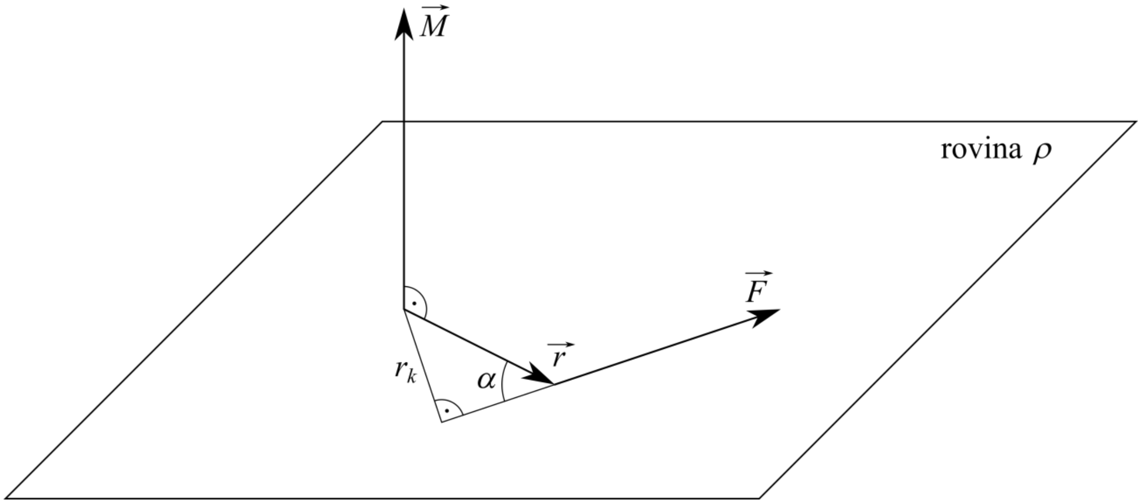
Výsledný vektor je kolmý na rovinu danou oběma vektory (obr. 2). Kladný smysl rotace je stanoven domluvou, a to proti směru chodu hodinových ručiček – tzv. pravidlo pravé ruky. Pokud bychom si vektory ($\vec{r}, \vec{F}$) posunuli do stejného výchozího bodu a položili pravou ruku tak, aby ohnuté prsty ukazovaly sled obou vektorů ($\vec{r}, \vec{F}$) v tomto pořadí, pak odtažený palec ukazuje směr výsledného vektoru ($\vec{M}$). V technických oborech se někdy říká, že soustava vytváří pravotočivou šroubovou soustavu. Sled vektorů určuje otáčivý účinek soustavy a osový posun soustavy směr výslednice. Velikost lze určit podle vztahu

$$M = r_k \cdot F, \tag{7}$$

kde r_k je tzv. rameno síly, které odpovídá vzdálenosti bodu otáčení a nositelky síly F. Základní jednotkou je newton metr – N·m. Velikost momentu síly a jeho smysl můžeme určit také ze souřadnic působiště a složek síly

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x, \tag{8}$$

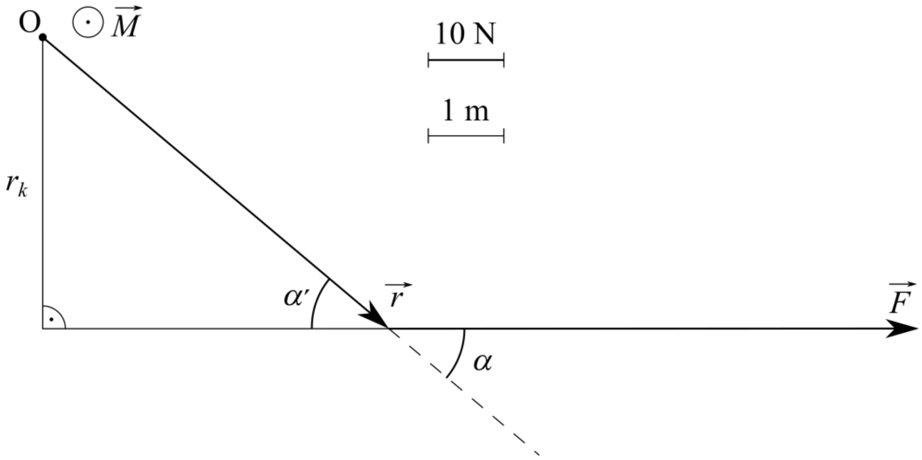
což je v podstatě *z*-ová souřadnice vektoru momentu síly z rovnice (6). V případě síly působící pouze v rovině (*x*, *y*) jsou totiž *x*-ová a *y*-ová souřadnice momentu síly dle rovnice (6) nulové.



Obr. 2: Moment síly k bodu

Příklad 1:

Určete moment síly k bodu O dle obr. 3, je-li dáno $F = 70$ N, $r = 6$ m, $\alpha = 40°$.



Obr. 3: Grafické znázornění příkladu 1

Řešení:

Úhly α, α' jsou vrcholové, a proto platí, že $\alpha = \alpha'$. Ve vyznačeném pravoúhlém trojúhelníku dále platí

$$\sin\alpha' = \sin\alpha = \frac{r_k}{r},$$

odkud

$$r_k = r \cdot \sin\alpha.$$

Po dosazení do rovnice (7) dostaneme

$$M = r_k \cdot F = r \cdot \sin\alpha \cdot F = F \cdot r \cdot \sin\alpha,$$

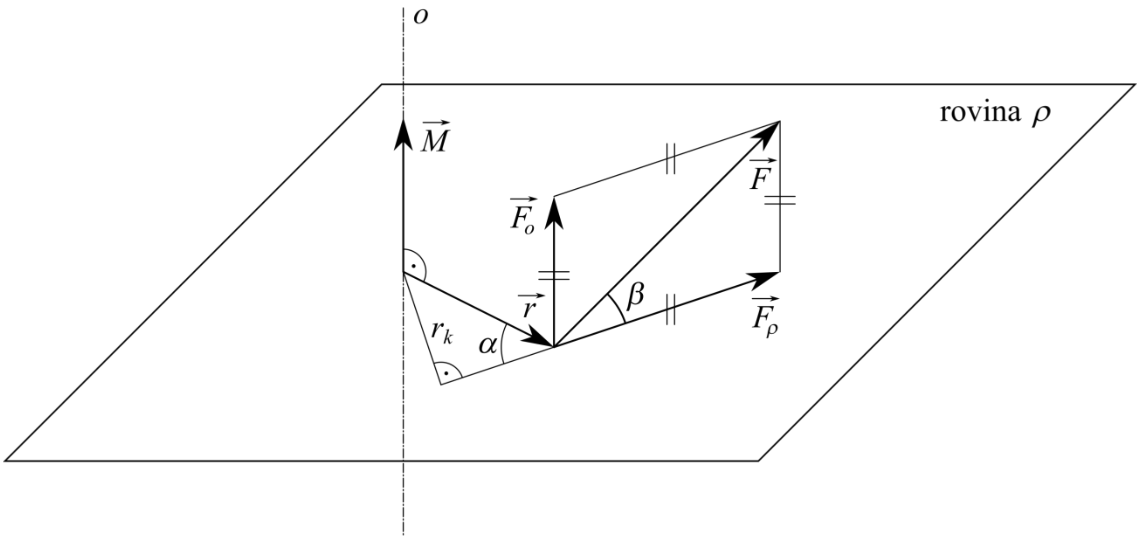
$$M = 70 \cdot 6 \cdot \sin 40° = 269{,}97 \text{ N·m}.$$

Moment síly k ose

V praxi se setkáváme zpravidla s momentem v prostoru – moment síly k ose (obr. 4). Sílu $\vec{F}$ lze rozložit na dvě složky, na složku $\vec{F_o}$ rovnoběžnou s osou otáčení o a na složku $\vec{F_\rho}$ k ní kolmou ležící v rovině ρ, pro jejichž velikosti platí

$$F_o = F \cdot \sin\beta\,;\; F_\rho = F \cdot \cos\beta. \qquad (9)$$

Moment složky $\vec{F_\rho}$ se vypočte podle vztahu (7) stejně jako moment síly k bodu. Moment složky $\vec{F_o}$ bude kolmý k ose o a bude zachycen osou, tzn. nebude mít na těleso otáčivý účinek vzhledem k ose a zachytí se jako reakční osová (axiální) síla.



Obr. 4: Moment síly k ose

Příklad 2:

Určete moment síly k ose, je-li dáno $F = 60$ N, $r = 3{,}5$ m. Odchylka F od roviny ρ kolmé k ose o je $\beta = 35°$. Odchylka $\vec{r}$ od vektorové přímky f_ρ složky síly F_ρ ležící v rovině ρ je $\alpha = 70°$ (viz obr. 4).

Řešení:

Pro složky síly platí podle (9)

$$F_\rho = F \cdot \cos\beta = 60 \cdot \cos 35° = 49{,}15 \text{ N},$$

$$F_o = F \cdot \sin\beta = 60 \cdot \sin 35° = 34{,}41 \text{ N}.$$

Rameno síly bude (viz řešení příkladu 1)

$$r_k = r \cdot \sin\alpha = 3{,}5 \cdot \sin 70\,° = 3{,}29 \text{ m}.$$

Moment síly F_ρ bude dle (7)

$$M = r_k \cdot F_\rho = 3{,}29 \cdot 49{,}15 = 161{,}7035 \text{ N·m}.$$

Moment složky F_o bude

$$M_o = r \cdot F_o = 3{,}5 \cdot 34{,}41 = 120{,}435 \text{ N·m}.$$

Tento moment s tělesem neotáčí, je zachycen osou; síla F_o se snaží posunout těleso podél osy o.

3.4 Moment soustavy sil

Působí-li na soustavu dvě a více sil, je jejich otáčivý účinek vyjádřen momentem soustavy sil. Moment soustavy sil je výsledný moment všech sil, které na toto těleso působí. K určení tohoto momentu lze použít tzv. momentovou větu: Výsledný moment sil je roven algebraickému součtu momentů jednotlivých sil [1]. To lze vyjádřit matematicky následující rovnicí

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n. \tag{10}$$

Moment soustavy sil také určuje polohu nositelky výslednice, protože platí

$$\vec{M} = \vec{r}_v \times \vec{F}, \tag{11}$$

kde $\vec{r}_v$ je polohový vektor působiště výslednice a $\vec{F}$ je výslednice sil daná vztahem (1). Rovnicí (11) není poloha určená jednoznačně, splňují ji všechny body na přímce. Proto se určuje pouze rameno nositelky ze vztahu

$$r_v = \frac{M}{F}. \tag{12}$$

3.5 Moment silové dvojice

Speciálním silovým útvarem jsou dvě stejně velké síly, stejného směru, ale opačně orientované (mají opačný smysl), jejichž nositelky jsou od sebe vzdáleny o nějakou vzdálenost (rameno silové dvojice). Takové síly tvoří tzv. silovou dvojici a nelze je skládat. Výslednice by byla rovna nule a působiště by muselo být v nekonečnu. Tato silová dvojice má pouze otáčivý účinek. který vyjadřujeme momentem dvojice sil a značíme ho M. Jeho velikost můžeme určit z vektorového součtu momentů obou sil vzhledem k libovolnému bodu roviny určené oběma silami a závisí pouze na vzájemné, kolmé vzdálenosti nositelek obou sil (rameni – r) a na velikosti libovolné z obou sil (F) a je vyjádřená rovnicí

$$M = r \cdot F. \tag{13}$$

Účinek silové dvojice se nezmění, pokud ji posuneme, natočíme, nahradíme jinou silovou dvojicí ve stejné, nebo rovnoběžné rovině se stejným momentem.

Příklad 3:

Určete moment dvojice sil, je-li dáno

a) $F = 60$ N, $r = 4$ m,

b) $F = 95$ N, $r = 6{,}5$ m.

Řešení:

Momenty určíme podle vztahu (13)

a) $M = r \cdot F$,

$M = 4 \cdot 60 = 240$ N·m.

b) $M = r \cdot F$,

$M = 6{,}5 \cdot 95 = 617{,}5$ N·m.

Příklad 4:

Máme dvě silové dvojice. Síla jedné dvojice sil má velikost F_1, rameno této dvojice sil je r_1. Síla druhé dvojice sil má velikost F_2, rameno této dvojice sil je r_2. Určete chybějící veličinu tak, aby se obě silové dvojice vzájemně nahrazovaly, je-li dáno

a) $F_1 = 60$ N, $r_1 = 1{,}5$ m, $r_2 = 2{,}5$ m.

b) $F_1 = 90$ N, $F_2 = 75$ N, $r_{k2} = 6$ m.

Řešení:

Při nahrazování silové dvojice musí platit rovnost momentů obou silových dvojic, tedy

$M_1 = M_2$.

Po dosazení z rovnice (13) dostaneme

$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$.

Odtud

a) $F_2 = \frac{r_1 \cdot F_1}{r_2}$,

$F_2 = \frac{1{,}5 \cdot 60}{2{,}5} = 36$ N.

b) $r_1 = \frac{r_2 \cdot F_2}{F_1}$,

$r_1 = \frac{6 \cdot 75}{90} = 5$ N.

3.6 Rovnováha sil

Rovnováha sil je stav, kdy na těleso působí více sil, ale jejich výslednice je nulová a výsledný moment sil vzniklý složením všech momentů sil je také nulový. To znamená, že soustava je v rovnováze, jestli nevykazuje žádné vnější účinky, ani posouvající, ani otáčivé. S využitím rovnic (1) a (10) budou základní podmínky rovnováhy soustavy sil vypadat následovně:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0, \tag{14}$$

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = 0. \tag{15}$$

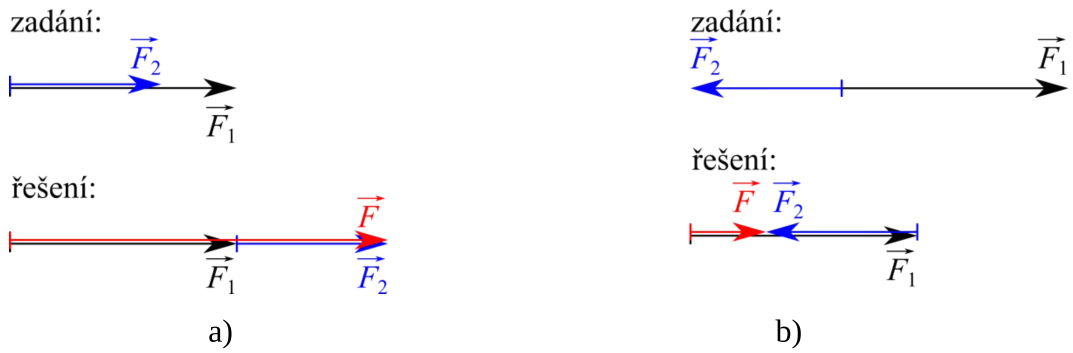
Při vyšetřování rovnováhy tělesa hledáme sílu, která danou soustavu uvádí do rovnováhy, tzn. kompenzuje posuvný i otáčivý účinek sil na těleso působících. Síla uvádějící silovou soustavu do rovnováhy leží na stejné nositelce jako výslednice, ale má opačný smysl. Pokud na těleso působí pouze dvě síly, nastane jejich rovnováha jen tehdy, pokud jsou síly stejně velké, stejného směru, ale opačného smyslu a musí ležet na společné nositelce [5].

4. VYŠETŘOVÁNÍ ROVINNÉ SOUSTAVY SIL O SPOLEČNÉM PŮSOBIŠTI

Pod pojmem vyšetřování soustavy sil rozumíme hledání velikosti, směru a polohy nositelky výslednice soustavy sil. To lze obecně provádět dvěma způsoby – početně nebo graficky. V technické praxi se velmi často grafické řešení vyžaduje, protože představuje kontrolu správnosti početního řešení.

