



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

KATEDRA
EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

Bakalářská práce

Charronův prstenec Foucaultova
kyvadla

Autor	Jonáš Kupka
Vedoucí práce	prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Studijní obor	Fyzika pro vzdělávání major Matematika pro vzdělávání minor
Forma studia	Prezenční
Rok	2022

Jméno a příjmení autora	Jonáš Kupka
Název práce	Charronův prstenec Foucaultova kyvadla
Typ práce	bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Rok obhajoby práce	2022
Počet stran	34
Počet příloh	0
Jazyk	český
Abstrakt	Tato práce se zabývá Charronovým prstencem Foucaultova kyvadla a jeho vlivem na kmitání Foucaultova kyvadla. Zkoumání probíhalo pomocí numerických simulací v programu Octave. V této práci byly nalezeny optimální parametry Charronova prstence.
Klíčová slova	Foucaultovo kyvadlo, Charronův prstenec, Coriolisova síla, eliptické kmitání

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author's first name and surname	Jonáš Kupka
Title	Foucault pendulum with Charron ring
Type of thesis	bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Year of presentation	2022
Number of pages	34
Number of appendices	0
Language	czech
Abstract	This thesis is focused on the Charron ring of the Foucault pendulum and its effect on the oscillation of the Foucault pendulum. The research was carried out using numerical simulations in the Octave program. In this work, the optimal parameters of the Charron ring were found.
Keywords	Foucault pendulum, Charron ring, Coriolis Force, elliptical oscillation

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Tomáše Opatrného, Dr., a že jsem použil zdroje, které cituji a uvádím v seznamu použitých zdrojů.

V Olomouci dne

.....
podpis

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Tomáši Opatrnému, Dr., za pomoc při zpracování této práce, za cenné podněty a připomínky. Dále bych rád poděkoval všem svým blízkým za trpělivost, kterou se mnou měli v průběhu psaní této práce.

Obsah

Úvod	7
1. Teoretická část	8
1.1. Historie Foucaultova kyvadla	8
1.2. Problém elipticity kmitání	8
1.3. Přístupy k tlumení elipticity kmitů	8
1.3.1. Charronův prstenec a jemu podobná zařízení	8
1.3.2. Další přístupy k tlumení elipticity	9
1.4. Pohybové rovnice Foucaultova kyvadla	9
1.4.1. Odvození pohybových rovnic sférického kyvadla	10
1.4.2. Coriolisovo zrychlení	11
1.5. Vliv Charronova prstence	12
1.5.1. Místo dotyku lanka na Charronově prstenci jako nový závěs kyvadla	12
1.5.2. Třecí síla mezi Charronovým prstencem a lankem Foucaultova kyvadla	14
1.6. Energie Foucaultova kyvadla	15
1.7. Odporová síla vzduchu působící na Foucaultovo kyvadlo	15
2. Experimentální část	17
2.1. Popis skriptu pro numerickou simulaci pohybu Foucaultova kyvadla	17
2.1.1. Úvod skriptu a definování parametrů kyvadla	17
2.1.2. Funkce pohybových rovnic Foucaultova kyvadla	18
2.1.3. Numerické řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem a uložení výstupu	20
2.1.4. Diagnostika výsledku a výpočet energie Foucaultova kyvadla	21
2.1.5. Vykreslení grafů	22
2.2. Srovnání simulace pohybu Foucaultova kyvadla s reálným pohybem	23
2.3. Postup při zkoumání vlivů parametrů Charronova prstence na pohyb Foucaultova kyvadla	24
2.3.1. Zkoumání vlivu poloměru Charronova prstence	24
2.3.2. Zkoumání vlivu excentricity Charronova prstence	25
2.3.3. Zkoumání vlivu koeficientu smykového tření mezi materiálem lanka a materiálem Charronova prstence	25
2.3.4. Zkoumání vlivu výšky umístění Charronova prstence pod závěsem kyvadla	25
3. Výsledky a diskuze	26
3.1. Vliv poloměru Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla	26
3.2. Vliv koeficientu smykového tření na kmitání Foucaultova kyvadla	27
3.3. Vliv výšky umístění Charronova prstence pod bodem závěsu na kmitání Foucaultova kyvadla	29
3.4. Vliv excentricity Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla	30
Závěr	33
Seznam použitých zdrojů	34

Úvod

Foucaultovo kyvadlo je fyzikální experiment, který názorně ukazuje rotaci Země. Jde o kyvadlo, které vykonává kmitavý pohyb v rovině, přičemž tato rovina se s časem stáčí, což je způsobeno rotací Země. Poprvé bylo zkonstruováno J. B. L. Foucaultem a veřejnosti bylo představeno roku 1851 v Paříži [1]. Pro velkou názornost, s jakou kyvadlo dokazovalo rotaci Země i laické veřejnosti, byly po celém světě konstruována další Foucaultova kyvadla.

I přesto, že jde o velmi jednoduchý experiment, je při rozkmitání kyvadla náročné zaručit jeho pohyb v jedné rovině. Historicky se postupovalo tak, že vychýlené kyvadlo se nechalo ustálit přivázané na provázku, jehož následným přepálením se kyvadlo uvolnilo a začalo kmitat. Tento postup však neeliminuje vlivy působící na kyvadlo v průběhu kmitání, které mohou zapříčinit to, že kyvadlo začne vykonávat eliptický pohyb, jenž má za následek změnu stáčení roviny kmitání kyvadla.

Tento problém vyřešil v roce 1931 francouzský fyzik Charron [2], který navrhl použít prsteneц umístěný pod závěsem kyvadla tak, aby se o něj v amplitudě lanko kyvadla otíralo a tím se tlumila elipticita kmitání. Toto zařízení dnes nazývané Charronův prsteneц je jednoduché a funkční. Na druhou stranu však nevíme, zda jeho parametry mohou kmitání kyvadla ovlivňovat nepříznivě a zda existují nějaké ideální parametry tohoto prstence tak, aby byl co nejúčinnější a zároveň co nejméně ovlivňoval kmitání Foucaultova kyvadla.

Cílem této práce je tedy prozkoumat vlivy Charronova prstence na Foucaultovo kyvadlo. Konkrétně se budu zabývat vlivem průměru prstence, dále materiálu prstence (konkrétně koeficientu smykového tření mezi materiálem lanka a materiálem prstence), výškou umístění prstence a jeho excentricitou. Vzhledem k tomu, že by bylo velmi náročné zkoumat tuto problematiku experimentálně, vytvořím k výzkumu skript v programu Octave, který bude simulovat pohyb kyvadla a vliv Charronova prstence. Numerické předpovědi budou porovnány s realitou Foucaultova kyvadla na PřF UPOL.

1. Teoretická část

1.1. Historie Foucaultova kyvadla

Poprvé představil Foucaultovo kyvadlo Jean Bernard Léon Foucault v pařížském Pantheonu v roce 1851 [1]. Kyvadlo se skládalo ze závaží o hmotnosti 28 kg, které bylo zavěšeno na 68 metrů dlouhém laně. Perioda tohoto kyvadla byla přibližně 16 sekund. Kyvadlo mělo zesponu závaží hrot, který ryl do písku pod kyvadlem pohyb kyvadla. Výsledný obrazec potom dokazoval, že rovina kmitání kyvadla se samovolně stáčí, čímž se dokazuje rotace Země.

Nedlouho po prvním experimentu byla zkonstruována podobná kyvadla v několika městech v USA [1]. Nejstarší dosud funkční Foucaultovo kyvadlo v českých zemích zkonstruoval v rotundě Květné zahrady v Kroměříži roku 1906 profesor místního gymnázia František Nábělek. [3]

1.2. Problém elipticity kmitání

Největším problémem pro Foucaultovo kyvadlo, kterého si všiml už J. B. L. Foucault, je, když kyvadlo není rozkmitáno v jedné rovině, ale elipticky. V takovém případě se rovina kmitání stáčí kvůli efektu, který poprvé ukázal britský královský astronom George Biddell Airy ve svém článku [4] z roku 1851. Tento efekt způsobuje, že hlavní poloosa kmitání kyvadla vykonávajícího eliptický pohyb se samovolně stáčí s úhlovou rychlostí ω_s danou následujícím vztahem

$$\omega_s = \frac{3ab}{8L^2} \omega, \quad (1)$$

kde a , b je hlavní, respektive vedlejší poloosa elipsy opisované kyvadlem, ω je vlastní úhlová frekvence kyvadla a L je délka kyvadla.

Toto chování sférického kyvadla kmitajícího elipticky je pro Foucaultovo kyvadlo problém, neboť samovolné stáčení kmitajícího kyvadla má za následek, že Foucaultovo kyvadlo nedokazuje rotaci Země, tedy neplní účel, k němuž bylo navrženo. Návod na řešení tohoto problému dává vztah (1), a to buď použít kyvadlo o velké délce, nebo minimalizovat elipticitu kmitání, tedy vedlejší poloosu b . Právě z tohoto důvodu bylo první Foucaultovo kyvadlo dlouhé 68 m [1].

Problém minimalizace vedlejší poloosy kmitání se původně řešil tak, že se kyvadlo nechalo vychýlené ustálit na vlákně, které se následně přepálilo, neboť samotným přepálením se systému nepředala žádná rychlost v tečném směru, jež by měla za následek eliptický pohyb kyvadla. Stejným způsobem funguje i kyvadlo v Kroměříži.

1.3. Přístupy k tlumení elipticity kmitů

1.3.1. Charronův prstenec a jemu podobná zařízení

V roce 1931 navrhl francouzský fyzik Charron ve svém článku [2] jednoduché řešení pro tlumení elipticity kmitání. Jde o prstenec, jenž je umístěn pod závěsem kyvadla, o který se lanko kyvadla otírá blízko amplitudy kmitání. Princip fungování je ten, že když je elipticky kmitající kyvadlo v amplitudě (ve směru hlavní poloosy elipsy, kterou opisuje kyvadlo) kmitání, tak má pohyb složku rychlosti ve směru vedlejší poloosy, kterou chceme minimalizovat. Pokud se v tomto okamžiku lanko dotýká prstence, tak třecí síla utlumuje teoreticky pouze nežádoucí složku rychlosti a tím i elipticitu kmitání. Toto řešení se ukázalo jako funkční. Dokladem toho je článek z roku 1932 [5] v němž se autor zabývá konstrukcí krátkého (190,5 cm) Foucaultova kyvadla se Charroňovým prstencem o průměru 0,635 cm zhotoveným z bronzu. Součástí článku jsou také obrázky, které kyvadlo opsalo a na nichž je vidět postupný útlum elipticity kmitání.

Další přístupy k tlumení elipticity často využívají principu Charronova prstence. Například v článku [6] autor popisuje konstrukci Foucaultova kyvadla, u kterého je tlumení eliptických kmitů řešeno prstencem, jenž je umístěn tak, že do něj závaží kyvadla naráží právě ve své amplitudě. Prstenec je vystlán měkkou pěnou, která utlumuje tečnou složku rychlosti. Pohon kyvadla je vyřešen pomocí elektromagnetu umístěného pod rovnovážnou polohou kyvadla a permanentního magnetu umístěného na závaží kyvadla. Cívka elektromagnetu zároveň plní funkci spínače. Při průchodu kyvadla rovnovážnou polohou se v cívce indukuje napětí, které sepne obvod, a kondenzátor se vybije přes cívku, jež indukuje magnetické pole, které pohání kyvadlo.

Článek [7] se zabývá konstrukcí Foucaultova kyvadla jakožto exponátu pro Brown Boveri research center v Badenu ve Švýcarsku. Délka kyvadla je 9,65 m a perioda kmitání 6,2 s. Kyvadlo je

poháněno elektromagneticky tak, že na spodní straně závaží je umístěný tyčový magnet pod rovnovážnou polohou je umístěna cívka, do níž je pouštěn proud, ve chvíli, kdy se kyvadlo blíží, což má za následek zrychlení kyvadla směrem k rovnovážné poloze. To, že se kyvadlo pohybuje směrem k rovnovážné poloze, je zjišťováno pomocí Hallovovy sondy. K útlumu elipticity kmitů bylo využito principu Foucaultových (vířivých) proudů vznikajících v měděné obruči se středem v rovnovážné poloze a poloměrem takovým, aby okolo amplitudy procházelo kyvadlo právě nad obručí. V té se indukují proudy, které působí proti pohybu kyvadla. Měděná obruč se chová jako elektromagnetická brzda.

