

**Univerzita Hradec Králové**  
**Přírodovědecká fakulta**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**2023**

**Bc. Lucie Habiňáková**

**Univerzita Hradec Králové**  
**Přírodovědecká fakulta**  
**Katedra matematiky**

Využití dynamické geometrie pro studium  
polohových vlastností trojúhelníku

Bakalářská práce

Autor: Bc. Lucie Habiňáková  
Studijní program: B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání  
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání, Biologie se zaměřením na vzdělávání  
Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.



## Zadání bakalářské práce

<b>Autor:</b>	<b>Bc. Lucie Habiňáková</b>
Studium:	S20MA002BP
Studijní program:	B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání, Biologie se zaměřením na vzdělávání
<b>Název bakalářské práce:</b>	<b>Využití dynamické geometrie pro studium polohových vlastností trojúhelníku</b>
Název bakalářské práce AJ:	Using dynamic geometry to study selected properties of a triangle

### Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Bakalářská práce bude zaměřena na využití dynamické geometrie pro studium vybraných polohových vlastností trojúhelníku na úrovni druhého stupně základní školy. V teoretické části představí příslušná matematická tvrzení a závěry literatury reflektující danou problematiku. Praktická část bude obsahovat autorské applety dynamické geometrie vytvořené na základě rešerše existujících volně dostupných materiálů. Využitelnost vybraných appletů pro vzdělávání v geometrii trojúhelníku bude reflektována na základě práce se studenty.

GERGELITSOVÁ, Šárka. Počítač ve výuce nejen geometrie: Průvodce GeoGebrou. Praha: Generation Europe, 2011. ISBN 978-80-904974-3-6.

ŠVRČEK, Jaroslav. Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka. Praha: Karolinum - nakladatelství Univerzity Karlovy, 1998. ISBN 80-7184-584-1.

Odborné časopisecké články věnované sledované problematice.

Učebnice matematiky pro druhý stupeň základních škol.

Další literatura bude upřesněna v rámci prvních konzultací.

Zadávací pracoviště: Katedra matematiky,  
Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.


Oponent: Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 4.1.2023

## **Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 4.5.2023

  
Bc. Lucie Habiňáková

## **Anotace**

HABIŇÁKOVÁ, L. *Využití dynamické geometrie pro studium polohových vlastností trojúhelníku*. Hradec Králové, 2023. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Lukáš Vízek, Ph. D. 66 s.

Cílem bakalářské práce je vytvořit applety a aktivity vhodné k objevení polohových vlastností trojúhelníku. Applety a aktivity jsme vytvořili v programu GeoGebra. V teoretické části definujeme trojúhelník včetně jeho náležitostí. Speciální podkapitoly se zabývají důležitými úsečkami v trojúhelníku a kružnicí trojúhelníku vepsanou i opsanou. Praktická část začíná řešerší již vytvořených appletů na daná témata. Následně uvádíme námi vytvořené applety i aktivity. Některé z nich prošly třemi fázemi reflexe.

### **Klíčová slova**

dynamická geometrie, planimetrie, trojúhelník, GeoGebra, střední příčky, těžnice, výšky, trojúhelník a kružnice

## **Annotation**

HABIŇÁKOVÁ, L. *Using dynamic geometry to study selected properties of a triangle*. Hradec Králové, 2023. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D. 66 p.

The bachelor thesis aims to create applets and activities suitable for discovering the positional properties of triangle. We created the applets and activities in GeoGebra. In the theoretical part, we define a triangle including its essentials. Special subsections deal with important segments in a triangle and the inscribed and circumscribed circle of a triangle. The practical part begins with a search for already created applets on the given topics. Subsequently, we present the applets and activities created by us. Some of them went through three stages of reflection.

### **Keywords**

Dynamic geometry, planimetry, triangle, GeoGebra, midsegment, median, altitude, triangle and circles

## Obsah

Úvod.....	7
1. Trojúhelník.....	9
1.1 Charakteristika .....	9
1.2 Druhy .....	12
1.3 Shodnost a podobnost .....	15
1.4 Polohové vlastnosti .....	18
1.4.1 Střední příčky.....	19
1.4.2 Těžnice.....	21
1.4.3 Výšky.....	22
1.4.4 Kružnice trojúhelníku opsaná .....	26
1.4.5 Kružnice trojúhelníku vepsaná.....	27
2. GeoGebra.....	30
2.1 GeoGebra a geometrie.....	30
2.2 Program GeoGebra .....	30
2.3 Rešerše.....	32
2.3.1 Polohové vlastnosti trojúhelníku .....	33
2.3.2 Střední příčky.....	34
2.3.3 Těžnice.....	36
2.3.4 Výšky.....	38
2.3.5 Trojúhelník a kružnice.....	40
2.3.6 Kružnice trojúhelníku opsaná .....	41
2.3.7 Kružnice trojúhelníku vepsaná.....	42
2.4 Soubor appletů.....	44
2.4.1 Reflexe z praxe .....	45
2.4.2 Střední příčky.....	49
2.4.3 Těžnice.....	51
2.4.4 Výšky.....	53
2.4.5 Těžnice a výšky .....	55
2.4.6 Kružnice trojúhelníku opsaná .....	57
2.4.7 Kružnice trojúhelníku vepsaná.....	59
2.5 Shrnutí .....	61
Závěr.....	63
Seznam obrázků.....	64
Zdroje.....	66

# Úvod

V posledních letech došlo k výraznému vývoji moderní technologie. Zpřístupnění programu GeoGebra všem zájemcům zdarma se odrazilo i ve výuce matematiky. Řada pedagogů daný program zná a využívá. Nadále ale zůstává otázkou, jak vhodně a efektivně lze zapojit GeoGebru do výuky? V naší práci se zaměříme na zapojení dynamické geometrie jako nástroje k objevení vlastností středních příček, těžnic, výšek, kružnice trojúhelníku opsané a kružnice trojúhelníku vepsané.

V první části uvedeme potřebné teoretické pozadí. Zavedeme pojem trojúhelník a jeho náležitosti. Následně uvedeme základní vlastnosti. Některé z nich dokážeme. V teorii neopomeneme rozdělení trojúhelníků na základní druhy. Ve speciálních podkapitolách uvedeme důležité úsečky a kružnice týkající se trojúhelníku. Přesněji řečeno se budeme zabývat pojmy střední příčka, těžnice, výška, kružnice trojúhelníku opsaná a kružnice trojúhelníku vepsaná. Teoretickou část obohatíme o názorné obrázky, které jsme vytvořili v prostředí GeoGebry. Seznam očíslovaných, autorsky vytvořených obrázků uvádíme na stranách 64 a 65.

Druhá část nás seznámí s programem GeoGebra a s již vytvořenými applety na téma střední příčky, těžnice, výšky, kružnice trojúhelníku vepsaná a kružnice trojúhelníku opsaná. V úvodu uvedeme krátký popis programu. Následně pomocí stručných a přehledných tabulek seznámíme čtenáře s applety nebo aktivitami, které vytvořili různí autoři a které jsou volně dostupné. Tabulky se skládají ze třech sloupců. V prvním sloupci je název appletu nebo aktivity, jméno autora, snímek a odkaz. Ve druhém sloupci uvádíme stručně v bodech obsah daného appletu (aktivity). Třetí sloupec obsahuje naše poznámky včetně jazyka, použitých nástrojů, pohybu s jedním nebo více vrcholy.

Po stručné rešerši již vytvořených appletů uvedeme naše autorské. V jejich úvodu upozorňujeme na možnost zkombinovat applet s možnými otázkami dle potřeb vyučujícího. Před samotnými odkazy popisujeme reflexi vyzkoušených aktivit. Aktivity zaměřené na polohu průsečíku výšek a polohu průsečíku těžnic prošly celkem třemi fázemi reflexe. Nejprve je vyzkoušeli žáci deváté třídy základní školy v rámci opakování, následně po potřebných úpravách žáci šesté třídy, kteří objevovali pro ně nové informace, a v závěrečné fázi sloužily applety opět k zopakování stávajících znalostí v rámci individuální přípravy na přijímací zkoušky. Popis jednotlivých appletů a aktivit uvádíme opět ve stručných tabulkách o třech sloupcích.

Vytvořené aktivity a applety slouží žákům k objevování pro ně nových vlastností, případně k utužení již stávajících znalostí. Vyučující by si měl předem promyslet, v jaké části hodiny, s jakým cílem, které applety a s jakými otázkami, zapojí do své výuky. Námi vytvořené applety a sestavené aktivity může vyučující rovnou zapojit



do svých hodin nebo je použít jen jako zdroj možné inspirace a vytvořit si vlastní. Zapojením GeoGebry do výuky zároveň rozvíjíme i digitální gramotnost.

# 1. Trojúhelník

## 1.1 Charakteristika

Tři body, které neleží v jedné přímce, určují geometrický útvar zvaný trojúhelník. Různí autoři definují trojúhelník různými způsoby. Uvedeme si zde několik příkladů:

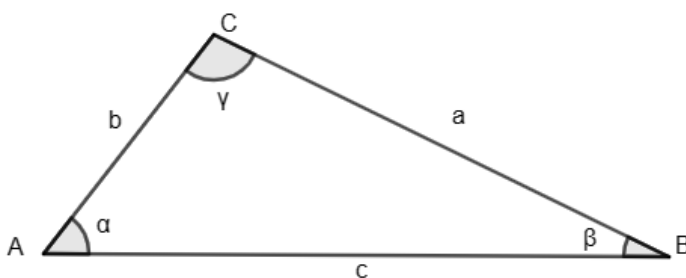
„Trojúhelník je rovinný útvar, který má tři vrcholy, tři strany a tři vnitřní úhly.“ (Cihlár, Zelenka, 1997)

„V našem pojetí bude trojúhelník uspořádaná trojice bodů  $A, B, C$  v rovině, které neleží na přímce a které souhlasí s kladnou orientací (tj. s orientací proti směru hodinových ručiček) roviny.“ (Švrček, Vančura, 1988)

„Trojúhelník je průnik tří polorovin:  $\Delta ABC = \mapsto ABC \cap \mapsto CBA \cap \mapsto ACB$ .“ (Vošický, 2007)

„Mějme dány tři různé body  $A, B, C$ , které neleží v jedné přímce. Trojúhelník  $ABC$  je průnik polorovin  $ABC, BCA, CAB$ , tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách.“ (Polák, 1995)

„Trojúhelník  $ABC$  lze též definovat jako množinu všech úseček  $AX$ , kde  $X$  je libovolný bod úsečky  $BC$ .“ (Polák, 1995)



Obr. č. 1 Trojúhelník  $ABC$

Popis trojúhelníku uvedeme na příkladu z Obr. č. 1. Trojúhelník  $ABC$  budeme značit  $\Delta ABC$ .

Vrcholy trojúhelníku popisujeme velkými tiskacími písmeny, například  $A, B$  a  $C$ .

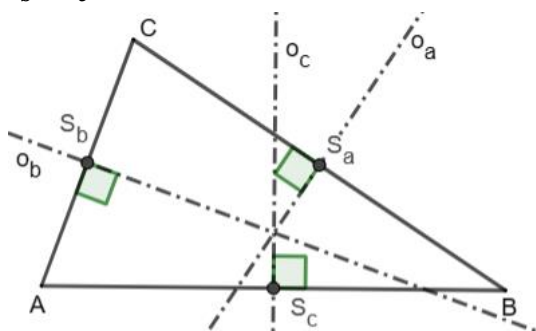
Strany trojúhelníku tvoří úsečky  $(AB, BC, AC)$ , které můžeme označovat i malými písmeny  $a, b, c$ . Jednotlivé strany popisujeme písmeny, které odpovídají protilehlým vrcholům. Kromě stran značí malá písmena i délku jednotlivých úseček  $AB, BC$  a  $AC$ , tedy délky jednotlivých stran, přičemž platí:

$$a = BC; a = |BC| \quad b = AC; b = |AC| \quad c = AB; c = |AB|.$$

Pro každý trojúhelník platí, že součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než délka strany třetí. Tuto vlastnost nazýváme trojúhelníková nerovnost. Například pro trojúhelník  $ABC$  se stranami  $a, b$  a  $c$  můžeme psát trojúhelníkovou nerovnost ve tvaru:

$$(a + b > c) \wedge (a + c > b) \wedge (c + b > a).$$

Na strany trojúhelníku se můžeme dívat jako na úsečky, které mají svůj střed a svoji osu. Středem úsečky, respektive strany trojúhelníku, rozumíme bod, který je stejně vzdálený od obou krajních bodů. Označujeme ho  $S$  s dolním indexem příslušné strany -  $S_a, S_b$  a  $S_c$  - případně  $S_1, S_2$  a  $S_3$ . Přímka kolmá k úsečce, respektive ke straně trojúhelníku, která prochází středem dané úsečky, znázorňuje osu úsečky, respektive strany trojúhelníku. Jinými slovy pojem osa úsečky, osa strany, představuje množinu všech bodů, které mají od krajních bodů úsečky (strany) stejnou vzdálenost. V trojúhelníku  $ABC$  se stranami  $a, b$  a  $c$  značíme osy jednotlivých stran  $o_a, o_b$  a  $o_c$ .



Obr. č. 2 Střed a osy stran trojúhelníku  $ABC$

U trojúhelníků využíváme tzv. cyklickou záměnu. Cyklickou záměnou rozumíme možnost výměny vrcholů  $A, B$  a  $C$  (jim odpovídajících stran, vnitřních úhlů) po řadě vrcholy  $B, C, A$ , respektive  $C, A, B$ , což nám umožňuje psát následující vlastnosti jen pro vybrané vrcholy (strany, úhly). Třebaže vlastnosti uvádíme na příkladech, platí i pro cyklicky zaměněné vrcholy (strany, úhly).

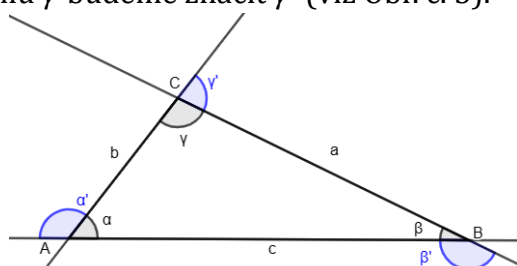
Strany trojúhelníku svírají konvexní úhly zvané vnitřní úhly. Značíme je písmeny řecké abecedy, pro trojúhelník  $ABC$  to jsou zpravidla  $\alpha, \beta, \gamma$ . Písmena řecké abecedy budou kromě úhlů označovat i jejich velikosti:

$$\alpha = \sphericalangle BAC; \alpha = |\sphericalangle BAC|$$

$$\beta = \sphericalangle ABC; \beta = |\sphericalangle ABC|$$

$$\gamma = \sphericalangle ACB; \gamma = |\sphericalangle ACB|.$$

Úhly vedlejší k úhlům vnitřním nazýváme vnější a značíme je pomocí apostrofu. Úhel vnější vůči vnitřnímu úhlu  $\alpha$  budeme značit  $\alpha'$ , vnější úhel vůči úhlu  $\beta$  budeme značit  $\beta'$  a vnější úhel vůči úhlu  $\gamma$  budeme značit  $\gamma'$  (viz Obr. č. 3).

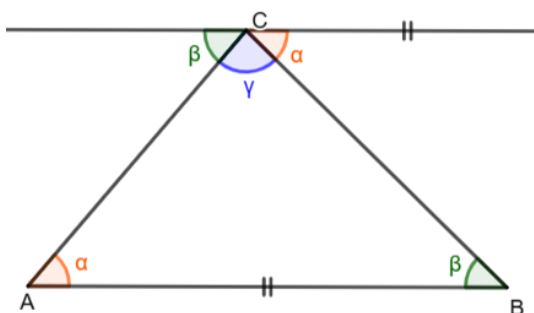


Obr. č. 3 Vnější úhly trojúhelníku  $ABC$

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku patří mezi základní vlastnosti. Pokud sečteme vnitřní úhly, získáme pokaždé přímý úhel o velikosti  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Důkaz je znázorněn v následujícím obrázku. Pokud bodem  $C$  vedeme rovnoběžku se stranou  $AB$ , získáme souhlasné úhly s úhly  $\alpha$  a  $\beta$ . Všechny tři úhly společně tvoří úhel přímý, tzn. úhel o velikosti  $180^\circ$ . Z toho plyne, že součet vnitřních úhlů je  $180^\circ$ . (Cihlár, Zelenka, 1997), (Moravcová, Hromadová, 2021)

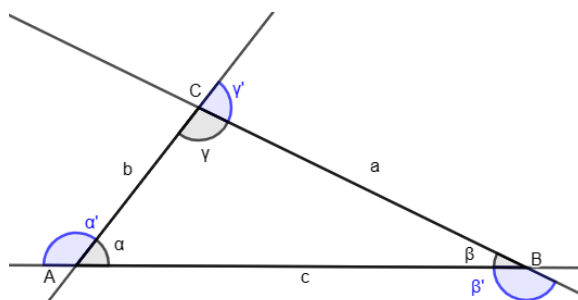


Obr. č. 4 Součet vnitřních úhlů trojúhelníku

Součet vnitřního a příslušného vnějšího úhlu je  $180^\circ$ , tedy pro trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  a příslušnými vnějšími úhly  $\alpha', \beta', \gamma'$  platí

$$(\alpha + \alpha' = 180^\circ) \wedge (\beta + \beta' = 180^\circ) \wedge (\gamma + \gamma' = 180^\circ).$$

Daná vlastnost plyne z vlastnosti vedlejšího úhlu (viz následující obrázek).



Obr. č. 5 Součet vnějšího a vnitřního úhlu

Pro vnější úhel trojúhelníku dále platí, že se jeho velikost rovná součtu dvou vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů. Například pro trojúhelník z Obr. č. 5 můžeme psát:

$$(\alpha' = \beta + \gamma) \wedge (\beta' = \alpha + \gamma) \wedge (\gamma' = \alpha + \beta).$$

Důkaz provedeme na základě vlastnosti součtu vnitřních úhlů a součtu vnitřního a příslušného vnějšího úhlu.

- Důkaz pro úhel  $\alpha$ :

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ . Zároveň platí, že  $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ . Pokud použijeme oba vztahy, dostáváme  $\alpha' = \beta + \gamma$ .

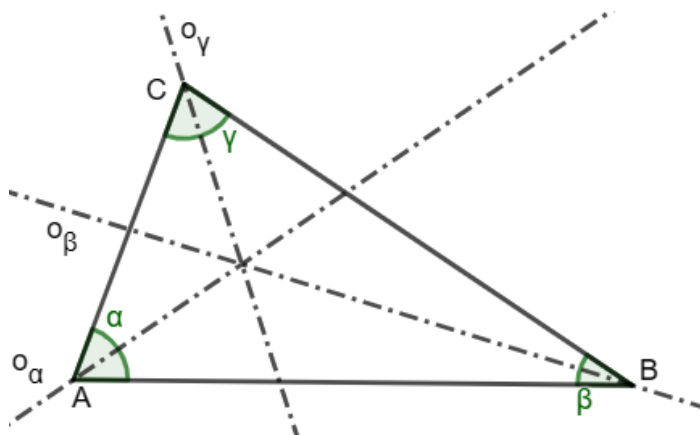
- Důkaz pro úhel  $\beta$ :

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$ . Zároveň platí, že  $\beta + \beta' = 180^\circ$ . Pokud použijeme oba vztahy, dostáváme  $\beta' = \alpha + \gamma$ .

- Důkaz pro úhel  $\gamma$ :

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ . Zároveň platí, že  $\gamma + \gamma' = 180^\circ$ . Pokud použijeme oba vztahy, dostáváme  $\gamma' = \alpha + \beta$ .

Obecně pro úhly zavádíme pojem osa úhlu, která představuje množinu všech bodů stejně vzdálených od ramen svírajících daný úhel. V trojúhelníku  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  můžeme konstruovat osy těchto úhlů a značíme je  $o_\alpha, o_\beta$  a  $o_\gamma$ .



Obr. č. 6 Osy vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$

Hranice trojúhelníku označuje sjednocení všech stran trojúhelníku. Bodům, které tvoří hranici trojúhelníku, říkáme hraniční body. Všechny ostatní body trojúhelníku nazýváme vnitřní body. Vnitřek trojúhelníku je množina všech vnitřních bodů trojúhelníku. (Polák, 1995)

Pro jednoznačné určení trojúhelníku a jeho přesnou konstrukci musíme znát následující kombinace údajů:

- délku jedné strany a velikosti dvou úhlů k dané straně přilehlých,
- délky dvou stran a velikost úhlu, který svírají,
- délky dvou stran a velikost úhlu, který je protilehlý k delší zadané straně,
- délky všech tří stran trojúhelníku. (Vošický, 2007)

## 1.2 Druhy

Trojúhelníky dělíme podle dvou odlišných hledisek. Nejprve se zaměříme na klasifikaci trojúhelníků podle délek stran na trojúhelník různoramenný, rovnoramenný a rovnostranný. Podle velikosti vnitřních úhlů dělíme trojúhelníky na trojúhelníky ostroúhlé, pravouhlé a tupouhlé.

