PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA INFORMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fuzzy relační rovnice

2012 Jan Tříska

Anotace

Práce je zaměřena na nastudování problematiky fuzzy relačních rovnic a na následnou implementaci získaných poznatků v podobě sady funkcí pro programovací jazyk Common Lisp. Implementována byla kritéria řešitelnosti fuzzy relačních rovnic typu $X * R = T$ *a* $S * X = T$*, kde* $*$ *značí jistý typ skládání fuzzy relací,* R*,* S *a* T *jsou dané fuzzy relace a* X *je neznámá fuzzy relace. Dále byl implementován výpočet všech řešení s exportem do xml formátu pro rovnice s určitým typem fuzzy relací.*

Děkuji panu Eduardu Bartlovi za odbornou pomoc a přítelkyni za psychickou podporu.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1. Úvod

Cílem práce bylo nastudovat a dále naprogramovat řešení fuzzy relačních rovnic s možností zvolit si vlastní strukturu pravdivostních hodnot a použít 4 základní typy skládání. Fuzzy relační rovnice mají uplatnění v systémech pracujících s fuzzy pravidly, které jsou ve tvaru „Jestliže A, pak B.“, např. „Jestliže je vysoká teplota, pak se větrák otáčí rychle“. Úkolem je pak najít aparát, který by rozhodoval podle zadaných pravidel. Pokud se na pravidlo podíváme z matematického pohledu, pak lze toto pravidlo přepsat do tvaru $X(A) = B$ a rozhodovacím aparátem můžeme nazvat funkci X.

Pokud se budeme dívat na A a B jako na relace, pak výraz $X(A) = B$ můžeme vyjádřit jako fuzzy relační rovnici ve tvaru $A * X = B$, kde $*$ značí jistý typ skládání. V dalším textu se budeme zabývat detailnějším významem tohoto výrazu, ale nejprve zavedeme některé základní pojmy z teorie fuzzy množin a jejich vlastnosti. Dále zavedeme několik typů fuzzy relačních rovnic, kritéria řešitelnosti a hledání řešení, a nakonec je popsané naprogramované řešení.

2. Základní pojmy

Než si zavedeme pojem fuzzy množina a fuzzy relace, je potřeba se podívat, jak bude vypadat stupnice pravdivostních hodnot. K tomu bude sloužit reziduovaný svaz, jakožto struktura pravdivostních hodnot.

2.1. Struktury pravdivostních hodnot

Definice 2.1. *Reziduovaný svaz* je algebra $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ kde

- $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1,
- $\langle L, \otimes, 1\rangle$ je komutativní monoid, tzn. $\otimes$ je asociativní, komutativní a platí $a \otimes 1 = a$,
- platí podmínka adjunkce, tzn.

  $$a \leq b \rightarrow c, \text{ právě když } a \otimes b \leq c,$$

  pro každé $a, b, c \in L$, kde $\leq$ je uspořádání na L indukované operacemi $\wedge$ a $\vee$.

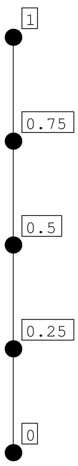
Reziduovaný svaz se nazývá *úplný*, pokud je $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ úplný svaz a Operace $\otimes$ nazýváme *multiplikací*, $\rightarrow$ *reziduem*, $\wedge$ *infimem* a $\vee$ *supremem.*

Podmínky kladené na reziduovaný svaz vychází z reálných potřeb, které by pravdivostní hodnoty měly splňovat, jak je uvedeno v [1].

▷ PŘÍKLAD 2.1. Předpokládejme, že $L = [0,1]$ (interval reálných čísel od 0 do 1), $a \wedge b = \min(a,b)$, $a \vee b = \max(a,b)$ (lineární uspořádání). Pak $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ spolu s nádledujícími dvojcemi operací tvoří úplný reziduovaný svaz:

- $a \otimes b = \max(a + b - 1, 0)$, $a \rightarrow b = \min(1 - a + b, 1)$ (Łukasiewiczova struktura),
- $a \otimes b = \min(a + b - 1, 0)$, $a \rightarrow b = 1$, když $a \leq b$ a $a \rightarrow b = b$, když $a > b$ (Gödelova struktura),
- $a \otimes b = a \cdot b$, $a \rightarrow b = 1$, když $a \leq b$ a $a \rightarrow b = b/a$, když $a > b$ (součinová struktura).

V případě, že by $L = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ a byla by zase uspořádána lineárně (viz obrázek 1.), pak bychom mohli zavést spolu s Łukasiewiczovými nebo Gödelovými operacemi pětiprvkovou strukturu. Součinové operace v tomto případě nelze použít, jelikož výsledky operací by nebyly z množiny L. □

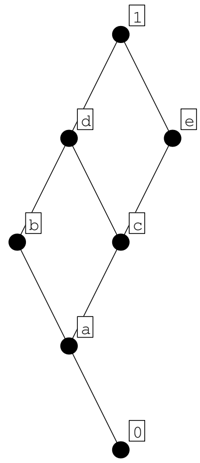


Obrázek 1. Lineárně uspořádaná množina.

▷ PŘÍKLAD 2.2. Nyní uvažujme $L = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$. Na obrázku 2. je vidět, jak by mohla vypadat nelineárně uspořádaná množina $\langle L, \vee, \wedge\rangle$. Příklad operací multiplikace a rezidua je uveden v tabulce 1.. □

2.2. Vlastnosti reziduovaných svazů

Nyní uvedeme několik potřebných vlastností reziduovaných svazů, které využijeme u dokazovaní vlastností fuzzy relačních rovnic. Ve všech následujících větách budeme uvažovat libovolné $a, b, c \in L$.



Obrázek 2. Nelineárně uspořádaná množina.

$\otimes$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	a	b
c	0	a	a	c	c	c	c
d	0	a	b	c	d	c	d
e	0	a	a	c	c	e	e
1	0	a	b	c	d	e	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1	1
b	0	e	1	e	1	e	1
c	0	b	b	1	1	1	1
d	0	a	b	e	1	e	1
e	0	b	b	d	d	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

Tabulka 1. Operace multiplikace a rezidua

Věta 2.1. *Pro každý reziduovaný svaz platí následující podmínky:*

$$
\begin{aligned}
&a \otimes (a \rightarrow b) \leq b,\\
&b \leq a \rightarrow (a \otimes b),\\
&a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b,\\
&a \rightarrow b \textit{ je největší prvek } \{c | a \otimes c \leq b\},\\
&a \otimes b \textit{ je nejmenší prvek } \{c | a \leq b \rightarrow c\}.
\end{aligned}
$$

Důkaz. První podmínka plyne přímo z adjunkce

$$a \otimes (a \rightarrow b) \leq b, \text{ právě když } a \rightarrow b \leq a \rightarrow b,$$

což je pravda, protože relace $\leq$ je reflexivní. Druhá a třetí obdobně plynou z adjunkce.

Čtvrtá je pravdivá díky tomu, že

$$a \rightarrow b \in \{c | a \otimes c \leq b\}$$

použitím první podmínky. Pokud $a \otimes c \leq b$, pak z adjunkce a komutativity $\otimes$ plyne $a \leq c \rightarrow b$.

Pátá je pravdivá díky tomu, že

$$a \otimes b \in \{c | a \leq b \to c\}$$

použitím třetí podmínky. Pokud $a \leq b \to c$, pak z adjunkce plyne $a \otimes b \leq c$. $\square$

Z předchozí věty je patrné, že ze zadané operace $\otimes$ se dá odvodit operace $\to$ a obráceně.

Následující věta nám říká, že operace $\otimes$ je izotonní v obou argumentech (fakt, že je izotoní v prvním argumentu, vyplývá z komutativity $\otimes$) a $\to$ je izotonní v druhém a antitonní v prvním argumentu.

