Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Matematické a logické paradoxy

Bakalářská práce

Autor: Monika Remsová

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: 7507R / Bc. učitelství – všeobecný základ

1802R023 / Informatika se zaměřením na vzdělávání

7504R015 / Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. Anton Galaev, DrSc.

Hradec Králové 2024

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor: **Monika Remsová**

Studium: S17MA011BP

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Informatika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání

Název bakalářské práce: **Matematické a logické paradoxy**

Název bakalářské práce AJ: Mathematical and logical paradoxes

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Student by měl popsat a vysvětlit několika zajímavých paradoxů, které vídáme v běžném životě. Dále by měl ukázat, že v matematice jde o inivitivní využití pojmů a myšlenek. Z práce by měla být patrné, že matematika může být i zábavná, zajímavá a především silně využívaná v praktickém životě. Text této práce bude psán takovou formou, aby mohl být využíván učiteli na středních školách, jako motivace pro jejich studenty ke studiu matematiky.

Paradoxes in Mathematics Stanley Farlow

Zadávající pracoviště: Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: doc. Anton Galaev, DrSc.

Oponent: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 3.5.2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne 30. 4. 2024

Remsová
………………………………

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu doc. Antonu Galaev, DrSc. Za odborné vedení, za pomoc a cenné rady a nápady při zpracovávání této bakalářské práce.

Anotace

REMSOVÁ, Monika. Matematické a logické paradoxy. Hradec Králové, 2024. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí práce Anton Galaev. 64 s.

Bakalářská práce se zabývá základní trojicí druhů logických paradoxů. V práci je vybráno pět známých příkladů z různých matematických disciplín. Jedná se o matematické anomálie s využitím nuly i nekonečna, geometrických tvarů, pravděpodobnosti i teorie množin. Jednotlivé paradoxy jsou popsány a vysvětleny. Na konci se nachází návrhy, které může pedagog využít pro představení daného tématu žákům základních a středních škol. Tyto návrhy jsou na 25 subjektech otestovány.

Klíčová slova

logické myšlení, matematika, nekonečno, paradoxy, pedagogika

Annotation

REMSOVÁ, Monika. Mathematical and logical paradoxes. Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Anton Galaev. 64 p.

The bachelor thesis deals with the basic triad of logical paradoxes. The thesis examines five well-known examples from various mathematical disciplines. The paradoxes are discussed involve mathematical anomalies using zero and infinity, geometric shapes, probability and set theory. Each paradox is described and explained. Additionally, the thesis proposes pedagogical strategies for introducing these topics to primary and secondary school pupils, which were subsequently tested on 25 participants.

Keywords

logical thinking, mathematics, infinity, paradoxes, pedagogy

Obsah

Úvod ... 9

Paradoxy ... 11

Význam a vznik paradoxů ... 11

Tři základní skupiny paradoxů ... 11

1 Nula ... 14

1.1 Číslo nula ... 14

1.2 Dělení nulou $a0 = c, a \neq 0$ ... 15

1.3 Dělení nulou $a0 = c, a = 0$ ... 16

1.4 Praktická část ... 17

2 Paradox tangramu (chybějící plochy) ... 18

2.1 Tangram ... 18

2.2 Paradoxy tangramu ... 19

2.3 Praktická část ... 24

3 Zénónovy paradoxy ... 26

3.1 Zénón z Eleje ... 26

3.2 Zénónovy nejznámější paradoxy ... 27

3.3 Praktická část ... 30

4 Russellův paradox – Teorie množin ... 32

4.1 Bertrand Russell ... 32

4.2 Teorie množin ... 33

4.3 Paradoxy lháře ... 35

4.4 Praktická část ... 37

5 Monty Hallův paradox ... 39

5.1 Monty Hall ... 39

5.2 Joseph Bertrand ... 40

5.3 Pravděpodobnost ... 41

5.4 Pravděpodobnostní paradoxy ... 42

5.5 Praktická část ... 45

Výstup s žáky 9. ročníku ZŠ ... 46

Provedení ... 46

Výsledky dotazníku ... 46

Závěr ... 51

Seznam použitých zdrojů........ 53
Literatura........ 53
Obrázky........ 56
Příloha 1........ 58
Příloha 2........ 59
Příloha 3........ 62

Úvod

Tato bakalářská práce je vytvořena na téma matematické a logické paradoxy. Toto téma je autorce velmi blízké. Už od malička milovala logické hádanky a hlavolamy, které rozvíjí představivost a logické myšlení. Je důležité nenahlížet na matematiku jen jako na vědu o číslech, postupech, vzorcích a hodnotách, ale nahlížet na ni z jiné perspektivy. Umět se zamyslet nad výsledkem a jeho podstatou. Vidět matematiku a její smysl v běžném životě.

Pod slovem paradox si každý představí něco jiného např. nesmyslnost, zmatek, mylný úsudek, klam, a mnoho dalšího. Ve skutečnosti mají všichni s touto představou pravdu, jedná se o formálně správný úsudek, jehož výsledek je logický spor. Máme tři základní druhy paradoxů, které budou na začátku této práce představeny. Ke každému druhu bude uvedena nejzákladnější a nejznámější ukázka a příklad.

V práci se zaměříme na pět vybraných matematických paradoxů. Každý paradox je z jiného oboru matematiky, a tudíž mají rozdílné základy. Každému z nich věnujeme jednu samostatnou kapitolu, která je rozdělena na úvod do problematiky, teorii a praktickou část. V úvodu se seznamujeme s důležitými pojmy, které jsou v dané kapitole využívány, a s jejich historií. V teorii se dozvídáme zjištěná fakta, vysvětlujeme si jejich funkci a postupně objevujeme vznik daného paradoxu. V praktické části je navrženo představení paradoxu žákům a studentům. Součástí práce bude vyzkoušení praktické části na žácích devátého ročníku základní školy a výsledek hodnotícího formuláře od těchto žáků.

První paradox souvisí s číslem nula a dělením tímto zákeřným číslem. Už na prvním stupni ZŠ je žákům zdůrazňováno, že nulou nelze dělit. I přesto na to žáci často zapomínají. Díky této práci mohou pochopit, proč tomu tak je, a možná jim tento příklad pomůže na jedno z nejdůležitějších pravidel v matematice nezapomínat a vždy určovat potřebné podmínky, pro které má daný výraz smysl.

Další kapitola se zaobírá geometrickým paradoxem tangramu, známějším jako paradox mizející plochy. Mnoho žáků zná z internetu gif s řezáním čokolády a ubíráním jednotlivých dílků, přestože čokoláda zůstává pořád stejně velká. Tento gif vypadá velmi uvěřitelně a některé děti i dospělé dokáže zmást a oklamat, proto danou problematiku objasníme a optický klam vyvrátíme.

V kapitole Zénónovy paradoxy se zaměříme na dávného filozofa Zénóna a jeho přesvědčení o neexistenci pohybu. Jeho učení si ukážeme na dvou paradoxech. První se bude týkat bájného hrdiny Achilla a jeho závodu s želvou. Druhý paradox se zaměřuje na dichotomii tzv. půlení.

Ve čtvrté kapitole se setkáme s teorií množin a s Russellovým paradoxem. Tento paradox je někdy spojován s lhářskými paradoxy, které jsou pro žáky a studenty pochopitelnější. Ukážeme si, jak lhářský paradox vypadá na příkladu s vesnickým holičem, a k čemu takový paradox nakonec vede. V této kapitole narazíme i na téma sémantické paradoxy.

Posledními paradoxy, kterým věnujeme pozornost, souvisí s pravděpodobností. Představíme si amerického moderátora Monty Halla a jeho významný problém tří dveří, který se zabývá pravděpodobností změny prvního výběru. Také zmíníme francouzského matematika Josepha Bertranda, jehož jméno známe z několika různých vědních disciplín. U něho se zaměříme na paradox Bertrandovy krabice a vysvětlíme pravděpodobnost výběru dvou zlatých mincí.

Cílem práce je ukázat matematiku zábavnou formou, objasnit několik záhad a naučit žáky přemýšlet logicky nad jednotlivými úlohami a procesy nejen ve škole ale i v běžném životě. Porozumět zadání, postupům a zvážit pravdivost tvrzení či výsledku, který vidíme před sebou.

Paradoxy

Význam a vznik paradoxů

Slovo paradox je tvrzení, které má mnoho významů. Jeho základní objasnění zní: Paradox spojuje pojmy nebo výroky zdánlivě protismyslné a odporující běžným pravidlům, z kterých se stává neočekávaně smysluplný celek. Také může být definován, jako formálně správný úsudek, jehož výsledek je logický spor.[1]

Slovo paradox je odvozeno z řeckého slova paradoxos, složeného z předpony ‚para' a kmene ‚doxa'. ‚Doxa' se běžně překládá jako mínění, názor, tvrzení o něčem či zdání, ‚para' naproti tomu označuje něco vedle, proti něčemu, nebo v rozporu.[2] Paradox je tedy poměrně nejednoznačné slovo, označující takovou věc, která je v rozporu s naším přesvědčením a očekáváním. S paradoxy se lidstvo setkávalo už od dob antiky. Toto slovo bylo přeloženo do latiny jako paradoxum.[3] Paradoxy studovali především filozofové, např. Zénón z Eleje (asi 490-430 př.n.l.), Eubúlidés z Milétu (4 stol. př.n.l.), Aristoteles (384-322 př.n.l.) a jejich žáci. S paradoxy se v historii dále pracovalo a výzkum těchto významných filozofů nebyl zapomenut, ale nedošlo k jeho velkému rozvoji. K velkému pokroku došlo až na konci 19 století n.l., kdy logici a matematici začali vytvářet formalizovaný systém logiky a matematiky pomocí modelů a pravidel. Snažili se odstranit nejasnosti, neurčitosti, víceznačnosti, klamná zdání, a především samotné paradoxy v logice i matematice. Na počátku 20. století se ukázalo, že jsou paradoxy důležité a nedá se jich zcela zbavit. V této době se paradoxům věnovali mnozí logici a matematici, napsali mnoho knih, ve kterých se každý zabývá vlastním paradoxem, na který pohlíží vlastním směrem. Mezi ně patří: např. významný Rakousko-Uherský matematik Kurt Göbel a jeho věty o neúplnosti, britský matematik a filozof Bertrand Russell, německý matematik a logik Georg Cantor, který se věnoval nekonečnu a rozšířil teorii množin o nekonečná čísla.

Tři základní skupiny paradoxů

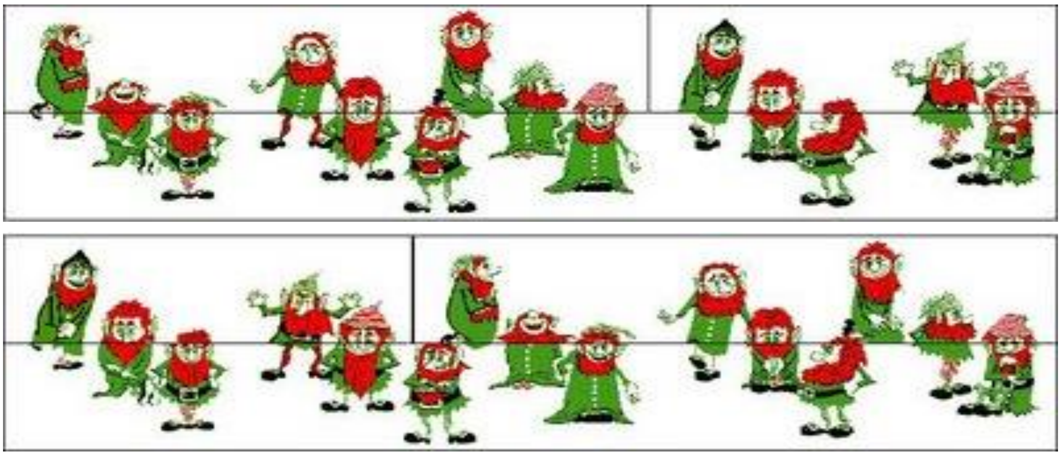
1. skupina paradoxů – tvrzení zní absurdně, ale je pravdivé
2. skupina paradoxů – tvrzení zní pravdivě, ale je nesmyslné
3. skupina paradoxů – dvojice pravdivých a dokázaných výroků společně neslučitelných a vedoucích ke sporným výsledkům[4]

1. skupina paradoxů

Tvrzení, které zní zdánlivě nemožně, ale ve skutečnosti je pravdivé a proveditelné. Skvělou ukázkou typu těchto paradoxů jsou Simpsonovy paradoxy, např. jeho paradox o škole, který zní: Pan učitel zjišťuje pomocí testů, který ze dvou žáků je lepší. Premiant Jarda napsal první test na 30 % a druhý na 100 %. Nešika Pepa napsal první test na 25 % a druhý na 75 %. Z výsledků jasně vyplývá, že Jarda uspěl daleko lépe než Pepa. Nyní se na jednotlivé testy podíváme trochu blíž. Jardův první test se skládal z 10 otázek a Pepův ze 4 otázek. Jarda odpověděl správně na 3 otázky a Pepa jen na 1 otázku. V druhém testu měl Jarda dvě otázky a Pepa 8 otázek. Jarda na obě odpověděl správně a Pepa správně odpověděl na šest z nich. Celkem tedy premiant Jarda zodpověděl správně 5 otázek z 12 a nešika Pepa 7 otázek z 12. Tudíž jasně vyplývá, že nešika Pepa uspěl v testech lépe než premiant Jarda.

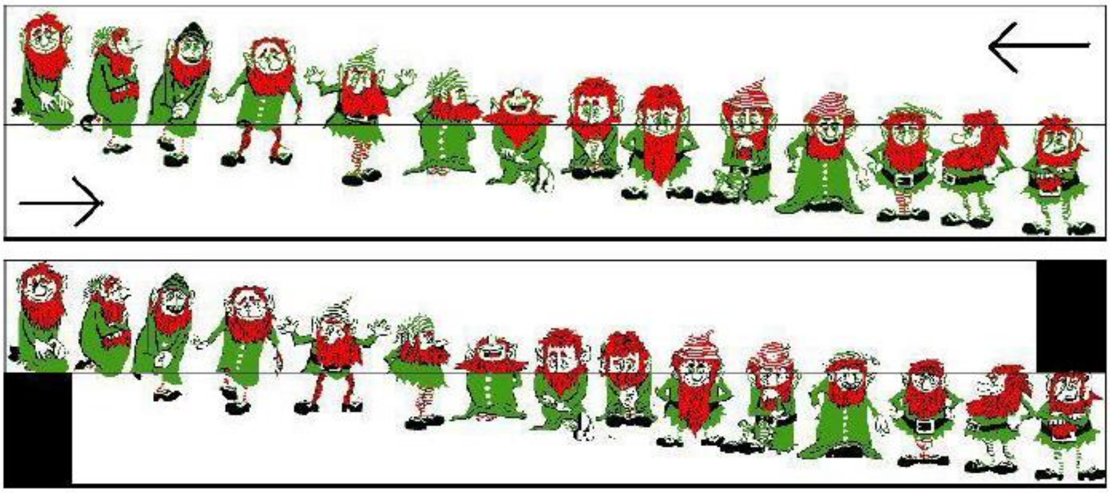
2. skupina paradoxů

Tvrzení, které zní zdánlivě pravdivě, ale ve skutečnosti je nepravdivé a neproveditelné. Obvykle se jedná o nějaký švindl a podfuk, nejčastěji o geometrické optické klamy. Velice známou ukázkou tohoto typu paradoxů je kanadský chyták od firmy W.A. Elliott Company v Toronu: The Vanishing Leprechaun (Mizející skřítek).



Obrázek 1: Vanishing leprechaun puzzle-Clip Art Library

Když rozstřihneme horní obrázek podle dvou vyznačených čar na dvě vrchní části a jednu spodní, následně obě vrchní části prohodíme (viz. Obrázek 1). Vznikne nám nový obrázek, na kterém je 15 skřítků. Ale na původním obrázku bylo pouze 14 skřítků. Jak je možné, že nám jeden skřítek přibyl? Vysvětlení je jednoduché. Na vzniklém obrázku prvnímu trpaslíkovi chybí malá část nohou a poslednímu trocha vlasů, tyto detaily jsou téměř nepostřehnutelé a pro pozorovatele zanedbatelné. Právě tato drobnost a tkz. zanedbatelnost způsobyla vzniknutí paradoxu, který je velice dobře provedený a propracovaný optický klam. Grafické vysvětlení naleznete na následujícím obrázku.



Obrázek 2: Leprechauns 15 or 14 | PP

3. skupina paradoxů

Dvojice tvrzení, která jsou sama o sobě pravdivá, když je však zkombinujeme vznikne nám nesmyslné a neproveditelné tvrzení. Jedná se většinou o otázky, či výroky na které nelze odpovědět ani kladně ani záporně. Dostáváme se tudíž do sporu, ze kterého nelze najít jasné řešení. Tento druh paradoxů se nejčastěji vyskytuje v teologii a filozofii, jejich základ patří do výrokové logiky, a tudíž do matematiky. Na 3. skupinu paradoxů se zaměřil na začátku 20. století významný logik a matematik Bertrand Russell.

Známý příklad, který spadá do této kategorie, je Epimenidův paradox. Původní výrok zní: „Všichni Kréťané jsou lháři." Podstatné přitom je, že autorem tohoto výroku je Epimenidés, který je sám Kréťan. Tento paradox můžeme znát i ve znění: „Epimenidés říká: ‚Všichni Kréťané jsou lháři.' Epimenidés je Kréťan." Pro tento paradox je důležité pochopit znění této věty - ‚být lhářem' se v této větě používá jako náznak pro ‚lhát stále'. Pokud je úvodní věta pravdivá, pak žádný Kréťan nemluví pravdu, ale sám Epimenidés je Kréťan, tudíž nemůže říkat pravdu. Když tedy neříká pravdu, tak musí lhát a úvodní věta musí být lživá. Tudíž platí opačný výrok: „Žádní Kréťané nejsou lháři." Tudíž ani sám Kréťan Epimenidés nesmí lhát, ale on lže. Tudíž se opět dostáváme do sporu s předpokladem, ze kterého není cesta ven. Naprosto obdobný je výrok: „Tato věta je nepravdivá." Oba tyto výroky / paradoxy patří do skupiny lhářských paradoxů.[5]

1 Nula

1.1 Číslo nula

„Nula není obyčejné nic. Je to nic opírající se o železný zákon své nezbytnosti.“
– Gabriel Laub, český esejista a novinář (1928–1998)

V dnešní době je číslo 0 pro nás naprosto přirozené, v minulosti tomu tak ale nebylo. Matematické myšlení v historii vznikalo díky základním počtům: počítání předmětů (např. zvířat), stanovení hodnoty majetku nebo zjišťování času. Nula nebyla ani k jednomu z těchto počtů potřeba. Lidstvo nepřemýšlelo nad tím, že mají 0 koz, prostě neměli žádnou – a to jim stačilo, nulu nepotřebovali.[6]

V Egyptě vznikaly základy geometrie. Určovali pravé úhly pomocí provazů, znali čtverec a trojúhelník, uměli vypočítat objem několika těles (např. pyramid). Ale ani zde nemáme jediný důkaz o použití nuly.

Nula byla objevena až někdy kolem roku 300 př.n.l. v Babyloně. Měla význam jen jako znak pro obsazení prázdné pozice, neměla žádnou vlastní numerickou hodnotu (vysvětlení: číslo 1026 by bez použití nuly bylo číslem 126). Nulu tehdy značili symbolem dvou šikmých klínů. Na následujícím obrázku (Obrázek 3) je ukázka Babylonského způsobu zápisu čísel, ve kterém symbol pro nulu určuje pozici ostatních číslic (znaků), a tím každý sled symbolů má jedinečný význam.[7]

Obrázek 3: Život bez nuly.