- Klasifikace trojúhelníků podle délek stran
  - Různostranný

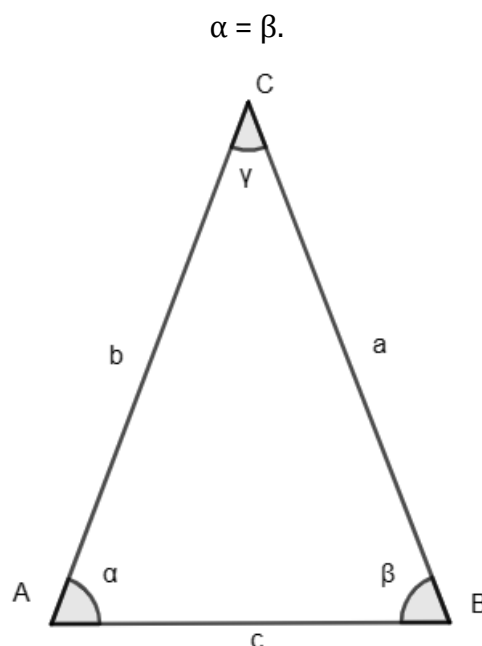
V různoramenném trojúhelníku (např. Obr. č. 1) platí, že žádné dvě strany trojúhelníku nejsou stejně dlouhé.

○ Rovnoramenný

U rovnoramenného trojúhelníku (Obr. č. 7) jsou právě dvě strany stejně dlouhé, například platí

$$a = b.$$

Strany  $a, b$ , které jsou stejně dlouhé, označujeme pojmem ramena. Stranu  $c$ , rozdílnou od zbylých dvou stran, nazýváme základna. Úhly přilehlé k základně mají stejnou velikost, například



Obr. č. 7 Rovnoramenný trojúhelník  $ABC$

○ Rovnostranný

Posledním druhem trojúhelníku podle délky stran je trojúhelník rovnostranný, který má všechny tři strany stejně dlouhé. Pro trojúhelník  $ABC$  tedy platí:

$$a = b = c.$$

I všechny vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku mají stejnou velikost:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

V kapitole Charakteristika jsme uvedli velikost součtu všech vnitřních úhlů trojúhelníku. Právě tato vlastnost nám udává velikost vnitřních úhlů. Pro součet vnitřních úhlů platí:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Pokud dále platí, že

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

dostáváme velikost vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku:

$$3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ.$$

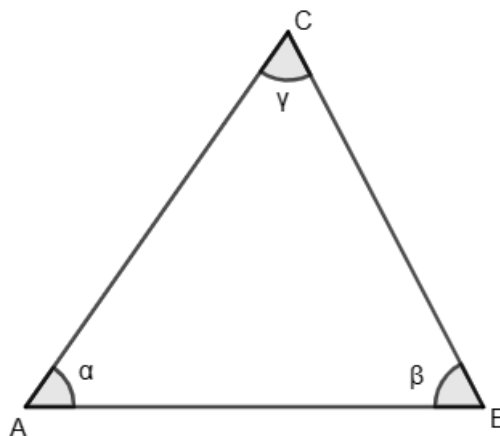
Slovně vyjádříme předchozí vztah jako velikost vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku je  $60^\circ$ .

- Klasifikace trojúhelníků podle velikosti vnitřních úhlů

- Ostroúhlý

V ostroúhlém trojúhelníku jsou všechny vnitřní úhly ostré, tzn. jsou větší než  $0^\circ$  a zároveň menší než  $90^\circ$ , tedy

$$(0^\circ < \alpha < 90^\circ) \wedge (0^\circ < \beta < 90^\circ) \wedge (0^\circ < \gamma < 90^\circ).$$



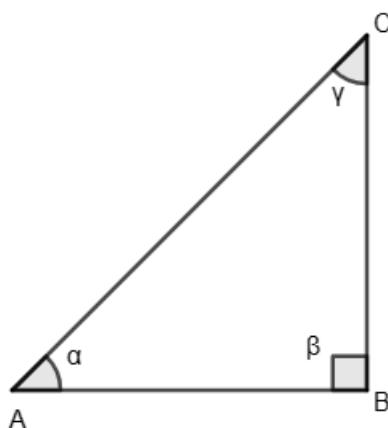
Obr. č. 8 Ostroúhlý trojúhelník  $ABC$

- Pravoúhlý

V pravoúhlém trojúhelníku je právě jeden úhel pravý, tzn. má velikost  $90^\circ$ , tedy ostatní úhly jsou ostré. Například

$$\alpha = 90^\circ \wedge \beta, \gamma < 90^\circ.$$

Při popisu pravoúhlého trojúhelníku využíváme pojmy přepona a odvěsny. Strana ležící proti pravému úhlu se nazývá přepona. Zbylé dvě strany nazýváme odvěsny.

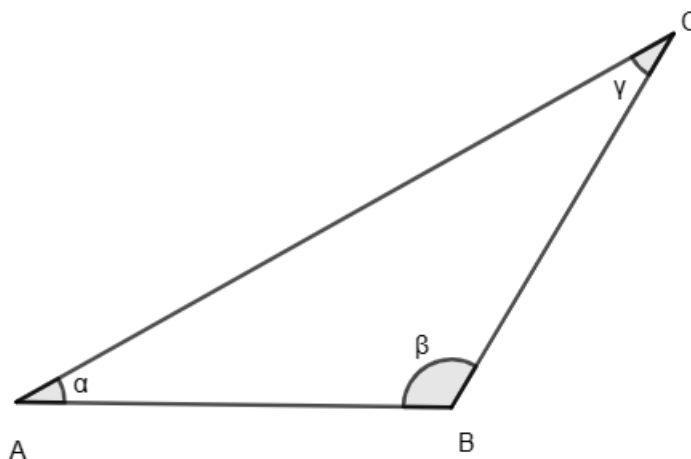


Obr. č. 9 Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$

○ Tupouhly

Prave jeden tupy uhel, tzn. velikost uhlu je vetsi nez  $90^\circ$  a mensi nez  $180^\circ$ , ma trojuhelnik tupouhly, tedy napriklad

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \quad \wedge \quad 0^\circ < \beta, \gamma < 90^\circ.$$



Obr. č. 10 Tupouhly trojuhelnik ABC

• Kombinace predchozich klasifikaci

Predchozi deleni podle dvou rozdilnych kriterii muzeme i kombinovat. Ziskame tim celkem sedm rozdilnych druhu trojuhelniku:

- ruznostranny ostrouhly,
- ruznostranny pravouhly,
- ruznostranny tupouhly,
- rovnoramenny ostrouhly,
- rovnoramenny pravouhly,
- rovnoramenny tupouhly,
- rovnostranny.

### 1.3 Shodnost a podobnost

V zaveru predchoziho odstavce jsme uvedli podminky jednozacneho urceni trojuhelniku. Jednotlive body predstavuji zaroven i vety o shodnosti trojuhelniku. V geometrii rozhodujeme, zda jsou dane utvary shodne ci ne na zaklade odpovidajicich si vzdalenosti. U trojuhelniku sledujeme delky sobe odpovidajicich stran a velikosti vnitrcnich uhlu. Platí, ze navzajem shodne trojuhelniky maji stejne delky stran a stejne velikosti vnitrcnich uhlu. Napriklad shodnost trojuhelniku ABC s trojuhelnikem KLM zapisujeme:

$$\triangle ABC \cong \triangle KLM.$$

Pri urcovani shodnosti trojuhelniku vyuzivame vety o shodnosti trojuhelniku.

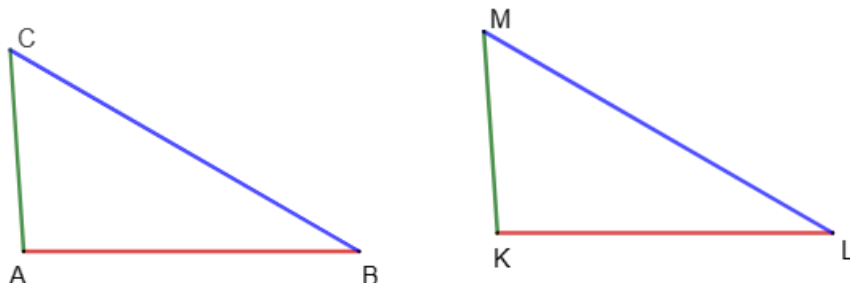


- Věta sss

„Jestliže pro trojúhelníky  $ABC$  a  $KLM$  platí rovnosti

$$|AB| = |KL|, |BC| = |LM| \text{ a } |CA| = |MK|,$$

pak jsou tyto trojúhelníky shodné:  $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ .“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)



Obr. č. 11 Shodnost trojúhelníků podle věty sss

Toto tvrzení rozhoduje o shodnosti trojúhelníků na základě délek stran, označujeme ho jako větu sss. Písmeno  $s$  značí shodnou dvojici stran. Z věty vyplývá, že trojúhelníky shodující se v délkách stran, mají také stejné velikosti vnitřních úhlů.

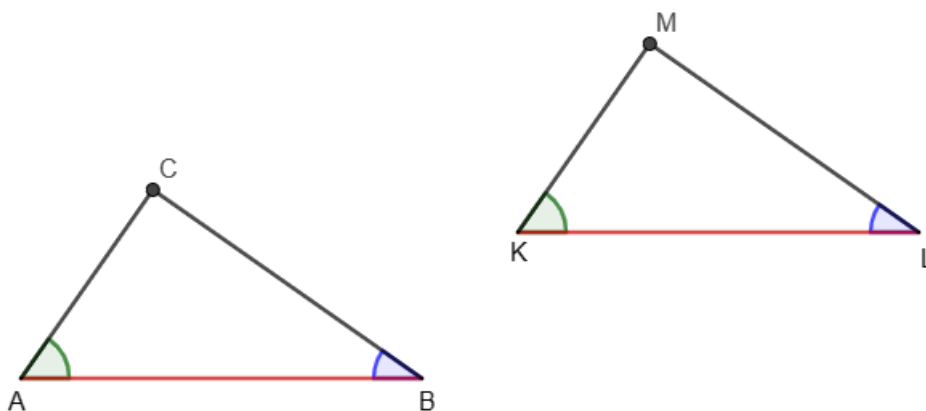
V úvodu této podkapitoly jsme řekli, že záleží na délce stran a velikosti vnitřních úhlů. Následující věta rozhoduje o shodnosti trojúhelníků na základě dvou dvojic stejně velkých úhlů a jedné dvojice shodných stran. Označujeme ji jako větu usu. Stejně jako v předchozím případě značí písmeno  $s$  dvojici shodných stran a písmeno  $u$  značí dvojici shodných úhlů. Stejně značení budeme používat i u dalších vět o shodnosti trojúhelníků.

- Věta usu

„Jestliže pro trojúhelníky  $ABC$  a  $KLM$  platí rovnosti

$$|AB| = |KL|, |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL| \text{ a } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|,$$

pak tyto trojúhelníky jsou shodné:  $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ .“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)



Obr. č. 12 Shodnost trojúhelníků podle věty usu

Je nutné upozornit na přesnou polohu úhlů. Daná věta platí pro jednu stranu trojúhelníku a dva úhly dané straně přilehlé.

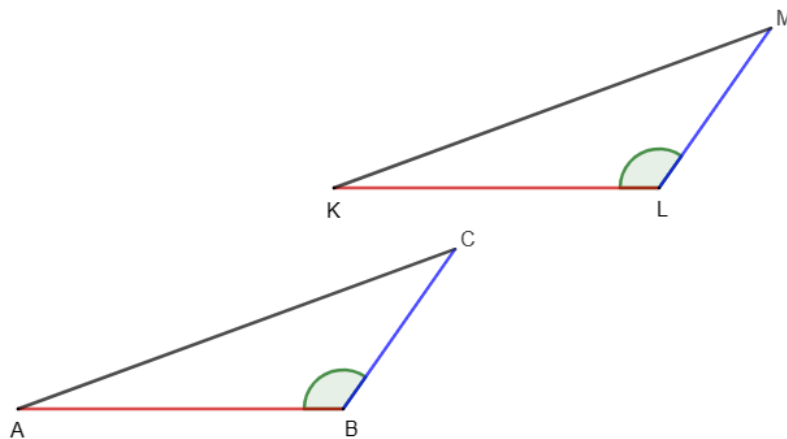
Další věta kombinuje délku dvou stran a velikost jednoho úhlu. Přesněji se týká délky dvou stran a velikosti úhlu jimi sevřeným. Označujeme ji jako větu *sus*.

- Věta *sus*

„Jestliže pro trojúhelníky *ABC* a *KLM* platí rovnosti

$$|AB| = |KL|, |BC| = |LM|, |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|,$$

pak jsou tyto trojúhelníky shodné:  $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ . (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

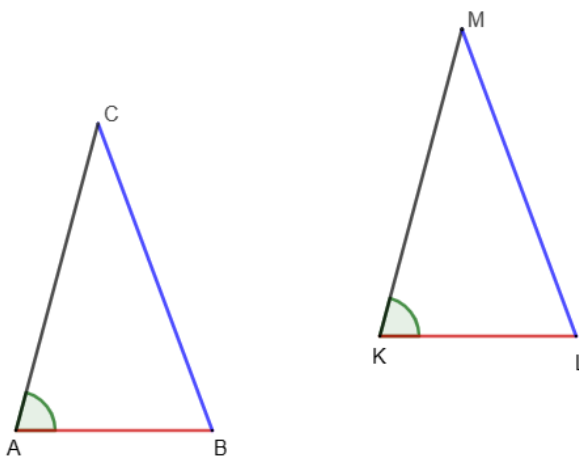


Obr. č. 13 Shodnost trojúhelníků podle věty *sus*

Poslední věta vypovídá o délce dvou stran a úhlu ležícím proti delší z nich. Nazývá se věta *Ssu*.

- Věta *Ssu*

„Jestliže se shodují dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)



Obr. č. 14 Shodnost trojúhelníků podle věty *Ssu*

Kromě shodnosti trojúhelníků můžeme mluvit o podobnosti trojúhelníků. Navzájem podobné trojúhelníky mají stejné poměry délek odpovídajících si stran a stejné velikosti vnitřních úhlů. Při rozhodování o podobnosti trojúhelníků porovnáváme délky stran a velikosti vnitřních úhlů.

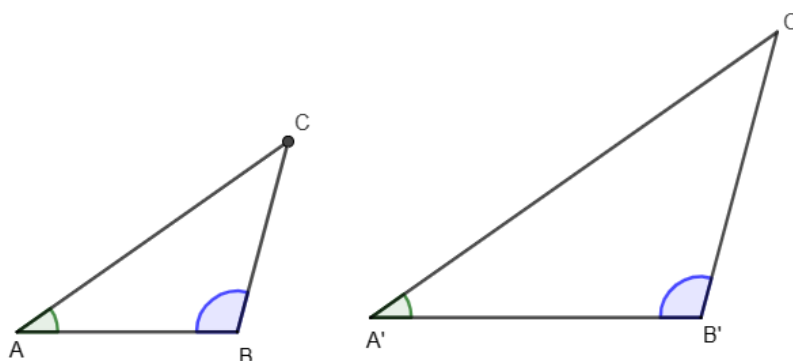
„Dva trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  se nazývají podobné trojúhelníky, právě když existuje takové kladné číslo  $k$  (zvané koeficient podobnosti), že platí

$$|A'B'| = k \cdot |AB|, |B'C'| = k \cdot |BC|, |A'C'| = k \cdot |AC|,$$

čili

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k.$$

Píšeme  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .“ (Polák, 1995)



Obr. č. 15 Podobnost trojúhelníků  $ABC$  a  $A'B'C'$

Koeficient  $k$  je kladné číslo. Pokud je  $k$  větší než nula a zároveň menší než jedna, mluvíme o zmenšení. Pokud je  $k$  větší než jedna, mluvíme o zvětšení. Poslední případ, kdy se  $k$  rovná jedné, je vlastně shodnost trojúhelníků. Analogicky se shodností trojúhelníků formulujeme věty o podobnosti trojúhelníků.

- Věty o podobnosti trojúhelníků

„Dva trojúhelníky jsou podobné jestliže,

- a) Se shodují ve dvou úhlech (věta uu),*
- b) Jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly jimi sevřené (věta sus),*
- c) Jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly proti větším z nich (věta Ssu).“ (Polák, 1995)*

## 1.4 Polohové vlastnosti

Kapitola Polohové vlastnosti je zaměřena na důležité úsečky v trojúhelníku a kružnici ve vztahu k trojúhelníku. Přesněji se budeme zabývat pojmem střední příčka, těžnice, výška, kružnice trojúhelníku opsaná a kružnice trojúhelníku vepsaná. Dané pojmy definujeme, zavedeme jejich důležité vlastnosti a dané vlastnosti dokážeme.

### 1.4.1 Střední příčky

Nejprve se budeme věnovat pojmu střední příčka. Střední příčka je úsečka, která spojuje středy dvou stran. Předchozí větu můžeme považovat za jednu definici střední příčky. Uvedeme zde i některé jiné možnosti definování nového pojmu.

„Střední příčka trojúhelníku je úsečka, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s jeho třetí stranou a její délka je rovna polovině délky této strany.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

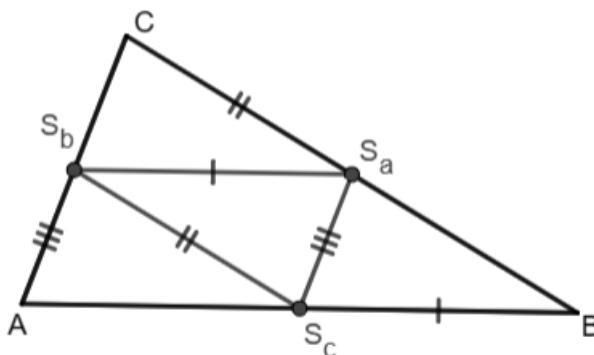
„Úsečka, jejímž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníku, se nazývá střední příčka trojúhelníku. ... Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou a její délka je rovna polovině délky této strany:

$$\begin{array}{lll} S_a S_b \parallel AB & S_b S_c \parallel BC & S_a S_c \parallel CA \\ |S_a S_b| = \frac{1}{2} |AB| & |S_b S_c| = \frac{1}{2} |BC| & |S_a S_c| = \frac{1}{2} |CA|. \end{array}$$

(Polák, 1995)

„Střední příčka trojúhelníku je úsečka spojující středy dvou stran.“ (Molnár, Kopecký, Lišková, Novák, Slouka, 1998)

V každém trojúhelníku nalezneme celkem tři střední příčky. Každé dvě střední příčky mají právě jeden společný bod.



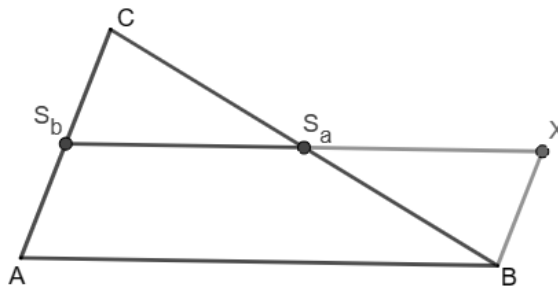
Obr. č. 16 Střední příčky trojúhelníku

Z výše uvedených definic plynou dvě vlastnosti:

- střední příčka je rovnoběžná se stranou, se kterou nemá žádný společný bod,
- střední příčka má poloviční délku než strana, se kterou nemá žádný společný bod.

Pro důkaz předchozích vlastností využijeme dva poznatky týkající se středové souměrnosti. První z nich nám říká, že „souměrně sdružené trojúhelníky jsou shodné“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995). Druhá se týká souměrně sdružených úseček, které jsou taktéž shodné a navíc i rovnoběžné.

Mějme dán trojúhelník  $ABC$  se střední příčkou  $S_aS_b$ . První krok důkazu spočívá v konstrukci obrazu trojúhelníku  $S_aS_bC$  ve středové souměrnosti se středem  $S_a$  (viz následující obrázek).



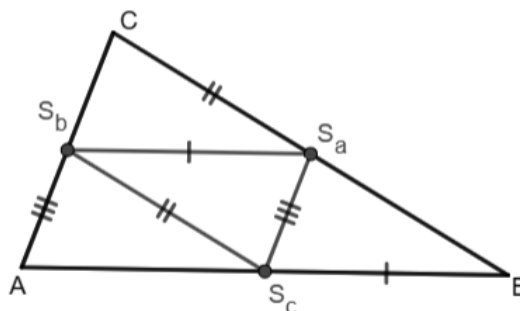
Obr. č. 17 Důkaz vlastností střední příčky

Vznikne trojúhelník  $S_aXB$ , přičemž platí

$$\Delta S_aS_bC \cong \Delta S_aXB \quad a \quad S_bC \parallel XB.$$

Úsečky  $AS_b$  a  $S_bC$  leží na téže přímce. Platí rovnoběžnost úseček  $S_bC$  a  $BX$ , tudíž  $BX$  je rovnoběžná i s úsečkou  $AS_b$ . Dále platí i rovnost délek úseček  $BX$  a  $AS_b$  (plyne ze shodnosti obou úseček s úsečkou  $S_bC$ ). V rovinném útvaru jsme zkonstruovali čtyřúhelník  $ABXS_b$ . Na základě předchozích informací můžeme daný čtyřúhelník nazvat pojmem rovnoběžník. Pro rovnoběžník platí, že protější strany jsou shodné. Odtud plyne rovnoběžnost střední příčky  $S_aS_b$  se stranou  $AB$  trojúhelníku  $ABC$  a délka střední příčky, která je rovna jedné polovině strany  $AB$ .

