



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

# ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ OHYBOVÉHO KMITÁNÍ NOSNÍKŮ

EXACT SOLUTION OF BENDING VIBRATIONS OF BEAMS

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MATĚJ MACHOŇ

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. MICHAL HAVLÁSEK

BRNO 2019



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Matěj Machoň**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Michal Havlásek**  
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Analytické řešení ohybového kmitání nosníků

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V běžné technické praxi se setkáváme s problémem stanovení vlastních čísel a vlastních tvarů konstrukcí, které tvoří základní parametry při vyšetřování dynamických vlastností soustav. Cílem této práce je stanovení těchto vlastností analyticky pro zvolený nosník a následné porovnání výsledných hodnot vlastních frekvencí s experimentálními výsledky uvedenými v literatuře.

### Cíle bakalářské práce:

Literární rešerše zabývající se analytickými výpočty kmitání nosníků.

Stanovení vlastních čísel a vlastních tvarů u zvoleného nosníku.

Porovnání výsledných vlastních frekvencí s dříve publikovanými experimentálními výsledky.

### Seznam doporučené literatury:

GONDA, J., Kmitanie pružných telies, Bratislava: Slovenská akadémia vied., 1961, 368 s.

BREPTA, R., TUREK F. a PŮST L., Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles. Česká matice technická (Sobotáles), 1994, 592 s.

RAO, S.S., Mechanical vibrations 5th ed., Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2011, 1084 s.

MEIROVITCH, L. Elements of vibration analysis. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1986, 560 s.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá analytickým určením vlastních frekvencí a vlastních tvarů prizmatického nosníku. Výsledky výpočtu jsou poté porovnány s daty experimentálně zjištěnými na nosníku se stejnou geometrií a vlastnostmi. Na závěr je na základě tohoto srovnání zhodnocen vliv zanedbaných veličin na přesnost výpočtu.

Výsledkem jsou vztahy pro výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů nosníku. Pro výpočet je využito kromě standartního matematického aparátu také takzvaných Krylovových funkcí, které dělají postup značně efektivnějším.

## **Summary**

The bachelor's thesis deals with the analytical determination of eigenfrequencies and mode shapes of the prismatic beam. The solution is compared with the experimental data and validated.

The analytical relations for determination of eigenfrequencies and mode shapes of prismatic beam expressed by basic functions and also by Krylov functions are the results of the thesis.

## **Klíčová slova**

ohybové kmitání, nosník, vlastní frekvence, vlastní tvary, Krylovovy funkce

## **Keywords**

bending vibrations, beam, eigenfrequencies, mode shapes, Krylov functions



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Analytické řešení ohybového kmitání nosníků* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Michala Havláka a v seznamu literatury uvedl všechny použité zdroje.

Matěj Machoň





Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Michalu Havláskovi za velkou ochotu, vstřícnost, cenné rady a velmi dobré vedení práce, které ho stálo spoustu času.

Dále bych chtěl poděkovat Bc. Tomáši Černému za vstřícnost a ochotu při provádění experimentu pro svou práci.

V neposlední řadě bych chtěl také poděkovat své rodině, která mě při studiu a nejen během něj podporuje.

Matěj Machoň



# Obsah

Úvod	12
<b>1 Matematický aparát</b>	<b>13</b>
1.1 Krylovovy funkce . . . . .	13
<b>2 Přístupy k problému</b>	<b>15</b>
2.1 Řešení spojitého pružného tělesa . . . . .	15
2.2 Řešení diskrétních soustav . . . . .	16
<b>3 Výpočtová část</b>	<b>18</b>
3.1 Uvolnění prvku . . . . .	18
3.2 Odvození rovnice kmitání . . . . .	18
3.3 Řešení . . . . .	22
3.3.1 Řešení rovnice kmitání . . . . .	22
3.3.2 Okrajové podmínky . . . . .	23
3.3.3 Vlastní frekvence . . . . .	24
3.3.4 Vlastní tvary . . . . .	27
3.4 Využití Krylovových funkcí . . . . .	30
3.4.1 Vlastní frekvence . . . . .	30
3.4.2 Vlastní tvary . . . . .	31
<b>4 Experimentální část</b>	<b>34</b>
4.1 Modelování okrajových podmínek . . . . .	34
4.2 Měření . . . . .	34
4.3 Zpracování dat . . . . .	35
4.4 Vyhodnocení . . . . .	36
<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>39</b>
<b>Seznam zkratk</b>	<b>40</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>42</b>

# Úvod

Každý pohyb, který se po určitém čase neustále opakuje, se nazývá vibrace respektive kmit [1]. Mechanické kmitání, neboli opakovaný mechanický pohyb tělesa nebo soustavy těles je děj, který je přítomen v široké škále strojírenských aplikací. Proto je důležité s touto problematikou počítat.

