

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

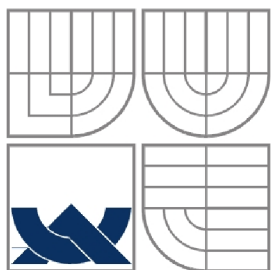
MODELOVÁNÍ LETADLA – KINEMATIKA A DYNAMIKA
LETU LETADLA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

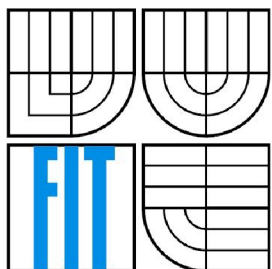
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JIŘÍ KUTAL

BRNO 2008



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

MODELOVÁNÍ LETADLA – KINEMATIKA A DYNAMIKA LETU LETADLA

AIRCRAFT MODELLING – THE KINEMATICS AND DYNAMICS OF AIRCRAFT MOTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JIŘÍ KUTAL

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Doc. Ing. JIŘÍ KUNOVSKÝ, CSc.

BRNO 2008

Vysoké učení technické v Brně - Fakulta informačních technologií

Ústav inteligentních systémů

Akademický rok 2007/2008

Zadání bakalářské práce

Řešitel: **Kutal Jiří**

Obor: Informační technologie

Téma: **Modelování letadla - kinematika a dynamika pohybu letadla**

Kategorie: Modelování a simulace

Pokyny:

1. Seznamte se s problematikou modelování spojitých systémů a se základními principy teorie řízení.
2. Prostudujte problematiku kinematiky pohybu letadla.
3. Prostudujte problematiku dynamiky pohybu letadla a vytvořte simulační model chování pohybu letadla.
4. Pro vytvoření simulačního modelu použijte metodu Taylorovy řady.
5. Ověřte správnost vytvořeného modelu srovnáním s dostupnými materiály.

Literatura:

- Podle pokynů vedoucího

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:

- Body 1 a 2

Podrobné závazné pokyny pro vypracování bakalářské práce naleznete na adrese <http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Technická zpráva bakalářské práce musí obsahovat formulaci cíle, charakteristiku současného stavu, teoretická a odborná východiska řešených problémů a specifikaci etap (20 až 30% celkového rozsahu technické zprávy).

Student odevzdá v jednom výtisku technickou zprávu a v elektronické podobě zdrojový text technické zprávy, úplnou programovou dokumentaci a zdrojové texty programů. Informace v elektronické podobě budou uloženy na standardním nepřepisovatelném paměťovém médiu (CD-R, DVD-R, apod.), které bude vloženo do písemné zprávy tak, aby nemohlo dojít k jeho ztrátě při běžné manipulaci.

Vedoucí: **Kunovský Jiří, doc. Ing., CSc., UITS FIT VUT**

Datum zadání: 1. listopadu 2007

Datum odevzdání: 14. května 2008

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií
Ústav inteligentních systémů
612 66 Brno, Božetěchova 2

doc. Dr. Ing. Petr Hanáček
vedoucí ústavu

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá modelováním letu letadla. V první části práce jsou rozebrány základní pojmy týkající se modelování spojitého systému, principů teorie řízení, lineárních systémů, zpětnovazebních soustav a základních typů regulátorů. Dále jsou v této práci zmíněny matematické základy týkající se modelování, a to diferenciální rovnice a Taylorova řada. Čtenář se dočte i o A/D a D/A převodnicích. Poslední nejrozsáhlejší část práce je věnovaná dynamice letu letadla a simulaci jeho pohybových rovnic v programu TKSL.

Klíčová slova

Modelování letadla, dynamika pohybu letadla, spojité systémy, teorie řízení, Taylorova řada, A/D a D/A převodník, program TKSL.

Abstract

This bachelor's thesis is focused on general aircraft motion. Main terms connected to modelling continuous systems, principles of control theory, linear systems, feedback systems and basic types of regulators are analyzed in the first part of the thesis. Second part mentions mathematical basics connected to modelling, mainly focused on differential equations and Taylor series. Reader can also find out about A/D and D/A convertors. The last part of this bachelor's thesis is dedicated to aircraft motion and the simulation of its kinetic equations in TKSL program.

Keywords

Modelling of aircraft, aircraft motion, continuous systems, control theory, Taylor series, A/D and D/A convertor, TKSL program.

Citace

Jiří Kutal: Modelování letadla – kinematika a dynamika pohybu letadla, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2008

Modelování letadla – kinematika a dynamika pohybu letadla

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. Ing. Jiřího Kunovského, CSc., a že jsem uvedl všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....
Jiří Kutal
12.5.2008

Poděkování

Děkuji panu Doc. Ing. Jiřímu Kunovskému, CSc. za vstřícné konzultace, projevenou ochotu a odbornou pomoc, kterou mi poskytl při psaní této bakalářské práce.

© Jiří Kutal, 2008.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

Obsah.....	1
1 Úvod.....	3
2 Modelování spojitého systému.....	4
2.1 Základní pojmy.....	4
2.2 Princip modelování a simulace.....	4
2.3 Spojité modelování.....	5
3 Principy teorie řízení.....	6
3.1 Vnější popis spojitého lineárního systému.....	6
3.2 Vnitřní popis spojitého lineárního systému.....	7
3.2.1 Zapojení funkčních bloků ve schématu.....	8
3.3 Zpětnovazební soustavy.....	10
3.3.1 Stabilita zpětnovazebních soustav.....	11
3.4 Regulátory.....	11
3.4.1 P-regulátor.....	12
3.4.2 I-regulátor.....	12
3.4.3 D-regulátor.....	13
3.4.4 Složené typy regulátorů.....	13
4 Matematický úvod do problematiky.....	14
4.1 Diferenciální rovnice.....	14
4.2 Řešení diferenciálních rovnic – Taylorova metoda.....	14
4.2.1 Taylorova řada.....	15
4.3 Převod rovnic vyššího řádu na soustavu rovnic prvního řádu.....	15
4.3.1 Metoda snižování řádu derivace.....	15
5 Diskrétní teorie řízení – A/D a D/A převodník.....	17
5.1 Číslicové řídicí systémy.....	17
5.1.1 A/D převodníky.....	18
5.1.2 D/A převodníky.....	20
6 Program TKSL.....	22
7 Systémy řízení letu.....	23
7.1 Psychické procesy při řízení letu.....	23
7.2 Stupně automatizace řízení.....	24
7.2.1 Poloautomatické řízení.....	24
7.2.2 Automatické řízení.....	24

8 Dynamické vlastnosti letadla.....	25
8.1 Letadlové souřadné soustavy.....	25
8.1.1 Převod ze zemské soustavy do letadlové.....	26
8.1.2 Převod z aerodynamické souřadné soustavy do letadlové.....	26
8.2 Pohybové rovnice letadla.....	29
8.3 Podélný pohyb letadla.....	31
8.3.1 Chování soustavy podélného pohybu v programu TKSL.....	31
8.4 Stranový pohyb letadla.....	36
8.4.1 Chování soustavy stranového pohybu v programu TKSL.....	37
9 Závěr.....	45
Literatura.....	46
Seznam příloh.....	47

1 Úvod

V současné době se stává cestování letadlem hlavním způsobem osobní dopravy, a to jak na vzdálenější distance, tak i na relativně blízká místa. Kde jsou ty časy, kdy existovalo několik leteckých společností nabízejících lety mezi hlavními městy určitých zemí. Nejednen cestující v sedadle letadla přemýšlí, jak je možné, že letadlo letí, jak je asi složité letadlo řídit a kolik nejrůznějších faktorů vlastní let ovlivňuje. Úvod do problematiky létání, a nejen to, obsahuje moje bakalářská práce o modelování letu letadla.

V první části bakalářské práce uvádím pojmy, které se bezprostředně týkají modelování spojitých systémů. Dále se věnuji principům teorie řízení, lineárním systémům, zpětnovazebním soustavám a základním typům regulátorů, které se dají využít například při návrhu autopilota.

Podstatnou část bakalářské práce zabírá simulace pohybů letadla v programu TKSL, kde se dynamický systém popisuje soustavou diferenciálních rovnic a problém je řešen pomocí výpočtu Taylorovou řadou. Čtenář se proto v další části dočte i o diferenciálních rovnicích, převodech diferenciálních rovnic vyššího řádu na rovnice prvního řádu a samozřejmě i o samotné Taylorově metodě a Taylorově rozvoji.

Jelikož se při řešení problematiky modelování letu letadla pohybujeme mezi spojitou a diskrétní podobou, zmiňuji se v této bakalářské práci ve stručnosti o A/D a D/A převodnicích a o problémech objevujících se při převodu signálu z digitálního na analogový a naopak.

V poslední nejrozsáhlejší části práce nastiňuji faktory objevující se v systémech řízení letu a popisují dynamické vlastnosti letadla. Nejdříve se zmiňuji o letadlové souřadné soustavě a úhlech spojených s pohybem letadla ve vzduchu. Následně odvozují a popisují pohybové rovnice podélného a stranového pohybu letadla, ze kterých pak vytvářím model pohybu letadla a simulují jej v programu TKSL.

2 Modelování spojitéch systémů

V této kapitole vymezím a definuji pojmy týkající se modelování jako takového a dále pak pojmy týkající se výhradně modelování spojitéch systémů [2].

2.1 Základní pojmy

Základní pojmy objevující se v problematice modelování, jsou následující:

- **Systém** je soubor elementárních částí (prvků systému), které jsou vzájemně určitým způsobem propojeny, mají mezi sebou vazbu. Systém se dá následovně dělit do několika kategorií dle jasných kritérií. V textu se budu zabývat dynamickými systémy.
- **Dynamický systém** je systém, který mění svůj stav v nějakém čase.
- **Model** je napodobenina systému jiným systémem. Tato bakalářská práce obsahuje napodobování letu letadla pomocí diferenciálních rovnic.
- **Modelování** je proces vytváření jednotlivých modelů systému ze znalostí, které již o daném modelu máme.
- **Simulace** je metoda pomáhající nám získat další znalosti o zkoumaném systému, při níž využíváme experimentování s daným modelem na základě jeho popisu.

2.2 Princip modelování a simulace

Jak už jsem napsal výše, simulace nám pomáhá získat další nové znalosti o zkoumaném systému. Pokud chceme provádět simulaci systému, musíme vytvořit jeho použitelný model, přičemž postupujeme následujícím způsobem:

1. Vytvoříme si **abstraktní model** našeho systému. Vybíráme jen ty vlastnosti, které jsou pro nás důležité. Jeho podobou jsou například diferenciální rovnice nebo bloková schémata.
2. Pokračujeme vytvořením **simulačního modelu**, který vychází z předchozího abstraktního modelu. Rozdíl mezi těmito dvěma modely je pouze ten, že simulační model je spustitelný a dají se na něm vytvářet nejrůznější testy systému.
3. S námi vytvořeným simulačním modelem dále provádíme nejrůznější experimenty, které nám umožňují získávat nové znalosti o systému.

2.3 Spojité modelování

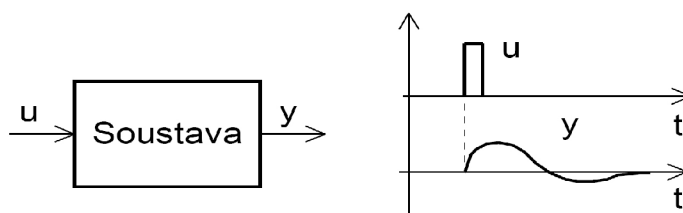
Modely se dají klasifikovat do několika kategorií, to však není cílem této bakalářské práce. My se budeme zajímat pouze o modely spojité. Tyto modely se vyznačují tím, že proměnné obsáhlé v modelu mění svůj stav spojitě v čase t . Popisujeme je třeba diferenciálními rovnicemi nebo blokovými schématy.

Simulace, která se u těchto modelů praktikuje, se nazývá spojitá simulace.

3 Principy teorie řízení

Teorie řízení je v podstatě souhrn poznatků, který nám umožňuje analýzu a syntézu. Můžeme říci, že je to jakýsi návrh vhodných regulátorů v našem systému tak, že naše zpětnovazební soustava je stabilní a má požadované dynamické a matematické chování.

Zavedme si nyní pojem lineární dynamický systém. Pokud na vstup tohoto systému přivedeme např. krátký impuls nebo jednotkový skok, má výstup odlišný průběh, který je závislý na typu systému.



Obr. 3.1 Odezva dynamické soustavy

Na obr. 3.1 je znázorněn jeden z možných průběhů odezvy na vstupní impuls. Zobrazená soustava (systém) je charakterizována proměnnými, které jsou funkcí času.

Systémy obsahují jevy, které umíme popsat díky dvěma metodám. Jedná se o metodu vnitřního a vnějšího popisu. Rozdíl mezi těmito dvěma metodami je následující:

- **Vnitřní popis systému** je takový popis, při kterém vidíme „dovnitř systému“ a můžeme tak zkoumat, jak se veličiny vzájemně ovlivňují.
- **Vnější popis systému** je založen na vztahu vstupních a výstupních veličin.

V následujících kapitolách se budu jednotlivými popisy zabývat podrobněji. Více o této problematice je možno nalézt v literatuře [1].

3.1 Vnější popis spojitých lineárních systémů

Teorie lineárního řízení z hlediska vnějšího popisu systému je založena na používání přenosových funkcí, které nám vyjadřují již zmíněný vztah mezi vstupními a výstupními veličinami.

Lineární systém n -tého řádu je popsán diferenciální rovnicí tvaru

$$y^n + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y' + a_1 y = b_{m+1} r^{(m)} + b_m r^{(m-1)} + \dots + b_2 r' + b_1 r \quad (3.1)$$

kde je $y(t)$ výstup, $r(t)$ vstup a a_i, b_j jsou reálné konstanty.