4.1 Síly působí v jedné přímce

V případě dvou sil působících v jedné přímce a v jednom bodě mohou nastat dvě situace, buď budou mít stejný nebo opačný smysl. V případě se stejným smyslem bude velikost výslednice prostým součtem velikostí těchto sil $(F = F_1 + F_2)$, u opačného smyslu sil bude velikost výslednice jejich rozdílem $(F = F_1 - F_2)$ [6]. Pokud bude působit více sil, velikost výslednice získáme tak, že sečteme velikosti sil v jednom smyslu a od tohoto součtu odečteme součet velikostí sil působících v opačném smyslu. Grafické řešení soustavy dvou sil působících na jedné přímce je znázorněno na obr. 5.



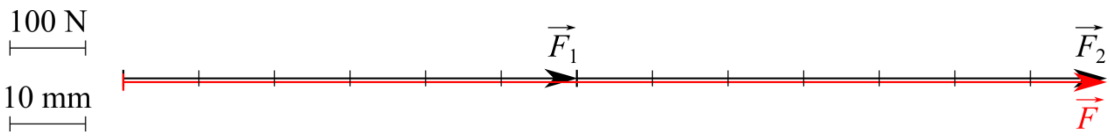
Obr. 5: Grafické řešení soustavy dvou sil působících v jedné přímce – a) síly stejného smyslu, b) síly opačného smyslu (převzato a upraveno z [6])

Příklad 5:

Určete výslednici dvou sil stejného smyslu působících v jedné přímce, je-li dáno

$F_1 = 600\ \mathrm{N}, F_2 = 700\ \mathrm{N}.$

Grafické řešení:



Obr. 6: Grafické řešení příkladu 5

Početní řešení:

Vyjdeme z obecné rovnice výslednice (1)

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n,$$

kde v případě sil působících v přímce postačí pracovat pouze s velikostmi, tedy

$$F = F_1 + F_2,$$

$$F = 600 + 700 = 1300\ \mathrm{N}.$$

Příklad 6:

Určete výslednici sil působících v jedné přímce, je-li dáno (znaménko mínus u síly F_3 představuje opačný smysl)

$$F_1 = 900\ \mathrm{N}, F_2 = 300\ \mathrm{N}, F_3 = -400\ \mathrm{N}.$$

Grafické řešení:

Obr. 7: Grafické řešení příkladu 6

Početní řešení:

Vyjdeme z rovnice pro výslednici (1), která v případě tří sil v jedné přímce dává

$$F = F_1 + F_2 + F_3.$$

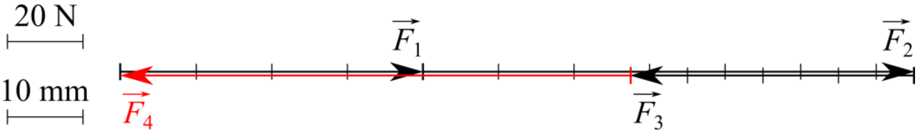
Po dosazení

$$F = 900 + 300 - 400 = 800\ \mathrm{N}.$$

Příklad 7:

Určete sílu F_4 tak, aby soustava sil působících v jedné přímce byla v rovnováze, pokud je dáno $F_1 = 80\ \mathrm{N}, F_2 = 130\ \mathrm{N}, F_3 = -75\ \mathrm{N}$.

Grafické řešení:



Obr. 8: Grafické řešení příkladu 7

Početní řešení:

Vyjdeme z rovnice pro rovnováhu sil (14), která v případě sil v jedné přímce dává

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0.$$

Po dosazení

$$F = 80 + 130 - 75 + F_4 = 0,$$

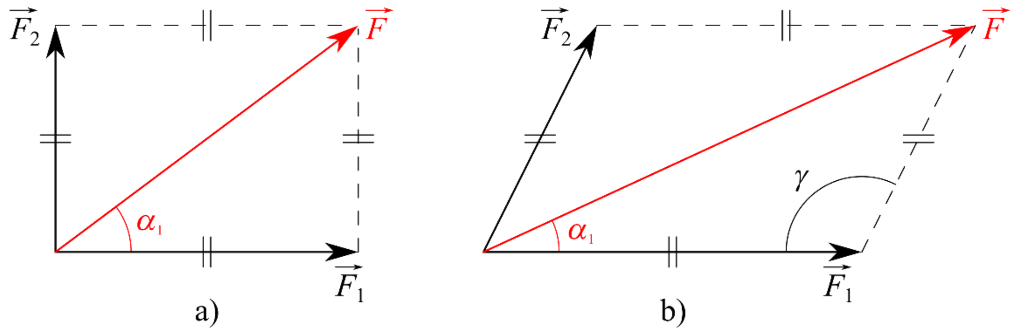
odkud

$$F_4 = -80 - 130 + 75 = -135 \text{ N}.$$

4.2 Síly různoběžné

Graficky:

Při grafickém řešení hledáme výslednici soustavy sil doplněním na rovnoběžník tak, že koncovým bodem jedné síly vedeme rovnoběžku se směrem druhé síly a naopak [6, 7]. Výslednice pak tvoří úhlopříčku vzniklého rovnoběžníku (viz obr. 9). Analogický postup tvorby rovnoběžníku se používá i při rozkladu sil na složky daných směrů. Počátečním i koncovým bodem dané síly vedeme rovnoběžky se zadanými směry (nejčastěji směry souřadnicových os). Strany takto vzniklého rovnoběžníku pak udávají velikosti jednotlivých složek. Smysl složek určíme tak, aby vektory složek i vektor rozkládané síly vycházely ze stejného vrcholu rovnoběžníku.



Obr. 9: Grafické určení výslednice dvou různoběžných sil se společným působištěm

Početně:

Při početním řešení musíme určit velikost výslednice, její směr a smysl. V případě navzájem kolmých sil určíme velikost výslednice pomocí Pythagorovy věty

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{16}$$

Podle obr. 9a) tak dostaneme

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \tag{17}$$

Směr a smysl výslednice vyjádříme úhlem mezi vektorem výslednice a vektorem jedné ze složek, většinou vodorovné složky, podle vztahu

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1}. \tag{18}$$

U sil svírajících libovolný úhel (tedy i kolmých) můžeme pro výpočet velikosti výslednice použít sinovou větu

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}, \tag{19}$$

či kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \tag{20}$$

Podle obr. 9b) tak dostaneme např. při použití kosinové věty

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos\gamma}. \tag{21}$$

Kosinovou či sinovou větu můžeme také využít pro výpočet úhlu určujícího směr a smysl výslednice, např. ze sinové věty plyne

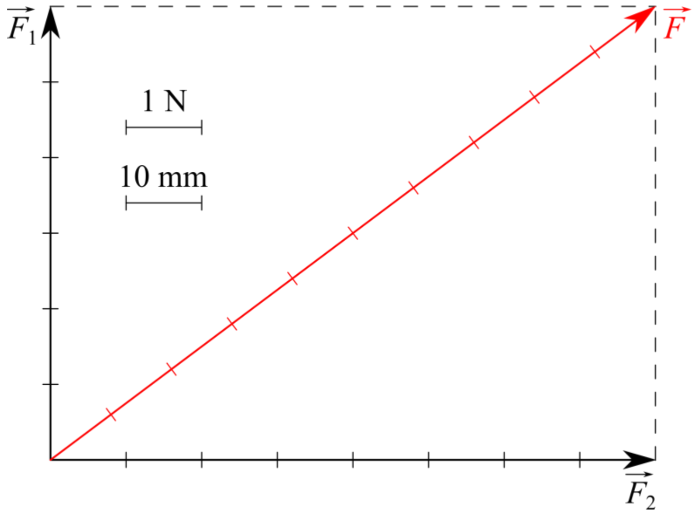
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{F}. \tag{22}$$

Příklad 8:

Určete výslednici sil F_1 a F_2 svírajících úhel α, je-li dáno

$$F_1 = 6\,\mathrm{N}, F_2 = 8\,\mathrm{N}, \alpha = 90°.$$

Grafické řešení:



Obr. 10: Grafické řešení příkladu 8

Početní řešení:

Protože jsou síly navzájem kolmé, použijeme Pythagorovu větu (16)

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Po dosazení podle obr. 10 dostaneme

$$F^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2,$$

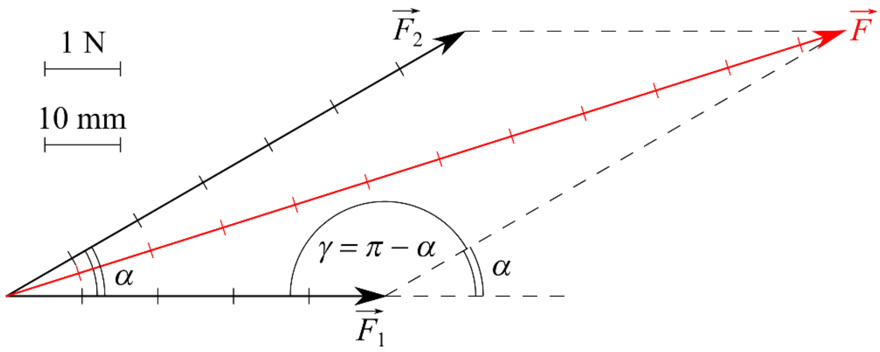
$$F = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{N}.$$

Příklad 9:

Určete výslednici sil F_1 a F_2 svírajících úhel α, je-li dáno

$F_1 = 5\,\text{N}, F_2 = 7\,\text{N}, \alpha = 30°.$

Grafické řešení:



Obr. 11: Grafické řešení příkladu 9.

Početní řešení:

Pro výpočet velikosti výslednice použijeme kosinovou větu (20)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Po dosazení podle obr. 11 bude

$$F^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos(\pi - \alpha),$$

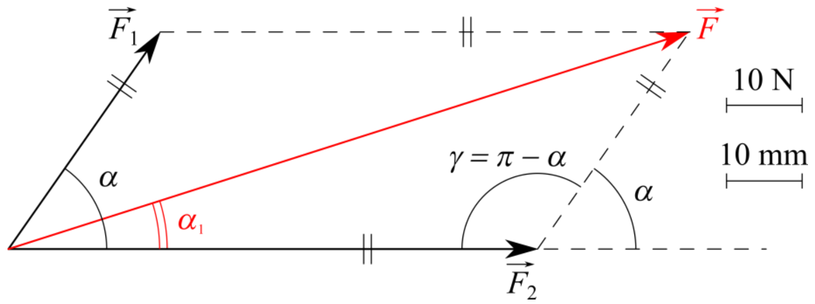
$$F = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 150\,°},$$

$$F = \sqrt{25 + 49 + 60{,}62178} = 11{,}6\,\text{N}.$$

Příklad 10:

Určete velikost, směr a smysl výslednice, je-li dáno $F_1 = 35\,\text{N}$, $F_2 = 70\,\text{N}, \alpha = 55°$.

Grafické řešení:



Obr. 12: Grafické řešení příkladu 10

Početní řešení:

Nejprve podle kosinové věty (20) určíme velikost výslednice sil, tedy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Podle obr. 12 bude

$$F^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha),$$

$$F = \sqrt{35^2 + 70^2 - 2 \cdot 35 \cdot 70 \cdot \cos 125\,°},$$

$$F = \sqrt{1225 + 4900 + 2810{,}524538} = 94{,}53 \text{ N}.$$

Podle sinové věty (19) určíme směr výslednice

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}.$$

Podle obr. 12

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{F_1}{F},$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1}{F} \cdot \sin(\pi-\alpha),$$

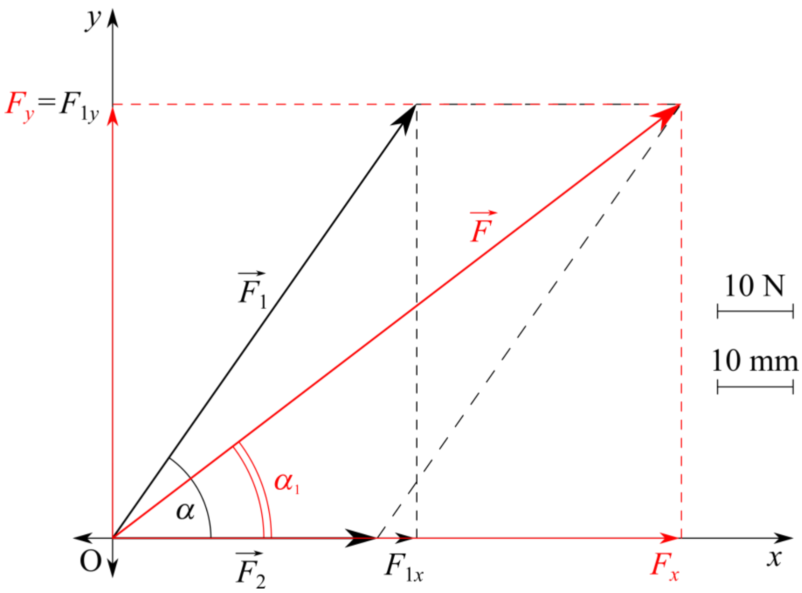
$$\sin\alpha_1 = \frac{35}{94{,}53} \cdot \sin 125° = 0{,}303293362.$$

$$\alpha_1 = 17°39'19{,}86''.$$

Příklad 11:

Určete velikost výslednice sil a její směr rozkladem do složek, je-li dáno $F_1 = 70$ N, $F_2 = 35$ N, $\alpha = 55°$.

Grafické řešení:



Obr. 13: Grafické řešení příkladu 11

Početní řešení:

Nejprve musíme zjistit velikosti složek podle goniometrických funkcí dle obr. 13 a rovnic (2)

$$F_1\colon\ F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 70 \cdot \cos 55° = 40{,}15 \text{ N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 70 \cdot \sin 55° = 57{,}34 \text{ N}.$$

$$F_2\colon\ F_{2x} = F_2 = 35 \text{ N},$$

$$F_{2y} = \ 0 \text{ N}.$$

Dále zjistíme velikost složek výslednice sil (3)

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x},$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y},$$

$$F_x = 40{,}15 + 35 = 75{,}15,$$

$$F_y = 57{,}35 + 0 = 57{,}34.$$

Obě složky výslednice jsou navzájem kolmé, použijeme Pythagorovu větu (4)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{75{,}15^2 + 57{,}34^2} = \sqrt{8935{,}3981} = 94{,}53 \text{ N}.$$

Nakonec určíme směr síly pomocí funkce tangens v pravoúhlém trojúhelníku (5)

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_y}{F_x},$$

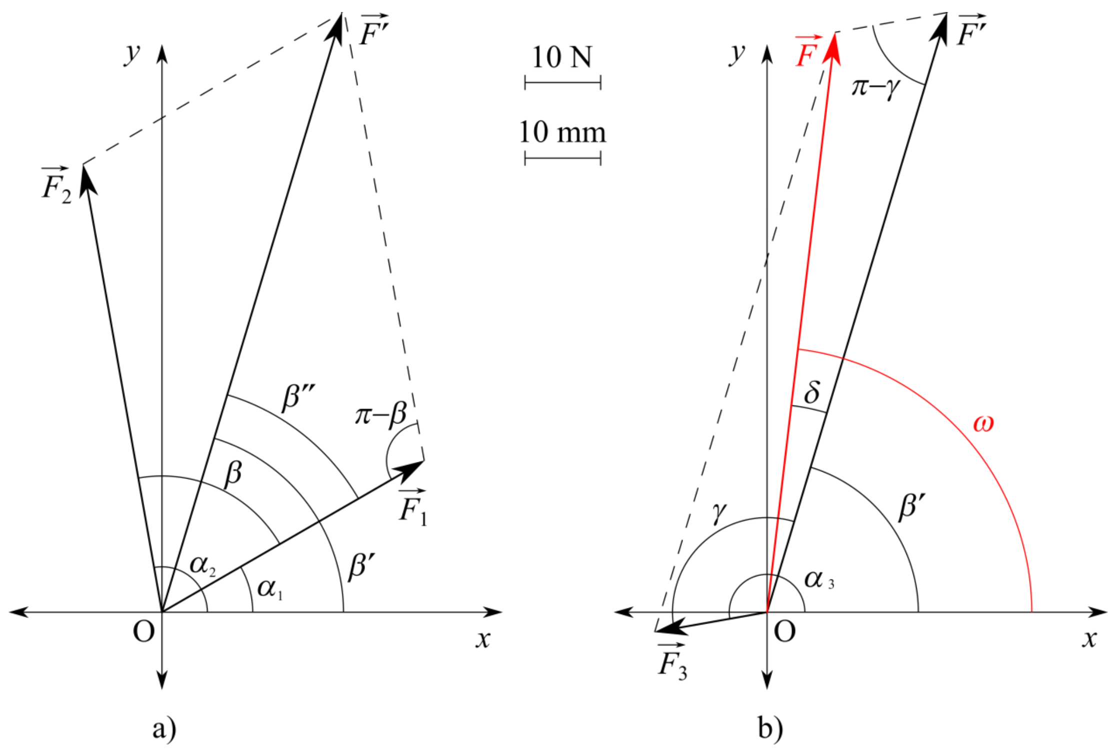
$$\tan \alpha_1 = \frac{57{,}34}{75{,}15} = 0{,}763,$$

$$\alpha_1 = 37°20'38{,}03''.$$

Příklad 12:

Určete velikost výslednice sil, její směr a smysl, je-li dáno $F_1 = 40 \text{ N}, F_2 = 60 \text{ N}$, $F_3 = 15 \text{ N}, \alpha_1 = 30°, \alpha_2 = 100°, \alpha_3 = 190°$.