Největší nebezpečí spočívá v jevu zvaném rezonance. Tehdy amplitudy výchylek při kmitání dosahují běžně jednotek nebo desítek násobků statické výchylky zatíženého tělesa nebo soustavy těles. K rezonanci dochází tehdy, je-li budící frekvence shodná s vlastní frekvencí tělesa. Vlastní frekvence je fyzikální vlastnost dané součásti, stroje, respektive konstrukce a každé pružné těleso jich má nekonečně mnoho [2]. Nalezení vlastních frekvencí je tedy důležité, protože je nutné zajistit, aby stroj byl provozován na frekvencích dostatečně vzdálených od svých vlastních frekvencí.

Tato práce se zabývá problematikou analytického způsobu určování vlastních frekvencí a vlastních tvarů jednoduchého nosníku. Jelikož analytické určení je i v tomto jednoduchém případě obtížné, je třeba při řešení zavést jisté zjednodušující předpoklady a některé vlivy považovat na dané rozlišovací úrovni za nepodstatné. Porovnáním takto získaných výsledků s experimentálně zjištěnými daty je v dané situaci hodnocen skutečný vliv těchto zjednodušení reality na přesnost výpočtu.

# 1. Matematický aparát

## 1.1. Krylovovy funkce

V mechanice těles postup řešení problému často vede na řešení lineárních diferenciálních rovnic. Při jejich analytickém řešení základními způsoby většinou obdržíme výslednou funkci ve tvaru

$$y = e^{\sigma + i\tau}$$

To lze pomocí Eulerova vzorce (1.1) převést na kombinaci trigonometrických, popřípadě i hyperbolických funkcí a dále pracovat s nimi.

$$e^{i\tau} = \cos(\tau) + i \sin(\tau) \quad (1.1)$$

Zavedení pomocných funkcí, které jsou vhodnými kombinacemi trigonometrických a hyperbolických funkcí, může usnadnit další postup. Krylovovy funkce [3] jsou přesně takové a byly odvozeny právě za tímto účelem. Mají vlastnosti díky kterým velmi zjednodušují práci s řešením.

Jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} S(kx) &= \frac{1}{2} \left( \cosh(kx) + \cos(kx) \right) \\ T(kx) &= \frac{1}{2} \left( \sinh(kx) + \sin(kx) \right) \\ U(kx) &= \frac{1}{2} \left( \cosh(kx) - \cos(kx) \right) \\ V(kx) &= \frac{1}{2} \left( \sinh(kx) - \sin(kx) \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Kde  $x$  je proměnná a  $k$  je konstanta.

Při derivování těchto funkcí si všimněme, že přecházejí jedna ve druhou.

$$\begin{aligned} \frac{dS(kx)}{dx} &= \frac{1}{2}k \left( \sinh(kx) - \sin(kx) \right) = kV(kx) \\ \frac{dT(kx)}{dx} &= \frac{1}{2}k \left( \cosh(kx) + \cos(kx) \right) = kS(kx) \\ \frac{dU(kx)}{dx} &= \frac{1}{2}k \left( \sinh(kx) + \sin(kx) \right) = kT(kx) \\ \frac{dV(kx)}{dx} &= \frac{1}{2}k \left( \cosh(kx) - \cos(kx) \right) = kU(kx) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dále lze vidět chování při vícenásobných derivacích.

$$\begin{aligned} \frac{dS(kx)}{dx} &= kV(kx) \\ \frac{d^2S(kx)}{dx^2} &= k \frac{dV(kx)}{dx} = k^2U(kx) \end{aligned}$$