1.3.2. Další přístupy k tlumení elipticity

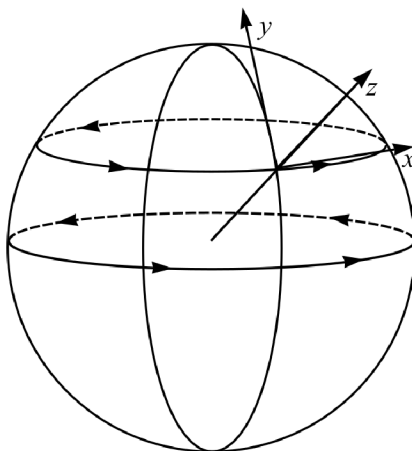
V roce 1981 publikoval H. R. Crane článek [8], v němž se zabývá útlumem elipticity kmitů u Foucaultova kyvadla o délce okolo dvou metrů. U dlouhých kyvadel není elipticita kmitů takovým problémem jako u těch krátkých, což vychází z Airyho vztahu (1). Autor stručně popisuje využití Charronova prstence pro tlumení elipticity kmitů, přičemž ovšem upozorňuje, že pro krátké kyvadlo bez pohonu samotný Charronův prsteneček nedostačuje, protože se kyvadlo zastaví dříve, než je elipticita kmitání utlumená. Dále se zabývá pohonem kyvadla řešeného pomocí elektromagnetu. Při přibližování kyvadla elektromagnet přitahuje kyvadlo, přičemž po průchodu rovnovážnou polohou je cívka elektromagnetu přepólována a elektromagnet kyvadlo odpuzuje. Dále autor řeší otázku, co se stane, pokud bude pohon kyvadlo pouze přitahovat při přibližování. Následně autor ukazuje, že při přidání magnetu působícího odpudivě na magnet zesponu kyvadla a vhodné vzdálenosti magnetů je možné tlumit stáčení roviny kyvadla způsobené elipticitou kmitání.

Na článek [8] se ve své práci odkazují autoři článku [9], v němž se zabývají konstrukcí krátkého Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem. Toto kyvadlo je zajímavé tím, že Charronův prsteneček funguje zároveň jako spínač pro pohon kyvadla. Dotýká-li se drát, na kterém kyvadlo visí, Charronova prstence sepne obvod, jenž napájí pohon kyvadla, a kyvadlo je přitahováno směrem do rovnovážné polohy. Dále k tlumení stáčení roviny kmitání vlivem eliptického kmitání je využit magnet podobně jako u Cranea. Pod kyvadlem je zároveň umístěný koutouč kalibrovaný pro odečítání času pomocí stáčení roviny kmitání v dané zeměpisné šířce, přičemž v závěru článku autor diskutuje přesnost Foucaultova kyvadla jako zařízení k odečítání času.

Navzdory tomu, že Charronův prsteneček je běžně užíván k tlumení elipticity kmitání Foucaultova kyvadla, nebyl doposud zkoumán vliv jeho různých parametrů na jeho funkčnost. Hlavním cílem této bakalářské práce je zjistit, jak různé parametry a nedokonalosti Charronova prstence působí na jeho funkčnost a chování Foucaultova kyvadla.

1.4. Pohybové rovnice Foucaultova kyvadla

Pro popis Foucaultova kyvadla zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, že osa x míří na východ, osa y na sever a osa z vzhůru kolmo k zemskému povrchu (toto bude důležité pro odvození Coriolisovy síly působící na Foucaultovo kyvadlo), viz obrázek (1). Počátek soustavy souřadné umístíme do bodu, v němž je zavěšeno kyvadlo. Dále zanedbáme odpor vzduchu a s ním zároveň i případný pohon kyvadla.



Obrázek 1 | Volba souřadnicové soustavy na Zemi.

1.4.1. Odvození pohybových rovnic sférického kyvadla

Při odvozování pohybových rovnic sférického kyvadla vyjdeme z lanrangianu, který je dán následovně

$$L = T - U, \quad (2)$$

kde T je kinetická energie soustavy a U je její potenciální energie. Pro sférické kyvadlo o délce l dále platí, že jeho souřadnice v námi zvolené souřadné soustavě jsou svázány vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (3)$$

Z předchozího vztahu plyne, že souřadnice z a rychlost ve směru osy z , \dot{z} budou dány následovně

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \quad \text{a} \quad \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}}, \quad (4)$$

kde \dot{x} a \dot{y} jsou složky rychlosti v příslušných osách. Kinetická energie T je tedy pomocí předchozích vztahů dána takto

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right], \quad (5)$$

přičemž m je hmotnost závaží kyvadla a následující závorka je druhá mocnina rychlosti pohybu kyvadla. Dále pak potenciální energie kyvadla U je dána vztahem

$$U = -mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}. \quad (6)$$

Po dosažení rovnic (5) a (6) do vztahu pro lagrangian (2) získáme vztah

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right] + mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}. \quad (7)$$

Následně využijeme Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro souřadnice x a y v tomto tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (8)$$

kde q , respektive \dot{q} jsou obecně souřadnice, resp. její časová derivace.

Dosažením lagrangianu (7) do předchozí rovnice a vydělením obou rovnic hmotností m získáme následující dvě rovnice pro souřadnice x a y

$$\ddot{x} + \frac{(x^2 + y^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y})(l^2 - x^2 - y^2) + (x\dot{x} + y\dot{y})^2}{(l^2 - x^2 - y^2)^2} x + \frac{gx}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{y} + \frac{(x^2 + y^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y})(l^2 - x^2 - y^2) + (x\dot{x} + y\dot{y})^2}{(l^2 - x^2 - y^2)^2} y + \frac{gy}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} = 0. \quad (10)$$

Z rovnic (9) a (10) dále potřebujeme vyjádřit složky zrychlení \ddot{x} a \ddot{y} . Algebraickou úpravou získáme rovnice ve tvaru

$$\ddot{x}(l^2 - y^2) + \ddot{y}xy + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)x + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2}x + gx\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{x}xy + \ddot{y}(l^2 - x^2) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)y + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2}y + gx\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = 0, \quad (12)$$

z nichž vyjádříme \ddot{x} a \ddot{y} , čímž získáme pohybové rovnice pro nelineární sférické kyvadlo

$$\ddot{x} + \left[\frac{g}{l} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l^2} + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^4(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2})} \right] x = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{y} + \left[\frac{g}{l} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l^2} + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^4(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2})} \right] y = 0. \quad (14)$$

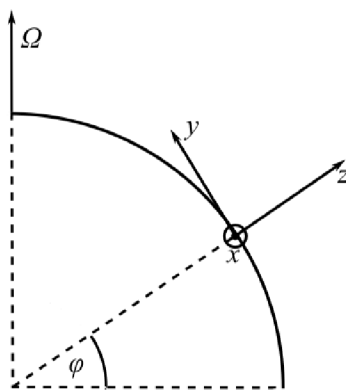
1.4.2. Coriolisovo zrychlení

Coriolisova síla je zdánlivá síla, kterou je možné pozorovat v neinerciálních vztažných soustavách, konkrétně v těch rotujících. Dobře se dá ukázat na příkladu soustavy spojené s podložkou rotující s konstantní úhlovou rychlostí. Když po podložce pošleme například kuličku tak, že pro pozorovatele z vnějšku koná přímočarý pohyb, pozorovatel v rotující soustavě uvidí, že kulička nekoná v jeho soustavě přímočarý pohyb, ale že se její dráha stáčí. Toto má na svědomí právě Coriolisova síla.

Coriolisova síla F_c je dána vztahem [10]

$$F_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_Z, \quad (15)$$

kde \mathbf{v} je vektor rychlosti tělesa, m je jeho hmotnost a $\boldsymbol{\Omega}_Z$ je úhlová rychlost rotace souřadné soustavy, v našem případě Země. Pro zjištění složek síly, potažmo zrychlení, je třeba vyjádřit vektorový součin. Vektor rychlosti je dán jako $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ a složky vektoru $\boldsymbol{\Omega}_Z$ lze odvodit z obrázku (2) jako $\boldsymbol{\Omega}_Z = (0, \Omega_Z \cos \lambda, \Omega_Z \sin \lambda)$. Velikost vektoru $\boldsymbol{\Omega}_Z$ označme Ω_Z .



Obrázek 2 | Průřez Zemí se znázorněním úhlové rychlosti a souřadnicové soustavy v zeměpisné šířce λ .

Vektorový součin $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_Z$ je potom dán jako

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_Z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & \Omega_Z \cos \lambda & \Omega_Z \sin \lambda \end{vmatrix} = \Omega_Z [\mathbf{i} \cdot (\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) - \mathbf{j} \dot{x} \sin \lambda + \mathbf{k} \dot{x} \cos \lambda], \quad (16)$$

kde \mathbf{i} , \mathbf{j} a \mathbf{k} jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os. Výsledný vektor je tedy ve tvaru

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_Z = \Omega_Z \cdot (\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda, \dot{x} \sin \lambda, \dot{x} \cos \lambda). \quad (17)$$

Vzhledem k tomu, že pohyb ve směru osy z je zanedbatelný, můžeme efekt Coriolisovy síly pro tento pohyb zanedbat, čímž zjednodušíme vektor pouze na rovinu danou osami x a y . Dále můžeme zanedbat rychlost \dot{z} , neboť je řádově menší než rychlosti \dot{x} a \dot{y} , čímž nám z první souřadnice vektoru zmizí člen $-\dot{z} \cos \lambda$. Pro složky Coriolisovy síly můžeme tedy psát rovnice

$$F_{cx} = 2m\dot{y}\Omega_Z \sin \lambda, \quad (18)$$

$$F_{cy} = -2m\dot{x}\Omega_Z \sin \lambda \quad (19)$$

a pro složky zrychlení vyvolaného Coriolisovou silou (a_c) získáme použitím Newtonova zákona síly rovnice

$$a_{cx} = 2\dot{y}\Omega_Z \sin \lambda, \quad (20)$$

$$a_{cy} = -2\dot{x}\Omega_Z \sin \lambda. \quad (21)$$

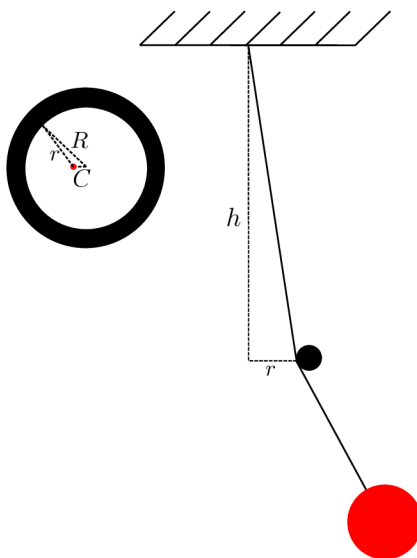
Nyní už můžeme zapsat pohybové rovnice Foucaultova kyvadla bez Charronova prstence. Pohyb ve směru osy z zanedbáme. Celkové zrychlení udělované kyvadlu lanka tíhovou a Coriolisovou silou získáme pomocí principu superpozice (13) a (20) respektive (14) a (21). Celková zrychlení \ddot{x} a \ddot{y} potom zapíšeme jako

$$\ddot{x} = - \left[\frac{g}{l} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l^2} + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^4 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)} \right] x + 2\dot{y}\Omega_Z \sin \lambda, \quad (22)$$

$$\ddot{y} = - \left[\frac{g}{l} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l^2} + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^4 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)} \right] y - 2\dot{x}\Omega_Z \sin \lambda. \quad (23)$$

1.5. Vliv Charronova prstence

Ve chvíli, kdy se lanko dotýká Charronova prstence, se změní pohybové rovnice tohoto kyvadla, protože Charronův prsteneček se v tuto chvíli chová jako nový bod závěsu kyvadla, přičemž zároveň zmenší jeho délku. Pro zkoumání vlivů Charronova prstence na Foucaultovo kyvadlo zavedeme několik veličin charakterizujících jeho parametry. Tyto veličiny jsou vyobrazeny na obrázku (3). Vzhledem k tomu, že vyrobit přesně kruhový prsteneček není technicky příliš náročné, nebudeme zkoumat vliv ne zcela kruhového prstence na Foucaultovo kyvadlo.



Obrázek 3 | Pohled shora a ze strany na Charronův prsteneček Foucaultova kyvadla.

Co je ovšem složitější, je přesné umístění Charronova prstence tak, aby jeho střed byl přesně pod bodem, v němž je zavěšeno kyvadlo. Vzdálenost mezi středem Charronova prstence a kolmým průmětem bodu, ve kterém je zavěšeno kyvadlo, do roviny prstence, nazveme excentricitou C . Poloměr Charronova prstence budeme značit R a vertikální vzdálenost roviny prstence od závěsu kyvadla budeme značit h . Vzdálenost kolmého průmětu závěsu kyvadla do roviny prstence od bodu dotyku na prstenci budeme značit r . Zavedeme pomocný parametr φ , který vyjadřuje směr, kam ve svém pohybu právě směřuje lanko kyvadla. Dále jeho časovou derivaci $\dot{\varphi}$, jež vyjadřuje rychlost změny tohoto parametru.