Pro střední příčky trojúhelníku dále platí, že rozdělují trojúhelník na čtyři navzájem shodné trojúhelníky. Trojúhelník  $S_cS_aS_b$  označujeme pojmem příčkový trojúhelník.



Obr. č. 18 Rozdělení trojúhelníku  $ABC$  středními příčkami

Mějme dán trojúhelník  $ABC$  se středními příčkami  $S_aS_b, S_bS_c$  a  $S_cS_a$ . Střední příčky rozdělily původní trojúhelník na čtyři menší -  $\Delta AS_cS_b, \Delta S_cBS_a, \Delta S_bS_aC$  a  $\Delta S_cS_aS_b$ . Z definice střední příčky a jejich vlastností plyne, že délky stran dílčích trojúhelníků jsou  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$  a  $\frac{c}{2}$ . Dílčí trojúhelníky jsou shodné podle věty sss a s trojúhelníkem  $ABC$  jsou podobné. (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995), (Moravcová, Hromadová, 2021), (Švrček, 1998)

### 1.4.2 Těžnice

V další části se zaměříme na těžnice trojúhelníku. Těžnice se značí malým písmenem  $t$  s dolním indexem příslušné strany, tedy  $t_a, t_b$  a  $t_c$ . Průsečík těžnic nazýváme těžiště a značíme ho  $T$ . Pojem těžnice může označovat i délku daného rovinného útvaru. Průsečík těžnic, těžiště, leží vždy uvnitř trojúhelníku.

*„Úsečku spojující vrchol trojúhelníku se středem protilehlé strany nazveme těžnicí trojúhelníku příslušnou k této straně.“ (Moravcová, Hromadová, 2021)*

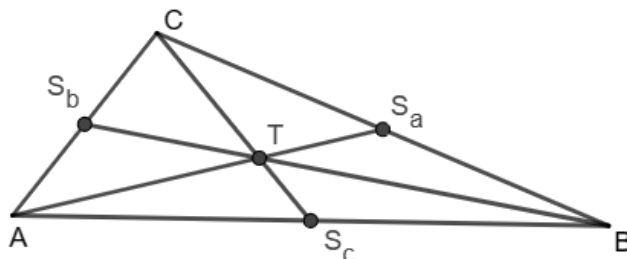
*„Těžnice spojuje vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany. Všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě – v těžišti  $T$ .“ (Odvárko, Kadleček, 1997)*

*„Každá úsečka, jejíž krajní body jsou vrchol trojúhelníku a střed jeho protilehlé strany, se nazývá těžnice trojúhelníku.“ (Kuřina, 1996)*

*„Těžnice trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany. Všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě – těžišti trojúhelníku. Tento bod dělí těžnici na dvě úsečky. Delší část obsahuje vrchol a je dvakrát delší než kratší část.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)*

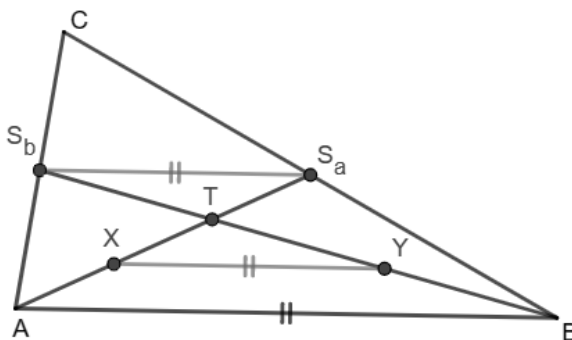
Pro těžnice v trojúhelníku a jejich průsečík nazývaný těžiště platí:

*„Těžiště leží v jedné třetině každé těžnice. Každá těžnice je těžištěm dělena na dvě úsečky, úsečka obsahující vrchol je dvakrát delší než úsečka obsahující střed strany.“ (Cihlář, Zelenka, 1997)*



Obr. č. 19 Těžnice trojúhelníku ABC

Nejprve si zdůvodníme, jak je možné, že se těžnice protínají v jednom bodě. Mějme dán trojúhelník ABC s jeho dvěma těžnicemi  $AS_a$  a  $BS_b$ , které se protínají v bodě  $T$ . Sestrojíme střední příčku  $S_aS_b$  trojúhelníku ABC a střední příčku  $XY$  trojúhelníku ABT. Bod  $X$  je střed úsečky  $AT$  a bod  $Y$  je střed úsečky  $BT$ .



Obr. č. 20 Důkaz průsečíku těžnic  $AS_a$  a  $BS_b$

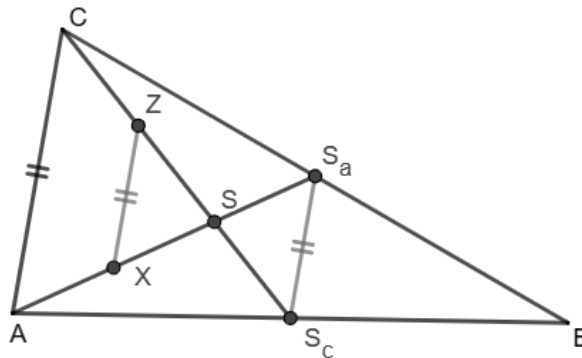
Obě střední příčky jsou rovnoběžné se stranou  $AB$  a mají poloviční délku než strana  $AB$ , tudíž jsou shodné. Na základě rovnoběžnosti a podle věty *sus* jsou trojúhelníky  $S_a S_b T$  a  $XYT$  shodné, tedy platí

$$|XT| = |TS_a| \quad a \quad |YT| = |TS_b|.$$

Dále si dokážeme rozdělení těžnice těžištěm na dva rozdílně dlouhé úseky. Zaměříme se na těžnici  $AS_a$ . Body  $T$  a  $X$  dělí těžnici na tři díly o stejné velikosti, platí tedy

$$|XT| = |TS_a| \quad a \quad |XT| = |AT|.$$

První rovnost plyne ze shodnosti trojúhelníků  $S_a S_b T$  a  $XYT$ , druhá rovnost plyne z vlastnosti bodu  $X$ . Bod  $X$  je středem úsečky  $AT$ . Úsečka  $AS_a$  je rozdělena bodem  $T$  na dvě části, přičemž úsečka  $AT$  je dvakrát delší než úsečka  $TS_a$ . Totéž tvrzení platí i pro těžnici  $BS_b$ . Předchozími kroky jsme dokázali tvrzení o dělení těžnic  $AS_a$  a  $BS_b$  bodem  $T$ . Stejnou úvahu použijeme i pro důkaz rozdělení těžnice  $CS_c$  průsečíkem  $S$  těžnic  $AS_a$  a  $CS_c$ .



Obr. č. 21 Důkaz průsečíku těžnic  $AS_a$  a  $CS_c$

Analogicky jako v předchozím případě platí shodnost trojúhelníků  $XZS$  a  $S_a S_b S$ . Tedy

$$|ZS| = |SS_c| \quad a \quad |XS| = |SS_a|.$$

Body  $Z$  a  $S$  dělí těžnici  $CS_c$  na tři stejně velké díly. Bod  $S$  tedy dělí těžnici na dvě části, přičemž platí

$$|CS| = 2|SS_c|.$$

Dokázali jsme i to, že všechny tři těžnice procházejí jedním bodem, tedy že bod  $T$  a bod  $S$  splyne v jeden. Na těžnici  $AS_a$  existuje pouze jeden bod, pro který platí

$$|AT| = 2|TS_a|.$$

(Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

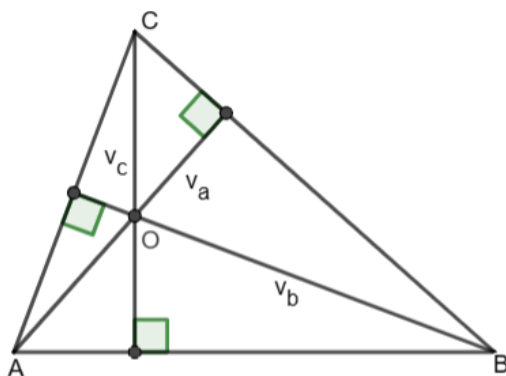
### 1.4.3 Výšky

Výšky trojúhelníku značíme malými písmeny  $v$  s dolním indexem příslušné strany -  $v_a, v_b$  a  $v_c$ . Pojem výška zahrnuje rovinný útvar a při výpočtech nebo konstrukcích i jeho velikost. Přeneseně můžeme pojem výška chápat jako vzdálenost vrcholu trojúhelníku od protější strany.

„Výškou trojúhelníku rozumíme úsečku či délku této úsečky, která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímce, na které leží protější strana.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

„Výška trojúhelníku je úsečka, jejímž jedním krajním bodem je vrchol trojúhelníku a druhým je pata kolmice, spuštěná z tohoto vrcholu na přímku, na níž leží protější strana.“ (Cihlář, Zelenka, 1997)

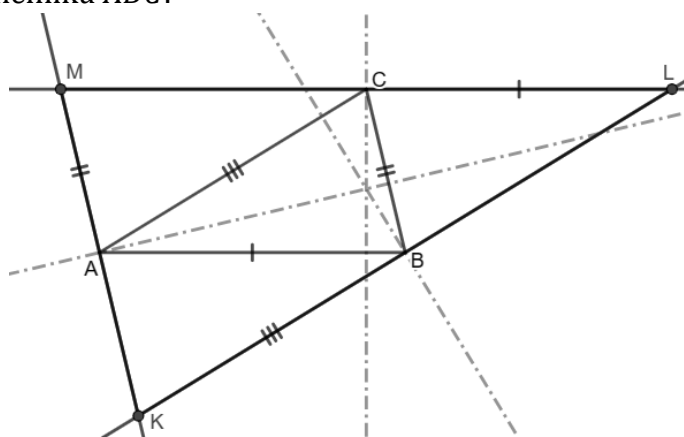
Výška je „kolmice spuštěná z vrcholu k příslušné straně.“ (Vošický, 2007)



Obr. č. 22 Výšky v trojúhelníku ABC

Pro výšku tedy platí, že je kolmá k jedné straně trojúhelníku. Každý trojúhelník má právě tři výšky, které se protínají v jednom bodě. Průsečík výšek, případně přímek, na kterých výšky leží, se nazývá ortocentrum.

Dokažme si existenci průsečíku všech tří výšek. Mějme dán trojúhelník  $ABC$ . Všemi vrcholy trojúhelníku  $ABC$  povedeme rovnoběžky s protilehlými stranami. Vzniklé body označme písmeny  $K, L, M$ . Trojúhelník  $KLM$  je rozdělen na trojúhelníky  $BLC, ACM, KBA$  a  $ABC$ . Úhly  $BAC, ACM, KBA$  jsou shodné stejně jako úhly  $ABC, LCB, BAK$  nebo úhly  $ACB, KBA, CBL$ . Každý z trojúhelníků  $LCB, BAK, CMA$  má právě jednu stranu společnou s trojúhelníkem  $ABC$ . Z vlastností úhlů a stran vyplývá, že trojúhelníky  $ABC, BAK, LCB$  a  $CMA$  jsou shodné podle věty *sus*. Ze shodnosti trojúhelníků plyne i shodnost délek odpovídajících stran, tedy bod  $C$  je střed strany  $LM$ , bod  $B$  je střed  $KL$  a bod  $A$  je střed  $KM$ . Osy stran trojúhelníku  $KLM$  splývají s výškami trojúhelníku  $ABC$ .



Obr. č. 23 Důkaz existence průsečíku výšek

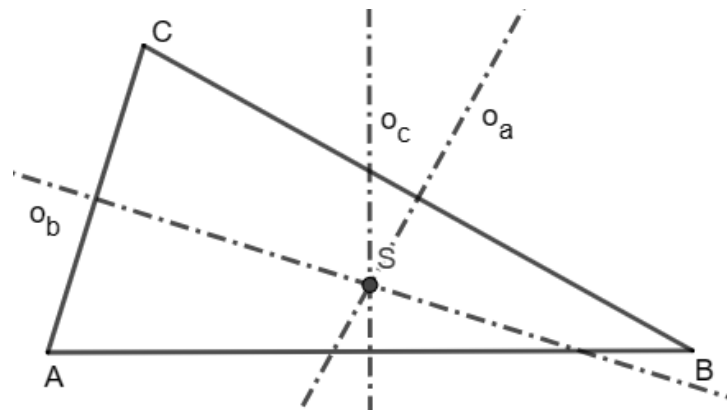


Pro úplnost důkazu musíme ještě dokázat, že se osy stran trojúhelníku protínají v jednom bodě. Nechť je dán trojúhelník  $ABC$ . Pod pojmem osa strany  $BC$  chápeme množinu všech bodů  $X$ , které mají od krajních bodů stejnou vzdálenost, tzn., že

$$|XB| = |XC|.$$

Analogicky bychom mohli vyjádřit osu strany  $AC$ . Strany trojúhelníku  $BC$  a  $AC$  nejsou rovnoběžné, tudíž ani osy těchto stran nejsou rovnoběžné. Průsečík os označme jako bod  $S$ . Bod  $S$  náleží ose strany  $AC$  a ose strany  $BC$ , platí tedy

$$|SB| = |SC| = |SA|.$$

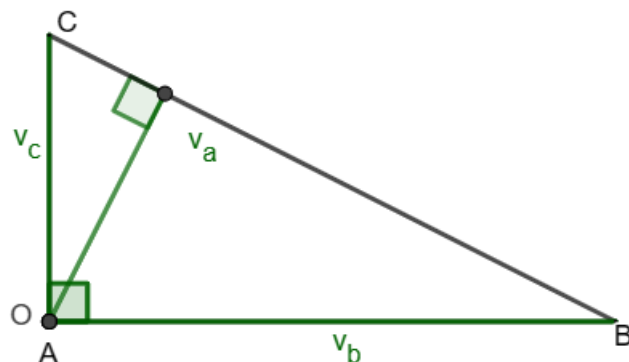


Obr. č. 24 Důkaz průsečíku os stran trojúhelníku  $ABC$

Z předchozího vztahu vyplývá, že bod  $S$  má stejnou vzdálenost od bodu  $B$  jako od bodu  $A$ . Musí tedy ležet i na ose třetí strany, na ose strany  $AB$ . Jinak řečeno, všechny tři osy stran trojúhelníku  $ABC$  se protínají v jednom bodě  $S$ .

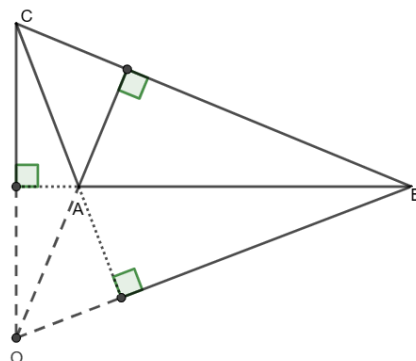
V první části jsme dokázali, že výšky trojúhelníku  $ABC$  splývají s osami stran trojúhelníku  $KLM$ . Druhá část dokázala existenci průsečíku všech tří os stran. Pokud dáme obě informace dohromady, dokážeme existenci průsečíku všech tří výšek.

Průsečík výšek se může nacházet uvnitř trojúhelníku mimo vrcholy, ve vrcholu trojúhelníku nebo i mimo trojúhelník v závislosti na druhu trojúhelníku. Na Obr. č. 24 se nachází průsečík výšek uvnitř trojúhelníku mimo vrcholy. Jedná se o trojúhelník ostroúhlý. V pravoúhlém trojúhelníku splývá průsečík výšek s vrcholem (viz Obr. c. 25).



Obr. č. 25 Výšky v pravoúhlém trojúhelníku

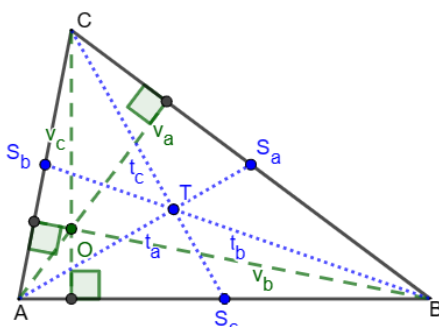
Zbývá nám průsečík výšek ležící mimo trojúhelník. Právě tuto zvláštnost nalezneme u trojúhelníku tupoúhlého (viz Obr. č. 26).



Obr. č. 26 Výšky v tupoúhlém trojúhelníku

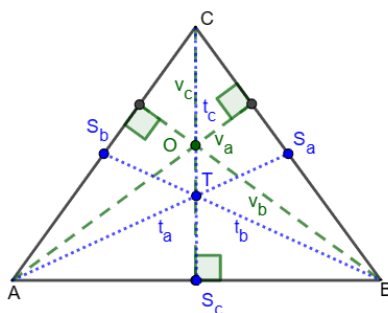
V poslední části kapitoly Výšky se zaměříme na vztah výšek a těžnic, průsečíku výšek a průsečíku těžnic vzhledem ke druhu trojúhelníku. Pro lepší názornost budeme v následujících obrázcích značit výšky zeleně a těžnice modře. Průsečík výšek označíme písmenem O a průsečík těžnic T.

V různostranném trojúhelníku leží průsečík výšek, popřípadě přímek, na kterých se nacházejí výšky, mimo průsečík těžnic (viz Obr. č. 27). Žádná z výšek nesplývá s žádnou těžnicí.



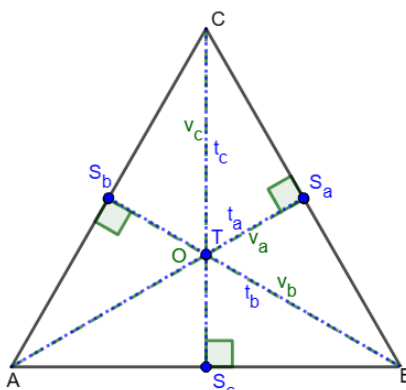
Obr. č. 27 Průsečík výšek a průsečík těžnic v různostranném trojúhelníku

Dalším druhem trojúhelníku podle délek stran je trojúhelník rovnoramenný. V rovnoramenném trojúhelníku splývá právě jedna výška s jednou těžnicí. Průsečík výšek, případně přímek, na kterých se nacházejí výšky, leží mimo průsečík těžnic (viz Obr. č. 28).



Obr. č. 28 Výšky a těžnice v rovnoramenném trojúhelníku

Třetí možností je trojúhelník rovnostranný. V rovnostranném trojúhelníku splývají všechny výšky se všemi těžnicemi. Průsečík výšek leží uvnitř trojúhelníku a splývá s průsečíkem těžnic (viz Obr. č. 29). (Moravcová, Hromadová, 2021)



Obr. č. 29 Výšky a těžnice v rovnostranném trojúhelníku

#### 1.4.4 Kružnice trojúhelníku opsaná

Prvním typem kružnice ve vztahu k trojúhelníku je kružnice trojúhelníku opsaná, která prochází všemi vrcholy daného trojúhelníku.

„Kružnici, která prochází všemi vrcholy daného trojúhelníku, nazveme kružnicí opsanou danému trojúhelníku.“ (Moravcová, Hromadová, 2021)

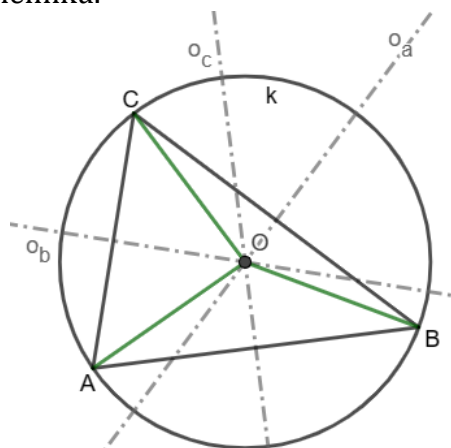
„... Každému trojúhelníku lze opsat jedinou kružnici. Její střed je průsečíkem os stran trojúhelníku. Její poloměr je roven vzdálenosti středu od libovolného vrcholu trojúhelníku.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

„Kružnice se středem  $S$  v průsečíku os stran a poloměrem

$$r = |SA| = |SB| = |SC|$$

nazýváme kružnicí opsanou trojúhelníku  $ABC$ .“ (Polák, 1995)

Kružnici lze opsat každému trojúhelníku. Jinými slovy platí, že kružnice je jednoznačně určena třemi nekolineárními body, tedy třemi body, které neleží v jedné přímce. Střed kružnice opsané leží v průsečíku os stran. Důkaz existence průsečíku všech tří os jsme již uvedli v kapitole Výšky. Dokážeme si tedy možnost opsání kružnice každému trojúhelníku.