Za předpokladu, že jsou všechny počáteční podmínky nulové, dostaneme po Laplaceově transformaci algebraickou rovnicí:

$$Y(p)(p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1) = R(p)(b_{m+1} p^m + b_m p^{(m-1)} + \dots + b_2 p + b_1) \quad (3.2)$$

Přenosová funkce $F(p)$ je pak definována jako poměr výstupu $Y(p)$ a vstupu $R(p)$:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{b_{m+1} p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \quad (3.3)$$

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti vyplývá, že stupeň polynomu v čitateli m musí být menší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli n .

Přenosová funkce je dána zlomkem, kde čítec i jmenovatel jsou polynomy komplexní proměnné p , kde $p = \sigma + j\omega$. Jestliže rozložíme oba polynomy na součin kořenových činitelů, dostaneme přenosovou funkci v následujícím tvaru:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (3.4)$$

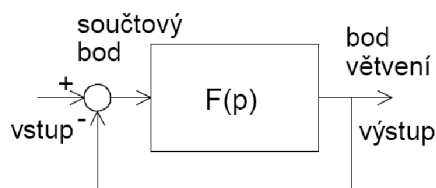
kde p_1, p_2, \dots, p_n jsou tzv. póly přenosové funkce a z_1, z_2, \dots, z_m jsou nuly přenosové funkce $F(p)$. Pro $p = p_i, i = 1, 2, \dots, n$ je hodnota přenosové funkce $F(p) \rightarrow \infty$, pro $p = z_i, j = 1, 2, \dots, m$ je hodnota přenosové funkce $F(p) = 0$.

3.2 Vnitřní popis spojitých lineárních systémů

Jde o nejobecnější popis systému. Jelikož vychází z vnitřních vlastností a dějů v systému, můžeme díky tomuto popisu odhalit vlastnosti, které by nám zůstaly při užití vnějšího popisu utajeny.

V teorii řízení je vnitřní popis založen na blokových schématech regulačních soustav, což je vlastně grafické znázornění přenosových funkcí jednotlivých komponentů systému, které jsou vzájemně propojeny.

Vlastní blokové schéma se skládá z funkčních bloků, bodů větvení a součtových bodů, jak je znázorněno na následujícím obrázku 3.2.



Obr. 3.2 Prvky blokových schémat regulačních soustav

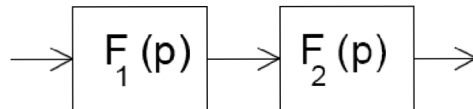
Funkční blok realizuje přenosovou funkci ve směru signálu (šipek). Realizace přenosové funkce spočívá v závislosti výstupu na vstupu.

3.2.1 Zapojení funkčních bloků ve schématu

Existují tři hlavní typy zapojení funkčních bloků v systému, a to zapojení sériové, paralelní a zpětnovazební. Následující obrázky znázorňují způsob zapojení. Ke každému zapojení uvádím i jeho výslednou přenosovou funkci.

Sériové zapojení

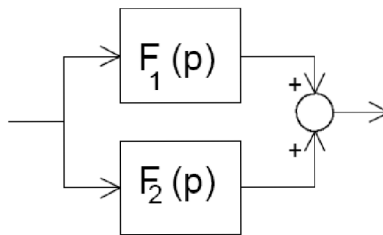
$$F(p) = F_1(p)F_2(p) \quad (3.5)$$



Obr. 3.3 Sériové zapojení funkčních bloků

Paralelní zapojení

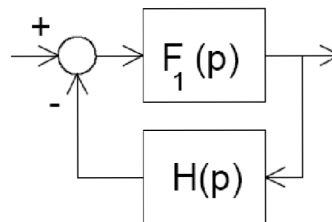
$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) \quad (3.6)$$



Obr. 3.3 Paralelní zapojení funkčních bloků

Záporné zpětnovazební zapojení

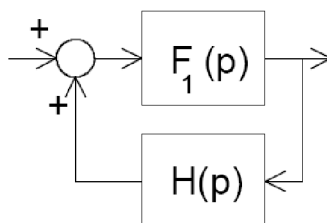
$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1 + F_1(p)H(p)} \quad (3.7)$$



Obr. 3.4 Zpětnovazební zapojení funkčních bloků - záporná zpětná vazba

Kladné zpětnovazební zapojení

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - F_1(p)H(p)} \quad (3.8)$$



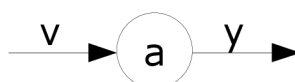
Obr. 3.5 Zpětnovazební zapojení funkčních bloků - kladná zpětná vazba

Dále je důležité také zmínit základní operace v lineárním systému, které jsou taktéž používány k tvorbě blokových schémat. Tyto operace se dělí do dvou skupin. První skupinou jsou **funkční bloky**, jinak bloky bezpaměťové, mezi které patří např. násobení konstantou, funkce sin a cos, +, -, *, / a další. Druhá skupina se nazývá **stavové bloky**. Do stavových bloků patří např. integrátory a derivátory. Tato skupina se vyznačuje tím, že bloky jsou paměťové a vyžadují při simulaci počáteční podmínky.

Nyní bych rád uvedl několik hlavních operací. Jako celek se veškeré operace nazývají blokovou algebrou.

Násobení signálu konstantou

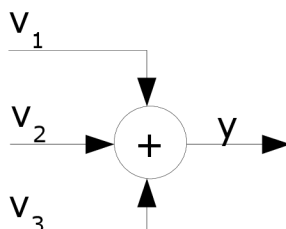
$$y = a \cdot v \quad (3.9)$$



Obr. 3.6 Násobení signálu konstantou

Sčítání signálů

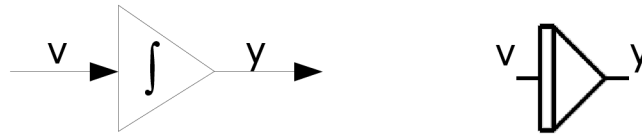
$$y = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (3.10)$$



Obr. 3.7 Sčítání signálů

Integrace signálů

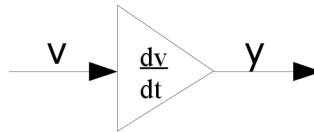
$$y = \int v \cdot dt \quad (3.11)$$



Obr. 3.8 Integrace signálů

Derivace signálů

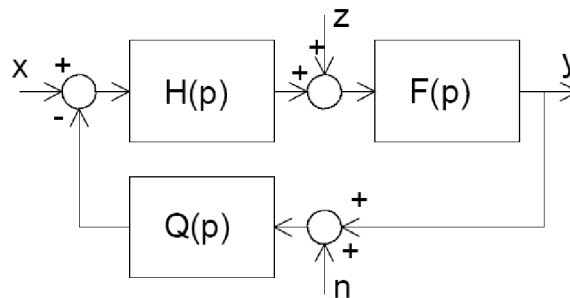
$$y = \frac{dv}{dt} \quad (3.12)$$



Obr. 3.9 Derivace signálů

3.3 Zpětnovazební soustavy

V simulaci systémů se převážně využívají zpětnovazební regulační soustavy, proto se na ně nyní zaměřím podrobněji. V rámci simulace jde o to, že mám vlastní systém, ve kterém měřím a pozoruji regulované veličiny a posléze jejich hodnotu porovnávám s hodnotami, které očekávám. Na následujícím obrázku je obecné blokové schéma regulační soustavy se zpětnou vazbou, na něm popíši základní pojmy vyskytující se v regulaci a řízení ve zpětnovazebních soustavách.



Obr. 3.10 Zpětnovazební soustava

F(p) je regulovaná soustava

H(p) je regulátor

Q(p) zpětná vazba

- x je vstup – akční veličina, která má být nastavena
- y je výstup – veličina, která vzniká vlastní regulací
- z je porucha – může působit v kterémkoliv místě obvodu
- n je šum, nebo-li rušení zpětnovazebního signálu

Hlavními úkoly zpětnovazební soustavy je tedy zajistit, aby regulovaná veličina v rámci možnosti sledovala časový průběh řídicí veličiny. Dále potom zabezpečit, aby byl vliv okolních jevů a poruchových signálů na soustavu a její výstup co nejmenší.

3.3.1 Stabilita zpětnovazebních soustav

Zpětnovazební soustavy mohou splňovat vlastnosti dvou jevů. Mluvíme, že je soustava buď **stabilní** nebo **nestabilní**.

Nestabilní soustavu poznáme tak, že výstupní signál buď trvale monotónně narůstá, nebo kmitá s rostoucí amplitudou.

Stabilní soustava má odezvu na jednotkový skok (buď aperiodickou, nebo kmitavou).

Kritérium stability

Lineární spojité dynamický systém je stabilní, pokud všechny kořeny p_1, p_2, \dots, p_n jeho charakteristické rovnice

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad (3.13)$$

jsou reálné záporné nebo mají záporné reálné části, jestliže jsou komplexní.

3.4 Regulátory

Regulátor je zařízení ve zpětnovazebních soustavách, který má za úkol pomocí akční veličiny působit na soustavu tím způsobem, aby odchylka regulované veličiny byla vzhledem k žádané hodnotě co nejmenší.

Optimálním návrhem regulátoru, čili návrhem jeho přenosové funkce, můžeme dosáhnout jak kvalitního ustáleného stavu (ustálené chyby regulace), tak i požadované odezvy na skok řízení i na skokovou změnu poruchy.

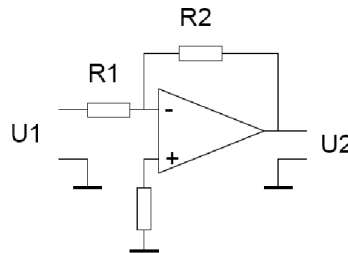
Dále uvedu jednotlivé **typy regulátorů**.

3.4.1 P-regulátor

Jedná se o **proporcionální regulátor**, tzv. zesilovač. Jeho název vyplývá z jeho funkce. Má za úkol, aby byla akční odchylka proporcionálně úměrná regulační odchylce.

$$\text{Přenosová funkce P-regulátoru je } H(p) = K_p \text{ .} \quad (3.14)$$

Na následujícím obrázku je vyzobrazena realizace P-regulátoru ve spojitých regulačních soustavách s operačním zesilovačem.



Obr. 3.11 Zapojení P-regulátoru

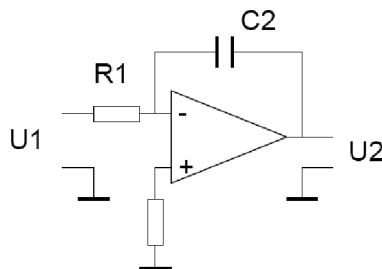
$$\text{Za předpokladu velkého zesílení je přenos } H_p = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2}{R_1} = K_p \quad (3.15)$$

3.4.2 I-regulátor

Jedná se o **integrační regulátor**. Často potřebujeme v soustavě dosáhnout toho, aby regulovaná veličina souhlasila s veličinou řídicí. V podstatě chceme dosáhnout nulové regulační odchylky v ustáleném stavu.

$$\text{Přenosová funkce I-regulátoru je } H(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1}{T_i p} \text{ .} \quad (3.16)$$

Na následujícím obrázku je vyzobrazena realizace I-regulátoru ve spojitých regulačních soustavách s operačním zesilovačem.



Obr. 3.12 Zapojení I-regulátoru

Za předpokladu velkého zesílení je přenos:

$$H_p = \frac{U_2}{U_1} = Z_2 \frac{(p)}{Z_1} (p) = \frac{1}{R_1} \frac{pC_2}{pC_2R_1} = \frac{1}{pC_2R_1}, K_i = \frac{1}{C_2R_1} \quad (3.17)$$

3.4.3 D-regulátor

Jedná se o derivační regulátor. Produkuje výstupní signál, který je derivací vstupního signálu. Je-li odchylka konstantní, je její změna nulová a regulátor se chová jako rozpojený spínač. Z tohoto důvodu jej nemůžeme zapojovat samostatně a je pouze součástí regulátorů PD a PID.

3.4.4 Složené typy regulátorů

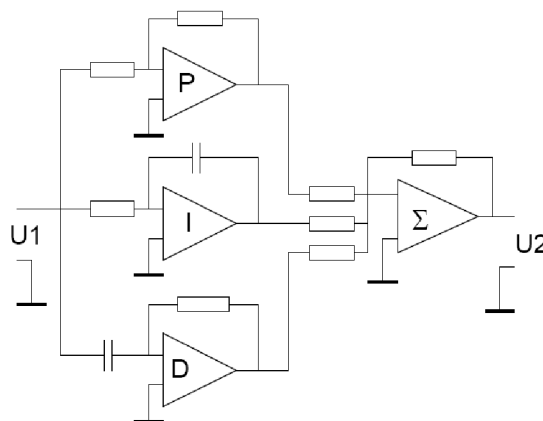
Známe 3 základní typy složených regulátorů **PI**, **PD** a **PID**. Považují za zbytečné se zde rozepisovat o všech typech, proto si problematiku složených regulátorů ukážeme na nejsložitějším z nich, a to regulátoru **PID**.

Regulátor PID (proporcionálně integračně derivační) se skládá, jak už název napovídá, z proporčního regulátoru, integračního regulátoru a derivačního regulátoru. Tyto vlastní regulátory jsou vzájemně propojeny paralelně.

Přenosová funkce PID-regulátoru je

$$H(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p = \frac{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}{p\tau_0} \quad (3.18)$$

Na následujícím obrázku je vyzobrazena realizace PID-regulátoru ve spojitých regulačních soustavách s operačním zesilovačem. Jak už jsem napsal, jedná se o paralelní spojení P,I a D regulátorů se čtvrtým sčítacím zesilovačem. Zapojení je znázorněno na obr. 3.13. Tato struktura je významná tím, že díky ní můžeme nezávisle nastavovat složky jednotlivých regulátorů.



Obr. 3.13 Zapojení PID-regulátoru s nezávislým nastavováním K_p , K_i , K_d

4 Matematický úvod do problematiky

Pro analýzu a popis dějů ve spojitých systémech je možno použít mnoho matematických způsobů a metod. V této bakalářské práci se však budu zabývat převážně popisem pomocí diferenciálních rovnic. V následujícím textu naznačím problematiku diferenciálních rovnic [8] a výpočty s nimi.