Grafické řešení:



Obr. 14: Grafické řešení příkladu 12

Početní řešení:

Poprvé budeme příklad řešit na základě grafického řešení (obr. 14) pomocí sinové (19) a kosinové (20) věty.

Z obr. 14a) plyne

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 = 100° - 30° = 70°.$$

Podle kosinové věty (19)

$$\left(F'\right)^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \beta),$$

$$F' = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \cos 110\,°},$$

$$F' = \sqrt{6841{,}696688} = 82{,}71 \text{ N}.$$

Podle sinové věty (20)

$$\frac{\sin \beta''}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{F_2}{F'},$$

$$\sin \beta'' = \frac{F_2}{F'} \cdot \sin(\pi - \beta),$$

$$\sin \beta'' = \frac{60}{82{,}71} \cdot \sin 110° = 0{,}6817,$$

$$\beta'' = 42{,}97°.$$

Z obr. 14a) plyne

$$\beta' = \beta'' + \alpha_1,$$

$$\beta' = 42{,}97° + 30° = 72{,}97° = 72°58'12''.$$

Podle obr. 14b)

$$\gamma = \alpha_3 - \beta' = 190° - 72{,}97° = 117{,}03° = 117°1'48''.$$

Z kosinové věty (20)

$$F^2 = \left(F'\right)^2 + F_3{}^2 - 2F'F_3\cos(\pi - \gamma),$$

$$F = \sqrt{82{,}71^2 + 15^2 - 2 \cdot 82{,}71 \cdot 15 \cdot \cos 62{,}97\,°},$$

$$F = \sqrt{5938{,}3} = 77{,}06 \text{ N}.$$

Ze sinové věty (19)

$$\frac{\sin \delta}{\sin(\pi-\gamma)} = \frac{F_3}{F},$$

$$\sin \delta = \frac{F_3}{F} \cdot \sin(\pi - \gamma),$$

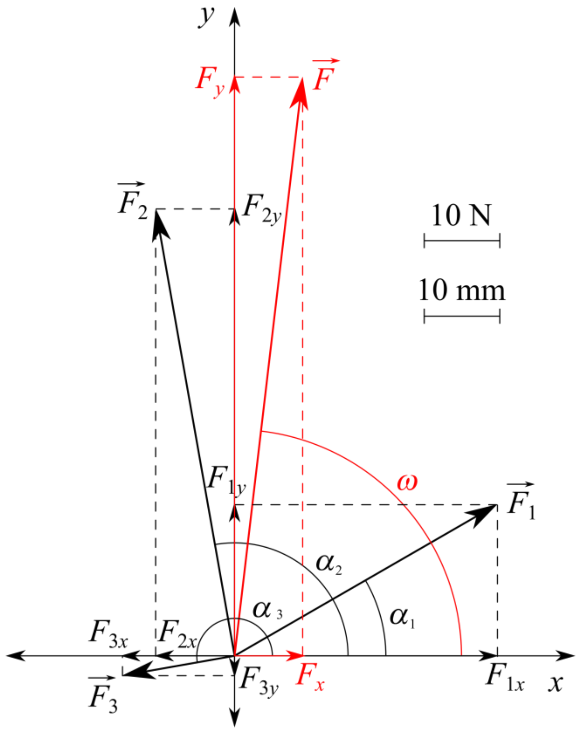
$$\sin \delta = \frac{15}{77{,}06} \cdot \sin 62{,}97° = 0{,}1734,$$

$$\delta = 9{,}985° = 9°59'6''.$$

Z obr. 14b) dostaneme směr výslednice

$$\omega = \delta + \beta' = 9{,}985° + 72{,}97° = 82{,}955° = 82°57'18''.$$

Příklad lze řešit i rozkladem na složky. Jednotlivé složky sil jsou graficky znázorněny na obr. 15.



Obr. 15: Rozklad sil z příkladu 12 do složek

Nejprve musíme zjistit velikosti složek podle goniometrických funkcí (2)

$$F_1\!: \; F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 40 \cdot \cos 30° = 34{,}64 \text{ N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 40 \cdot \sin 30° = 20 \text{ N}.$$

$$F_2\!: \; F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 60 \cdot \cos 100° = -10{,}42 \text{ N},$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 60 \cdot \sin 100° = 59{,}09 \text{ N}.$$

$$F_3\!: \; F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 15 \cdot \cos 190° = -14{,}77 \text{ N},$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 15 \cdot \sin 190° = -2{,}6 \text{ N}.$$

Dále zjistíme složky a velikost výslednice sil (3, 4)

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 34{,}64 - 10{,}42 - 14{,}77 = 9{,}45 \text{ N},$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 20 + 59{,}09 - 2{,}6 = 76{,}49 \text{ N}.$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9{,}45^2 + 76{,}49^2} = \sqrt{5940{,}0226} = 77{,}02 \text{ N}.$$

Nyní určíme směr síly z pravoúhlého trojúhelníka (5), dle znamének složek se jedná o I. kvadrant, tedy

$$\tan\omega = \frac{F_y}{F_x} = 8{,}094,$$

$$\omega = 82{,}957° = 82°57'24{,}82''.$$

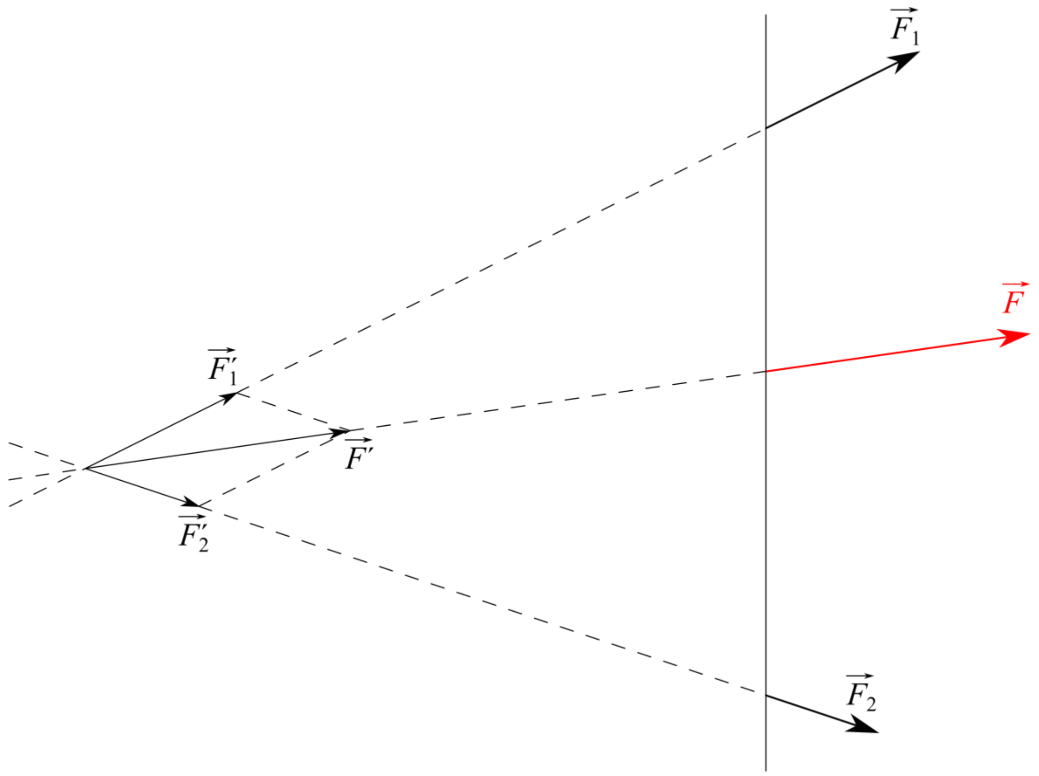
5. VYŠETŘOVÁNÍ ROVINNÉ SOUSTAVY DVOU SIL O RŮZNÝCH PŮSOBIŠTÍCH

5.1 Dvě síly působící v jedné přímce

Síly působící na téže přímce mají společnou nositelku a můžeme je po této nositelce libovolně posouvat, aniž by se změnil jejich mechanický účinek (viz kap. 3.2). Přeneseme tedy síly po nositelce do společného působiště a následně nalezneme výslednici stejným způsobem jako v případě sil o společném působišti (viz kap. 4.1).

5.2 Dvě síly různoběžné

Při skládání těchto sil posuneme síly po jejich nositelkách do společného průsečíku obou nositelek (obr. 16). V tomto bodě síly složíme stejně jako dvě různoběžné síly se společným působištěm (viz kap. 4.2), tj. provedeme doplnění na rovnoběžník. Výslednici pak posuneme po její nositelce do působiště, které je na průsečíku této přímky a spojnice působišť obou původních sil [6, 7].

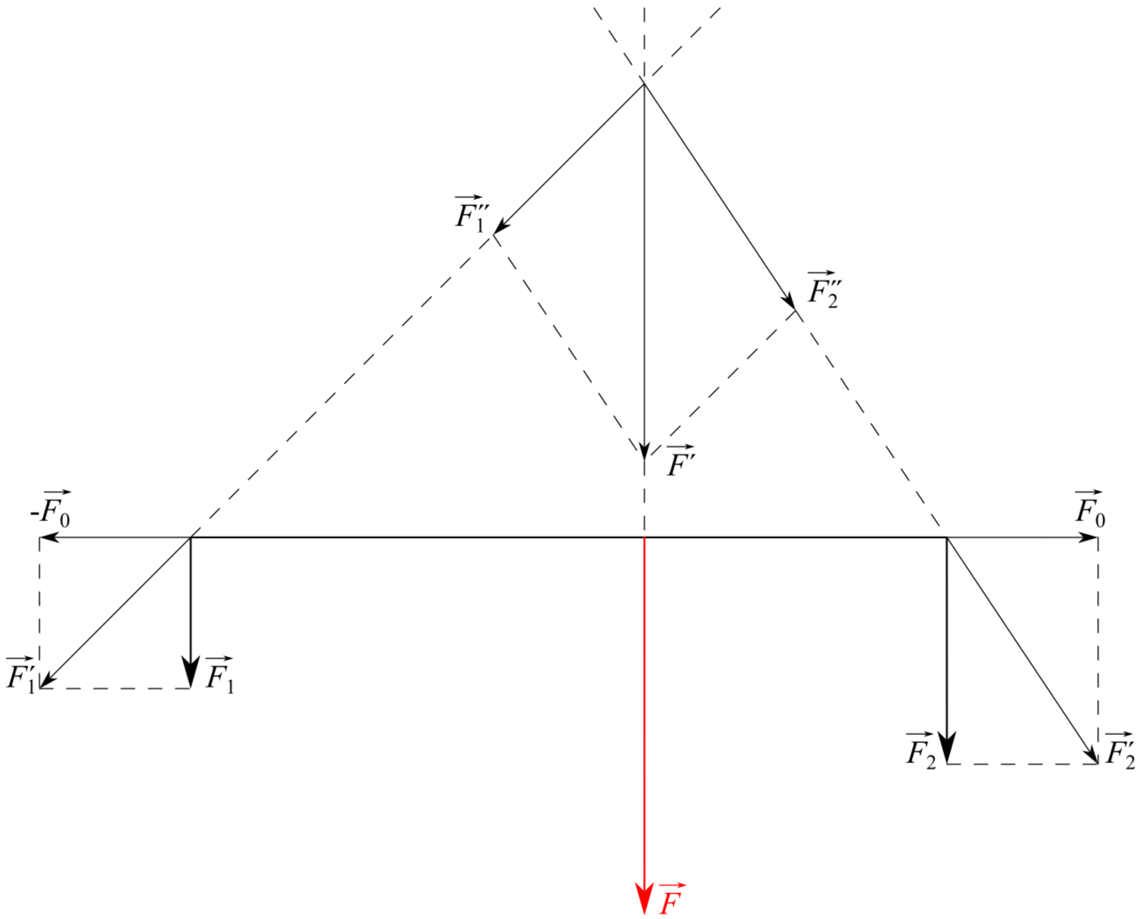


Obr. 16: Grafické skládání dvou různoběžných sil bez společného působiště

5.3 Dvě síly rovnoběžné

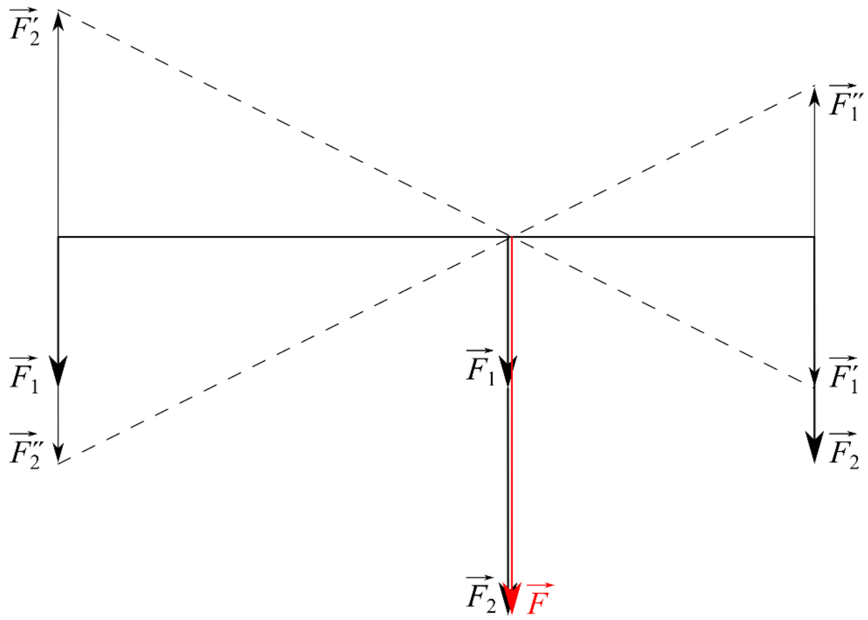
Dvě rovnoběžné síly v rovině mohou být buď souhlasně nebo nesouhlasně orientované, tedy stejného nebo opačného smyslu. Velikost výslednice sil stejného smyslu je součtem velikostí obou sil a má s nimi stejný směr a smysl. Velikost výslednice sil opačného smyslu je dána rozdílem velikostí obou sil a má stejný směr a smysl jako větší z obou sil. Poloha působiště výslednice se určí na základě momentové věty (10) vzhledem k libovolně zvolenému bodu roviny.