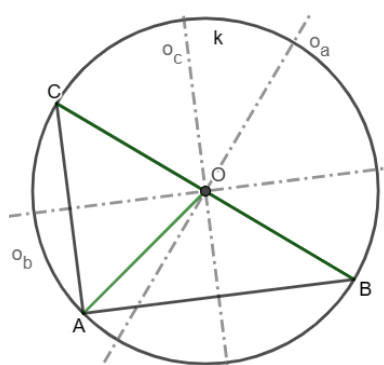
Obr. č. 30 Kružnice trojúhelníku opsaná

Mějme dán trojúhelník  $ABC$ , ve kterém zkonstruujeme osy stran. Osy stran se protínají v jednom bodě, který označíme  $O$ . Pro vzdálenost bodu  $O$  od jednotlivých vrcholů trojúhelníku platí:

$$|OA| = |OB| = |OC|.$$

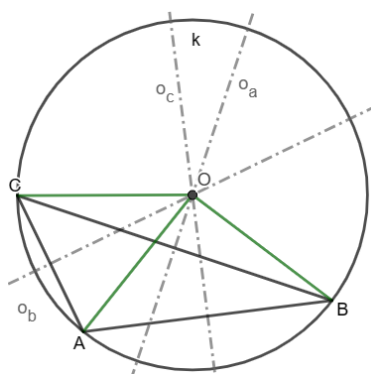
Pokud sestrojíme kružnici se středem v bodě  $O$  procházející bodem  $A$ , pak daná kružnice prochází i body  $B$  a  $C$ . (Moravcová, Hromadová, 2021)

Střed kružnice opsané může ležet uvnitř trojúhelníku, na straně trojúhelníku nebo mimo trojúhelník ve vztahu ke druhu trojúhelníku podle velikosti vnitřních úhlů. U ostroúhlého trojúhelníku (viz Obr. č. 30) nalezneme střed kružnice opsané uvnitř trojúhelníku mimo jeho strany nebo vrcholy. U pravoúhlého trojúhelníku leží střed kružnice opsané ve středu přepony (viz Obr. č. 31).



Obr. č. 31 Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku

Posledním typem trojúhelníku podle velikosti vnitřních úhlů je trojúhelník tupoúhlý. V tomto případě leží střed kružnice opsané mimo trojúhelník (viz Obr. č. 32). (Moravcová, Hromadová, 2021), (Polák, 1995)



Obr. č. 32 Kružnice opsaná tupoúhlému trojúhelníku

#### 1.4.5 Kružnice trojúhelníku vepsaná

Další kružnici ve vztahu k trojúhelníku, které se budeme věnovat, je kružnice trojúhelníku vepsaná. Kružnice trojúhelníku vepsaná neprochází vrcholy, ale dotýká se všech stran.

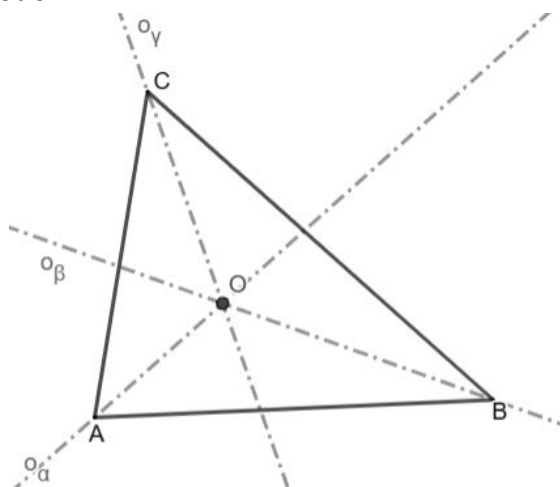
„Kružnici, která se dotýká všech stran daného trojúhelníku, nazveme kružnicí vepsanou danému trojúhelníku.“ (Moravcová, Hromadová, 2021)

„Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Je to střed kružnice vepsané trojúhelníku.“ (Odvárko, Kadleček, 1997)

„Kružnice, která se dotýká všech tří stran trojúhelníku, se nazývá kružnice vepsaná tomuto trojúhelníku. Každému trojúhelníku lze vepsat jedinou kružnici. Její střed je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku. Její poloměr je roven vzdálenosti jejího středu od libovolné strany trojúhelníku.“ (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1995)

Každému trojúhelníku lze vepsat kružnici. Nejprve si dokážeme existenci průsečíku všech tří os vnitřních úhlů.

Mějme daný trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ . Množinu všech bodů  $X$ , které jsou stejně vzdálené od obou ramen  $AB, BC$  úhlu  $\alpha$ , nazýváme osou  $o_\alpha$ . Analogicky definujeme osu  $o_\beta$  úhlu  $\beta$ . Průsečík os úhlů  $o_\alpha$  a  $o_\beta$  označíme  $O$ . Platí, že vzdálenost bodu  $O$  od přímk  $AB, BC$  a  $AC$  je stejná a zároveň bod  $O$  je vnitřním bodem trojúhelníku  $ABC$ . Vzdálenost bodu  $O$  od ramen  $CA, CB$  úhlu  $\gamma$  je taky stejná, tudíž bod  $O$  musí ležet i na ose  $o_\gamma$  úhlu  $\gamma$ . Jinak řečeno, osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

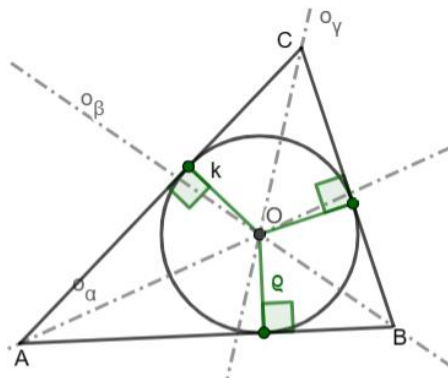


Obr. č. 33 Průsečík os vnitřních úhlů

V dalším kroku nastíníme důkaz pro existenci kružnice opsané každému trojúhelníku.

Opět mějme trojúhelník  $ABC$  a v něm osy vnitřních úhlů, které se protínají v bodě  $O$ . Průsečík vnitřních úhlů  $O$  je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníku  $ABC$ . Vzdálenost  $O$  od stran trojúhelníku označíme  $\rho$ . Kružnice  $k$  se středem  $O$  a poloměrem  $\rho$  se dotýká všech tří stran trojúhelníku  $ABC$ . Jiná kružnice, která by se dotýkala všech tří stran, neexistuje. Pokud bychom místo stran mluvili o přímkách,

na kterých strany trojúhelníku  $ABC$  leží, pak by výše zkonstruovaná kružnice nebyla jediná, která by se těchto přímkou dotýkala. (Moravcová, Hromadová, 2021)



Obr. č. 34 Kružnice trojúhelníku vepsaná

## 2. GeoGebra

### 2.1 GeoGebra a geometrie

V teoretické části jsme vymezili potřebné geometrické pojmy, jejich vlastnosti a náležitosti. Druhá část bakalářské práce se zaměří na propojení geometrie (dříve uvedených poznatků) s programem GeoGebra. Program GeoGebra nám umožňuje přenést geometrii trojúhelníku do dynamické geometrie, což nám umožňuje dynamicky modifikovat trojúhelník a pozorovat vlastnosti výšek, těžnic, středních příček, kružnice trojúhelníku opsané a kružnice trojúhelníku vepsané. Žáci získají prostřednictvím daného programu komplexní pohled na studovaná matematická témata, mohou experimentovat a objevovat potřebné matematické vztahy a zákonitosti a mohou i lépe pochopit některé části učiva. Mimo jiné dochází prostřednictvím GeoGebry i k rozvoji digitální gramotnosti. Po seznámení s programem uvedeme krátkou a stručnou rešerši již vytvořených materiálů k daným tématům. Následně uvedeme autorsky sestavené a zkonstruované applety. Některé z nich se podařilo i vyzkoušet ve výuce.

### 2.2 Program GeoGebra

GeoGebra je počítačový program, který spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku, diferenciální a integrální počet. Slouží hlavně učitelům, ale i žákům. Je volně dostupný a bezplatný. GeoGebra představuje multiplatformní dynamický software vhodný pro všechny úrovně vzdělávání. V průběhu let nasbíral program GeoGebra celou řadu významných ocenění po celém světě.

Program začal vyvíjet v roce 2001 na Univerzitě v Salcburku Markus Hohenwarter jako svoji závěrečnou práci. V průběhu let získal program přes milion uživatelů v různých zemích. GeoGebra se stala jedním z hlavních poskytovatelů softwaru pro dynamickou matematiku. Podporuje vzdělávání v oblasti vědy, techniky, strojírenství, matematiky, fyziky a inovace ve výuce a učení. Urychluje velkou řadu vzdělávacích webových stránek po celé zemi. Vytvořené materiály může autor volně nasdílet prostřednictvím platformy GeoGebra Classroom, která umožňuje učiteli kontrolovat jednotlivé kroky žáka. Přestože existuje GeoGebra ve světě už přes dvacet let, stále je zde otázka, jak ji zapojit do pedagogické praxe. I to je jedním z našich cílů. Oproti výuce geometrie v papírové a statické podobě může být dynamické prostředí GeoGebry pro žáky zajímavou alternativou, která je vybízí k tvorbě vlastních závěrů. Dynamické konstrukce lze na obrazovce měnit. Při navrhování aktivity s dynamickou geometrií je potřeba pečlivě zvážit jednotlivé části a jejich vliv na učení žáků. Při učení dochází k přivlastňování nejrůznějších zdrojů, jako je mluvený a psaný projev, matematická reprezentace systémů, kresby,

gesta a další. Spojením předchozích zdrojů lze zažít a vyjádřit matematické objekty a vztahy. Pouze zapojením dynamického softwaru nezlepší pedagog svoji výuku matematiky. Důležité je, jak ho zakomponuje. Žáci by měli mít možnost pracovat samostatně, aktivně, měli by objevovat a zkoumat v prostředí dynamické geometrie a své poznatky následně prezentovat a diskutovat s ostatními žáky. (Ulm, 2010)

Vývoj technologie v posledním desetiletí otevřel i možnost jejího využití při výuce geometrie. Celková dostupnost digitálních nástrojů se značně změnila. Taktéž i široká dostupnost mobilních telefonů s dotykovými obrazovkami přispěla k většímu zapojení moderních technologií do výuky jako takové. Na základě studií byl prokázán rozvoj synteticko-geometrických způsobů myšlení, spojení se se ztělesněnou matematikou a spojení se s tažením pojmu dynamicko-synteticko-geometrického myšlení prostřednictvím dynamické geometrie. Dále studie dokázaly, že digitální hra s geometrickými tvary může výrazně zlepšit prostorové schopnosti a snížit rozdíly mezi odlišnými pohlavími. Při zanedbání moderní technologie lze ovlivnit prostorovou vizualizaci a geometrické vnímání zapojením geometrie založené na origami. Zapojením moderní technologie do školství se zabývá celá řada odborníků. I tak neexistuje jednotný přístup. Nadále je zde potřeba provést další výzkum specifických efektů technologie ve výuce geometrie. Jedním z příčin specifických efektů může být proměnlivost geometrických objektů, což se značně liší s přístupem typu papír a tužka. Technologie a její zapojení do výuky začíná být teprve chápána, přičemž se ale stále rychle vyvíjí a mění tím svět kolem nás i ve třídách. Využívání digitálních nástrojů se stalo nedílnou součástí každodenních činností. Otázkou stále zůstává, jak je lze efektivně využít pro výuku i pro učení. (GeoGebra, 2023 [online]), (Sinclair, Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, Owens, 2016)

V programu GeoGebra je volně dostupné ohromné množství materiálů k nejrůznějším tématům nejen z matematiky. Pro přehlednost zavedli autoři možnost vyhledávání klíčových slov, která každý autor při zveřejnění musí zadat do popisu jeho aktivity. Jednotlivé aktivity se kromě obsahu mohou lišit i použitými applety a dalšími nástroji. Kromě appletů se do aktivit dají vložit otevřené otázky s výběrem správné odpovědi z libovolného množství možností. Žák následně jen označí správnou odpověď, případně odpovědi. Autor může pokládat i otázky s otevřenými odpověďmi. Dále se applety dají doprovázet texty, videí, obrázky, PDF soubory, poznámkami nebo webovými prvky. V textu je možné využití tučného písma, kurzívy, podtržení, horního nebo dolního indexu a řady dalších nástrojů včetně barvy písma, matematických zápisů a vzorců.

Aktivity zadává učitel žákům formou GeoGebra Classroom, kde se vygeneruje potřebný kód. Žáci si do vyhledávače zadají odkaz <https://www.geogebra.org/classroom>. Po jeho otevření vyplní kód třídy, své jméno a mohou se věnovat zadané práci. Učiteli se zobrazují odpovědi jednotlivých žáků,



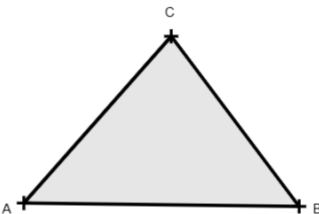

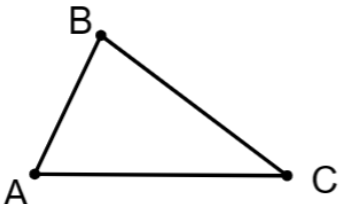
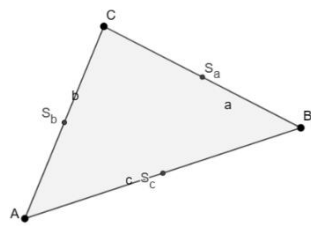
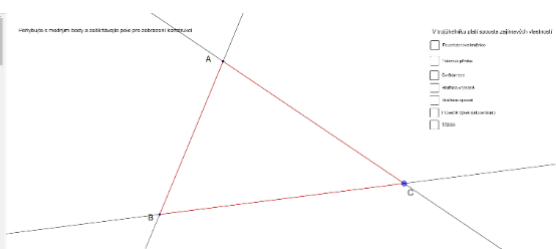
může vstoupit do jejich aktivit a sledovat je. Výhodou GeoGebra Classroom je možnost pozastavit všem žákům práci. Při zadávání aktivity učitel volí, zda žáci uvidí správné odpovědi, či ne. Po ukončení práce se v GeoGebře zobrazí sloupcový graf odpovědí na jednotlivé otázky. Při výběru odpovědi na uzavřenou otázku může žák označit více možných odpovědí. Bohužel se nedá nastavit jen jedna možná odpověď.

## 2.3 Rešerše

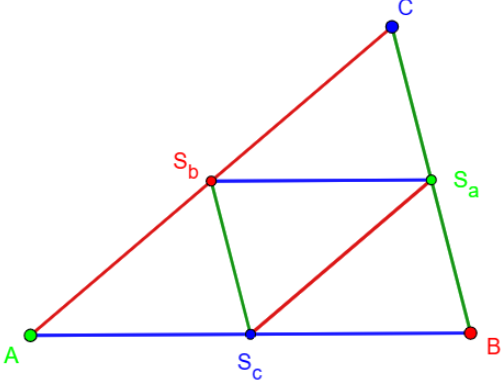
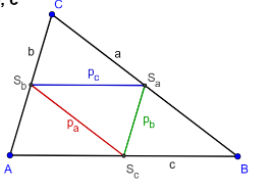
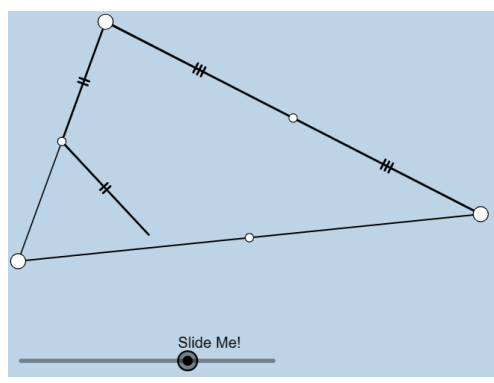
Před vlastní tvorbou je dobré vyhledat si již vytvořené applety na dané téma. Lze je využít samotné nebo jen jako inspiraci. Kromě sestavení aktivit z dílčích částí se mohou applety lišit i rozdílnými nástroji. Jednou z možností je zaškrtávací pole. Po jeho označení se v appletu zobrazí příslušné geometrické prvky, případně i další zaškrtávací pole. Velkou výhodou představuje možnost pohybu jednotlivými částmi appletu, přičemž se mění i příslušné náležitosti. Dalším nástrojem je posuvník. Žáci s ním pohybují a postupně se v konstrukci objevují další kroky. U posuvníku nelze přeskakovat. Lze s ním pohybovat na obě strany, tedy jednotlivé kroky se mohou postupně objevovat, naopak postupně ubývat. U posuvníku lze nastavit i přehrání, kdy se posuvník pohybuje sám od sebe a tím i přibývají další části konstrukce. Kromě posuvníku mohou autoři využít tlačítek přehrát, stopnout.

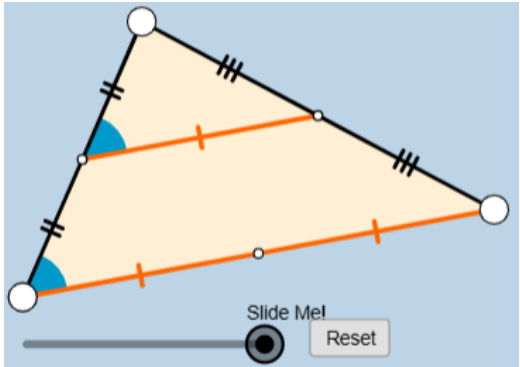
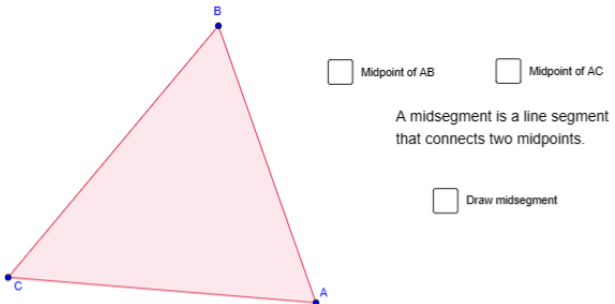
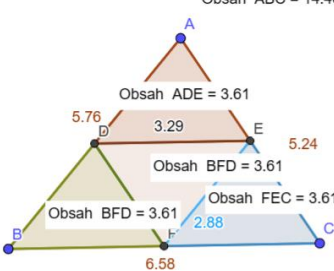
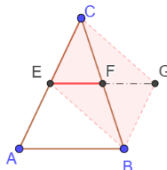
Rešerši již vytvořených appletů s tématy středních příček, výšek, těžnic, kružnice trojúhelníku vepsané a kružnice trojúhelníku opsané uvedeme formou stručných tabulek. První sloupec obsahuje vždy název aktivity, autora, jeden z appletů dané aktivity a internetový odkaz. Ve druhém sloupci heslovitě uvádíme obsahy. Třetí sloupec seznamuje čtenáře s technickými údaji a našimi poznámkami. Jednotlivé aktivity jsou rozděleny do tabulek podle významných témat. Nejprve uvedeme aktivity obsahující více témat týkajících se trojúhelníku. Mezi aktivitami se objevují i aktivity v angličtině. Mohou sloužit pedagogovi jako zdroj inspirace. V tabulkách jsme se snažili seřadit jednotlivé aktivity od jednodušších po složitější. V případě konstrukce je potřebné, aby žák uměl s GeoGebrou pracovat.