4.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je matematická rovnice, ve které se jako proměnné vyskytují derivace funkcí. Pokud je neznámá funkce funkcí jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

V ostatních případech jde o **parciální diferenciální rovnice**.

Je-li dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí, pak hovoříme o **soustavě diferenciálních rovnic**.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která je v ní obsažena. Za řád soustavy diferenciálních rovnic považujeme hodnotu nejvyšší derivace, která se v soustavě vyskytuje. Podle řádu bývají diferenciální rovnice děleny na diferenciální rovnice prvního řádu a diferenciální rovnice vyšších řádů.

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu zapisujeme takto:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ kde } y = \varphi(x) \text{ je hledaná funkce} \quad (4.1)$$

Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu tedy zapisujeme takto:

$$f(x, y, y') = 0 \quad (4.2)$$

Pokud lze uvedenou rovnici rozřešit vzhledem k y' , pak užíváme tvaru:

$$y' = f(x, y) \quad (4.3)$$

4.2 Řešení diferenciálních rovnic – Taylorova metoda

Známe spoutu postupů, jak řešit diferenciální rovnice. Mezi hlavní patří analytické řešení, které je ve většině případů složité, ale za to velice přesné. Další velkou kapitolou je numerické řešení, které se dělí na metody jednokrokové a víceokrové.

Nejznámější jednokrokové metody jsou například Eulerova metoda, metoda Runge-Kutta nebo Taylorova metoda. Právě poslední zmíněnou metodou se budu v této bakalářské práci zabývat a podrobněji ji nyní popíši.

Taylorova metoda [14] se vyznačuje rychlostí a s ní spojenou výpočetní nenáročností. Pokud však zvolíme špatně integrační krok, může se tato metoda stát nestabilní, protože jednotlivé chyby se v průběhu přenášejí a celková chyba narůstá.

4.2.1 Taylorova řada

Základem Taylorovy metody je Taylorova řada (polynom), která je definovaná jako nekonečná mocninná řada

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (4.4)$$

Pro $x_0 = 0$ se polynom $T_n(x)$ nazývá též Maclaurinův polynom. Položíme-li $h=x-x_0$ můžeme psát Taylorův polynom následujícím způsobem

$$T_n(x) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \frac{h^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (4.5)$$

Nejpoužívanější tvar Taylorovy metody je následující, kdy hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x_n spočítáme pomocí výsledku předchozího kroku x_{n-1} . Pro výsledek následujícího kroku je tedy třeba výsledek předcházející. Parametr h je integrační krok, který nemusí být konstantní. Na jeho velikosti je závislá rychlost a přesnost výpočtu.

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots \quad (4.6)$$

Před začátkem výpočtu si musíme definovat, jakou požadujeme přesnost výsledku. Při vlastním výpočtu pak sčítáme získané dílčí výsledky a ve výpočtu pokračujeme, dokud není rozdíl dvou po sobě jdoucích výsledků menší než definovaná přesnost.

4.3 Převod rovnic vyššího řádu na soustavu rovnic prvního řádu

Blokové schéma se snadno tvoří z rovnic prvního řádu. Pokud máme v zadání rovnice vyššího řádu, můžeme je díky některým známým postupům převést na soustavy rovnic nižších řádů [2].

4.3.1 Metoda snižování řádu derivace

Nyní ukáži, jak metoda snižování řádu derivace funguje. Mějme následující diferenciální rovnici obecného tvaru:

$$ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \dots + ky' + zy = f(x, y, y', \dots) \quad (4.7)$$

Aplikujeme na ni následující dva kroky:

1. Přesuneme nejvyšší řád derivace na levou stranu.

$$y^{(n)} = \dots \quad (4.8)$$

2. Postupným integrováním získáme na levé straně rovnice y .

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int y^{(n)} dt \\ y^{(n-2)} &= \int y^{(n-1)} dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\dots \\ y = \int y' dt$$

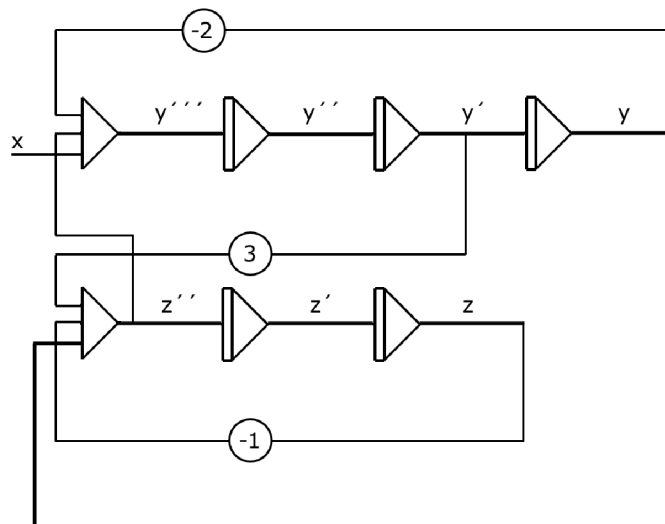
Důležité: Metodu můžeme použít jen tehdy, pokud nejsou na pravé straně žádné derivace vstupů (x' , x'' , ...).

Převod soustavy dvou diferenciálních rovnic na blokové schéma

Mějme následující dvě soustavy diferenciálních rovnic. Niže je uveden postup, jak můžeme tyto rovnice převést na blokové schéma.

$$\begin{aligned} y'''' - z'' + 2y' &= x & z'' - 3y' + z &= y \\ y'' &= x + z'' - 2y' & z' &= 3y' - z + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \int y' \\ y' &= \int y \\ y &= \int y' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z'' &= \int z' \\ z' &= \int z \end{aligned}$$

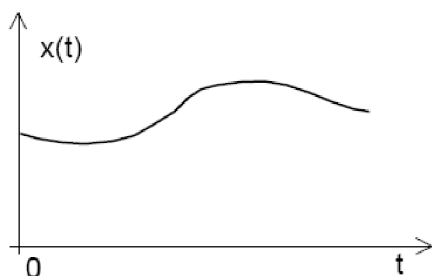


Obr. 4.1. Blokové schéma soustavy dvou diferenciálních rovnic

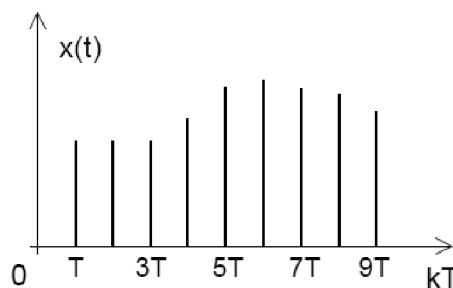
5 Diskrétní teorie řízení – A/D a D/A převodník

Diskrétní řízení [1] je prováděno řídicími počítači. Jedná se o tzv. číslicové řízení. Jak už z názvu vyplývá, hlavní charakteristikou tohoto řízení je výsledný diskrétní (vzorkovaný) signál. Doposud jsem mluvil pouze o signálu spojitém.

Významný rozdíl mezi těmito dvěma signály spočívá v tom, že u spojitého signálu můžeme určit jeho hodnotu v libovolném časovém okamžiku, u diskrétního signálu tomu tak není. Vzorkováním spojitého signálu v určitých intervalech získáme jeho diskrétní podobu.



Obr. 5.1 Spojitý signál

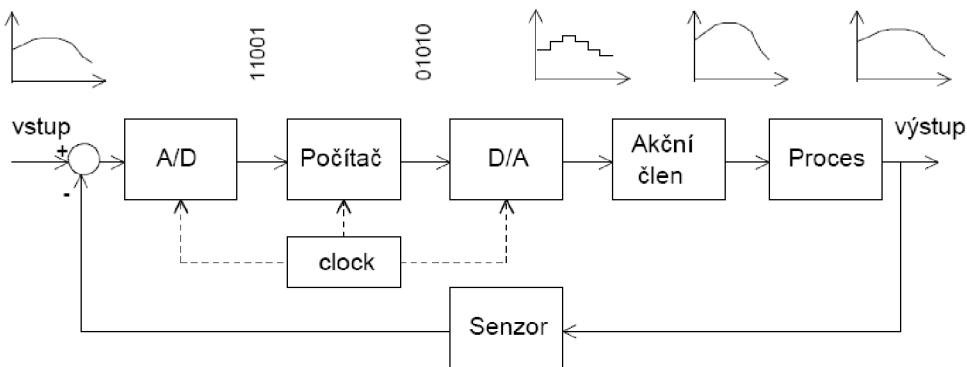


Obr. 5.2 Diskrétní (vzorkovaný) signál

Diskrétní systém je takový systém, kde se mění proměnné v diskrétních časových okamžicích kT ($k = 0,1,2,3, \dots$).

5.1 Číslicové řídicí systémy

Regulovaná soustava (většinou dynamická soustava) je řízena akčním členem, který může být spojitý nebo diskrétní. Hlavním a základním stavebním kamenem struktury číslicového řízení je **číslicový počítač**.

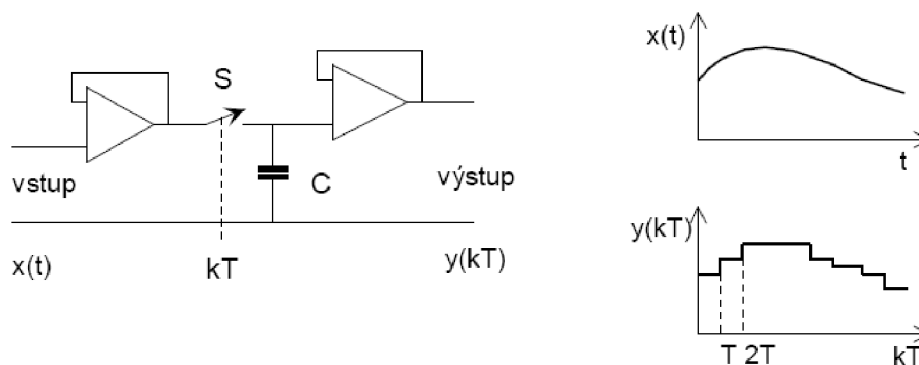


Obr. 5.3. Blokové schéma číslicového řízení a signály

V řídicích systémech se používají pro práci s daty následující stavební prvky:

- multiplexory, demultiplexory
- vzorkovače, tvarovače
- A/D a D/A převodníky

Vzorkovač v číslicových systémech převádí spojitý signál na posloupnost po sobě jdoucích pulsů. Tvarovač nultého řádu udržuje hodnotu vzorku po dobu trvání periody až do příchodu dalšího vzorku. Na následujícím obrázku 5.4 je znázorněno schéma této komponenty a průběhy vstupního spojitého a výstupního diskretního signálu.



Obr. 5.4 Blokové schéma vzorkovače a tvarovače a signály

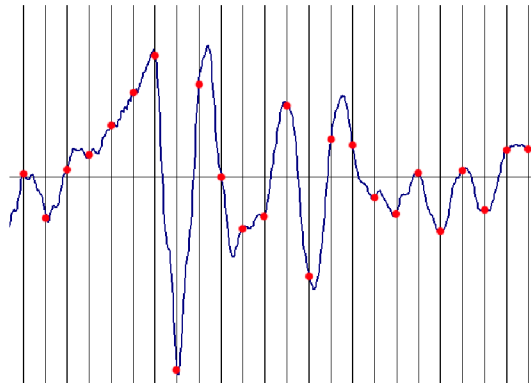
V době vzorkování, který je dán body $T, 2T, \dots, kT$, je spínač S v komponentě sepnut a napětí na kondenzátoru opisuje vstupní napětí. Doba sepnutí je nesmírně krátká vzhledem k době periody vzorkování T . Po zbytek periody je spínač S rozpojen a kondenzátor udržuje napětí do příchodu nového vzorku.

5.1.1 A/D převodníky

A/D převodník [9] je elektronická součástka převádějící spojitý analogový signál na binární číslo. Podstatou tohoto převodu je zpracování původního analogového signálu na počítačích. Pro konstrukci těchto převodníků se používá většinou D/A převodník zapojený ve zpětné vazbě s komparátorem vstupního analogového signálu se zpětnovazebním analogovým signálem. Nyní popíši některé pojmy, které se u A/D převodníků objevují.

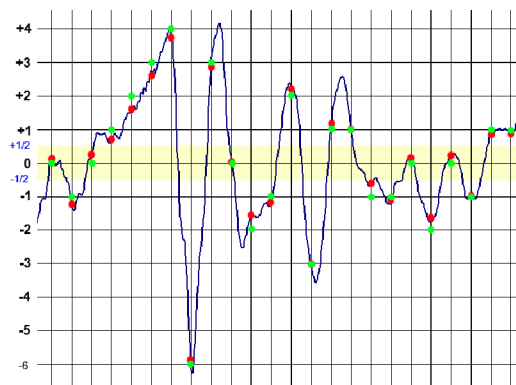
- **Vzorkování** - úsek daného analogového signálu se dá do nekonečna zvětšovat a pozorovat tak velmi malé detaily. Paměť počítače i jeho výkon ale nejsou nekonečné, musíme se omezit na nezbytné množství vzorků pro následující zpracování. Samotné vzorkování se provede tím stylem, že rozdělíme vodorovnou

osu na stejně velké úseky a z nich pak vybereme vzorky. Je jasné, že takto ztratíme spoustu detailů a získáme pouze množinu hodnot odpovídající vzorkovací frekvenci.