Dokonce i v dnešní době se stává, že nepočítáme s nulou jako prvním číslem. Podívejme se třeba na telefonní klávesnici nebo na horní část klávesnice u našich počítačů, obojí začíná číslem 1 a číslem 0 až končí.

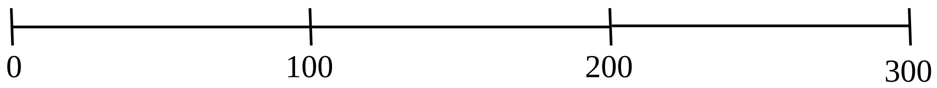
Osamocená nula se chová vždy proti všem pravidlům. Když přičteme k číslu jeho vlastní hodnotu, tak se tím změní. Jedna a jedna není jedna, ale dvě. Dvě a dvě jsou čtyři. Ale nula a nula je pořád nula. Toto chování odporuje Archimédově axiomu, který říká: přičteme-li číslo k sobě samému, převýší výsledek vždy jakékoli původní číslo.[8] Nula se však podle tohoto axiomu zvětšit nedá. Také její přičítání k jinému číslu nevede k vyššímu výsledku. Podobný problém vzniká i při odčítání.

Při násobení nám nula dělá ještě větší problémy. Pokud násobení dvou čísel bereme jako měření plochy obdélníka, jak si představit plochu o šířce a výšce 0? Co to vlastně je? Nic. Vzniká nám i další problém: $1 * 0 = 0$ a $2 * 0 = 0$, to znamená, že $1 = 2$? Ale to je naprostý nesmysl!

1.2 Dělení nulou $\frac{a}{0} = c, a \neq 0$

„Dělení nulou: Kdo vám nakecal tu blbost, že to nejde? Slyšeli jste o černých dírách?"
– Sebastián Wortys, umělec a spisovatel (1994)

Dělení je rozdělení nějakého velkého celku na stejně velké menší dílky. Příklad: Maminka má v peněžence 300 Kč a chce je spravedlivě rozdělit svým třem dětem. Kolik každé dítě dostane korun? Graficky si to můžeme vyjádřit jako rozdělení úsečky o délce 300 na tři stejně dlouhé části:



Obrázek 4: Číselná osa

Může se stát, že číslo nebude bezezbytku dělitelné. Např. číslo 301 nemůžeme rozdělit na tři stejně velké části. Řešením je zanedbání nepatrného zbytku (tedy 1 Kč), tento zbytek je naprosto nepatrný a můžeme ho tedy ignorovat.

Představme si dělení jako jednoduché odečítání. Vezmeme si základní číslo a číslo, kterým dělíme. Musíme jen odečíst toto číslo od základního čísla, a to stále opakovat, dokud nedostaneme nulu, nebo číslo menší jak samotný menšitel.
Např. číslo $300 \div 100 = ?$ znamená:

$$300 - 100 = 200$$
$$200 - 100 = 100$$
$$100 - 100 = 0$$

Museli jsme tedy odečíst číslo 100 třikrát. Výsledkem dělení $300 \div 100$ je číslo 3.

Nulu můžeme podělit jakýmkoliv číslem, toto je platný výraz: $\frac{0}{10}$. V podstatě tím říkáme, že chceme nulu rozdělit na 10 stejných částí, tím pádem se každá část rovná nule. Dělit nulu jiným číslem tedy můžeme, ale nemůžeme jiné číslo dělit nulou. Výraz $\frac{10}{0}$ je neplatný. Nyní si vysvětlíme, proč tomu tak je.

Stále si můžeme dělení ukázat jako jednoduché odčítání. Kolik je $300 \div 0$?

$$300 - 0 = 300$$
$$300 - 0 = 300$$
$$300 - 0 = 300$$
$$\vdots$$

Protože odečítáme do nekonečna, tak by výsledkem mělo být ∞. Nekonečno není žádné určité číslo, ačkoliv se v matematice často používá. Žádný výsledek se nemůže rovnat nekonečnu. Avšak máme čísla, která jdou do nekonečna nebo se k němu alespoň blíží, ale nikdy nemůžou být samotným nekonečnem. Tato rovnice tedy nemá žádný výsledek.

Dělení je možné také zavést jako inverzní násobení. Pokud obecně dělíme $\frac{a}{b}$, pak výsledkem je číslo c, pro které platí $b * c = a$. Když se pokoušíme dělit nulou $\frac{a}{0}$, tak hledáme nějaké číslo c, pro které platí $0 * c = a$. Například $\frac{15}{0} = c \ \rightarrow 0 * c = 15$.[9] Cokoliv krát nula je nula, nikdy nenajdeme c, pro které by tato rovnice měla smysl. Proto říkáme, že dělit nulou nelze.

1.3 Dělení nulou $\frac{a}{0} = c, a = 0$

„Nula je dvojčetem nekonečna, a přitom stojí na úplně opačné straně. Nula má moc otřást základy logiky.“ – Charles Seife, spisovatel a novinář (1972)

Dělení jako inverzní násobení

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \ \mathbb{R}\ ?$$

V algebře vnímáme dělení jako opak násobení, jak jsme si vysvětlili v minulé kapitole. Představme si, že máme výraz $\frac{0}{0} = x$. Je potřeba nalézt neznámou hodnotu x, pro kterou platí $x * 0 = 0$. Ovšem platí, že vynásobíme-li jakékoliv číslo nulou, tak výsledkem bude opět nula

(např. $1 * 0 = 0, -200 * 0 = 0, \frac{81}{26} * 0 = 0, \pi * 0 = 0, 0 * 0 = 0, \ldots$).

To by však znamenalo, že výsledkem může být jakékoli reálné číslo. Nyní vzniká stejný problém, s jakým jsme se potýkali v úvodu o čísle nula. Máme-li:

$$1 * 0 = 0 \text{ a } -200 * 0 = 0$$

$$1 * 0 = -200 * 0$$

Vydělením obou stran nulou získáme:

$$\frac{1 * 0}{0} = \frac{-200 * 0}{0}$$

$$\frac{0}{0} * 1 = \frac{0}{0} * (-200)$$

Zjednodušením dostáváme výraz:

$$1 = -200$$

Což je opět velký omyl, protože $1 \neq -200$.

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \mathbf{1}\,?$$

Obecně víme, že $\frac{n}{n} = 1$, (např. $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{10}{10} = 1, \ldots$). Logicky tedy můžeme předpokládat, že i $\frac{0}{0} = 1$. Dokonce i vztah $0 = 1 * 0$ je správný. Zkusíme vyzkoušet tuto teorii na příkladu $10 = 10 * 1 = 10 * \frac{0}{0} = \frac{10*0}{0} = \frac{0}{0} = 1$. Ve skutečnosti se $10 \neq 1$, takže předchozí vztah je opět chybný a $\frac{0}{0} \neq 1$.

Klamem je zde předpoklad, že dělení 0 je legitimní operace se stejnými vlastnostmi jako dělení jakýmkoli jiným číslem. Při dělení $\frac{0}{0} = x$ nelze zlomku přiřadit pouze jednu hodnotu. Proto se matematici dohodli, že dělení nulou zůstává nedefinované.

1.4 Praktická část

V této části popíšeme, jak proběhla praktická část a jak by měla probíhat podobná praktická část v budoucnu. Na úvod na tabuli žákům, kteří už umějí pracovat s rovnicemi, promítáme téma: ‚číslo nula' a následující zápis příkladu a jeho úpravu:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \mathbf{1} && /\ *x \\
x^2 &= x && /\ -1 \\
x^2 - 1 &= x - 1 && /\ :(x-1) \\
\frac{(x+1)*(x-1)}{(x-1)} &= \frac{(x-1)}{(x-1)} && \\
x + 1 &= 1 && /\,-1 \\
\boldsymbol{x} &= \mathbf{0} && [10]
\end{aligned}$$

Žáci dostávají zadání, ve kterém si musí pořádně prohlédnout zápis s danými úpravami. Je důležité žákům zdůraznit, že se v průběhu úprav někde musela stát chyba. Na začátku zadání se totiž hodnota $x = 1$ a na konci se $x = 0$. Žákům pokládáme otázku: „Kde se v průběhu výpočtu chyba stala?" Chvíli necháváme žáky přemýšlet a diskutovat mezi sebou. Pokud si žáci nebudou vědět rady, napovíme, že chyba nastala během třetí úpravy. Otázka na žáky nyní zní: „Proč je tato úprava chybná?" Opět necháme žáky mezi sebou diskutovat a pokusíme se je dovést ke správnému řešení. Žákům by mělo dojít, že po dosazení čísla 1 na místo neznámé x ve třetím úkonu: $:(x-1)$, budeme dělit číslem nula. Dělit nulou nemůžeme, protože je tato úprava matematicky zakázaná, není nijak dále definovaná a vede k paradoxům a chybám. Právě kvůli dělení nulou nám výsledek vyšel nesmyslný.

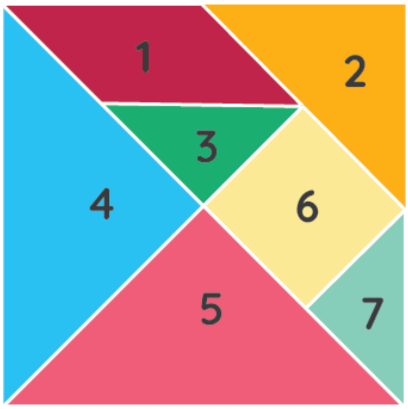
Závěrem tohoto příkladu, je otázka: „Pomocí čeho v matematice zabraňujeme dělení nulou, např.: když se neznámá objeví ve jmenovateli zlomku?" Všechny žáky by mělo napadnout, že právě v těchto případech musíme určovat pravdivostní podmínky, pro které má daný příklad smysl.

2 Paradox tangramu (chybějící plochy)

2.1 Tangram

„Lidské mysli jsou plné záhad více než jakákoli psaná kniha a jsou proměnlivější než tvary mraků na nebi.“ – Louisa May Alcott, americká spisovatelka (1832–1888)

Tangram je tradiční čínský hlavolam, pro děti i dospělé. Jedná se o důmyslnou skládačku, která se skládá ze sedmi různých geometrických útvarů (dva velké trojúhelníky, dva malé trojúhelníky, jeden střední trojúhelník, jeden čtverec a rovnoběžník) a jejím cílem je vytvořit zadaný obrazec s využitím všech sedmi dílků, které můžeme různě převracet, ale nikdy se nesmí vzájemně překrývat. Tangram lze vytvořit v různých velikostech, musí však splňovat určité podmínky.



Obrázek 5: Tangrams-Uses, Examples

Podmínky tangramu:

- všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné a pravoúhlé
- vnitřní úhly všech dílků mají velikost 45°, 90°, nebo 135°
- střední trojúhelník, čtverec a rovnoběžník mají stejný obsah
- obsah malého trojúhelníku je polovinou obsahu středního trojúhelníku a obsah středního trojúhelníku je polovinou obsahu velkého trojúhelníku.

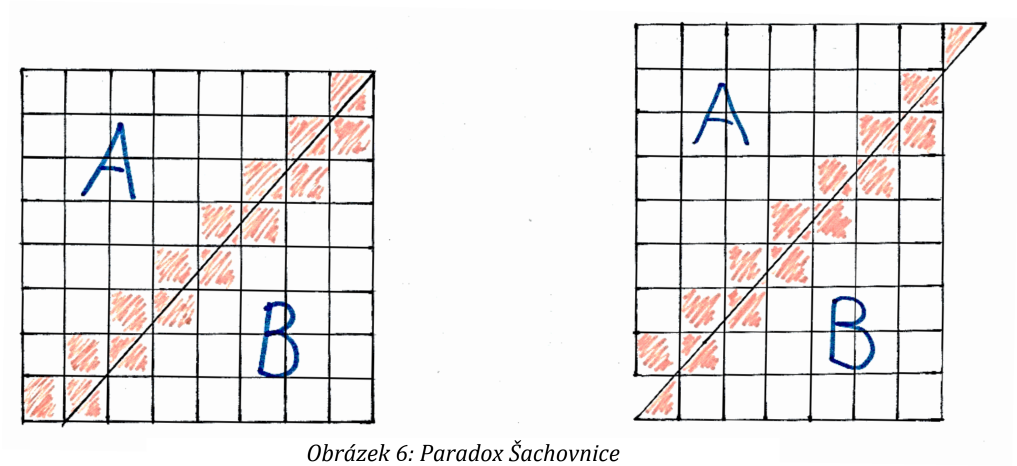
Není jisté, kdy přesně tangram vznikl. Některé historické prameny uvádějí, jeho vznik již před 4000 lety, jiné legendy zas udávají staří 2000 let. Jistě však víme, že ho vynalezli Číňané a dali mu název čchi ch'iao T'u, což v překladu znamená „důmyslný sedmidílný hlavolam“.[11] Do Evropy a Ameriky se dostal v 19. století a velmi rychle si získal oblibu místních obyvatel a mnoha slavných osobností. Tehdy ho nazývaly několika různými názvy např. yum-yum, Archimédes či Hlavolam ze sedmi kousků.

Název tangram vznikl ze spojení slova „ťan“, které v katonském nářečí znamená čínský, a řeckou koncovkou „gram“, která v překladu znamená tvar, kresbu, či slovo. První písemný záznam slova tangram pochází z Websterova slovníku z roku 1864.[12]

2.2 Paradoxy tangramu

„Paradox je pravda, která stojí na hlavě, aby upoutala pozornost.“ – Nicholas Falletta, americký autor a editor (1983)

Paradoxy tangramu neboli paradoxy mizející plochy jsou obrazové paradoxy, které se schovávají pouze za optické klamy a iluze. Jeden z nejstarších příkladů těchto paradoxů je **Paradox šachovnice**, který si nyní předvedeme, pomocí následujícího obrázku:



Obrázek 6: Paradox Šachovnice

Šachovnice vlevo má tvar čtverce 8 x 8 jednotek a je tedy sestrojena celkem z 64 čtverečních jednotek. Tato šachovnice je oříznuta podél diagonální čáry z vrchního pravého rohu do koncového rohu prvního dolního čtverečku. Část B se poté posune dolů, jak je znázorněno vpravo. Pokud je vyčnívající trojúhelník v pravém horním rohu odstřižen a vložen do trojúhelníkového prostoru v levém dolním rohu, vytvoří se obdélník 7 x 9 jednotek. Nyní máme rozlohu 63 čtverečních jednotek. Co se stalo s chybějícím čtvercem?[13]

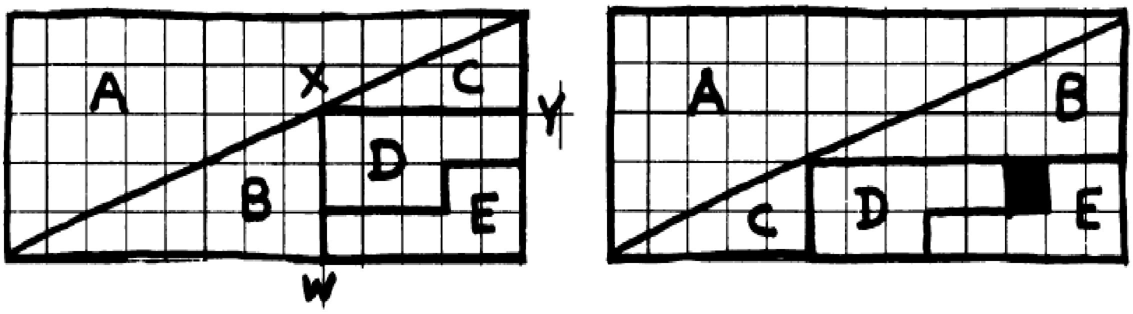
Tento optický klam vzniká, protože diagonální čára neprochází z pravého horního rohu až do levého dolního rohu šachovnice. Díky tomu, nemá odříznutý trojúhelník výšku 1 jednotku ale je o 1/7 vyšší. Tudíž i celý obrazec nemá výšku 9 jednotek, ale 9 a 1/7 jednotek. Přidání 1/7 jednotky k výšce není lehce patrné, ale když každou 1/7 vezmeme v úvahu, bude mít obdélník předpokládanou plochu 64 čtverečních jednotek.

Když si zobrazíme čtvercové jednotky, podrobná kontrola nám odhalí jejich nepřesné lícování podél diagonálního řezu. Můžeme si všimnout, že části vyříznutých čtverců (na obrázku zvýrazněné) se postupně zmenšují nad čárou a postupně se zvětšují pod čárou. Těchto stínovaných polí je na šachovnici patnáct, ale po vytvoření obdélníku pouze čtrnáct. Ostatní čtverce nehrají v paradoxu žádnou roli.

Curryho paradox

Paul Curry žil ve 20. století v New Yorku, býval slavným amatérským kouzelníkem. Především se proslavil svými karetními kousky a karetní magií. V roce 1953 se zabýval myšlenkou přeskupení částí obrazce do podoby identického obrazce s otvorem uvnitř něho.

Přišel na to, že záměna poloh trojúhelníků v obrazci způsobí zjevnou ztrátu jedné čtvercové jednotky na celkové ploše obrázku. Stačí, když je bod X umístěn přesně 5 jednotek od strany a 3 jednotky od základny, pak diagonální čára nebude dokonale rovná, i když odchylka bude tak malá, že bude téměř nezjistitelná, ve výsledku dojde pouze k mírnému překrytí obrazců podél úhlopříčky na druhém obrázku, což není snadno rozpoznatelné. Na druhou stranu, pokud je úhlopříčka na prvním obrázku vedena přesně od rohu k rohu, pak bude čára XW o něco delší než 3 jednotky. V důsledku toho je chybějící čtverec rozmístěn po šířce obdélníku a druhý obdélník je tudíž o něco vyšší než první.

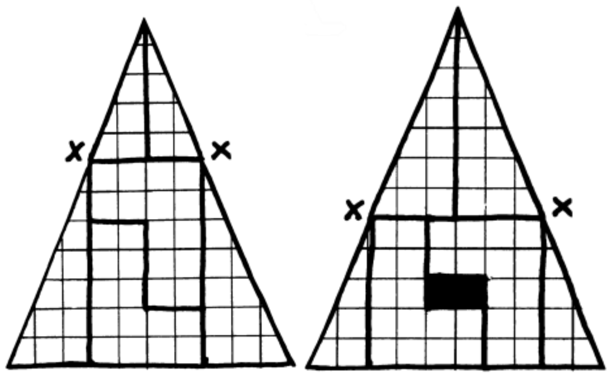


Obrázek 7: Curryho paradox: Příklady na dobrou noc.

Právě zde vzniká známý Curryho trojúhelníkový paradox. Geometrické principy, z nichž Curry vycházel, byly známé už zhruba od poloviny 19. století, jeho dílo je však mistrovské – odchylky jsou totiž tak zanedbatelné, že naše oko dává přednost logickému předpokladu, že se jedná o trojúhelník, a detailněji tvar nezkoumá; přesto jsou to právě tyto drobné rozdíly, které nakonec umožní vzniknutí nezanedbatelně chybějícímu čtverci. Kouzelník Curry přemýšlel nad mnoha možnostmi rozložení obrazců. Přišel na to, že nedokáže z méně než pěti tvarů vytvořit díru, která se nedotýká okraje obrazce.[14]

Curryho trojúhelníky

Podívejme se znovu na minulý obrázek. Můžeme si všimnout, že největší trojúhelník (trojúhelník A) stále zůstává ve stejné pozici, protože ho nijak neposouváme. Tudíž v paradoxu nehraje žádnou roli a můžeme ho vynechat. Zůstává nám tedy pravoúhlý trojúhelník rozdělený na 4 různé díly (díly B, C, D, E) viz. Obrázek 7. Tyto části lze přeskupit na zdánlivě totožný pravoúhlý trojúhelník s malým otvorem uvnitř. Vezmeme-li dva takové trojúhelníky a umístíme je vedle sebe, vzniknou nám nové rovnoramenné ‚trojúhelníky', znázorněné na následujícím obrázku:



Obrázek 8: Los Triángulos de Curry.