Věta 2.2. *V každém reziduovaném svazu je pravdivé:*

$$\begin{aligned} \textit{jestliže } b_1 \leq b_2, &\quad \textit{pak} \quad a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2, \\ \textit{jestliže } b_1 \leq b_2, &\quad \textit{pak} \quad a \to b_1 \leq a \to b_2, \\ \textit{jestliže } a_1 \leq a_2, &\quad \textit{pak} \quad a_2 \to b \leq a_1 \to b. \end{aligned}$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme první 2 tvrzení. Z adjunkce,

$$\begin{aligned} a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2, &\quad \text{právě když} \quad b_1 \leq a \to (a \otimes b_2), \\ a \to b_1 \leq a \to b_2, &\quad \text{právě když} \quad a \otimes (a \to b_1) \leq b_2. \end{aligned}$$

Což je pravdivé díky předpokladu, že $b_1 \leq b_2$, a použitím předchozí věty

$$\begin{aligned} b_1 \leq b_2 \leq a \to (a \otimes b_2), \\ a \otimes (a \to b_1) \leq b_1 \leq b_2. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme třetí tvrzení. Z adjunkce,

$$a_2 \to b \leq a_1 \to b, \quad \text{právě když} \quad a_1 \otimes (a_2 \to b) \leq b.$$

Což je pravdivé díky předpokladu, že $a_1 \leq a_2$, a použitím prvního tvrzení a předchozí věty

$$a_1 \otimes (a_2 \to b) \leq a_2 \otimes (a_2 \to b) \leq b.$$

$\square$

Další tvrzení nám ukáže vlastnosti multiplikace a rezidua vyhledem k supremu a infimu.

Věta 2.3. *Následující je pravdivé v každém reziduovaném svazu a pro každou indexovou množinu I.*

$$\begin{aligned} a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i &= \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i), \\ a \to \bigwedge_{i \in I} b_i &= \bigwedge_{i \in I} (a \to b_i), \\ \bigvee_{i \in I} a_i \to b &= \bigwedge_{i \in I} (a_i \to b). \end{aligned}$$

Důkaz. První rovnost: Z izotonie $\otimes$ máme

$$a \otimes b_i \leq a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i$$

pro každé $i \in I$. Pokud některé c je takové, že $a \otimes b_i \leq c$ pro každé $i \in I$, pak $b_i \leq a \to c$, tedy $\bigvee_{i \in I} b_i \leq a \to c$, z čehož dostáváme $a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i \leq c$. Proto $a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i$ je nejmenší prvek d splňující $a \otimes b_i \leq d$ pro každé $i \in I$. A tedy z definice $\bigvee$,

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i).$$

Druhá rovnost: Z izotonie $\to$ v druhém argumentu dostáváme

$$a \to \bigwedge_{i \in I} b_i \leq a \to b_i$$

pro každé $i \in I$. Pokud pro některé c, $c \leq a \to b_i$, pak $c \otimes a \leq b_i$, tedy $c \otimes a \leq \bigwedge_{i \in I} b_i$, což nám dává $c \leq a \to \bigwedge_{i \in I} b_i$, tedy

$$a \to \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \to b_i).$$

Třetí rovnost: Z antitonie $\to$ v prvním argumentu dostáváme

$$\bigvee_{i \in I} a_i \to b \leq a_i \to b.$$

Vezmeme takové c, že $c \leq a_i \to b$ pro jakékoliv $i \in I$. Pak $a_i \leq c \to b$ (použijeme dvakrát adjunkci), proto $\bigvee_{i \in I} a_i \leq c \to b$, tedy $c \leq \bigvee_{i \in I} a_i \to b$, tedy

$$\bigvee_{i \in I} a_i \to b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \to b).$$

□

2.3. Fuzzy množiny a fuzzy relace

Fuzzy množiny oproti normálním množinám mohou obsahovat prvky jen v určitém stupni, tedy nemusí je obsahovat úplně, a lze tak pracovat s vágností. Např. teplota 19 °C může patřit do množiny vysokých teplot jen z části, protože 19 °C není moc vysoká teplota.

Definice 2.2. Nechť $\mathbf{L}$ je úplný reziduovaný svaz a X neprázdná množina. Pak *fuzzy množina* (nebo také $\mathbf{L}$-*množina*) na X je zobrazení $A : X \to L$.

Množině X se říka *univerzum* a $A(x)$ se nazývá *stupeň příslušnosti* x *do* A. Fakt, že A je fuzzy množina na X se zapisuje jako $A \in L^X$.

Řekněme, že $L = [0, 1]$, X je množina všech °C a fuzzy množina A obsahuje vysoké teploty, tedy např. $A(14\,°\mathrm{C}) = 0$, $A(19\,°\mathrm{C}) = 0,1$ nebo $A(26\,°\mathrm{C}) = 0,8$. V případě, že $L = \{0, 1\}$, pak se množina A nazývá *crisp* a jde o klasickou množinu, tedy některé teploty by patřily do množiny A ($A(x) = 1$) a byly by v tom případě vysoké a zbyvající teploty by nepatřily do množiny A ($A(x) = 0$) a vysoké by nebyly.

Definice 2.3. Nechť $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, potom se fuzzy množina (nebo $\mathbf{L}$-množina) na X nazývá *fuzzy relace* (nebo $\mathbf{L}$-*relace*) mezi $X_1, X_2, \ldots$ a X_n. Pokud $n = 2$ pak hovoříme o *binární fuzzy relaci*.

Jelikož budeme používat pouze binární fuzzy relace, pojmem fuzzy relace budeme myslet binární fuzzy relaci. Pro další práci je třeba si zadefinovat několik operací s fuzzy relacemi a také jednu relaci mezi fuzzy relacemi. Pro následující definice budeme uvažovat fuzzy relace $R, R' \in L^{A\times B}$ a $S \in L^{B\times C}$.

Pro fuzzy relace definujeme operace $\cap, \cup, ^{-1}$ následovně:

$$
\begin{aligned}
(R \cap R')(a, b) &= R(a, b) \wedge R'(a, b), \\
(R \cup R')(a, b) &= R(a, b) \vee R'(a, b), \\
R^{-1}(a, b) &= R(b, a),
\end{aligned}
$$

pro každé $a \in A$ a $b \in B$. Budeme také potřebovat relaci $\subseteq$ mezi fuzzy relacemi definovanou jako

$$R \subseteq R', \text{ pokud pro každé } a \in A \text{ a } b \in B \text{ platí } R(a, b) \leq R'(a, b).$$

Nyní uvažujme $\mathbf{L}$-relaci R mezi A a B a $\mathbf{L}$-relaci S mezi B a C a budeme chtít získat relaci $R * S$ mezi A a C. $R * S$ nazveme kompozicí fuzzy relací R a S a kompozice fuzzy relací je tedy zobrazení $* : L^{A\times B} \times L^{B\times C} \to L^{A\times C}$. V dalším textu budeme používat následující kompozice fuzzy relací:

$$\begin{aligned}(R \circ S)(a,c) &= \bigvee_{b \in B} (R(a,b) \otimes S(b,c)),\\ (R \triangleleft S)(a,c) &= \bigwedge_{b \in B} (R(a,b) \to S(b,c)),\\ (R \triangleright S)(a,c) &= \bigwedge_{b \in B} (S(b,c) \to R(a,b)),\\ (R \square S)(a,c) &= \bigwedge_{b \in B} (R(a,b) \leftrightarrow S(b,c)),\end{aligned}$$

pro každé $a \in A, c \in C$, kde $a \leftrightarrow b = (a \wedge b) \to (a \vee b)$. Je vidět, že kompozice $\circ$ je komutativní, díky komutativitě $\otimes$.

Dále uvedeme několik vlastností kompozic fuzzy relací.