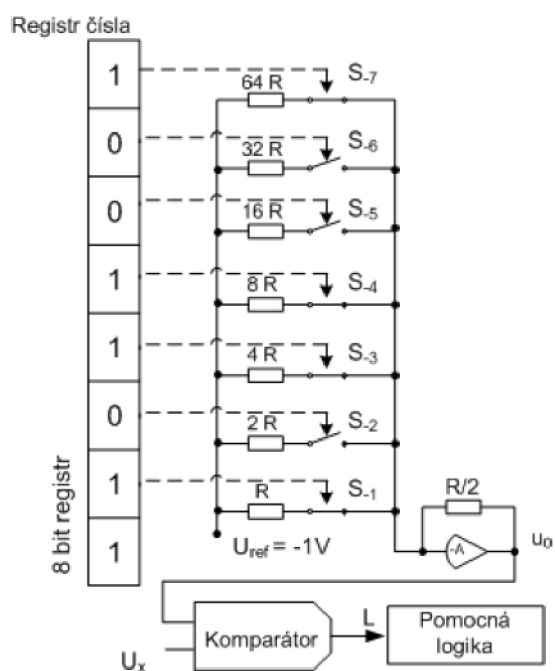
Obr. 5.5 Ukázka vzorkování malého úseku signálu hlásky „Á“

- **Aliasing** - nenávratná chyba ve zobrazení signálu ve vzorkování - zapříčiněná výskytem vyšší frekvence, než je polovina vzorkovací frekvence. Aliasingu se předchází použitím antialiasing filtru, což je dolní propust' (nepropouští signál vyšších frekvencí) zařazená před samotným převodníkem.
- **Kvantování** - jelikož početní výkon počítače je omezený a umí vyjádřit čísla jen s určitou přesností, musí se vzorkovaný signál upravit i na svislé ose. Kvantování je tedy část převodu, kdy se signál převádí do zobrazitelných kvant. Ve většině případů se kvantované hodnoty od vzorkovaných dat liší. Velikost chyby se pohybuje v intervalu $+1/2$ až $-1/2$ kvantizační úrovně.



Obr. 5.6 Příklad kvantování signálu na celá čísla

Ukázka převodu signálu pomocí A/D převodníku



Obr. 5.7 8 bitový A/D převodník

Na obrázku 5.7 je zobrazen 8 bitový A/D převodník [10] a jeho stav na konci převodu analogového napětí reprezentujícího číslo $u_x = -0,7 V$.

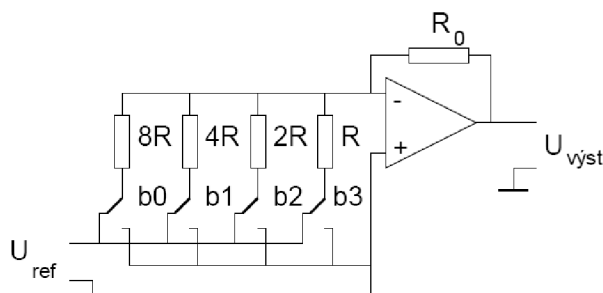
Postup převodu:

1. Podle polarity vstupního napětí se nastaví polarita u_{ref} .
2. Dále se postupně spínají jednotlivé spínače a komparátor testuje, jestli je $u_x + u_0$ záporné. Pokud má součet zápornou hodnotu, spínač zůstane sepnutý, v opačném případě je spínač rozpojen.
3. Registr čísla na konci obsahuje výsledek v přímém binárním kódu. V tomto případě se výsledek rovná 11011001_2 .

5.1.2 D/A převodníky

D/A převodník [1] převádí signál v opačném směru, z binárního čísla na analogový signál. Většinou je výsledný analogový signál uváděn jako hodnota napětí.

Ukázka převodu signálu pomocí D/A převodníku



Obr. 5.8 4 bitový D/A převodník

Pokud uvažujeme na vstupu bezkontaktních spínačů např. tyto hodnoty:

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 1,$$

pak hodnotu výstupního napětí získáme ze vztahu:

$$U_{výst} = \frac{R_0}{R} \left(b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8} \right) U_{ref} \tag{5.1}$$
$$U_{výst} = \frac{R_0}{R} \left(1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} \right) U_{ref}$$

6 Program TKSL

Program TKSL [16] byl navržen pro simulaci spojitéch modelů. Pro simulaci řešení program využívá Taylorovu řadu. V této bakalářské práci je využívána verze TKSL/386.

V závislosti na všech parametrech Taylorova rozvoje TKSL/386 dovoluje uživateli nastavit přesnost výpočtu, řád metody. Provádí přesnou detekci nespojitostí, výpočet probíhá s proměnným integračním krokem.

Systém TKSL/386 umožňuje řešit celou řadu různých problémů. Mezi ně patří například řešení soustav lineárních i nelineárních algebraických rovnic, parciálních diferenciálních rovnic, detekce nespojitostí, výpočet určitých integrálů atd.

Vstupem do programu je soustava rovnic a definování jejich proměnných a konstant, které popisují simulovanou soustavu. Výstupem je graf vytvořený pomocí Taylorovy řady.

Uživatelské rozhraní programu pracuje v grafickém režimu. Program obsahuje vlastní editor zdrojového kódu. TKSL/386 disponuje vlastním integrovaným překladačem, který umožňuje ladění a překlad zdrojového kódu. Po úspěšném přeložení zdrojového kódu je možné provést simulaci a grafickou reprezentaci výsledku v podobě velmi přehledného grafu. Z grafu se dají odečítat pomocí myši i přesné hodnoty v daném bodě.

V této bakalářské práci budu hojně využívat programu TKSL/386 pro simulace letových rovnic a nejrůznějších změn v pohybu letadla.

Ukázka zpracování soustavy v programu TKSL

```
var v,x,alfa,theta,tmp;
const delta_t=1, delta_v=1, a11=0.046, a12=-0.133,
a13=0.22, c11=0.4, a21=0.099, a22=0.895, c22=0.099,
a30=0.796, a32=4.038, a33=1.516, c32=3.842, a23=0,
a31=0;

system
v'=-a11*v-a12*alfa-a13*theta+c11*delta_t &0;
theta'=x &0;
tmp=-a21*v-a22*alfa+x-a23*theta+c22*delta_v;
alfa'=tmp &0;
x'=c32*delta_v-a31*v-a30*tmp-a32*alfa-a33*x &0;
sysend.
```

7 Systémy řízení letu

Systémy řízení letu představují nejvyšší úroveň řízení letu letadla spočívající v kompletní automatizaci nejrůznějších částí letu letadla. Během letu vytvářejí a modifikují letový plán, vytvářejí plán spotřeby a optimalizují výkon letadla [6].

V krátkosti se také zmíním o psychických procesech, které celé řízení podstatně ovlivňují. Psychické procesy se objevují u řízení letadla pilotem, což je vlastně obdobné, jako při řízení kteréhokoliv složitějšího zařízení lidským faktorem.

7.1 Psychické procesy při řízení letu

Psychické procesy při řízení letu letadla můžeme rozdělit do čtyř fází, které představují úkony pilota před jeho finálním zásahem do řízení.

Jak už jsem napsal, tyto fáze jsou čtyři a nyní bych je rád stručně popsal:

1. **Příjem informace** spočívá v získávání informací z přístrojů a okolí o pohybu letadla, jeho poloze, vlivu regulačních orgánů apod. Informace jsou získávány z okolí pomocí smyslů, kdy nejdůležitější je zrak a dále potom sluch.
2. **Zpracování informace** začíná vytvořením tzv. *informačního modelu*, což je model o pohybu a poloze letadla, model vnějších vlivů a dále také model polohy a pohybu regulačních orgánů. Důraz je kladen na rychlost a správnost vytvořeného informačního modelu a na způsob jeho reprezentace pilotovi.
3. **Rozhodnutí o řízení** provádí pilot po posouzení získaného informačního modelu. Pilot rozhoduje také o způsobu a velikosti zásahu do řízení letu letadla.
4. **Vlastní řízení** provádí pilot tak, že využívá svoji motorickou sílu k regulaci letu po předcházející fázi, kdy rozhodl o řízení.

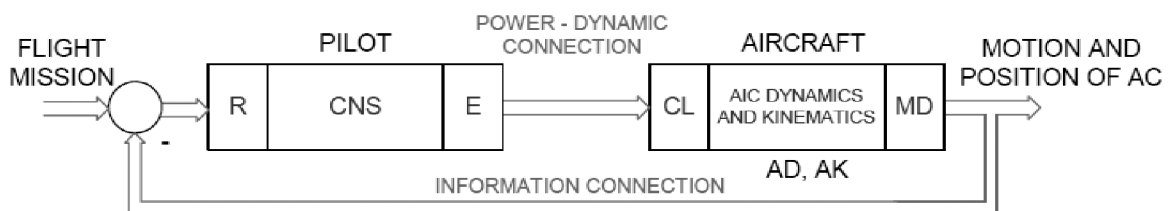
Všechny tyto fáze probíhají zpravidla společně ve velmi krátké době a jsou složeny z mnoha dílčích podfází. Pro zajímavost bych rád uvedl, že dle testů nepřesáhne pilotova průměrná doba trvání provedení všech čtyř fází 0,2 sec. Tento čas odpovídá např. rychlosti reakce trénovaného sportovce.

7.2 Stupně automatizace řízení

Fáze všech čtyř psychických procesů uvedených v předcházející kapitole lze částečně, případně plně automatizovat. Stupně automatizace můžeme rozdělit do dvou kategorií na systémy poloautomatického řízení a plně automatického řízení [6].

7.2.1 Poloautomatické řízení

Určitá část letu je řízena automaticky, do řízení však vstupuje lidský faktor – pilot. Ten uzavírá regulační obvod *letadlo-pilot*. Na následujícím obrázku 7.1 je nastíněno blokové schéma poloautomatického řízení.



Obr. 7.1 Blokové schéma vazby pilot - letadlo

R – receptory, kterými pilot přijímá vjemy z okolí

CNS – centrální nervová soustava pilota

E – efekторы – svalová aktivita

CL – kontrolní jednotka

AD – dynamika letadla

AK – kinematika letadla

MD – naměřená data

7.2.2 Automatické řízení

V řízení letu je automatické řízení takové řízení, které představuje úplnou automatizaci nejrůznějších úkonů bez jakékoliv účasti pilota ve smyčce řízení. Jediná účast pilota v automatickém řízení spočívá v zadání vstupních veličin do automatického systému.

Automatické řízení se dále dělí na automatická řízení lokálního a globálního významu. Lokální automatická řízení mají omezenou působnost a týkají se pouze určitých veličin částí řízeného systému. Jedná se především o **autopiloty** a jim nadřazené **systémy automatického řízení letu**.

8 Dynamické vlastnosti letadla

K řízení letu letadla je nezbytná znalost jeho dynamických vlastností. Jednotlivé poznané veličiny potom můžeme řídit a stabilizovat.

Na následujících řádcích se budu věnovat uvedení pohybových rovnic letadla takovým způsobem, který se používá při návrhu automatických systémů řízení letadla. Nepůjde však o ucelený celorežimový model, který se používá např. v leteckých simulátorech, ale o linearizovaný, tedy zjednodušený model.

Kompletní problematikou dynamických vlastností letadla a odvození pohybových rovnic se zabývá literatura [3], [4] a ve větší stručnosti také [6], odkud jsem většinu informací čerpal.

8.1 Letadlové souřadné soustavy

Pohyb letadla, tj. pohyb kolem jeho těžiště, se vztahuje k pravouhlému souřadnému systému, který tvoří počátek a osy podélná, příčná a kolmá.

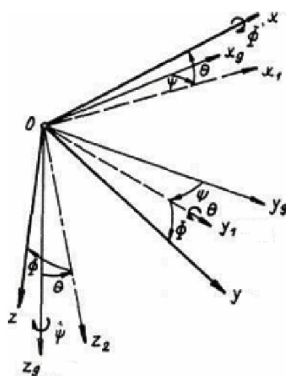
V dnešní době se nejvíce mluví o normách GHOST a ISO. Norma GHOST byla používána převážně v minulých letech a jde o pravouhlý souřadný systém, jehož kladný směr kolmé osy směřuje nahoru. V současné době u nás převažuje norma ISO, u níž kladný směr kolmé osy směřuje dolů.

Dále se v této bakalářské práci budu zabývat už pouze novější a používanější normou ISO. Uvedu také z pravouhlých souřadných systémů tři základní systémy, které jsou užívány při vyjádření dynamiky a kinematiky letu.

- **Letadlová souřadná soustava O, x, y, z** – je pevně svázaná s letadlem, počátek O se volí v těžišti letadla T , podélná osa x leží v podélné ose letadla a směřuje dopředu, kladná příčná osa leží v pravém křídle letadla, kolmá osa je kolmá na obě předešlé osy. Rovina symetrie letadla je tvořena osou kolmou a podélnou.
- **Aerodynamická souřadná soustava O_a, x_a, y_a, z_a** – podélná osa x_a má směr a smysl vektorové vzdušné rychlosti V , kolmá osa leží v rovině symetrie letadla, počátek O_a leží v těžišti letadla.
- **Zemská souřadná soustava O_g, x_g, y_g, z_g** – je pevně spojena se zemí, je orientována dle světových stran nebo její podélná osa je orientována vzhledem k dráze letu. V tomto případě je její počátek na začátku trati, na konci nebo na jiném důležitém bodě. Může se také vyskytovat s počátkem O_g v těžišti letadla.

8.1.1 Převod ze zemské soustavy do letadlové

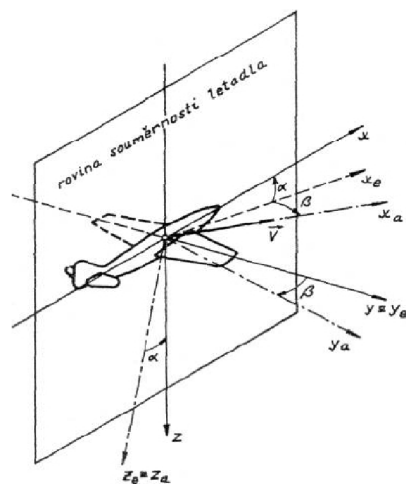
Prvním otáčením zemské souřadné osy kolem její kolmé osy z_g do roviny symetrie letadla tvořené podélnou a kolmou osou letadla, získáme při orientaci podélné osy zemské souřadné soustavy směrem S-J, kurzorový úhel letadla Ψ . Tímto pootočením získáme nový souřadný systém O, x_1, y_1, z_g . Druhým otáčením tohoto souřadného systému kolem příčné pomocné osy y_1 do podélné osy letadla x získáme úhel podélného sklonu letadla θ . Vzniklý souřadný systém O, x, y_1, z_2 třetím pootočením o úhel příčného náklonu Φ převedeme do letadlové souřadné soustavy O, x, y, z .