Tyto trojúhelníky mohou být opět vytvořeny dvěma různými způsoby. Můžeme jim dát dokonale rovné strany, kdy body X nebudou přesně vycházet na průsečíky mřížových čar, nebo můžeme umístit body X přesně na průsečíky, v takovém případě nebudou strany dokonale rovné. Ani jeden z představených útvarů totiž ve skutečnosti není trojúhelníkem. Domnělá přepona (tedy nejdelší strana trojúhelníku, šikmá úsečka) je ohnutá (nemá pravidelný sklon), přestože to tak na první pohled nevypadá. Ve výchozím stavu má tedy tzv. trojúhelník trochu prohnuté strany (promáčklé směrem dolů), v přestaveném stavu je má naopak vypouklé nahoru. Větší trojúhelník má poměr stran 2,67, zatímco menší trojúhelník má poměr stran 2,5. Celý útvar má rozměry 13 x 5, poměr jeho stran je tedy 2,6. V případě, že by se jednalo o skutečný trojúhelník, by tyto poměry musely být stejné – a v takovém případě by k žádnému chybějícímu čtverci na druhém obrázku nedošlo.

Všechny paradoxy mizející plochy vznikají díky velmi nepatrným až téměř neviditelným rozdílům v obsahu obrazců (obrazce se buď překrývají, nebo nepatrná část chybí, také se může zvyšovat délka obrazce a výška snižovat, nebo právě naopak).[14]

Obrazec vázy

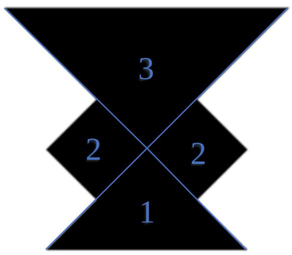
Paradoxů při skládání tangramu vzniká mnoho. Ze zadání nikdy není vidět, jak má být obrazec veliký. Známe pouze tvar a přibližné poměry stran. Stejný obrazec lze častokrát vytvořit i z méně dílků, jindy nám naopak k dotvoření obrazce nějaký dílek chybí. Správným řešením je pouze výtvor složený ze všech sedmi dílků.

Zvolme si například obrazec vázy. Černé zadání vidíme na Obrázek 9. Naším úkolem je poskládat všech 7 dílků do tohoto tvaru. Ze zadaní není patrné, kam který dílek položíme a v tom je princip hry. Po chvíli hraní si s tvary a jejich převracením a pokládáním, nám vzniká ze skládanky správný obrazec, viz. Obrázek 10a. Při skládání se nám podařilo vytvořit několik anomálií. Jednou z nich byla váza stejně velká, se stejným tvarem a také ze všech 7 dílků, byl v ní však malý otvor nahoře, viz. Obrázek 10b. Jak je možné, že je v ní otvor? Při dalším skládání se nám podařilo vytvořit obdobnou vázu stejné velikosti, se stejným tvarem a ze všech 7 dílků, vytvořil se v ní také otvor, tentokrát však jinde a daleko menší, viz. Obrázek 10c. Jak je to jenom možné?

Obrázek 9: Tangram Paradoxes

Obrázek 10a,10b,10c: Paradoxy tangramu-Vázy

Podívejme se zblízka na obrázek s dírou nahoře viz. Obrázek 10b a porovnejme ho se správným vyhotovením skládanky viz. Obrázek 10a. Oba obrazce si vodorovně rozdělíme na 3 části: spodek, prostředek a vršek. Spodní část vázy se skládá z jednoho největšího trojúhelníku, jeho délka přepony je shodná se součtem délek delší strany rovnoběžníku a přepony nejmenšího trojúhelníku (poměry stran vycházejí ze zadání hry, viz. Podmínky tangramu str.18). Tudíž jsou plochy spodních částí váz totožné. Prostřední části obou váz se skládají z dvou totožných dílků (čtverec a nejmenší trojúhelník), třetí dílky v prostřední části jsou rozdílné a přesahují do další části, nás ale zajímá pouze zbývající kousek v prostřední části a ten má u obou váz plochu nejmenšího trojúhelníku. Tudíž jsou velikosti obou prostředních částí totožné. Vrchní část rozvětvené vázy je osově souměrná, tudíž jsou obě vrchní hrany stejně dlouhé. Levá hrana je složena z jedné strany čtverce, jedné odvěsny nejmenšího trojúhelníku a kratší strany kosodélníku. Víme, že tyto tři hrany mají stejnou délku (viz. Podmínky tangramu str.18). Podívejme se na stejnou stranu originální vázy, ta se skládá pouze z přepony



Obrázek 11: Rozložení vázy

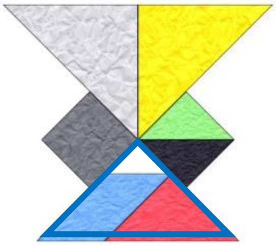
největšího trojúhelníku. Tato přepona je stejně dlouhá jako dvě přepony nejmenšího trojúhelníku. Tudíž nám zbývá zjistit, jestli délka dvou přepon a tří odvěsen téhož pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku mají stejnou velikost. K výpočtu použijeme sinovou větu. Odvěsnu označíme o a přeponu p:

$$\sin(45°) = \frac{o}{p} \quad => \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{o}{p} \quad => \quad p = \frac{2*o}{\sqrt{2}} \quad => \quad p = \sqrt{2} * o$$

tím pádem: $2p = 2 * \sqrt{2} * o$, což není přesná délka 3 odvěsen, je to přibližně 2,8, což je méně jak 3. Z toho vyplývá, že vrchní části obou váz nejsou stejně vysoké. Váza s otvorem je vyšší než váza bez otvoru. Pojďme porovnat i šířku vrchní části. V rozvětvené váze se vrchní hrana skládá ze dvou částí o velikosti přepony nejmenšího trojúhelníku a prázdné hrany také o velikosti jedné přepony nejmenšího trojúhelníku. Hrana první vázy má velikost čtyř odvěsen nejmenšího trojúhelníku (viz. Podmínky tangramu str.18). Tudíž nám zbývá porovnat velikost 3 přepon a 4 odvěsen. Pro výpočet použijeme již zjištěnou informaci, že $p = \sqrt{2} * o$, tím pádem známe délku tří přepon: $3p = 3 * \sqrt{2} * o$, je to přibližně 4,24, což je více jak 4. Tudíž jsme dokázali, že je vrchní část vázy s výkusem nahoře i širší než vrchní část správně sestavené vázy. Plocha, která vznikla navýšením útvaru, je stejně velká, jako plocha chybějící části, viz. Obrázek 12.

Obrázek 12: Druhá váza

Nyní se zaměříme na obrázek s dírou uvnitř vázy viz. Obrázek 10c a porovnáme ho se správným vyhotovením skládanky viz. Obrázek 10a. Oba obrazce si stejně jako v předchozím příkladu vodorovně rozdělíme na 3 části. Vrchní část obou obrazců se skládá z dvou stejných dílků, naprosto totožně umístěných, tudíž je jisté, že vrchní části jsou stejné. Prostřední části obou váz jsou opět složeny z dvou totožných dílků (čtverec a nejmenší trojúhelník), třetí dílky v prostřední části jsou rozdílné. Ve váze s otvorem je využit nejmenší trojúhelník, ve správně sestavené váze je středně velký trojúhelník, přesahující do další části. Nás opět zajímá pouze zbývající kousek v prostřední části a ten má velikost plochy stejnou jako nejmenší trojúhelník. Tudíž jsou velikosti obou prostředních částí totožné. Spodní části váz se skládají z rozdílných tvarů, tudíž se nad nimi musíme pořádně zamyslet. Váza s otvorem má v této části díru, dále se skládá z postaveného rovnoběžníku a středního trojúhelníku. Původní váza má tuto část složenou z položeného rovnoběžníku, malého trojúhelníku a poloviny středního trojúhelníku. Nyní budeme porovnávat velikosti spodních hran váz. Délka spodní hrany vázy s otvorem má délku tří odvěsen nejmenšího trojúhelníku (viz. Podmínky tangramu str.18). Délka spodní hrany správně sestavené vázy má délku dvou odvěsen nejmenšího trojúhelníku. Nastává obdobný případ jako u porovnávání předešlých váz, tedy: $2p = 2 * \sqrt{2} * o$, což víme, že je přibližně 2,8 odvěsny nejmenšího trojúhelníka, tudíž je délka spodní hrany vázy s otvorem delší než délka spodní hrany správně sestavené vázy. Nyní jsme dokázali, že váza s otvorem uvnitř má delší a širší spodní část o velikost povrchu otvoru ve váze, viz. Obrázek 13.

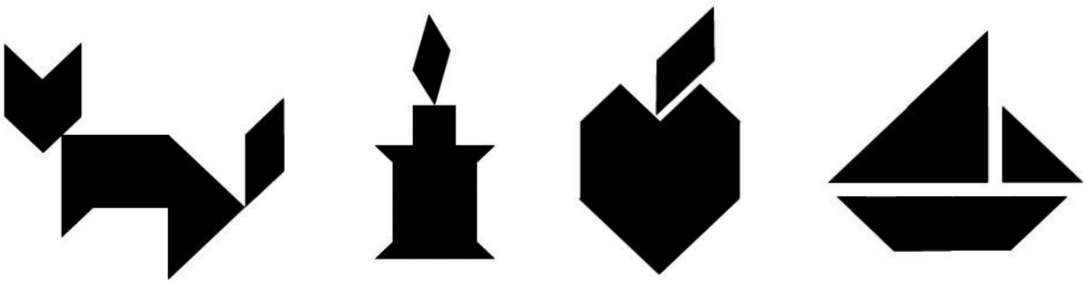


Obrázek 13: Třetí váza

U obou obrazců vázy jsme přišli na logické vysvětlení vzniků otvorů a dokázali jsme, že vázy nemají stejnou velikost. Tudíž je skutečně jediným správným řešením obrazec bez otvoru. Tento paradox je skvělým příkladem druhé skupiny paradoxů: Tvrzení, které zní zdánlivě pravdivě, ale ve skutečnosti je nepravdivé a neproveditelné. Skutečně se jedná pouze o švindl a optický klam.

2.3 Praktická část

Mezi domácí přípravu pro prezentaci tohoto paradoxu si musíme pořídit několik stavebnic tangramu. Jednou z možností je stavebnici vytisknout na 3D tiskárně. Každá dvojice žáků by měla mít k dispozici jeden komplet všech sedmi dílků. Na začátku prezentace žákům představíme a ukážeme základní princip práce s tangramem. Důležité je zmínit, že cílem této stavebnice je vytvořit zadaný obrazec s využitím všech dílků, které se ale nesmí vzájemně překrývat. Na tabuli promítneme následující příklady obrazců, které jsou seřazeny podle obtížnosti od nejlehčího po nejobtížnější konstrukci:



Obrázek 14: Tangrams

Žákům zadáme úkol postupně poskládat všechny čtyři obrazce. Poté co většina dvojic dokáže daný tangram sestrojit, ukážeme správné řešení tohoto obrazce na dataprojektoru. Všichni žáci tak mají příležitost porovnat svá řešení. Správné řešení je uvedeno v *Příloha 1*. Jakmile základní práci s tangramem žáci ovládnou, zadáme další úkol: sestavit již jmenovaný tvar vázy, jehož tmavý obrazec taktéž promítneme na tabuli. Po složení jednotlivých váz žákům představíme různé možnosti pro vytvoření paradoxu skladby tvarů a společně zjišťujeme, jak se tento paradox mohl vytvořit.

Hodina je zakončena videem, ve kterém je ukázán v dnešní době nejznámější ukázkový model a zástupce tohoto paradoxu, a to pomocí tabulky čokolády. Tabulka čokolády je postupně řezána a přeskládávána tak, že ‚zůstane pořád stejná' a přitom z ní vždy jeden čtvereček čokolády vyjmeme. Toto je skvělá ukázka Šachovnicového paradoxu, který byl v minulé podkapitole představen. Děti si tento paradox s pomocí čokolády dokážou daleko lépe představit. Na začátku videa je také ukázán a vysvětlen Curryho trojúhelník. *Odkaz na dané video.*

Na závěr žákům zdůrazníme, že u tohoto paradoxu je nejdůležitější si uvědomit, že ne vše, co vidíme, je pravda. Výsledek by bylo dobré vždy prozkoumat a přeměřit, abychom si byli jistí, že náš závěr není jen optickým klamem.

3 Zénónovy paradoxy

3.1 Zénón z Eleje

Zénón z Eleje žil přibližně v letech 490 př.n.l. až 430 př.n.l. (období začátku řecko-perských válek), byl synem Teleutágora, byl však adoptován Parmenidem, který ho učil. Parmenidés byl řecký předsokratovský filozof, který založil Elejskou školu. Eleja bývalo řecké město v jižní Itálii. Zenón se stal úspěšným učitelem (sofistou) a zajímal se ve svém životě i o politiku.[15] Zénón se zabýval výzkumem svého učitele, který tvrdil, že změna a pohyb jsou jen iluzí a klamem smyslů. Právě na téma prostor a čas vymyslel několik paradoxů. Zénón nechtěl spoléhat pouze na své smysly. Došel k názoru, že myšlení a skutečnost je v naprostém rozporu s vnímáním. Bytí a myšlení jsou naopak podle něho totožná věc.[16]

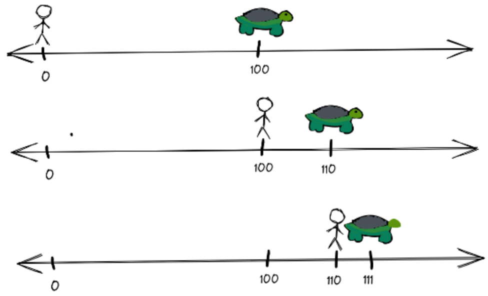
Po Permidově smrti začal v Eleji vládnout tyran, který zrušil původní ústavu. Zénón se stal vůdcem odboje proti tomuto muži. Po neúspěšném pokusu o svržení tohoto tyrana jím byl zajat a umučen k smrti. V tomto okamžiku se legendy a příběhy o Zenónovi z Eleje rozcházejí a nevíme přesně jakým způsobem zemřel. Některé z příběhů vyprávějí, že když byl vyslýchán a chtělo se po něm, aby prozradil své komplice, se kterými údajně pašoval zbraně z Lipari, souhlasil, že tyranovi pošeptá do ucha jejich jména, když se však k tyranovi naklonil, ukousl mu ucho. Hned na to byl Zénón probodán. Jiná verze praví, že tyranovi ukousl nos a následně byl sám roztlučen v hmoždíři. Zénónův přítel Antisténés z Athén má další verzi o jeho smrti, ve které uvádí, že Zénón při výslechu na otázku, kdo jsou jeho komplici, ukázal na tyranovi přátele, čímž ho rozhněval natolik, že ho tyran umučil osobně. Než se tak stalo, stačil odsouzenec zakřičet: „Ty, ničiteli našeho města!“ Také se stihl obrátit na dav lidí, sledujících jeho popravu a zakřičet na ně: „Divím se vaší zbabělosti, jestli to je kvůli mukám, které tu klidně snáším, že zůstáváte otroky tohoto tyrana,“, přitom si ukousl vlastní jazyk a vyplivl ho před sebe. Nato se lidé z davu zvedli, donuceni tím, co viděli, chopili se tyrana a svrhli ho.[17] Těžko říct, jestli je některý z těchto příběhů pravdivý.

3.2 Zénónovy nejznámější paradoxy

„I ta nejmenší věc má své kořeny v nekonečnu, proto ji nelze zcela prozkoumat." – Wilhelm Busch, německý malíř (1832–1908)

Achilles a želva

Mezi nejznámější Zénónovy paradoxy patří nekonečný závod Achilla a želvy.



Obrázek 15: Zeno's Paradox: Achilles And The Tortoise

Představme si, že nejrychlejší řecký hrdina Achilles závodí v běhu s želvou. Achilles ví, že želva je pomalý tvor, a tak jí dovolí mít náskok 100 m. Oba závodníci společně odstartují. Než se Achilles dostane do vzdálenosti 100 m (na místo, kde startovala želva), želva se o 10 m posune. Achilles se želvu opět pokusí dohonit, uběhne 10 m, želva na něj nečeká a mezitím se posune o další metr dál. Běžec dál následuje želvu, která se opět posouvá. Tím vzniká otázka, která vede k paradoxu: Dokáže Achilles někdy želvu dohonit? Zénón rozložil kontinuální pohyb do nekonečného počtu stále menších kroků a došel k závěru, že želva je vždy o kousek napřed, a tudíž ji Achilles nikdy nemůže dohonit. Logicky i prakticky všem bylo jasné, že v Zénónově úvaze musí být někde chyba, protože je želva pomalejší, Achilles jí někdy musí předběhnout. Matematici si s touto úvahou lámali hlavu několik století, nedokázali však v Zénónově postupu najít chybou. Řešení našli až v 17 století francouzský fyzik Blaise Pascal a německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz díky nekonečné číselné řadě.[18]

Společně si ukážeme, kde chyba nastala. Zénón byl filozof, v jehož době nekonečno nebylo možné vysvětlit, a tudíž s ním neuměl správně pracovat. Zaměřil se pouze na mechanický pohyb pomocí své logiky. Nejdříve si vypíšeme více časových úseků rozdílů vzdálenosti Achilla a želvy a označme si přitom Achillovu uběhnutou vzdálenost pomocí neznámé a_n. Víme, že želva má na začátku 100 m náskok, ve chvíli, kdy Achilles uběhne daných $a_0 = 100$ m, želva zatím ujde 10 m, Achilles uběhne $a_1 = 10$ m – želva mezitím uběhne 1 m, Achilles uběhne $a_2 = 1$ m – želva zatím uběhne 1/10 m, Achilles uběhne $a_3 = 1/10$ m – želva zatím uběhne 1/100 m, a tak bychom mohli pokračovat dále až do nekonečna (a_{n-1}). V dnešní době už víme, že součet nekonečně mnoha veličin může mít konečný výsledek. Můžeme si všimnout, že náskok želvy před běžcem je posloupnost klesající. Řešení tohoto problému najdeme v nekonečném součtu, který umíme vyřešit pomocí nekonečných řad. Již máme označenou původní vzdálenost mezi Achillem a želvou jako a_0. Nechť q je poměr rychlosti želvy a rychlosti Achilla. Vypočítáme si tento poměr: $q = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Úplně stejně si můžeme ověřit i další poměry, které taktéž vycházejí $q = \frac{1}{10}$, $q < 1$, což nám potvrzuje, že tato geometrická posloupnost je klesající. Všimněme si, že když běžec doběhne na želvino poslední stanoviště, tak je nová vzdálenost mezi nimi rovna vzdálenosti:

$$a_n = a_0 * q^{n-1}$$

$$a_1 = a_0 * q^1 \;\; => \;\; a_1 = 100 * \frac{1}{10} = 10,$$

$$a_2 = a_0 * q^2 \;\; => \;\; a_2 = 100 * \frac{1}{10} * \frac{1}{10} = 1,$$

$$a_3 = a_0 * q^3 \;\; => \;\; a_3 = 100 * \frac{1}{10} * \frac{1}{10} * \frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

$$\vdots$$

Následovně můžeme díky konvergentní (klesající) geometrické řadě pomocí sumy vypočítat vzdálenost S, kterou Achilles musí urazit, než dohoní želvu:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 * q^k = a_0 * [1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots]$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} 100 * \frac{1}{10}^k = 100 * \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}^2 + \frac{1}{10}^3 + \frac{1}{10}^4 + \cdots\right]$$

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots \qquad / \qquad :10$$

$$\frac{1}{10}S = \qquad 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots \qquad / \qquad S - \frac{1}{10}S$$

Odečtením těchto dvou rovnic od sebe získáme:

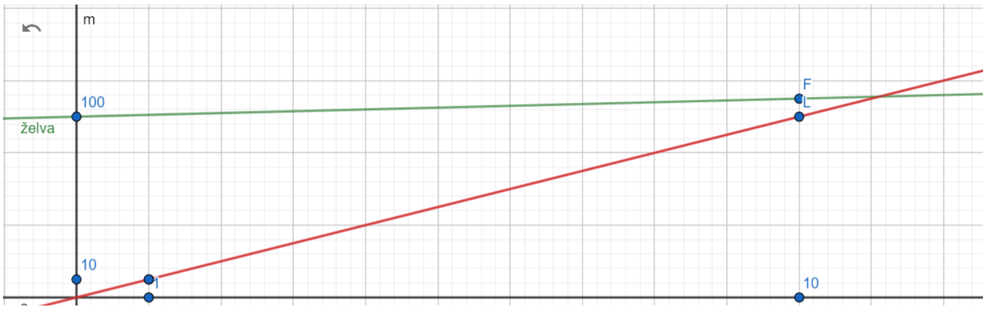
$$\frac{9}{10}S = 100$$

$$S = \frac{1000}{9} = 111,\bar{1}\ \mathrm{m}$$

Zjistili jsme, že Achilles dožene želvu po $111,\bar{1}$ m, želva uběhne pouhých $11,\bar{1}$ m.