### 2.3.1 Polohové vlastnosti trojúhelníku

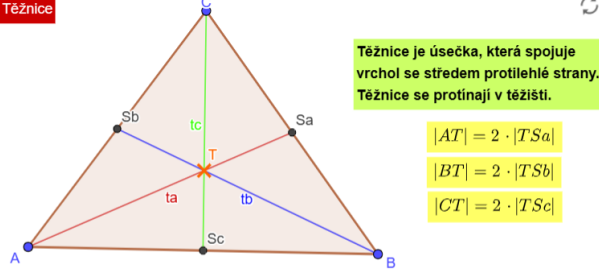
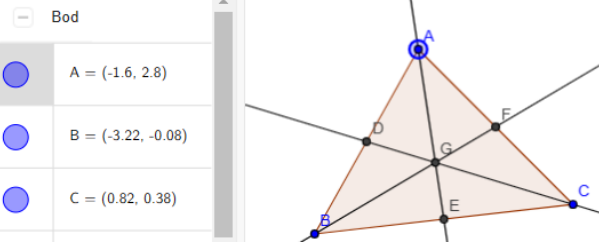
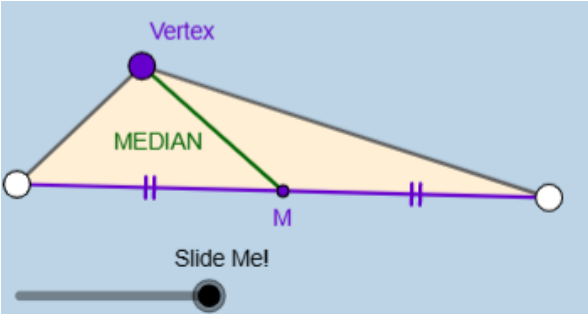
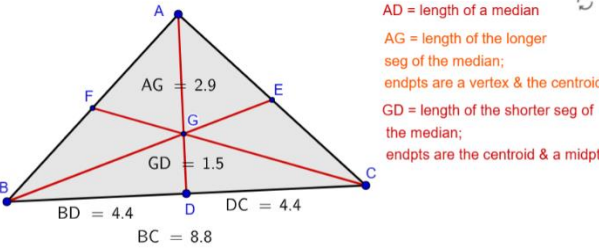
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Trojúhelník – střední příčky, těžnice, výšky</b> Irena Štrausová</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="margin-right: 20px;"> <input type="checkbox"/> střední příčky  <input type="checkbox"/> těžnice  <input type="checkbox"/> výšky         </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/dpcehdqw">https://www.geogebra.org/m/dpcehdqw</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Těžnice</li> <li>• Výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní pokyny</li> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Informative Assessment for Constructing an Altitude</b> Harrison Boshier, Amy Springstead</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/dtvgnb74">https://www.geogebra.org/m/dtvgnb74</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konstrukce těžnic</li> <li>• Konstrukce výšek</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Applety, otázky</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Důležité úsečky v trojúhelníku</b> Karel Pazourek</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <input type="checkbox"/> střední příčky  <input type="checkbox"/> těžnice  <input type="checkbox"/> osy stran  <input type="checkbox"/> osy úhlů  <input type="checkbox"/> výšky         </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/spwxqq3">https://www.geogebra.org/m/spwxqq3</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Těžnice, těžiště</li> <li>• Osy stran, střed kružnice opsané, kružnice opsaná</li> <li>• Osy úhlů, střed kružnice vepsané, kružnice vepsaná</li> <li>• Výšky, ortocentrum</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Zajímavé vlastnosti trojúhelníku</b> Jakub Šebek</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <input type="checkbox"/> Feuerbachova kružnice  <input type="checkbox"/> Eulerova přímka  <input type="checkbox"/> Kružnice vepsaná i opsaná  <input type="checkbox"/> Těžiště  <input type="checkbox"/> Průsečík výšek (ortocentrum)  <input type="checkbox"/> Švrčkův bod         </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/zwsybhn2">https://www.geogebra.org/m/zwsybhn2</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Feuerbachova kružnice</li> <li>• Eulerova přímka</li> <li>• Kružnice vepsaná i opsaná</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Průsečík výšek (ortocentrum)</li> <li>• Švrčkův bod</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Souřadnice bodů</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

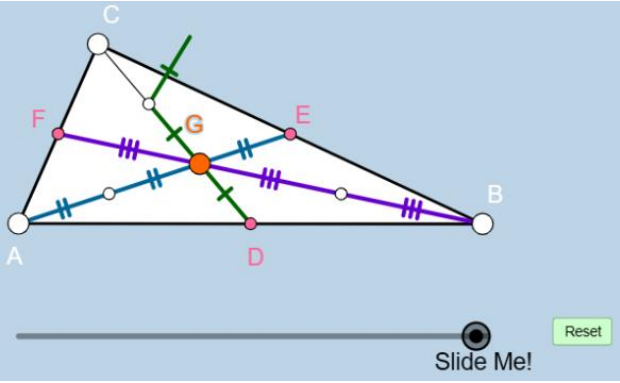
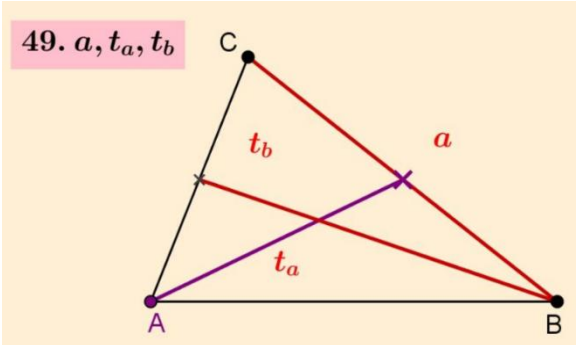
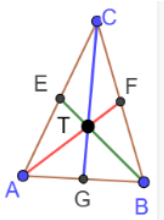
## 2.3.2 Střední příčky

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčky trojúhelníku</b> <i>Adam Čech</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/FDauJQwR">https://www.geogebra.org/m/FDauJQwR</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Délka</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Rozdělení na shodné trojúhelníky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní text</li> <li>• Matematický zápis</li> <li>• Rozdílné barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčka</b> <i>Zuzana</i></p> <p style="text-align: center;"><b>STŘEDNÍ PŘÍČKA</b> úsečka spojující středy stran</p> <p><math>S_a, S_b, S_c</math> jsou středy stran <math>a, b, c</math>  <math>P_a, P_b, P_c</math> jsou střední příčky</p> <p style="color: red;"><math>P_a = S_b S_c</math></p> <p style="color: green;"><math>P_b = S_a S_c</math></p> <p style="color: blue;"><math>P_c = S_a S_b</math></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/ss27myvs">https://www.geogebra.org/m/ss27myvs</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Matematický zápis délky a rovnoběžnosti</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Postupné objevování</li> <li>• Slovní popis</li> <li>• Matematický zápis</li> <li>• Rozdílné barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Triangle Midsegment Action!</b> <i>Tim Brzezinski</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/NFCwzehu">https://www.geogebra.org/m/NFCwzehu</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Délka</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Souhlasné úhly</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Video</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

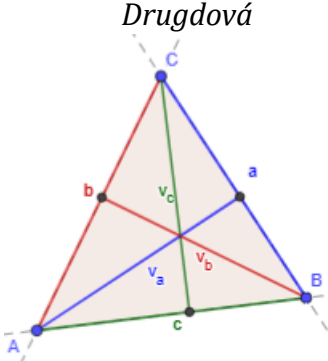
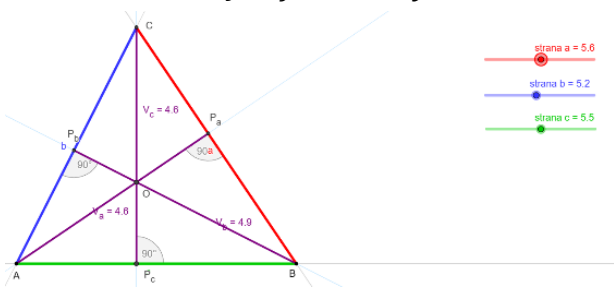
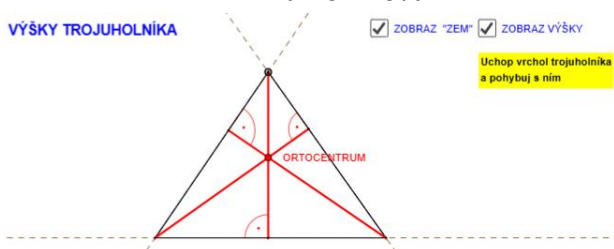
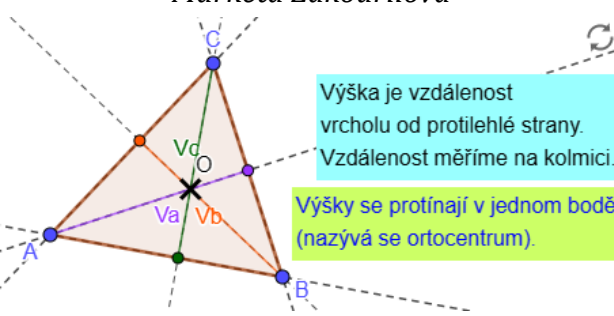
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Triangle Midsegment Action!</b>  <i>Julian Ornelas, Tim Brzezinski</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/HfkKbBPC">https://www.geogebra.org/m/HfkKbBPC</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Souhlasné úhly</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Pokyny, otevřené otázky (odpovědi na papír)</li> <li>• Nefunkční bonus</li> <li>• Rozdílné barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Triangle Midsegment Theorem</b>  <i>C Harrison</i></p> <p>Move points A, B, C to observe how the angles and side lengths are related.</p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/vy8QZGSp">https://www.geogebra.org/m/vy8QZGSp</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pouze jedna</li> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Souhlasné úhly</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtačací pole</li> <li>• Otevřené otázky (odpovědi na papír)</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Střední příčky</b>  <i>Ivo Jedlička</i></p> <p>Obsah ABC = 14.46</p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/xmfrph2q">https://www.geogebra.org/m/xmfrph2q</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Rozdělení na shodné trojúhelníky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obsahy a délky</li> <li>• Rozdílné barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Věty o střední příčce</b>  <i>Martin Vinkler</i></p>  <p><b>Důkaz:</b>  1) Bod G tak, aby F byl středem EG.  2) F je střed CB i EG  ⇒ ve čtyřúhelníku EBGC se půlí úhlopříčky  ⇒ EBGC je rovnoběžník.</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/wht8vmpg">https://www.geogebra.org/m/wht8vmpg</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Důkazy</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 8 appletů</li> <li>• Doprovodné texty</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>

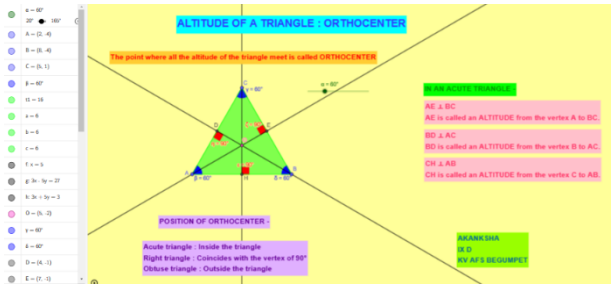
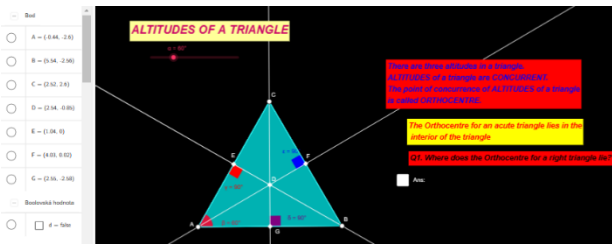
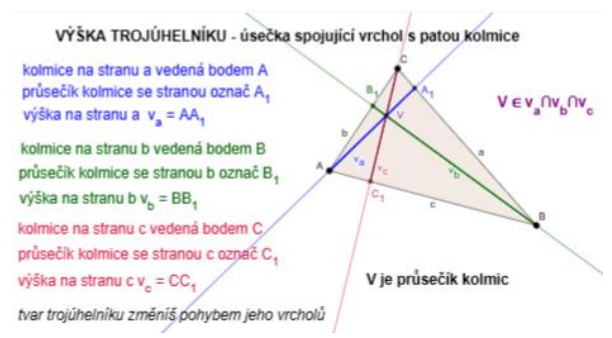
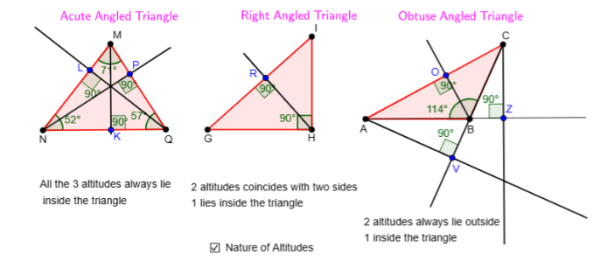
### 2.3.3 Těžnice

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice trojúhelníku</b> <i>Markéta Zakouřilová</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/af9fvghc">https://www.geogebra.org/m/af9fvghc</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Těžiště</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Matematický zápis</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>The Median Lines (euclidean)</b> <i>kevthompson11</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ejYmpX9Y">https://www.geogebra.org/m/ejYmpX9Y</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Těžiště</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Souřadnice bodů</li> <li>• Rozdílné barvy</li> <li>• Odkaz na důkaz</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Triangle Median Illustrator &amp; Definition Writing Prompt</b> <i>Tim Brzezinski</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ccBjUPIH">https://www.geogebra.org/m/ccBjUPIH</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pouze jedna</li> <li>• Střed strany</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Otevřené otázky</li> <li>• Různé barvy i v textu</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Median and centroid of a triangle</b> <i>Zawierucha, Mathguru</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/wdq9uy8q">https://www.geogebra.org/m/wdq9uy8q</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Uzavřené i otevřené otázky</li> <li>• Výpočty</li> <li>• Pohyb dvěma vrcholy</li> </ul>

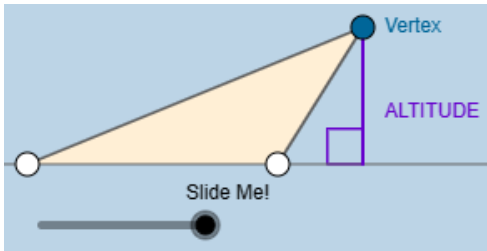
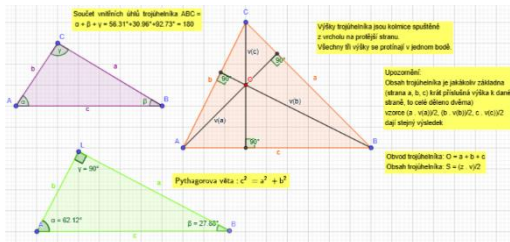
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Medians and Centroid Dance</b> <i>Tim Brzezinski</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/pwTTqNfh">https://www.geogebra.org/m/pwTTqNfh</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Otevřené otázky</li> <li>• Video</li> <li>• Různé barvy i v textu</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>[49.a, ta, tb] - polohová</b> <i>Martin Vinkler</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/uQXZR7wC">https://www.geogebra.org/m/uQXZR7wC</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konstrukce trojúhelníku při znalosti délky strany a dvou těžnic</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zadání</li> <li>• Rozbor</li> <li>• Postup</li> <li>• Konstrukce</li> <li>• Zkouška</li> <li>• Matematický zápis</li> <li>• Více řešení</li> <li>• Zaškrtávání</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Věta o těžnicích</b> <i>Martin Vinkler</i></p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><b>Věta o těžnicích:</b></p> <p>a) Všechny tři těžnice procházejí tímž bodem <math>T</math>, zvaným <b>těžiště</b>.</p> </div> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/zm3kmngb">https://www.geogebra.org/m/zm3kmngb</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Délka</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> <li>• Důkazy</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 applety</li> <li>• Doprovodné texty</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy, různé styly čar</li> </ul>

## 2.3.4 Výšky

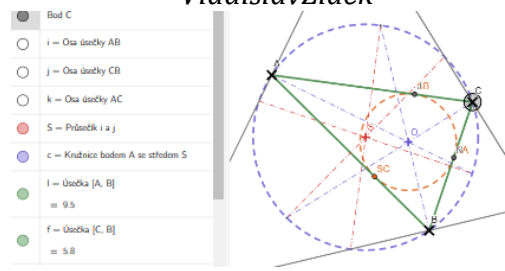
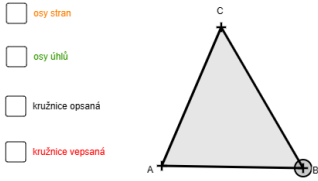
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Výšky v trojúhelníku</b> <i>Drugdová</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/htntbgg">https://www.geogebra.org/m/htntbgg</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Přímky, na kterých leží strany</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Výšky trojúhelníka</b> <i>Jozef Zvolensky</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/jrzrtknk">https://www.geogebra.org/m/jrzrtknk</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží strany</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Slovensky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Posuvníky s délkou stran</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Výšky trojúhelníka</b> <i>Erika Tomková</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/VAbPvJq5">https://www.geogebra.org/m/VAbPvJq5</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží strany</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtačací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Výšky trojúhelníku</b> <i>Markéta Zakouřilová</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/g4rhcaku">https://www.geogebra.org/m/g4rhcaku</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží strany</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Altitude of a triangle - orthocenter</b> <i>Akansha</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/mj5vd4zb">https://www.geogebra.org/m/mj5vd4zb</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Vnitřní úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Souřadnice bodů</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb dvěma vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Altitude od triangle</b> <i>Anvitha K</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/rypqt7eb">https://www.geogebra.org/m/rypqt7eb</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Souřadnice bodů</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Otázka</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb dvěma vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Definice výšky trojúhelníku</b> <i>Zuzana</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/ccq4gbmn">https://www.geogebra.org/m/ccq4gbmn</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>06_02_Geogebra altitude</b> <i>Akhila1469</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/mhw6mtmk">https://www.geogebra.org/m/mhw6mtmk</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Přímky, na kterých leží strany</li> <li>• Přímky, na kterých leží výšky</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

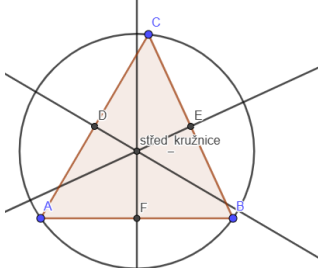
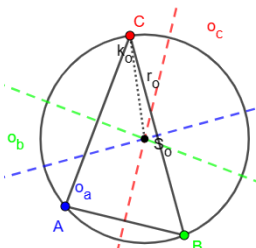

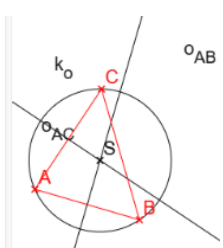


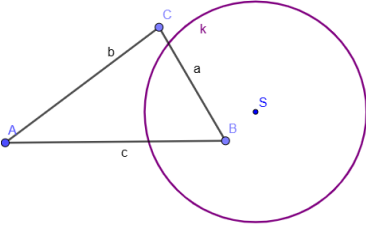
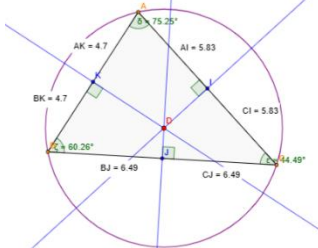
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Triangle Altitude Illustrator and Definition Writing Prompt</b> <i>Tim Brzezinski</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/q9d2yqyw">https://www.geogebra.org/m/q9d2yqyw</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Jedna výška</li> <li>• Pravý úhel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anglicky</li> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Otevřené otázky</li> <li>• Různé barvy i v textu</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Trojúhelník, výšky trojúhelníka</b> <i>Zdeněk Novotný</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/t5jd5pjd">https://www.geogebra.org/m/t5jd5pjd</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Vnitřní úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Součet vnitřních úhlů</li> <li>• Pythagorova věta</li> <li>• Obsah, obvod trojúhelníku</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb téměř všemi vrcholy</li> </ul>

### 2.3.5 Trojúhelník a kružnice

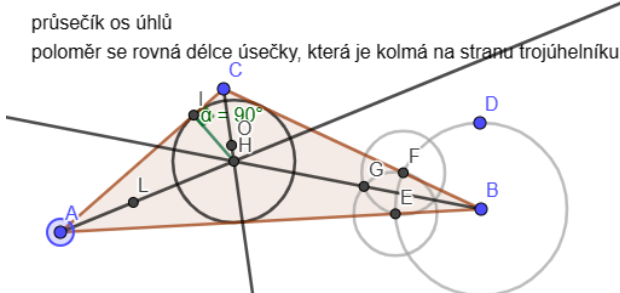
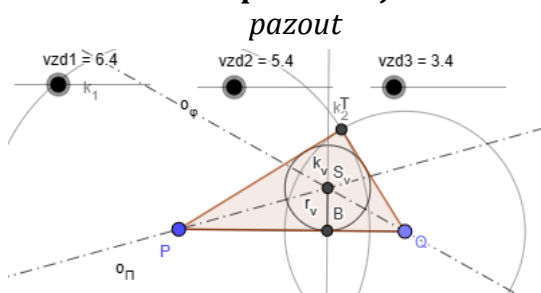
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Trojúhelník a jeho kružnice/ Triangle and its circles</b> <i>Vladislav Zidek</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/npnenzdq">https://www.geogebra.org/m/npnenzdq</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran</li> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Body dotyku kružnice vepsané a trojúhelníku</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Souřadnice bodů</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Trojúhelník – kružnice opsaná a vepsaná</b> <i>Irena Štrausová</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/hdhfcux2">https://www.geogebra.org/m/hdhfcux2</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran</li> <li>• Osy úhlů</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní text</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

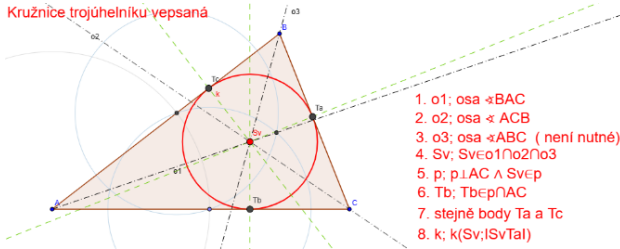
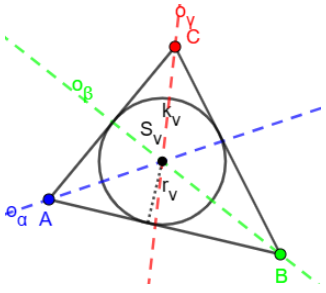
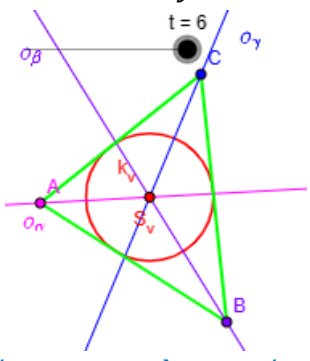
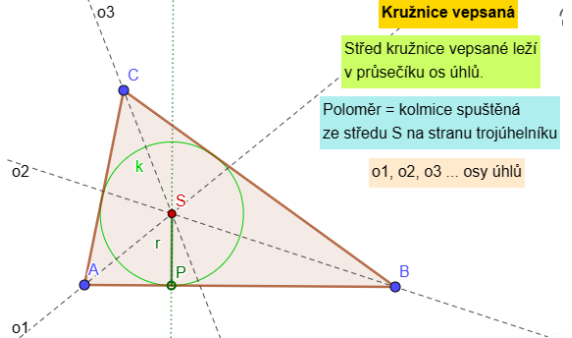
## 2.3.6 Kružnice trojúhelníku opsaná