Dvě síly souhlasně orientované můžeme graficky skládat dvěma způsoby. První možností (metoda 1) je, že si nejprve doplníme dvě navzájem opačné, stejně velké síly $\left(-\vec{F}_0 \text{ a } \vec{F}_0\right)$, které jsou kolmé k $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ a jejichž účinek se navzájem ruší (obr. 17). Poté tyto síly graficky sečteme se silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ (viz kap. 4.2). Výslednice těchto sil $\left(\vec{F'}_1 \text{ a } \vec{F'}_2\right)$ vzájemně sečteme stejně jako v případě různoběžných sil o různých působištích (viz kap. 5.2), tj. posunutím po jejich nositelce, doplněním na rovnoběžník a následném posunutí do působiště vzniklé průsečíkem této přímky a spojnice působišť obou původních sil [6].



Obr. 17: Grafické skládání rovnoběžných sil stejného smyslu – metoda 1

Druhá metoda (metoda 2) spočívá v tom, že vyměníme působiště daných sil, přičemž u jedné ze sil (libovolné volby) obrátíme směr (v obr. 18 označeny čárkou, resp. dvěma čárkami). Průsečík spojnice koncových bodů obou sil a spojnice obou působišť označuje působiště výslednice [6, 7]. Její velikost určíme graficky stejně, jako je uvedeno na obr. 5a).



Obr. 18: Grafické skládání rovnoběžných sil stejného smyslu – metoda 2

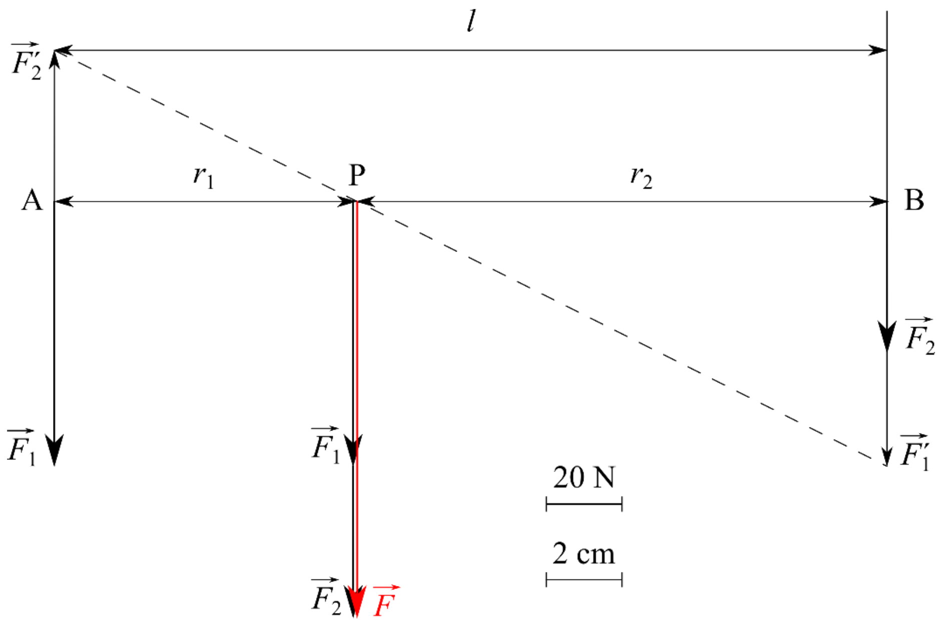
Při skládání rovnoběžných sil opačného smyslu je postup stejný jako u sil souhlasně orientovaných. Metoda 1 (analogicky obr. 17) však není příliš vhodná, protože průsečík nositelek čárkovaných sil by vznikl příliš daleko. Proto se jako vhodnější jeví metoda 2 (analogicky obr. 18), přičemž velikost výslednice určíme graficky podle obr. 5b).

Příklad 13:

Na těleso působí v bodech A a B rovnoběžné síly o velikosti $F_1 = 70$ N a $F_2 = 40$ N, které nemají společnou nositelku. Vzdálenost nositelek je 0,22 m. Určete velikost, směr, smysl a polohu působiště výsledné síly, jsou-li orientovány a) souhlasně, b) nesouhlasně.

Grafické řešení části a):

Grafické řešení provedeme v souladu s kapitolou 5.3 – metodou 2.



Obr. 19: Grafické řešení příkladu 13a) metodou 2

Početní řešení části a):

Vycházíme z momentové věty (10), tedy

$$M = M_1 + M_2,$$

$$r \cdot F = r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2.$$

Musíme vhodně zvolit bod, ke kterému budeme momenty vyjadřovat.

bod A:

Dle obr. 20 platí (P je předpokládané působiště výslednice)

$$r_1 = 0, r_2 = l,$$

pro síly stejného směru a smyslu platí

$$F = F_1 + F_2 = 70 + 40 = 110 \text{ N},$$

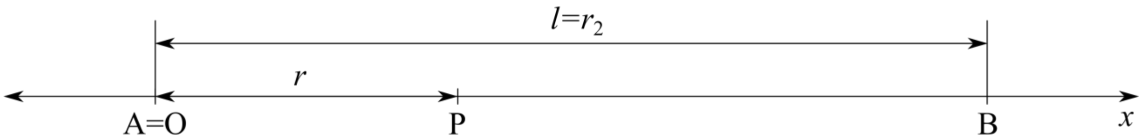
směr je stejný s oběma zadanými silami. Po dosazení

$$r \cdot (F_1 + F_2) = r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2,$$

$$r \cdot (70 + 40) = 0 \cdot 70 + 0{,}22 \cdot 40,$$

z čehož vychází

$$r = 0{,}08 \text{ m}.$$



Obr. 20: Souřadnice působišť sil (počátek O v bodě A)

bod B:

Vztažný bod pro výpočet momentů můžeme vzít libovolně, tedy i jako bod B. Pak platí (viz obr. 21)

$$r_1 = l, r_2 = 0,$$

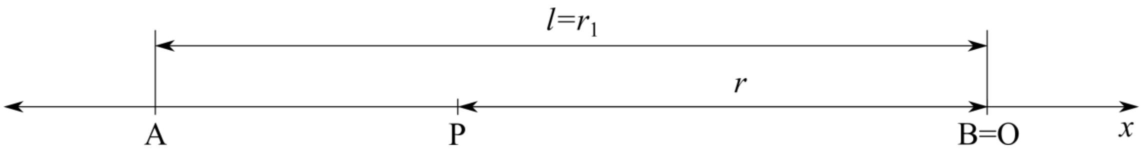
po dosazení

$$r \cdot (F_1 + F_2) = r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2,$$

$$r \cdot (70 + 40) = 0{,}22 \cdot 70 + 0 \cdot 40,$$

z čehož vychází

$$r = 0{,}14 \text{ m.}$$



Obr. 21: Souřadnice působišť sil (počátek O v bodě B)

bod O (hledané působiště P výslednice):

Dle obr. 22 je

$$r = 0, r_1 + r_2 = l \Longrightarrow r_1 = l - r_2.$$

po dosazení do momentové věty (10)

$$r \cdot F = r_1 \cdot F_1 - r_2 \cdot F_2\,,$$

$$0 \cdot F = r_1 \cdot 70 - r_2 \cdot 40,$$

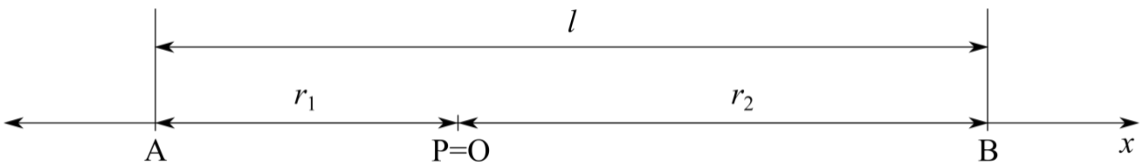
kde znaménko mínus představuje záporný moment síly F_2 (točí v záporném smyslu). Odsud

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{40}{70},$$

$$\frac{l - r_2}{r_2} = \frac{40}{70}$$

a dostaneme

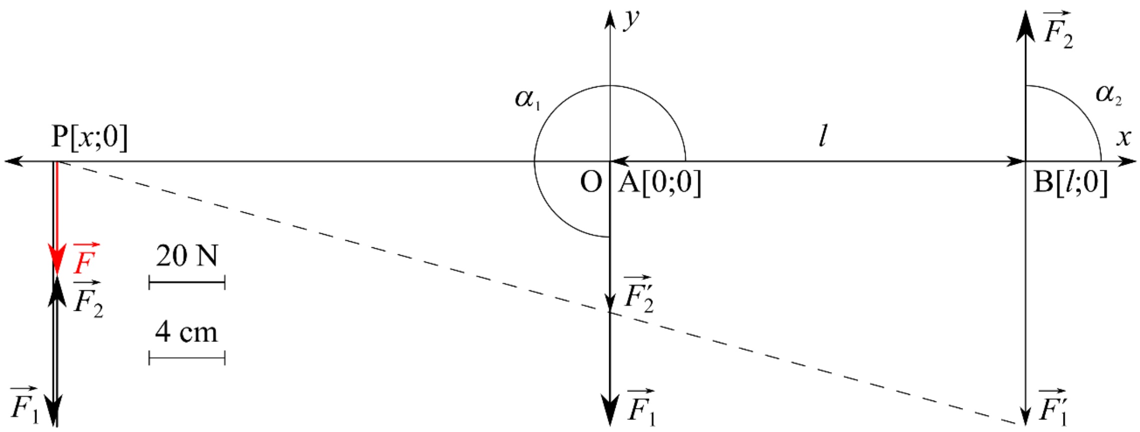
$$r_2 = 0{,}14 \text{ m.}$$



Obr. 22: Souřadnice působišť sil (počátek O v předpokládaném působišti P výslednice)

Grafické řešení části b):

Grafické řešení provedeme v souladu s kapitolou 5.3 – metodou 2.



Obr. 23: Grafické řešení příkladu 13b) metodou 2

Početní řešení části b):

Řešení lze provádět analogicky jako u příkladu 13a. Ukážeme si však ještě další postup řešení, a to rozkladem na složky. Podle obr. 23 platí pro souřadnice

$$y = y_1 = y_2 = 0; x_1 = 0, x_2 = l = 0{,}22$$

a pro složky sil dle rovnice (2)

$$F_1\colon\ F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 70 \cdot \cos 270° = 0\ \mathrm{N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 70 \cdot \sin 270° = -70\ \mathrm{N}.$$

$$F_2\colon\ F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 40 \cdot \cos 90° = 0\ \mathrm{N},$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 40 \cdot \sin 90° = 40\ \mathrm{N}.$$

Dále zjistíme složky a velikost výslednice sil (3, 4)

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} = 0\ \mathrm{N},$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} = -70 + 40 = -30\ \mathrm{N}.$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0^2 + 30^2} = \sqrt{900} = 30\ \mathrm{N}.$$

Momentová věta vzhledem k počátku O bude

$$M = M_1 + M_2,$$

ve složkách dle rovnice (8)

$$x \cdot F_y - y \cdot F_x = x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x} + x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x}.$$

Po dosazení

$$x \cdot (-30) - 0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 0{,}22 \cdot 40 - 0 \cdot 0,$$

$$-30x = 8{,}8,$$

$$x = -0{,}29\overline{3}\ \mathrm{m}.$$

Nesmíme zapomenout, že je potřeba dosazovat včetně případných znamének mínus.

---

6. VYŠETŘOVÁNÍ OBECNÉ SOUSTAVY VÍCE ROVINNÝCH SIL

Pokud máme více působících sil v rovině, hovoříme o tzv. obecné soustavě rovinných sil. Účinek takové soustavy sil můžeme nahradit silou jedinou, kterou nazýváme výslednicí sil. Výslednici opět můžeme hledat početně nebo graficky.

6.1 Početní řešení

Početní řešení vychází ze stejných rovnic, jaké byly již uvedeny v předchozích kapitolách 3.2, 3.3 a 3.4, tj. především z výslednice sil dle rovnice (1) a momentové věty (10). V případě řešení úloh rozkladem na složky lze užít rovnic (2, 3, 4, 5 a 8). Úlohy na rovnováhu lze řešit na základě obou podmínek rovnováhy, silové (14) a momentové (15), uvedených v kapitole 3.6.

Další možností početního řešení je využití postupu rozkladu sil i momentů do složek ve směru souřadnicových os. Tady je ovšem potřeba mít na paměti, že všechny složky uvažovaných veličin musí být dosazovány včetně případných záporných znamének. Celý postup lze rozepsat do šesti kroků:

1) Rozklad každé i-té síly F_i na složky

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos\alpha_i,$$
$$F_{iy} = F_i \cdot \sin\alpha_i. \tag{23}$$

2) Složky výslednice

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix},$$
$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \tag{24}$$

3) Velikost výslednice

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \tag{25}$$

4) Směrový úhel výslednice

$$\tan\omega = \frac{F_y}{F_x}. \tag{26}$$

5) Výsledný moment sil vzhledem k libovolnému bodu

$$M = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}\right) = x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x} + x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x} + \dots + x_n \cdot F_{ny} - y_n \cdot F_{nx} \tag{27}$$

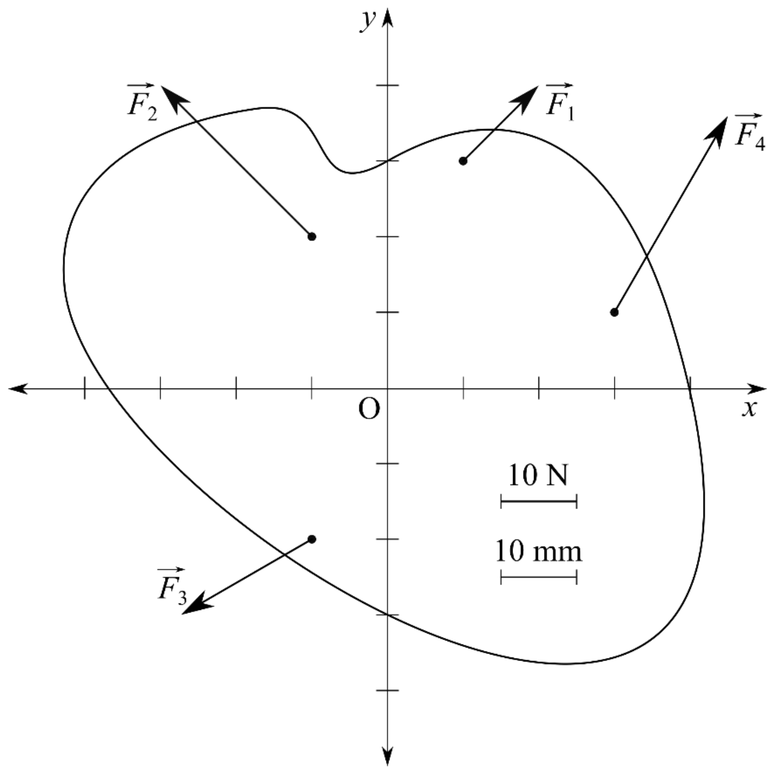
6) Rameno nositelky

$$r_v = \frac{M}{F}. \tag{28}$$

6.2 Grafické řešení

Problém grafického skládání můžeme řešit jako v předchozích příkladech (kap. 4, 5), tj. postupným hledáním výslednice dvou sil, a to jak její velikosti, směru a smyslu, tak i jejího působiště, resp. nositelky. Pokud je zadáno více sil, postupujeme tak, že nejprve složíme libovolné dvě síly. Jejich výslednici pak složíme s třetí silou. Tím nám vznikne další výslednice (nyní již výslednice tří sil), kterou zase složíme se čtvrtou silou. Takto pokračujeme až do té doby, než složíme všechny síly. Tento postup je ale velice zdlouhavý a při větším počtu sil nepřehledný. Je tedy lepší využít jiného grafického postupu skládání soustavy rovinných sil pomocí tzv. silového a vláknového obrazce. Silový obrazec nám určuje velikost, směr a smysl výslednice, vláknový obrazec poté určí polohu nositelky výslednice sil.