Podobným způsobem se Aristotelovi okolo roku 200 př.n.l. podařilo vypočítat, jak dlouho tento závod potrvá, nikdy však neobjasnil na Zénónovu chybu.[19]

Existuje ještě fyzikální (grafická) metoda nalezení vzdálenosti, ve které Achilles želvu dohoní. Jedná se o slovní úlohu o pohybu jedním směrem. Dáme-li Achillovi rychlost $v_1 = 10\,{}^{m}/_{s}$ a želvě rychlost $v_2 = 1\,{}^{m}/_{s}$ a stále platí, že želva má náskok 100 m. Vytvoříme si soustavu souřadnic – vodorovná osa nám znázorňuje čas v sekundách a svislá osa dráhu v metrech. Víme, že Achilles startoval v počátku a že za 10 s uběhl 100 m. Želva startovala ve vzdálenosti 100 m a za 10 s uběhla 1 m. Tyto údaje vyznačíme v soustavě souřadnic a vytvoříme trasu obou závodníků. Nyní zjišťujeme, že se potkali přibližně v 111 metrech a za 11 sekund.



Obrázek 16: Achilles a želva Graf

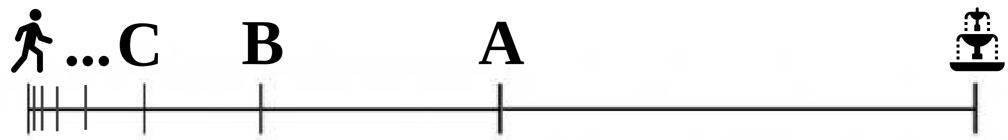
Půlení / Dichotomie

Tento paradox je podobný tomu předchozímu. Opět se jedná o jeden ze Zénónových paradoxů, tentokrát zaměřený na pohyb jednoho prvku. Smyslem tohoto paradoxu je najít rozdíl mezi realitou a logickou a filozofickou teorií. Pro vyvrácení paradoxu je nutné hledat chyby v našich předpokladech a v našem chápání času a prostoru.

Představme si, že stojíme 100 m od studny, ke které se potřebujeme dostat. Za jak dlouho se k ní dostaneme? Podle Zénónovy teorie se k ní nedostaneme nikdy. Pojďme si ji představit: Vydáme se ke studni a ujdeme polovinu cesty tedy 50 m. Vydáme se dál a ujdeme polovinu zbývající cesty tedy 25 m, tudíž jsme dohromady ušli 75 m. Pokračujeme v cestě dál a ujdeme další polovinu zbývající cesty tedy 12,5 m. Máme za sebou 87,5 m. Ujdeme další polovinu ze zbytku, tedy 6,25 m. A takto pokračujeme dál až do nekonečna. Urazíme tedy nekonečné množství dílků, které mají jinou než nulovou vzdálenost. Zbývající vzdálenost se nám stále zmenšuje, ale nikdy tímto způsobem do cíle nedojdeme a umřeme žízní.

Tento paradox lze předvést ještě jedním způsobem. Opět si představme, že chceme dojít k téže studni. Abychom tuto vzdálenost zvládli překonat, musíme nejdřív urazit její polovinu (bod A). Dříve než dorazíme do této poloviny, musíme překonat polovinu poloviny (bod B).

Než se dostaneme do této vzdálenosti, opět musíme překonat její polovinu (bod C). A takto můžeme naši trasu ke studni rozdělit až na nekonečně mnoho kousků, které musíme zdolat. Z toho vyplývá, že naši trasu vůbec nemůžeme začít a pohyb ve skutečnosti neexistuje.



Obrázek 17: Cesta ke studni

Ovšem logicky víme, že 100 m vzdálenost zvládneme bez problému zdolat a ke studni se dostat. Kdo v Zénónově úvaze nastala chyba? Odpověď není zas tak složitá, opět se jedná o předpoklad, že nelze vykonat nekonečný děj v konečném čase. My dnes už ale víme, že jakmile se nekonečná řada blíží k určitému číslu, dokážeme problém vyřešit. Podívejme se, jakou rovnici dokážeme vytvořit: Nechť proměnná S je součet všech úseků, které musíme urazit, než se dostaneme do cíle:

$$S = 50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + 3{,}125 + 1{,}5625 + 0{,}78125 + 0{,}390625 + \cdots$$

proměnnou S vydělíme 2:

$$\frac{S}{2} = \qquad 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + 3{,}125 + 1{,}5625 + 0{,}78125 + 0{,}390625 + \cdots$$

nyní od sebe obě rovnice odečteme a dostaneme výsledek:

$$\frac{S}{2} = 50 \qquad => \qquad S = 100$$

Skutečně nakonec zvládneme překonat celých 100 m ke studni a žízní neumřeme.

3.3 Praktická část

Seznámení žáků se Zénónovy paradoxy začínáme základními informacemi o samotném Zénónovi. Mezi tyto informace určitě patří, že Zénón z Eleje byl filozof, který žil v pátém století př.n.l. a zabýval se pohybem a důkazy o jeho neexistenci.

Na tabuli mezitím nakreslíme úsečku, na její začátek umístíme postavu člověka, na její konec studnu, nezapomeneme napsat, že vzdálenost ke studni je 100 m. Žákům následovně položíme záludnou otázku: „Zénón zastával názor, že postava nikdy ke studni nedorazí, tento názor ve své době dokázal bezchybně odůvodnit. Pokuste se přijít na jeho zdůvodnění, jestliže víte, že postava je zdravá a vždy se pohybuje rovně dopředu a nikdy se neotáčí." Chvíli žáky necháme přemýšlet a poté ve třídě zahájíme diskusi. Pokud si žáci skutečně nebudou vědět rady, poradíme jim zdolání prvního úseku cesty (tedy poloviny trasy – 50 m) a necháme je přemýšlet a diskutovat dále. Pokud je správný postup stále nenapadne, odhalíme druhý úsek (tedy další polovinu poloviny – 25 m). Opět zahájíme mezi žáky diskusi. Po tomto bodě uvedeme správnou odpověď – buď ji žáci odhalí samostatně, nebo ji odhalíme společně. Názorně žákům pomoci přibližování rukou můžeme ukázat, jak se vzdálenost mezi našimi dlaněmi stále zmenšuje. Můžeme zmínit, že podle učení Zénóna by se naše dlaně nikdy neměli vzájemně setkat. Nakonec ve třídě uvedeme vysvětlení: „Podle Zénóna by se ruce nikdy neměli setkat, ale my víme, že tomu tak ve skutečnosti není. Je to z toho důvodu, že v době, kdy Zénón žil, ještě neuměli správně pracovat s nekonečnem. Vy se to naučíte na gymnáziích a středních školách."

Zénónovo myšlení si ještě jednou představíme na jeho nejznámějším paradoxu. Jedná se o paradox Achilles a želva. Okamžitě se nabízí jedna otázka, kterou rovnou položíme: „Kdo to byl Achilles?" Věřím, že alespoň někdo si vzpomene na Staré řecké báje a pověsti. Na báji o Achillovi, kterého jeho matka bohyně Thetis jako miminko ponořila do podsvětní řeky Styx, držela ho přitom za patu. Tím Achilla udělala nepřemožitelným, kromě jeho suché paty, která se stala jeho slabinou. Achilla řadíme mezi nejrychlejší a nejudatnější bojovníky řecké mytologie.

Žákům zadáme úkol: „Uvědomte si, jakým způsobem Zénón přemýšlel a zamyslete se nad následující otázkou. Tento rychlý a nepřemožitelný hrdina si dá rychlostní závod s obyčejnou želvou. Achilles ví, že želva je pomalý tvor, a tak ji dovolí mít 100 m náskok. Poté oba ve stejnou dobu vybíhají. Dožene podle učení Zénóna Achilles někdy želvu?" Necháme chvíli čas na přemýšlení a po chvíli budeme poslouchat žákovské tipy a diskutovat nad nimi. Věřím, že většina z žáků bude z předchozího příkladu navedena k odpovědi, že Achilles želvu nedokáže předhonit. Teď na žáky čeká těžší část: přijít na důvod proč ji Achilles nepředhoní. Zénónovo řešení nakonec graficky předvedeme na tabuli (viz. Obrázek 15).

Na rozloučení se Zénónem a jeho paradoxy, dětem promítněme na tabuli básničku od Jaroslava Kvapila, díky které si mohou zábavnější formou zapamatovat tento paradox a jeho význam. Básničku přikládám i zde.

Marně jako Achilles ženu želvu svou,
běžím za ní celý den, lesem, pustinou,
až na večer se obzor krví zaleje,
z dějin se mi vysměje Zenon z Eleje.

Nač si lámat hlavu řeckým paradoxem,
nechám planých úvah, začnu třeba s boxem.
Rána pěstí bez řečí, jen to platí dnes,
želvu přece dohnal už Aristoteles.

4 Russellův paradox – Teorie množin

4.1 Bertrand Russell

„Jsem přesvědčen, že vědecké poznání je jedním z vrcholů lidského úsilí. Netvrdím, že poznání nemůže nikdy způsobit zlo. Tvrdím však, a to velmi důrazně, že poznání neporovnatelně častěji přináší užitek než škodu, a strach z poznání je mnohem škodlivější.“ – Bertrand Russell, britský matematik (1872–1970)

Bertrand Arthur William Russell byl významný britský matematik, filozof, logik, spisovatel a sociální reformátor. Narodil se 18.5.1872 a zemřel 2.1.1970. Pocházel ze šlechtické rodiny, rodiče mu v dětství zemřeli, vychovávali ho prarodiče. Vzdělávali ho doma a v 18 letech začal studovat na Trinity College v Cambridgi matematiku a filozofii. Po vystudování na této škole chvíli učil, dále přednášel na dalších univerzitách, a především psal knihy a články na téma: ekonomie, etika, filozofie, sociologie, politika, pedagogika, historie, a především matematika a logika. Během svého života vydal více jak 70 knih a asi 2000 článků. Během první světové války skončil ve vězení, za své pacifistické názory (veřejně odmítal násilí, odvody a válku). Po druhé světové válce usiloval o jaderné odzbrojení. V roce 1950 mu byla udělena Nobelova cena za literaturu, za mnohostranná významná díla, ve kterých obhajoval ideje humanity a svobody myšlení. Zemřel v 98 letech ve své době známý především jako protiválečný bojovník.[20]

Za svůj život byl celkem čtyřikrát ženatý. V roce 1894 se oženil s Američankou Alys Persall, se kterou odjel do Berlína studovat ekonomii a psát knihy, ne příliš šťastné manželství vydrželo 17 let.[21] Druhou manželkou se stala v roce 1921 Dora Blacková, se kterou měl dvě děti. V této době vychovával své děti a zajímal se o pedagogiku. V roce 1927 založil soukromou školu pro děti přibližně stejně staré jako ty jeho. Nechtěl, aby chodily do veřejné školy, jejichž výchovné a vzdělávací metody považoval za špatné. Kvůli častému cestování a přepracovanosti se jejich manželství začalo rozpadat a v roce 1932 se rozešli o 3 roky později se rozvedli. Hned následující rok se jeho třetí manželkou stala mladá studentka Patricie Spence, se kterou měl jednoho syna. V této době vyučoval a přednášel v Americe. Manželství jim vydrželo 13 let. Ve svých 80 letech se oženil naposledy, čtvrtou manželkou se stala Edith Finch, až v tomto manželství zažil manželskou harmonii a spokojenost. V této době se účastnil masových demonstrací a podněcoval mladé lidi k pacifismu.

Za jediný účinný nástroj poznání pokládal přírodní vědy, nikoli morálku ani náboženství.[22] Také se věnoval filozofii a svými odbornými díly rozvíjel matematickou logiku. V letech 1910 až 1913 společně s Alfredem Whiteheadem vytvořili spis Principia Mathematica, který vyšel ve třech svazcích. Tato kniha představuje jedno z nejvýznamnějších děl zasvěcených základům matematiky. K Russellovým nejdůležitějším spisům patří dílo Lidské vědění, vydáno v roce 1948. Při pokusu zjednodušovat a odvozovat matematiku z logiky objevil jeden z paradoxů, kterému se vyvaroval vytvořením axiomů pro teorii množin.[23]

4.2 Teorie množin

„Pokrok přinášejí ti, kdo se odvažují měnit vše, co není v pořádku." – Bernard Bolzano, český matematik a filozof (1781–1848)

Teorie množin zařazuje všechny matematické pojmy do pojmu množiny a tím je formalizuje. Je tvořena axiomy a predikátovou logikou. V důsledku omezuje všechny matematické vztahy na relaci: být prvkem (∈).[24]

Pojem množina zavedl v první polovině 19 století český matematik a filozof Bernard Bolzano. Definoval množinu jako souhrn, u kterého nezáleží na uspořádání částí (prvků), Bolzanova definice nezahrnuje prázdné a jednoprvkové množiny. Německý matematik Georg Cantor v 60. letech 19. století vybudoval novou teorii iracionálních a reálných čísel, rozvíjel matematické prostředky ke studiu nekonečných množin. Díky tomu se stal zakladatelem nové matematické disciplíny: teorie množin. Jeho teorie množin v sobě měla několik nedostatků a vznikaly tak paradoxy.[25] V roce 1902 Bertrand Russell otřásl celou teorií množin a dokázal její vnitřní spornost. Dodnes je Cantorova teorie množin v matematické algebře a analýze používána, ke studiu matematiky a jejího výzkumu je však nepoužitelná, tudíž se jí začalo říkat: naivní teorie množin.[26]

Na způsob, jak paradoxy odstranit, nakonec ve 30. letech 20. století přišli dva němečtí matematikové Ernst Zermelo a Abraham Fraenkel. Podařilo se jim zavést teorii množin pomocí axiomů do vnitřně bezesporné podoby. Jejich zavedení teorie množin pomocí axiomů se po nich nazývá: Zermelo-Fraenkelova teorie množin. Využití axiomů už známe z dávné historie od Euklida a jeho výkladu geometrie v Základech.[27] Axiom je tvrzení, které se pokládá za pravdivé, bez nutnosti dokazování.

Axiomy – axiomatická teorie množin

1. Axiom existence množin – existuje alespoň jedna množina:
$$(\exists x)x = x$$
2. Axiom extenzionality – množiny se stejnými prvky se rovnají; pro každé dvě množiny x, y platí $x = y$, právě tehdy, když každé $u \in x$ a přitom každé $u \in y$:
$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y$$

3. Schéma axiomů vydělení – z každé množiny lze vybrat prvky, vyhovující dané formuli, které se opět stávají množinou, vznikají tak podmnožiny: Je-li $\varphi(u)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, potom je následující formule axiomem vydělení:
$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)\Big(u \in z \leftrightarrow \big(u \in x \wedge \varphi(u)\big)\Big)$$
4. Axiom dvojice – každé dvě libovolné množiny určují dvouprvkovou množinu; k libovolným dvěma množinám x, y existuje množina, která má právě dva prvky a y. Podle axiomu extenzionality je taková množina jednoznačně určena prvky x, y:
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$
5. Axiom sjednocení / sumy – sjednocení všech prvků množiny je množina; k libovolné množině x existuje množina z, která je složena z množin, které jsou prvkem nějakého prvku množiny x. Podle axiomu extenzionality je množina z jednoznačně určena volbou množiny x:
$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)\big(u \in z \leftrightarrow (\exists y)(y \in x \wedge u \in y)\big)$$
Pokud máme definovaný axiom sjednocení, můžeme zavádět pojmy suma a sjednocení množin.
6. Axiom potence – ke každé množině existuje množina všech jejích podmnožin (tzv. potenční množina, značíme ji $P(x)$):
$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)\big(u \in z \leftrightarrow (\forall v)(v \in u \to v \in x)\big)$$
$$P(x) = \{u: u \subseteq x\}$$
7. Schéma axiomů nahrazení – obraz množiny definovaného zobrazení je opět množinou: je-li $\varphi(u, v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné w, z, je následující formule axiomem nahrazení:
$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, w) \to v = w)$$
$$\to (\forall x)(\exists z)(\forall v)\Big(v \in z \leftrightarrow (\exists u)\big(u \in x \wedge \varphi(u, v)\big)\Big)$$
8. Axiom nekonečna – existuje nekonečná množina z, obsahující prázdnou množinu $\emptyset$ a s každým svým prvkem u také množinu $u \cup \{u\}$. Nedefinuje však způsob, který by vedl ke vzniku této množiny z již zavedených množin. Tento axiom je mimo rozsah omezené velikosti množin:
$$(\exists z)\big(\emptyset \in z \wedge (\forall u)(u \in z \to u \cup \{u\} \in z)\big)$$
9. Axiom fundovanosti / regularity – každá neprázdná množina x musí obsahovat prvek disjunktní s x. Tím se vyvarujeme možnosti, že by množina obsahovala samu sebe, například všechny množiny, pro které platí $x \in x$. Pro každou množinu x platí, že pokud $x \neq \emptyset$, pak existuje y takové, že $y \in x$ a zároveň $y \cap x = \emptyset$: $(\forall x)\big(x \neq \emptyset \to (\exists a)(a \in x \wedge \mathrm{a} \cap \mathrm{x} = \emptyset)\big)$
10. Axiom výběru – pro každý neprázdný soubor neprázdných množin existuje funkce, která z každé množiny tohoto souboru vybírá právě jeden prvek: pro každou množinu u, která neobsahuje prázdnou množinu $\emptyset$ jako svůj prvek, existuje funkce f definovaná na množině u, tak, že kdykoliv $x \in u$, pak $f(x) = x$.