Obr. 8.1 Převod souřadné zemské soustavy do tělesové dle ISO

8.1.2 Převod z aerodynamické souřadné soustavy do letadlové

Dvěma pootočenými aerodynamické souřadné soustavy (kolmá osa leží v rovině symetrie letadla) do letadlové souřadné soustavy získáme úhly ofukování. Prvním otočením soustavy kolem její kolmé osy z_a do roviny symetrie letadla získáme úhel vybočení β a souřadný systém O, x_e, y, z_a . Dalším otočením tohoto souřadného systému kolem příčné osy y letadlové souřadné soustavy o úhel náběhu α dosáhneme jeho splynutí s letadlovou souřadnou soustavou O, x, y, z . Převody jsou na obrázku 8.2.



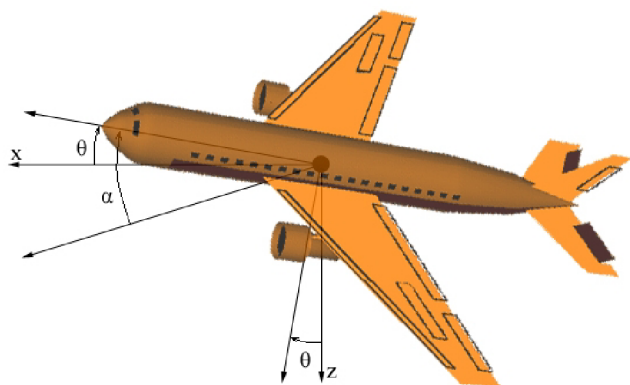
Obr. 8.2 Převod souřadné soustavy aerodynamické do tělesové

Letadlové veličiny a jejich značení

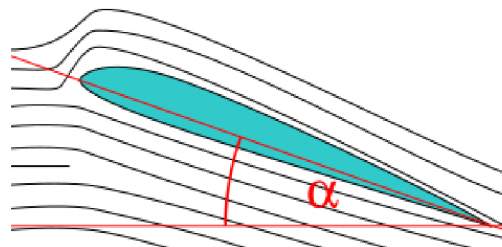
Letové veličiny	<i>Souřadné osy</i>	x	podélná
		y	příčná
		z	kolmá
	<i>Polohové úhly</i>	θ	podélný sklon
		Φ	příčný sklon
		Ψ	kurz
	<i>Úhlové rychlosti / derivace</i>	$p = \omega_x = \Phi'$	klonění
		$r = \omega_y = \theta'$	klopení
		$r = \omega_z = \Psi'$	zatačení
	<i>Úhly ofukování</i>	α	úhel náběhu
		β	úhel vybočení
	<i>Lineární zrychlení</i>	a_z	normálové
a_y		stranové	
Složky aerodynamických sil a momentů	<i>Síly</i>	$X, D = q \cdot S \cdot C_D$	odporová síla
		$Z, L = q \cdot S \cdot C_L$	vztlaková síla
		$Y = q \cdot S \cdot C_Y$	stranová síla
	<i>Momenty</i>	$M_x, L = q \cdot S \cdot b \cdot C_l$	klonivý moment
		$M_z, N = q \cdot S \cdot b \cdot C_n$	zatačivý moment
		$M_y, M = q \cdot S \cdot c \cdot C_m$	klopivý moment
	<i>Úhel sklonu trajektorie letu</i>	$\gamma = \theta - \alpha$	ve vertikální rovině
		$\gamma_s = \Psi - \beta$	v horizontální rovině
	<i>Výchyly kormidel</i>	δ_v, η	výškovka
		δ_T	přípusť motoru
		δ_K, ξ	křídélka
		δ_s, ζ	směrovka

Nyní bych rád popsal několik základních pojmů, které se vyskytují v této tabulce a jsou nezbytné k pochopení následující části této bakalářské práce. Rád bych názorně demonstroval důležité úhly.

Úhel náběhu α a podélný sklon θ



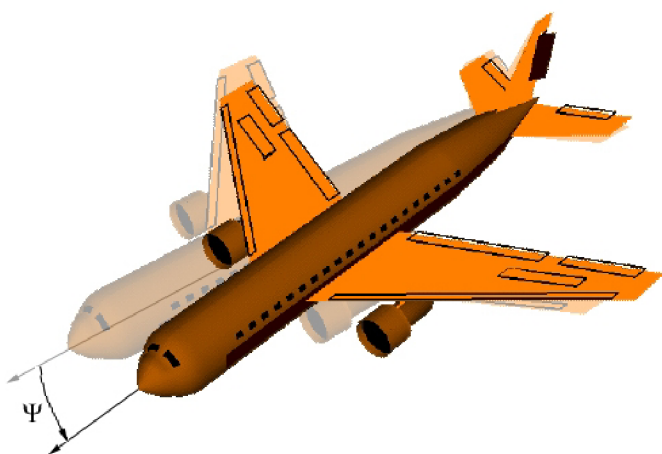
Obr. 8.3 Úhel náběhu α a podélný sklon θ



Obr. 8.4 Proudění vzduhu kolem křídla

Velikost aerodynamické vztahové síly je závislá na několika faktorech. Důležitou roli hraje obsah a tvar křídla a dále pak tzv. úhel náběhu α . S úhlem náběhu souvisí také úhel podélného sklonu θ , který je s úhlem náběhu často zaměňován. Rozdíl mezi těmito dvěma úhly je takový, že úhel náběhu je měřen vůči proudění vzduchu v atmosféře, kdežto úhel podélného sklonu je měřen vůči horizontu. Další informace o těchto úhlech uvádí literatura [11] a [13].

Úhel vytočení (kurz) Ψ a úhel vybočení β

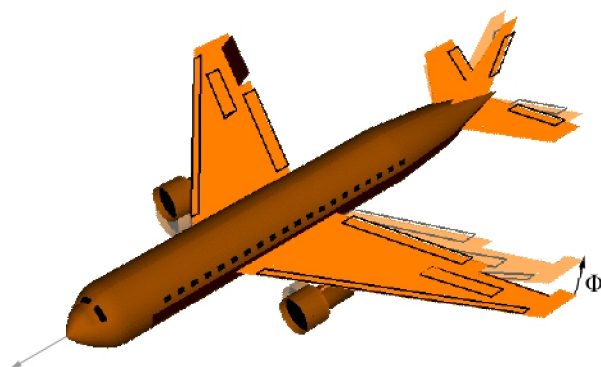


Obr. 8.5 Úhel vytočení Ψ

Jak je patrné z obrázku 8.5, úhel vytočení Ψ je zapříčiněn změnou polohy tzv. směrovky. Vedle úhlu vytočení ještě známe úhel vybočení β .

Úhel vybočení vzniká např. po poryvu větru, kdy je letadlo vychýleno ze směru svého letu a je narušena jeho stabilita. Více informací v literatuře [13] nebo [12].

Příčný náklon Φ



Příčný náklon Φ je naklonění letadla podél jeho příčné osy, který způsobuje změnu směru letu nakloněného letadla a je způsoben změnou výchylky křidélek.

Obr. 8.6 Příčný náklon Φ

8.2 Pohybové rovnice letadla

Jak už jsem psal v úvodu této kapitoly, kompletní problematikou dynamických vlastností letadla a odvození pohybových rovnic se zabývají literatury [3], [4] ve větší stručnosti i [6].

Stručné odvození, které zde uvedu, bude prováděno za běžných a do jisté míry zjednodušujících předpokladů.

1. Letadlo je tuhé těleso. Dále má šest stupňů volnosti a lze ho popsat diferenciálními rovnicemi. Také je geometricky a hmotně souměrné.
2. Hmotnost letadla a vnějšího prostředí je konstantní.
3. Hlavní osy setrvačnosti jsou totožné s letadlovou souřadnou soustavou, zjednoduší se momentové rovnice.
4. Vektor tahu motorů leží v podélné ose letadla, zjednoduší se silové i momentové rovnice.
5. Tíhové zrychlení je konstantní.
6. Zemská souřadná soustava je inerciální soustavou.

Pohybové rovnice tuhého tělesa v inerciální soustavě získáme z **2. Newtonova pohybového zákona**. Výslednou vnější sílu a výsledný vnější moment působící na těleso vyjádříme v následujícím tvaru:

$$F = \sum F_i = \frac{d}{dt}(m \cdot V) = \frac{dh}{dt} = m \cdot \frac{dV}{dt} \quad (8.1)$$

kde $h = m \cdot V$ je hybnost tělesa, m je jeho celková hmotnost a V je rychlost jeho pohybu.

$$M = \sum M_i = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \omega) \quad (8.2)$$

kde H je moment hybnosti tělesa, I je matice momentů setrvačnosti pohybujícího se tělesa.

Pro těleso pevně svázané s tělesovou letadlovou souřadnou soustavou konající pohyb, dostávají rovnice tento tvar:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} + m[\omega \times V] \quad (8.3)$$

$$M = \frac{dH}{dt} + m[\omega \times H] \quad (8.4)$$

První členy obou výše uvedených rovnic jsou vztaženy k tělesové souřadné soustavě. Druhé členy charakterizují rotační pohyb letadla.

Dále se potom rovnice řeší odděleně a vyjadřují se postupně **silové rovnice**, **momentové rovnice** a **kinematické rovnice**. Nebudu zde uvádět jejich přesné odvození, např. dle literatury [6], ale kvůli dalšímu postupu a lepší názornosti na dalších stránkách této bakalářské práce, je napíši ve finálním odvozeném tvaru.

Silové rovnice

$$\begin{aligned} F_x &= X - m g \sin \theta + m(v_x' + \omega_y v_z + -\omega_z v_y) \\ F_y &= Y - m g \cos \theta \sin \phi + m(v_y' + \omega_y v_z + -\omega_x v_z) \\ F_z &= Z - m g \cos \theta \cos \phi + m(v_z' + \omega_x v_y + -\omega_y v_x) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Jedná se o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic.

Momentové rovnice

$$\begin{aligned} M_x &= I_x q' - (I_y - I_z) qr - I_{yz}(q^2 - r^2) - I_{zx}(r' + pq) - I_{xy}(q' - rp) \\ M_y &= I_y q' - (I_z - I_x) rp - I_{zx}(r^2 - p^2) - I_{xy}(p' + qr) - I_{yz}(r' - pq) \\ M_z &= I_z r' - (I_x - I_y) pq - I_{xy}(p^2 - q^2) - I_{yz}(q' + rp) - I_{zx}(p' - qr) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Jedná se opět o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Popsané momenty jsou vyvolány pouze aerodynamickými silami, neobsahují příspěvky od gravitačních sil.

Kinematické rovnice

Tyto rovnice dávají do relace úhlové rychlosti v tělesové soustavě a derivace Eulerových úhlů.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \phi' - \Psi' \sin \theta \\ \omega_y &= \theta' \cos \phi + \Psi' \cos \theta \sin \phi \\ \omega_z &= \Psi' \cos \theta \cos \phi - \theta' \sin \phi \end{aligned} \quad (8.7)$$

Všechny tři skupiny rovnic jsou rovnicemi nelineárními. Pro případy automatického řízení je však výhodnější použít rovnice linearizované. Literatura [6] popisuje, jak se tyto rovnice linearizují.

8.3 Podélný pohyb letadla

Pohybové rovnice podélného pohybu letadla můžeme opět vyjádřit pomocí několika způsobů. Buď pomocí silových a momentových rovnic, nebo pomocí rovnic bezrozměrných, v nichž jsou definovány bezrozměrné *aerodynamické koeficienty*. Opět uvedu pouze výsledný tvar pohybových rovnic podélného pohybu letadla.

$$\begin{aligned}v' + a_{11}v + a_{12}\alpha + a_{13}\theta &= c_{11}\delta_T \\ a_{21}v + \alpha' + a_{22}\alpha - \theta' + a_{23}\theta &= c_{22}\delta_V \\ a_{31}v + a_{30}\alpha' + a_{32}\alpha + \theta'' + a_{33}\theta' &= c_{32}\delta_V\end{aligned}\quad (8.8)$$

Koeficienty a_{ij} a c_{ij} obsahují hmotnostní, geometrické a aerodynamické parametry letadla. Jejich konkrétní podobu obsahuje literatura [6].

Koeficienty pohybových rovnic podélného pohybu

Při vyjadřování dynamických vlastností podélného pohybu letadla použijí vlastnosti malého dopravního letadla. Koeficienty pro jeho cestovní režim jsou následující:

$$\begin{aligned}a_{11} &= 0.046, a_{12} = -1.133, a_{13} = 0.22, c_{11} = 0.4, \\ a_{21} &= 0.099, a_{22} = 0.895, c_{22} = 0.099, \\ a_{30} &= 0.796, a_{32} = 4.038, a_{33} = 1.516, c_{32} = 3.482\end{aligned}\quad (8.9)$$

U tohoto letadla nejsou uplatněny koeficienty a_{23} a a_{31} . Při simulaci nesmí být na toto zapomenuto.

8.3.1 Chování soustavy podélného pohybu v programu TKSL

Nyní bych se rád dostal k praktičtější části, a to otestování a odsimulování této soustavy v programu TKSL. Již zmíněné diferenciální rovnice podélného pohybu (8.8) převedu do podoby použitelné pro TKSL.