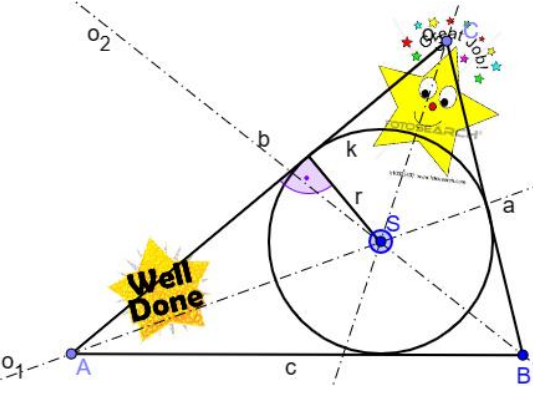
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná</b> <i>Jaroslav Sebastian Blahoš</i> osy úseček. (Kolmice která protíná úsečku v jejím středu)</p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/apq7jm54">https://www.geogebra.org/m/apq7jm54</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střed strany</li> <li>• Osy stran</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná trojúhelníku</b> <i>Adam Čech</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/pYj39tnA">https://www.geogebra.org/m/pYj39tnA</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střed strany</li> <li>• Osy stran</li> <li>• Poloměr kružnice opsané</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní text</li> <li>• Geometrický zápis</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná trojúhelníku</b> <i>Markéta Zakouřilová</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/mbnhvrus">https://www.geogebra.org/m/mbnhvrus</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran</li> <li>• Poloměr kružnice opsané</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná trojúhelníku</b> <i>Holejsovsky</i></p> <p><b>Základní konstrukce</b> <b>Kružnice opsaná trojúhelníku (<math>k_o</math>)</b></p> <p>Střed S kružnice opsané leží na průsečku os stran trojúhelníku. Poloměr r kružnice opsané je vzdálenost středu S od libovolného vrcholu trojúhelníku.</p> <p>Sestrojíme dvě libovolné osy stran, např.: <math>o_{AB}</math>, <math>o_{AC}</math>, jejich průsečík označíme S.</p> <p>Kružnice opsaná je kružnice <math>k_o(S, r =  AS  =  BS  =  CS )</math></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/x28Hd2Hx">https://www.geogebra.org/m/x28Hd2Hx</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Kružnice opsaná trojúhelníku</b> <i>Pink Cree</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ycd2zxnR">https://www.geogebra.org/m/ycd2zxnR</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Obrázek v appletu</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb dvěma vrcholy</li> </ul>
<p><b>Circumcenter od a Triangle (Circumscribing a Circle)</b> <i>David Boudreaux, mj.pfeiffer8</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/JK2HS4Rb">https://www.geogebra.org/m/JK2HS4Rb</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středky stran</li> <li>• Osy stran</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Vnitřní úhly</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní text</li> <li>• Otevřené otázky (odpovědi psané na papír)</li> <li>• Různé barvy i v textu</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

### 2.3.7 Kružnice trojúhelníku vepsaná

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Kružnice vepsaná</b> <i>Jaroslav Sebastian Blahoš</i></p> <p>průsečík os úhlů poloměr se rovná délce úsečky, která je kolmá na stranu trojúhelníku</p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/gqbcepng">https://www.geogebra.org/m/gqbcepng</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Konstrukce osy vnitřního úhlu</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Bod dotyku kružnice vepsané</li> <li>• Pravý úhel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Kružnice vepsaná trojúhelníku</b> <i>pazout</i></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/sea5y9ww">https://www.geogebra.org/m/sea5y9ww</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy dvou vnitřních úhlů</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvníky</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Panel s nástroji</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice trojúhelníku vepsaná</b> <i>hamina</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/vnxCQ4w7">https://www.geogebra.org/m/vnxCQ4w7</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Konstrukce osy vnitřního úhlu</li> <li>• Body dotyku kružnice vepsané a trojúhelníku</li> <li>• Zápis konstrukce</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná trojúhelníku</b> <i>Adam Čech</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/bZq6GtNJ">https://www.geogebra.org/m/bZq6GtNJ</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvodní text</li> <li>• Geometrický zápis</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná</b> <i>Tomáš Vysloužil</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/GCvxBJVG">https://www.geogebra.org/m/GCvxBJVG</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Animace</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná trojúhelníku</b> <i>Markéta Zakouřilová</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/cnddsxwg">https://www.geogebra.org/m/cnddsxwg</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Bod dotyku kružnice vepsané a trojúhelníku</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Doprovodný text</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná trojúhelníku</b> <i>Pink Cree</i></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/xgiqtpma">https://www.geogebra.org/m/xgiqtpma</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy vnitřních úhlů</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Bod dotyku kružnice vepsané</li> <li>• Pravý úhel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Obrázky v appletu</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb dvěma vrcholy</li> </ul>

## 2.4 Soubor appletů

V další části bakalářské práce uvedeme autorsky vytvořené applety včetně souboru možných otázek. Applety slouží k objevování geometrických vztahů nebo zákonitostí. GeoGebra byla založena v roce 2001 a i nadále přetrvává problém v tom, jak ji zapojit do výuky. Jak propojit dynamickou geometrii s pedagogickou praxí? Jednou z možných odpovědí na danou otázku by mohly být námi vytvořené applety a aktivity.

Slouží žákům šestých tříd pro objevování vlastností, případně žákům vyšších ročníků v rámci opakování. Přibližují téma výšky, těžnice, střední příčky, kružnice trojúhelníku vepsané a kružnice trojúhelníku opsané. Záleží na učiteli, jaký cíl použití appletu zvolí, v jaké části hodiny ho zadá a jak s ním bude pracovat. Jednotlivé applety se dají i kombinovat. Výhodou GeoGebry je možnost pohybovat s jednotlivými objekty v nákresně, přičemž se mění i příslušné vlastnosti. Žáci mohou pozorovat geometrické zákonitosti v dynamickém programu. Mohou si s appletem pohrát a zároveň objevit pro sebe nové informace, popřípadě si upevnit nebo zopakovat informace stávající. Pro větší efektivitu výuky je důležité promyšlené a cílevědomé použití v kombinaci s tradičními postupy (psaní, rýsování).

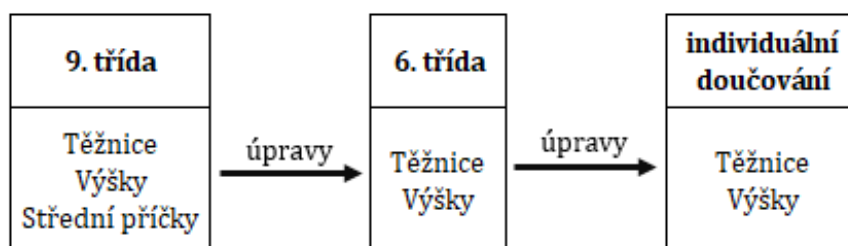
Pedagog zadává aktivity prostřednictvím platformy GeoGebra Classroom, která vygeneruje kód potřebný pro vstup žáků do aktivity. Při zadávání aktivity učitel volí, zda žáci mohou nebo nemohou vidět správné odpovědi. V prostředí GeoGebra Classroom je možné sledovat práci jednotlivých žáků včetně počtu hotových úkolů. Dále učitel může zastavit práci celé třídy najednou a prodiskutovat s nimi vyplněné odpovědi. Otázky v GeoGebře mohou být otevřené i uzavřené. U uzavřených otázek se dá označit i více možných odpovědí. Nelze nastavit výběr pouze jedné odpovědi. Při promítání řešení na tabuli, může vyučující použít i odpovědi jednoho z žáků,

přičemž lze zakrýt jména všech. U konstruování v GeoGebře je nutné umět s programem pracovat. Pro naše účely volíme applety bez nutnosti konstrukcí.

Jednotlivé vytvořené applety se liší použitými nástroji, znázorněnými vlastnostmi a bližším určením. Jejich finální verze uvádíme níže. Popis aktivit je opět ve stručných tabulkách. První sloupec obsahuje název, snímek appletu a odkaz. Ve druhém sloupci uvádíme obsažené prvky a ve třetím použité nástroje a další poznámky. V předposledním řádku uvádíme možnou variantu kombinace appletu s otázkami. Poslední řádek tabulky tvoří odkaz na soubor otázek týkajících se dané části planimetrie, které vyučující může použít.

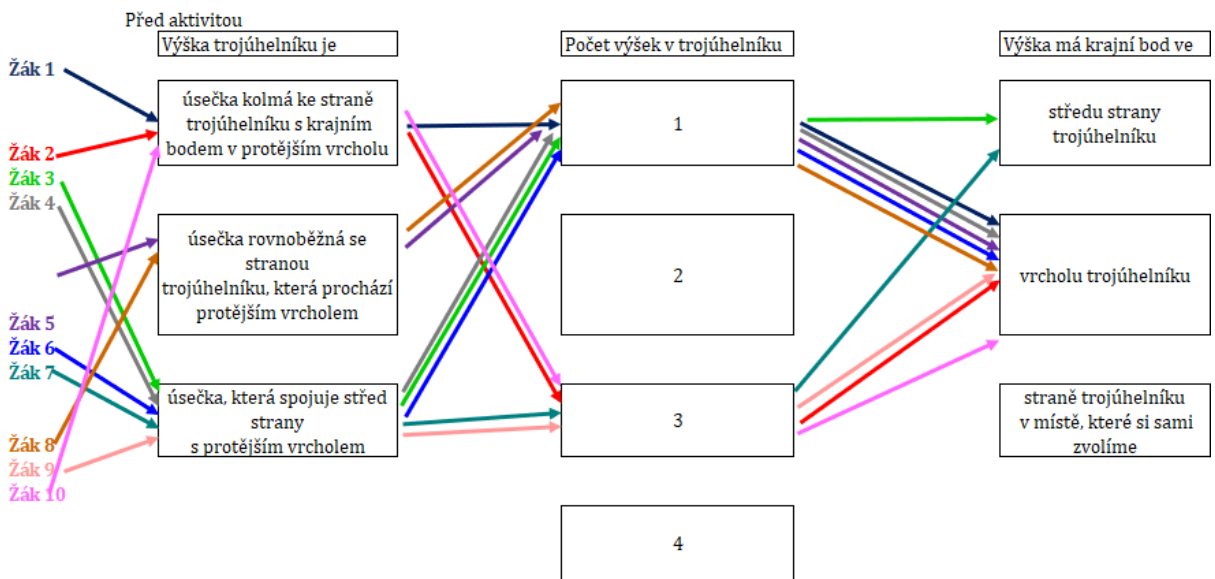
#### 2.4.1 Reflexe z praxe

Podařilo se nám některé applety vyzkoušet v praxi. Schéma reflexe z praxe uvádíme v následujícím obrázku. V první fázi jsme aktivity zadali žákům deváté třídy základní školy v rámci opakování k přijímacím zkouškám. Následně upravené aktivity vyplnili žáci šesté třídy. V posledním kroku jsme aktivity vyzkoušeli v rámci individuální přípravy k přijímacím zkouškám na střední školu.



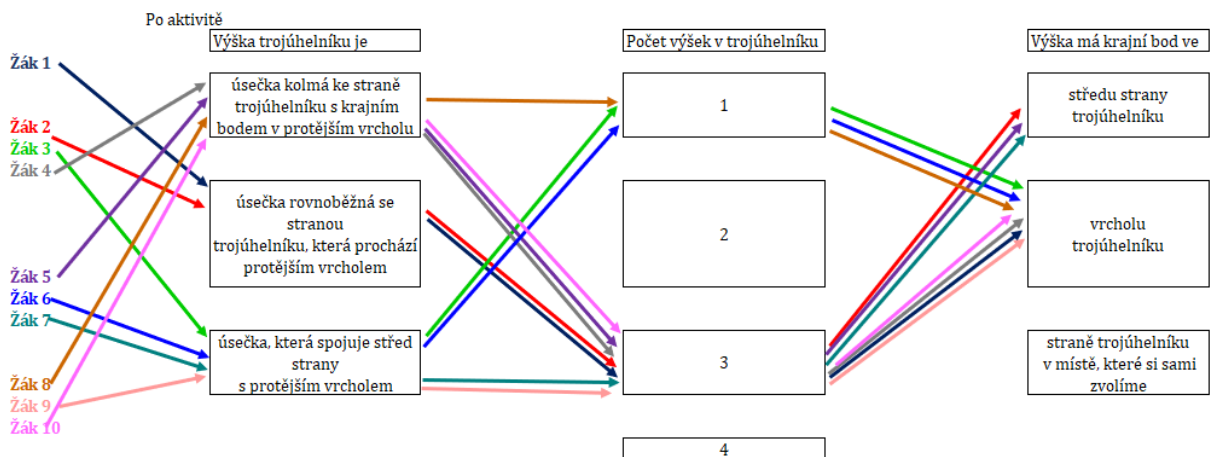
Obr. č. 35 Schéma reflexe

V první fázi jsme aktivity zadali žákům deváté třídy základní školy v rámci opakování. Práce s GeoGebrou byla rozdělena do čtyř vyučovacích hodin v průběhu dvou dnů. První den se aktivit účastnilo celkem deset žáků, druhý den jedenáct. Předložené applety se zabývaly tématem těžnice, výška a střední příčka. Pojmy těžnice a výška nepředstavovaly pro žáky nic nového. Abychom zjistili jejich znalosti před použitím GeoGebry, vyplnili nejprve žáci krátký test s uzavřenými odpověďmi. Otázky včetně vyplněných odpovědí dotazníku zaměřeného na výšky zobrazuje následující schéma. Analogicky vypadal i dotazník zaměřený na těžnice.



Obr. č. 36 Schéma odpovědí před aktivitou

Po vyplnění dotazníku následovala aktivita v GeoGebře, kde pod appletem byly položeny stejné otázky jako v testu. Jejich podobu, včetně získaných odpovědí, zobrazuje schéma na Obr. č. 37.



Obr. č. 37 Schéma odpovědí po aktivitě

Po aktivitách k připomenutí pojmů těžnice a výšky následovaly applety, které přibližovaly vztahy těžnic a výšek vzhledem ke druhům trojúhelníku. V rovnostranném trojúhelníku splývají všechny těžnice s výškami. Tuto správnou odpověď označilo osm z deseti žáků. V pravoúhlém trojúhelníku jsme se ptali na splývání stran trojúhelníku s výškami. Správnou odpověď označilo šest z deseti žáků. Na otázku ohledně polohy průsečíku výšek v pravoúhlém trojúhelníku odpovědělo správně šest z deseti žáků. Druhý den jsme se zaměřili na střední příčky, které představovaly pro žáky novou látku. Aktivitu jsme použili k objevení pojmu střední příčka a její vlastnosti. Sedm z jedenácti žáků správně odvodilo velikost





Výška trojúhelníku

Zde označte odpověď

- A  leží vždy uvnitř trojúhelníku
- B  leží vždy mimo trojúhelník
- C  může ležet uvnitř trojúhelníku, splývat se stranou trojúhelníku nebo i mimo trojúhelník

CHECK MY ANSWER (3)

Pokud je trojúhelník ostroúhlý, leží průsečík výšek

Zde označte odpověď

- A  uvnitř trojúhelníku
- B  v jednom z vrcholů trojúhelníku
- C  mimo trojúhelník

CHECK MY ANSWER (3)

Pokud je trojúhelník tupoúhlý, leží průsečík výšek, popřípadě průsečík přímk, na kterých leží výšky,

Zde označte odpověď

- A  uvnitř trojúhelníku
- B  v jednom z vrcholů trojúhelníku
- C  mimo trojúhelník

CHECK MY ANSWER (3)

Průsečík výšek, popřípadě průsečík přímk, na kterých leží výšky,

Zde označte odpověď

- A  je vždy uvnitř trojúhelníku
- B  je vždy mimo trojúhelník
- C  je vždy ve vrcholu trojúhelníku
- D  může být uvnitř trojúhelníku, v jednom z jeho vrcholů nebo mimo trojúhelník

CHECK MY ANSWER (3)

### Obr. č. 39 Otázky z vyzkoušené aktivity

V poslední fázi jsme finální verzi sestavených aktivit zaměřených na těžnice a výšky v trojúhelníku předložili v rámci individuální přípravy žáka deváté třídy k přijímacím zkouškám. Žák celkem vyplnil čtyři aktivity. První aktivita byla čistě zaměřena na průsečík výšek, druhá na průsečík těžnic. Třetí aktivita obsahovala dva applety (první na těžnice a výšky v rovnostranném trojúhelníku, druhý na těžnice a výšky v rovnoramenném trojúhelníku). Poslední aktivita obsahovala applet s pravouhlým trojúhelníkem a jeho těžnicemi a výškami. Žák vyplnil všechny otázky

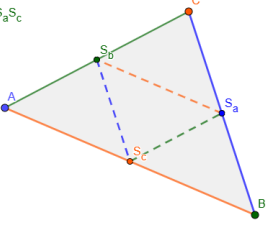
správně a bez chyb. Při následném rozhovoru projevil pouze obavy z některých delších otázek i odpovědí. Musel si daná souvětí přečíst opakovaně.

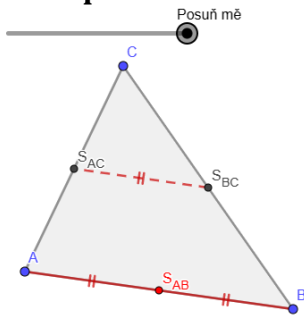
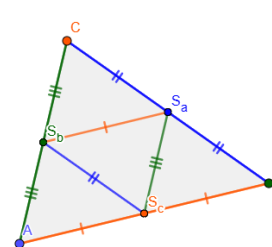
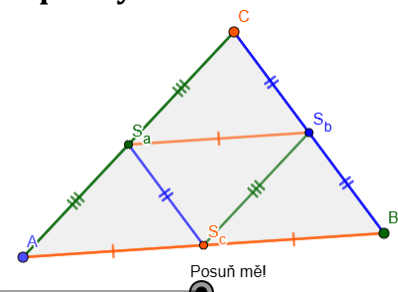
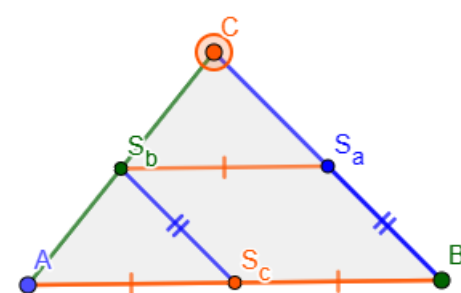
Aktivity s applety prošly celkem třemi fázemi. Pilotní fázi vyzkoušeli žáci deváté třídy základní školy v rámci opakování. Upravenou verzi poté vyplnili žáci šesté třídy základní školy, kteří zde objevovali nové informace. V poslední fázi jsme aktivity předložili v rámci individuální přípravy k přijímacímu řízení na střední školu.

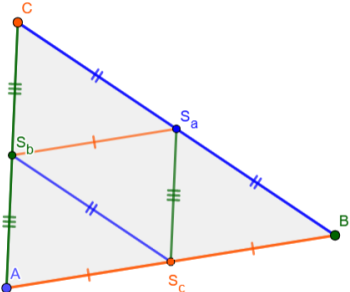
#### 2.4.2 Střední příčky

První tabulka obsahuje applety, aktivitu a možné otázky zaměřené na střední příčky. Před zadáváním uvedených appletů je potřeba seznámit žáky se značením rovnoběžnosti přímek a stejně dlouhých úseček v prostředí GeoGebra. Stejně dlouhé a rovnoběžné úsečky se značí určitým počtem přeškrtnutí.

První uvedený applet pouze znázorňuje jednotlivé střední příčky bez základních vlastností. Druhý applet uvádí jednu střední příčku včetně jejich základních vlastností. Následné tři applety ukazují všechny střední příčky včetně jejich vlastností. Liší se pouze v použitých nástrojích. První z nich obsahuje zaškrtačací pole, druhý posuvník a třetí tlačítko přehrát. Předposlední odkaz představuje celou aktivitu. Skládá se z jednoho appletu se zaškrtačacími poli a čtyř uzavřených otázek. Pod appletem jsou uvedené i pokyny. V pokynech upozorňujeme na skutečnost, že u všech otázek je pouze jedna odpověď správná. První otázka se zabývá definicí střední příčky, druhá počtem středních příček v trojúhelníku, třetí a čtvrtá se základními vlastnostmi středních příček. Poslední řádek obsahuje odkaz na možné otázky ohledně středních příček. Některé z nich jsou i početní.