Věta 2.4. *Pro libovolné $R \in L^{A \times B}$ a $S \in L^{B \times C}$ platí:*

$$\begin{aligned}(R \circ S)^{-1} &= S^{-1} \circ R^{-1},\\ (R \triangleleft S)^{-1} &= S^{-1} \triangleright R^{-1},\\ (R \triangleright S)^{-1} &= S^{-1} \triangleleft R^{-1},\\ (R \square S)^{-1} &= S^{-1} \square R^{-1}.\end{aligned}$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz druhé rovnosti:

$$(R \triangleleft S)^{-1}(c,a) = (R \triangleleft S)(a,c) = \bigwedge_{b \in B} R(a,b) \to S(b,c) =$$

$$= \bigwedge_{b \in B} R^{-1}(b,a) \to S^{-1}(c,b) = (S^{-1} \triangleright R^{-1})(c,a).$$

Důkazy zbývajících rovností jsou obdobné. □

Je jednoduše vidět, že $R \square S = (R \triangleleft S) \cap (R \triangleright S)$ a navíc z předchozích rovností plyne $R \triangleright S = (S^{-1} \triangleleft R^{-1})^{-1}$. Proto jako základní skládání relací můžeme brát $\circ$ a $\triangleleft$.

Další věta nám říká, že kompozice $\circ$ je izotonní v obou argumentech (fakt, že je izotoní v prvním argumentu, vyplývá z komutativity $\circ$) a $\triangleleft$ je izotonní v druhém a antitonní v prvním argumentu.

Věta 2.5. *Pro libovolné $R, R_1, R_2 \in L^{A \times B}$ a $S, S_1, S_2 \in L^{B \times C}$ platí:*

$$\begin{aligned}\textit{Jestliže } S_1 \subseteq S_2, \quad &\textit{pak} \quad R \circ S_2 \subseteq R \circ S_1.\\ \textit{Jestliže } S_1 \subseteq S_2, \quad &\textit{pak} \quad R \triangleleft S_2 \subseteq R \triangleleft S_1.\\ \textit{Jestliže } R_1 \subseteq R_2, \quad &\textit{pak} \quad R_1 \triangleleft S \subseteq R_2 \triangleleft S.\end{aligned}$$

Důkaz. Všechna tvrzení platí díky větě 2.2., tedy

$$(R \circ S_1)(a,c) = \bigvee_{b \in B} (R(a,b) \otimes S_1(b,c)) \subseteq$$
$$\subseteq \bigvee_{b \in B} (R(a,b) \otimes S_2(b,c)) = (R \circ S_2)(a,c).$$

Důkazy ostatních tvrzení se provedou obdobně. □

Věta 2.6. *Pro libovolné $R, R_i \in L^{A \times B}$ a $S, S_i \in L^{B \times C}$, kde $i \in I$, platí:*

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ S &= \bigcup_{i \in I} (R_i \circ S), \\
R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) &= \bigcup_{i \in I} (R \circ S_i), \\
R \lhd (\bigcap_{i \in I} S_i) &= \bigcap_{i \in I} (R \lhd S_i), \\
(\bigcup_{i \in I} R_i) \lhd S &= \bigcap_{i \in I} (R_i \lhd S).
\end{aligned}$$

Důkaz. Všechny rovnosti jsou důsledky věty 2.3., tedy

$$[(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ S](a,c) = \bigvee_{b \in B} (\bigvee_{i \in I} R_i(a,b) \otimes S(b,c)) =$$
$$= \bigvee_{b \in B} \bigvee_{i \in I} (R_i(a,b) \otimes S(b,c)) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{b \in B} (R_i(a,b) \otimes S(b,c)) =$$
$$= \bigcup_{i \in I} [R_i \circ S](a,c).$$

Stejně by se provedly důkazy pro ostatní rovnosti. □

3. Fuzzy relační rovnice

Situace je následující: máme fuzzy relace R,S a T a známe R a T a snažíme se najít S tak, aby platilo $R * S = T$ nebo známe fuzzy relace S a T a chceme najít R.

Definice 3.1. Nechť $R \in L^{X \times Y}$, $S \in L^{Y \times Z}$, $T \in L^{X \times Z}$ jsou fuzzy relace. Pro danou R a T, odvoď S, pro kterou platí

$$R * S \text{ je rovna } T.$$

Nebo také, pro danou S a T, odvoď R. Pak

$$X * S = T, \; R * X = T$$

značíme *fuzzy relační rovnici s neznámou relací* X.

Označme fuzzy relační rovnici písmenem $\mathcal{E}$, a pak pro rovnici $\mathcal{E}$ typu $X*S = T$ budeme množinu všech relací $X \in L^{A \times B}$, které vyhovují rovnici $\mathcal{E}$, značit $\mathrm{Sols}(\mathcal{E})$, tedy

$$\mathrm{Sols}(\mathcal{E}) = \{X \in L^{A \times B} | X * S = T\}.$$

Obdobně pro rovnici $\mathcal{E}$ typu $R*X = T$ budeme množinu všech relací $X \in L^{B \times C}$, které vyhovují rovnici $\mathcal{E}$, značit $\mathrm{Sols}(\mathcal{E})$, tedy

$$\mathrm{Sols}(\mathcal{E}) = \{X \in L^{B \times C} | R * X = T\}.$$

Jelikož $\square$ a $\triangleright$ lze vyjádřit pomocí $\triangleleft$ a dále platí, že $R \circ X = T$ je ekvivalentní s $X^{-1} \circ R^{-1} = T^{-1}$, $R \triangleright X = T$ je ekvivalentní s $X^{-1} \triangleleft R^{-1} = T^{-1}$, $X \triangleright S = T$ je ekvivalentní s $S^{-1} \triangleleft X^{-1} = T^{-1}$, pak všech 8 typů fuzzy relačních rovnic lze redukovat pouze na 3 typy $X \circ R = T$, $X \triangleleft S = T$ a $R \triangleleft X = T$.

3.1. Struktura řešení

Je známo, že lineární kombinace řešení soustavy homogenních lineárních rovnic je zase řešení této soustavy. Proto množina všech řešení tvoří vektorový prostor. Nyní uvažujme podobnou otázku pro fuzzy relační rovnice.

Věta 3.1. *Nechť $\mathcal{E}_1$ je fuzzy relační rovnice typu $X \circ S = T$. Pak pro každé $i \in I$ platí, že*

$$\textit{pokud } R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1), \textit{ pak } \bigcup_{i \in I} R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1).$$

Důkaz. Z předpokladu máme $R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1)$ pro každé $i \in I$, tedy $R_i \circ S = T$ pro každé $i \in I$. Pak platí

$$T = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ S) = \bigcup_{i \in I} R_i \circ S,$$

a proto $\bigcup_{i \in I} R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1)$. $\square$

Věta 3.2. *Nechť $\mathcal{E}_2$ je fuzzy relační rovnice typu $X \lhd S = T$. Pak pro každé $i \in I$ platí, že*

$$\textit{pokud } R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2), \textit{ pak } \bigcup_{i \in I} R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2).$$

Důkaz. Z předpokladu máme $R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2)$ pro každé $i \in I$, tedy $R_i \lhd S = T$ pro každé $i \in I$. Pak platí

$$T = \bigcap_{i \in I} (R_i \lhd S) = \bigcup_{i \in I} R_i \lhd S,$$

a proto $\bigcup_{i \in I} R_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2)$. □

Věta 3.3. *Nechť $\mathcal{E}_3$ je fuzzy relační rovnice typu $R \lhd X = T$. Pak pro každé $i \in I$ platí, že*

$$\textit{pokud } S_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3), \textit{ pak } \bigcap_{i \in I} S_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3).$$

Důkaz. Z předpokladu máme $S_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3)$ pro každé $i \in I$, tedy $R \lhd S_i = T$ pro každé $i \in I$. Pak platí

$$T = \bigcap_{i \in I} (R \lhd S_i) = R \lhd \bigcap_{i \in I} S_i,$$

a proto $\bigcap_{i \in I} S_i \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3)$. □

Předchozí věty ukazují, že pro $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a $\mathcal{E}_3$, definované v příslušných větách, $\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1)$ tvoří úplný spojový polosvaz, $\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2)$ tvoří úplný spojový polosvaz a $\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3)$ tvoří úplný průsekový polosvaz (kdykoliv příslušná $\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_i)$ je neprázdná), vše s ohledem k relaci $\subseteq$.

Nyní potřebujeme vědět způsob, jak popsat všechna řešení z daného polosvazu a k tomu nám pomůžou následující věty.