1. Pro přehlednost uvedu celou soustavu ještě jednou.

$$\begin{aligned}v' + a_{11}v + a_{12}\alpha + a_{13}\theta &= c_{11}\delta_t \\ a_{21}v + \alpha' + a_{22}\alpha - \theta' + a_{23}\theta &= c_{22}\delta_v \\ a_{31}v + a_{30}\alpha' + a_{32}\alpha + \theta'' + a_{33}\theta' &= c_{32}\delta_v\end{aligned}$$

2. Převedu nejvyšší řád derivace na pravou stranu každé rovnice.

$$\begin{aligned}v' &= -a_{11}v - a_{12}\alpha - a_{13}\theta + c_{11}\delta_t \\ \alpha' &= -a_{21}v - a_{22}\alpha + \theta' - a_{23}\theta + c_{22}\delta_v \\ \theta'' &= c_{32}\delta_v - a_{31}v - a_{30}\alpha' - a_{32}\alpha - a_{33}\theta'\end{aligned}$$

3. Zavedeme substituci $\theta'=x$, protože na levé straně rovnice nesmí být žádná derivace a použijeme pomocnou proměnou tmp pro snazší výpočet. Substitute se projeví ve druhé a třetí rovnici.

$$\theta'=x$$

$$tmp=\alpha'=-a_{21}v-a_{22}\alpha+x-a_{23}\theta+c_{22}\delta_v$$

$$x'=\theta''=c_{32}\delta_v-a_{31}v-a_{30}tmp-a_{32}\alpha-a_{33}x$$

4. Finální podoba soustavy rovnic pro TSKL včetně přepisu proměnných je následující.

$$v'=-a_{11}v-a_{12}\alpha-a_{13}\theta+c_{11}\delta_t$$

$$\theta'=x$$

$$tmp=-a_{21}v-a_{22}\alpha+x-a_{23}\theta+c_{22}\delta_v$$

$$\alpha'=tmp$$

$$x'=c_{32}\delta_v-a_{31}v-a_{30}\alpha-a_{32}\alpha-a_{33}\theta'$$

Zpracování problému v programu TSKL

```
var v,x,alfa,theta,tmp;
const delta_t=1, delta_v=1, a11=0.046, a12=-0.133,
a13=0.22, c11=0.4, a21=0.099, a22=0.895, c22=0.099,
a30=0.796, a32=4.038, a33=1.516, c32=3.842, a23=0,
a31=0;

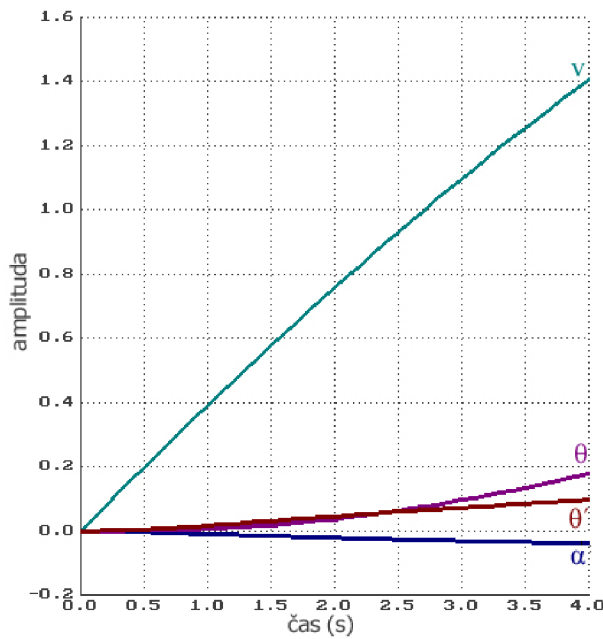
system

v'=-a11*v-a12*alfa-a13*theta+c11*delta_t &0;
theta'=x &0;
tmp=-a21*v-a22*alfa+x-a23*theta+c22*delta_v;
alfa'=tmp &0;
x'=c32*delta_v-a31*v-a30*tmp-a32*alfa-a33*x &0;

sysend.
```

Díky programu TSKL můžeme sledovat průběhy jednotlivých proměnných při simulování změn v letu letadla. Na následujících obrázcích budou názorně zobrazeny a popsány všechny hlavní změny při podélném pohybu letadla.

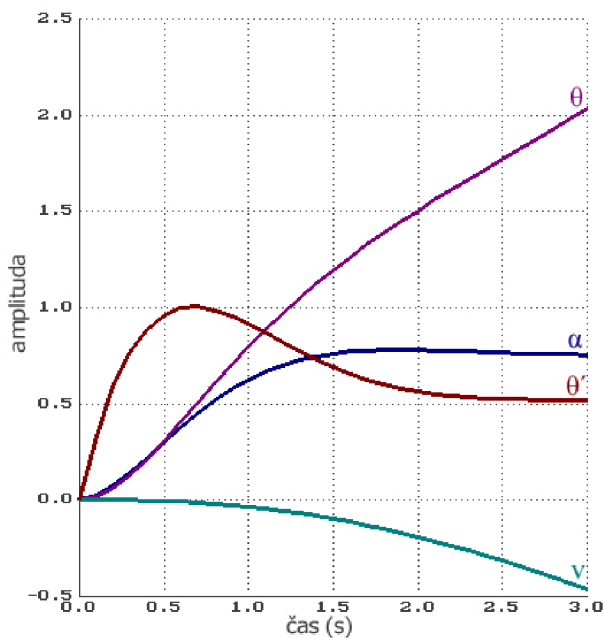
Vstup výchylka přípusti motoru δ_T



Obr. 8.7 Vstup výchylka přípusti motoru

Graf na obrázku 8.7 znázorňuje, co se stane s letadlem, pokud pilot přidá pouze plyn ($\delta_t=1$) a nemanipuluje s výškovým křídlem ($\delta_v=0$). Je jasné, že rychlost letadla v se zvýší, což graf také dokazuje. Poznatek, který se může zdát překvapivý je ten, že úhel náběhu α se zmenšuje. To znamená, že když pilot přidá plyn, letadlo má tendenci vůči proudění vzduchu začít klesat. Tento jev by měl být více dominantní u nadzvukových stíhaček. Problém je však u nich vyřešen tak, že mají jiný tvar křídla oproti normálním letadlům. Vrchí i spodní část křídla mají stejné „vyboulení“, takže vzuch obtéká křídlo rovnoměrně a k výše zmíněnému jevu s úhlem náběhu α nedochází.

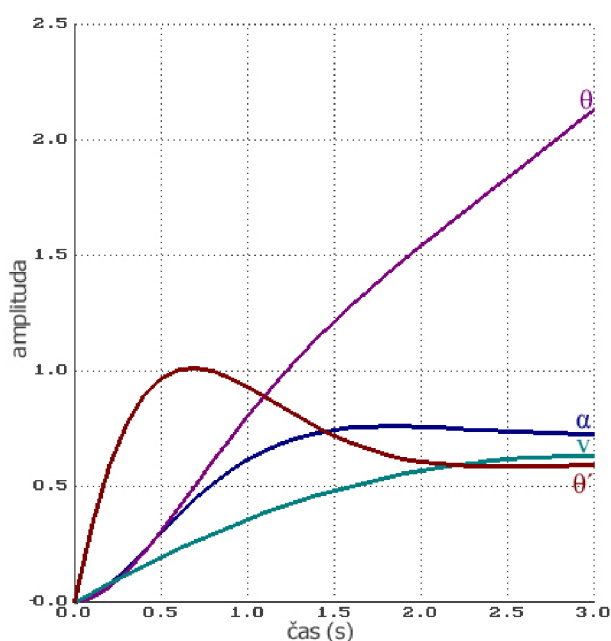
Vstup výchylka výškovky δ_v



Obr. 8.8 Vstup výchylka výškovky

Na grafu na obrázku 8.8 můžeme pozorovat, co se s letem stane, když přivedeme na vstup soustavy změnu výchylky výškového kormidla ($\delta_v=1$) a nemanipuluje s přípustí motoru ($\delta_t=0$). Letadlo začne nabírat vzduch a zahájí se jeho stoupání, což nám jasně dokazuje roustoucí úhel náběhu α a podélný sklon θ . Derivace podélného sklonu θ' , která znázorňuje úhlovou rychlost klopení, se postupně ustaluje. Za povšimnutí také stojí to, že rychlost v se během manévru zmenšuje.

Vstup výchylka výškovky δ_v a výchylka přípusti motoru δ_T



Graf na obrázku 8.9 nám znázorňuje, jak bude vypadat pohyb, pokud budou na vstupu obě výchylky ($\delta_v=1$, $\delta_T=1$) a následnou změnu chování letu letadla. Vzhled grafu je téměř schodný s grafem na obrázku 8.8. Můžeme zde však pozorovat razantnější nárůst všech veličin a hlavně nárůst rychlosti v , který je samozřejmě zapříčiněn výchylkou přípusti motoru.

Obr. 8.9 Vstup výchylka výškovky a výchylka přípusti motoru

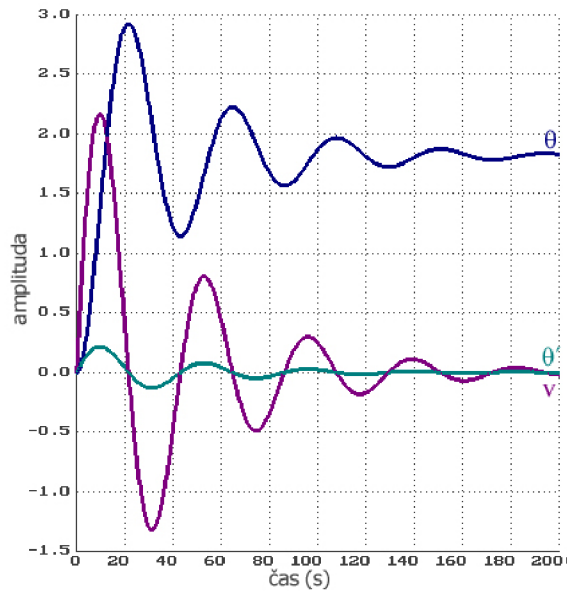
Aproximace podélného pohybu letadla pomalým pohybem

Tento pohyb je vyvolán změnou přípusti motoru δ_T při konstantní velikosti výškovky δ_v . Jak bude změna působit na celou soustavu, ukáží na následujícím grafu. Rovněž uvedu soustavu rovnic toho pohybu, která vychází ze soustavy rovnic podélného pohybu letu letadla a aproximace je odvozena na základě 1. a 2. rovnice.

$$\begin{aligned} v' + a_{11}v + a_{13}\theta &= c_{11}\delta_T \\ a_{21}v - \theta' + a_{23}\theta &= c_{22}\delta_v \end{aligned} \quad (8.10)$$

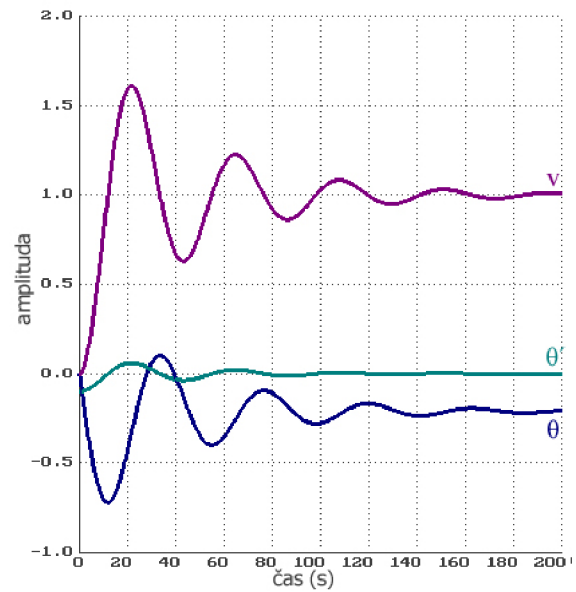
Zpracování problému v programu TKSL

```
var theta,v,x;
const delta_v=1, delta_t=1, c11=0.4, a11=0.046,
a13=0.22, a21=0.099, a23=0,c22=0.099;
system
v'=c11*delta_t-a11*v-a13*theta &0;
theta'=x &0;
x=a21*v+a23*theta-c22*delta_v;
sysend.
```



Obr. 8.10 Vstup přípusti motoru při aproximaci pomalým pohybem

($\delta_t=1, \delta_v=0$)



Obr. 8.11 Vstup výchylky výškovky při aproximaci pomalým pohybem

($\delta_t=0, \delta_v=1$)

Jak je vidět na grafech na obrázku 8.10 nebo 8.11, tato aproximace, ať už se jedná o reakci na vstup výškovky, nebo přípusti motoru, se vyznačuje změnou rychlosti letu letadla v a změnou podélného sklonu θ . Rychlost klopení θ' se téměř nemění. Jelikož je pohyb popsán první a druhou rovnicí při vynechání úhlu náběhu α , není tato veličina zobrazena v uvedeném grafu z TKSL. Dle literatury [6] se úhel náběhu α téměř nemění, stejně jako rychlost klopení θ' .

Aproximace podélného pohybu letadla rychlým pohybem

Tento pohyb je vyvolán změnou výškovky δ_v při konstantní velikosti přípusti motoru δ_t . Jak bude změna působit na celou soustavu, ukáží na následujícím grafu. Rovněž uvedu soustavu rovnic tohoto pohybu, která opět vychází ze soustavy podélného pohybu letu letadla a aproximace je odvozena z rovnic 2. a 3.

$$\begin{aligned} \alpha' + a_{22}\alpha - \theta' + a_{23}\theta &= c_{22}\delta_v \\ a_{30}\alpha' + a_{32}\alpha + \theta'' + a_{33}\theta' &= c_{32}\delta_v \end{aligned} \quad (8.11)$$

Zpracování problému v programu TKSL

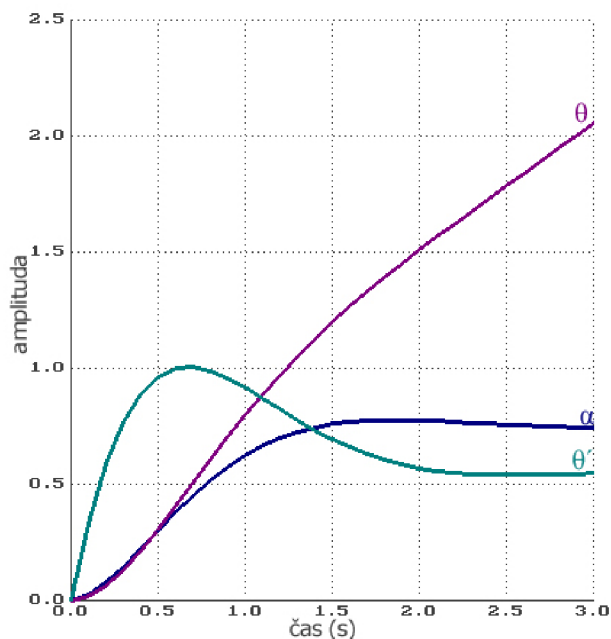
```
var theta, alfa, x, tmp;
const delta_v=1, c22=0.099, a22=0.895, a23=0,
c32=3.842, a33=1.516, a32=4.038, a30=0.796;
```



```

system
theta'=x &0;
tmp=c22*delta_v-a22*alfa+x-a23*theta;
alfa'=tmp &0;
x'=c32*delta_v-a30*tmp-a32*alfa-a33*x &0;
sysend.

