



**Posudek oponenta bakalářské práce Bc. Lucie Habiňákové  
„Využití dynamické geometrie pro studium polohových vlastností trojúhelníku“**

V zadání předkládané vysokoškolské kvalifikační práce je uvedeno:

*„Bakalářská práce bude zaměřena na využití dynamické geometrie pro studium vybraných polohových vlastností trojúhelníku na úrovni druhého stupně základní školy. V teoretické části představí příslušná matematická tvrzení a závěry literatury reflektující danou problematiku. Praktická část bude obsahovat autorské applety dynamické geometrie vytvořené na základě rešerše existujících volně dostupných materiálů. Využitelnost vybraných appletů pro vzdělávání v geometrii trojúhelníku bude reflektována na základě práce se studenty.“*

Podle výše uvedených cílů studentka řeší ve své bakalářské práci téma využití dynamické geometrie, které je aktuální a přínosné. Posuzovaná práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část, nazvaná *Trojúhelník*, je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole nacházíme definice trojúhelníku a dalších souvisejících pojmů. Druhá kapitola se zabývá klasifikací trojúhelníků podle délek jejich stran nebo velikostí jejich úhlů. Ve třetí kapitole jsou uvedeny věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Ve čtvrté kapitole jsou dokazovány základní polohové vlastnosti trojúhelníku týkající se středních příček, těžnic, výšek, kružnice trojúhelníku opsané a kružnice trojúhelníku vepsané. V teoretické části studentka definuje nezbytné pojmy a formuluje i dokazuje související matematická tvrzení, přitom se opírá o literaturu věnovanou problematice. Při zavádění základních pojmů jako trojúhelník, střední příčka, těžnice, výška, kružnice trojúhelníku opsaná nebo vepsaná jsou uvedeny různé přístupy k těmto pojmům napříč použitou literaturou.

Praktická část, nazvaná *Geogebra*, je rozdělena na pět kapitol. První a druhá kapitola se věnuje nejen vlastnímu programu Geogebra, ale zejména jeho využitelnosti, přínosům i potenciálním rizikům ve výuce geometrie. Ve třetí kapitole je provedena přehledná rešerše appletů pro Geogebra, které řeší problematiku polohových vlastností trojúhelníku zvolených v teoretické části. Ve čtvrté kapitole je popsán proces tvorby a reflexe appletů vytvořených studentkou, stěžejní je opět přehledné zapracování charakteristiky jednotlivých appletů a aktivit do předložené bakalářské práce. Tyto dvě kapitoly lze považovat za přínosné. V páté kapitole je provedeno shrnutí praktické části.

Závěr bakalářské práce má především formální charakter. Je v něm uvedeno, co předkládaná práce obsahuje, obdobný popis nacházíme i v úvodu práce. Čtenář tak může nabývat dojmu, že v úvodu i závěru práce čte téměř to samé.

Srovnáním výše uvedeného zadání bakalářské práce a samotné práce předkládané k obhajobě mohu jednoznačně konstatovat, že studentka splnila zadání bakalářské práce. Za přínosnou považuji zejména rešerši stávajících appletů na téma polohových vlastností trojúhelníka. Důležitou je pro mne otázka, zda studentkou navržené applety a aktivity jsou přínosné zejména pro ni osobně v tom smyslu, že si osvojila tvorbu vlastních didaktických pomůcek v programu Geogebra, nebo zda jsou přínosné v širším smyslu, například zda vhodně doplňují již vytvořené applety? Přestože chovám respekt ke všemu, co studenta vytvořila, domnívám se, že řada z appletů je spíš variací na již zveřejněné. Přesto bych chtěl vyzdvihnout to, že některé autorčiny applety a aktivity mají určitý příslib jedinečnosti. Takové zhodnocení však v práci postrádám. Domnívám se, že autorka mohla buď v páté kapitole praktické části, nebo v závěru práce provést srovnání vlastních appletů s těmi zmíněnými v rešerši, byť by takové posouzení bylo spíš subjektivní. Vizte otázku č. 4 v závěru posudku.