1.5.1. Místo dotyku lanka na Charronově prstenci jako nový závěs kyvadla

Vzdálenost r vypočítáme pomocí kosinové věty pro trojúhelník o stranách R , C a r a úhel, jenž svírají strana C se stranou r , který je totožný s parametrem φ . Kosinová věta potom nabývá tvaru

$$R^2 = r^2 + C^2 - 2rC \cos \varphi. \quad (24)$$

Řešením této rovnice pro r dojdeme k dvojímu řešení

$$r = C \cos \varphi \pm \sqrt{R^2 - C^2 \sin^2 \varphi}. \quad (25)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o vzdálenost a odmocnina ve vztahu (25) je pro $C \ll R$ větší než první člen, zajímá nás pouze řešení se znaménkem +. Bod doteku na prstenci má potom souřadnice

$$x_p = r \cdot \cos \varphi \quad \text{a} \quad y_p = r \cdot \sin \varphi. \quad (26)$$

Tento bod se stává prakticky novým bodem zavěšení kyvadla. Do pohybových rovnic (22) a (23) tedy místo souřadnic x a y dosadíme $x_d = x - x_p$ a $y_d = y - y_p$. Rychlost kyvadla však při doteku prstence zůstává zachována, tedy toto na ni nebude mít vliv.

Dalším efektem, který se projeví, když se lanko dotýká prstence, je faktické zkrácení délky závěsu l . Na obrázku (3) je vidět, že délka lanka od závěsu po prstencek l_u je rovna

$$l_u = \sqrt{h^2 + r^2}. \quad (27)$$

Délka kyvadla od prstence k závaží (l_d) je potom rovna

$$l_d = l - l_u = l - \sqrt{h^2 + r^2}. \quad (28)$$

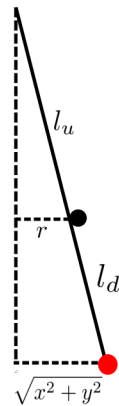
Stejně jako jsme nahradili v předchozím odstavci v pohybových rovnicích Foucaultova kyvadla souřadnice x a y novými souřadnicemi, nahradíme v rovnicích (22) a (23) délku l novou délkou l_d .

Pohybové rovnice Foucaultova kyvadla pro případ, že se lanko dotýká, tak přechází ve tvar

$$\ddot{x} = - \left[\frac{g}{l_d} \sqrt{1 - \frac{x_d^2 + y_d^2}{l_d^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l_d^2} + \frac{(x_d \dot{x} + y_d \dot{y})^2}{l_d^4 (1 - \frac{x_d^2 + y_d^2}{l_d^2})} \right] x_d + 2\dot{y}\Omega_Z \sin \lambda, \quad (29)$$

$$\ddot{y} = - \left[\frac{g}{l_d} \sqrt{1 - \frac{x_d^2 + y_d^2}{l_d^2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l_d^2} + \frac{(x_d \dot{x} + y_d \dot{y})^2}{l_d^4 (1 - \frac{x_d^2 + y_d^2}{l_d^2})} \right] y_d - 2\dot{x}\Omega_Z \sin \lambda. \quad (30)$$

Je tedy zřejmé, že pro skript k numerickému řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem bude nutné zavést podmínku, kdy se lanko prstence dotýká a kdy ne. Ve chvíli, kdy se lanko právě dotkne prstence, vypadá situace takto, viz obrázek (4).



Obrázek 4 | Pohled na Foucaultovo kyvadlo ve chvíli, kdy se začíná dotýkat Charronova prstence.

Trojúhelník o stranách r a l_u je podobný trojúhelníku o stranách $\sqrt{x^2 + y^2}$ a $l = l_u + l_d$. Z podobnosti těchto trojúhelníků potom plyne

$$\frac{r}{l_u} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}. \quad (31)$$

Dále je vidět, že pokud platí, že poměr na levé straně je větší než poměr na straně pravé, tak se lanko kyvadla Charronova prstence nedotýká. Tedy lanko se dotýká Charronova prstence právě když platí nerovnice

$$\frac{r}{l_u} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}. \quad (32)$$

1.5.2. Třecí síla mezi Charronovým prstencem a lankem Foucaultova kyvadla

Dotýká-li se lanko Foucaultova kyvadla Charronova prstence a klouže-li po něm, působí na lanko třecí síla ve směru opačném k pohybu lanka po prstenci. Třecí síla \mathbf{F}_t je dána vztahem

$$|\mathbf{F}_t| = |\mathbf{N}| \cdot f, \quad (33)$$

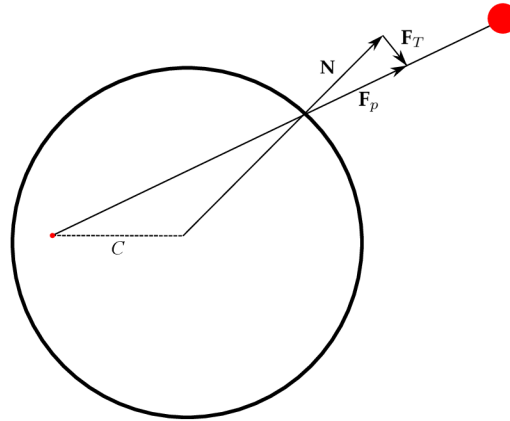
kde f je koeficient smykového tření mezi materiálem lanka a materiálem prstence a \mathbf{N} je normálová síla, kterou působí lanko na prstenc. Normálovou sílu vypočteme pomocí tahové síly, kterou působí lanko nahoře \mathbf{T}_u a dole \mathbf{T}_d . Směrové vektory těchto dvou sil budou pomocí veličin zavedených v přechozí kapitole dány jako

$$\mathbf{T}_u = (-x_p, -y_p, H) \quad \text{a} \quad \mathbf{T}_d = \left(x_d, y_d, -\sqrt{l_d^2 - x_d^2 - y_d^2} \right). \quad (34)$$

Součtem jejich jednotkových vektorů získáme směr síly působící na prstenc \mathbf{F}_p . Vzhledem k excentricitě C není síla působící na prstenc totožná s normálovou silou. Její velikost bude dána pomocí tíhové a odstředivé síly jako

$$|\mathbf{F}_p| = mg \cos \left(\arcsin \left(\sqrt{(x_p^2 + y_p^2)/l_d} \right) \right) + m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l_d}. \quad (35)$$

Sílu působící na prstenc lze rozložit na sílu normálovou a tečnou \mathbf{F}_T , jako na obrázku (5).



Obrázek 5 | Rozklad síly působící na prstenc na normálovou a tečnou složku, červeně je vyznačen závěs a závaží kyvadla.

Velikost $|\mathbf{F}_T|$ zjistíme pomocí tečného vektoru \mathbf{u} ke kružnici prstence, jenž lze odvodit z obecné rovnice tečny ke kružnici s bodem dotyku T o souřadnicích $[x_p, y_p]$; jeho souřadnice budou dány s využitím pomocného parametru φ jako

$$x_u = -\sin(\varphi) \cdot \left(C \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R^2 - C^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \right), \quad (36)$$

$$y_u = \cos(\varphi) \cdot \left(C \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R^2 - C^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \right) - C. \quad (37)$$

Velikost tečné síly pak získáme jako

$$|\mathbf{F}_T| = \frac{|\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}. \quad (38)$$

Pomocí tečné síly a síly působící na prstenc můžeme konečně vyjádřit velikost normálové síly $|\mathbf{N}|$ jako

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{|\mathbf{F}_p|^2 - |\mathbf{F}_T|^2}. \quad (39)$$

Takto vypočtenou velikost normálové síly na prstenec potom dosadíme do vztahu (33) a získáme vztah

$$|\mathbf{F}_t| = \sqrt{|\mathbf{F}_p|^2 - |\mathbf{F}_T|^2} \cdot f. \quad (40)$$

1.6. Energie Foucaultova kyvadla

Pro zkoumání vlivu Charronova prstence na pohyb Foucaultova kyvadla bude vhodné sledovat mechanickou energii kyvadla nebo konkrétněji její úbytek. Mechanická energie kyvadla v nějakém bodě jeho pohybu je dána jako součet jeho kinetické a potenciální energie. Ve chvíli, kdy se kyvadlo Charronova prstence nedotýká, je situace zřejmá. Celkovou mechanickou energii E vypočteme jako součet vztahů (5) a (6), tedy

$$E = T + U = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right] - mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}. \quad (41)$$

Složitější situace nastane ve chvíli, kdy se lanko dotýká Charronova prstence, protože bod dotyku se stává prakticky novým závěsem kyvadla. Pomocí veličin zavedených v sekci 1.5.1 je možné zapsat vztah pro kinetickou energii kyvadla dotýkajícího se Charronova prstence jako

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l_d^2 - x_d^2 - y_d^2} \right]. \quad (42)$$

Dále potenciální energii lze zapsat jako

$$U = -mg \left(\sqrt{l_d^2 - x_d^2 - y_d^2} - h \right). \quad (43)$$

Součtem rovnic (42) a (43) dostaneme vztah pro celkovou mechanickou energii Foucaultova kyvadla ve chvíli, kdy se lanko dotýká Charronova prstence jako

$$E = T + U = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l_d^2 - x_d^2 - y_d^2} \right] - mg \left(\sqrt{l_d^2 - x_d^2 - y_d^2} - h \right). \quad (44)$$

1.7. Odporová síla vzduchu působící na Foucaultovo kyvadlo

Vlivy Charronova prstence na Foucaultovo kyvadlo budou zkoumány při zanedbání odporu vzduchu, ale i přesto bude nutné srovnat výpočty s realitou, proto je nutné zavést vztah pro odporovou sílu, kterou na kyvadlo působí vzduch, jenž jej obtéká. Odporová síla je dána pomocí Newtonova vztahu [11] jako

$$F_k = \frac{1}{2} \cdot C_d S \cdot \rho \cdot v^2, \quad (45)$$

kde C_d je součinitel odporu koule, S je plocha průřezu koule, ρ je hustota vzduchu a v je rychlost závaží kyvadla. Předchozí vztah vyjadřuje odporovou sílu způsobenou průchodem závaží kyvadla vzduchem. Je ovšem ještě třeba odvodit vztah pro odporovou sílu způsobenou obtékáním lanka závěsu vzduchem.

Potřebný vztah odvodíme z Newtonova vztahu, ale budeme postupovat přes moment síly, z něhož potom dopočteme efektivní sílu působící na kyvadlo. Moment síly je dán jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (46)$$

a pro jeho velikost platí

$$|M| = r \cdot F. \quad (47)$$

Sílu F odvodíme z Newtonova vztahu. Každý délkový element dr lanka závěsu se pohybuje jinou rychlostí, která závisí na jeho vzdálenosti od závěsu r . Pomocí rychlosti závaží v je možné rychlost každého délkového elementu vyjádřit jako

$$v_{dr} = \frac{v \cdot r}{l}, \quad (48)$$

kde l je délka kyvadla. Plochu průřezu S délkového elementu lanka lze vyjádřit jako plochu obdélníku o rozměrech d_1 a dr , přičemž d_1 je průměr lanka a dr je výška délkového elementu lanka. Výsledný moment odporové síly lanka pak získáme vypočtením integrálu

$$M = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_1 \cdot \frac{v^2 \cdot r^2}{l^2} \cdot d_1 \cdot r \cdot dr, \quad (49)$$

kde C_1 je činitel odporu válce. Vypočtením integrálu získáme moment odporové síly lanka jako

$$M = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot C_1 \cdot v^2 \cdot d_1 \cdot l^2. \quad (50)$$

Efektivní odporovou sílu lanka následně získáme jako

$$F_{\text{ef}} = \frac{M}{l} = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot C_1 \cdot v^2 \cdot d_1 \cdot l. \quad (51)$$

Tímto jsou odvozeny veškeré teoretické poznatky, které jsou nutné pro tvorbu skriptu pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla v programu Octave.

2. Experimentální část

V této části práce je nejprve popsána tvorba skriptu pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem v programu Octave. Dále je popsán postup při simulacích a zkoumání vlivu Charronova prstence na pohyb Foucaultova kyvadla.

2.1. Popis skriptu pro numerickou simulaci pohybu Foucaultova kyvadla

V této části práce je po částech popsán skript pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem.

2.1.1. Úvod skriptu a definování parametrů kyvadla

V úvodní sekci skriptu jsou zadefinovány všechny proměnné potřebné k numerické simulaci pohybu Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem.

```
1 clear
2 global G L L2 Gam f R H C m GamV omeC ro D A
3
4 G=9.81; % gravitacni zrychleni
5 L=25; % delka zavesu
6 H=1 % vzdalenost prstence od bodu zavesu
7 R=0.025; % polomer prstence
8 C=0; % vychyleni stredu prstence
9 m=37; % hmotnost
10 f=0.176; % koeficient smykoveho treni
11 L2=L^2;
12 Gam=400; % pomocny parametr tlumeni pohybu dotyku lanka
13 Cd=0.5; % cinitel odporu koule
14 ro=1.29; % hustota vzduchu
15 D=0.208; % prumer koule
16 A=pi*(D^2)/4; % prurez koule
17 GamVk=0.5*Cd*ro*A; %odpor vzduchu koeficient kyvadla
18 Cl=1.17; % cinitel odporu valec
19 dl=0.003; % prumer lanka
20 GamVl=(1/8)*ro*Cl*dl*L; % odpor vzduchu koeficient lanka
21 GamV=GamVk+GamVl; % celkovy koeficient odporu vzduchu
22 omeC=5.5357e-5; % coriolis Olomouc
23
```

Obrázek 6 | Úvodní část programu, ve které jsou zadefinovány potřebné parametry.