4.3 Paradoxy lháře

„Není pochyb o tom, že znalost logiky má značný praktický význam pro každého, kdo chce správně myslet a usuzovat.“ – Alfred Tarski, polský logik a matematik (1901–1983)

Russellův paradox

Russellův paradox známý i pod pojmem Russellova antinomie nám říká: máme množinu, která je souborem všech objektů se shodnou vlastností. Nyní vytvořme množinu všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem. Definujme si tedy množinu S, která obsahuje všechny prvky množiny x, které neobsahují samy sebe, značíme: $S = \{x: x \notin x\}$. Nyní si položme otázku: Platí, že množina $S \in S$ nebo $S \notin S$? Obě možnosti nás dovedou k nepravdě a sporu, poněvadž nastane situace, že nemůžeme jednoznačně určit, jestli prvek S patří do množiny S, nebo jestli nepatří do množiny S. Tuto situaci si nyní představíme blíž:

- Předpokládejme, že S je prvkem množiny S, značíme: $S \in S$, pak S musí mít stejnou vlastnost jako při zadání, které znělo: $S = \{x: x \notin x\}$. Z toho vyplývá, že S nemůže být prvkem množiny S, tudíž $S \notin S$.
- Nyní předpokládejme, že S není prvkem množiny S, značíme: $S \notin S$, pak S musí mít opět stejnou vlastnost jako při zadání. Z toho vyplývá, že S musí být prvkem množiny S, tudíž $S \in S$.

Při první možnosti jsme došli ke sporu: $S \in S \rightarrow S \notin S$. Při opačné variantě jsme došli k opačnému sporu: $S \notin S \rightarrow S \in S$. Z tohoto nám vyplývá následující vztah: $S \in S \leftrightarrow S \notin S$ a tudíž docházíme k závěru, že nelze sestrojit množinu všech množin s touto vlastností a Cantorova teorie množin neplatí pro všechny množiny a je sporná.[26] Problém způsobilo vybírání z úplně všech množin. Tohoto problému se dokážeme zbavit pomocí zavedení axiomů vydělení a fundovanosti. Tyto axiomy zabraňují výběru ze všech množin a umožňují výběr jen z již existujících množin. Tudíž vůbec nemá smysl rozhodovat o tom, jestli $S \in S$ nebo $S \notin S$. Poněvadž množina S nebyla ani v původní množině, ze které prvky, případně podmnožiny vybíráme.

Paradox lháře

Variantou na Russellův paradox jsou paradoxy lháře. Nejznámějším lhářským paradoxem je paradox vesnického holiče. K tomuto paradoxu se váže příběh, který zní: ‚V jedné vesnici je dán zákon, že každý občan musí být hladce oholen. Ve vesnici žije jeden jediný holič. Tento holič holí pouze občany, kteří se neoholí sami.‘ Zadání zní celkem jednoduše. Všichni občané vesnice se buď holí sami, nebo se nechávají oholit od našeho holiče. Co ale má udělat sám holič? Pokud se sám neoholí, tak se musí nechat oholit od holiče, ale právě on je holičem, tak se musí oholit. Ale pokud se sám oholí, tak nesmí jít k holiči, ale opět právě on je holičem, takže se oholit nemůže. Zjednodušeně tedy platí:

$$vesnický\ holič\ se\ musí\ oholit \leftrightarrow\ vesnický\ holič\ se\ oholit\ nesmí.$$

Tento výrok nemůže být nikdy pravdivý a vždy vede ke sporu a ke kruhové sebe-referenci.[28]

Existuje několik různých znění tohoto paradoxu, mění se pouze postavy a jejich povolání. Dalšími známými možnostmi jsou vesnický výčepní a jeho točení piva, král Francie a nalévání bourbonu, pošťák a jeho roznášení pošty a praktickým příkladem z dnešní doby je finanční účetní, která počítá daně těm, co si je nepočítají sami.[29]

Obdobný příklad také můžeme nalézt v 61 kapitole velmi známé knihy ‚Důmyslný rytíř Don Quijote de la Mancha II' od španělského spisovatele Miguela De Carvantes Saavedra. V této kapitole Sancho Panza jako vladař ostrova Baratarie a zároveň jako soudce musel rozhodnout o případu v jednom panství, které je rozděleno řekou na dvě části, které spojuje most. U mostu čekají soudci. Každý, kdo přechází přes tento most, musí soudcům pravdivě vypovědět kam jde a proč. Pokud odpoví lživě bude okamžitě pověšen na nedaleké šibenici. Vladař Sancho Panza musí rozhodnout o budoucnosti jednoho poutníka, který přešel tento most a soudcům prohlásil: „Přicházím zemřít na nedaleké šibenici." Zemře-li tento poutník na šibenici, tak mluvil pravdu a zemřít nemá. Neoběsí-li ho, pověděl lež a podle pravidla musí být pověšen. Z toho vyplývá, že by měla být pověšena ta část, co lhala, a část, co pravila pravdu, má být puštěna na svobodu. Což není možné, poutník by předtím musel být zabit a tím nebude dosaženo ani jednoho cíle. Sancho Panza vzpomíná na radu svého pána don Quijota: ‚Je-li spravedlnost na pochybách, je dobré dát přednost dobru'. A podle této rady rozhodl pro osvobození poutníka.[30]

Sémantické paradoxy

Sémantika je nauka o významu slov a jazykových výrazů. Sémantické paradoxy vznikají ze sémantických pojmů, a především z určování pravdivosti vět a z logického významu vět a slov. Výše zmíněný lhářský paradox patří do sémantických paradoxů. Mezi další sémantické paradoxy můžeme zařadit Tarskiho lhářské věty a sebepopisující slova tzv. Grellingův paradox.[31] O lhářských větách jsme se dozvěděli už z kapitoly Paradoxy. Pro připomenutí můžeme zmínit, že mezi tyto věty patří např.: Tato věta je nepravdivá.

Německý matematik a logik Kurt Grelling v roce 1908 objevil paradox, který se netýká teorie množin, ale jazyka.[32] Rozdělil všechna slova na dvě skupiny: autologická a heterologická. Autologické slovo popisuje samo sebe a heterologické slovo se naopak na sebe nevztahuje. Autologická slova jsou například slova: české, čtyřslabičné, pětislabičné, vyslovitelné, existující, … Všechna tato slova popisují svou vlastnost. Heterologická slova jsou např. slova: německé (jedná se o české slovo), jednoslabičné (víceslabičné slovo), nevyslovitelné (můžeme vyslovit), neexistující

(existující slovo), … Do jaké skupiny ale zařadíme slova: ‚heterologický' a ‚autologický'? Slovo ‚autologický' = ‚sebepopisující' to bezesporu spadá do skupiny autologických výrazů. Teď se zamysleme nad slovem ‚heterologický' = ‚sebenepopisující'. Pokud ho zařadíme do skupiny autologických slov, tak musí mít vlastnost, kterou samo sebe popisuje. Tudíž musí být heterologické, což vede ke sporu s tím, že má být autologické. Pokud toto slovo zařadíme do druhé skupiny, tedy heterologických slov, vznikne také spor, protože najednou začne samo sebe svou vlastností vystihovat a zapadat do první skupiny. Z toho vzniká paradox, neboť z pravdivosti vyplývá nepravdivost a nepravdivosti pravdivost.

Pro zjednodušení můžeme zapsat:

$$heterologické\ je\ heterologické \leftrightarrow heterologické\ není\ heterologické$$

Tímto výrokem se opět dostáváme do kruhové sebe-reference, a tudíž nikdy nemůže být pravdivý a vždy vniká spor.[33]

4.4 Praktická část

Na začátku úvodu do Russellova paradoxu žáky seznámíme s tvůrcem a jmenovcem tohoto paradoxu. Zmíníme informaci, že se nazývá podle britského matematika, filozofa a spisovatele Bertranda Russella, který žil v 19. a 20. století a věnoval se rozvíjení matematické logiky a zabýval se přírodními vědami.

Poté můžeme přejít k samotnému paradoxu. Vzhledem k tomu, že žáci na základních školách ještě neumějí pracovat se záludnými množinami, žákům představíme známější a pochopitelnější verzi tohoto paradoxu na příkladu vesnického holiče. Uvedeme, že tento druh paradoxů spadá do skupiny lhářských paradoxů. Nadále seznámíme žáky s příběhem našeho holiče: „V jedné vesnici je dán zákon, že každý občan musí být hladce oholen. Ve vesnici žije jeden jediný holič. Tento holič holí pouze občany, kteří se neoholí sami.“ V tento moment je důležité zjistit, jestli žáci danou situaci správně pochopili. Toho nejlépe docílíme pomocí dobře směrovaných otázek, díky kterým žáci sami znovu přeříkají příběh. Nyní přišel čas položit nejdůležitější otázku tohoto příběhu: Může holič sám sebe oholit? Žákům necháme chvíli na přemýšlení a poté zahájíme diskuzi. Správně by měl mezi žáky probíhat rozhovor, ve kterém část třídy bude zastávat názor, že holič musí sám sebe oholit. Druhá skupinka by jejich názor měla vyvracet argumentem, že se oholit nesmí, protože existuje pravidlo, že holič může holit pouze ty, co to sami nezvládnou a on to přece dokáže. Po chvíli dohadování a argumentování by celá třída měla prohlásit, že tento problém vyřešit nejde. Vesnický holič se musí sám oholit a zároveň se oholit nesmí a v příběhu není nikdo jiný, kdo by ho oholil. Tudíž se příběh stále točí v začarovaném kruhu, z kterého není cesta ven.

V druhé části tohoto pradoxu žáky seznámíme s možností rozdělit všechna slova do dvou kategorií – na slova sebepopisující a na slova sebenepopisující. Žákům vysvětlíme, že slova sebepopisující jsou všechna slova, jejichž význam zároveň popisuje jejich vlastnost a že slova sebenepopisující jsou všechna slova, jejichž význam se na ně nevztahuje a nepopisuje jejich vlastnost. Dále žákům zadáme samostatný úkol, na jehož splnění budou potřebovat tužku a papír. Na tabuli napíšeme následujících deset slov: české, německé, jednoslabičné, pětislabičné, čtyřslabičné, tříslabičné, dlouhé, modré, nevyslovitelné a existující. Úkol pro žáky zní: rozdělte těchto deset slov do dvou již představených kategorií. Můžeme žákům doporučit, vytvořit si na papíru dva sloupečky, jeden pojmenovat: slova sebepopisující a druhý: slova sebenepopisující. Žáci poté musí každé zadané slovo umístit do jednoho sloupečku. Žákům necháme několik minut na rozřazení těchto 10 slov. Kdo si myslí, že by mohl mít hotovo, donese svoje rozřazení ukázat ke kontrole. Správným řešením je, že do slov sebepopisujících patří následující slova: české, pětislabičné, čtyřslabičné a existující, a do slov sebenepopisujících patří následující slova: německé, jednoslabičné, tříslabičné, dlouhé, modré a nevyslovitelné.

Nakonec každý žák dostane závěrečný úkol na téma Russellovy paradoxy. Závěrečným úkolem je zařadit do zmíněných dvou kategorií samotná slova: ‚sebepopisující' a ‚sebenepopisující'. Každý žák by měl zvládnou zařadit první slovo do kategorie sebepopisujících slov, protože je na první pohled vidět, že jej samotná jeho vlastnost vystihuje. Nad slovem ‚sebenepopisující' se žáci musí hlouběji zamyslet. Toto slovo by žáky mělo opět přivézt do hlubokého bludného kruhu, z kterého nedokážou nalézt řešení. Na závěr žákům zdůrazníme, že právě kruhovým odkazováním na sebe vzniká známý Russellův lhářský paradox.

5 Monty Hallův paradox

5.1 Monty Hall

„Snít o něčem nepravděpodobném má své jméno. Říká se tomu naděje.“ – Jostein Gaarder, norský spisovatel (nar.1952)

Maurice Halperin

Obrázek 18: Monty Hall

Maurice Halperin se narodil 25. srpna 1921 v Kanadě. V roce 1945 vystudoval Manitobskou univerzitu se zaměřením na chemii a zoologii, tímto směrem ale dál nepokračoval. Už ve svých studentských letech se věnoval rozhlasovým hrám a po dokončení školy se stal moderátorem rozhlasových her. Jeho nadřízení mu zkrátili příjmení na pouhé Hall a chybou tisku změnili i jeho křestní jméno na Monty, čímž vzniklo jeho umělecké jméno Monty Hall. Ve svém životě se především zabýval moderováním velké řady herních a soutěžních pořadů, např.: Strike It Rich, Twenty-One (Dvacet jedna), Fun in the Morning (Ranní zábava), Video Village a mnoha dalších.[34]

V roce 1973 dostal hvězdu na Hollywoodském chodníku slávy a v roce 2002 byl uveden na kanadský chodník slávy. Ve svém životě se rád věnoval charitativní činnosti, všichni posluchači ho znají jako veselého a přátelského člověka. V roce 1947 se oženil s producentkou Marilyn Doreen Plottel a společně měli tři děti, které se vydali ve šlépějích svých rodičů a stali se herci a televizními producenty. V roce 2017 Maurice zemřel na selhání srdce v úctyhodném věku 96 let.[35]

Let's Make a Deal (Pojďme udělat dohodu)

Nejvýznamnějším televizním pořadem v kariéře moderátora Monty Halla se stal pořad Let's Make a Deal (Pojďme udělat dohodu). Tento pořad vytvořil Monty Hall se svým obchodním partnerem Stefanem Hatosem. 30.12.1963. se poprvé promítal na televizních obrazovkách na kanálu NBC. Tato show získala nevídaný úspěch. Po pěti letech oba zakladatelé souhlasili s nabídkou televizního kanálu ABC, který jim za možnost přestupu do jejich studia nabídl hlavní večerní vysílací čas. Tento pořad studiu ABC zařídil konkurenceschopnost s nejznámějšími televizními kanály 70. let. Monty Hall tento pořad moderoval dalších 30 let. I v dnešní době soutěžní show stále existuje a je rozšířena po celém světě.[36]

Jedná se o zábavný televizní pořad, ve kterém publikum může vyhrát různé hmotné a peněžní ceny. Moderátor si v každém díle vybere několik náhodných diváků, kteří si s ním hrají na obchodníky. V prvních dílech do publika dorazil člověk v maškarním kostýmu, Montymu se jeho nápad zalíbil, a tak si zvolil, že dnešním obchodníkem bude on. V příští hře se objevil další jedinec v absurdním kostýmu a Monty si ho opět zvolil. Od té doby vznikla tradice, že každý divák v hledišti má na sobě vlastnoručně vyrobený kostým.

Každá hra začíná tím, že obchodník musí nabídnout moderátorovi něco svého (na konci danou věc vždy dostane zpět a občas i se skrytým bonusem), moderátor na oplátku nabídne dopředu připravený předmět (peníze, elektroniku, jídlo, poukázky, …). Obchodník se v tento moment musí rozhodnout, jestli si daný předmět ponechá nebo zkusí zariskovat a získat hodnotnější cenu. Když se obchodník rozhodne zariskovat, častokrát ho čeká nějaký úkol nebo hra. Nejznámějším úkolem je výběr ze tří různých opon. Za jednou z nich se schovává velká výhra a za dalšími dvěma tzv. zonky (výstřední, bezvýznamné, často bizardní předměty). Obchodník si zvolí jednu oponu, moderátor odklopí jinou oponu, za kterou je schovaný zonk. Nyní nabídne obchodníkovi možnost přehodnotit svůj výběr a zvolit poslední oponu. Tento výběr všichni diváci do dneška nazývají ‚Monty Hallův problém‘.[37]

Obrázek 20: Here's What Happened to Monty Hall Before, During and After Hosting Game Show 'Let's Make a Deal'

Obrázek 19: The Reason Why the Monty Hall Problem Continues to Perplex Everyone

5.2 Joseph Bertrand

„Jak se opovažujeme mluvit o zákonech náhody? Není náhoda protikladem veškerého práva?“ – Joseph Bertrand, francouzský matematik (1822-1900)

Joseph-Louis-François Bertrand byl francouzský matematik a pedagog. Narodil se v roce 1822 v Paříži a v tomtéž městě i v roce 1900 zemřel. V době prusko-francouzské války byl kapitánem Národní gardy. Později byl jmenován členem pařížské akademie věd, kde od roku 1874 až do své smrti pracoval jako tajemník.[38]

Obrázek 21: Joseph Bertrand

Zabýval se především analytickou mechanikou, termodynamikou, statistickou pravděpodobností, křivkami a plochami, dokonce i teorií trhu a monopolu. Je po něm pojmenována Bertrandova věta, Bertrandovy křivky, a ještě tři paradoxy:

- Bertrandův paradox v geometrii – velikost pravděpodobnosti náhody, že libovolná tětiva kruhu bude kratší než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníka.
- Bertrandův paradox v ekonomii tzv. Bertrandův model – vysvětluje tvorbu cen na trhu při dokonalé pružnosti, informovanosti a konkurenci.
- Paradox Bertrandovy krabice – pravděpodobnost, že v jedné náhodně vybrané krabičce (ze tří možností) jsou dvě stejné mince. Tento paradox je v roce 1889 uveden v knize Calcul des Probabilities.[39]

5.3 Pravděpodobnost

Všechno je nejdříve těžké, než to začne být snadné. – Johann Wolfgang von Goethe, básník a dramatik (1749-1832)

Pravděpodobnost určuje velikost naděje náhodného jevu nebo pokusu (např.: hod kostkou, hod mincí, herní sázky, …). Je udávána desetinným číslem od 0 do 1. Nula značí nemožný výsledek (0 %) a jednička jistý výsledek (100 %).[40]

Pravděpodobnost se dělí na dvě kategorie: můžeme ji určovat bez provedení pokusu, pouze výpočtem relativní četnosti, nebo prakticky statistickým pokusem. Při použití vzorce je třeba dopředu znát jaké možnosti se mohou naskytnout, jejich počet musí být konečný a všechny musí mít stejnou šanci na své zvolení. Číselnou hodnotu pravděpodobnosti jevu A určíme využitím vzorce: $P(A) = \frac{m}{n}$. Hodnota m značí počet příznivých výsledků, tedy vyžadovaných a zkoumaných výsledků. Hodnota n značí počet všech možných výsledků. Druhou možností je praktický pokus, jehož výsledky zaznamenáme, a nakonec z nich vytvoříme aritmetický průměr. Čím více pokusů proběhne, tím je naše měření přesnější. Statistické hledání pravděpodobnosti není z hlediska matematiky uznávanou volbou.[41]

V matematice se pravděpodobnost určuje axiomatickým přístupem: Daný jev musí obsahovat neprázdné množiny (možnosti volby) a zároveň splňovat následující podmínky:

- musí obsahovat stoprocentní i nulový jev
- s každým jevem A musí obsahovat i opačný jev $\bar{A}$
  $opačný\ jev\ nastává \leftrightarrow nenastal\ jev\ A$: $P(A \cap \bar{A}) = 0 \wedge P(A \cup \bar{A}) = 1$
- pro každé jevy obsahuje i jejich sjednocení a průnik
  Sjednocení jevů A, B je jev:
  $$A \cup B \leftrightarrow nastane\ alespoň\ jeden\ z\ jevů\ A\ nebo\ B.$$
  Průnik jevů A, B je jev: $A \cap B \leftrightarrow nastane\ jev\ A\ a\ zároveň\ jev\ B$.[42]

5.4 Pravděpodobnostní paradoxy

„Když vyloučíte nemožné, pak to, co zbývá, musí být pravda, byť je sebenepravděpodobnější.“ – Arthur Conan Doyle, skotský lékař a spisovatel (1859-1930)

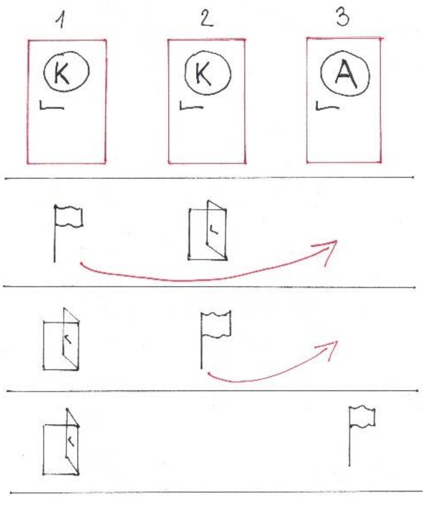
Problém tří dveří

Paradox tří dveří, často nazývaný Monty Hall Problem, podle autora tohoto statistického a pravděpodobnostního problému, už známe desítky let. Tento problém může být označován za paradox, protože je většina lidí překvapena matematicky správným závěrem. Opět se tedy vrátíme do herní show Let's Make a Deal, ve které soutěžícího Monty Hall požádá o výběr jedné možnosti ze tří dveří (dveře č.1, č.2, č.3). Za dvěma z nich se ukrývá koza (tady neobsahují nic cenného), za posledními je auto (velmi cenná výhra). Hostitel Monty zná aktuální rozmístění cen. Úkolem soutěžícího je vybrat si jedny dveře a ukázat na ně. Po označené volbě moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, za kterými je koza. Poté začne hrát dramatická hudba a soutěžícímu je položená otázka: „Chcete provést změnu své původní volby?“ Najdou se tací soutěžící, kteří trvají na svém výběru, ale i tací, co využijí možnosti výběr změnit. Kteří z nich mají větší pravděpodobnost a šanci získat cennou výhru?[43]

Na začátku máme výběr ze tří možností, se stejnou šancí na zvolení. Tudíž výběr jakýchkoli dveří má 1/3 pravděpodobnost, že výběr je výherní a 2/3 možnost, že za dveřmi je zonk. Monty Hall otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, vždy jsou to dveře, co neskrývají výhru. Pravděpodobnost na výhru již zvolených prvních dveří zůstává stále 1/3. V otevřených dveřích se hlavní výhra nenachází, pravděpodobnost je tedy 0/3. Zbývají nám poslední dveře, které původně měli také 1/3 pravděpodobnost výhry, po odkrytí dveří se pravděpodobnost posunula na tyto zavřené a nezvolené dveře. Tudíž je nyní 2/3 možnost, že za posledními dveřmi bude výhra.[44]

Můžeme si tuto situaci rozkreslit a ukázat názorně. Zvolme si možnost, že za prvními a druhými dveřmi se skrývají kozy, ve třetích je ukryté auto.