### 1.1. KRYLOVOVY FUNKCE

$$\begin{aligned}\frac{d^3 S(kx)}{dx^3} &= k^2 \frac{dU(kx)}{dx} = k^3 T(kx) \\ \frac{d^4 S(kx)}{dx^{IV}} &= k^3 \frac{dT(kx)}{dx} = k^4 S(kx)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Pokud do rovnic (1.2) dosadíme  $x = 0$ , potom dostaneme následující:

$$S(0) = 1 \quad T(0) = 0 \quad U(0) = 0 \quad V(0) = 0\tag{1.5}$$

Je vhodné zavést ještě jednu pomocnou funkci, odvozenou v [3], která bude v konečné fázi výpočtu vlastních frekvencí užitečná.

$$W = \cos(kx) \cosh(kx) - 1 = 2 \left( T(kx)V(kx) - U^2(kx) \right)\tag{1.6}$$

## 2. Přístupy k problému

Pro matematický popis kmitání tělesa existují v zásadě dvě základní možnosti. Lze ho popsat jako kontinuum se spojitě rozloženými parametry nebo jako soustavu  $n$  hmotných bodů. Inspirací k takovému rozdělení byla publikace [4].

Tyto přístupy se od sebe zásadně liší a každý má své výhody a nevýhody. Výsledky řešení totožného problému jednou a druhou metodou se mohou mírně lišit. To je způsobeno předpoklady a zjednodušeními, které obě metody obsahují.

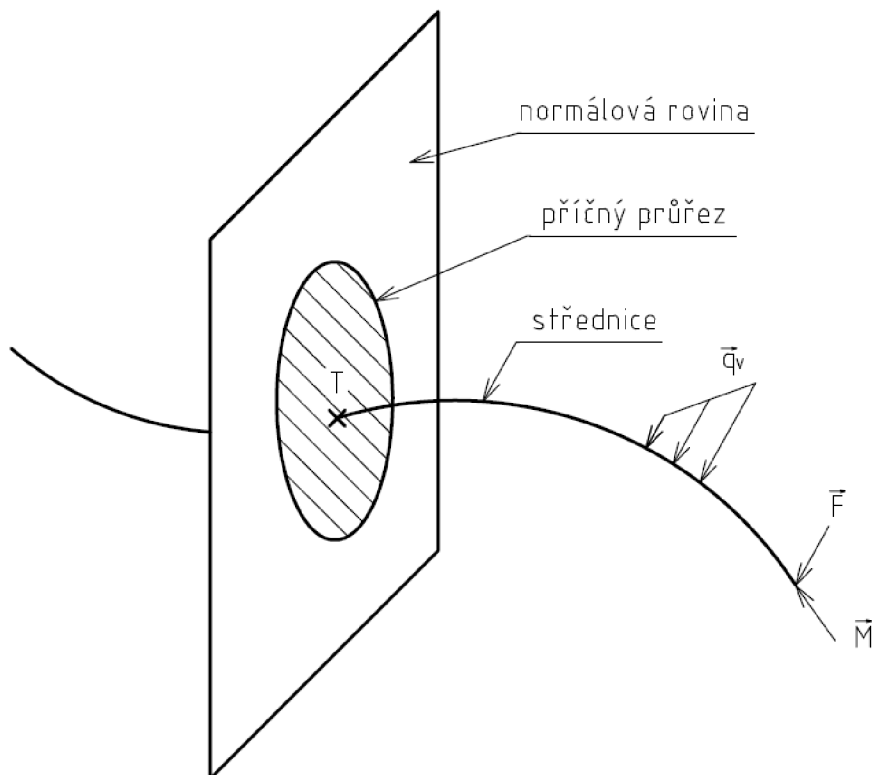
### 2.1. Řešení spojitého pružného tělesa

Pružné těleso je definováno jako jednoduché těleso, které má spojitě rozloženou hmotu po celém svém objemu, může se pružně deformovat a má nekonečně mnoho vlastních frekvencí [2].

Pro těleso obecného tvaru není možné tuto metodu aplikovat. Používá se pouze pro takzvaná elementární tělesa. V této práci je řešeno kmitání nosníku, který tento předpoklad bez problému splňuje.