Věta 3.4. *Nechť $\mathcal{E}_1$ je fuzzy relační rovnice typu $X \circ S = T$ a $R_1, R_2 \in$ Sols($\mathcal{E}_1$) jsou libovolná dvě řešení fuzzy relační rovnice $\mathcal{E}_1$ pro které platí, že $R_1 \subseteq R_2$. Pak pro libovolnou fuzzy relaci $R' \in L^{A \times B}$ platí, že*

$$\textit{jestliže } R_1 \subseteq R' \subseteq R_2, \textit{ pak } R' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1).$$

Důkaz. Věta je důsledkem věty 2.5.,

$$T = R_1 \circ S \subseteq R' \circ S \subseteq R_2 \circ S = T,$$

z čehož plyne $R' \circ S = T$, tedy $R' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1)$. □

Věta 3.5. *Nechť $\mathcal{E}_2$ je fuzzy relační rovnice typu $X \lhd S = T$ a $R_1, R_2 \in Sols(\mathcal{E}_2)$ jsou libovolná dvě řešení fuzzy relační rovnice $\mathcal{E}_2$ pro které platí, že $R_1 \subseteq R_2$. Pak pro libovolnou fuzzy relaci $R' \in L^{A\times B}$ platí, že*

$$\textit{jestliže } R_1 \subseteq R' \subseteq R_2, \textit{ pak } R' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2).$$

Důkaz. Tvrzení plyne z věty 2.5.,

$$T = R_1 \lhd S \subseteq R' \lhd S \subseteq R_2 \lhd S = T,$$

pak $R' \lhd S = T$, což znamená, že $R' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2)$. □

Věta 3.6. *Nechť $\mathcal{E}_3$ je fuzzy relační rovnice typu $X \circ S = T$ a $S_1, S_2 \in Sols(\mathcal{E}_3)$ jsou libovolná dvě řešení fuzzy relační rovnice $\mathcal{E}_3$ pro které platí, že $S_1 \subseteq S_2$. Pak pro libovolnou fuzzy relaci $S' \in L^{A\times B}$ platí, že*

$$\textit{jestliže } S_1 \subseteq S' \subseteq S_2, \textit{ pak } S' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3).$$

Důkaz. Věta vyplývá z věty 2.5.,

$$T = R \lhd S_2 \subseteq R \lhd S' \subseteq R \lhd S_1 = T,$$

tedy $R \lhd S' = T$, což znamená, že $S' \in \mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3)$. □

Pokud jsme tedy schopni vypočítat největší řešení $\hat{R}$ a všechna minimální řešení $\check{R}_i$ pro rovnice $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{E}_2$ a nejmenší řešení $\check{S}$ a všechna maximální řešení $\hat{S}_i$ pro rovnici $\mathcal{E}_3$, pak díky předchozím tvrzením můžeme popsat strukturu všech řešení jako

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_1) &= \bigcup_i \{R' \in L^{A\times B} | \check{R}_i \subseteq R' \subseteq \hat{R}\}, \\
\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_2) &= \bigcup_i \{R' \in L^{A\times B} | \check{R}_i \subseteq R' \subseteq \hat{R}\}, \\
\mathrm{Sols}(\mathcal{E}_3) &= \bigcup_i \{S' \in L^{B\times C} | \check{S} \subseteq S' \subseteq \hat{S}_i\}.
\end{aligned}$$

V následujících kapitolách se budeme zabývat hledáním těchto extremálních řešení.

3.2. Kritéria řešitelnosti

Nyní ukážeme kritéria řešitelnosti fuzzy relačních rovnic, tak jak jsou popsána v [1].

Věta 3.7. *Fuzzy relační rovnice $X \circ S = T$ má řešení, právě tehdy když $(S \lhd T^{-1})^{-1}$ je řešení.*

Důkaz. Musíme ukázat, že pokud $X \circ S = T$ má řešení, pak $(S \lhd T^{-1})^{-1}$ je řešení. Nejdřív si všimněme, že $(S \lhd T^{-1})^{-1} \circ S \subseteq T$.

$$
\begin{aligned}
& ((S \lhd T^{-1})^{-1} \circ S(a,b) = \\
= \; & \bigvee_{b \in B} S(b,c) \otimes \Big(\bigwedge_{c' \in C} S(b,c') \to T(a,c') \Big) \leq \\
\leq \; & \bigvee_{b \in B} S(b,c) \otimes (S(b,c) \to T(a,b)) \leq T(a,c)
\end{aligned}
$$

Navíc pokud R je řešení $X \circ S = T$, potom pro každé $a \in A$ a $b \in B$,

$$\bigwedge_{y \in Y} R(a,b) \otimes S(b,c) \leq T(a,c),$$

a proto, použitím adjunkce, pro každé $y \in Y$ máme $R(a,b) \leq S(b,c) \to T(a,c)$, tedy $R(a,b) \leq \bigvee_{c \in C} S(b,c) \to T^{-1}(c,a)$, což znamená $R(a,b) \leq S \lhd T^{-1}(b,a)$, tedy $R \subseteq (S \lhd T^{-1})^{-1}$. Tedy máme

$$T = R \circ S \subseteq (S \lhd T^{-1})^{-1} \circ S \subseteq T,$$

tedy $(S \lhd T^{-1})^{-1} \circ S = T$ dokazuje, že $(S \lhd T^{-1})^{-1}$ je řešení. $\square$

Věta 3.8. *Fuzzy relační rovnice $X \lhd S = T$ má řešení, právě tehdy když $(T \lhd S^{-1})$ je řešení.*

Důkaz. Musíme ukázat, že pokud $X \lhd S = T$ má řešení, pak $(T \lhd S^{-1})$ je řešení. Nejdřív si všimněme, že $T \subseteq (T \lhd S^{-1}) \lhd S$. Opravdu, z definice a použitím adjunkce, $T \subseteq (T \lhd S^{-1}) \lhd S$ je pravdivé, právě když pro každé a, b, c máme

$$T(a,c) \otimes (T \lhd S^{-1}(a,b)) \leq S(b,c),$$

což je pravda:

$$T(a,c) \otimes (T \lhd S^{-1}(a,b)) \leq T(a,c) \otimes (T(a,c) \to S(b,c)) \leq S(b,c).$$

Navíc pokud R je řešení $X \lhd S = T$, potom pro každé $a \in A$ a $b \in B$,

$$T(a,c) \leq \bigwedge_{b \in B} R(a,b) \to S(b,c),$$

a proto použitím adjunkce pro každé $b \in B$ máme $R(a,b) \leq T(a,c) \to S(b,c)$, tedy $R(a,b) \leq \bigwedge_{c \in C} T(b,c) \to S^{-1}(c,b)$, tedy $R \subseteq T \lhd S^{-1}$. Máme tedy

$$T \subseteq (T \lhd S^{-1}) \lhd S \subseteq R \lhd S = T,$$

tedy $(T \lhd S^{-1}) \lhd S = T$ dokazuje, že $(T \lhd S^{-1})$ je řešení. $\square$

Věta 3.9. *Fuzzy relační rovnice $R \lhd X = T$ má řešení, právě tehdy když $(R^{-1} \circ T)$ je řešení.*

Důkaz. Musíme ukázat, že pokud $R \lhd X = T$ má řešení, pak $(R^{-1} \circ T)$ je řešení. Nejdřív si všimněme, že $T \subseteq R \lhd (R^{-1} \circ T)$. Opravdu, $T \subseteq R \lhd (R^{-1} \circ T)$ je pravdivé, právě když pro každé a, b, c máme $T(a,c) \otimes R(a,b) \lhd (R^{-1} \circ T)(b,c)$, což je evidentně splněno. Navíc, pokud S je řešení $R \lhd X = T$, potom pro každé $a \in A$ a $b \in B$,

$$T(a,c) \leq \bigwedge_{b \in B} R(a,b) \to S(b,c),$$

a tedy, použitím adjunkce, pro každé $b \in B$ máme $R(a,b) \otimes T(a,c) \leq S(b,c)$, tedy $\bigvee_{a \in A} R^{-1}(b,a) \otimes T(a,c) \leq S(b,c)$, tedy $R^{-1} \circ T \subseteq S$. Máme tedy

$$T \subseteq R \lhd (R^{-1} \circ T) \subseteq R \lhd S = T,$$

tedy $R \lhd (R^{-1} \circ T) = T$ dokazuje, že $(R^{-1} \circ T)$ je řešení. $\square$

Předchozí důkazy nám říkají že, pokud $X \circ S = T$ má řešení, pak $(S \lhd T^{-1})^{-1}$ je největší řešení; pokud $X \lhd S = T$ má řešení, pak $(T \lhd S^{-1})$ je největší řešení; pokud $R \lhd X = T$ má řešení, pak $(R^{-1} \circ T)$ je nejmenší řešení.