Přestože se jedná o kvalitní bakalářskou práci, je v ní možné narazit na několik chyb, případně nepřesností či nejasností. Z nich některé uvedu stručně v následujícím přehledu a další, dle mého soudu zásadnější, se budu věnovat posléze.

str. 9 (podobně i str. 11) ... Přestože je zvykem používat stejné označení pro stranu trojúhelníka i její velikost (např.  $a = BC$  i  $a = |BC|$ ), případně pro vnitřní úhel trojúhelníka i jeho velikost, je vhodné v souvislém textu mezi geometrickým útvarem a jeho velikostí rozlišovat. Součtem úseček nebo úhlů (máme-li na mysli grafický součet) je opět úsečka nebo úhel, tj. geometrický útvar. Součtem velikostí úseček nebo úhlů je velikost jisté úsečky nebo úhlu, tj. veličina. Proto je vhodné psát například buď „součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý“, nebo „součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je  $180^\circ$ “.

str. 10 ... V práci je uvedeno: „*Středem úsečky, respektive strany trojúhelníku, rozumíme bod, který je stejně vzdálený od obou krajních bodů.*“ Toto není správně, pak by byl středem úsečky i libovolný bod na ose úsečky.

str. 10 ... Formulace „*Přímka ... znázorňuje osu úsečky ...*“ není vhodná, lépe by bylo napsat „*Přímka ... je osa úsečky ...*“.

str. 11 ... V práci je na straně 10 zmíněna tzv. cyklická záměna. Bylo by vhodné ji využít při důkazu toho, že velikost vnějšího úhlu trojúhelníku je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů.

str. 12 ... V práci je uvedeno: „*... osa úhlu ... představuje množinu všech bodů stejně vzdálených od ramen svírajících daný úhel.*“ Toto není správné, byť hojně rozšířené, tvrzení. Osu úhlu můžeme definovat jako osu souměrnosti tohoto úhlu. Platí, že množina všech bodů konvexního úhlu, které mají stejnou vzdálenost od ramen tohoto úhlu, je polopřímka, která je průnikem osy úhlu a tohoto úhlu. Vizte úkol č. 1 v závěru posudku.

str. 12 ... V práci je uvedeno: „*Pro jednoznačné určení trojúhelníku a jeho přesnou konstrukci musíme znát následující kombinace údajů:*“ a doplněno o určení trojúhelníku podle vět *usu, sus, Ssu* a *sss*. Tato formulace není správná, stačí znát některou z těchto kombinací, ale trojúhelník je jednoznačně určen například také pomocí délky strany, velikosti přilehlého úhlu a výšky na tuto stranu.

str. 18 ... V práci je uvedeno: „*Dané pojmy definujeme, zavedeme jejich důležité vlastnosti a dané vlastnosti dokážeme.*“ Tato formulace není vhodná. Zavádíme pojmy pomocí jejich definic, případně elementární pojmy zavádíme soustavou axiomů. Vlastnosti například objevujeme, vyslovujeme o nich hypotézy, uvádíme nebo formulujeme.

str. 20 ... V práci je uvedeno: „*Na základě předchozích informací můžeme daný čtyřúhelník nazvat pojmem rovnoběžník.*“ Tato formulace není vhodná. Bylo by možné psát například: „*Na základě dříve uvedeného je daný čtyřúhelník rovnoběžník.*“

str. 20 ... S ohledem na shodnost trojúhelníků zmíněnou v dalším textu by místo  $\Delta S_C S_a S_b$  bylo vhodné psát  $\Delta S_a S_b S_c$ .

str. 22 ... Místo trojúhelníku  $S_a S_b S$  měl být uveden trojúhelník  $S_a S_c S$ .

str. 23 ... V práci je uvedeno: „*Každý trojúhelník má právě tři výšky, které se protínají v jednom bodě.*“ Toto tvrzení je nesprávné a kontrastuje s následujícím, již správným, tvrzením: „*Průsečík výšek, případně přímek, na kterých výšky leží, se nazývá ortocentrum.*“ S ohledem na to, že průsečík výšek nemusí existovat, je vhodné používat místo pojmu „průsečík výšek“ důsledně pojem „ortocentrum“ (zejména na str. 25 a ve vytvořených appletech).

str. 23 ... Úhly  $ACB$ ,  $KBA$ ,  $CBL$  nejsou shodné, nejspíš mělo být uvedeno, že jsou shodné úhly  $ACB$ ,  $MAC$ ,  $CBL$ .

str. 28 ... Místo „*nastíníme důkaz pro existenci kružnice opsané*“ mělo být uvedeno „*nastíníme důkaz pro existenci kružnice vepsané*“.