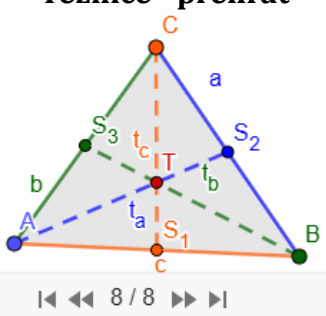
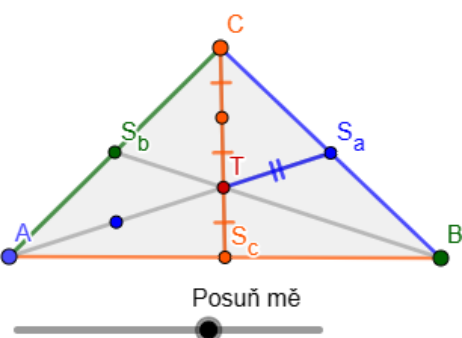
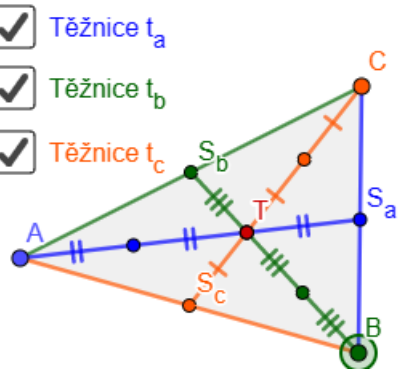
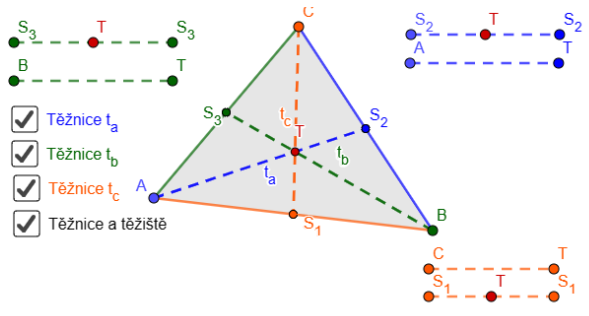
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Střední příčka - zaškrtačování</b></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Středy stran  <input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_aS_b</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_bS_c</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_aS_c</math></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/kj5fgw5a">https://www.geogebra.org/m/kj5fgw5a</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtačací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

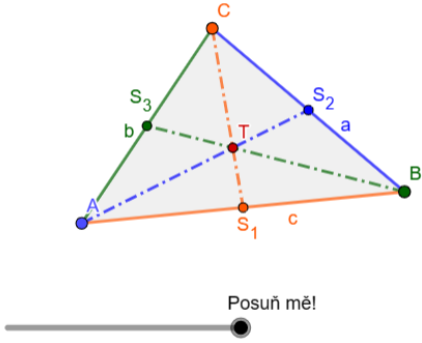
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčka – Posuň mě</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/u3gh8szp">https://www.geogebra.org/m/u3gh8szp</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pouze jedna</li> <li>• Středy stran</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Délka</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Animace</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčky - zaškrtování - délka obecně</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_a S_b</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_b S_c</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_a S_c</math></li> </ul>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/huuwz3fc">https://www.geogebra.org/m/huuwz3fc</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Délka</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčky - Posuň mě - všechny</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/xfkwx8rt">https://www.geogebra.org/m/xfkwx8rt</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Délka</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčka - přehrát</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/drepx3hz">https://www.geogebra.org/m/drepx3hz</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Délka</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčky - aktivita</b></p> <p> <input type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_aS_b</math>  <input type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_bS_c</math>  <input type="checkbox"/> Střední příčka <math>S_aS_c</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Všechny střední příčky </p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/vz6u9fae">https://www.geogebra.org/m/vz6u9fae</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Střední příčky</li> <li>• Rovnoběžnost</li> <li>• Délka</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Střední příčky - otázky</b></p> <p>Střední příčka je</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- úsečka spojující střed strany s protějším vrcholem</li> <li>- úsečka spojující středy dvou stran, která je s třetí stranou rovnoběžná</li> <li>- úsečka kolmá ke straně trojúhelníku procházející protějším vrcholem</li> </ul> <p>Počet středních příček v trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1</li> <li>- 2</li> <li>- 3</li> <li>- 4</li> </ul> <p>Střední příčka má krajní bod nebo krajní body v/ve</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vrcholu trojúhelníku</li> <li>- středu pouze jedné strany trojúhelníku</li> <li>- <b>středech dvou stran trojúhelníku</b></li> </ul> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/efrxksan">https://www.geogebra.org/m/efrxksan</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 13 a 14</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

### 2.4.3 Těžnice

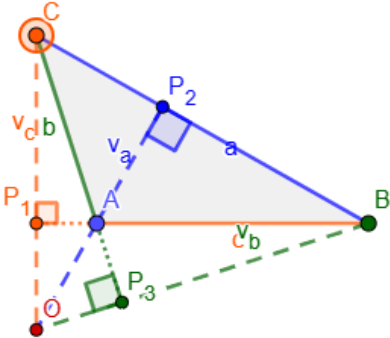
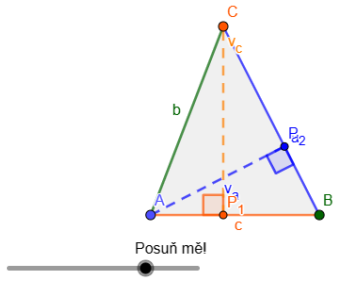
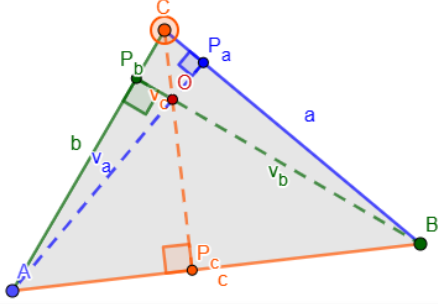
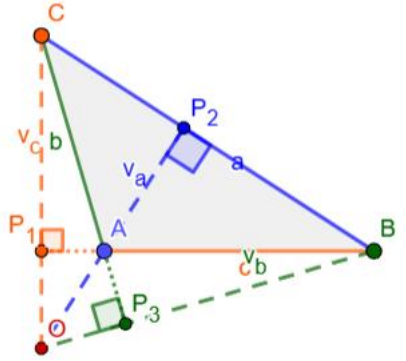
V další části uvádíme applety, aktivitu a možné otázky zaměřené na těžnice. První applet znázorňuje všechny těžnice včetně jejich průsečíku. Mimo těžiště jsou ještě vyznačené středy jednotlivých stran. Pomocí tlačítka přehrát přibývají v trojúhelníku  $ABC$  další potřebné náležitosti. Další tři applety zobrazují kromě těžnic a těžiště i poměr částí, na které dělí těžiště jednotlivé těžnice. Dané tři applety se liší použitým nástrojem (posuvník a zaškrtávací pole). Tentokrát přeškrtnutí úseček značí pouze stejně dlouhé úsečky, nikoliv jejich rovnoběžnost. V appletu s názvem Průsečík těžnic - zaškrtávání a poměr jsou navíc překreslené části těžnic i mimo trojúhelník pro lepší vizuální podklad. V předposledním řádku tabulky uvádíme upravenou verzi aktivity. Skládá se z jednoho appletu a čtyř uzavřených otázek, přičemž je pokaždé správná jen jedna odpověď. Poslední odkaz zobrazuje možné otázky, kterými lze výše uvedené applety doprovázet. Otázky se týkají i poměru částí těžnice, na které ji rozdělí těžiště, a početních úkolů.

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice - přehrát</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/hdqp2dxz">https://www.geogebra.org/m/hdqp2dxz</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středky stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice - Posuň mě</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/nwypaczp">https://www.geogebra.org/m/nwypaczp</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středky stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice - zaškrtávání a poměr</b></p> <p> <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_a</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_b</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_c</math> </p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/yruvfvd">https://www.geogebra.org/m/yruvfvd</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středky stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Průsečík těžnic - zaškrtávání a poměr</b></p>  <p> <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_a</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_b</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice <math>t_c</math>  <input checked="" type="checkbox"/> Těžnice a těžiště </p> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/hdnbutzg">https://www.geogebra.org/m/hdnbutzg</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středky stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Poměr</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Průsečík těžnic – aktivita</b></p>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/xs8pa8zn">https://www.geogebra.org/m/xs8pa8zn</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středy stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Pokyny</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice - otázky</b></p> <p>Těžnice a výšky splývají v jedny úsečky v trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rovnoramenném</li> <li>- <b>rovnostranném</b></li> <li>- pravouhlém</li> </ul> <p>Pouze jedna z těžnic splývá s výškou v trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>rovnoramenném</b></li> <li>- rovnostranném</li> <li>- pravouhlém</li> </ul> <p>V pravouhlém trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- leží průsečík těžnic ve vrcholu trojúhelníku</li> <li>- splývá průsečík těžnic s průsečíkem výšek</li> <li>- <b>leží průsečík těžnic uvnitř trojúhelníku mimo průsečík výšek</b></li> </ul> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/gkzhkvde">https://www.geogebra.org/m/gkzhkvde</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 15 a 16</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

#### 2.4.4 Výšky

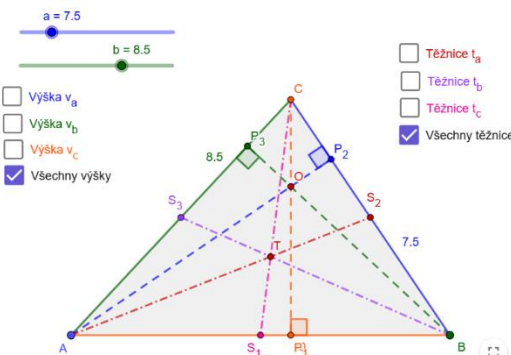
V následující tabulce uvádíme applety, aktivitu a otázky týkající se výšek. První uvedený applet umožňuje pouze pohyb jedním vrcholem, přičemž se mění i jednotlivé výšky. Pro lepší ilustraci a odlišení jednotlivých částí využíváme kromě odlišných barev i odlišné styly čar. Právě úhly značíme malým čtverečkem. Další dva uvedené applety se liší použitým nástrojem. V prvním je posuvník a ve druhém tlačítko přehrát. Oba postupně zobrazují jednotlivé části trojúhelníku a jeho výšek, v obou se dá pohybovat vrcholem C. U appletu s tlačítkem přehrát je omezený pohyb vrcholem tak, že nelze nastavit jiný trojúhelník než ostroúhlý. Předposlední řádek tabulky obsahuje sestavenou aktivitu. Pod appletem jsou uvedeny pokyny a čtyři uzavřené otázky. U každé otázky je pouze jedna odpověď správná. V závěr uvádíme možné otázky, které lze přiřadit k jednotlivým appletům.

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Výšky - pohyb vrcholem C</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ma8bx3p7">https://www.geogebra.org/m/ma8bx3p7</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Viz str. 16–19</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb vrcholem C</li> </ul>
<p><b>Výšky - Posuň mě</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/wvqput9z">https://www.geogebra.org/m/wvqput9z</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Viz str. 16–19</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb vrcholem C</li> </ul>
<p><b>Průsečík výšek - přehrát</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/vmavadv">https://www.geogebra.org/m/vmavadv</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Platí pouze pro ostroúhlý trojúhelník</li> <li>• Viz str. 16–19</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb vrcholem C</li> </ul>
<p><b>Průsečík výšek - aktivita</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/dxw3cqac">https://www.geogebra.org/m/dxw3cqac</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 16-19</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>

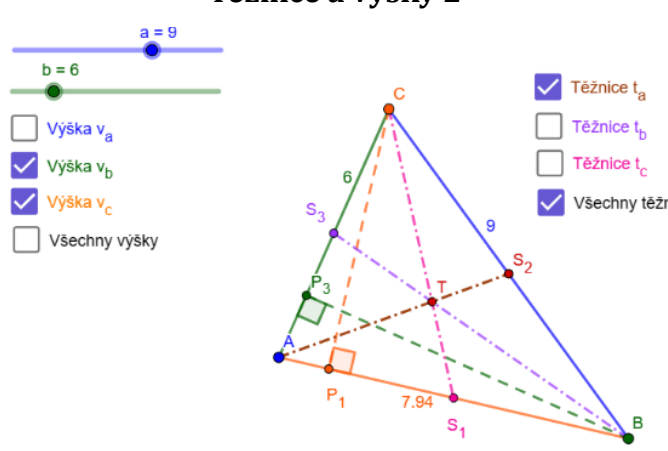
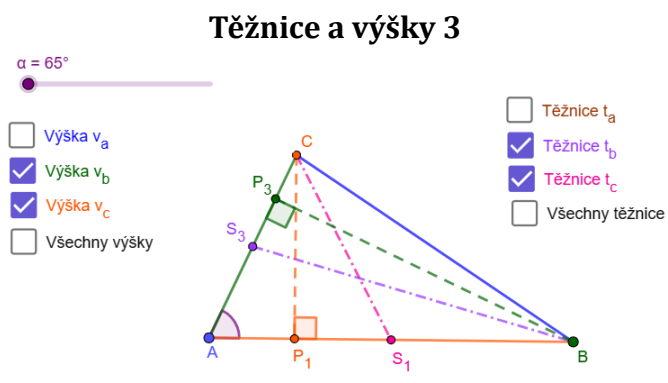
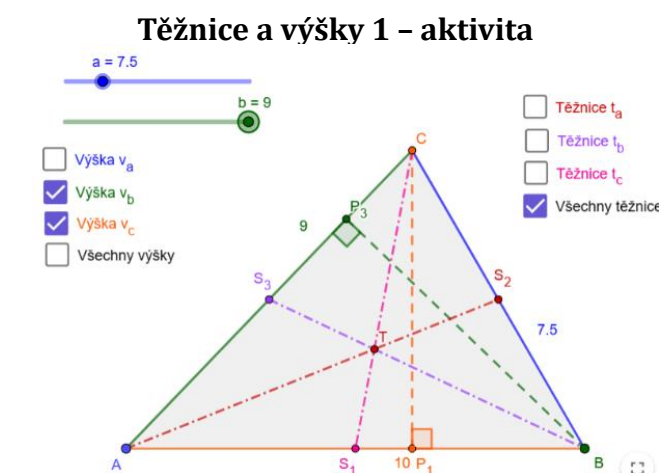
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Výšky – otázky</b></p> <p>Výška je</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ÚSEČKA KOLMÁ KE STRANĚ TROJÚHELNÍKU S KRAJNÍM BODEM V PROTĚJŠÍM VRCHOLE</li> <li>- úsečka rovnoběžná se stranou trojúhelníku, která prochází protějším vrcholem</li> <li>- úsečka, která spojuje střed strany s protějším vrcholem</li> </ul> <p>Počet výšek v trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1</li> <li>- 2</li> <li>- 3</li> <li>- 4</li> </ul> <p>Výška má krajní bod ve</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- středu strany trojúhelníku</li> <li>- vrcholu trojúhelníku</li> <li>- straně trojúhelníku v místě, které sami zvolíme</li> </ul> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/c7nuefjm">https://www.geogebra.org/m/c7nuefjm</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 16-19</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

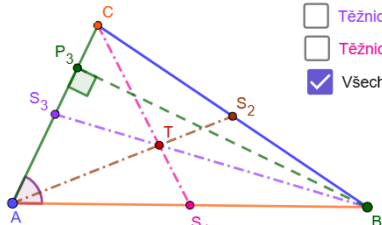
### 2.4.5 Těžnice a výšky

Vlastnosti výšek a těžnic vzhledem ke druhu trojúhelníku mohou představovat zajímavou část, kterou lze blíže zkoumat a objevovat prostřednictvím GeoGebry. Výše uvedená tabulka kombinuje předchozí applety a sleduje prolínání jednotlivých částí. Kromě přidávání jednotlivých částí mají žáci za úkol upravit pomocí posuvníku velikosti stran nebo úhlu tak, aby vznikl požadovaný trojúhelník. První applet znázorňuje rovnoramenný trojúhelník, druhý rovnostranný a třetí trojúhelník pravoúhlý. Dále uvádíme dvě různé aktivity. V první jsou nakombinovány applety týkající se trojúhelníku rovnoramenného a rovnostranného se souvisejícími otázkami. Druhá aktivita je zaměřena čistě na pravoúhlý trojúhelník. Poslední řádek tabulky uvádí odkaz na možné otázky, které lze k daným appletům přidat. I zde platí, že pouze jedna z uvedených odpovědí je správná.

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky 1</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/censx9hp">https://www.geogebra.org/m/censx9hp</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed strany</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Výšky</li> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Rovnoramenný trojúhelník</li> <li>• Viz str. 7, 19, 20</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Posuvníky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>



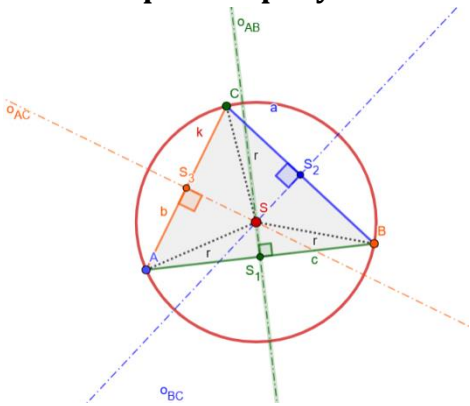
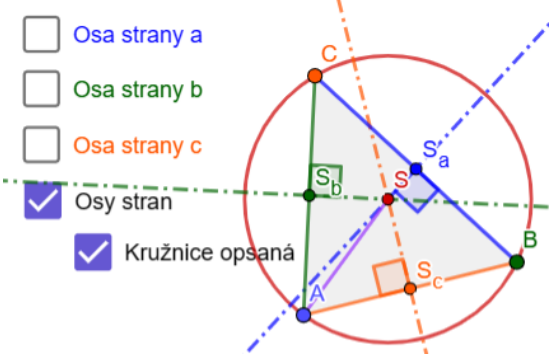
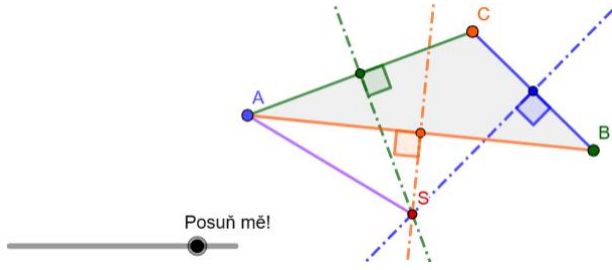
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky 2</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/kdunztwu">https://www.geogebra.org/m/kdunztwu</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed strany</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Výšky</li> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Rovnostranný trojúhelník</li> <li>• Viz str. 7, 19, 20</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Posuvníky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky 3</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/mcpqybav">https://www.geogebra.org/m/mcpqybav</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed strany</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Výšky</li> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Pravoúhlý trojúhelník</li> <li>• Viz str. 8 a 18</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Posuvník</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky 1 - aktivita</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/cjrsufp4">https://www.geogebra.org/m/cjrsufp4</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed strany</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Výšky</li> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Pravé úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 7, 19, 20</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrťovací pole</li> <li>• Posuvníky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>

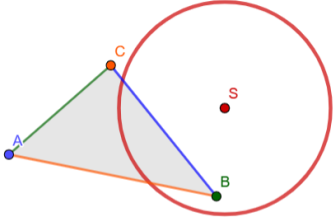
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky 2 - aktivita</b></p> <p><math>\alpha = 65^\circ</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p><input type="checkbox"/> Výška <math>v_a</math></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Výška <math>v_b</math></p> <p><input type="checkbox"/> Výška <math>v_c</math></p> <p><input type="checkbox"/> Všechny výšky</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p><input type="checkbox"/> Těžnice <math>t_a</math></p> <p><input type="checkbox"/> Těžnice <math>t_b</math></p> <p><input type="checkbox"/> Těžnice <math>t_c</math></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Všechny těžnice</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/ptmzwwvpc">https://www.geogebra.org/m/ptmzwwvpc</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Těžnice</li> <li>• Středů stran</li> <li>• Těžiště</li> <li>• Výšky</li> <li>• Paty kolmic</li> <li>• Právě úhly</li> <li>• Ortocentrum</li> <li>• Pravoúhlý trojúhelník</li> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 8 a 18</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtačací pole</li> <li>• Posuvníky</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Těžnice a výšky - otázky</b></p> <p>V rovnoramenném trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- nesplyvá žádná výška s žádnou těžnicí</li> <li>- splývají všechny výšky se všemi těžnicemi</li> <li>- <b>splyvá pouze jedna výška s jednou těžnicí</b></li> </ul> <p>V rovnostranném trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- nesplyvá žádná výška s žádnou těžnicí</li> <li>- <b>splyvají všechny výšky se všemi těžnicemi</b></li> <li>- splývá pouze jedna výška s jednou těžnicí</li> </ul> <p>Průsečík výšek v pravoúhlém trojúhelníku</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- leží uvnitř trojúhelníku mimo strany a vrcholy trojúhelníku</li> <li>- <b>leží v jednom z vrcholů trojúhelníku</b></li> <li>- leží mimo trojúhelník</li> </ul> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/usaxsfct">https://www.geogebra.org/m/usaxsfct</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Viz str. 7, 8, 18, 19 a 20</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

#### 2.4.6 Kružnice trojúhelníku opsaná

Řadu vytvořených appletů, které nebyly vyzkoušeny v praxi, jsme zaměřili na kružnici trojúhelníku opsanou. První uvedený applet ukazuje trojúhelník včetně os stran, kružnice opsané a vyznačených poloměrů této kružnice. Všechny náležitosti jsou označeny i pojmenovány. Pohybovat se dá pouze vrcholem  $C$ . U dalšího appletu se nejprve zobrazí pouze trojúhelník se čtyřmi zaškrtačacími poli. Po označení dílčích polí se zobrazí jednotlivé osy stran. Označením čtvrtého pole se zkonstruují osy všech stran trojúhelníku a objeví se další zaškrtačací pole pro kružnici trojúhelníku opsanou. Po jeho zaškrtnutí se zobrazí i daná kružnice včetně jejího středu a poloměru. Písemně označeny jsou pouze středy stran, vrcholy trojúhelníku a střed kružnice opsané. Ve třetím appletu vidíme nejprve pouze šedivé pozadí trojúhelníku a tři vrcholy. Postupně se vykreslí jednotlivé strany, jejich osy a průsečík os. Následuje úsečka s krajními body v průsečíku os a jednom vrcholu trojúhelníku. V posledním kroku se zobrazí kružnice trojúhelníku opsaná. Písemně označeny jsou pouze vrcholy trojúhelníku a střed kružnice.