Dále pro úplnost uvedeme kritéria řešitelnosti pro ostatní typy fuzzy relačních rovnic, které vychází z faktu, že je lze převést na typy z předchozích vět.

Věta 3.10. *Fuzzy relační rovnice $R \circ X = T$ má řešení, právě tehdy když $(R^{-1} \lhd T)$ je řešení.*

Věta 3.11. *Fuzzy relační rovnice $R \rhd X = T$ má řešení, právě tehdy když $(T^{-1} \lhd R)^{-1}$ je řešení.*

Věta 3.12. *Fuzzy relační rovnice* $X \rhd S = T$ *má řešení, právě tehdy když* $(S \circ T^{-1})^{-1}$ *je řešení.*

Věta 3.13. *Fuzzy relační rovnice* $X \Box S = T$ *má řešení, právě tehdy když* $(T \lhd S^{-1}) \cap (S \circ T^{-1})^{-1}$ *je řešení.*

Věta 3.14. *Fuzzy relační rovnice* $R \Box X = T$ *má řešení, právě tehdy když* $(R^{-1} \circ T) \cap (T^{-1} \lhd R)^{-1}$ *je řešení.*

3.3. Minimální řešení

Pokud uspořádaná množina pravdivostních hodnot $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ je lineárně uspořádaná (tzn. pro každé $a, b \in L$ platí buď $a \leq b$, nebo $b \leq a$), pak pro fuzzy relační rovnici lze vypočíst i množinu minimálních (maximálních) řešení. V této kapitole budeme tedy předpokládat, že pravdivostní hodnoty v reziduovaném svazu jsou lineárně uspořádané. Při výpočtu se vychází z metod uvedených v [4].

Nejprve si zavedeme operace, které budeme později potřebovat :

$$\begin{aligned} a \twoheadrightarrow b &= \bigwedge \{c \in L | b \leq a \otimes c\}, \\ a \circlearrowleft b &= \bigwedge \{c \in L | c \to b \leq a\}, \\ a \circlearrowright b &= \bigvee \{c \in L | a \to c \leq b\} \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme rovnici ve tvaru

$$\bigvee_{b \in B} (X(b) \otimes S(b)) = \tau,$$

kde $S \in L^B$, $\tau \in L$ a úkolem je vypočítat $X \in L^B$. Rovnice by se dala přepsat do tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $X \circ S = T$, kde $X \in L^{\{a\} \times B}$, $S \in L^{B \times \{c\}}$, $T \in L^{\{a\} \times \{c\}}$ a pro každé $b \in B$ platí $X(b) = X(a, b)$, $S(b) = S(b, c)$ a $\tau = T(a, c)$. Pak jsme schopni zjistit největší řešení (viz 3.2.). Jak zjistit všechna minimální řešení nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.1. *Pokud rovnice ve tvaru* $\bigvee_{b \in B} (X(b) \otimes S(b)) = \tau$ *je řešitelná, pak minimální řešení jsou prvky množiny*

$$O = \{M_k \in L^B | \tau \leq S(k) \text{ a } M_k \subseteq G\},$$

kde G *je největší řešení a fuzzy množina* M_k *pro* $k \in B$ *je definována jako*

$$M_k(b) = \begin{cases} S(k) \twoheadrightarrow \tau & \text{pro } b = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Dále uvažujme soustavu rovnic

$$E_c: \ \bigvee_{b\in B}(X(b)\otimes S_c(b)) = \tau_c,$$

kde $S_c \in L^B$, $\tau_c \in L$ pro každé $c \in C$ a úkolem je opět vypočítat $X \in L^B$. Tato soustava by se opět dala přepsat tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $X \circ S = T$, kde $X \in L^{\{a\}\times B}$, $S \in L^{B\times C}$, $T \in L^{\{a\}\times C}$ a pro každé $b \in B$ a $c \in C$ platí $X(b) = X(a,b)$, $S_c(b) = S(b,c)$ a $\tau_c = T(a,c)$. Pak jsme opět schopni zjistit největší řešení, a jak zjistit všechna minimální řešení, nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.2. *Pokud soustava rovnic ve tvaru $E_c: \bigvee_{b\in B}(X(b)\otimes S_c(b)) = \tau_c$, kde $c \in C$, je řešitelná, pak je řešitelná každá z rovnic E_c a minimální řešení jsou minimální prvky množiny*

$$P = \{\bigcup_{c\in C} N_c | N_c \in O_c \ \text{a} \ N_c \subseteq G\},$$

kde G je největší řešení a O_c je množina minimálních řešení rovnice E_c.

Nyní vše vyjádříme fuzzy relacemi:

- G je největší řešení fuzzy relační rovnice $X \circ S = T$.
- $O_{a,c} = \{M_{k,c} \in L^B | T(a,c) \leq S(k,c)$ a $M_{k,c}(b) \subseteq G(a,b)$ pro každé $b \in B\}$
- $M_{k,c}(b) = \begin{cases} S(k,c) \twoheadrightarrow \tau & \text{pro } b = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
- P_a je množina minimálních prvků množiny

$$\{\bigcup_{c\in C} N_{a,c} | N_{a,c} \in O_{a,c} \ \text{a} \ N_{a,c}(b) \subseteq G(a,b) \ \text{pro každé} \ b \in B\}.$$

Z předchozích tvrzení můžeme nakonec vyslovit:

Věta 3.15. *Pokud fuzzy relační rovnice $X \circ S = T$ má řešení, pak všechna minimální řešení jsou dána množinou*

$$\check{R} = \{X \in L^{A\times B} | X(a,b) = Q_a(b) \ \text{a} \ Q_a \in P_a\}.$$

Dále předpokládejme rovnici ve tvaru

$$\bigwedge_{b\in B}(X(b) \to S(b)) = \tau,$$

kde $S \in L^B$, $\tau \in L$ a úkolem je vypočítat $X \in L^B$. Rovnice by se dala přepsat do tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $X \triangleleft S = T$, kde $X \in L^{\{a\}\times B}$, $S \in L^{B\times\{c\}}$, $T \in L^{\{a\}\times\{c\}}$ a pro každé $b \in B$ platí $X(b) = X(a,b)$, $S(b) = S(b,c)$ a $\tau = T(a,c)$. Pak jsme schopni zjistit největší řešení (viz 3.2.). Jak zjistit všechna minimální řešení nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.3. *Pokud rovnice ve tvaru $\bigwedge_{b\in B}(X(b) \to S(b)) = \tau$ je řešitelná, pak minimální řešení jsou prvky množiny*

$$O = \{M_k \in L^B | S(k) \leq \tau \text{ a } M_k \subseteq G\},$$

kde G je největší řešení a fuzzy množina M_k pro $k \in B$ je definována jako

$$M_k(b) = \begin{cases} \tau \circlearrowleft S(k) & \text{pro } b = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Dále uvažujme soustavu rovnic

$$E_c : \bigwedge_{b\in B}(X(b) \to S_c(b)) = \tau_c,$$

kde $S_c \in L^B$, $\tau_c \in L$ pro každé $c \in C$ a úkolem je opět vypočítat $X \in L^B$. Tato soustava by se opět dala přepsat tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $X \circ S = T$, kde $X \in L^{\{a\}\times B}$, $S \in L^{B\times C}$, $T \in L^{\{a\}\times C}$ a pro každé $b \in B$ a $c \in C$ platí $X(b) = X(a,b)$, $S_c(b) = S(b,c)$ a $\tau_c = T(a,c)$. Pak jsme opět schopni zjistit největší řešení, a jak zjistit všechna minimální řešení, nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.4. *Pokud soustava rovnic ve tvaru $E_c : \bigwedge_{b\in B}(X(b) \to S_c(b)) = \tau_c$, kde $c \in C$, je řešitelná, pak je řešitelná každá z rovnic E_c a minimální řešení jsou minimální prvky množiny*

$$P = \{\bigcup_{c\in C} N_c | N_c \in O_c \text{ a } N_c \subseteq G\},$$

kde G je největší řešení a O_c je množina minimálních řešení rovnice E_c.