Na obrázku (6) na prvním řádku skriptu je příkaz `clear`, který v programu Octave maže všechny předchozí zadefinované matice. Na dalším řádku jsou v rámci příkazu `global` vypsány všechny názvy používaných proměnných. Příkaz `global` zaručuje, že je bude možné volat odkudkoliv v celém skriptu.

Na čtvrtém řádku je zadefinováno gravitační zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Na dalším řádku je zadefinována délka kyvadla $l = 25 \text{ m}$. Dále je zadefinována vzdálenost $h = 1 \text{ m}$ Charronova prstence od bodu závěsu. Dalším definovaným parametrem je na sedmém řádku poloměr Charronova prstence $r = 0,025 \text{ m}$. Na osmém řádku je definováno vychýlení středu prstence oproti středu závěsu, neboli excentricita C . Na devátém řádku je definována hmotnost závaží kyvadla $m = 37 \text{ kg}$. Na řádku číslo 10 je zaveden koeficient smykového tření f , který byl zjištěn z článku [12]. Na desátém řádku je pouze vypočtena druhá mocnina délky závěsu kyvadla, která je potřebná pro některé výpočty. Dále je zadefinován pomocný parametr tlumení pohybu lanka po prstenci $\gamma = 400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, jehož velikost ovlivňuje výsledek simulací pouze nepatrně, pokud je dostatečně velká. Hodnota 400 je nastavena z důvodu snížení času potřebného pro výpočet v programu Octave.

Následuje několik parametrů, které budou nutné až pro srovnání předpovědí numerických simulací s realitou Foucaultova kyvadla na PřF UPOL. Konkrétně jde o koeficient pro výpočet síly při průchodu tělesa odporovým prostředím, který je pro kouli dán jako $C_d = 0,5$. Dále hustota vzduchu $\rho = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dalším zavedeným parametrem je na patnáctém řádku průměr závaží kyvadla $D = 0,208 \text{ m}$. Na řádku číslo 16 je vypočtena plocha průřezu závaží. Dále je na řádku číslo 17 vypočten koeficient odporu vzduchu γ_v pomocí vztahu (45) pro kouli obtékanou vzduchem. Dále jsou analogické údaje jako na předchozích řádcích, pro výpočet koeficientu odporové

síly působící na lanko pomocí vztahu (51). Činitel odporu pro válec je dle [13] $C_1 = 1,17$. Oba koeficienty jsou na řádku 21 následně sečteny.

Jako poslední je vypočten parametr úhlové rychlosti Coriolisova zrychlení, který byl vypočten ze vztahu

$$\Omega_C = \Omega_Z \cdot \sin \lambda, \quad (52)$$

do něhož bylo dosazeno $\lambda = 49^\circ 35,5'$ a $\Omega_Z = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hodnoty parametrů uvedené na obrázku (6) jsou shodné s parametry Foucaultova kyvadla na PřF UPOL a pokud není v předchozím textu řečeno jinak, byly převzaty z diplomové práce Tomáše Schmiedta [14]. Při zkoumání vlivů Charronova prstence na pohyb Foucaultova kyvadla bude využito změn zkoumaných parametrů, konkrétně h , R , C a f .

2.1.2. Funkce pohybových rovnic Foucaultova kyvadla

První část funkce ve skriptu pro numerické řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem je aplikací podmínky (32). Tato část skriptu je na obrázku (7).

```

24 % Funkce
25 function xdot=KYV2(x,t)
26 % x(1)=x, x(2)=y, x(3)=vx, x(4)=vy, x(5)=phi, x(6)=phidot
27 global G L L2 Gam f R H C m GamV omeC ro D A
28 % rozhodovani o doteku prstence
29 phi=x(5); % uhel k bodu doteku na prstenci;
30 pomSqr=sqrt(R^2-C^2*sin(phi)^2);
31 r=C*cos(phi)+pomSqr; % vzdalenost bodu doteku od stredu
32 Lup2=H^2+r^2; % horni cast lanka
33 Lup=sqrt(Lup2);
34 Ldown=L-Lup; % dolni cast lanka
35 Ldown2=Ldown^2;

```

Obrázek 7 | Část funkce rozhodující o dotyku lanka a Charronova prstence.

Druhý řádek na obrázku (7) pomocí příkazu `function` definuje novou funkci. Dále příkaz `global` volá do funkce parametry popsané v kapitole 2.1.1. Mezi těmito dvěma příkazy je komentář, který vysvětluje zavedené proměnné této funkce. Na řádku 29 je zavedená proměnná ϕ , která koresponduje s pomocným parametrem φ . Na dalším řádku je vyjádřena odmocnina ze vztahu (25), která je potřebná pro výpočet vzdálenosti lanka od bodu dotyku na prstenci r na dalším řádku pomocí vztahu (25). Na zbývajících řádcích je pomocí Pythagorovy věty vypočtena nejprve délka lanka od závěsu k prstenci l_u a následně délka lanka od prstence k závaží kyvadla l_d .

```

36
37 if (x(1)^2+x(2)^2)/L2 < r^2/Lup2 % nedotyka se
38     pom1=(x(3)^2+x(4)^2)/L2;
39     pom2=(x(1)^2+x(2)^2)/L2;
40     pom3=(x(1)*x(3)+x(2)*x(4))^2/L2^2/(1-pom2);
41     pom4=pom1+G/L*sqrt(1-pom2)+pom3;
42
43 if x(1)~=0 % uhel kam miri kyvadlo
44     phiD=atan(x(2)/x(1))+pi*(x(1)<0);
45 else
46     phiD=3/2*pi;
47 endif
48
49 xdot(1)=x(3);
50 xdot(2)=x(4);
51 xdot(3)=-pom4*x(1)+2*omeC*x(4);
52 xdot(4)=-pom4*x(2)-2*omeC*x(3);
53 xdot(5)=x(6);
54 xdot(6)=-Gam^2/4*sin(x(5)-phiD)-Gam*x(6);
55

```

Obrázek 8 | Pohybové rovnice pro Foucaultovo kyvadlo ve chvíli, kdy se nedotýká Charronova prstence, v programu Octave.

Další část funkce, jež je na obrázku (8), jsou pohybové rovnice Foucaultova kyvadla, když se nedotýká Charronova prstence. Rozhodování probíhá pomocí cyklu `if`, na řádku 37, přičemž podmínkou je vztah (32). Na dalších čtyřech řádcích jsou pomocné funkce, které vyjadřují závorku

ze vztahů (13) a (14). Dále je dopočítáván úhel φ_D , kam právě ve svém pohybu kyvadlo míří pomocí cyklu `if`, pomocí funkce `arctg`, přičemž pro případ, kdy $x = 0$ je úhel dán jako $\varphi_D = \frac{3}{2}\pi$. Tato část funkce je zakončena pohybovými rovnicemi na řádcích 49–54. První dvě rovnice vyjadřují vztah mezi souřadnicemi x a y a rychlostmi ve směrech příslušných souřadnicových os a to, že

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}, \quad (53)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}. \quad (54)$$

Další dvě rovnice jsou vyjádřením pohybových rovnic (22) a (23). Poslední dvě rovnice jsou rovnicemi pro pomocný parametr φ , kde první vyjadřuje, že časová derivace tohoto parametru vyjadřuje rychlost, a druhá vyjadřuje zrychlení, přičemž byla zvolena tak, aby tento parametr byl co nejrychleji tlumen tak, aby odpovídal úhlu φ_D , kam ve svém pohybu kyvadlo míří.

```

56 else % lanko se dotyka Charronova prstence
57   xpom=r*cos(phi);
58   ypom=r*sin(phi); % bod doteku na prstenci
59   xdif=x(1)-xpom; % odchylka polohy kyvadla od bodu doteku lanka a prstence
60   ydif=x(2)-ypom;
61   pom1=(x(3)^2+x(4)^2)/Ldown2;
62   pom2=(xdif^2+ydif^2)/Ldown2;
63   pom3=(xdif*x(3)+ydif*x(4))^2/Ldown2^2/(1-pom2);
64   pom4=pom1+G/Ldown*sqrt(1-pom2)+pom3;
65   vec1=[-xpom;-ypom;H];
66   vec1=vec1/sqrt(vec1*vec1); % jednotkovy vektor tahove sily lanka nahore
67   vec2=[xdif;ydif;-sqrt(Ldown2-xdif^2-ydif^2)];
68   vec2=vec2/sqrt(vec2*vec2); % jednotkovy vektor tahove sily lanka dole
69   pomtah=(G*cos(asin(sqrt(xpom^2+ypom^2)/Ldown)))+(x(3)^2+x(4)^2)/Ldown);
70   sila=(vec1+vec2); % sila na prstenc
71   velikostsily=pomtah*sqrt(dot(sila,sila));
72   xPrstDot=-sin(phi)*(C*cos(phi)+pomSqr); % vypocet smeroveho vektoru obvodu prstence
73   yPrstDot=(cos(phi)*(C*cos(phi)+pomSqr))-C;
74   vecPrst=[xPrstDot;yPrstDot;0];
75   vecPrst=vecPrst/sqrt(vecPrst*vecPrst); % jednotkovy tecny vektor k prstenci
76   TecnaSila=sila*vecPrst;
77   TecnaSila=TecnaSila*pomtah;
78   NormalovaSila=sqrt(velikostsily^2-TecnaSila^2);
79   KritSila=f*NormalovaSila;
80   pomSila=(abs(TecnaSila)-KritSila);
81   VyslednaTecnaSila=pomSila*(pomSila>0)*sign(TecnaSila);
82
83   xdot(1)=x(3);
84   xdot(2)=x(4);
85   xdot(3)=-pom4*xdif+2*omeC*x(4);
86   xdot(4)=-pom4*ydif-2*omeC*x(3);
87   xdot(5)=x(6);
88   xdot(6)=Gam^2/4*VyslednaTecnaSila-Gam*x(6);

```

Obrázek 9 | Pohybové rovnice pro Foucaultovo kyvadlo ve chvíli, kdy se dotýká Charronova prstence, v programu Octave.

Na obrázku (9) je další část funkce, jež zavádí pohybové rovnice pro případ, kdy se lanko Foucaultova kyvadla dotýká Charronova prstence. Na prvních čtyřech řádcích jsou dopočítány veličiny x_p , y_p , x_d a y_d z kapitoly 1.5.1. Na řádcích 61–64 jsou pomocné funkce vyjadřující závorku ze vztahů (29) a (30). Na řádcích 65–68 jsou vypočteny jednotkové vektory tahové síly nahoře a dole pomocí vztahu (34). Dále je vypočtena velikost tahové síly lanka a na řádce 71 její vektor. Řádky 72 a 73 jsou aplikací vztahů (36) a (37). Z těchto dvou souřadnic tečného vektoru k Charronovu prstenci v místě dotyku je na dalších dvou řádcích vytvořen jednotkový tečný vektor. Na řádcích 76 a 77 je vypočtena velikost tečné síly působící na kyvadlo pomocí vztahu (38). Na dalším řádku je vypočtena normálová síla na prstenc pomocí vztahu (39). Dále je vypočtena třecí síla ve skriptu nazvaná jako `KritSila` pomocí vztahu (40). Vzhledem k tomu, že lanko bude klouzat po prstenci pouze v případě, že tečná síla na něj působící je větší než třecí síla, je nutné toto ve skriptu zavést. Tato podmínka je implementována na řádcích 80 a 81, kdy je nejprve vypočtena pomocná síla, která je prakticky výslednou velikostí tečné síly působící na kyvadlo. Na řádce 81 je potom vypočtena výsledná tečná síla působící na kyvadlo. Součástí tohoto výpočtu je také logická operace `pomSila>0`, jež bude mít hodnotu 1, pokud je pomocná síla větší než 0 a 0, pokud ne. Aby byl zajištěn správný směr výsledné tečné síly, přejímá tato znaménko od tečné síly.

Na posledních šesti řádcích na obrázku (9) jsou pohybové rovnice pro Foucaultovo kyvadlo dotýkající se Charronova prstence. Tyto rovnice jsou analogické k rovnicím na obrázku (8) s tím rozdílem, že šestá z nich reflektuje tečnou sílu působící na Foucaultovo kyvadlo dotýkající se Charronova prstence.