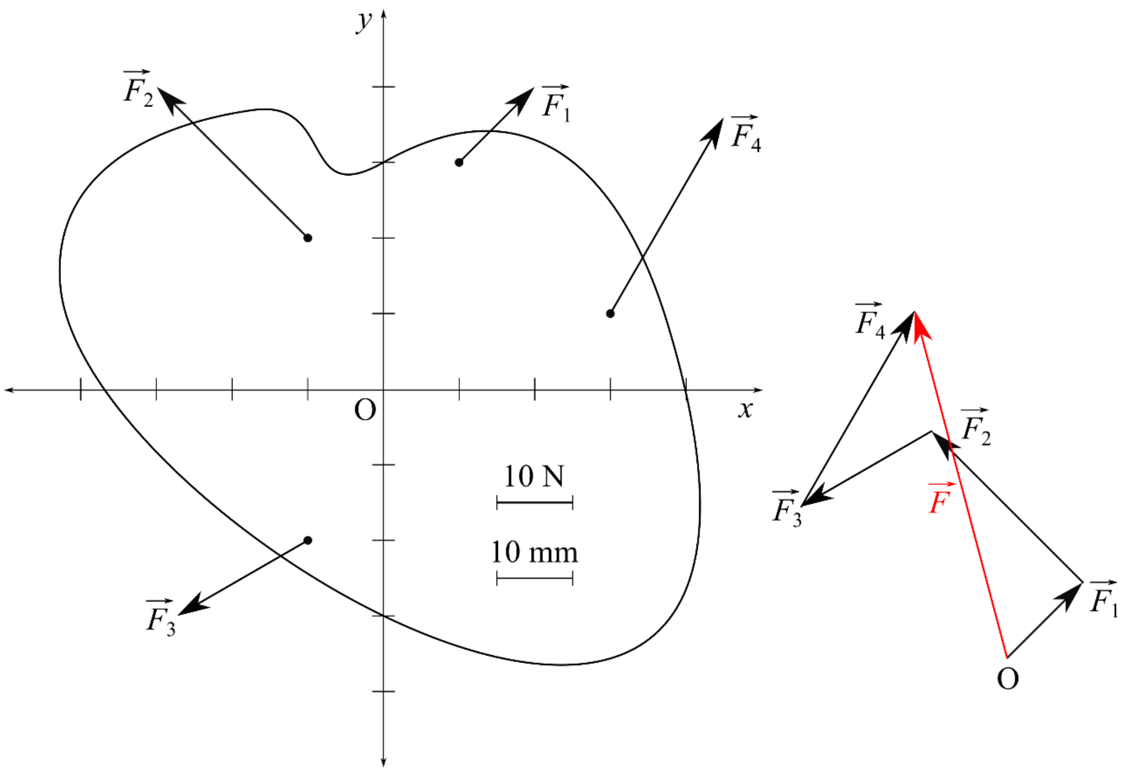
Celý postup bude vysvětlen na příkladu soustavy čtyř sil působících v jedné rovině (viz obr. 24), analogicky ho lze zobecnit na libovolný počet sil v rovině.



Obr. 24: Příklad působení rovinné soustavy sil na těleso

6.3 Silový obrazec

Silový obrazec je grafickým vyjádřením geometrického (vektorového) součtu sil. Při takovém řešení hledáme velikost, směr a smysl výslednice skládaných sil. Výslednici obdržíme postupným připojováním daných sil tak, že je řadíme za sebou a zachováváme při tom směr a smysl daných sil [1, 8].



Obr. 25: Silový obrazec zadaných čtyř sil

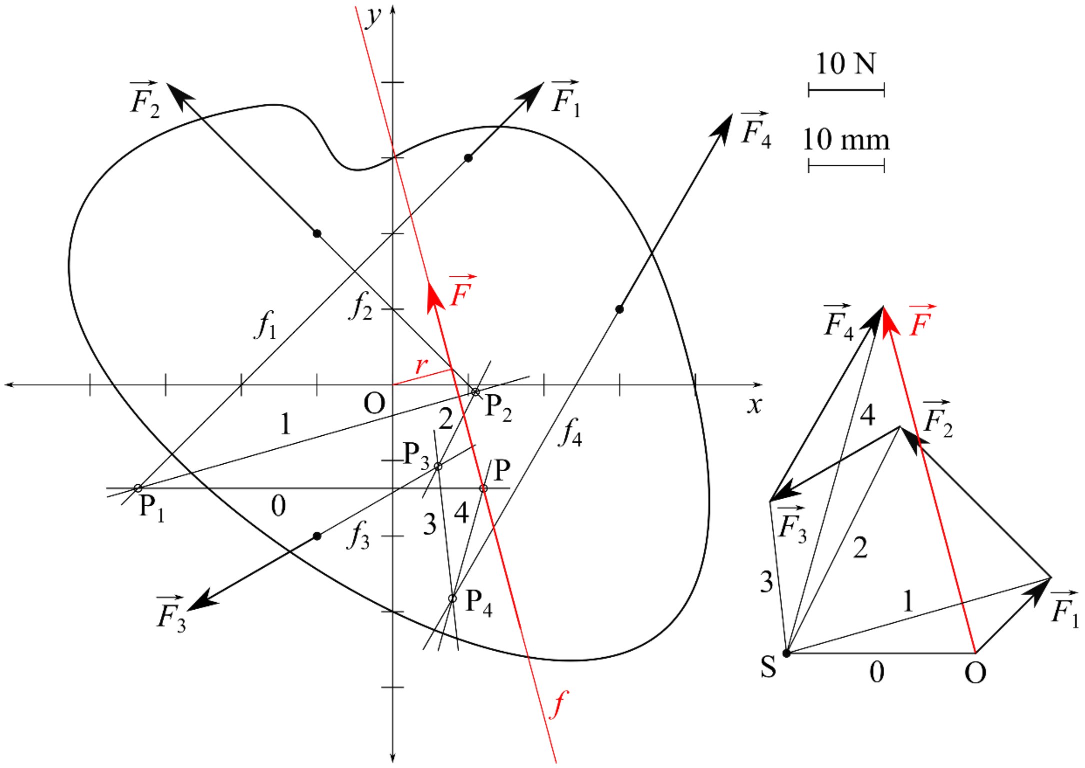
Při sestrojování silového obrazce (obr. 25) postupujeme takto:

1. Zvolíme počáteční bod O silového obrazce.
2. Do bodu O přeneseme ve zvoleném měřítku první skládanou sílu $\vec{F}_1$.
3. Do koncového bodu vektoru síly $\vec{F}_1$ přeneseme druhou skládanou sílu $\vec{F}_2$ (ve stejném měřítku, v jakém byla přenesena síla $\vec{F}_1$). Takto přeneseme do silového obrazce postupně i ostatní skládané síly $\vec{F}_3$ a $\vec{F}_4$.
4. Výslednici $\vec{F}$ skládaných sil do silového obrazce zakreslíme jako vektor, který má počátek v počátku vektoru první síly (tj. v bodě O) a koncový bod v koncovém bodě vektoru poslední skládané síly. Sled sil řešené soustavy jde vždy po šipkách a výslednice $\vec{F}$ jde proti sledu ostatních sil.

Tímto postupem jsme vytvořili silový obrazec (na obr. 25 vpravo), ze kterého lze jednoznačně určit velikost výslednice $\vec{F}$ (ve stejném měřítku, v jakém byly v silovém obrazci zobrazovány skládané síly) a její směr a smysl. Nemáme ale žádné informace o konkrétní poloze nositelky výslednice, tj. neznáme bod, kterým bude výslednice (resp. její nositelka) procházet. Jestliže si zvolíme počáteční bod v jiném místě roviny, bude zakreslená síla ležet v jiném místě roviny. Při volbě různých počátečních bodů budou vektory výslednice navzájem rovnoběžné. Posuvný pohyb tělesa, na které působí zadaná soustava skládaných sil, tedy ovlivněn nebude, ale bude ovlivněna rotace tohoto tělesa. Takto vyšetřená výslednice nahradí soustavu sil pouze v posouvajících účincích. Proto je nutné polohu výslednice určit jednoznačně [8].

6.4 Vláknový obrazec

Pomocí tohoto obrazce určíme polohu výslednice tak, že najdeme bod P, kterým nositelka *f* výslednice prochází.



Obr. 26: Vláknový obrazec čtyř zadaných sil

Při sestrojování vláknového obrazce (obr. 26) postupujeme takto:

1. Vedle silového obrazce zvolíme libovolně bod S.
2. Bod S spojíme s počátečními body a koncovými body všech sil silového obrazce. Tyto spojnice (vlákna) si vhodně očíslujeme. Vláken je vždy o jedno více, než je počet skládaných sil.
3. Vlákna přeneseme rovnoběžně k nositelkám původních sil následujícím způsobem. Nejdříve přeneseme nulté vlákno tak, aby protínalo v libovolném bodě P_1 nositelku první síly (f_1). Tímto bodem P_1 bude současně procházet i první vlákno. Druhé vlákno prochází průsečíkem P_2 prvního vlákna a nositelky druhé síly (f_2), třetí vlákno prochází průsečíkem P_3 druhého vlákna a nositelky třetí

síly (f_3), čtvrté vlákno pak prochází průsečíkem P_4 třetího vlákna s nositelkou čtvrté síly (f_4).

4. Průsečík nultého a čtvrtého vlákna určuje bod P, kterým bude procházet nositelka výslednice hledaných sil.

Bod S je vhodné volit tak, aby vlákna z něho vedená nesvírala s nositelkami sil příliš malý úhel. Při příliš malém úhlu může nastat situace, že se vlákno s nositelkou protne příliš daleko a vznikají nepřesnosti při určování průsečíků. Při vlastní konstrukci vláknového obrazce je potřeba vždy splnit následující podmínku: Vlákna, která v silovém obrazci danou sílu vytínají (tj. prochází jejím počátečním a koncovým bodem), se ve vláknovém obrazci na nositelce této síly protínají. Toto musí platit pro každou sílu ze silového obrazce, tedy to platí i pro výslednici sil soustavy.

Velikost, směr a smysl výslednice sil jsou známy ze silového obrazce. Nyní známe i bod P, kterým bude nositelka výslednice procházet. Výslednice ale nemusí mít v bodě P svůj počátek – sílu lze po její nositelce libovolně posouvat, aniž se její účinek na těleso změní.

Příklad 14:

Řešte soustavu sil, je-li dáno

$F_1 = 40\ \mathrm{N}, \alpha_1 = 40°, x_1 = 3\ \mathrm{m}, y_1 = 3\ \mathrm{m},$

$F_2 = 15\ \mathrm{N}, \alpha_2 = 60°, x_2 = 2\ \mathrm{m}, y_2 = -1\ \mathrm{m},$

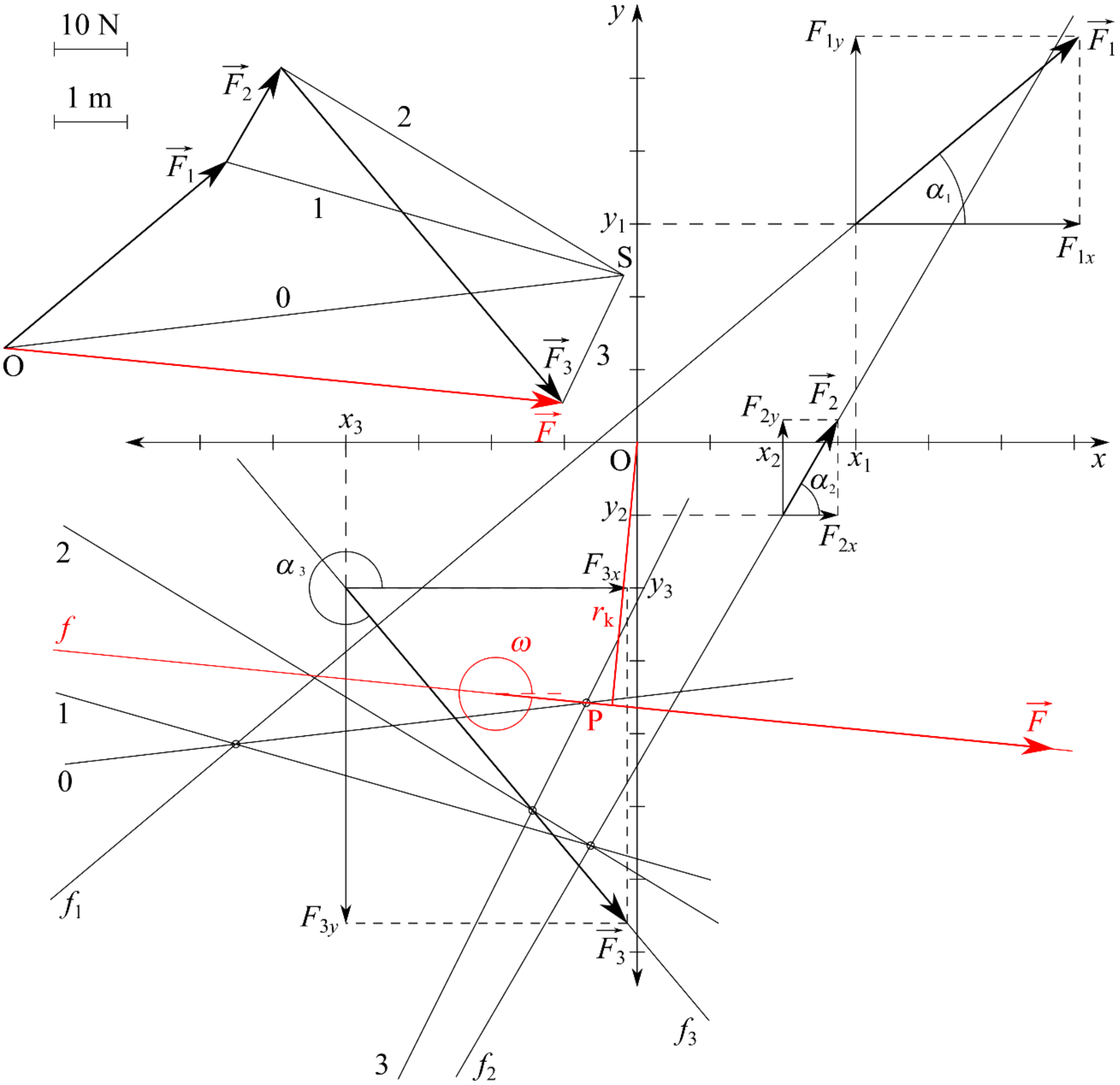
$F_3 = 60\ \mathrm{N}, \alpha_3 = 310°, x_3 = -4\ \mathrm{m}, y_3 = -2\ \mathrm{m}.$

Grafické řešení:

Celé grafické řešení je na obr. 27. Nejdříve zakreslíme síly podle zadání ve vhodném měřítku. Dále sestrojíme silový obrazec. Vyjdeme ze zvoleného bodu O, postupně do obrazce zakreslíme všechny zadané síly, nakonec spojíme bod O s koncem poslední zakreslené síly, čímž získáme velikost, směr a smysl výslednice (silový obrazec vlevo nahoře).

Vhodně si zvolíme bod S, ze kterého vedeme vlákna 0 až 3 vytínající jednotlivé síly silového obrazce, přičemž vlákno 0 vedeme do bodu O. Dále do grafického řešení zakreslíme nositelky zadaných sil (f_1, f_2, f_3). S vláknem 0 vedeme rovnoběžné vlákno v libovolném místě grafického řešení a najdeme jeho průsečík s nositelkou f_1, tímto průsečíkem vedeme vlákno rovnoběžné s vláknem 1 a najdeme průsečík s nositelkou f_2, tímto průsečíkem vedeme vlákno rovnoběžné s vláknem 2 a najdeme průsečík s nositelkou f_3 a nakonec tímto průsečíkem vedeme vlákno rovnoběžné s vláknem 3 a najdeme průsečík s vláknem 0. Tím jsme našli bod P. kterým povede nositelka výslednice, která bude rovnoběžná s výslednicí $\vec{F}$ v silovém obrazci. Působiště výslednice lze volit libovolně na této nositelce.