Nyní vše vyjádříme fuzzy relacemi:

- G je největší řešení fuzzy relační rovnice $X \triangleleft S = T$.
- $O_{a,c} = \{M_{k,c} \in L^B | S(k,c) \leq T(a,c)$ a $M_{k,c}(b) \subseteq G(a,b)$ pro každé $b \in B\}$
- $M_{k,c}(b) = \begin{cases} T(a,c) \circlearrowleft S(k,c) & \text{pro } b = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

- P_a je množina minimálních prvků množiny

$$\{\bigcup_{c\in C} N_{a,c} | N_{a,c} \in O_{a,c} \text{ a } N_{a,c}(b) \subseteq G(a,b) \text{ pro každé } b \in B\}.$$

Z předchozích tvrzení můžeme nakonec vyslovit:

Věta 3.16. *Pokud fuzzy relační rovnice $X \lhd S = T$ má řešení, pak všechna minimální řešení jsou dána množinou*

$$\check{R} = \{X \in L^{A\times B} | X(a,b) = Q_a(b) \textit{ a } Q_a \in P_a\}.$$

Dále předpokládejme rovnici ve tvaru

$$\bigwedge_{b\in B} (R(b) \to X(b)) = \tau,$$

kde $R \in L^B$, $\tau \in L$ a úkolem je vypočítat $X \in L^B$. Rovnice by se dala přepsat do tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $R \lhd X = T$, kde $R \in L^{\{a\}\times B}$, $X \in L^{B\times\{c\}}$, $T \in L^{\{a\}\times\{c\}}$ a pro každé $b \in B$ platí $R(b) = R(a,b)$, $X(b) = X(b,c)$ a $\tau = T(a,c)$. Pak jsme schopni zjistit nejmenší řešení (viz 3.2.). Jak zjistit všechna maximální řešení nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.5. *Pokud rovnice ve tvaru $\bigwedge_{b\in B}(R(b) \to X(b)) = \tau$ je řešitelná, pak maximální řešení jsou prvky množiny*

$$O = \{M_k \in L^B | (R(k) \to 0) \leq \tau \textit{ a } K \subseteq M_k\},$$

kde K je nejmenší řešení a fuzzy množina M_k pro $k \in B$ je definována jako

$$M_k(b) = \begin{cases} R(k) \circlearrowleft \tau & \textit{pro } b = k \\ 1 & \textit{jinak} \end{cases}.$$

Dále uvažujme soustavu rovnic

$$E_a: \ \bigwedge\nolimits_{b\in B}(R_a(b) \to X(b)) = \tau_a,$$

kde $R_a \in L^B$, $\tau_a \in L$ pro každé $a \in A$ a úkolem je opět vypočítat $X \in L^B$. Tato soustava by se opět dala přepsat tvaru s fuzzy relacemi a to následovně: $R \lhd X = T$, kde $R \in L^{A\times B}$, $X \in L^{B\times\{c\}}$, $T \in L^{A\times\{c\}}$ a pro každé $a \in A$ a $b \in B$ platí $R_a(b) = R(a,b)$, $X(b) = X(b,c)$ a $\tau_a = T(a,c)$. Pak jsme opět schopni zjistit nejmenší řešení, a jak zjistit všechna maximální řešení, nám říká následující tvrzení.

Lemma 3.6. *Pokud soustava rovnic ve tvaru* $E_a : \bigwedge_{b\in B}(R_a(b) \to X(b)) = \tau_a$, *kde* $a \in A$, *je řešitelná, pak je řešitelná každá z rovnic* E_a *a maximální řešení jsou maximální prvky množiny*

$$P = \{\bigcap_{a\in A} N_a | N_a \in O_a \ a \ K \subseteq N_a\},$$

kde K *je nejmenší řešení a* O_a *je množina maximálních řešení rovnice* E_a.

Nyní vše vyjádříme fuzzy relacemi:

- K je nejmenší řešení fuzzy relační rovnice $R \lhd X = T$.
- $O_{a,c} = \{M_{a,k} \in L^B | (R(a,k) \to 0) \le T(a,c)$ a $K(b,c) \subseteq M_{a,k}(b)$ pro každé $b \in B\}$
- $M_{a,k}(b) = \begin{cases} R(a,k) \circlearrowleft T(a,c) & \text{pro } b = k \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$
- P_c je množina minimálních prvků množiny

$$\{\bigcap_{a\in A} N_{a,c} | N_{a,c} \in O_{a,c} \text{ a } K(b,c) \subseteq N_{a,c}(b) \text{ pro každé } b \in B\}.$$

Z předchozích tvrzení můžeme nakonec vyslovit:

Věta 3.17. *Pokud fuzzy relační rovnice* $R \lhd X = T$ *má řešení, pak všechna maximální řešení jsou dána množinou*

$$\hat{S} = \{X \in L^{B\times C} | X(b,c) = Q_c(b) \ a \ Q_c \in P_c\}.$$

3.4. Shrnutí

Dověděli jsme se, že všechna řešení dané fuzzy relační rovnice tvoří spojový (průsekový) polosvaz, za jaké podmínky je rovnice řešitelná, a že ona podmínka nám říká, jak vypadá největší (nejmenší) řešení. Dále pokud je reziduovaný svaz lineárně uspořádaný, pak jsme schopni vypočítat množinu minimálních (maximálních) řešení, a jelikož jsme si dokázali, a tedy vypočítat všechna řešení dané fuzzy relační rovnice. Nakonec uvedeme příklad pro demonstraci výpočtu všech řešení.

$\triangleright$ PŘÍKLAD 3.1. Uvažujme pětiprvkovou Łukasiewiczovu strukturu jako reziduovaný svaz, $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$ a mějme

$$S = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a chceme vypočítat všechna řešení fuzzy relační rovnice

$$X \circ S = T$$

. Nejprve podle věty 3.7. ověříme, jestli je rovnice řešitelná.

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= (S \lhd T^{-1})^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{R} \circ S &= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = T
\end{aligned}$$

Rovnice je tedy řešitelná, a jelikož je pětiprvková Łukasiewiczova struktura lineárně uspořádaná můžeme vypočítat množinu minimálních řešení. Abychom ji ale mohli vypočítat potřebujeme vědět, jak vypadají množiny $O_{1,1}$, $O_{1,2}$ a P_1.

$$\begin{aligned}
O_{1,1} &= \{\begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} \\
O_{1,2} &= \{\begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}\} \\
P_1 &= \{\begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}\}
\end{aligned}$$

Minimální řešení jsou tedy podle věty3.15.

$$\begin{aligned}
\check{R}_1 &= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 0 \end{pmatrix} \text{ a} \\
\check{R}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nakonec množina všech řešení je

$$\bigcup_{i \in \{1,2\}} \{R' \in L^{A \times B} | \check{R}_i \subseteq R' \subseteq \hat{R}\}$$

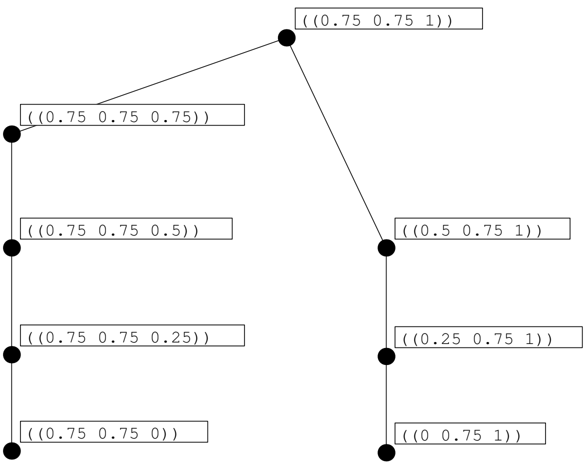
a je zobrazena na obrázku 3.. □

4. Uživatelská příručka

Fuzzy relační rovnice jsem implementoval jako sadu funkcí pro programovací jazyk Common Lisp.