- Pokud si soutěžící napoprvé zvolí dveře č.1, Monty musí otevřít prostřední. Výhru obsahují třetí dveře, tudíž se vyplatí změna volby.
- Pokud si soutěžící napoprvé zvolí dveře č.2, Monty musí otevřít první. Výhru obsahují třetí dveře, tudíž se opět vyplatí změna volby.

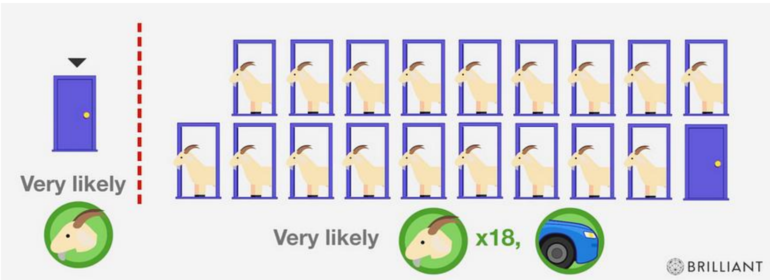


Obrázek 22: Paradox tří dveří

- Pokud si soutěžící napoprvé zvolí dveře č.3, Monty si může vybrat otevřít první nebo druhé dveře. Výhru obsahují třetí dveře, tedy napoprvé zvolené dveře, tudíž se nevyplatí změna volby.

Soutěžící, kteří trvají na svém výběru a za žádnou cenu svou volbu nezmění, mají pravděpodobnost výběru cenné výhry (auta – A): $P(A) = \frac{1}{3} \doteq 33{,}3\%$ a pravděpodobnost výběru bezcenné výhry (kozy – K): $P(K) = \frac{2}{3} \doteq 66{,}7\%$. Soutěžící, kteří na své volbě netrvají a vždy svou volbu změní, mají pravděpodobnost výběru cenné výhry: $P(A) = \frac{2}{3} \doteq 66{,}7\%$, tedy vyhrají pokaždé, když si na poprvé vyberou dveře s kozou. Pravděpodobnost výběru bezcenné výhry mají: $P(K) = \frac{1}{3} \doteq 33{,}3\%$, tedy vždy prohrají v případě, když si na poprvé vyberou dveře s autem.

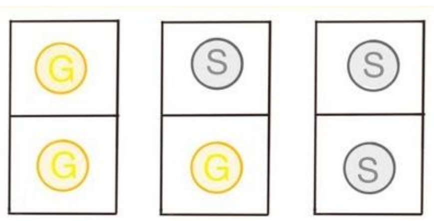
Pokud tedy chceme vyhrát, je dvojnásobně lepší změnit svou původní volbu. Toto dokázané řešení je velmi neintuitivní a lidé mu i přes pádné důkazy odmítají věřit. Pro lepší představu můžeme situaci pozměnit. Místo pouhých tří dveří, budeme mít 20 dveří, auto zůstává pouze jedno a koz je 19. První fáze zůstává stejná a soutěžící si vybírá jedny dveře. Moderátor ve druhé fázi ze zbylých dveří otevře 18 (všechny bez hlavní výhry). Ve třetí fázi si soutěžící může vybrat, jestli si svou volbu ponechá, nebo ji přehodnotí a vybere si poslední nezvolené dveře. Šance, že se hlavní výhra skrývá za prvními zvolenými dveřmi, je 1/20. Když Monty Hall odhalí 18 ze zbývajících dveří, šance u prvních zvolených dveří zůstává stále stejná. Pravděpodobnost z již otevřených dveří se přesunula k posledním neotevřeným dveřím, které najednou mají šanci 19/20, že obsahují auto. Tomuto příkladu lidé uvěří snáz a dokážou si ho lépe zdůvodnit. Čím více přidáme dveří, tím je situace uvěřitelnější.



Obrázek 23: Monty Hall Problem.

Bertrandovy krabice

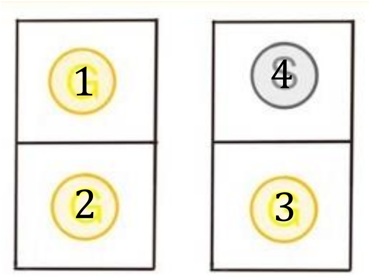
Opět se jedná o pravděpodobnostní hádanku, na obdobném principu jako je Montyho Hallův problém.



Obrázek 24: Bertrand's Box Paradox

Na začátku máme tři krabičky, každá má v sobě přepážku, která dělí krabičku napůl. Do první krabičky jsou dány dvě zlaté mince, do druhé jedna zlatá a jedna stříbrná mince, do poslední krabičky dvě stříbrné mince. Mince jsou vždy odděleny přepážkou, tudíž neleží hned vedle sebe. Náhodně vybereme jednu z krabiček (1/3 šance) a pootevřeme ji. Uvidíme první minci (1/6 šance), která je buď zlatá, nebo stříbrná. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v krabičce bude stejná?[45]

Pro představu si určíme, že první vytažená mince je zlatá. Tudíž s určitostí víme, že se nejedná o krabičku se dvěma stříbrnými mincemi, a tak nad ní nemusíme uvažovat. Před námi už stojí jen dvě krabičky, které obsahují tři zlaté mince a jednu stříbrnou minci, každou minci si očíslujeme:



Obrázek 25: Bertrand's Box Paradox Numbers

Jedna z krabiček je pootevřená a vidíme zlatou minci. Zamysleme se nad všemi možnými kombinacemi, které mohou nastat:

- vidíme minci číslo 1 – druhou mincí v krabičce je zlatá mince (č.2)
- vidíme minci číslo 2 – druhou mincí v krabičce je zlatá mince (č.1)
- vidíme minci číslo 3 – druhou mincí v krabičce je stříbrná mince (č.4)
- mince číslo 4 to být nemůže, protože není zlatá.

Máme tři zlaté mince, tudíž tři možnosti při prvním výběru. Všechny tři mince mají stejnou pravděpodobnost, že budou napoprvé vybrány. Z předchozího výpisu všech možných kombinací vyplývá:

- Pravděpodobnost, že druhá mince bude také zlatá, je 2/3, tedy přibližně 66,7 %.
- Pravděpodobnost, že druhá mince nebude zlatá, je 1/3, přibližně 33,3 %.

Tato logická hádanka je nazývána paradoxem, protože je velmi neintuitivní. Mnoho řešitelů by odpovědělo, že pravděpodobnost vytažení stejné mince je jenom 50 %.[39]

5.5 Praktická část

Dopředu si musíme připravit balíček karet, ze kterých vybereme jednu výraznou kartu a dvě obyčejné (např. joker a dvě osmičky), také si nachystáme tužku a papír. Žáky seznámíme se situací, že se dostali do soutěže Monty Halla. Na tabuli promítneme obrázek tří dveří, žákům vysvětlíme, že za jedněma z nich se skrývá velká odměna a za zbývajícími není nic. Učitel bude hrát moderátora, který žákům v roli soutěžících nabízí volbu. Učitel přitom bude držet v rukou tři skryté karty. Tyto karty symbolizují řečené dveře. Úkolem žáků bude postupně volit jednu z karet, učitel následovně odkryje jinou nevýherní kartu a položí otázku: „Chceš změnit svou volbu karty nebo si ji ponecháš?“ Žák odpoví a vybranou kartu odkryjeme. Na papír si poznamenáme dvě informace: změnil/nezměnil, vyhrál/nevyhrál. Na řadu přichází další hráč, s kterým celou situaci zopakujeme.

Po tahu všech žáků prozkoumáme zaznamenané výsledky. Z těchto výsledků by mělo vyplývat, že rozumnější variantou je svou volbu změnit. Nyní přišel čas žákům vše objasnit. Zvolíme způsob pomocí rozkreslení jednotlivých možností viz. Obrázek 22. Nakonec můžeme ukázat variantu s více kartami viz. Obrázek 23. Z této ukázky by měli být žáci moudřejší.

Výstup s žáky 9. ročníku ZŠ

Provedení

Praktická část byla vyzkoušena a předvedena jedné deváté třídě na základní škole. Třída se skládá z 25 žáků (11 chlapců a 14 dívek). Žáci byly podle abecedy rozděleni na dvě poloviny, se kterými se pracovalo samostatně. Délka celé jedné přednášky spadá na dvě vyučovací hodiny. Doprovodná prezentace (viz. Příloha 2), vytvořená v MS PowerPoint, je po celou dobu promítána žákům na tabuli.

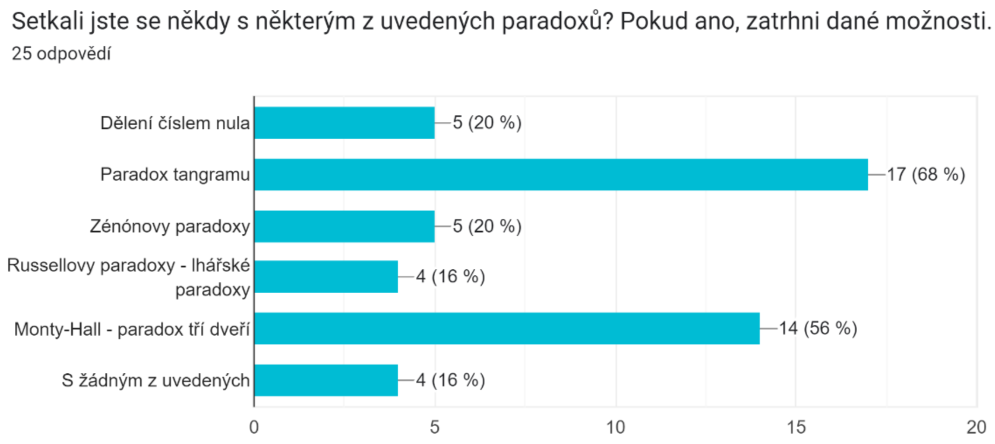
Ze začátku jsou žáci seznámeni s cílem, důvodem a tématem této přednášky. Poté představíme tři druhy paradoxů na praktických příkladech:

- první druh: tvrzení zní absurdně, ale je pravdivé – příklad s testy dvou žáků
- druhý druh: tvrzení zní pravdivě, ale je nesmyslné – příklad s trpaslíky na plakátě
- třetí druh: dvojice pravdivých výroků společně vedoucím ke sporným výsledkům – Kréťan Epimenidés

Následovně přecházíme na našich pět vybraných paradoxů, které postupně dle Praktických částí (vždy na konci každé kapitoly) představujeme žákům. Na konci prezentace žáci vyplní dotazník (viz. Příloha 3) se zpětnou vazbou.

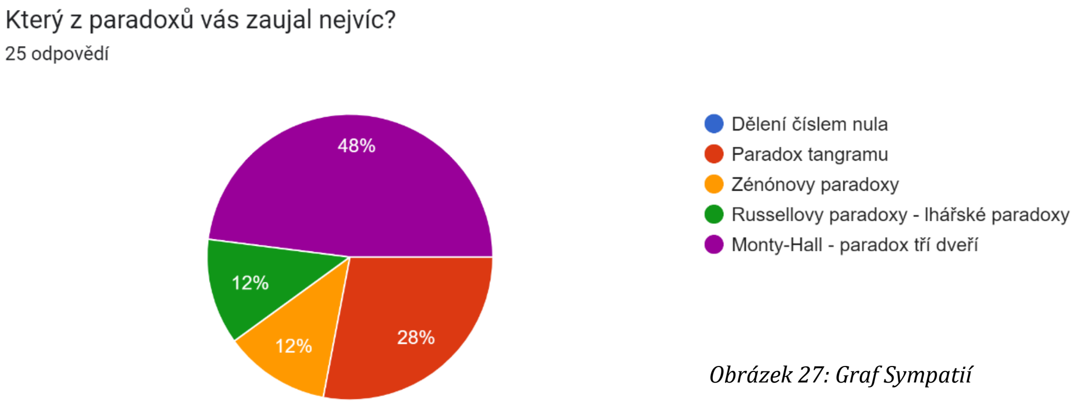
Výsledky dotazníku

První otázka zjišťuje, jestli se žáci s některým z předvedených paradoxů již dřív setkali. Souhrn tohoto zjištění značí, že většina žáků alespoň jeden paradox už znala, dokonce dva žáci uvádějí, že slyšeli o každém z nich.



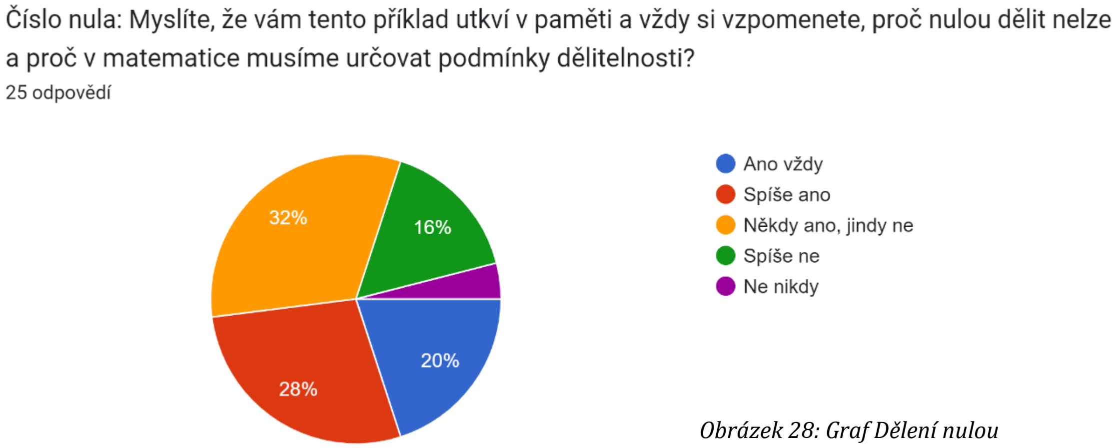
Obrázek 26: Graf Setkání s paradoxy

Druhá otázka se zabývá provedením výstupu a zjišťováním sympatie žáků. Z dotazníku vyplývá, že paradox Monty Halla sklidil největší úspěch a dělení číslem nula žáky naprosto neoslovilo.



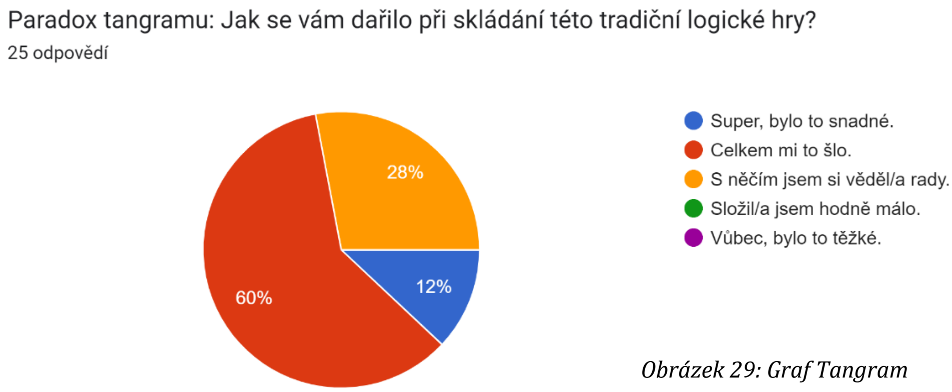
Obrázek 27: Graf Sympatií

Třetí otázka směřuje konkrétně na paradox čísla nula a zjišťuje, zda žákům přišel natolik zajímavý, že si na něj při výpočtech vzpomenou a budou vždy určovat podmínky dělitelnosti. Z grafu odpovědí respondentů plyne, že více jak 3/4 z nich problematiku pochopilo a na výjimku dělení nulou nezapomenou.



Obrázek 28: Graf Dělení nulou

Čtvrtá otázka směřuje konkrétně na paradox tangramu, žáci v ní sebehodnotí své dovednosti a svůj zápal při skládání stavebnice. Sebehodnocení žáků je ve výsledku pozitivní.

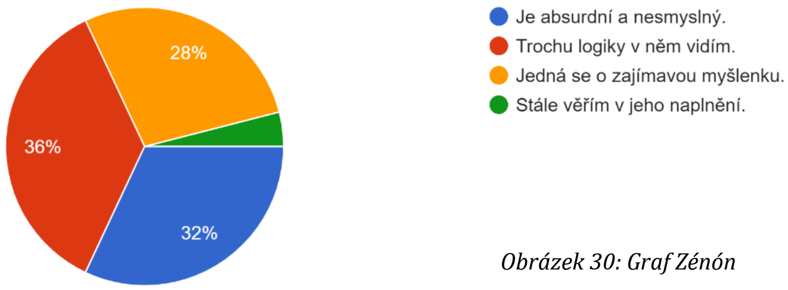


Obrázek 29: Graf Tangram

Pátá otázka se zabývá Zénónovými paradoxy, zjišťuje chápaní Zénónova učení dnešními dětmi. Celá skupina respondentů se v této otázce rozdělila na podobně velké třetiny, část z nich pokládá tuto problematiku za nesmyslnou, druhá třetina je ochotna se nad ní zamýšlet a poslední skupina ji pokládá za zajímavou až pravdivou.

Zénónův paradox: Přijde vám v dnešní době tento paradox absurdní a nesmyslný, nebo ho pokládáte za zajímavou myšlenku?

25 odpovědí



Obrázek 30: Graf Zénón

Šestá otázka se zabývá Russellovým paradoxem. Nabádá žáky ke tvorbě nápadů, jak zabránit a odstranit kruhovou sebereflexi, kvůli které vznikají lhářské paradoxy. 16 tázaných respondentů nemá žádný nápad, jak zabránit této situaci. Zbytek odpovědí je různorodých od nesmyslných, přes realistické až po vytvoření dalších jasných pravidel.

Russellův lhářský paradox: Napadá vás možnost, jak zabránit vytvoření takovéto nesmyslné situace?