2.1.3. Numerické řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem a uložení výstupu

Nejdůležitější částí skriptu pro numerické řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem je samotné řešení funkce popsané v kapitole 2.1.2. Tato část je na obrázku (10).

```

92 % Integrace pohybových rovnic
93 xinitial=[0;1;-0.2;0;0;0]; % Počáteční podmínka
94 Tmax=36000;
95 interval=60;
96 nmax=Tmax/interval;
97 tic
98 t=[];
99 x=[];
100 for i=0:nmax-1
101 X = lsode(@KYV2,xinitial,(T=linspace(i*interval,(i+1)*interval,10*interval)'));
102 xinitial = X(end,:);
103 x=[x;X];
104 t=[t;T];
105 i=i+1
106 endfor
107 % Příprava a uložení výstupu
108 tx=[t,x];
109 save data8.txt tx;
110
111 toc
112

```

Obrázek 10 | Část skriptu, která řeší soustavu pohybových rovnic Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem.

Tato část skriptu začíná definováním počáteční podmínky `xinitial` pro řešení pohybových rovnic na řádce 93. Dalším parametrem je celkový čas kmitání kyvadla, který je na dalších řádcích rozdělen na intervaly o délce 60 s. Dále je vypočteno, kolikrát bude muset takový výpočet proběhnout, aby byla nasimulována celá doba kmitání `Tmax`. Dále jsou zavedeny dvě prázdné matice, jedna pro čas a druhá pro souřadnice řešení, do nichž se celé řešení následně zapisuje. Příkaz `tic` slouží k započítání měření času výpočtu. Celé řešení je uzavřeno do cyklu `for` tak, aby se vždy řešila jen jedna minuta kmitání, protože pokud by se řešila celá doba kmitání najednou, byl by celý proces velice náročný pro operační paměť. Pro řešení soustavy pohybových rovnic je na řádce 101 použit řešitel soustav diferenciálních rovnic `lsode`, jehož parametry jsou nejprve zdefinovaná funkce z kapitoly 2.1.2, dále počáteční podmínka `xinitial` a dále čas kmitání, který chceme simulovat a na kolik částí chceme celý interval rozdělit. Po výpočtu jednoho cyklu se původní počáteční podmínka nahrazuje na řádce 102 posledním řádkem řešení. Na dalších dvou řádcích se řešení jednotlivých cyklů skládají za sebe do matic.

Po cyklu `for` následuje příprava a uložení výstupu, příprava spočívá ve spojení matic z `for` cyklu a jejich následném exportu jakožto textového souboru. Poslední příkaz `toc` vypíše čas naměřený od začátku výpočtu.

2.1.4. Diagnostika výsledku a výpočet energie Foucaultova kyvadla

Poslední výpočetní část skriptu je věnována zpětnému dopočtení sil působících na kyvadlo a jeho energii.

```
113 % Diagnostika vysledku
114 phis=x(:,5);
115 pomSqrs=sqrt(R^2-C^2*sin(phis).^2);
116 rs=C*cos(phis)+pomSqrs; % vzdalenost bodu doteku od stredu
117 Lup2s=H^2+rs.^2; % horni cast lanka
118 Lups=sqrt(Lup2s);
119 Ldowns=L-Lups; % dolni cast lanka
120 Ldown2s=Ldowns.^2;
121 dotek=(x(:,1).^2+x(:,2).^2)/L2 >= rs.^2./Lup2s; % 1 pokud se lanko dotyka prstence, 0 jinak
122 tsiz=size(t,1);
123 tecnasila=zeros(tsiz,1);
124 kritsila=zeros(tsiz,1);
125 energie=zeros(tsiz,1);
126 fistaceni=zeros(tsiz,1);
```

Obrázek 11 | Úvod diagnostiky výsledku.

Diagnostika výsledku spočívá především v dopočtu sil působících na kyvadlo způsobených dotykem Charronova prstence, proto je tato část skriptu velmi podobná části popsané v kapitole 2.1.2, konkrétně na obrázku (9). Na obrázku (11) je úvodní část diagnostiky, v níž jsou definovány proměnné potřebné pro další výpočty, včetně nulových matic `tecnasila`, `kritsila`, `energie` a `fistaceni`, které budou výstupem celé diagnostiky poté, kdy do nich jsou zapsány příslušné hodnoty. Na řádce 121 je podmínka určující, zda se lanko Foucaultova kyvadla dotýká Charronova prstence, či nikoli. Všechny potřebné hodnoty jsou nadále brány z matice řešení vytvořené v kapitole 2.1.3.

```
127 for n=1:tsiz
128     if dotek(n)
129         xpom=rs(n)*cos(phis(n));
130         ypom=rs(n)*sin(phis(n)); % bod doteku na prstenci
131         xdif=x(n,1)-xpom;
132         ydif=x(n,2)-ypom;
133         vec1=[-xpom;-ypom;H];
134         vec1=vec1/sqrt(vec1*vec1); % jednotkovy vektor tahove sily lanka nahore
135         vec2=[xdif;ydif;-sqrt(Ldown2s(n)-xdif^2-ydif^2)];
136         vec2=vec2/sqrt(vec2*vec2); % jednotkovy vektor tahove sily lanka dole
137         sila=vec1+vec2; % sila na prstenec
138         pomtah=(G*cos(asin(sqrt(xpom^2+ypom^2)/Ldowns(n)))+(x(3)^2+x(4)^2)/Ldowns(n));
139         velikostsily=pomtah*sqrt(dot(sila,sila));
140         xPrstDot=-sin(phis(n))*(C*cos(phis(n))+pomSqrs(n)); % vypocet tecneho vektoru prstence
141         yPrstDot=(cos(phis(n))*(C*cos(phis(n))+pomSqrs(n))-C;
142         vecPrst=[xPrstDot;yPrstDot;0];
143         vecPrst=vecPrst/sqrt(vecPrst*vecPrst); % jednotkovy tecny vektor k prstenci
144         TecnaSila=sila*vecPrst;
145         TecnaSila=TecnaSila*pomtah;
146         NormalovaSila=sqrt(velikostsily^2-TecnaSila^2);
147         KritSila=f*NormalovaSila;
148         tecnasila(n)=abs(TecnaSila);
149         kritsila(n)=KritSila;
150         zdif=-sqrt(Ldown2s(n)-xdif^2-ydif^2);
151         zdot=-(xdif*x(n,3)+ydif*x(n,4))/zdif;
152         energie(n)=(m*(x(n,3)^2+x(n,4)^2+zdot^2)/2)+m*G*(zdif-H);
153     else
154         zdif=-sqrt(L2-x(n,1).^2-x(n,2).^2);
155         zdot=-(x(n,1).*x(n,3)+x(n,2).*x(n,4))/zdif;
156         energie(n)=(m*(x(n,3)^2+x(n,4)^2+zdot^2)/2)+m*G*zdif;
157     endif
```

Obrázek 12 | Výpočet sil působících na kyvadlo a energie kyvadla.

Na obrázku (12) je až do řádku 149 analogický výpočet jako v kapitole (2.1.2) v případě, že se lanko Foucaultova kyvadla dotýká Charronova prstence. Na řádcích 150–156 je pro každý řádek matice řešení vypočtena energie Foucaultova kyvadla pomocí vztahů (41) a (44).

```

160 if sqrt(x(n,1)^2+x(n,2)^2)>0.95
161     if -atand(x(n,2)./x(n,1))<0
162         fistaceni(n)=-atand(x(n,2)./x(n,1))+180;
163     else
164         fistaceni(n)=-atand(x(n,2)./x(n,1));
165     endif
166 endif
167 end
168 toc

```

Obrázek 13 | Výpočet úhlu stáčení roviny Foucaultova kyvadla.

Na obrázku (13) je výpočet úhlu stáčení roviny Foucaultova kyvadla. Výpočet je prováděn pouze ve chvíli, kdy je kyvadlo blízko maximální výchylce, protože jinak by před utlumením elipticity kmitání byl počítán aktuální úhel mezi osou x a průvodičem závaží kyvadla. Toto je vyřešeno podmínkou na řádce 160. Podmínka na řádce 161 zajišťuje, že pokud je vypočtený úhel menší než 0° , pak je k němu přičteno 180° . Pokud by se toto nedělo, pak by se úhel stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla pohyboval v intervalu $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$.

2.1.5. Vykreslení grafů

V poslední části skriptu na obrázku (14) je vykresleno několik grafů potřebných pro zkoumání vlivu parametrů Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla.

```

170 % Grafy
171 figure(1)
172 plot(x(:,1),x(:,2))
173 set(gca,"fontsize",15)
174 title("poloha")
175 axis("equal")
176
177 figure(2)
178 plot(t,energie-energie(1),'r')
179 set(gca,"xminor tick","on","yminor tick","on",
180 "ticklength",[0.025,0.025],"fontsize",15,"tickdir","out")
181 title("energie")
182
183 figure(3)
184 plot(t,[tecnasila,kritsila])
185
186 figure(4)
187 plot(t,sqrt((x(:,1).^2)+(x(:,2).^2))) % vzdalenost od pocatku
188 title("vzdalenost od pocatku")
189
190 figure(5)
191 plot(t,fistaceni, '.')
192 set(gca,"xminor tick","on","yminor tick","on",
193 "ticklength",[0.025,0.025],"fontsize",15,"tickdir","out")
194 title("uhel staceni")

```

Obrázek 14 | Vykreslování potřebných grafů v programu Octave.

Jako první je vykreslen graf polohy závaží kyvadla v průběhu celé simulace. Tento graf sám o sobě je vesměs nečitelný, neboť spojnice bodů se slévají. Velmi důležitý pro další zkoumání vlivu parametrů Charronova prstence na Foucaultovo kyvadlo je graf, jenž je vykreslen jako druhý v pořadí a který zobrazuje závislost ztrát energie na čase. Dalším vykreslovaným grafem je závislost tečné a třecí síly působící na lanko dotýkající se Charronova prstence na čase. Následuje graf, který je důležitý především pro posouzení útlumu elipticity kmitání kyvadla. V tomto grafu je vykreslena závislost vzdálenosti závaží kyvadla od rovnovážné polohy. Jako poslední z grafů je vykreslena závislost úhlu stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla na čase.

2.2. Srovnání simulace pohybu Foucaultova kyvadla s reálným pohybem

Aby bylo možné říci, že simulace opravdu popisují zkoumanou skutečnost, je nutné nejprve porovnat reálný průběh kmitání Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem s pohybem reálného kyvadla. K tomuto účelu dobře poslouží Foucaultovo kyvadlo na PřF UPOL. Do skriptu tedy budou nejprve zadány parametry shodné s tímto kyvadlem a oba pohyby budou následně srovnány. Pro simulaci je také nutné uvažovat odpor vzduchu, který je odvozen v kapitole 1.7. Jeho implementace do skriptu je snadná. K silám působícím na kyvadlo stačí přičíst sílu, kterou na kyvadlo působí vzduch, kterým prochází. Implementace odporu vzduchu je na obrázku (15).

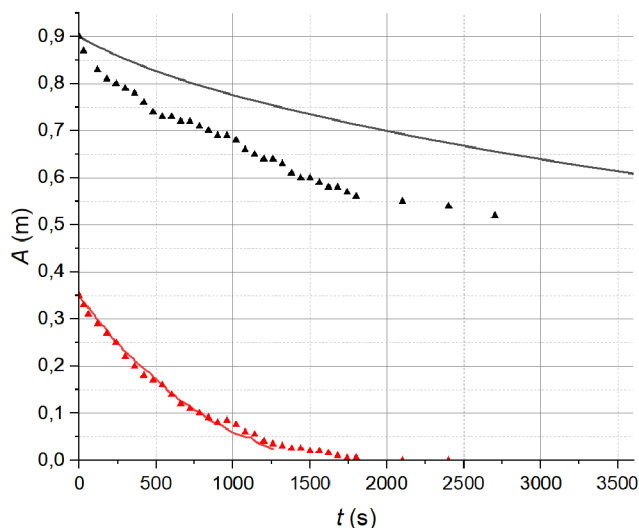
```
51 | xdot(3)=-pom4*x(1)+2*omeC*x(4)-GamV*x(3).*abs(x(3))/m;  
52 | xdot(4)=-pom4*x(2)-2*omeC*x(3)-GamV*x(4).*abs(x(4))/m;
```

Obrázek 15 | Implementace odporu vzduchu do skriptu pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla.

Pro srovnání simulace a reality byla nejprve změřena závislost amplitudy reálného kyvadla na čase. Měření probíhalo v následujících krocích.

1. Kyvadlo bylo vychýleno do vzdálenosti 90 cm od rovnovážné polohy.
2. Kyvadlo bylo rozkmitáno se záměrnou rychlostí v tečné směru tak, aby byla do kmitání vnesena elipticita.
3. V průběhu kmitání byly odečítány hodnoty amplitudy ve směru hlavní poloosy a amplitudy ve směru vedlejší poloosy eliptického kmitání na metru položeném pod kyvadlem.
4. Na závěr byla provedena simulace se stejnými počátečními parametry jako mělo reálné kyvadlo při měření.