Předposlední řádek tabulky obsahuje odkaz na applet i s pokyny. Úkolem je přemístit kružnici tak, aby procházela všemi vrcholy trojúhelníku. Žák následně označuje jednotlivá zaškrtačací pole s různým označením, která vykreslují určité přímky nebo úsečky v trojúhelníku. Následně by měl diskutovat a rozhodnout, co platí pro střed kružnice trojúhelníku opsané. V posledním řádku tabulky uvádíme odkaz na možné otázky týkající se dané problematiky. Kromě uzavřených otázek se zde vyskytuje i úkol týkající se očíslování postupu konstrukce kružnice trojúhelníku opsané.

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Kružnice opsaná - pohyb bodem C</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/nhcumrbr">https://www.geogebra.org/m/nhcumrbr</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Právých úhlů</li> <li>• Osy stran</li> <li>• Střed kružnice opsané</li> <li>• Kružnice opsaná</li> <li>• Poloměr kružnice opsané</li> <li>• Viz str. 20 a 21</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p><b>Kružnice opsaná - zaškrtačování</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Osa strany a</li> <li><input type="checkbox"/> Osa strany b</li> <li><input type="checkbox"/> Osa strany c</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Osy stran</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Kružnice opsaná</li> </ul>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/x9crgz5h">https://www.geogebra.org/m/x9crgz5h</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Právých úhlů</li> <li>• Osy stran</li> <li>• Střed kružnice opsané</li> <li>• Kružnice opsaná</li> <li>• Poloměr kružnice opsané</li> <li>• Viz str. 20 a 21</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtačovací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Kružnice opsaná - Posuň mě</b></p>  <p>Posuň mě!</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/eevdr5d5">https://www.geogebra.org/m/eevdr5d5</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Středů stran</li> <li>• Právých úhlů</li> <li>• Osy stran</li> <li>• Střed kružnice opsané</li> <li>• Kružnice opsaná</li> <li>• Poloměr kružnice opsané</li> <li>• Viz str. 20 a 21</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

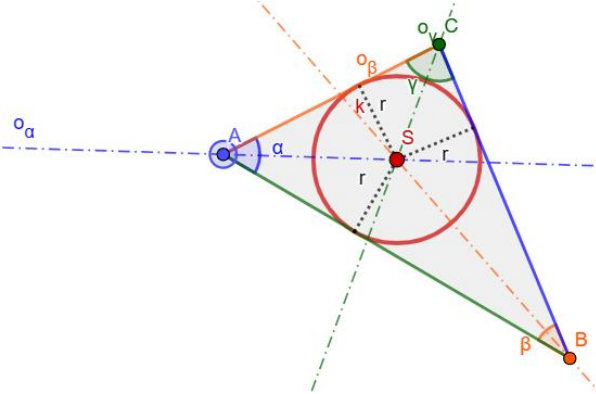
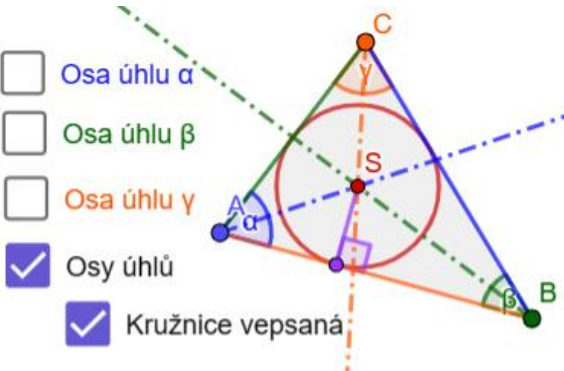
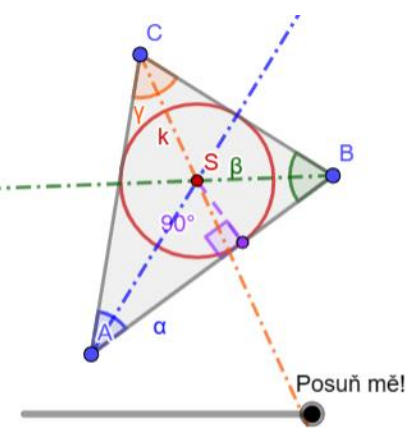
Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná</b></p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <input type="checkbox"/> Osy stran  <input type="checkbox"/> Osy úhlů  <input type="checkbox"/> Výšky  <input type="checkbox"/> Těžnice         </div>  </div> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/qgwsuu5">https://www.geogebra.org/m/qgwsuu5</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran včetně středů a pravých úhlů</li> <li>• Osy úhlů</li> <li>• Výšky</li> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed kružnice opsané</li> <li>• Kružnice opsaná</li> <li>• Viz str. 20 a 21</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice opsaná – otázky</b></p> <p>Střed kružnice trojúhelníku opsané leží</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- v průsečíku os stran trojúhelníku</li> <li>- v průsečíku os vnitřních úhlů</li> <li>- v průsečíku os vnějších úhlů</li> </ul> <p>Na kružnici trojúhelníku opsané leží</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vrcholy trojúhelníku</li> <li>- středy stran trojúhelníku</li> <li>- paty kolmic vedených ze středu kružnice trojúhelníku vepsané na strany trojúhelníku</li> </ul> <p style="text-align: center;"><a href="https://www.geogebra.org/m/nthrbhsb">https://www.geogebra.org/m/nthrbhsb</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Postup konstrukce</li> <li>• Viz str. 20 a 21</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

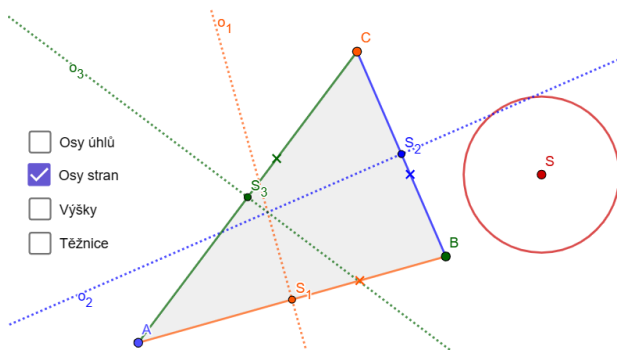
#### 2.4.7 Kružnice trojúhelníku vepsaná

Poslední tabulka obsahuje applety zaměřené na kružnici trojúhelníku vepsanou. První applet rovnou znázorňuje trojúhelník s jeho vnitřními úhly a osami vnitřních úhlů. Následně je označen průsečík os vnitřních úhlů, ze kterého jsou spuštěné úsečky kolmé k jednotlivým stranám. Poslední zvýrazněnou část představuje kružnice trojúhelníku vepsaná. Další aktivita znázorňuje v prvním náhledu pouze trojúhelník a čtyři zaškrtávací pole. První tři zobrazují osy jednotlivých vnitřních úhlů, čtvrté konstruuje všechny vnitřní úhly a zároveň se díky němu objevuje další zaškrtávací pole. Po označení nově objeveného pole vidíme kružnici trojúhelníku vepsanou včetně jejího středu, ze kterého je spuštěna kolmá úsečka k jedné straně trojúhelníku. Kolmost úsečky je vyznačena pravým úhlem. Písemně jsou označeny pouze vrcholy, vnitřní úhly trojúhelníku a střed kružnice vepsané. Předposlední uvedený applet s nástrojem posuvník postupně vykresluje jednotlivé vnitřní úhly včetně jejich os, průsečík os, úsečku kolmou ke straně trojúhelníku s krajním bodem v průsečíku os a v patě kolmice a v posledním kroku i kružnici trojúhelníku vepsanou. Pravý úhel je znázorněn čtverečkem a uvedenou velikostí.

Applet s názvem Kružnice vepsaná obsahuje krátký úvodní text s pokyny. Žák má přemístit kružnici tak, aby se dotýkala všech stran trojúhelníku. Následně označením zaškrtávacích polí zakreslí do trojúhelníku některé úsečky a přímky. Postupně žák vykresluje dané přímky a úsečky, přičemž pozoruje a diskutuje, co platí pro střed kružnice vepsané. Křížky na jednotlivých stranách znázorňují body

dotyku dané kružnice. Poslední řádek tabulky obsahuje odkaz na možné otázky k daným appletům. Kromě uzavřených otázek uvádíme i úkol, ve kterém žáci čísují postup konstrukce kružnice trojúhelníku vepsané.

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p><b>Kružnice vepsaná – pohyb bodem A</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/tefzabpq">https://www.geogebra.org/m/tefzabpq</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vnitřní úhly</li> <li>• Osy úhlů</li> <li>• Střed kružnice vepsané</li> <li>• Kružnice vepsaná</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Viz str. 21 a 22</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p><b>Kružnice vepsaná - zaškrtávání</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/phren7nu">https://www.geogebra.org/m/phren7nu</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vnitřní úhly</li> <li>• Osy úhlů</li> <li>• Střed kružnice vepsané</li> <li>• Kružnice vepsaná</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Pravý úhel</li> <li>• Viz str. 21 a 22</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>
<p><b>Kružnice vepsaná – Posuň mě</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/b3egk6kq">https://www.geogebra.org/m/b3egk6kq</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vnitřní úhly</li> <li>• Osy úhlů</li> <li>• Střed kružnice vepsané</li> <li>• Kružnice vepsaná</li> <li>• Poloměr kružnice vepsané</li> <li>• Pravý úhel</li> <li>• Viz str. 21 a 22</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posuvník</li> <li>• Tlačítko přehrát</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb všemi vrcholy</li> </ul>

Aktivita	Obsah	Poznámky
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná</b></p>  <p><a href="https://www.geogebra.org/m/d6zjzcey">https://www.geogebra.org/m/d6zjzcey</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Osy stran včetně středů</li> <li>• Osy úhlů včetně vnitřních úhlů</li> <li>• Výšky</li> <li>• Těžnice</li> <li>• Střed kružnice vepsané</li> <li>• Kružnice vepsaná</li> <li>• Viz str. 21 a 22</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pokyny</li> <li>• Zaškrtávací pole</li> <li>• Různé barvy</li> <li>• Různé styly čar</li> <li>• Pohyb jedním vrcholem</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Kružnice vepsaná – otázky</b></p> <p>Střed kružnice trojúhelníku vepsané leží</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- v průsečíku os stran trojúhelníku</li> <li>- <b>v průsečíku os vnitřních úhlů</b></li> <li>- v průsečíku os vnějších úhlů</li> </ul> <p>Na kružnici trojúhelníku vepsané leží</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vrcholy trojúhelníku</li> <li>- středy stran trojúhelníku</li> <li>- <b>paty kolmic vedených ze středu kružnice trojúhelníku vepsané na strany trojúhelníku</b></li> </ul> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/g4bvfunw">https://www.geogebra.org/m/g4bvfunw</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uzavřené otázky</li> <li>• Postup konstrukce</li> <li>• Viz str. 21 a 22</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Možné otázky do sestavených aktivit</li> <li>• Inspirace</li> </ul>

## 2.5 Shrnutí

V praktické části bakalářské práce uvádíme stručnou rešerši appletů od různých autorů. Pro lepší přehlednost jsme zvolili formu stručných tabulek. U každého appletu uvádíme jeho název, jméno autora, odkaz a obrázek. To vše v rámci prvního sloupečku tabulek. Druhý sloupec obsahuje stručně obsah jednotlivých appletů. Ve třetím sloupci uvádíme různé poznámky týkající se využitých nástrojů, jazyka daných aktivit či appletů a další poznámky.

Po appletech jiných autorů uvádíme naše vytvořené. Opět k jejich popisu využíváme stručné tabulky, které jsou doplněny i o slovní popis. První sloupec tabulek obsahuje kromě názvu a odkazu i snímek daného appletu. V druhém sloupci uvádíme heslovitě obsah appletu, případně aktivity, včetně odkazu na použité poznatky z teoretické části bakalářské práce. Do třetího sloupce vpisujeme poznámky včetně použitých nástrojů, možného pohybu vrcholy a dalších informací. Některé applety jsme zkompletovali s otázkami a vyzkoušeli i v praxi. Reflexi vyzkoušených appletů jsme věnovali celou podkapitolu. Uvádíme v ní i ukázkou jedné aktivity zaměřené na výšky a dvě schémata otázek včetně odpovědí. Reflexe proběhla ve třech fázích. Nejprve sloužily aktivity v GeoGebře k opakování již stávajících znalostí, poté k objevování vlastností průsečíku těžnic a výšek a v poslední fázi opět k zopakování informací. Na základě zpětné vazby od žáků jsme provedli potřebné úpravy a zjednodušení. Upustili jsme od zavádění nových pojmů

prostřednictvím GeoGebra Classroom, naopak zaměřili jsme se na objevování vlastností.

Applety slouží k propojení dynamické geometrie s pedagogickou praxí. Vyučující si může zvolit jakýkoli applet, přidat k němu otázky z našich souborů nebo své vlastní a zadat ho žákům prostřednictvím GeoGebra Classroom. Snažíme se využít výhody GeoGebry při výuce výšek, těžnic, středních příček v trojúhelníku, kružnice trojúhelníku opsané a kružnice trojúhelníku vepsané. Mimo jiné se snažíme přidat prvky badatelské výuky i do hodin matematiky. Žáci si sami a individuálně pohrají s applety, ve kterých se snaží vypořádat geometrické zákonitosti.

## Závěr

Teoretická část bakalářské práce obsahuje potřebná teoretická fakta týkající se trojúhelníku. Kromě definice a základních vlastností uvádíme i druhy trojúhelníků z různých hledisek a významné úsečky v trojúhelnících. U některých vlastností uvádíme i důkazy. Vše je znázorněno v obrázcích, které jsme vytvořili v programu GeoGebra.

Obsáhlejší část bakalářské práce tvoří applety v GeoGebře. Po popisu programu uvádíme rešerši appletů od jiných autorů. K jejich popisu využíváme stručné a přehledné tabulky o třech sloupcích. První obsahuje název, autora, odkaz a snímek dané aktivity. Ve druhém je zapsán v bodech obsah daného appletu nebo aktivity. Poslední sloupec uvádí poznámky včetně možného pohybu a použitého jazyka.

Další část práce tvoří popis námi vytvořených appletů a aktivit. Před tabulkami uvádíme i reflexi některých aktivit. Sestavené aktivity prošly celkem třemi fázemi. Nejprve je vyzkoušeli žáci deváté třídy základní školy v rámci opakování k přijímacím zkouškám. Následně byly upravené aktivity předloženy žákům šesté třídy základní školy s cílem objevení vlastností průsečíku těžnic a výšek. Výsledné aktivity nakonec vyplnil v poslední fázi reflexe žák deváté třídy v rámci individuální přípravy k přijímacím zkouškám. V praxi jsme vyzkoušeli applety zaměřené na zopakování pojmů výška a těžnice, na vlastnosti průsečíků výšek a těžnic a na vzájemnou polohu těžnic a výšek, případně průsečíků těžnic a výšek v závislosti na druhu trojúhelníku.

Po stručné reflexi následují tabulky. První sloupec tabulky obsahuje název, odkaz a obrázek námi vytvořeného appletu, případně aktivity. Ve druhém sloupci uvádíme obsah a odkaz na použitou teorii. Ve třetím sloupci nalezneme čtenář naše poznámky. Pokud je v názvu uvedeno slovo aktivita, jedná se o popis již sestavené aktivity, která se skládá z jednoho či více appletů a z několika uzavřených otázek. Poslední řádky obsahují odkazy na možné otázky, které lze kombinovat s příslušnými applety.

Na základě reflexe jsme applety zjednodušili. Ubrali jsme počty uzavřených otázek a odstoupili jsme od zavedení pojmu prostřednictvím programu GeoGebra. Naopak jsme se více zaměřili na objevování vlastností, u kterého hraje dynamická proměnlivost rolí. Uvedli jsme jednu z možností zapojení moderní technologie do výuky.



## Seznam obrázků

Obr. č. 1	Trojúhelník ABC.....	9
Obr. č. 2	Středy a osy stran trojúhelníku ABC.....	10
Obr. č. 3	Vnější úhly trojúhelníku ABC.....	10
Obr. č. 4	Součet vnitřních úhlů trojúhelníku.....	11
Obr. č. 5	Součet vnějšího a vnitřního úhlu.....	11
Obr. č. 6	Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.....	12
Obr. č. 7	Rovnoramenný trojúhelník ABC.....	13
Obr. č. 8	Ostroúhlý trojúhelník ABC.....	14
Obr. č. 9	Pravoúhlý trojúhelník ABC.....	14
Obr. č. 10	Tupoúhlý trojúhelník ABC.....	15
Obr. č. 11	Shodnost trojúhelníků podle věty sss.....	16
Obr. č. 12	Shodnost trojúhelníků podle věty usu.....	16
Obr. č. 13	Shodnost trojúhelníků podle věty sus.....	17
Obr. č. 14	Shodnost trojúhelníků podle věty Ssu.....	17
Obr. č. 15	Podobnost trojúhelníků ABC a A'B'C'.....	18
Obr. č. 16	Střední příčky trojúhelníku.....	19
Obr. č. 17	Důkaz vlastností střední příčky.....	20
Obr. č. 18	Rozdělení trojúhelníku ABC středními příčkami.....	20
Obr. č. 19	Těžnice trojúhelníku ABC.....	21
Obr. č. 20	Důkaz průsečíku těžnic ASa a BSb.....	21
Obr. č. 21	Důkaz průsečíku těžnic ASa a CSc.....	22
Obr. č. 22	Výšky v trojúhelníku ABC.....	23
Obr. č. 23	Důkaz existence průsečíku výšek.....	23
Obr. č. 24	Důkaz průsečíku os stran trojúhelníku ABC.....	24
Obr. č. 25	Výšky v pravoúhlém trojúhelníku.....	24
Obr. č. 26	Výšky v tupoúhlém trojúhelníku.....	25
Obr. č. 27	Průsečík výšek a průsečík těžnic v různostranném trojúhelníku.....	25
Obr. č. 28	Výšky a těžnice v rovnoramenném trojúhelníku.....	25
Obr. č. 29	Výšky a těžnice v rovnostranném trojúhelníku.....	26
Obr. č. 30	Kružnice trojúhelníku opsaná.....	26
Obr. č. 31	Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku.....	27
Obr. č. 32	Kružnice opsaná tupoúhlému trojúhelníku.....	27

Obr. č. 33	Průsečík os vnitřních úhlů.....	28
Obr. č. 34	Kružnice trojúhelníku vepsaná.....	29
Obr. č. 35	Schéma reflexe .....	45
Obr. č. 36	Schéma odpovědí před aktivitou.....	46
Obr. č. 37	Schéma odpovědí po aktivitě.....	46
Obr. č. 38	Applet vyzkoušený v praxi.....	47
Obr. č. 39	Otázky z vyzkoušené aktivity .....	48

## Zdroje

1. CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. *Matematika 6: Učebnice*. Dotisk 1.vydání. Praha: Pythagoras Publishing, 1997. ISBN 80-902382-0-3.
2. GeoGebra [online]. [cit. 2023-02-28]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/>
3. HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: PROMETHEUS, 1995. ISBN 80-85849-86-0.
4. KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR ve spolupráci s nakladatelstvím ALBRA, 1996. ISBN 80-85823-21-7.
5. MOLNÁR, Josef, Milan KOPECKÝ, Hana LIŠKOVÁ, Bohumil NOVÁK a Jan SLOUKA. *Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: PRODOS, 1998. ISBN 80-7230-000-8.
6. MORAVCOVÁ, Vlasta a Jana HROMADOVÁ. *Základy planimetrie pro učitelské studium*. Praha: MatfyzPress, 2021. ISBN 978-80-7378-457-7.
7. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6.ročník základní školy, 3.část: Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr*. 2. vydání. Praha: PROMETHEUS, 1997. ISBN 80-7196-144-2: 58.
8. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vydání. Praha: PROMETHEUS, 1995. ISBN 80-85849-78-X.
9. SINCLAIR, Nathalie, Maria G. Bartolini BUSSI, Michael DE VILLIERS, Keith JONES, Ulrich KORTENKAMP, Allen LEUNG a Kay OWENS. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*. 2016; 48, 691–719.
10. ŠVRČEK, Jaroslav; VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-017-88.
11. ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Praha: Karolinum - nakladatelství Univerzity Karlovy, 1998. ISBN 80-7184-584-1.
12. ULM, Volker. Systemic innovations of mathematics education with dynamic worksheets as catalysts. In: *Cerme 6: Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon (France): INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUE, 2010, s. 1280 - 1289. ISBN 978-2-7342-1190-7.
13. VOŠICKÝ, Zdeněk. *Matematika v kostce pro střední školy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2007. ISBN 978-80-253-0191-3.