Pozn. V grafickém řešení jsou zakresleny i prvky potřebné k početnímu řešení.



Obr. 27: Grafické řešení příkladu 14

Početní řešení:

Všechny důležité prvky pro početní řešení jsou zakresleny v grafickém řešení na obr. 27. Nejdříve rozložíme zadané síly na složky dle rovnic (23)

$$F_1\!: \; F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 40 \cdot \cos 40° = 30{,}64\ \text{N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 40 \cdot \sin 40° = 25{,}71\ \text{N}.$$

$$F_2\!: \; F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 15 \cdot \cos 60° = 7{,}5\ \text{N},$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 15 \cdot \sin 60° = 12{,}99\ \text{N}.$$

$$F_3\!: \; F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 60 \cdot \cos 310° = 38{,}57\ \text{N},$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 60 \cdot \sin 310° = -45{,}96 \text{ N}.$$

Dále určíme složky výslednice a její velikost dle rovnic (24, 25)

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 30{,}64 + 7{,}5 - 38{,}57 = 76{,}71 \text{ N},$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 25{,}71 + 12{,}99 - 45{,}96 = -7{,}26 \text{ N}.$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(76{,}71)^2 + (-7{,}26)^2} = \sqrt{5937{,}1317} = 77{,}05 \text{ N}.$$

Poté určíme směr a smysl výslednice z rovnice (26)

$$\tan \omega' = \frac{F_y}{F_x},$$

$$\tan \omega' = \frac{-7{,}26}{76{,}71},$$

$$\tan \omega' = -0{,}0946,$$

$$\omega' = -5{,}407 = -5°24'25{,}2''.$$

Vypočtený úhel ω' z goniometrické rovnice bude vždy z intervalu $(-90°; 90°)$. Dle znamének složek výslednice (IV. kvadrant) je potřeba úhel přepočítat do správného kvadrantu. V tomto případě

$$\omega = 360° + \omega' = 360° - 5°24'25{,}2'' = 354°35'34{,}8''.$$

Dále vyjdeme z momentové věty (10)

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

zapsané ve složkách (27)

$$M = x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x} + x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x} + x_3 \cdot F_{3y} - y_3 \cdot F_{3x}$$

a určíme moment výslednice

$$M = 3 \cdot 25{,}71 - 3 \cdot 30{,}64 + 2 \cdot 12{,}99 + 1 \cdot 7{,}5 + 4 \cdot 45{,}96 + 2 \cdot 38{,}57 = 279{,}675 \text{ N·m}.$$

Nakonec určíme podle rovnice (28) rameno výslednice

$$M = r_k \cdot F,$$

$$r_k = \frac{M}{F} = \frac{279{,}675}{77{,}05} = 3{,}63 \text{ m}.$$

6.5 Rovnováha obecné soustavy rovinných sil

Při vyšetřování rovnováhy obecné soustavy více rovinných sil je možné využít stejných postupů, jako při hledání výslednice obecné soustavy sil. Jediným rozdílem je, že síla uvádějící zadanou soustavu sil do rovnováhy bude mít opačný smysl než výslednice soustavy zadaných sil. V grafickém řešení bude silový obrazec uzavřený v jednom sledu, tzn. hledaná síla bude ve stejném sledu jako mají zadané síly a nikoliv v opačném sledu jako mívá výslednice sil. Ve vláknovém obrazci nedojde k naprosto žádným změnám. V početním řešení budeme vycházet z rovnic pro silovou rovnováhu (14), kde do levé strany dosadíme kromě zadaných sil i sílu hledanou, a momentovou rovnováhu (15) s přidaným momentem hledané síly do její levé strany.

Příklad 15:

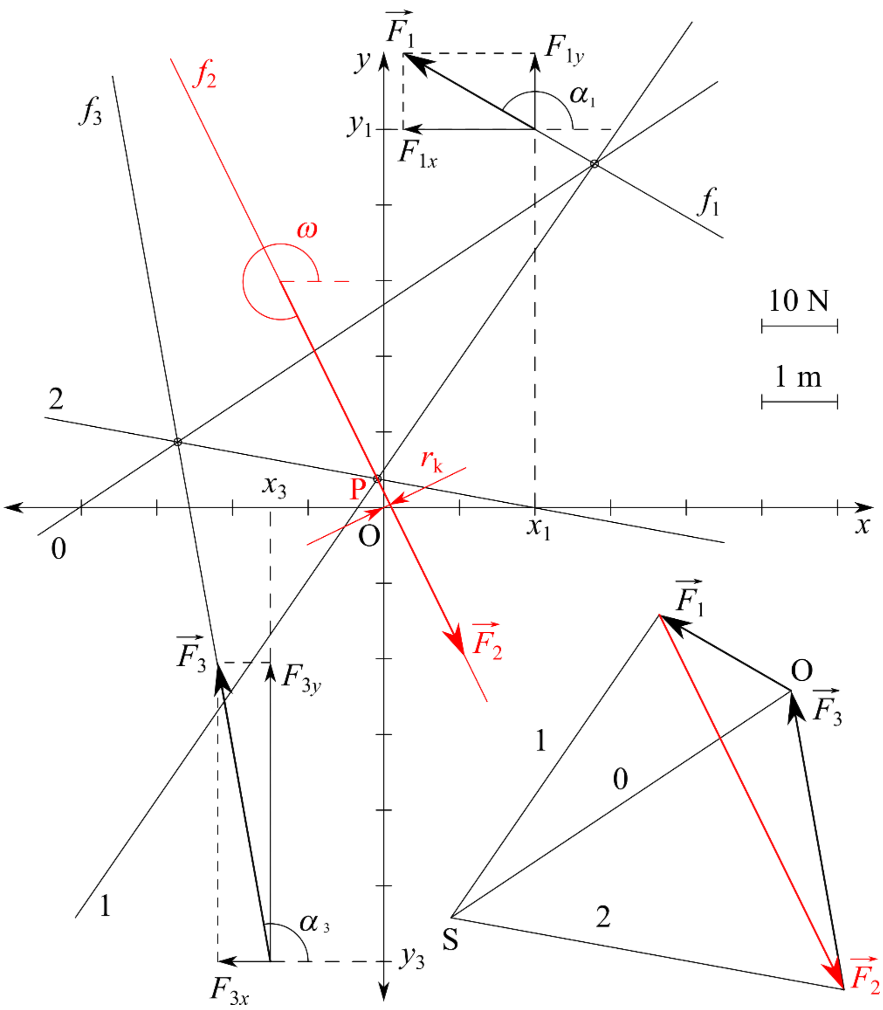
Určete sílu F_2 tak, aby soustava sil F_1, F_2, F_3 byla v rovnováze, je-li dáno

$F_1 = 20$ N, $\alpha_1 = 150°$, $x_1 = 2$ m, $y_1 = 5$ m,

$F_3 = 40$ N, $\alpha_3 = 100°$, $x_2 = -1{,}5$ m, $y_2 = -6$ m.

Grafické řešení:

Celé grafické řešení je na obr. 28.



Obr. 28: Grafické řešení příkladu 15

Nakreslíme zadání v měřítku, tzn. všechny síly a jejich nositelky. Přidáme silový obrazec, v němž nalezneme velikost, směr a smysl hledané síly $\vec{F}_2$, a zavedeme vlákna 0, 1, 2 analogicky jako v příkladu 14. Rovnoběžky s vlákny 0 a 2 přeneseme do zakresleného zadání tak, aby jejich průsečík ležel na nositelce f_3. Rovnoběžku s vláknem 1 vedeme průsečíkem vlákna 0 a nositelky f_1. Průsečík P vláken 1 a 2 je hledaný bod, kterým vedeme rovnoběžku s hledanou silou $\vec{F}_2$ ze silového obrazce, na kterou vyneseme nalezenou sílu do libovolného bodu.

Pozn. V grafickém řešení jsou zakresleny i prvky potřebné k početnímu řešení.

Početní řešení:

Všechny důležité prvky pro početní řešení jsou zakresleny v grafickém řešení na obr. 28. Nejdříve rozložíme zadané síly na složky dle rovnic (23)

$$F_1{:}\ F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 20 \cdot \cos 150° = -17{,}32 \text{ N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 20 \cdot \sin 150° = 10 \text{ N}.$$

$$F_3{:}\ F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 40 \cdot \cos 100° = -6{,}95 \text{ N},$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 40 \cdot \sin 100° = 39{,}39 \text{ N}.$$

To dosadíme do rovnice pro silovou rovnováhu (14) rozepsanou do složek a z nich vypočteme složky hledané síly.

$$F_x{:}\ F_x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0,$$

$$-17{,}32 + F_{2x} - 6{,}95 = 0,$$

$$F_{2x} = 24{,}27 \text{ N}.$$

$$F_y{:}\ F_y = \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0,$$

$$10 + F_{2y} + 39{,}39 = 0,$$

$$F_{2y} = -49{,}39 \text{ N}.$$

Dle rovnice (25) určíme velikost hledané síly

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{24{,}27^2 + (-49{,}39)^2} = \sqrt{3028{,}405} = 55{,}03 \text{ N}.$$

A z rovnice (26) určíme úhel

$$\tan\omega' = \frac{F_{2y}}{F_{2x}},$$

$$\tan\omega' = \frac{-49{,}39}{24{,}27},$$

$$\tan\omega' = -2{,}035,$$

$$\omega' = -63{,}83° = 63°49'50{,}62''.$$

Úhel přepočteme do IV. kvadrantu v souladu se znaménky složek síly

$$\omega = 360° + \omega' = 360° - 63{,}83° = 296{,}17° = 296°10'12''.$$

Dále vyjdeme z momentové rovnováhy (15)

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

rozepsané do složek

$$x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x} + M_2 + x_3 \cdot F_{3y} - y_3 \cdot F_{3x} = 0.$$

Po dosazení určíme moment hledané síly

$$2 \cdot 10 + 5 \cdot 17{,}32 + M_2 - 1{,}5 \cdot 39{,}39 - 6 \cdot 6{,}95 = 0,$$

$$M_2 = -106{,}6 + 100{,}785 = -5{,}815 \text{ N·m}.$$

Z rovnice (28) nakonec určíme rameno nositelky hledané síly

$$M = r_k \cdot F,$$

$$r_{k2} = \frac{M_2}{F_2} = \frac{-5{,}815}{55{,}03} = -0{,}106 \text{ m}.$$

Příklad 16:

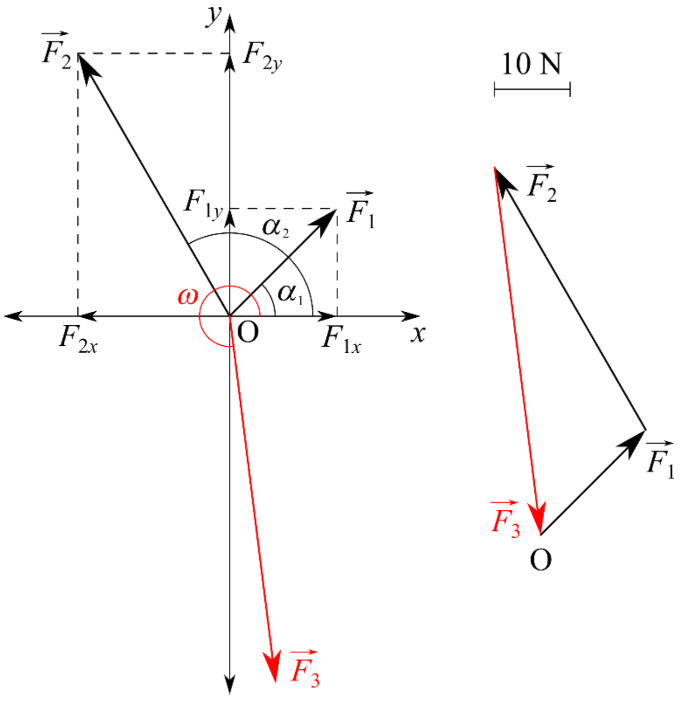
Nalezněte sílu F_3, která uvádí soustavu sil působících v jednom bodě do rovnováhy, je-li dáno

$$F_1 = 20 \text{ N}, \alpha_1 = 45°,$$

$$F_2 = 45 \text{ N}, \alpha_2 = 120°.$$

Grafické řešení:

Protože síly působí v jednom bodě, bude i výslednice působit v témže bodě. I přesto můžeme k řešení využít silový obrazec jako u obecné soustavy sil. Nalezenou sílu ze silového obrazce přeneseme do stejného bodu jako zadané síly.



Obr. 29: Grafické řešení příkladu 16

Početní řešení:

Postup je naprosto stejný jako u příkladu 15, pouze nemusíme určovat moment hledané síly a rameno její nositelky, protože známe její působiště (totožné s působištěm zadaných sil).

Složky zadaných sil:

F_1: $F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 20 \cdot \cos 45° = 14{,}14$ N,

$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 20 \cdot \sin 45° = 14{,}14$ N.

F_2: $F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 45 \cdot \cos 120° = -22{,}5$ N,

$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 45 \cdot \sin 120° = 38{,}97$ N.

Složky hledané síly:

F_x: $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0,$

$14{,}14 - 22{,}5 + F_{3x} = 0,$

$F_{3x} = 8{,}36$ N.

F_y: $F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0,$

$14{,}14 + 38{,}97 + F_{3y} = 0,$

$F_{3y} = -53{,}11$ N.

Velikost hledané síly:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{8{,}36^2 + (-53{,}11)^2} = \sqrt{2890{,}5617} = 53{,}76 \text{ N.}$$

Úhel hledané síly, včetně přepočtu do IV. kvadrantu dle znamének jejích složek:

$\tan\omega' = \frac{F_{3y}}{F_{3x}},$

$\tan\omega' = \frac{-53{,}11}{8{,}36},$

$\tan\omega' = -6{,}35,$

$\omega' = -81{,}05° = 85°3'16{,}27''.$

$\omega = 360° + \omega' = 360° - 81{,}05° = 278{,}95° = 278°57'.$

---

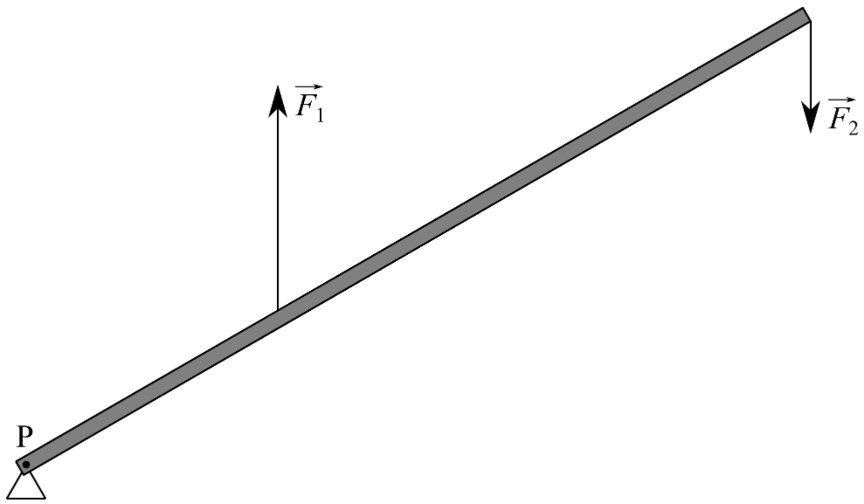
7. ROVNOVÁHA SIL V JEDNODUCHÝCH TECHNICKÝCH APLIKACÍCH

7.1 Páka

Páka je jednoduchý stroj, nejčastěji tyč, která se otáčí kolem nějakého pevného bodu P. V tomto bodě jsou zachycené posuvné účinky působících sil, tedy reakce působící v bodě P uvádí soustavu sil do rovnováhy. Reakce může mít obecně libovolný směr, jedná se tedy o podporu pevnou. Vektor reakční síly lze zjistit na základě silové rovnováhy (14). Celková rovnováha na páce nastane tehdy, pokud je i výsledný moment sil působících na páku nulový, tedy platí momentová rovnováha (15).