Funkce si je možné vyzkoušet v programu LispWorks Personal Edition 6.0.1, který lze zdarma stáhnout na `http://www.lispworks.com/downloads/`. Nejprve je potřeba načíst funkce. Načtení se provede napsáním výrazu `(load` <*cesta k souboru load.lisp*>`)` do Listeneru a následným potvrzením. Pak je už možné v Listeneru vyhodnocovat funkce pro řešení fuzzy relačních rovnic.

V následujícím textu budu popisovat argumenty funkce s n argumenty následovně: `(název funkce` <*popis 1. argumentu*> <*popis 2. argumentu*> `...`<*popis n-tého argumentu*>`)`.



Obrázek 3. Uspořádaná množina všech řešení fuzzy relační rovnice

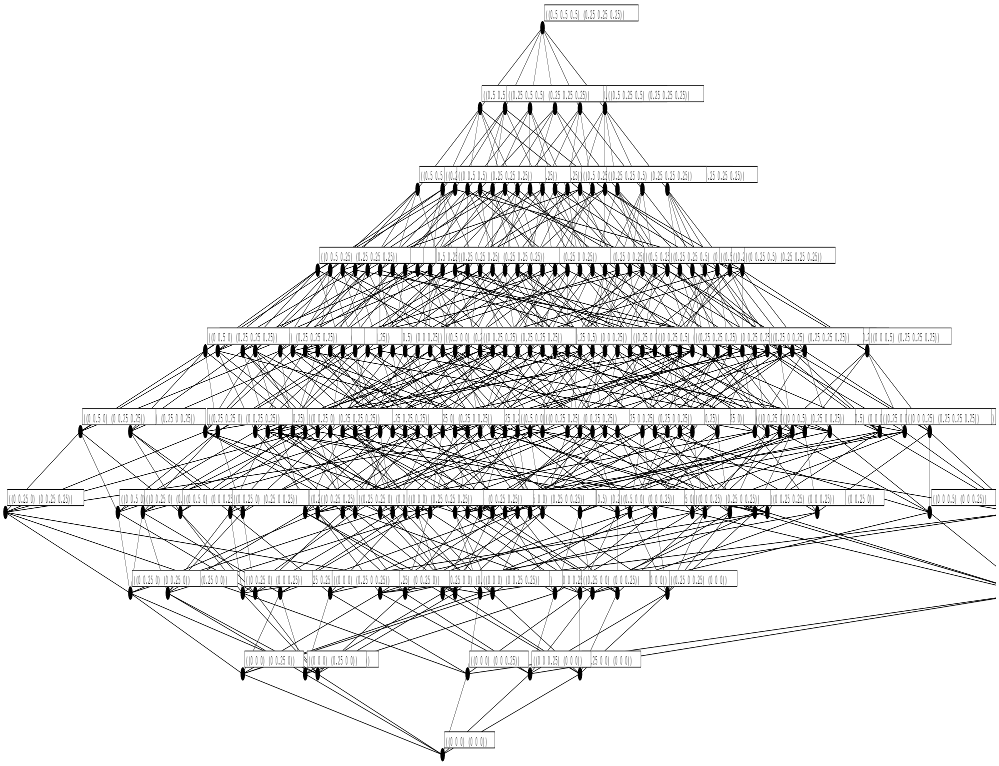
4.1. Reziduovaný svaz

Základem je reziduovaný svaz, který je uložen v globální proměnné `*res-lattice*`. Načítat jiné struktury lze pomocí `(make-res-lattice` <*řetězec se zakódovaným uspořádáním*> <*řetězec se zakódovanou multiplikací*> <*velikost svazu*>`)`. Formát zakódování vychází z [3].

Předpokládáme, že množina pravdivostních hodnot obsahuje `0` a `1` jako nejmenší a největší prvek a další prvky svazu jsou kódovány velkými písmeny `A,B,...` Uspořádání $\leq$ na $L = \{\texttt{0,A,...,1}\}$ je kódováno jako vektor obsahující `0` a `1` reprezentující hodnoty ve vnitřním trojúhelníku horní trojúhelníkové matice sousednosti, ve které řádky a sloupce odpovídají prvkům z L v následujícím pořadí: `0, A, ..., 1`. Prvních $n-3$ hodnot v zakódování určuje jestli $\texttt{A}\leq\texttt{B}$, $\texttt{A}\leq\texttt{C}$, $\texttt{A}\leq\texttt{D},\ldots$; dalších $n-4$ hodnot v zakódování určuje jestli $\texttt{B}\leq\texttt{C}$, $\texttt{B}\leq\texttt{D},\ldots$, a tak dále. Multiplikace $\otimes$ je kódována vektorem výsledků $a \otimes b$, ve kterém přeskočíme triviální výsledky jako $a\otimes\texttt{0}$, $a\otimes\texttt{1}$, atd. Navíc díky komutativitě $\otimes$, vektor obsahuje pouze výsledky $a \otimes b$, kde $a \leq b$. Prvních $n-2$ hodnot v zakódování určuje výsledky operací $\texttt{A}\otimes\texttt{A}$, $\texttt{A}\otimes\texttt{B}$, $\texttt{A}\otimes\texttt{C},\ldots$; dalších $n-3$ hodnot v zakódování určuje výsledky operací $\texttt{B}\otimes\texttt{B}$, $\texttt{B}\otimes\texttt{C},\ldots$, a tak dále.

▷ Příklad 4.1. Chceme zakódovat pětiprvkový reziduovaný svaz s uspořádáním a multiplikací danými v tabulce 2.. Pak zakódování uspořádání je `101` a zakódování multiplikace je `00ABCD`. □

Přípustné pravdivostní hodnoty jsou uloženy v seznamu v globalní proměnné `*truth-degs*`. Pořadí hodnot v seznamu odpovídá zakódovaným tabulkám. V případě tabulky 2. a seznamu `'(f d x 6 9)` v globalní proměnné `*truth-degs*` by např. hodnota `d` odpovídala hodnotě `A` v tabulce a hodnota `9` by odpovídala hodnotě `1` v tabulce. Je důležité, aby seznam v proměnné



Obrázek 4. Uspořádaná množina, která obsahuje 216 řešení.

`*truth-degs*` byl tak dlouhý, jako je velikost reziduovaného svazu. K dispozici je funkce `(truth-degs` <*velikost seznamu*>`)`, která vygeneruje `'(0 A B C ...1)`, kde délka seznamu je z rozsahu 2-28, což může sloužit jako seznam přípustných pravdivostních hodnot.

▷ Příklad 4.2. Prostředí s pětiprvkovovou Gödelovou strukturou, kde $L = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

```
(let ((*res-lattice* (make-res-lattice "111""AAABBC"5))
      (*truth-degs* '(0 0.25 0.5 0.75 1)))
  ...)
```

□

4.2. Fuzzy relace

Fuzzy relace se vytváří pomocí funkce `(rel-o2i` <*matice*>`)`, jejíž argument je matice reprezentující relaci. Matice je definovaná jako seznam řádků, kde každý řádek je seznam pravdivostních hodnot z `*truth-degs*`. Opačný proces, tedy z fuzzy relace na matici, lze provést funkcí `(rel-i2o` <*fuzzy relace*>`)`.

$\leq$	0	A	B	C	1
0	1	1	1	1	1
A	0	1	1	0	1
B	0	0	1	1	1
C	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1

$\otimes$	0	A	B	C	1
0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	A	A
B	0	0	B	C	B
C	0	A	C	D	C
D	0	A	B	C	1

Tabulka 2. Tabulka se zvýrazněným zakódováním reziduovaného svazu.