Parafráze hlavních vlastností nosníku dle definice:

Nosník je tvořen střednicí (křivkou dané délky) a v každém jejím bodě příčným průřezem, přičemž střednice prochází vždy těžištěm příčného průřezu. Střednice zůstává v procesu deformace spojitá a hladká, příčné průřezy vůči ní vždy zůstávají kolmé. Střednice je řádově delší, než je největší rozměr příčného průřezu. Vazby a zatížení interagují pouze se střednicí. Definice a obrázek 2.1 převzaty z [5].



Obrázek 2.1: Střednice a příčný průřez obecného nosníku

## 2.2. ŘEŠENÍ DISKRÉTNÍCH SOUSTAV

Princip popisované metody spočívá v uvolnění elementárního prvku pomocí vhodných řezů tělesem. Prvek je potřeba narozdíl od prosté pružnosti a pevnosti uvolňovat v již deformovaném stavu. Dále se ze silového působení na prvek sestaví silová a momentová pohybová rovnice. To lze provést například pomocí d'Alambertova principu. V těchto rovnicích ovšem vystupují různé členy, derivované podle více proměnných. Proto je nutné doplnit další rovnice známé z obecné PP a pomocí nich získat jednu lineární parciální diferenciální rovnici. Nalezením integrálu dané rovnice (analyticky nebo numericky) lze získat řešení, které představuje průhybovou čáru v závislosti na čase a délkové souřadnici.

Chceme-li obdržet řešení v uzavřeném tvaru, musíme zanedbat různé vlivy, jako například vnitřní tlumení materiálu, vnější tlumení, vliv rotační setrvačnosti elementu a další. Popřípadě řešit rovnici s uvážením pouze některých.

Analytickým řešením rovnice v plném tvaru se valná většina pramenů nezabývá. To je dáno skutečností, že při enormním nárůstu složitosti a časové náročnosti řešení dochází většinou pouze k zanedbatelnému zpřesnění výsledku oproti zjednodušenému řešení.

## 2.2. Řešení diskretních soustav

Popis pomocí diskretní soustavy s  $n$  stupni volnosti, někdy označované jako soustava se soustředěnými parametry, je založen na jiném principu.

Těleso je nutno diskretizovat a řešit jako soustavu hmotných bodů a tuhých těles. Pokud to situace dovoluje, používá se z důvodu jednoduchosti lineární popis. Nosník je jednoduché těleso. Tudíž za předpokladu Hookeovského materiálu a lineárních okrajových podmínek není žádný důvod, zavádět nelinearity. Lineární soustava je charakterizována následujícím způsobem.

„Lineární soustavy se soustředěnými parametry (diskretní) se vyznačují těmito jednoduchými (diskretními) prvky

- hmotnými body nebo tuhými hmotnými tělesy, jež jsou nositelkami kinetické energie
- nehmotnými pružinami, jež jsou nositelkami potenciální energie
- nehmotnými tlumiči, jež disipují energii, tj. mění mechanickou energii v teplo“ [4]

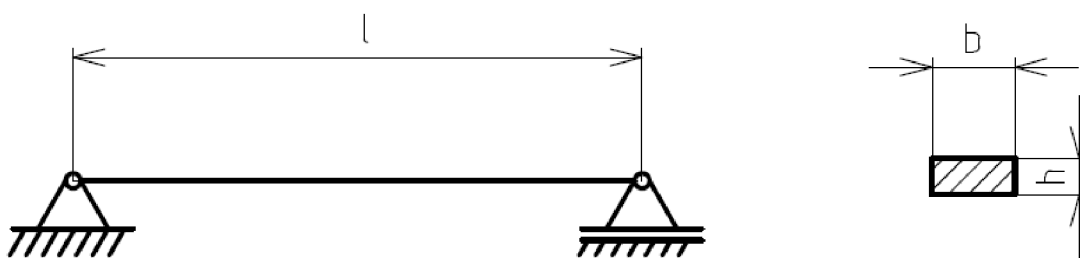
Těleso je třeba vhodně diskretizovat tak, aby výsledná soustava měla co nejpodobnější dynamické vlastnosti, jako reálná součást. Jednoduchý nosník (viz obrázek 2.2) se dá modelovat kupříkladu takto (viz obrázek 2.3, překresleno dle [4]).

Kde  $l$ ,  $b$ ,  $h$  jsou rozměry nosníku a  $m_i$  jsou hmotnosti jednotlivých hmotných bodů. Lze říci, že čím více stupňů volnosti bude zahrnuto do výpočtu, tím více bude výsledek odpovídat realitě. Ovšem za cenu rostoucí náročnosti řešení.