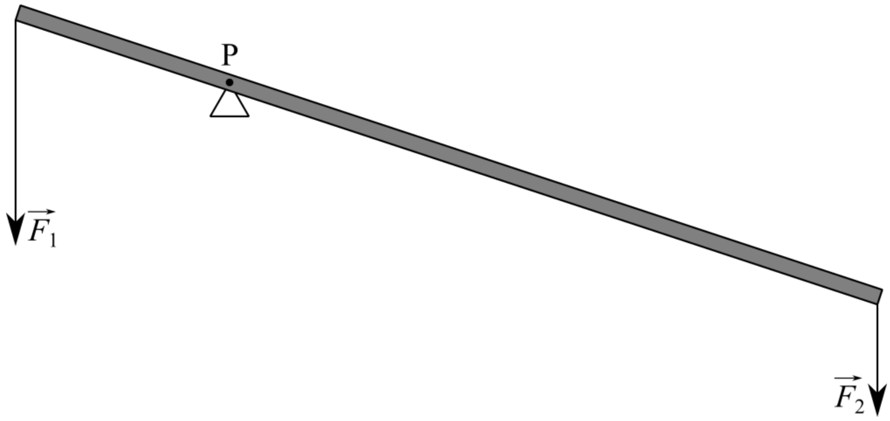
Páka může mít různé tvary a lze jí dělit podle délky ramen, nebo podle umístění osy otáčení. Můžeme se tak setkat s pákou rovnoramennou a nerovnoramennou, jednozvratnou (jednoramenná) a dvojzvratnou (dvouramenná).

U jednoramenné páky (obr. 30) jsou ramena působících sil na stejné straně od pevného bodu P, přičemž síly působí opačným směrem. Takovým příkladem může být lis na česnek, louskáček na ořechy, kolečko, otvírák na PET láhve či otvírák na konzervy nebo láhve.



Obr. 30: Jednoramenná páka

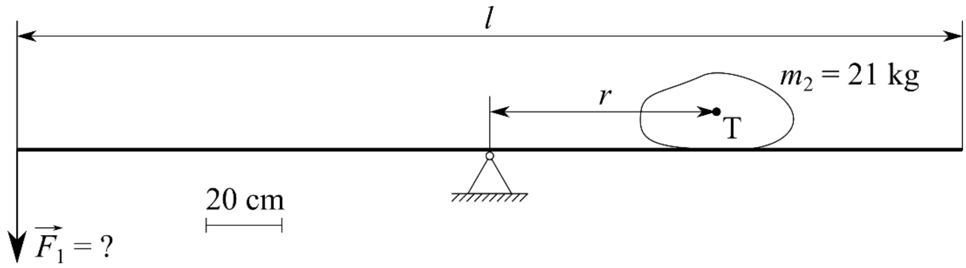
U dvouramenné páky (obr. 31) jsou ramena působících sil na opačných stranách od pevného bodu P a síly na obou stranách působí stejným směrem. Příkladem mohou být nůžky, kolík na prádlo, kombinované kleště, dvouramenné váhy, houpačka nebo pumpa.



Obr. 31: Dvouramenná páka

Příklad 17:

Páka má délku 2,5 m a je podepřena ve své polovině (viz obr. 32). Jakou silou musíme působit na konci levé strany páky, jestliže na pravé straně je těleso o hmotnosti 21 kg ve vzdálenosti 60 cm od osy otáčení?



Obr. 32: Schématický nákres příkladu 17

Řešení:

Označíme si jednotlivé veličiny a převedeme na základní jednotky

$$r_1 = \frac{l}{2} = 1{,}25 \text{ m}, r_2 = 60 \text{ cm} = 0{,}6 \text{ m}, m_2 = 21 \text{ kg} \Longrightarrow F_2 = 210 \text{ N}, F_1 = ?$$

Z momentové rovnováhy (15) plyne pro velikosti momentů obou sil

$$M_1 = M_2,$$

$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2,$$

$$F_1 = \frac{r_2 \cdot F_2}{r_1} = \frac{0{,}6 \cdot 210}{1{,}25} = 100{,}8 \text{ N}.$$

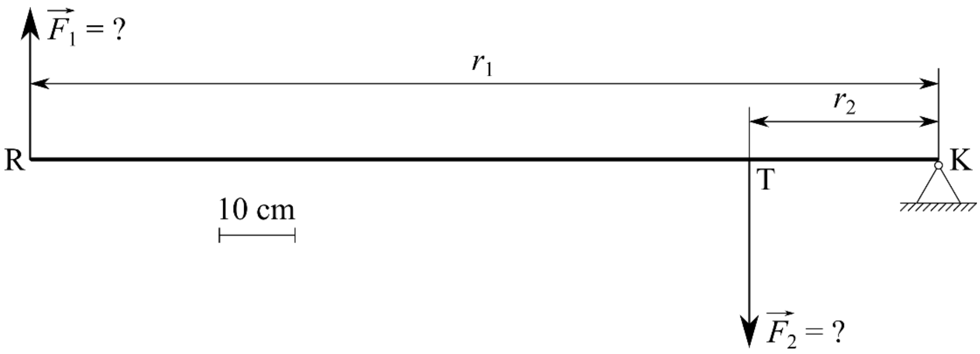
Musíme působit silou 100,8 N.

Příklad 18:

Jakou silou zvedneme kolečko naplněné pískem, jestliže se do kolečka vejde 80 l písku a kolečko je naplněno ze 75%? Vzdálenost kola od rukojeti je 1,2 m a těžiště písku je 25 cm od osy kola. Hustota písku je 1600 kg/m^3.

Řešení:

Situaci si schematicky znázorníme s vyznačením potřebných veličin – obr. 33.



Obr. 33: Schématický nákres příkladu 18 (R – rukojeť, T – těžiště písku, K – osa kola)

Nejdříve určíme hmotnost písku naloženého na kolečko. Z definice hustoty plyne (objem kolečka převedeme na základní jednotky, tj. 80 l = 0,08 m^3)

$$m = \rho \cdot V = 1600 \cdot 0{,}08 = 128 \text{ kg}.$$

Protože je kolečko naplněno pouze ze 75%, využijeme přímé úměrnosti a trojčlenky

100 % ....128 kg

75 % ....x kg

$$x = \frac{75}{100} \cdot 128 = 96 \text{ kg}.$$

Dle označení veličin v obr. 33 vypíšeme jednotlivé zadané veličiny a převedeme jejich hodnoty na základní jednotky

$$r_1 = 1{,}2 \text{ m}, r_2 = 25 \text{ cm} = 0{,}25 \text{ m}, m = 96 \text{ kg} \Rightarrow F = 960 \text{ N}, F_1 = ?$$

Z momentové rovnováhy (15) plyne pro velikosti momentů obou sil

$$M_1 = M_2,$$

$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2,$$

$$F_1 = \frac{r_2 \cdot F_2}{r_1},$$

$$F_1 = \frac{0{,}25 \cdot 960}{1{,}2} = 200 \text{ N}.$$

Kolečko zvedneme silou 200 N.

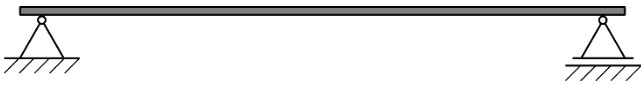
7.2 Nosník

Kromě páky slouží k přenosu sil nosník [9]. Je to jakýsi „trám či konstrukce" různého tvaru, bývá součástí různých stavebních, strojních a technických děl. Jednotlivé síly u nosníku působí staticky, ojediněle se objevuje působení dynamické. Existují různé druhy nosníků, např. vetknutý nosník, prostý nosník na dvou podporách a jiné.

Vetknutý nosník nebo také konzola (obr. 34) je takový nosník, kdy je znemožněn jakýkoli posun či pootočení prutu. Ve vetknutí na sebe působí dvě navzájem kolmé silové reakce a jedna momentová – ohybový moment, při kterém je vyvíjen tlak na spodní část nosníku a tah na horní část nosníku.

Obr. 34: Vetknutý nosník

Prostý nosník (obr. 35) je takový nosník, který je uložen na dvou podporách, z nichž jedna je pevná a druhá je volná. Pevná podpora může zachytávat reakce v kterémkoli směru, volná podpora jen reakce kolmé na podélnou osu nosníku, tedy pouze reakce kolmé na svůj stupeň volnosti.



Obr. 35: Prostý nosník

Příklad 19:

Nosník délky $l = 8$ m je upevněn v jedné pevné podpoře A ve vzdálenosti $d = 3$ m od jeho levého konce. Na bližším konci je zatížen silou F_1 ($F_1 = 300$ N, $\alpha_1 = 320°$), na vzdálenějším konci je zatížen silou F_2 působící pod úhlem $\alpha_2 = 230°$. Určete velikost síly F_2 a reakci R_A v podpoře A (viz obr. 36).

Grafické řešení:

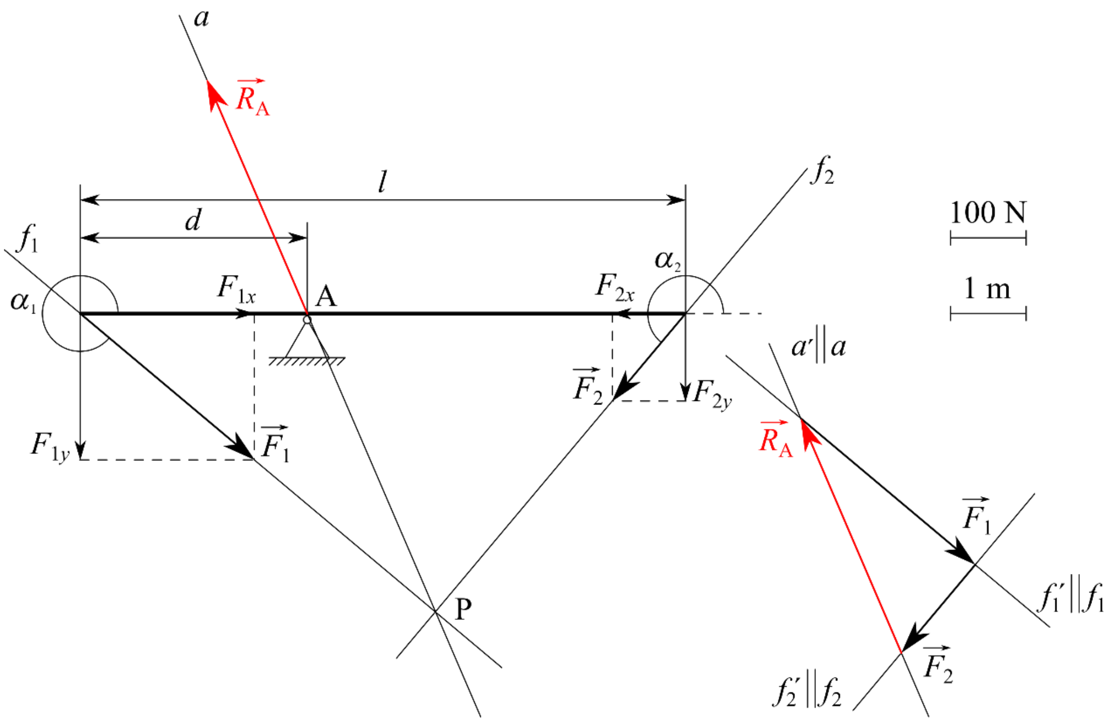
Celé grafické řešení je na obr. 36. Nejdříve zakreslíme zadání ve vhodně zvoleném měřítku, tj. nosník s podporou A, sílu $\vec{F}_1$ včetně její nositelky f_1 a nositelku f_2 hledané síly $\vec{F}_2$. Nositelky f_1 a f_2 se protnou v bodě P, do kterého by šlo přenést jednotlivé síly a zde je složit ve výslednici (viz kap. 5.2) nebo zde najít sílu uvádějící soustavu do rovnováhy, tj. reakci podpory R_A. Reakce R_A a výslednice jsou stejně velké, opačného smyslu (viz kap. 3.6). Nositelka a reakce R_A tedy musí procházet tímto bodem P. Zároveň musí procházet podporou A, kde bude mít působiště, tedy přímka AP je nositelkou a reakce.

Dále budeme sestrojovat silový obrazec:

1. narýsujeme sílu $\vec{F}_1$,

2. koncem síly $\vec{F}_1$ vedeme $f_2^{\prime}$ rovnoběžnou s nositelkou f_2,
3. počátkem síly $\vec{F}_1$ vedeme a' rovnoběžnou s nositelkou a,
4. $f_2^{\prime}$ se protne s nositelkou a', čímž dostaneme velikost síly F_2 a reakce R_A.

Soustava je v rovnováze, a proto síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a $\vec{R}_\mathrm{A}$ musí jít ve stejném sledu. Tato reakce se pak musí přenést do bodu A.



Obr. 36: Grafické řešení příkladu 19

Početní řešení:

Všechny důležité prvky pro početní řešení jsou zakresleny v grafickém řešení na obr. 36. Nejdříve rozložíme sílu $\vec{F}_1$ na složky dle rovnic (23)

$$F_1\colon\ F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 300 \cdot \cos 320° = 229{,}81\ \mathrm{N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 300 \cdot \sin 320° = -192{,}84\ \mathrm{N}.$$

Zapíšeme výsledný moment soustavy všech působících sil vzhledem k bodu A dle momentové věty (10)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_\mathrm{A}.$$

Síla $\vec{R}_\mathrm{A}$ má nulové rameno (působí přímo v bodě A), a proto moment $\vec{M}_\mathrm{A}$ je také nulový. Soustava je v rovnováze (netočí se), proto musí platit momentová rovnováha (15) a tedy výsledný moment $\vec{M}$ se musí rovnat nule.