25 odpovědí

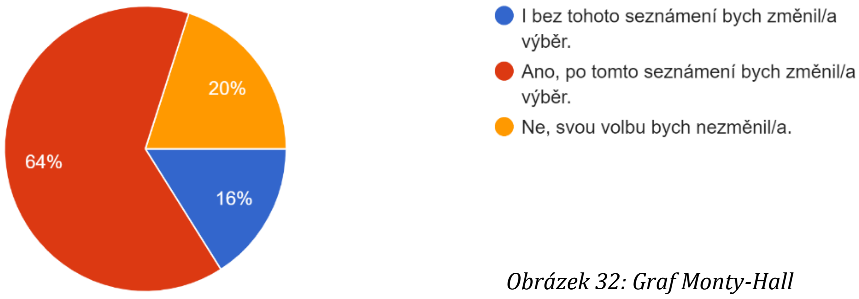
Obrázek 31: Otázka Lhářský paradox

- holič musí být žena
- řešením jsou dva holiči
- jiné zákony, nebo udělat víc holičů ve městě
- brát tyto výroky s rezervou
- nehledat zbytečné složitosti
- nastavit jasná pravidla
- v normální a svobodné společnosti by se to stát nemělo
- vytvořit novou skupinu kam by šel holič zařadit
- je potřeba přidat další skupinu (možnost) vyhovující oběma tvrzením, příp. se snažit této nesmyslné situaci vyhnou odvedením pozornosti na jiné téma

Sedmá otázka směřuje konkrétně na pravděpodobnostní paradox moderátora Monty Halla. Ověřuje velikost vlivu ukázky a důkazu, o zvýšení pravděpodobnosti výhry při změně svého rozhodnutí, na žáky. Z výzkumu plyne, že více jak 60 % zúčastněných by na základě této ukázky své rozhodnutí změnilo. Pouhých 20 % nadále věří ve své štěstí první volby a rozhodnutí nezmění.

Monty-Hall: Na základě seznámení s problémem tří dveří přehodnotili byste své rozhodnutí a otevřeli druhé dveře?

25 odpovědí



Obrázek 32: Graf Monty-Hall

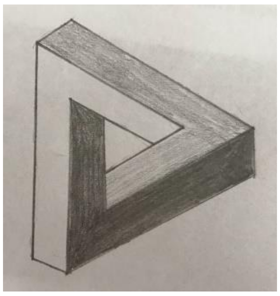
Osmá otázka je jedinou dobrovolnou otázkou. Zabývá se povědomím žáků o dalších známých paradoxech. 14 dotázaných odpovědělo na tuto otázku a pouze 4 měli kladnou odpověď. Každá z nich je pravdivá a naprosto odlišná.

Znáte další logické a matematické paradoxy, o kterých nebyla zmínka? Pokud ano uveďte stručný popis.

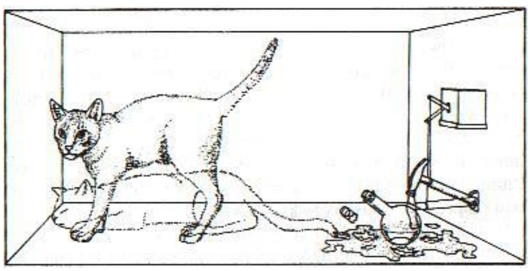
14 odpovědí

Obrázek 33: Otázka Paradoxy

- paradox dvou obálek
- paradox o nekonečné opici, která nakonec napíše celou větu
- Schrödingerova kočka
- paradox nemožných tvarů (zkroucené objekty) a jiné optické klamy

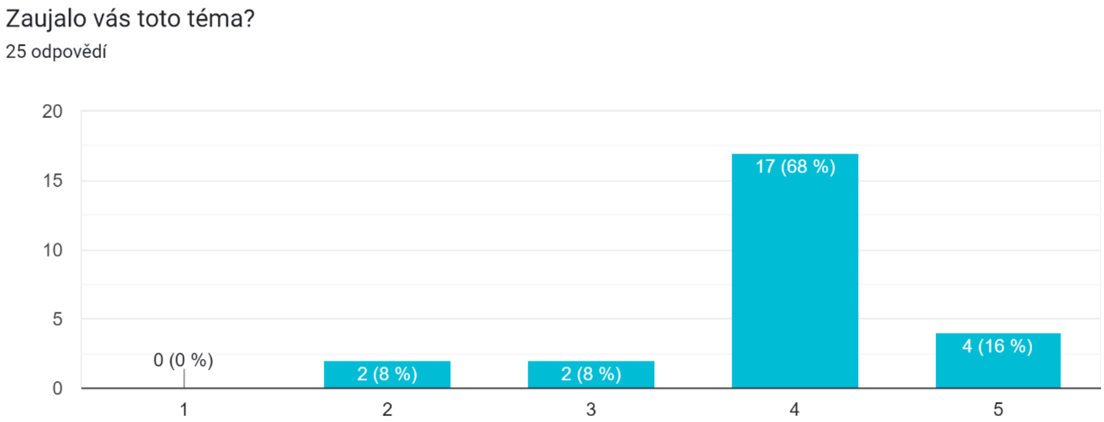


Obrázek 34: Optické klamy



Obrázek 35: Schrödingerova kočka

Závěrečná otázka shrnuje průběh celé proběhlé přednášky na téma matematické a logické paradoxy. Úkolem žáků je zhodnotit výstup pedagoga, obsah a sympatie k danému tématu. Na stupnici od 1 do 5 (1 představuje nezájem a 5 největší zaujetí) musí vybrat jednu z hodnot, která je jejich pocitu nejbližší. Z grafu vyplývá, že zaujetí žáků bylo spíše kladné, v průměru vychází na hodnotu 4.



Obrázek 36: Graf Celkové hodnocení

Závěr

Téma této bakalářské práce je matematické a logické paradoxy. Předmětem zkoumání bylo pět vybraných paradoxů z různých matematických disciplín. Tyto paradoxy byly vysvětleny a následně převedeny na pochopitelnější formu, kterou dokážou pochopit žáci druhého stupně základní školy a studenti středních škol. Tyto příklady rozvíjí lidskou představivost a logické myšlení.

Cílem práce bylo ukázat matematiku zábavnou formou, objasnit několik záhad a přimět žáky přemýšlet logicky nad jednotlivými úlohami a procesy nejen ve škole ale i v běžném životě. Porozumět zadání, postupům a zvážit pravdivost tvrzení či výsledku, který vidíme před sebou. Umět se zamyslet nad výsledkem a jeho podstatou. Vidět matematiku a její smysl v běžném životě.

V teoretické části došlo k představení pojmu paradox a jeho rozdělení na tři kategorie. Na začátku každé kapitoly je úvod, který nás seznamuje se vznikem daného paradoxu a s jeho autory. Také zde byly zavedeny a vysvětleny jednotlivé důležité pojmy, které byly následovně používány.

Praktická část se věnovala objasnění paradoxů a uvádění obdobných příkladů, které danou kategorii reprezentovaly a dále rozvíjely. Na konci každé kapitoly se nalézá podkapitola, ve které je pro pedagogy navržena možnost praktického předvedení daného paradoxu žákům a studentům. Tyto ukázky jsou téměř nenáročné na přípravu, průvodní prezentace je součástí této práce, potřebné pomůcky jsou vždy vypsány na začátku této podkapitoly. Nakonec byla práce dle vypracovaných návrhů představena žákům devátého ročníku základní školy. V poslední kapitole této práce se zabýváme provedením tohoto výstupu a zkoumáním výsledků hodnotícího formuláře od daných žáků.

Toto téma je velmi zajímavé, jeho velikost rozsahu je obrovská. Existuje mnoho různých paradoxů, které mají velké množství obdobných provedení. Nebylo lehké zvolit pouhých pět z nich. Nejlépe se pracovalo s paradoxem tangramu, jeho zkoumání a dokazování bylo zábavné a jednotlivé příklady na sebe navazovaly a působily komplexně. Naopak nejtěžší bylo vysvětlit kruhovou sebe-reflexi, která se objevuje v Russellově paradoxu a v dalších lhářských paradoxech.

Výstup před žáky nebylo těžké prezentovat. Z dotazníku vyplývá, že téma většinu žáků zaujalo. Bavilo je přemýšlet nad jednotlivými příklady, aktivně se zapojovali a dávali najevo své názory a nápady při řešení daných témat. Nejvíce úspěchu sklidily příklady, které si žáci mohly prakticky vyzkoušet. Téma bylo pochopeno a výstup dobře zorganizován. Jediný problém nastal při názorném předvedení paradoxu Monty Halla na třech hracích kartách. Při praktické zkoušce pořád hraje roli náhoda. S druhou skupinou subjektů nastala situace, ve které změna své volby přinesla stoprocentní úspěšnost. Žáci tudíž vyvodily chybný úsudek, že výměna vždy vede k jasné výhře. Bylo proto obtížnější vysvětlit si a dokázat, že vždy tomu tak není.

V dotazníku žáci navrhly další 4 paradoxy. V budoucnu by bylo dobré pokračovat v této práci dál a zaměřit se na tyto volby žáků, popřípadě získávat další možné návrhy. Těchto pět paradoxů nestačí k rozvíjení logického myšlení žáků a nad stálým zamýšlením se nad touto problematikou. Je potřeba jejich logické myšlení rozvíjet i nadále, do výuky občasně vkládat logické úkoly, hádanky a další matematické a logické paradoxy.

Seznam použitých zdrojů

Literatura

[1] Pojem paradox. [online]. *ABZ slovník cizích slov*. 2023. [cit. 2023-12-29]. Dostupné z: https://slovnik-cizich-slov.abz.cz/web.php/slovo/paradox-paradoxon.

[2] MRÁZ, Milan. *Pojetí paradoxu v Aristotelově logice a filosofii.* In NOSEK, J.; STACHOVÁ J.(eds.) Myšlení v paradoxu, paradox v myšlení. Praha: Filosofia, 1998, s. 11.

[3] Paradox vs. Oxymoron: What's The Difference? [online]. *Dictionary.com.* 2023. [cit. 2024-01-02]. Dostupné z: ://www.dictionary.com/e/paradox-oxymoron/.

[4] PICK, Luboš. *Přednáška se zapomenutým názvem*. [online]. Praha: Univerzita Karlova, 2019. [cit. 2024-01-07]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/sci/jaro2020/M0001/um/Prednaska_se_zapomenutym_nazvem.pdf.

[5] SAS, Marek. *Paradoxní rozklady, Banach-Tarského věta.* [online], Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, 2013. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/kdvs2/Magistr.pdf. [cit. 2024-01-07].

[6] SEIFE, Charles. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Argo, 2005. Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). ISBN 80-7203-741-2.

[7] Život bez nuly. *Vesmír* [online]. 211n. l. [cit. 2023-09-25]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2015/01/zivot-bez-nuly.html.

[8] LAZAR, Petr. *ARCHIMÉDES* [online]. Diplomová práce. České Budějovice, 2007 Dostupné z: https://theses.cz/id/y0se0u/400283. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Vedoucí práce RNDr. Pavel Leischner, PhD. [cit. 2023-09-25].

[9] Dělení čísel. [online]. *Matematika polopatě.* 2022 [cit. 2022-10-19]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/deleni/.

[10] PLEVA, Přemysl. *Matematické paradoxy a omyly* [online]. Brno, 2016. [cit. 2023-10-05]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/qmdiu/BAKIS.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita.

[11] Tangram – stručná historie. *Mozkolam* [online]. 2019 [cit. 2023-10-21]. Dostupné z: https://mozkolam.cz/historie-hlavolamu/tangram-strucna-historie/.

[12] SÝPALOVÁ, Zdeňka. *Poznávání geometrických tvarů* [online]. Praha, 2012 [cit. 2023-10-22]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/44682/DPTX_2010_1__0_196652_0_95237.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Diplomová práce. Univerzita Karlova.

[13] PREVOS, Peter. Paradoxes of Size: A Treatise on Geometric Vanishes [online]. *Australia: Third Hemisphere Publishing,* 2019. [cit. 2023-11-02]. Dostupné z: https://horizonofreason.com/pdf/paradoxes-of-size-sample.pdf.

[14] GARDNER, Martin. *Mathematics, Magic and Mystery*. New York: Dover Publications, 1956, s. 129-155. ISBN 486-20335·2.

[15] Zénón z Eleje, želva, šíp a nekonečně bodů na úsečce. *Osel* [online]. 2019. [cit. 2024-02-18] Dostupné z: https://www.osel.cz/10620-zenon-z-eleje-zelva-sip-a-nekonecne-bodu-na-usecce.html.

[16] Zénón z Eleje. *Vaše encyklopedie.* [online]. 2000, 2020. [cit. 2024-02-18]. Dostupné z: https://www.cojeco.cz/zenon-z-eleje.

[17] Zénón z Eleje. *Mysleti a býti to samé jest.* [online]. 2024. [cit. 2024-02-18]. Dostupné z: https://www.filozofie.online/zenon.

[18] Zenon z Eleje. *TechmániaEduportál.* [online]. 2007. Dostupné z: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1374/zenon. [cit. 2024-03-02].

[19] Zénónův paradox. *ČVUT-Fakulta elektrotechnická*. [online]. 2001. [cit. 2024-03-03]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/mt/txte/1/txc4ea1a.htm.

[20] BERTRAND RUSSELL. [online]. *TechmániaEduportál.* 2007. [cit. 2024-01-02]. Dostupné z: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1304/russell.

[21] Bertrand Russell British logician and philosopher. [online]. *Encyclopedia Britannica*. 2024. [cit. 2024-03-17]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Bertrand-Russell.

[22] Bertrand Russell Životopis. [online]. *Osobnosti.cz.* 2024. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://zivotopis.spisovatele.cz/bertrand-russell.php.

[23] Bertrand Russell. [online]. *Aktuálne.cz*. 2015. [cit. 2024-03-17]. Dostupné z: https://www.aktualne.cz/wiki/kultura/bertrand-russell/r~b1d0a44eaf3511e58d7b0025900fea04/.

[24] Teorie množin. *Institute of Formal and Applied Linguistics*. [online]. 2024. Dostupné z: https://ufal.mff.cuni.cz/~pajas/vyuka/logika6.pdf. [cit. 2024-03-28].

[25] GEORG CANTOR. [online]. *TechmániaEduportál.* 2007. [cit. 2024-01-02]. Dostupné z: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1087/cantor.

[26] KRÁLOVEC, Martin. *Paradoxy teorie množin*. [online], Bakalářská práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2014. [cit. 2024-03-28]. Dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/13032/1/Martin_Kralovec_BCP_KMT_Paradoxy_teorie_mnozin_2014.pdf.

[27] LIVIO, Mario. RUSSELLŮV PARADOX. [online]. In: *Je Bůh matematik?* Argo, 2010, s. 165-169. [cit. 2024-03-28]. Dostupné z: https://www.dokoran.cz/ukazky/1277370395.pdf.

[28] RACLAVSKÝ, Jiří. Je paradox holiče paradoxem? [online]. *Digilib.phil.muni*. 2024. Dostupné z:

https://digilib.phil.muni.cz/sites/default/files/pdf/139048.pdf. [cit. 2024-04-06].

[29] RACLAVSKÝ, Jiří. Paradox vesnického výčepního. [online]. *Filozofie.phil.muni.* 2007. [cit. 2024-04-06]. Dostupné z: https://www.phil.muni.cz/fil/blok/katedrovy_kost_2007/raclavsky.pdf.

[30] Miguel de Cervantes Saavedra. [online]. In: *Důmyslný rytíř Don Quijote de la Mancha* II. 1. Praha: Městská knihovna v Praze, 2018, s. 343-345. ISBN 978-80-7587-491-7. [cit. 2024-04-26]. Dostupné z: https://web2.mlp.cz/koweb/00/04/36/73/64/don_quijote_de_la_mancha_ii.pdf.

[31] ZAHOŘÍKOVÁ, Lucie. *Logické a sémantické paradoxy jazyka.* [online], Bakalářská práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2012. [cit. 2024-04-07]. Dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/4802/1/BP%20-%20Zahorikova.pdf.

[32] GOLDSTEIN, Rebecca. *Neúplnost: důkaz a paradox Kurta Gödela*. Velké objevy (Argo: Dokořán). Praha: Dokořán, 2006. ISBN 80-720-3766-8.

[33] KOČÍ, Václav. *Paradoxy a jejich význam v moderní logice a filozofii.* [online], Bakalářská práce. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2011. [cit. 2024-04-07]. Dostupné z: https://theses.cz/id/rv4ha3/7598134.

[34] Monty Hall – Biography. [online]. *IMDb*. 2024. [cit. 2024-04-14]. Dostupné z: https://www.imdb.com/name/nm0355937/bio/?ref_=nm_ov_bio_sm.

[35] Canadian game show host Monty Hall dies at 96. [online]. *CTV News.* 2017. Dostupné z: https://www.ctvnews.ca/entertainment/canadian-game-show-host-monty-hall-dies-at-96-1.3614007. [cit. 2024-04-14].

[36] "Let's Make a Deal" Still a Big Deal. [online]. *The Strong National Museum Of Play.* 2023. Dostupné z: https://www.museumofplay.org/blog/lets-make-a-deal-still-a-big-deal/. [cit. 2024-04-14].

[37] Let's Make a Deal. [online]. *IMDb.* 2024. [cit. 2024-04-14]. Dostupné z: https://www.imdb.com/title/tt0056770/.

[38] Joseph Louis François Bertrand. [online]. *Wayback Machine.* 1996. Dostupné z: https://web.archive.org/web/20040404032538/http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bertrand.html. [cit. 2024-04-27].

[39] Paradox Bertrandovy schránky. [online]. *Medium*. 2020. [cit. 2024-04-27]. Dostupné z: https://medium.com/@thakurmaithily/the-bertrands-box-paradox-21613511e033.

[40] Klasická definice pravděpodobnosti. [online]. *Střední průmyslová škola Karviná.* 2005. [cit. 2024-04-20]. Dostupné z: https://www.spskarvina.cz/projekty/Ict2005/manual/data/matematika/VYUKA/11.pravdepodobnost/3.klasicka_definice_pravdepodobnosti.pdf.

[41] JARUŠKOVÁ, Daniela. Pravděpodobnost a matematická statistika. *ČVUT Fsv* [online]. 2015 [cit. 2024-04-20]. Dostupné z:

https://mat.fsv.cvut.cz/jaruskova/Pravd%C4%9Bpodobnost% 20a%20matematick% C3%A1%20statistika.pdf.

[42] Pravděpodobnost a statistika. [online]. *Informační systém Masarykovy univerzity.* 2023. [cit. 2024-04-20]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps23/metodika_matematiky/web/pages/06_02_pravdepodobnost_statistika.html.

[43] Problém Montyho Halla. [online]. *Lancaster University.* 2022. [cit. 2024-04-21]. Dostupné z: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/nikos-tsikouras/2022/03/10/the-monty-hall-problem/.

[44] Problém Monty Hall, vysvětleno. [online]. *Cantor´s Paradise.* 2022. [cit. 2024-04-21]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-monty-hall-problem-explained-b09ab4ce369b.

[45] Bertrandův box paradox – Bertrands box paradox. [online]. *Encyklopedie.* 2021. Dostupné z: https://wikijii.com/wiki/Bertrand%27s_box_paradox. [cit. 2024-04-27].

Obrázky

Obrázek 1: Vanishing leprechaun puzzle-Clip Art Library. [online]. In: *Clipart-library*. 2023. [cit. 2024-01-07]. Dostupné z: https://clipart-library.com/clipart/rcjKdyX9i.htm.

Obrázek 2: Leprechauns 15 or 14 | PPT. [online]. In: *Slideshare.* 2007. [cit. 2024-01-07] Dostupné z: https://www.slideshare.net/vidyasri1953/leprechauns-15-or-14.