Fuzzy relace lze skládat pomocí `(circ R S)` pro $R \circ S$, `(subp R S)` pro $R \lhd S$, `(supp R S)` pro $R \rhd S$ a `(sqr R S)` pro $R \square S$.

▷ Příklad 4.3. Vypočtení fuzzy relace vzniklé složením dvou fuzzy relací, kde struktura pravdivostních hodnot je stejná jako předchozím příkladě.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

```
(let ((*res-lattice* (make-res-lattice "111""AAABBC"5))
      (*truth-degs* '(0 0.25 0.5 0.75 1))
      (r1 (rel-o2i '((0 0.25) (0.5 0.5))))
      (r2 (rel-o2i '((0.5 0.75 1) (0 0.25 0.75)))))
  (rel-i2o (circ r1 r2)))
```

□

4.3. Řešení fuzzy relačních rovnic

Funkce pro řešení fuzzy relačních rovnic je `(solve` *<skládaná fuzzy relace> <výsledná fuzzy relace> <klíč :left nebo :right podle toho na které straně je neznámá fuzzy relace> <jeden z klíčů :circ, :subp, :supp, :sqr podle typu skládání>*`)`.

▷ Příklad 4.4. vyřešení (nalezení největšího řešení) fuzzy relační rovnice

$$X \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

```
(let ((*res-lattice* (make-res-lattice "111""AAABBC"5))
      (*truth-degs* '(0 0.25 0.5 0.75 1))
      (r1 (rel-o2i '((0.5 0.75 1) (0 0.25 0.75))))
      (r2 (rel-o2i '((0 0.25) (0.5 0.5)))))
  (rel-i2o (solve r1 r2 :left :circ)))
```

□

4.4. Minimální a všechny řešení fuzzy relační rovnice

Pokud reziduovaný svaz je lineárně uspořádaný, lze vypočítat seznam minimálních řešení funkcí `(offshoots` *<skládaná fuzzy relace> <výsledná fuzzy relace> <klíč :left nebo :right podle toho na které straně je neznámá fuzzy relace> <jeden z klíčů :circ, :subp, :supp, :sqr podle typu skládání>*`)` a seznam všech řešení funkcí `(all-sols` *<skládaná fuzzy relace> <výsledná fuzzy relace> <klíč :left nebo :right podle toho na které straně je neznámá fuzzy relace> <jeden z klíčů :circ, :subp, :supp, :sqr podle typu skládání>*`)`.

▷ Příklad 4.5. nalezení všech řešení fuzzy relační rovnice

$$X \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

```
(let ((*res-lattice* (make-res-lattice "111""AAABBC"5))
      (*truth-degs* '(0 0.25 0.5 0.75 1))
      (r1 (rel-o2i '((0.5 0.75 1) (0 0.25 0.75))))
      (r2 (rel-o2i '((0 0.25) (0.5 0.5)))))
  (mapcar 'rel-i2o (all-sols r1 r2 :left :circ)))
```

□

Funkcí `(latvisxml` *<cesta k souboru> <skládaná fuzzy relace> <výsledná fuzzy relace> <klíč :left nebo :right podle toho na které straně je neznámá fuzzy relace> <jeden z klíčů :circ, :subp, :supp, :sqr podle typu skládání>*`)`, lze vygenerovat soubor obsahující relaci pokrytí množiny všech řešení fuzzy relační rovnice v xml formátu. Soubor jde otevřít v programu LatVis verze 0.5.3 [5], který umí zobrazit uspořádanou množinu všech řešení. Všechny obrázky v této práci jsou vytvořené pomocí programu LatVis. Na obrázku 3. je zobrazena uspořádaná množina všech řešení fuzzy relační rovnice. Formát vygenerovaného souboru je znázorněn níže.

```
<?xml version="1.0"?>
<ordered_set data_type="array">
<elements>
<element id="1"name="matice prvního řešení">
</element>
⋮
<element id="n"name="matice n-tého řešení">
</element>
```

```
</elements>
<orders>
<order>
<pred id="id řešení a"/>
<succ id="id řešení pokrývající řešení a"/>
</order>
⋮
</orders>
</ordered_set>
```

5. Dokumentace zdrojového kódu

Sada funkcí pro programovací jazyk Common Lisp byla vytvořena v prostředí LispWorks Personal Edition 6.0.1 na operačním systému Windows 7 Home Premium SP1. Jinde odzkoušena nebyla.

5.1. Reziduovaný svaz

Reziduovaný svaz je ve formě třídy `residuated-lattice` a při vytvoření instance se vytvoří tabulky všech operací. Je zde použito líné vyhodnocování, tedy vypočítaní hodnoty se provede, až při přístupu na dané místo v tabulce. Použití líného vyhodnocení je vhodné, jelikož ne vždy se použijí všechny operace mezi všemi prvky reziduovaného svazu a výpočet je v případě větších reziduovaných svazů je docela náročný. Hodnoty v tabulce jsou čísla od 0 do velikosti svazu zmenšeného o jedničku reprezentující hodnoty ze svazu jako indexy do tabulky. Dále už jen stručný výčet hlavních funkcí pracujících s reziduovaným svazem:

- (lat-<= a b res-lat) – relace $a \leq b$
- (lat->= a b res-lat) – relace $a \geq b$
- (otimes a b res-lat) – operace $a \otimes b$
- (res a b res-lat) – operace $a \to b$
- (inf a b res-lat) – operace $a \wedge b$
- (sup a b res-lat) – operace $a \vee b$
- (load-lattice file lattice-size) – viz 4.1.
- (make-res-lattice str-order str-mult size) – viz 4.1.

5.2. Fuzzy relace

Fuzzy relace je reprezentována třídou `fuzzy-relation`, která nese informace o matici, která ji reprezentuje, a reziduovaném svazu, z něhož jsou hodnoty v matici. Hodnoty jsou stále reprezentovány indexy do tabulky. Operace skládání jsou popsány v 4.2..

5.3. Fuzzy relační rovnice

Funkce pro práci s fuzzy relačními rovnicemi jsou již popsány v 4. a k výpočtu se využívá pouze poznatků z 3..

Za zmínku stojí pouze výpočet relace pokrytí pro výstup do xml, který je implementován naivním způsobem, kdy se postupuje od minimálních (maximálních) řešení k největšímu (nejmenšímu) a pro každé řešení se počítají všichni horní (dolní) sousedé. Pak se pro každého horního (dolního) souseda zjišťuje, jestli už byl někdy předtím vypočítán, a v tom případě se zaregistruje s novým ID, a pak se přiřadí jako horní (dolní) soused jeho ID.

Závěr

Výsledkem je sada funkcí pro řešení fuzzy relačních rovnic, která se dá použít pro teoretické účely, nebo pro konstrukci jednoduchého fuzzy relačního systému. Dalším vylepšením by bylo naprogramování výpočtu přibližných řešení, omezených řešení nebo řešení fuzzy relační rovnice typu $R * X * S = T$.

Conclusions

The result is set of functions for solving fuzzy relational equations which may be used for theoretical purposes or for construction of a simple fuzzy relational system. Further improvement could be to program the computation of approximate solutions, limited solutions or solving fuzzy relational equations of type $R * X * S = T$.

Reference

[1] R. Belohlavek, Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles, Kluwer, Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.

[2] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Prentice-Hall, 1995.

[3] V. Vychodil, http://upcase.inf.upol.cz/order/frldescr.pdf, 2012.

[4] D. Dubois, H. Prade, Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets, Springer, 2000.

[5] J. Outrata, http://phoenix.inf.upol.cz/~outrata/latvis/, 2012.

A. Obsah přiloženého CD

Na přiloženém CD, naleznete všechny součásti této práce.

- Adresář `doc` obsahuje dokumentaci této práce a zdrojový kód dokumentace.
- Adresář `src` obsahuje zdrojové kódy programu.
- Soubor `readme.txt` obsahuje popis jak vyzkoušet sadu funkcí.