Počáteční podmínka pro simulaci byla zvolena jako $x_{initial} = [0,9; 0; 0; 0,22; 0; 0]$; tato počáteční podmínka totiž vytvořila kmitání o stejně velké elipticitě, jako v experimentálním měření. Srovnání předpovědi s realitou je v grafu na obrázku (16). Jak je v grafu vidět, v případě utlumování



Obrázek 16 | Srovnání teoretické předpovědi a chování reálného kyvadla. Trojúhelníčky značí naměřené hodnoty a linky teoretickou předpověď. Černě je vyznačena amplituda ve směru hlavní poloosy a červeně je vyznačena amplituda ve směru vedlejší poloosy.

elipticity kmitání je předpověď velmi blízká realitě, zatímco v případě amplitudy kmitání je útlum naměřený experimentálně rychlejší než v případě numerické simulace. To může být způsobeno tím, že pro malé rychlosti kyvadla převládá nad odporem závislým na druhé mocnině rychlosti odvozeným v kapitole 1.7 člen, který závisí na první mocnině rychlosti podle Stokesova zákona o laminárním obtékání. Další možností je, že kyvadlo na PřF není pouze koule na lanku, ale úchyt

lanka ke kouli a magnet umístěný zespodu závaží mají také vliv na odpor vzduchu působící na kyvadlo. Dále by také mohlo jít o útlum způsobený indukci vířivých proudů v cívice elektromagnetu pohánějícího kyvadlo magnetem umístěným na závaží kyvadla, ale tuto hypotézu by bylo nutné ověřit.

Předpovězený útlum elipticity odpovídá experimentálnímu výsledku a odpor vzduchu bude při zkoumání zanedbán, je tedy možné říci, že vytvořený skript dobře předpovídá realitu.

2.3. Postup při zkoumání vlivů parametrů Charronova prstence na pohyb Foucaultova kyvadla

V této části práce je popsán postup při zkoumání vlivu jednotlivých parametrů Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla. Parametry, jejichž vliv je zkoumán, jsou excentricita Charronova prstence C , výška umístění Charronova prstence pod závěsem kyvadla h , poloměr Charronova prstence R a koeficient smykového tření mezi materiálem lanka a materiálem Charronova prstence f . Každý z těchto parametrů má smysl zkoumat pouze v určitém rozsahu. Výchozí hodnoty těchto parametrů jsou uvedeny v tabulce (1) a shodují se s parametry kyvadla na PŘF UPOL. Pro tyto hodnoty parametrů byla také provedena simulace.

Počáteční podmínka byla ve všech simulacích, vyjma simulací pro zjištění vlivu excentricity shodná, a to $x_{\text{initial}} = [1; 0; 0; 0; 2; 0; 0]$. V případě simulací pro zjištění vlivu excentricity byla počáteční podmínka $x_{\text{initial}} = [0; 1; -0,2; 0; 0; 0]$

Parametr	Hodnota
h	1 m
R	0,025 m
C	0 m
f	0,176

Tabulka 1 | Výchozí parametry pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem.

2.3.1. Zkoumání vlivu poloměru Charronova prstence

Poloměr Charronova prstence ovlivňuje především čas, po který se jej lanko Foucaultova kyvadla při kmitání dotýká, a tedy i množství energie, kterou Charronův prsteneček kyvadlu odebírá. Pokud by měl Charronův prsteneček poloměr „nulový“, dotýkalo by se jej lanko stále, ale zároveň by se po něm nijak neposouvalo, což by mělo za následek, že by Charronův prsteneček neodebíral kyvadlu žádnou energii, a tedy by ani elipticita kmitání nebyla utlumena. Naopak pokud by byl poloměr Charronova prstence velký tak, že by se jej lanko v průběhu kmitání nikdy nedotýkalo, byla by situace ve výsledku stejná. Charronův prsteneček by kyvadlu neodebíral žádnou energii, a tedy by elipticita kmitání nebyla utlumena. Pro zkoumání vlivu poloměru Charronova prstence na Foucaultovo kyvadlo má tedy význam uvažovat hodnoty poloměru mezi těmito dvěma extrémy. Dále lze očekávat, že mezi těmito dvěma extrémy bude optimální hodnota poloměru Charronova prstence.

Pro výchozí hodnotu $h = 1$ m a počáteční výchylku $x_0 = 1$ m je maximální hodnota poloměru Charronova prstence, při které se lanko ještě v amplitudě prstence dotkne $R = 0,04$ m. Simulovaný čas kmitání byl ve všech případech $t_{\text{max}} = 3\,600$ s. Ve všech simulacích provedených za účelem zjištění vlivu poloměru Charronova prstence byly ostatní parametry nastaveny na výchozí hodnoty uvedené v tabulce (1). Simulace byly provedeny pro hodnoty R od 1 cm do 3,6 cm po kroku 0,2 cm.

Lze očekávat, že vhodnější hodnotou poloměru Charronova prstence bude hodnota spíše nižší, neboť by teoreticky při nižší hodnotě měl Charronův prsteneček odebírat v každé periodě více energie, protože se jej lanko dotýká déle.

2.3.2. Zkoumání vlivu excentricity Charronova prstence

Excentricita Charronova prstence vzniká především jeho nepřesným umístěním pod závěsem kyvadla. Přesného vycentrování by se dalo docílit například použitím šroubů ze tří stran prstence, kterými by bylo možné jeho polohu přesně upravovat. Hlavním úkolem zkoumání vlivu excentricity Charronova prstence je především zjistit, od jaké hodnoty excentricita nepříznivě ovlivňuje pohyb Foucaultova kyvadla. Hodnota excentricity byla navázána na poloměr Charronova prstence a bude vyjadřována v procentech poloměru. Hodnoty excentricity, které má smysl zkoumat, jsou v rozsahu 0 až $0,35 \cdot R$, neboť při umísťování Charronova prstence není tak složité zajistit, aby byl vyosen oproti středu jen o zlomek svého poloměru.

Pro simulace byla zvolena počáteční podmínka $x_{\text{initial}} = [0; 1; -0,2; 0; 0; 0]$ a to proto, že excentricita je v rámci skriptu aplikována v kladném směru osy x . Při kmitání kyvadla ve směru kolmém na osu x by měla excentricita prstence největší vliv, protože lanko kyvadla se o Charronův prstencem neopírá kolmo, a tedy by mohlo teoreticky dojít ke skluzu lanka po prstenci. Toto klouzání by mohlo ovlivňovat i rychlost stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla. Protože je potřeba prozkoumat vliv excentricity při doteku po celém obvodu prstence, byl čas simulace nastaven na $t_{\text{max}} = 55\,800$ s, za který lanko kyvadla obkrouží při svém pohybu celý obvod prstence. Simulace byly provedeny pro hodnoty C od 10 % R do 35 % R po kroku 5 % R . Ostatní parametry byly při provádění simulací nastaveny na hodnoty z tabulky (1).

Lze očekávat, že do určité hodnoty excentricita Charronova prstence nebude mít na pohyb Foucaultova kyvadla vliv. Cílem zkoumání vlivu excentricity je tedy určení této hodnoty.

2.3.3. Zkoumání vlivu koeficientu smykového tření mezi materiálem lanka a materiálem Charronova prstence

Koeficient smykového tření mezi lankem a prstencem ovlivňuje především velikost třecí síly a tím i množství odebrané energie v každé periodě kmitání Foucaultova kyvadla. Hodnota koeficientu smykového tření se běžně pohybuje v intervalu $(0,1; 1,3)$. V případě Foucaultova kyvadla na PŘF UPOL je hodnota koeficientu $f = 0,176$. Podobně jako u poloměru Charronova prstence lze i u koeficientu smykového tření předpokládat dva extrémy, při nichž se nebude kyvadlu odebírat žádná energie, a tedy se ani nebude tlumit elipticita kmitů. Prvním extrémem je teoreticky hodnota koeficientu smykového tření rovna nule, což ale reálně není možné. Druhým extrémem je potom hodnota tak vysoká, že lanko po prstenci vůbec neklouže, což má za následek to, že Charronův prstencem kyvadlu neodebírá žádnou energii a elipticita kmitání není tlumena.

Lze očekávat, že s rostoucím koeficientem smykového tření bude elipticita kmitání utlumována rychleji. Simulace byly provedeny pro hodnoty f od 0,1 do 1,3 po kroku 0,1. Ostatní parametry byly při simulacích nastaveny na hodnoty z tabulky (1).

2.3.4. Zkoumání vlivu výšky umístění Charronova prstence pod závěsem kyvadla

Výška umístění Charronova prstence pod závěsem kyvadla je parametr, který nelze zkoumat samostatně, neboť při jeho posunutí je nutné úměrně změnit i poloměr Charronova prstence tak, aby doba dotyku byla stejná. Tímto způsobem by mělo být docíleno toho, že jediným vlivem je opravdu pouze výška umístění Charronova prstence pod závěsem kyvadla. Zdá se nepravděpodobné, že by výška umístění Charronova prstence měla velký vliv na útlum elipticity kmitání Foucaultova kyvadla. Na druhou stranu se s umístěním prstence mění i třecí síla působící na kyvadlo, protože její velikost závisí i na odstředivé síle, která roste se snižujícím se poloměrem otáčení, kterým je v tomto případě délka lanka od prstence k závaží kyvadla. Dalším parametrem, jenž se mění se změnou výšky umístění prstence, je délka skluzu lanka po prstenci, což by také mohlo mít vliv na útlum elipticity.

Simulace byly provedeny pro hodnoty h od 1 m do 11 m po kroku 1 m, protože pro $h > 11$ m by byl již Charronův prstencem příliš velký než aby bylo možné jej snadno vyrobit a instalovat. Zároveň s parametrem h byl měněn i poloměr Charronova prstence R a to tak, aby jejich poměr byl konstantní. Ostatní parametry byly při provádění simulací nastaveny na hodnoty z tabulky (1).

3. Výsledky a diskuze

V této části práce jsou shrnuty výsledky zjištěné pomocí numerických simulací pohybu Foucaultova kyvadla s Charronovým prstencem, které jsou popsány v kapitole 2.3. Všechny výsledky jsou následně okomentovány.

3.1. Vliv poloměru Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla

Se změnou poloměru Charronova prstence byla pozorována změna v rychlosti útlumu elipticity a také změna v celkovém úbytku energie. Graf na obrázku (17) zachycuje úbytek energie Foucaultova kyvadla v závislosti na čase kmitání pro poloměry Charronova prstence uvedené v kapitole 2.3.1. Čas, po který se celková energie Foucaultova kyvadla snižuje, je zároveň časem, kdy je utlumována elipticita kmitání. Tento čas nazvěme τ . Dále pak amplitudu kmitání po utlumení elipticity nazvěme A_f . Tabulka (2) shrnuje výsledky provedených simulací.

R (cm)	τ (s)	ΔE (J)	A_f (m)
1,0	740	-1,85	0,920
1,2	660	-1,53	0,950
1,4	650	-1,30	0,960
1,6	640	-1,18	0,970
1,8	710	-1,10	0,975
2,0	750	-1,03	0,980
2,2	800	-0,98	0,983
2,4	820	-0,94	0,986
2,5	860	-0,92	0,987
2,6	900	-0,90	0,991
2,8	1060	-0,87	0,992
3,0	1240	-0,85	0,993
3,2	1520	-0,82	0,995
3,4	2180	-0,80	0,996
3,6	3420	-0,78	0,997

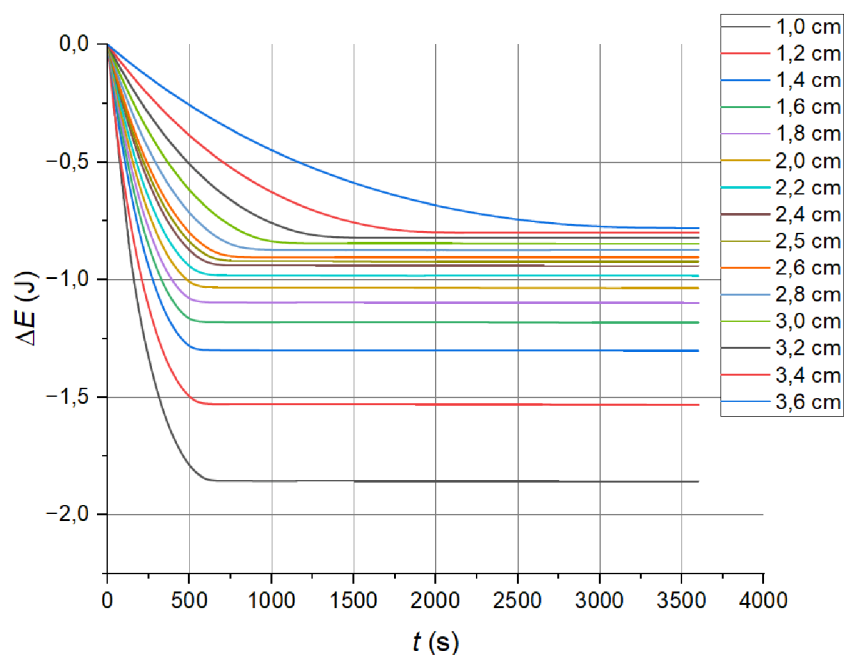
Tabulka 2 | Čas utlumování elipticity, celkový úbytek energie a amplituda kmitání Foucaultova kyvadla v závislosti na poloměru Charronova prstence.