Obrázek 3: Život bez nuly. In: *Vesmír* [online]. VESMÍR, 2015 [cit. 2022-09-23]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2015/01/zivot-bez-nuly.html.

Obrázek 5: Tangrams-Uses, Examples. In: *Cuemath* [online]. [cit. 2023-10-21]. Dostupné z: https://www.cuemath.com/numbers/tangrams/.

Obrázek 7: Curryho paradox: Příklady na dobrou noc. [online]. In: *Pikomat* MFF UK. 2009. Dostupné z: https://pikomat.mff.cuni.cz/tabor/2009/nanoc/nanoc20. [cit. 2023-11-19].

Obrázek 8: Los Triángulos de Curry. [online] In: *Libros Maravillosos*. 2001. Dostupné z: http://www.librosmaravillosos.com/matematicamagiaymisterio/index.html. [cit. 2024-01-14].

Obrázek 9: Tangram Paradoxes!. [online] In: *Durham University*. 2020. [cit. 2024-01-21]. Dostupné z: https://www.durham.ac.uk/things-to-do/media/things-to-do/learn/online-resources/families/Tangram-Paradox-Game.pdf.

Obrázek 10: Paradoxy tangramu-Vázy. [online]. In: *Digitální knihovna University Pardubice*. 2017. [cit. 2024-01-21]. Dostupné z: https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/68084/JilekD_HraTangram_RD_2017.pdf?sequence=2&isAllowed=y.

Obrázek 14: Tangrams. [online] In: *ToolboxPro.* 2006. [cit. 2024-01-21]. Dostupné z: https://ideas.gstboces.org/programs/tangrams/tangrams-print-sheet5-bw.pdf.

Obrázek 15: Zeno's Paradox: Achilles And The Tortoise. [online] In: *Mosaic Lille.* 2020. [cit. 2024-03-03]. Dostupné z: https://www.formasup.fr/?k=zeno-s-paradox-achilles-and-the-tortoise-owlcation-ii-kd4oWlsl.

Obrázek 18: Monty Hall. [online]. In: *Wikipedia*. 2024. [cit. 2024-04-14]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall.

Obrázek 19: The Reason Why the Monty Hall Problem Continues to Perplex Everyone. [online]. In: *Wireless Pi.* 2024. [cit. 2024-04-14]. Dostupné z: https://wirelesspi.com/the-reason-why-the-monty-hall-problem-continues-to-perplex-everyone/.

Obrázek 20: Here's What Happened to Monty Hall Before, During and After Hosting Game Show 'Let's Make a Deal'. [online]. In: *Closer Weekly.* 2023. [cit. 2024-04-14]. Dostupné z: https://www.closerweekly.com/posts/heres-what-happened-to-lets-make-a-deal-host-monty-hall/.

Obrázek 21: Joseph Bertrand. [online]. In: Wikipedie. 2024. [cit. 2024-04-27]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand.

Obrázek 23: Monty Hall Problem. [online]. In: *Brilliant Math & Science Wiki*. 2015. [cit. 2024-04-21]. Dostupné z: https://embed-ssl.wistia.com/deliveries/1150279fed24cd8da03beadebf6837db.jpg.

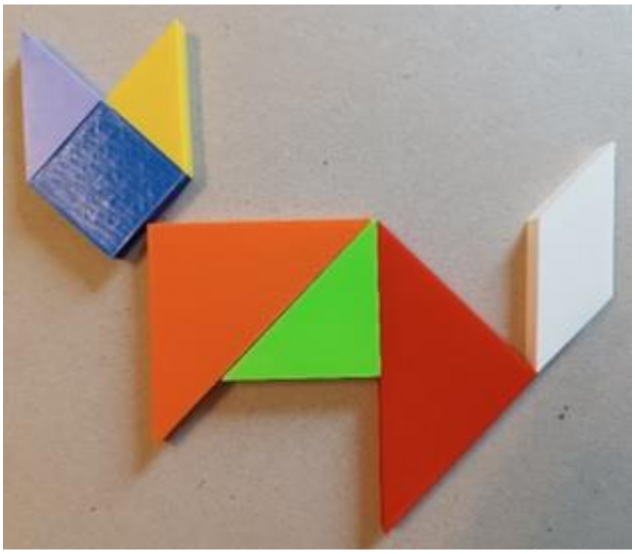
Obrázek 24: Bertrand's Box Paradox. [online]. In: YouTube. 2017. [cit. 2024-04-27]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=FNl7xv5ms90.

Obrázek 34: Optické klamy. [online]. In: *Gymnázium Českolipská*. 2020. [cit. 2024-04-24]. Dostupné z: https://ceskolipska.cz/galerie-54?galerie=119.

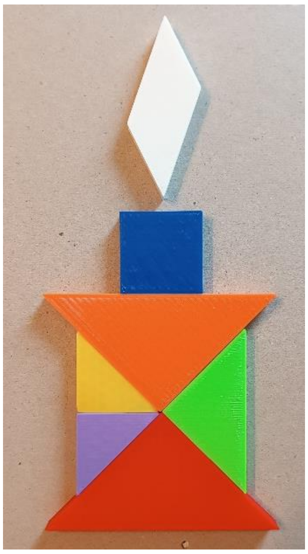
Obrázek 35: Schrödingerova kočka. [online]. In: *Encyklopedie fyziky*. 2024. [cit. 2024-04-24]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/print/740-schrodingerova-kocka.

Příloha 1

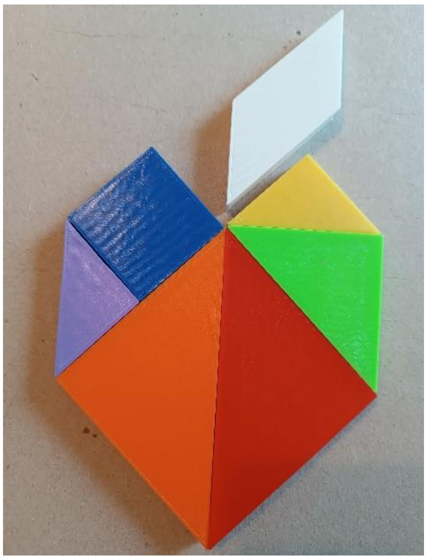
V této příloze jsou ukázány obrázky správných výsledků sestavených obrazců z kapitoly 2. U těchto obrazců často lze zrcadlově prohodit některé dílky (např. fialový a žlutý trojúhelník za zelený u obrazce Svíčka). Také samozřejmě můžeme prohodit stejné dílky s odlišnými barvami (fialový a žlutý dílek, nebo oranžový a červený dílek). Tudíž existuje daleko více barevných variant sestavení těchto obrazců.



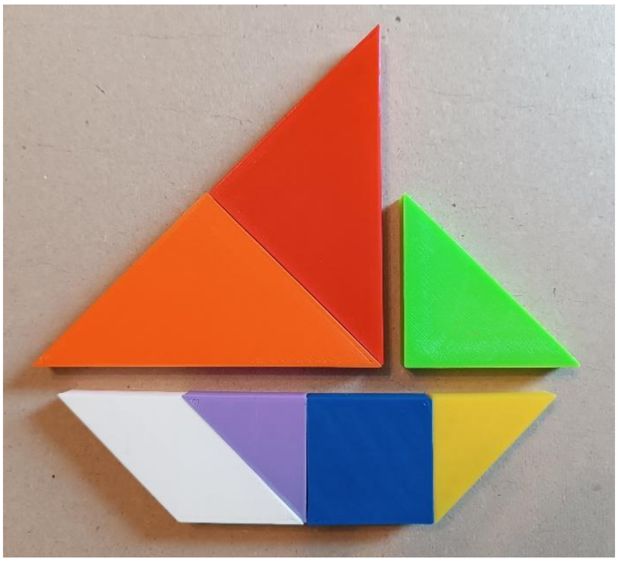
Obrázek 38: Tangram Liška



Obrázek 37: Tangram Svíčka



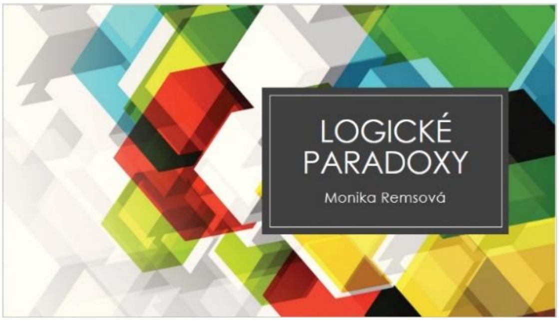
Obrázek 40: Tangram Jablko

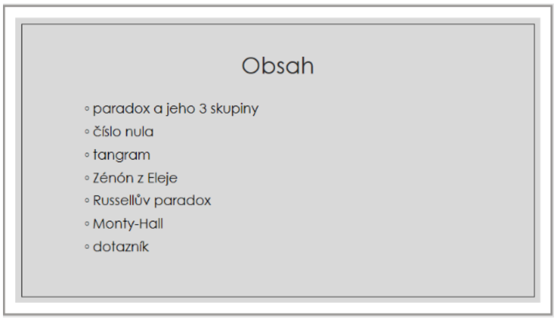


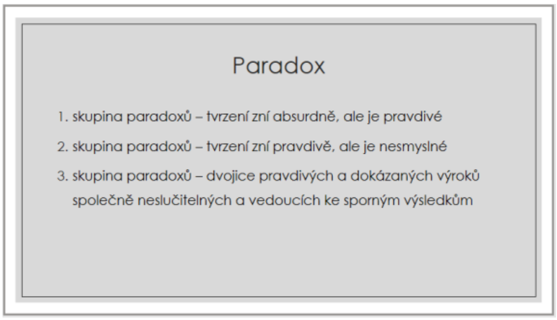
Obrázek 39: Tangram Loď

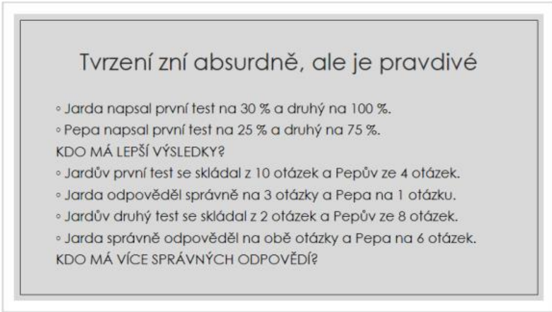
Příloha 2

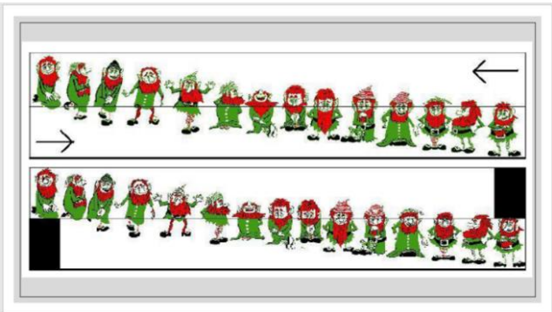
Podkladová prezentace vytvořena pro žáky 9. ročníku, kteří jsou touto formou seznámeni s 5 paradoxy této závěrečné práce.

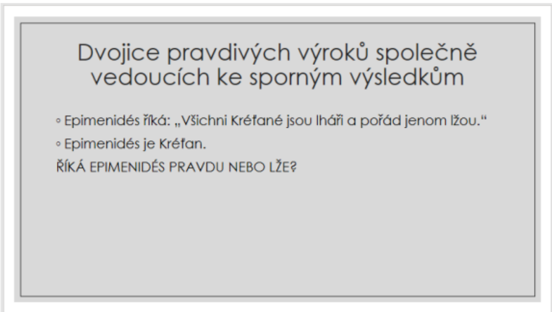


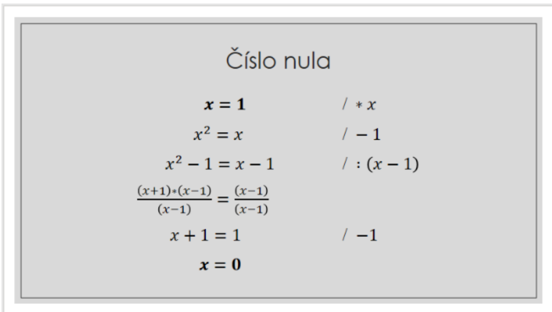




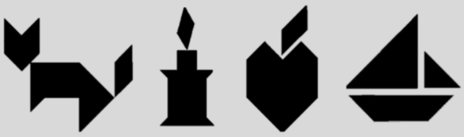








Tangram



Tangram

Tangram vázy

Ne vše, co vidíme, je pravda, důležité je výsledek prozkoumat a prověřit!

https://www.youtube.com/watch?v=uHAEllrFEPQ

Filozof Zénón z Eleje

- Zénón z Eleje žil přibližně v letech 490 př.n.l. až 430 př.n.l.
- zabýval se pohybem a důkazy o jeho neexistenci

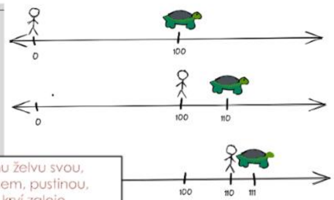
Zénón zastával názor, že postava nikdy ke studni nedorazí, tento názor ve své době dokázal bezchybně odůvodnit. Pokuste se přijít na jeho zdůvodnění, jestliže víte, že postava je zdravá a vždy se pohybuje rovně dopředu a nikdy se neotáčí.

Achilles a želva

- Kdo to byl Achilles?

Uvědomte si, jakým způsobem Zénón přemýšlel a zkuste odpovědět na následující otázku:

- Achilles, rychlý a nepřemožitelný hrdina, si dá rychlostní závod s obyčejnou želvou. Achilles ví, že želva je pomalý tvor, a tak jí dovolí mít 100 m náskok. Poté oba vybíhají. Dožene podle učení Zénóna Achilles někdy želvu?



Marně jako Achilles ženu želvu svou,
běžím za ní celý den, lesem, pustinou,
až na večer se obzor krví zaleje,
z dějin se mi vysměje Zenon z Eleje.
Nač si lámat hlavu řeckým paradoxem,
nechám planých úvah, začnu třeba s boxem.
Rána pěstí bez řečí, jen to platí dnes,
želvu přece dohnal už Aristoteles.

Russellův paradox – paradox lháře

- V jedné vesnici je dán zákon, že každý občan musí být hladce oholen. Ve vesnici žije jeden jediný holič. Tento holič holí pouze občany, kteří se neholí sami.
- Může se holič sám oholit?

Sebepopisující a sebenepopisující

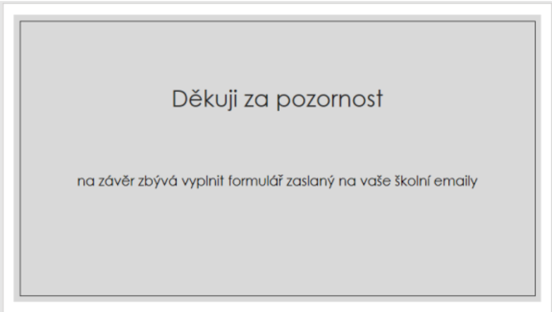
- Sebepopisující slova - všechna slova popisující svou vlastnost
- Sebenepopisující slova – význam slova nepopisuje dané slovo

české, německé, jednoslabičné, pětislabičné, čtyřslabičné, tříslabičné, dlouhé, modré, nevyslovitelné, existující


Správné řešení
Sebepopisující slova
české
pětislabičné
čtyřslabičné
existující
Sebenepopisující slova
německé
jednoslabičné
tříslabičné
dlouhé
modré
nevyslovitelné
Do jaké skupiny patří slova: sebepopisující a sebenepopisující?


Monty - Hall


Zdroje obrázků
Vanishing leprechaun puzzle-Clip Art Library. [online]. In: Clipart-library. 2023. [cit. 2024-01-07]. Dostupné z: https://clipart-library.com/clipart/rcjKdyX9i.htm.
Leprechauns 15 or 14 | PPT. [online]. In: Slideshare. 2007. [cit. 2024-01-07] Dostupné z: https://www.slideshare.net/vidyasri1953/leprechauns-15-or-14.
Tangrams. [online] In: ToolboxPro. 2006. [cit. 2024-01-21]. Dostupné z: https://ideas.gstboces.org/programs/tangrams/tangrams-print-sheet5-bw.pdf.
Tangram Paradoxesl. [online] In: Durham University. 2020. [cit. 2024-01-21]. Dostupné z: https://www.durham.ac.uk/things-to-do/media/things-to-do/learn/online-resources/families/Tangram-Paradox-Game.pdf.
Paradoxy tangramu-Vázy. [online] In: Digitální knihovna University Pardubice. 2017. Dostupné z: https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/68084/JilekD_HraTangram_RD_2017.pdf?sequence=2&isAllowed=y.
Zeno's Paradox: Achilles And The Tortoise. [online]. In: Mosaic Lille. 2020. Dostupné z: https://www.formasup.fr/?k=zeno-s-paradox-achilles-and-the-tortoise-owlcation-ii-kd4oWlsl


Děkuji za pozornost
na závěr zbývá vyplnit formulář zaslaný na vaše školní emaily

Příloha 3

Formulář určený pro zpětnou vazbu od žáků 9. ročníku:

Logické paradoxy

Monika Remsová

1. Pohlaví: *

Označte jen jednu elipsu.

- Žena
- Muž
- Jiné: ____________________

2. Setkali jste se někdy s některým z uvedených paradoxů? Pokud ano, zatrhni dané možnosti. *

Zaškrtněte všechny platné možnosti.

- [ ] Dělení číslem nula
- [ ] Paradox tangramu
- [ ] Zénónovy paradoxy
- [ ] Russellovy paradoxy - lhářské paradoxy
- [ ] Monty-Hall - paradox tří dveří
- [ ] S žádným z uvedených

3. Který z paradoxů vás zaujal nejvíc? *

Označte jen jednu elipsu.

- Dělení číslem nula
- Paradox tangramu
- Zénónovy paradoxy
- Russellovy paradoxy - lhářské paradoxy
- Monty-Hall - paradox tří dveří

4. **Číslo nula:** Myslíte, že vám tento příklad utkví v paměti a vždy si vzpomenete, proč nulou dělit nelze a proč v matematice musíme určovat podmínky dělitelnosti?

Označte jen jednu elipsu.

- Ano vždy
- Spíše ano
- Někdy ano, jindy ne
- Spíše ne
- Ne nikdy

5. **Paradox tangramu:** Jak se vám dařilo při skládání této tradiční logické hry? *

Označte jen jednu elipsu.

- Super, bylo to snadné.
- Celkem mi to šlo.
- S něčím jsem si věděl/a rady.
- Složil/a jsem hodně málo.
- Vůbec, bylo to těžké.

6. **Zénónův paradox:** Přijde vám v dnešní době tento paradox absurdní a nesmyslný, nebo ho pokládáte za zajímavou myšlenku?

Označte jen jednu elipsu.

- Je absurdní a nesmyslný.
- Trochu logiky v něm vidím.
- Jedná se o zajímavou myšlenku.
- Stále věřím v jeho naplnění.

7. **Russellův lhářský paradox:** Napadá vás možnost, jak zabránit vytvoření takovéto * nesmyslné situace?

8. **Monty-Hall:** Na základě seznámení s problémem tří dveří přehodnotili byste své * rozhodnutí a otevřeli druhé dveře?

Označte jen jednu elipsu.

- I bez tohoto seznámení bych změnil/a výběr.
- Ano, po tomto seznámení bych změnil/a výběr.
- Ne, svou volbu bych nezměnil/a.

9. Znáte další logické a matematické paradoxy, o kterých nebyla zmínka? Pokud ano uveďte stručný popis.

10. Zaujalo vás toto téma? *

Označte jen jednu elipsu.

	1	2	3	4	5	
Vůb						Zaujalo mě velmi