str. 31 ... Místo „*Kromě appletů se do aktivit dají vložit otevřené otázky ...*“ mělo být uvedeno „*Kromě appletů se do aktivit dají vložit uzavřené otázky ...*“.

str. 54 ... V appletu „Průsečík výšek – přehrát“ předchází vykreslení paty výšky před spojením této paty s vrcholem. S ohledem na konstrukci, kterou žáci provádějí „na papír“, považuji za vhodnější, aby sestrojení kolmice z vrcholu na protilehlou stranu předcházelo před vyznačením paty.

str. 59 ... V appletu „Kružnice opsaná“ je přednastavený ostroúhlý trojúhelník, který je „téměř pravouhlý“. Pak se střed kružnice opsané nachází velmi blízko vyznačeného středu strany. Možná by bylo vhodnější přednastavit jiný ostroúhlý trojúhelník, se středem kružnice opsané vzdálenějším od jeho stran.

str. 59 ... V aktivitě „Kružnice opsaná – otázky“ je u otázky na poloměr místo kružnice opsané uvedena kružnice vepsaná.

str. 59 ... Místo „... čtvrté konstruuje všechny vnitřní úhly ...“ mělo být uvedeno „... čtvrté konstruuje všechny osy vnitřních úhlů ...“

Jedinou podstatnou výhradu směřuji k aktivitě „Těžnice a výšky 2 – aktivita“ na straně 57. V rámci výstupu z této aktivity mají žáci odpovědět, že v pravouhlém trojúhelníku nesplyvá žádná výška s žádnou těžnicí. Tato odpověď je nesprávná, protože v rovnoramenném pravouhlém trojúhelníku splývá právě jedna výška a těžnice. Stejná chyba je i v další aktivitě „Těžnice a výšky – otázky“. Nejedná se však pouze o chybu v odpovědi na otázku, ale spíše metodickou chybu v samotném návrhu aktivity. Applet umožňuje žákům měnit pouze velikost úhlu u vrcholu  $A$ , délky stran  $AB$  a  $AC$  se nemění a jsou různé. Žáci tak studují vlastnosti trojúhelníku, který může být pravouhlý, avšak nemůže být rovnoramenný. Toto pak posiluje nesprávný poznatek, že v každém pravouhlém trojúhelníku nesplyvá žádná výška s žádnou těžnicí. Přitom v geometrii používají trojúhelník s ryskou, která je vyjádřením této společné těžnice i výšky jistého pravouhlého trojúhelníku.

Bakalářská práce je z hlediska formální úpravy na velmi dobré úrovni. Po stránce pravopisné má práce velmi dobrou úroveň, pouze zcela výjimečně jsem narazil na chyby v interpunkci a překlepy. Z hlediska stylistického jsou myšlenky srozumitelně a jasně formulovány. Práce s odbornou literaturou je na velmi dobré úrovni. Drobnou chybu v úpravě diplomové práce nacházím v seznamu literatury, kde je využit nejednotný způsob formátování bibliografických záznamů, dokonce i v rámci jediného záznamu.

Na studentku mám tyto úkoly a otázky:

1. Charakterizujte množinu všech bodů roviny stejně vzdálených od ramen daného úhlu. Využijte např. publikaci [4] z vašeho seznamu literatury.
2. Na straně 31 je uvedeno: „*Na základě studií byl prokázán rozvoj synteticko-geometrických způsobů myšlení, spojení se se ztělesněnou matematikou a spojení se s tažením pojmu dynamicko-synteticko-geometrického myšlení prostřednictvím dynamické geometrie.*“ Prosím o objasnění toho, co podtržená část vyjadřuje.
3. Na straně 46 v obrázku 37 mne zaujalo, že dva ze tří žáků, kteří jediní před aktivitou správně charakterizovali výšky, se po aktivitě v Geogebře odklonili od této možnosti k nesprávné odpovědi. Jak jste tuto skutečnost reflektovala?
4. Které z vámi navržených appletů považujete za jedinečné ve srovnání s těmi zmíněnými v rešerši v kapitole 2.3?

Vzhledem k výše uvedenému doporučuji tuto bakalářskou práci k obhajobě a navrhuji ji hodnotit známkou **C**.

V Hradci Králové dne 26. května 2023

Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta

t: +420 493 332 842, e: tomas.zuscak@uhk.cz

Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové, www.uhk.cz/prf