```



Obr. 8.12 Vstup výškovky při aproximaci rychlým pohybem

Graf na obrázku 8.12 ukazuje chování soustavy při aproximaci podélného letu letadla rychlým pohybem a vstupu výškového kormidla ($\delta_v=1$). Je vidět, že při tomto úkonu se změní úhel náběhu α , podélný sklon θ a rychlost klopení θ' . V důsledku změny podélného sklonu se mění i rychlost letu letadla, což graf neukazuje, ale tento jev popisuje literatura [6].

8.4 Stranový pohyb letadla

Linearizace a úpravy stranového pohybu jsou popsány v literatuře [6]. Já už v této bakalářské práci uvedu rovnou výsledný tvar pohybových rovnic stranového pohybu a budu s touto soustavou obdobně pracovat jako v případě podélného pohybu.

$$\begin{aligned}
 \beta' + b_{11}\beta + b_{12}\phi - \psi &= d_{12}\delta_s \\
 b_{21}\beta + \phi'' + b_{22}\phi' + b_{20}\psi'' + b_{23}\psi' &= d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s \\
 b_{31}\beta + b_{30}\phi'' + b_{32}\phi' + \psi'' + b_{33}\psi' &= d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

Stejně jako u podélného pohybu, i zde koeficienty b_{ij} a d_{ij} obsahují hmotnostní, geometrické a aerodynamické parametry letadla. Jejich konkrétní podobu je opět možné vidět v literatuře [6].

Koeficienty pohybových rovnic stranového pohybu

Při vyjadřování dynamických vlastností pohybu letadla do strany použijí opět vlastnosti malého dopravního letadla. Koeficienty pro jeho cestovní režim jsou tedy následující:

$$\begin{aligned}b_{11} &= 0.146, b_{12} = -0.22, d_{12} = 0.043, \\b_{21} &= 1.865, b_{22} = 5.085, b_{23} = 2.688, d_{21} = 8.522, d_{22} = 0.292, \\b_{31} &= 1.87, b_{32} = 0.859, b_{33} = 0.673, d_{31} = 0.837, d_{32} = 1.728\end{aligned}\quad (8.13)$$

U tohoto letadla nejsou uplatněny koeficienty b_{20} a b_{30} . Při simulaci nesmí být na toto zapomenuto.

8.4.1 Chování soustavy stranového pohybu v programu TKSL

Nyní se opět dostanu k praktické části, a to otestování a odsimulování této soustavy (modelu) v programu TKSL. Stejně jako v předchozím případě, i nyní musím diferenciální rovnice stranového pohybu (8.13) převést do podoby použitelné pro TKSL.

Rád bych zde uvedl dva postupy. Jeden s nich vychází z postupů uvedených v převodu rovnic podélného pohybu. Objevuje se zde však velmi zajímavý problém tzv. **problém algebraické smyčky**, který stojí jistě za povšimnutí. Druhý postup je složitější a vede ke zdárnému konci. I tento pokus samozřejmě v této práci popíši.

1. Postup, který vede ke vzniku algebraické smyčky.

1. Pro přehlednost řešení uvedu celou soustavu ještě jednou.

$$\begin{aligned}\beta' + b_{11}\beta + b_{12}\Phi - \Psi' &= d_{12}\delta_s \\b_{21}\beta + \Phi'' + b_{22}\Phi' + b_{20}\Psi'' + b_{23}\Psi' &= d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s \\b_{31}\beta + b_{30}\Phi'' + b_{32}\Phi' + \Psi''' + b_{33}\Psi'' &= d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s\end{aligned}$$

2. Na pravou stranu převedu proměnné s nejvyšší derivací.

$$\begin{aligned}\beta' &= -b_{11}\beta - b_{12}\Phi + \Psi' + d_{12}\delta_s \\ \Phi'' &= -b_{21}\beta - b_{22}\Phi' - b_{20}\Psi'' - b_{23}\Psi' + d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s \\ \Psi''' &= -b_{31}\beta - b_{30}\Phi'' - b_{32}\Phi' - b_{33}\Psi'' + d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s\end{aligned}$$

3. Zavedu potřebné substituce pro odstranění derivací na pravé straně rovnic.

$$\begin{aligned}\Psi' &= x, \Phi' = y \\ \beta' &= -b_{11}\beta - b_{12}\Phi + x + d_{12}\delta_s \\ \text{tmp}_1 &= -b_{21}\beta - b_{22}y - b_{20}\text{tmp}_2 - b_{23}x + d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s \\ y' &= \text{tmp}_1 \\ \text{tmp}_2 &= -b_{31}\beta - b_{30}\text{tmp}_1 - b_{32}y - b_{33}x + d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s \\ x' &= \text{tmp}_2\end{aligned}$$

Zpracování problému v programu TKSL

```
var psi, beta, phi, x, y, tmp1, tmp2;
const b20=0, b30=0, delta_s=1, delta_k=0, b11=0.146,
b12=-0.22, d12=0.043, b21=1.865, b22=5.085, b23=2.688,
d21=8.522, d22=0.292, b31=1.87, b32=0.859, b33=0.673,
d31=0.837, d32=1.728;

system
psi'=x &0;
phi'=y &0;
beta'=-b11*beta-b21*phi+x+d12*delta_s &0;
tmp1=-b21*beta-b22*y-b20*tmp2-b23*x+d21*delta_k+d22*delta_s;
y'=tmp1 &0;
tmp2=-b31*beta-b30*tmp1-b32*y-b33*x+d31*delta_k+d32*delta_s;
x'=tmp2 &0;
sysend.
```

4. Po spuštění překladač zdrojového kódu TKSL zahlásí chybu a ke spuštění běhu simulace nedojde.

```
File Edit Search Run Compile View Windows Draw Help
Circular depending equation !
const b20=0,b30=0,delta_s=5,delta_k=5,b11=0.146,b12=-0.22,d12=0.043,
b21=1.865,b22=5.085,b23=2.688,d21=8.522,d22=0.292,
b31=1.87,b32=0.859,b33=0.673,d31=0.837,d32=1.728;

system
psi'=x &0;
beta'=-b11*beta-b21*phi+x+d12*delta_s &0;
phi'=y &0;
tmp1=-b21*beta-b22*y-b20*tmp2-b23*x+d21*delta_k+d22*delta_s;
y'=tmp1 &0;
tmp2=-b31*beta-b30*tmp1-b32*y-b33*x+d31*delta_k+d32*delta_s;
x'=tmp2 &0;
sysend.
```

13:24
F1 Help F2 Save F3 Open Alt-F3 Close F9 Compile Ctrl-F9 Run F10 Menu

Obr. 8.13 Circular depending equation – algebraická smyčka

Jak je vidět na obrázku 8.13, simulace se nespustí, protože program TKSL našel ve zdrojovém kódu tzv. algebraickou smyčku. Algebraická smyčka je taková smyčka v řešení soustavy diferenciálních rovnic, kde některá z rovnic potřebuje ke svému řešení vyřešení sebe sama, což je prakticky nemožné.

2. Postup, který vede k úspěšnému vyřešení soustavy diferenciálních rovnic popisujících pohyb letadla do strany.

1. Pro přehlednost řešení uvedu celou soustavu ještě jednou.

$$\beta' + b_{11}\beta + b_{12}\Phi - \Psi' = d_{12}\delta_s$$

$$b_{21}\beta + \Phi'' + b_{22}\Phi' + b_{20}\Psi'' + b_{23}\Psi' = d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s$$

$$b_{31}\beta + b_{30}\Phi'' + b_{32}\Phi' + \Psi'' + b_{33}\Psi' = d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s$$

2. Jelikož je toto řešení složitější než předcházející, v každém následujícím bodě uvedu úpravu každé rovnice zvlášť. Začnu tedy první rovnicí, kde pouze převedu jednu z derivací na levou stranu.

$$\beta' = d_{12}\delta_s - b_{11}\beta - b_{12}\Phi + \Psi'$$

3. U druhé rovnice prozatím také pouze převedu nejvyšší samostatnou derivaci na levou stranu.

$$\Phi'' = d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s - b_{21}\beta - b_{22}\Phi' - b_{20}\Psi'' - b_{23}\Psi'$$

4. Do třetí rovnice dosadím vyjádřený Φ'' z předcházející úpravy.

$$b_{31}\beta + b_{30}(d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s - b_{21}\beta - b_{22}\Phi' - b_{20}\Psi'' - b_{23}\Psi') + b_{32}\Phi' + \Psi'' + b_{33}\Psi' = d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s$$

5. Z třetí rovnice převedu na levou stranu Ψ'' a zároveň vytknou Ψ'' z pravé strany rovnice. Ještě také za Φ'' u členu $b_{30}\Phi''$ dosadím výraz z bodu 3.

$$\text{tmp} = \Psi'' = \frac{1}{(1 - b_{20}b_{30})} (d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s - b_{31}\beta - b_{30}d_{21}\delta_k - b_{30}d_{22}\delta_s + b_{30}b_{21}\beta + b_{30}b_{22}\Phi' + b_{30}b_{23}\Psi' - b_{32}\Phi' - b_{33}\Psi')$$

6. Do již upravené druhé rovnice z bodu 3 dosadím výraz Ψ'' z předešlého bodu 5.

$$\Phi'' = d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s - b_{21}\beta - b_{22}\Phi' - b_{20}\text{tmp} - b_{23}\Psi'$$

7. Zavedu potřebné substituce pro odstranění derivací na pravé straně rovnic.

$$\Psi' = x$$

$$\Phi' = y$$

$$\beta' = d_{12}\delta_s - b_{11}\beta - b_{12}\Phi + x$$

$$tmp = \frac{1}{(1 - b_{20}b_{30})} (d_{31}\delta_k + d_{32}\delta_s - b_{31}\beta - b_{30}d_{21}\delta_k - b_{30}d_{22}\delta_s + b_{30}b_{21}\beta + b_{30}b_{22}y + b_{30}b_{23}x - b_{32}y - b_{33}x)$$

$$x' = tmp$$

$$y' = d_{21}\delta_k + d_{22}\delta_s - b_{21}\beta - b_{22}y - b_{20}tmp - b_{23}x$$

Zpracování problému v programu TKSL

```

var psi,beta,phi,x,y,tmp;
const delta_s=1, delta_k=1, b20=0, b30=0, b11=0.146,
b12=-0.22, d12=0.043, b21=1.865, b22=5.085, b23=2.688,
d21=8.522, d22=0.292, b31=1.87, b32=0.859, b33=0.673,
d31=0.837, d32=1.728;

system

psi'=x &0;
phi'=y &0;
beta'=d12*delta_s-b11*beta-b12*phi+x &0;

tmp=(1/(1-b20*b30))*(d31*delta_k+d32*delta_s-b31*beta-
b30*d21*delta_k-b30*d22*delta_s+b30*b21*beta+b30*b22*y
+b30*b23*x-b32*y-b33*x);

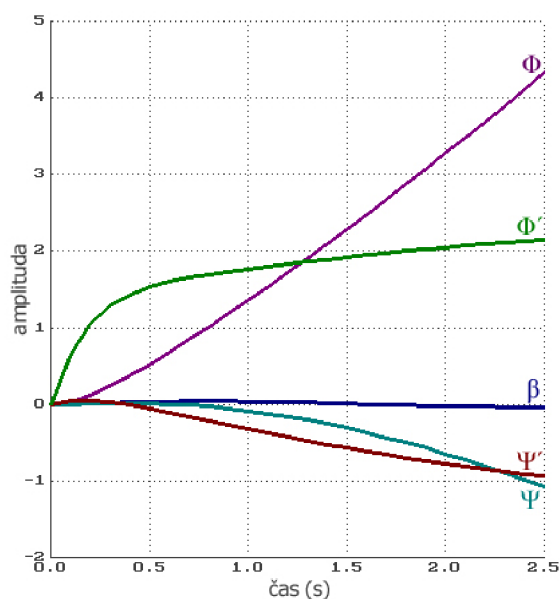
x'=tmp &0;
y'=d21*delta_k+d12*delta_s-b21*beta-b22*y-b20*tmp-b23*x &0;

sysend.

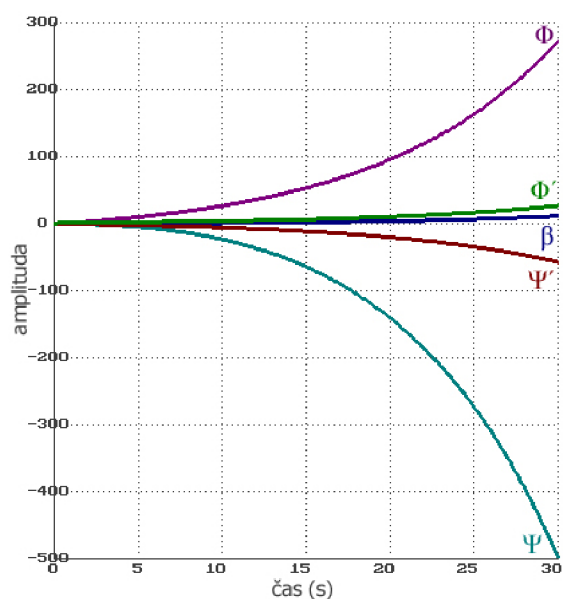
```

Díky programu TKSL můžeme i v tomto případě sledovat průběhy jednotlivých proměnných při simulování změn v letu letadla. Na následujících obrázcích budou názorně zobrazeny a popsány všechny hlavní změny při stranovém pohybu letadla.