V grafu na obrázku (17) jsou názorně vidět dva trendy. S rostoucím poloměrem Charronova prstence klesá celkový úbytek energie. Toto může být způsobeno tím, že Charronův prstenec neutlumuje pouze složku rychlosti ve směru vedlejší poloosy eliptického kmitání, ale i složku, která je ve směru hlavní poloosy eliptického kmitání. Když se totiž lanko Foucaultova kyvadla dotýká Charronova prstence, neklouže po něm jen ve směru vedlejší poloosy eliptického kmitání, ale nepatrně i ve směru poloosy hlavní. Toto sklouzávání ve směru hlavní poloosy eliptického kmitání tvoří tím větší část odebrané energie, čím menší je poloměr Charronova prstence. Jinými slovy, když má Charronův prstenec větší poloměr, je složka sklouznutí ve směru kolmém na prstenec menší, tedy se ani amplituda ve směru hlavní poloosy eliptického kmitání neutlumí tolik, a tedy i celkové odebrané energie prstencem je nižší. Týž efekt se projevuje také na výsledné amplitudě kmitání po utlumení elipticity.

Druhý trend je dobře viditelný v tabulce (2). Jde o závislost τ na poloměru prstence. Potvrdila se domněnka vyjádřená v kapitole 2.3.1 a to, že existuje optimální hodnota poloměru Charronova prstence, při které je elipticita kmitání utlumena v kratším čase než pro ostatní hodnoty poloměru. Pro hodnoty poloměru od $R = 1,0$ cm do $R = 1,6$ cm se čas potřebný pro útlum elipticity kmitání snižuje, přičemž pro $R = 1,6$ cm dosahuje minima, načež se s rostoucím poloměrem zvyšuje.

Dále bylo zjištěno, že poloměr Charronova prstence nemá po utlumení elipticity vliv na stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla. Úhlová rychlost stáčení roviny kmitání byla pro všechny

poloměry Charronova prstence totožná, a to přibližně $\omega_s = 11,5^\circ \text{ s}^{-1}$, což odpovídá teoretické hodnotě pro danou zeměpisnou šířku.



Obrázek 17 | Závislost úbytku energie Foucaultova kyvadla na čase pro různé hodnoty R .

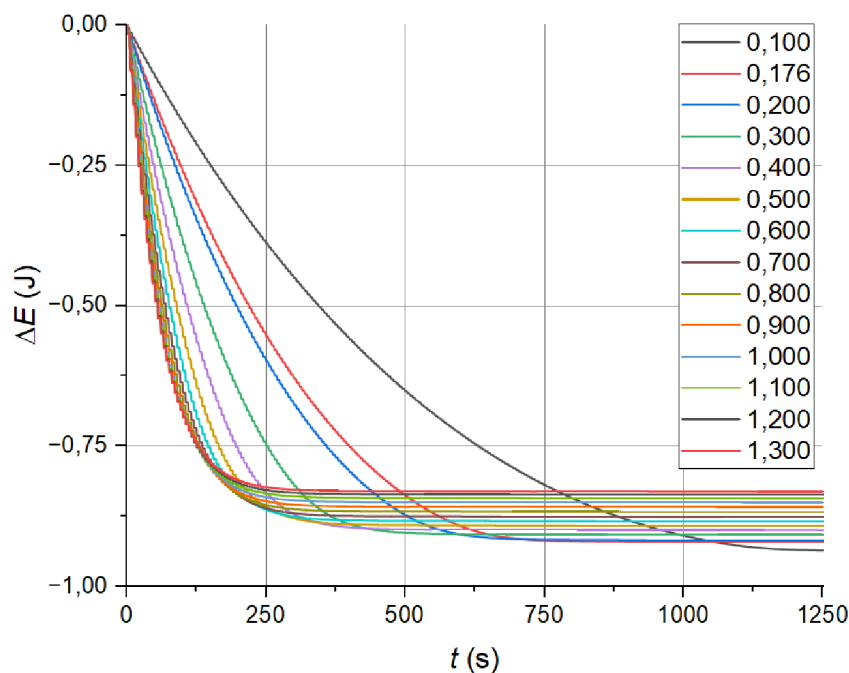
3.2. Vliv koeficientu smykového tření na kmitání Foucaultova kyvadla

V tabulce (3) jsou zaneseny hodnoty času potřebného pro utlumení elipticity a celkového úbytku energie v závislosti na koeficientu smykového tření pro hodnoty uvedené v kapitole 2.3.3.

f	τ (s)	ΔE (J)
0,100	1320	-0,94
0,176	850	-0,92
0,200	840	-0,92
0,300	750	-0,91
0,400	560	-0,90
0,500	520	-0,89
0,600	500	-0,88
0,700	470	-0,88
0,800	440	-0,87
0,900	430	-0,86
1,000	420	-0,85
1,100	400	-0,84
1,200	390	-0,84
1,300	380	-0,83

Tabulka 3 | Čas utlumení elipticity a celkový úbytek energie Foucaultova kyvadla v závislosti na koeficientu smykového tření mezi lankem Foucaultova kyvadla a Charronovým prstencem.

Graf na obrázku (18) zachycuje úbytek energie Foucaultova kyvadla v závislosti na čase pro hodnoty koeficientu smykového tření z kapitoly 2.3.3.



Obrázek 18 | Závislost úbytku energie Foucaultova kyvadla na čase pro různé hodnoty f .

Z tabulky (3) lze vyčíst, že s rostoucím koeficientem smykového tření mezi lankem Foucaultova kyvadla a Charronovým prstencem se zkracuje čas potřebný pro útlum elipticity. Zároveň s tím pro rostoucí f se snižuje celkový úbytek energie. Toto chování je v souladu s domněnkou z kapitoly 2.3.3. Dále bylo zjištěno, že, stejně jako v případě poloměru Charronova prstence, nemá hodnota koeficientu smykového tření vliv na stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla. Úhlová rychlost stáčení roviny kmitání byla pro všechny hodnoty f totožná, a to $\omega_s = 11,5^\circ \text{ s}^{-1}$.

Při konstrukci Foucaultova kyvadla je tedy vhodné volit materiály prstence a lanka závěsu tak, aby hodnota koeficientu smykového tření mezi nimi byla co nejvyšší.

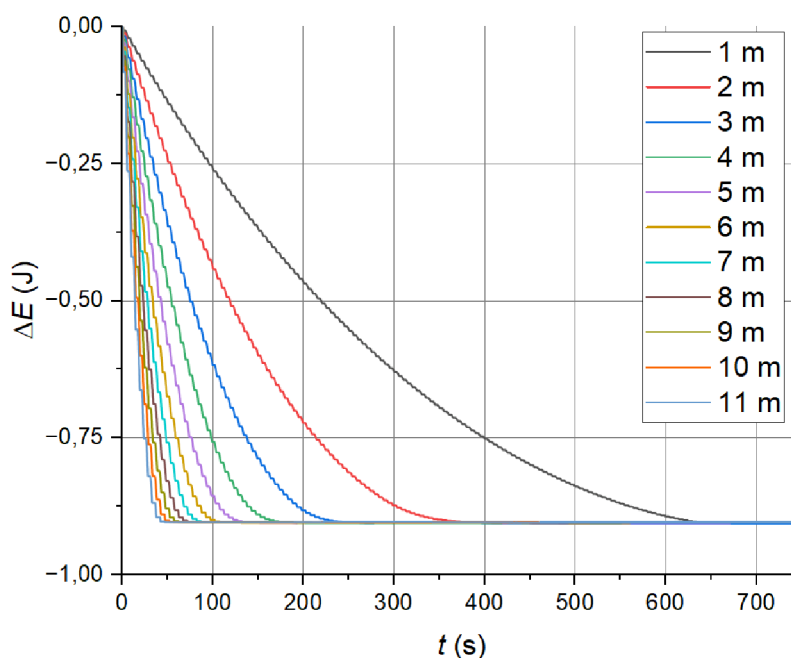
3.3. Vliv výšky umístění Charronova prstence pod bodem závěsu na kmitání Foucaultova kyvadla

V tabulce (4) jsou zaneseny hodnoty času potřebného pro utlumení elipticity a celkového úbytku energie v závislosti na výšce umístění Charronova prstence pod bodem závěsu kyvadla. V tabulce lze pozorovat, že se zvyšující se výškou h klesá čas potřebný k útlumu elipticity kmitání τ . Závislost energie Foucaultova kyvadla na čase pro hodnoty h z kapitoly 2.3.4 jsou vykresleny v grafu na obrázku (19). Z obrázku (19) a tabulky (4) je dále zjevné, že celkový úbytek energie není závislý na výšce umístění Charronova prstence pod bodem závěsu Foucaultova kyvadla.

h	τ (s)	ΔE (J)
1	850	-0,91
2	390	-0,91
3	260	-0,91
4	200	-0,91
5	140	-0,91
6	120	-0,91
7	100	-0,91
8	80	-0,91
9	70	-0,91
10	60	-0,91
11	50	-0,91

Tabulka 4

Čas utlumování elipticity a celkový úbytek energie Foucaultova kyvadla v závislosti na výšce umístění Charronova prstence pod bodem závěsu Foucaultova kyvadla.



Obrázek 19 | Závislost úbytku energie Foucaultova kyvadla na čase pro různé hodnoty h .

Toto chování je možné vysvětlit tím, že s rostoucí výškou umístění Charronova prstence se zkracuje dolní část lanka. Toto má za následek, že roste odstředivá složka tahové síly lanka, tedy síla působící na prstenec roste a s ní i třecí síla, kterou působí Charronův prstenec na lanko závěsu

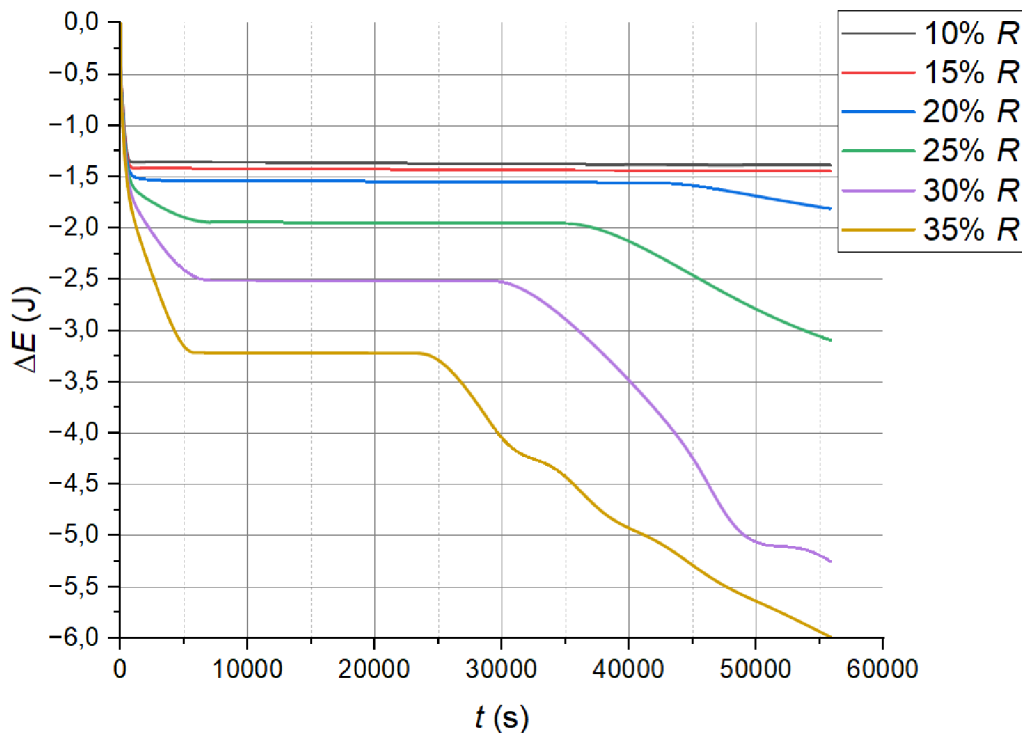
Foucaultova kyvadla.

Druhým vlivem, pomocí něhož by se toto chování dalo vysvětlit, je to, že s rostoucí výškou h byl úměrně zvětšován i poloměr Charronova prstence. To má za následek, že při každém dotyku Charronova prstence se po něm lanko při větší výšce h sklouzne o větší vzdálenost. Dále bylo zjištěno, že výška umístění Charronova prstence pod závěsem Foucaultova kyvadla nemá vliv na rychlost stáčení roviny kmitání. Stejně jako v kapitolách 3.1 a 3.2 byla úhlová rychlost stáčení roviny kmitání ve všech simulacích $\omega_s = 11,5^\circ \text{ s}^{-1}$.