Rozepíšeme momenty do souřadnic dle rovnice (27) – vyjdeme z obr. 36, bod A bude počátek soustavy souřadnic

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

$$M_1 = -d \cdot F_{1y} - 0 \cdot F_{1x} = -3 \cdot (-192{,}84) = 578{,}52 \text{ N·m}.$$

$$M_2 = (l - d) \cdot F_{2y} - 0 \cdot F_{2x} = 5 \cdot F_{2y} \text{ N·m}.$$

Dosadíme do momentové rovnováhy a určíme *y*-ovou složku síly $\vec{F}_2$

$$0 = M_1 + M_2 = 578{,}52 + 5 \cdot F_{2y},$$

$$F_{2y} = -115{,}704 \text{ N}.$$

Nyní rozepíšeme do složek sílu $\vec{F}_2$

$$F_2\colon\ F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2,$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2.$$

Z druhé rovnice určíme velikost síly F_2

$$F_2 = \frac{F_{2y}}{\sin\alpha_2} = \frac{-115{,}704}{-0{,}766} = 151{,}05 \text{ N}$$

a dosazením do první rovnice určíme její *x*-ovou složku

$$F_{2x} = 151{,}05 \cdot (-0{,}643) = -97{,}09 \text{ N}.$$

Reakci v podpoře A určíme ze silové rovnováhy (14) rozepsané do složek.

$$F_x\colon\ F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + R_{\mathrm{A}x} = 0,$$

$$229{,}81 - 97{,}09 + R_{\mathrm{A}x} = 0,$$

$$R_{\mathrm{A}x} = -132{,}72 \text{ N}$$

$$F_y\colon\ F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + R_{\mathrm{A}y} = 0,$$

$$-192{,}84 - 115{,}704 + R_{\mathrm{A}y} = 0,$$

$$R_{\mathrm{A}y} = 308{,}544 \text{ N}.$$

Velikost reakce pak z jejích složek určíme podle Pythagorovy věty (16)

$$R_{\mathrm{A}} = \sqrt{R_{\mathrm{A}x}^2 + R_{\mathrm{A}y}^2} = \sqrt{112813{,}9983} = 335{,}88 \text{ N},$$

její směr a smysl z rovnice (26), přičemž úhel musíme přepočítat do II. kvadrantu určeného podle znamének jednotlivých složek reakce.

$$\tan\omega' = \frac{R_{\mathrm{A}y}}{R_{\mathrm{A}x}},$$

$$\tan\omega' = \frac{308{,}88}{-132{,}72} = -2{,}32,$$

$$\omega' = -66{,}73°.$$

Hledaný směr tedy bude

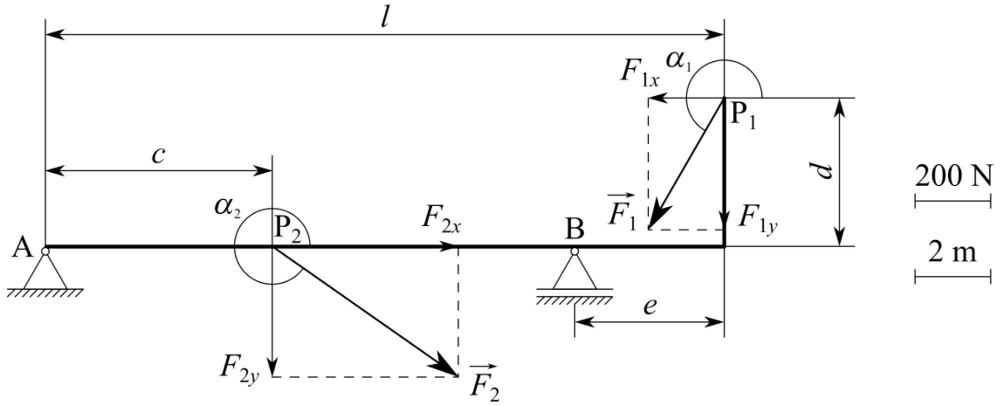
$$\omega = 180° + \omega' = 180° - 66{,}73° = 113{,}27° = 113°16'29{,}7''.$$

Příklad 20:

Na nosník tvaru L uložený na dvou podporách A a B působí dvě vnější síly podle obr. 37. Určete reakce v podporách A a B, je-li dáno

$c = 6$ m, $d = 4$ m, $e = 4$ m, $l = 18$ m, $\alpha_1 = 240°$, $\alpha_2 = 325°$, $F_1 = 400$ N,

$F_2 = 600$ N, $R_A = ?$



Obr. 37: Zadání příkladu 20

Početní řešení:

Podpora A je pevná, může zachycovat sílu libovolného směru, její složky označíme R_{Ax} a R_{Ay}. Podpora B je volná, zachycuje jen reakce kolmé na podélnou osu podepřené části nosníku, a proto bude mít pouze *y*-ovou složku, označíme jí tedy pouze R_B.

Začneme rozkladem sil na složky

F_1: $F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 400 \cdot \cos 240° = -200$ N,

$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 400 \cdot \sin 240° = -346{,}41$ N.

F_2: $F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 600 \cdot \cos 325° = 491{,}49$ N,

$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 600 \cdot \sin 325° = -344{,}15$ N.

Výsledný moment vzhledem k bodu A se musí rovnat nule, soustava je v rovnováze, netočí se (moment síly R_A bude nulový, protože působí v bodě A).

$$M = M_1 + M_2 + M_A + M_B = 0.$$

Rozepsáním do složek a úpravami dostaneme reakci R_B

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

$$l \cdot F_{1y} - d \cdot F_{1x} + c \cdot F_{2y} - 0 \cdot F_{2x} + (l - e) \cdot R_B = 0,$$

$$-4 \cdot (-200) + 18 \cdot (-346{,}41) + 6 \cdot (-344{,}15) + 14 \cdot R_B = 0,$$

$$14 R_B = 7500{,}28,$$

$$R_B = 535{,}73 \text{ N}.$$

Nyní rozepíšeme silovou rovnováhu (14) do složek a určíme složky reakce R_A

F_x: $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + R_{\mathrm{A}x} = 0,$

$-200 + 491{,}49 + R_{\mathrm{A}x} = 0,$

$R_{\mathrm{A}x} = -291{,}49$ N.

F_y: $F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + R_{\mathrm{A}y} + R_{\mathrm{B}} = 0,$

$-346{,}41 - 344{,}15 + R_{\mathrm{A}y} + 535{,}73 = 0,$

$R_{\mathrm{A}y} = 154{,}83$ N.

Reakce R_{A} dle Pythagorovy věty (16) bude mít velikost

$$R_{\mathrm{A}} = \sqrt{R_{\mathrm{A}x}^2 + R_{\mathrm{A}y}^2} = \sqrt{(-291{,}49)^2 + (154{,}83)^2} = \sqrt{108938{,}75} = 330{,}06 \text{ N}.$$

Směr a smysl určíme ze vztahu (26)

$\tan \omega' = \frac{R_{\mathrm{A}y}}{R_{\mathrm{A}x}},$

$\tan \omega' = \frac{154{,}83}{-291{,}49} = -0{,}5312,$

$\omega' = -27{,}977°.$

Dle znamének složek jde o II. kvadrant, a proto bude

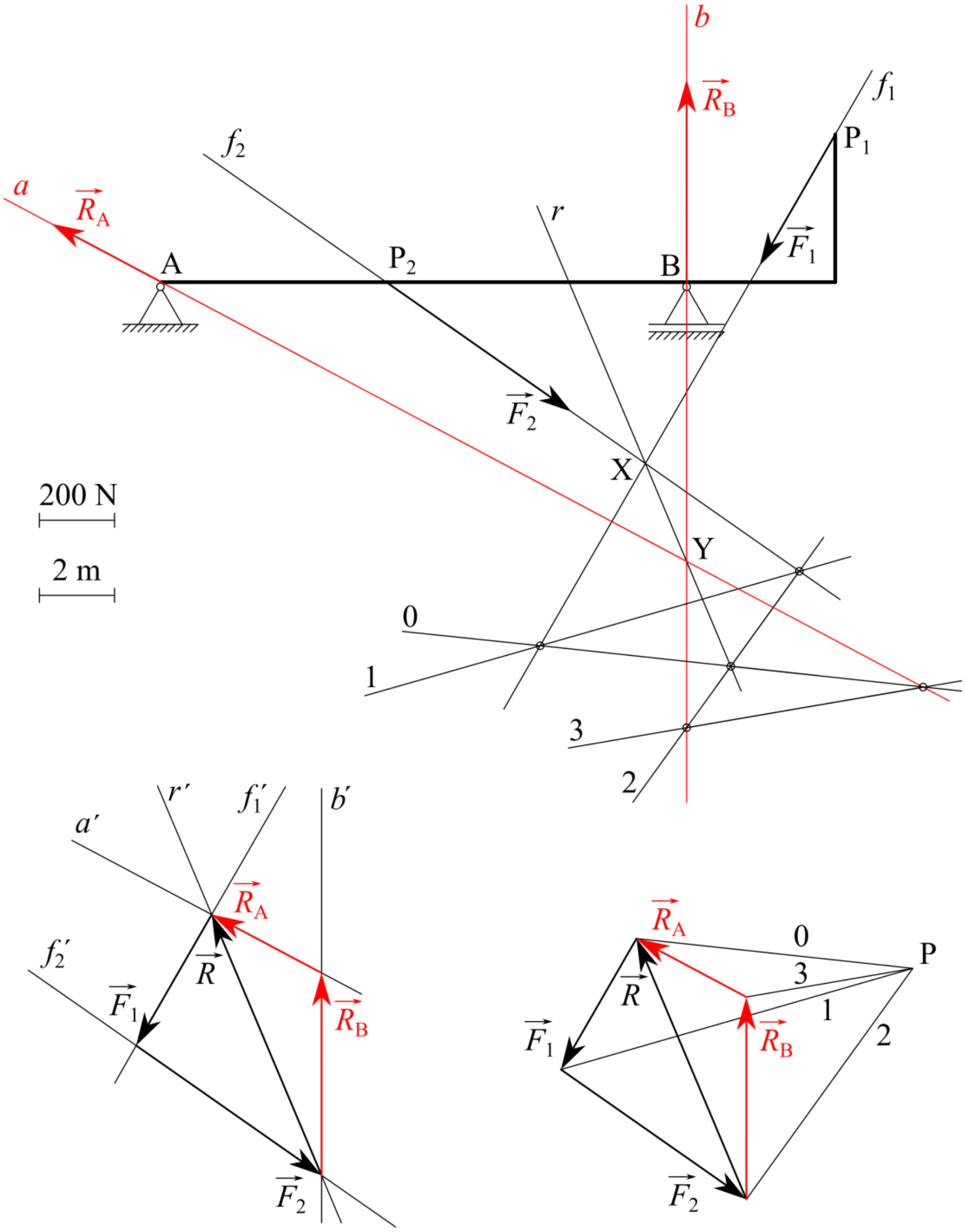
$$\omega = 180° + \omega' = 180° - 27{,}977° = 152{,}023° = 152°1'23''.$$

Obě vypočtené reakce jsou zakreslené v grafickém řešení na obr. 38.

Grafické řešení:

Začneme nakreslením celého zadání ve vhodném měřítku, tj. nosníku, obou podpor a obou působících sil včetně jejich nositelek. Souběžně začneme tvořit silový diagram (na obr. 38 vlevo dole), který je nezbytný ke grafickému vyřešení příkladu. V silovém obrazci k silám $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ přidáme sílu $\vec{R}$ (celková reakce), která uvádí nosník do rovnováhy. Síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a $\vec{R}$ musí jít v jednom sledu. Celková reakce $\vec{R}$ je zároveň vektorovým součtem reakcí v obou podporách.

V grafickém řešení označíme X průsečík nositelek f_1 a f_2. Tímto bodem musí procházet nositelka *r* celkové reakce $\vec{R}$ rovnoběžně s nositelkou *r*′ v silovém obrazci. Podporou B vedeme nositelku *b* reakce $\vec{R}_{\mathrm{B}}$ kolmo na osu podepřené části nosníku, protože se jedná o podporu volnou. Nositelky *r* a *b* se protnou v bodě Y, do kterého bychom teoreticky mohli přenést reakce v obou podporách a sečíst je zde v celkovou reakci $\vec{R}$. Z toho vyplývá, že bodem Y musí vést i nositelka *a* reakce $\vec{R}_{\mathrm{A}}$, která musí procházet i podporou A, tedy $a \equiv \mathrm{AY}$. Přenesením nositelek obou reakcí do koncových bodů celkové reakce $\vec{R}$ v silovém obrazci (přímky *a*′, *b*′) nalezneme velikosti obou hledaných reakcí. Jejich směry budou určeny tak, aby síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{R}_\mathrm{B}$, $\vec{R}_\mathrm{A}$ byly v jednom sledu. Určené vektory reakcí nakonec přeneseme ze silového obrazce do jejich působišť.



Obr. 38: Grafické řešení příkladu 20

Pro kontrolu jsou do grafického řešení přidány i druhý silový obrazec se zavedením vláken (na obr. 38 vpravo dole) a vláknový obrazec.

8. ZÁVĚR

V předložené bakalářské práci je shrnuto základní učivo dle tematického plánu předmětu Technická mechanika I vyučovaného na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Základní teoretické poznatky jsou doplněny o názorné příklady s podrobnějším komentovaným řešením, ve valné většině případů početním i grafickým. Příklady jsou řazeny přímo v kapitolách, kam tematicky spadají, aby nebylo nutné dohledávat příslušnou teorii nutnou k řešení příkladu v jiných částech práce.

Řešení příkladů z technické mechaniky je z mnoha aspektů specifické. Řešitel musí mít jak fyzikální, tak technické a matematické dovednosti, musí být schopen rozebrat zadání z fyzikálně technického pohledu a umět si ho převést do matematického jazyka. K dalšímu řešení potřebuje znát řadu matematických pojmů a postupů, musí ovládat základní početní operace, mít znalosti z geometrie, goniometrických funkcí a vektorové algebry, ale i velkou dávku logického myšlení a prostorové představivosti, především při tvorbě grafických řešení. Také je nutné umět interpretovat výsledky jednotlivých řešení. Navíc v běžné technické praxi je daleko častěji upřednostňováno grafické řešení před početním, proto je důležité umět si představit, jak by měl daný obrazec vypadat.

Výše uvedený předmět na PF JU je zaměřen na statiku jako část mechaniky týkající se vyšetřování silového působení na těleso a podmínek rovnováhy. Vzhledem k rozsahu nebylo možné pojmout veškeré učivo daného předmětu, protože by bakalářská práce byla příliš rozsáhlá. Obsah práce je omezen pouze na základní pojmy, hledání výslednice sil působících v rovině, podmínek rovnováhy rovinné soustavy sil a na vybrané aplikace těchto poznatků v technické praxi, jako jsou páka a nosníky. Takto zvolená látka je dostatečně kompaktní a ucelená a může být aplikována v mnoha dalších příkladech k procvičení.

Práce by se jistě dala doplnit ještě o látku týkající se prutových soustav, vyšetřování těžišť těles či pasivních odporů, tj. smykového, valivého, pásového nebo vláknového tření. Stejně tak by se daly nalézt ještě další náročnější příklady na aplikaci zařazené látky, které by pouze kombinovaly jednoduché postupy v práci uvedené, ale jejich komentované řešení by velmi výrazně navyšovalo rozsah práce. Takovým složitějším příkladem může být příklad č. 20, kde se musí skloubit více jednoduchých postupů uvedených v teorii (posun síly po její nositelce, výslednice dvou sil různých směrů, rovnováha třech sil, rozklad síly na složky, silový obrazec, vláknový obrazec, momentová věta). Bez těchto znalostí není řešitel schopen takový příklad vyřešit.

Dalším námětem pro pokračování v podobné problematice by mohlo být řešení prostorových soustav sil, což je ovšem výrazně složitější, i když využívá analogických postupů. Také názornost grafických řešení u prostorových soustav ztrácí svojí výhodu, protože projekcí prostorového systému sil do rovinného nákresu dochází u některých částí řešení ke zkreslení velikostí a úhlů, což klade velmi vysoké nároky na prostorovou představivost každého uživatele.

Závěrem lze říct, že hlavní cíl, tj. vytvořit sbírku podrobněji řešených příkladů na vybranou látku, se podařilo splnit. Komentáře obsahují jak početní, tak i grafické postupy, kreslené ve volně stažitelném softwarovém prostředí Inkscape a v případě číselných zadání obsahují i měřítko, na jehož základě je možno ověřit správnost grafického řešení porovnáním s výsledky výpočtu.

Doufám, že tato práce bude přínosem pro vyučující technické mechaniky na různých stupních škol, na vysokých školách vyučujících technické obory nebo na středních odborných školách technického zaměření. Rovněž práci mohou využít studenti těchto oborů a škol při samostudiu a přípravě na zkoušky.

POUŽITÉ ZDROJE

[1] HAŠEK, Otakar. *Technická mechanika pro elektrotechnické obory I: Mechanika tuhých těles*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1965.

[2] ŠEBEK, Radek. Mechanika: Statika. *Http://mech.fd.cvut.cz/* [online]. Praha, 2012 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: http://mech.fd.cvut.cz/members/falta/18sat/Mechanika_statika_Sebek%20Radek.pdf

[3] Houževnatost – Wikipedie. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Hou%C5%BEevnatost

[4] DRIML, Bohuslav. Základní vlastnosti materiálů a jejich zkoušení. In: *Univerzita Palackého v Olomouci* [online]. Olomouc, 2009 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: http://chemikalie.upol.cz/skripta/mvm/zkousky_mat.pdf

[5] Síla – Wikipedie. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADla

[6] Fyzika: Skládání sil. In: *HTML, Fyzika* [online]. [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: http://kvinta-html.wz.cz/fyzika/mechanika/tuhe_teleso/skladani_sil.htm

[7] Skládání sil - FYZIKA 007. In: *FYZIKA 007* [online]. 2008 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: http://www.fyzika007.cz/mechanika/skladani-sil

[8] REICHL, Jaroslav. Encyklopedie fyziky: Silový a vláknový obrazec. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. 2006 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1656-silovy-a-vlaknovy-obrazec

[9] Nosník – Wikipedie. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Nosn%C3%ADk