Vstup výchylka křidélek δ_K



Obr. 8.14 Vstup výchylky křidélek, náběh změny pohybu



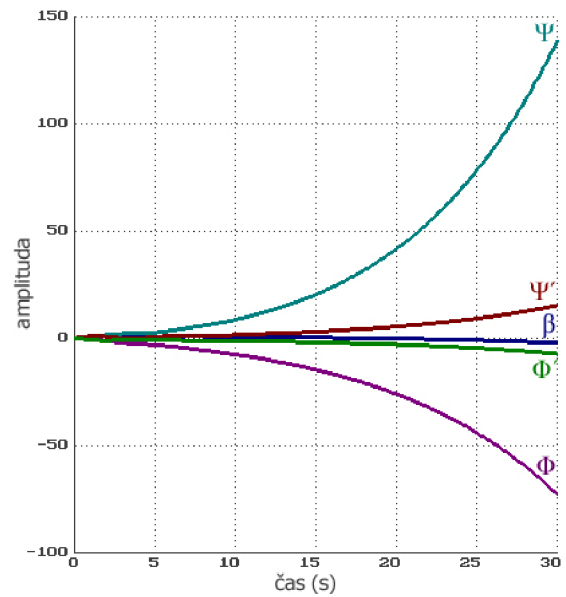
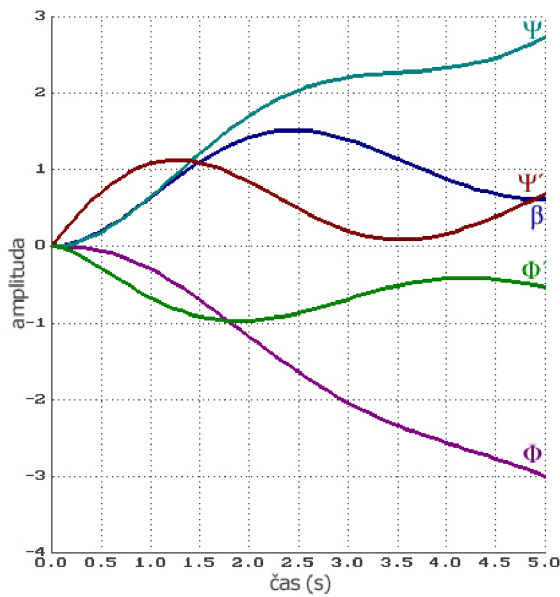
Obr. 8.15 Vstup výchylky křidélek, celý průběh

Grafy na obrázcích 8.14 a 8.15 zobrazují odezvy na jednotkový skok v křídélkách δ_K ($\delta_k=1$) při nezměněné směrovce δ_S ($\delta_s=0$). Obrázek 8.14 obsahuje začátek odezvy na jednotkový skok a obrázek 8.15 ukazuje delší časový průběh výchylky křidélek δ_K .

Jak je na prvním obrázku 8.14 vidět, nejrychlejší změnu zaznamenáme u úhlové rychlosti klonění Φ' . Ta je posléze následována výraznou změnou příčného sklonu Φ . U změny kurzu Ψ a úhlové rychlosti zatačení Ψ' není vidět tak výrazná změna, jako u veličin předešlých. Takřka nulovou změnu vidíme i u úhlu vybočení β . V podstatě je to zapříčiněno tím, že úhel vybočení ovlivňují spíše vnější faktory.

Obrázek 8.15 nám rozšiřuje dosavadní poznatky o tomto pohybu. Pokud necháme simulaci běžet délejší čas, v tomto případě stačilo např. 30 sec., vidíme velkou divergenci všech složek stranového pohybu. Nejmarkantnější dopad má tato změna křidélek pochopitelně na příčný sklon Φ a kurz Ψ .

Vstup výchylka směrovky δ_s



Obr. 8.16 Vstup výchylky směrovky, náběh změny Obr. 8.17 Vstup výchylky směrovky, celý průběh pohybu

Grafy na obrázcích 8.16 a 8.17 nám nastiňují stav letu letadla po aplikaci výchylky směrovek ($\delta_s=1$) při nezměněné výchylce křidélek ($\delta_k=0$). Obrázek 8.16 obsahuje začátek odezvy na vstup a obrázek 8.17 ukazuje delší časový průběh výchylky směrovky.

Obrázek 8.16 obsahuje graf, jak už bylo napsáno, začátku odezvy na jednotkový skok výchylky směrovky. V tomto případě má celý pohyb charakter kymácivé složky stranového pohybu. Konkrétně je tento jev vidět na průbězích všech úhlů a úhlových zrychleních.

Stejně jako u výchylky křidélek, i zde bych rád uvedl druhý graf. Graf na obrázku 8.17 nám opět rozšiřuje dosavadní poznatky o pohybu při vstupu výchylky směrovky. Pokud necháme simulaci běžet délejší čas, v tomto případě zase např. 30 sec., vidíme velkou divergenci všech složek stranového pohybu. V tomto případě si oproti předchozí simulaci některé proměnné proměnily svojí orientaci. Nejmarkantnější dopad má tato změna směrovky znovu na příčný sklon Φ a kurz Ψ .

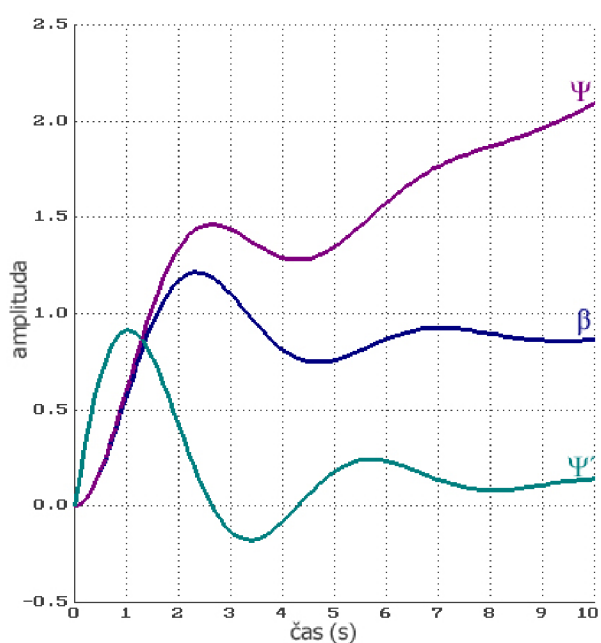
Aproximace stranového pohybu letadla kymácivou složkou

Tvar této aproximace získáme tak, že z pohybových rovnic stranového pohybu vypustíme druhou rovnici a členy s klonivým pohybem Φ .

$$\begin{aligned} \beta + b_{11} \beta - \psi' &= 0 \\ b_{31} \beta + \psi'' + b_{33} \psi' &= d_{32} \delta_s \end{aligned} \quad (8.13)$$

Zpracování problému v programu TKSL

```
var psi,beta,x;  
const delta_s=1,b11=0.146,b31=1.87,b33=0.673,d32=1.728;  
  
system  
  
psi'=x &0;  
beta'=x-b11*beta &0;  
x'=d32*delta_s-b31*beta-b33*x &0;  
  
sysend.
```



Obr. 8.18 Vstup výchylky směrovky při aproximaci kymácivou složkou pohybem

Tato aproximace je ve skutečnosti otáčení letadla kolem své kolmé osy. Tento pohyb je vyvolán změnou výchylky směrovky. Na grafu na obrázku 8.18 je jasně vidět, jak jednotlivé proměnné nabíhají. Po ustálení úhlové rychlosti zatáčení Ψ' , se začne velmi rychle zvyšovat kurz zatáčení Ψ .

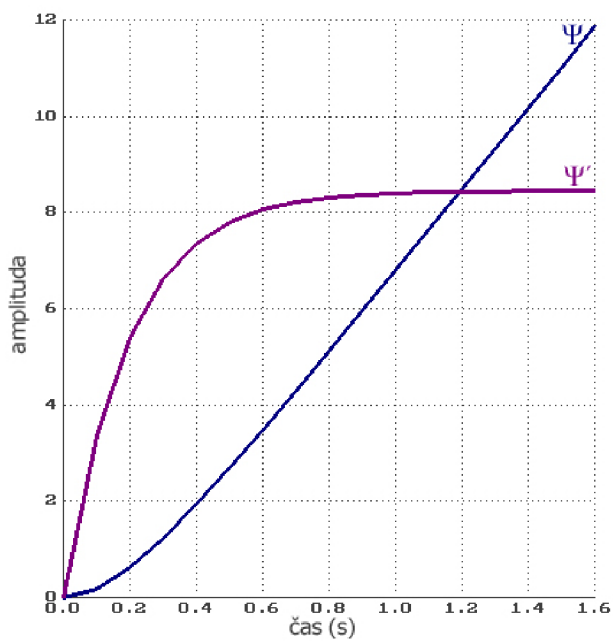
Aproximace stranového pohybu letadla klonivým pohybem

Tento aproximovaný pohyb je popsán druhou diferenciální rovnicí stranového pohybu, která obsahuje naopak pouze klonivé složky Φ .

$$\phi'' + b_{22}\phi' = d_{12}\delta_k \quad (7.14)$$

Zpracování problému v programu TKSL

```
var phi, y;  
const delta_k=1, d12=0.043, b22=5.085;  
  
system  
  
phi'=y &0;  
y'=d12*delta_k-b22*y &0;  
  
sysend.
```



Aproximace na tomto grafu na obrázku 8.19 představuje otáčení letadla podél jeho podélné osy. Pohyb je vyvolán změnou výchylky křidélek ($\delta_k=1$). Stejně jako v předešlé aproximaci, i zde se po ustálení úhlové rychlosti zatáčení Ψ' začne velmi rychle zvyšovat kurz zatáčení Ψ .

Obr. 8.19 Vstup výchylky směrovky při aproximaci kymácivou složkou pohybem

9 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit se s problematikou modelování spojitého systému, teorií řízení a dynamických vlastností pohybu letadla. Za pomoci Taylorovy řady měl být vytvořen model chování letadla na základě získaných znalostí ohledně dynamiky letu.

V první části této bakalářské práce jsem nastudoval základní principy teorie řízení. Své znalosti jsem posléze demonstroval při obhajobě semestrálního projektu, kde jsem představil vytvořenou a zregulovanou soustavu dle zadání Doc. Ing. Jiřího Kunovského, CSc.

V druhé fázi tvorby této bakalářské práce jsem se zaměřil právě na dynamické vlastnosti pohybu letadla ve vzduchu a snažil se získat základní znalosti o problematice systému řízení letu. Literatura [4] a [6], kterou jsem měl k dispozici, mi pomohla dostat se velice kvalitní a výstižnou formou k podstatě této složité problematiky.

Díky získaným informacím jsem se mohl v poslední fázi práce pustit do tvorby simulačního modelu pohybu letadla. Pro tyto účely jsme s vedoucím Doc. Ing. Jiřím Kunovským, CSc. vybrali program TKSL, který je sice staršího data výroby, ale stále patří mezi špičku v simulaci modelů založených na soustavě diferenciálních rovnic. Tento program vyhodnocuje výsledky na základě použití Taylorovy řady. Seznámení s touto metodou bylo také jedním z bodů zadání mé práce.

Na základě vytvořených modelů podélného i stranového pohybu letadla a porovnáním s dostupnou literaturou [6], mohu konstatovat, že vytvořené modely v této bakalářské práci odpovídají již publikovaným modelům, a že Taylorova metoda v podání programu TKSL je velice stabilní a kvalitní metodou pro simulování modelů vystavěných na soustavě diferenciálních rovnic.

Další směr rozvoje této práce je zcela jasný. Znalosti pramenící z této činnosti dávají výborný základ pro návrh systému, který bude umět stabilizovat a regulovat obě zmíněné varianty pohybu letadla. Dále je nasnadě vytvořit systém, který se bude podobat dnešním autopilotům.

V posledním odstavci této bakalářské práce bych rád uvedl, že studium dané problematiky pro mě bylo velice zajímavé a poutavé. Doufám, že tato práce bude užitečná pro zájemce o obor létání a všeho s ním spojeným.

Literatura

- [1] Prof. Ing. Jiří Skalický: CS., Teorie řízení, VUT v Brně, 2002
- [2] Dr. Ing. Petr Peringer: Modelování a simulace, VUT v Brně, 2006
- [3] Etkin, B.: Dynamics of Atmospheric Flight. New York: New York: John Wiley and Sons., 1972
- [4] Stevens, B., I., Lewis, F., L.: Aircraft Control and Simulation. John Wiley and Sons, Inc., New York 1992, ISBN 0-471-61397-2
- [5] Jansa, K.: Základy aerodynamiky a mechaniky letu. Skriptum, ČVUT Praha, fakulta strojní, vydavatelství ČVUT, 1979
- [6] doc. Ing. Zdislav Pech, CSc., Ing. Vratislav Věk, CSc.: Systémy řízení letu. Skriptum, ČVUT Praha, nakladatelství ČVUT, 2006, ISBN 80-01-03374-0
- [7] WWW stránky, Diferenciální rovnice – Wikipedia,
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD_rovnice
- [8] WWW stránky, Obvyčejné diferenciální rovnice – Wikipedia,
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Oby%C4%8Dejn%C3%A9_diferenci%C3%A1ln%C3%AD_rovnice
- [9] WWW stránky, A/D převodník – Wikipedia,
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/A/D_p%C5%99evodn%C3%ADk
- [10] WWW stránky, A/D a D/A převodník,
URL: <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/IPR/private/adda.pdf>
- [11] WWW stránky, Dynamický vztlak – Wikipedia,
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Dynamick%C3%BD_vztlak
- [12] WWW stránky, Úhel náběhu – Wikipedia,
URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Angle_of_attack
- [13] WWW stránky, Úhel vybočení – Wikipedia,
URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Sideslip_angle
- [14] WWW stránky, Dynamika letu letadla – Wikipedia,
URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Flight_dynamics
- [15] WWW stránky, Taylorova řada – Wikipedia,
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada
- [16] WWW stránky, Program TKSL,
URL: <http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/>

Seznam příloh

Příloha 1. CD - obsahuje zdrojové kódy pro program TKSL