Pro konstrukci Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem je tedy vhodné umístit Charronův prsteneček v co nejvyšší výšce od bodu závěsu kyvadla. Simulace byly provedeny až do hodnoty $h = 11 \text{ m}$, protože pro větší výšku by už byl prsteneček příliš velký, než aby jej bylo možné snadno vyrobit a umístit. Umístění Charronova prstence v malé výšce pod bodem závěsu je velmi výhodné, protože se konstrukce závěsu Foucaultova kyvadla a uchycení Charronova prstence spojí do jedné konstrukce, což usnadní umísťování.

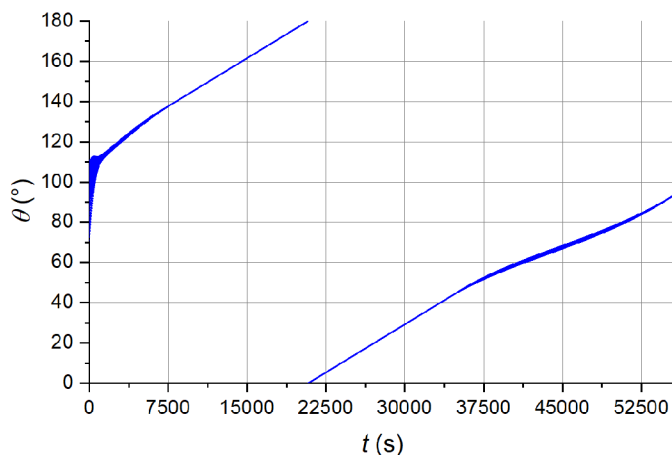
3.4. Vliv excentricity Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla

V rámci zkoumání vlivu excentricity Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla byly provedeny simulace popsané v kapitole 2.3.2. Hlavním cílem bylo zjistit, od jak vysoké hodnoty začíná být excentricita Charronova prstence problémem pro Foucaultovo kyvadlo. Na obrázku (20) je vykreslen graf pro všechny hodnoty C , pro které byla provedena simulace.

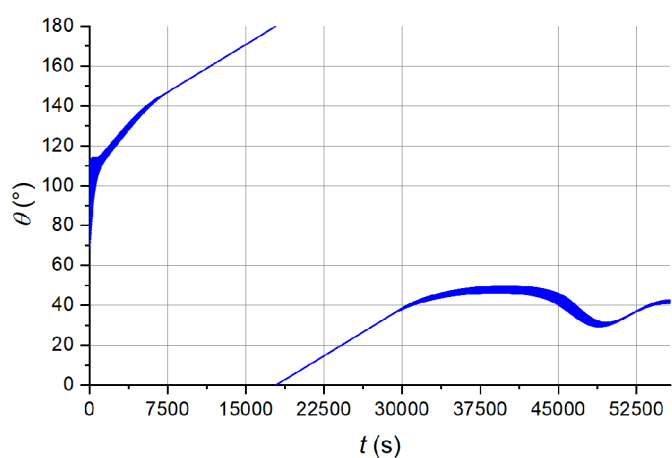


Obrázek 20 | Závislost úbytku energie Foucaultova kyvadla na čase pro různé hodnoty C .

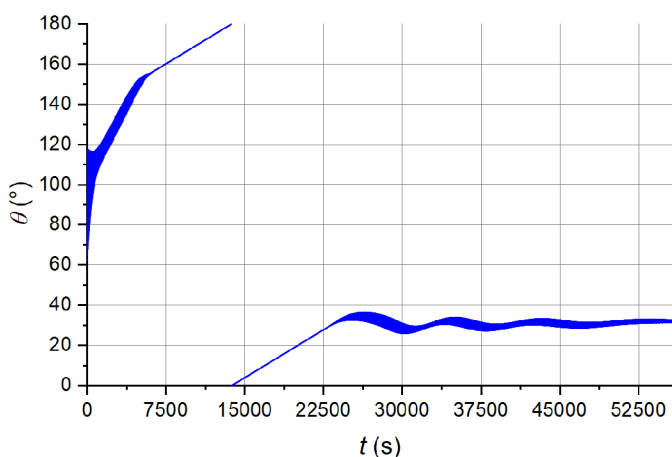
Z grafu je vidět, že pro hodnoty C 10 % R a 15 % R se kyvadlo chová normálně, přičemž po utlumení elipticity dále Foucaultovo kyvadlo neztrácí žádnou energii. Pro $C = 20$ % R kyvadlo i po utlumení elipticity ztrácí energii, ve chvíli, kdy se dostane do místa, kde má excentricita největší vliv, neboť nepatrně sklouzává po Charronově prstenci. Zároveň však je Coriolisova síla dostatečně velká na to, aby kyvadlo překonalo překážku ve formě elipticity a normálně se stáčela jeho rovina kmitání. Pro vyšší hodnoty C se děje to, že lanko Foucaultova kyvadla sklouzává po Charronově prstenci i ve chvíli, kdy je utlumena elipticita. Děje se to proto, že lanko se nedotýká Charronova prstence pod úhlem 90° . Dalším efektem, který má toto sklouzávání za následek je změna rychlosti stáčení roviny kmitání. Toto chování je možné pozorovat na obrázcích (21), (22) a (23), přičemž pro $C = 30$ % R a $C = 35$ % R okolo času $t = 38\,000 \text{ s}$ a $t = 26\,000 \text{ s}$ Charronův prsteneček mění směr stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla. V grafech je také vidět, že na začátku je rychlost stáčení roviny kmitání vyšší. To je způsobeno elipticitou, která je následně utlumena.



Obrázek 21 | Závislost úhlu stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem o excentricitě $C = 25\% R$.



Obrázek 22 | Závislost úhlu stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem o excentricitě $C = 30\% R$.



Obrázek 23 | Závislost úhlu stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem o excentricitě $C = 35\% R$.

Jak je vidět z grafů na obrázcích (22) a (23) Coriolisova síla působící Foucaultovo kyvadlo pro takto vysoké hodnoty excentricity nedokáže překonat působení Charronova prstence. Dále bylo zjištěno, že Charronův prstavec s hodnotou excentricity $C = 25\% R$ a vyšší vnáší v místech, kde

má excentricita největší vliv, elipticitu do kmitání Foucaultova kyvadla. V takovém případě tedy nevykonává funkci, pro kterou byl navržen.

Výsledkem simulací pro různou excentricitu Charroanova prstence je tedy, že excentricita Charroanova prstence není pro Foucaultovo kyvadlo problém, pokud je dostatečně malá, v tomto případě ještě hodnota $C = 15 \% R$. Od hodnoty $C = 20 \% R$ mění excentricita v místech, kde má největší vliv, rychlost stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla, což pro demonstraci Foucaultova kyvadla není vhodné.

Závěr

V teoretické části práce byla v úvodu popsána problematika Foucaultova kyvadla. Dále byly popsány různé přístupy k tlumení elipticity kmitání včetně Charronova prstence. V kapitole 1.4 byly odvozeny pohybové rovnice Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem. V kapitolách 1.6 a 1.7 byly odvozeny vztahy pro celkovou energii Foucaultova kyvadla a pro odporovou sílu, kterou na kyvadlo působí vzduch, jímž je kyvadlo při pohybu obtékáno.

V rámci práce byl vytvořen skript pro simulaci pohybu Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem, který je elektronickou přílohou této práce. Tento skript může posloužit jako nástroj při konstrukci Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem, aby bylo dosaženo optimálního utlumování elipticity kmitání Foucaultova kyvadla. Kvalita předpovědi simulace byla ověřena porovnáním experimentálních výsledků měřených na Foucaultově kyvadle na PřF UPOL. Teoretická předpověď se dobře shodovala s experimentálními výsledky co se týče útlumu elipticity kmitání, viz graf na obrázku (16).

Cílem této práce bylo prozkoumat vliv čtyř parametrů Charronova prstence na kmitání Foucaultova kyvadla. Jednalo se o poloměr Charronova prstence, výšku jeho umístění pod bodem závěsu Foucaultova kyvadla, excentricitu a koeficient tření mezi lankem Foucaultova kyvadla a Charronovým prstencem. Za účelem tohoto zkoumání byly provedeny simulace popsané v kapitole 2.3. Výsledky těchto simulací byly v kapitole 3 rozebrány a vysvětleny.

Pro poloměr Charronova prstence R bylo zjištěno, že čas potřebný pro útlum elipticity kmitání je nejnižší pro hodnotu $R = 1,6$ cm. Pro hodnoty vyšší, resp. nižší bylo zjištěno, že větší, resp. menší poloměr Charronova prstence vede k prodloužení času potřebného pro útlum elipticity. Dále bylo zjištěno, že se zmenšujícím se poloměrem Charronova prstence roste celkový úbytek energie Foucaultova kyvadla.

Pro výšku umístění Charronova prstence bylo zjištěno, že čím níže je Charronův prsteneček vzhledem k bodu závěsu Foucaultova kyvadla umístěn, tím účinněji utlumuje elipticitu kmitání. Celkový úbytek energie nezávisí na výšce umístění prstence, což je vidět v grafu na obrázku (19).

Podobný výsledek byl zaznamenán i pro koeficient smykového tření mezi materiálem Charronova prstence a lankem Foucaultova kyvadla. Bylo zjištěno, že se zvyšující se hodnotou koeficientu smykového tření se snižuje čas potřebný pro útlum elipticity kmitání Foucaultova kyvadla. Pro celkový úbytek energie Foucaultova kyvadla bylo zjištěno, že s rostoucím koeficientem smykového tření klesá.

Nakonec v kapitole 3.4 bylo zjištěno, že excentricita umístění Charronova prstence je problémem až od hodnoty $C = 20\% R$. Pro hodnoty vyšší než $C = 30\% R$ mění Charronův prsteneček po určitém čase směr stáčení roviny kmitání Foucaultova kyvadla a toto pak nevykonává funkci, pro kterou bylo sestrojeno. Při konstrukci Foucaultova kyvadla se Charronovým prstencem je tedy nutné Charronův prsteneček umístit s excentricitou, jejíž hodnota není vyšší než hodnota $C = 15\% R$.

Seznam použitých zdrojů

- [1] SOMMERIA, Joël. Foucault and the rotation of the Earth. *Comptes Rendus Physique*. 2017, **18**(9-10), 520-525. ISSN 16310705. Dostupné z: doi:10.1016/j.crhy.2017.11.003.
- [2] CHARRON, F. Sur un perfectionnement du pendule de Foucault et sur l'entretien des oscillations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1931, **192**, 208-210.
- [3] ZATLOUKAL, O.. Arcibiskupský zámek a zahrady v Kroměříži, Foucaultovo kyvadlo. Informační leták, vydal SZ AZZ Kroměříž, 2013.
- [4] AIRY, George Biddell. On the Vibration of a Free Pendulum in an Oval differing little from a Straight line. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. 1851, **20**, 121-130.
- [5] STOOT, S. Experiments with a Foucault Pendulum. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*. 1932, **26**, 241-246.
- [6] MOPPERT, C. F. a W. J. BONWICK. The New Foucault Pendulum at Monash University. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*. 1980, **21**, 108-118.
- [7] MASTNER, G., V. VOKURKA, M. MASCHEK, E. VOGT a H. P. KAUFMANN. Foucault pendulum with eddy-current damping of the elliptical motion. *Review of Scientific Instruments*. 1984, **55**(10), 1533-1538. ISSN 0034-6748. Dostupné z: doi:10.1063/1.1137615.
- [8] CRANE, H. Richard. Short Foucault pendulum: A way to eliminate the precession due to ellipticity. *American Journal of Physics*. 1981, **49**(11), 1004-1006. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.12655.
- [9] HILTON, Wallace A. The Foucault pendulum: A corridor demonstration. *American Journal of Physics*. 1978, **46**(4), 436-438. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.11321.
- [10] LANDAU, Lev Davidovič a Jevgenij Michajlovič LIFŠIC. *Mechanics*. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier, c1976, xxvii, 170 s. Course of theoretical physics, Volume 1. ISBN 0-7506-2896-0.
- [11] DRÁBKOVÁ, Sylva. *Mechanika tekutin* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, [2008] [cit. 2022-07-04]. ISBN 978-80-248-1508-4.
- [12] DHOUIBI, S., M. BOUJELBENE, M. KHARRAT, M. DAMMAK a A. MAALEJ. Friction Behavior of High Density Polyethylene (HDPE) Against 304L Steel: An Experimental Investigation of the Effects of Sliding Direction, Sliding History and Sliding Speed. *Journal of Surfaces and Interfaces of Materials*. 2013, **1**(1), 71-76. ISSN 21647542. Dostupné z: doi:10.1166/jsim.2013.1002.
- [13] Drag coefficient. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient.
- [14] SCHMIEDT, Tomáš. *Foucaultovo kyvadlo*. Olomouc, 2018. Diplomová práce. PřF UPOL.