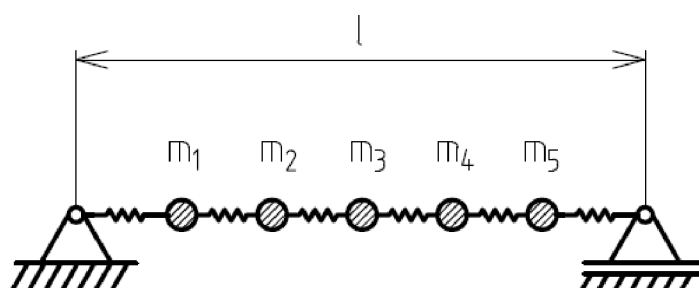
Následuje sestavení pohybových rovnic soustavy. Tyto pohybové rovnice jsou obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Jejich počet je stejný jako počet stupňů volnosti. Při řešení volného kmitání z rovnic zároveň obdržíme stejné množství vlastních frekvencí a konstant, určujících vlastní tvary.

Tato metoda má tedy tu výhodu, že cesta od rovnic k výsledku je snazší. Řešení systémů obyčejných lineárních diferenciálních rovnic lze provést jak analyticky, tak numericky, přičemž numerické řešení pomocí vhodného softwaru bývá u větších soustav rychlejší, pohodlnější a s dobrou přesností. Zásadní problém je tedy vytvoření soustavy





Obrázek 2.2: Nosník před diskretizací



Obrázek 2.3: Diskretizovaný nosník

vhodně modelující zkoumané těleso, což má poté dominantní vliv na přesnost získaného řešení.

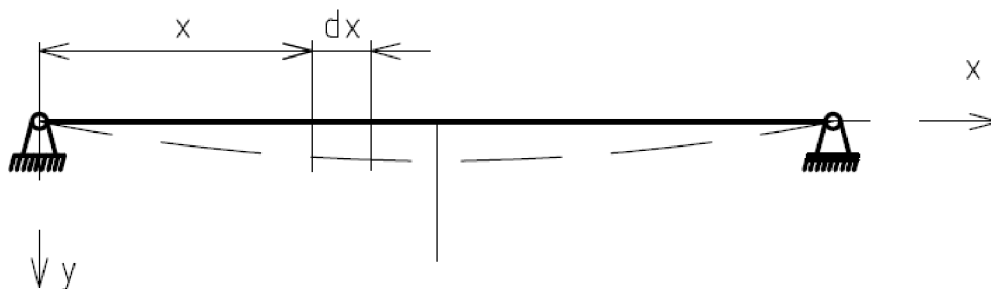
### 3. Výpočtová část

Tato práce se věnuje analytickému řešení ohybového kmitání nosníků a to konkrétně volnému kmitání za účelem nalezení vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Samotné odvození a výpočet budou provedeny pro nosník jako spojitě pružné těleso, čili metodou popsanou v kapitole 2.1. Tento přístup je založen na následujících předpokladech (předpoklady lineární pružnosti a pevnosti [5]), za kterých je celé řešení odvozeno a jejichž splnění je na konci každého konkrétního výpočtu nutno ověřit:

- Deformace jsou malé
- Pracujeme s lineárně pružným Hookeovským materiálem
- Jsou splněny prutové předpoklady
- Vyskytují se zde pouze lineární okrajové podmínky – vazby

#### 3.1. Uvolnění prvku

Z nosníku uvolníme dvěma řezy elementární prvek (viz obrázek 3.1, překreslen dle [2]).



Obrázek 3.1: Schema řezů nosníkem

Na tomto prvku poté zavedeme elementární silové a momentové působení (viz obrázek 3.2, překreslen dle [1]). Předpokládá se, že rovina  $xy$  je rovina kmitavého pohybu.

$F(x; t)$  je posouvající síla,  $M(x; t)$  značí ohybový moment,  $y(x; t)$  průhyb,  $\beta(x; t)$  úhel natočení střednice,  $q_{vy}(x; t)$  složka liniového silového zatížení ve směru  $y$  a  $m_v(x; t)$  liniové momentové vnější zatížení.

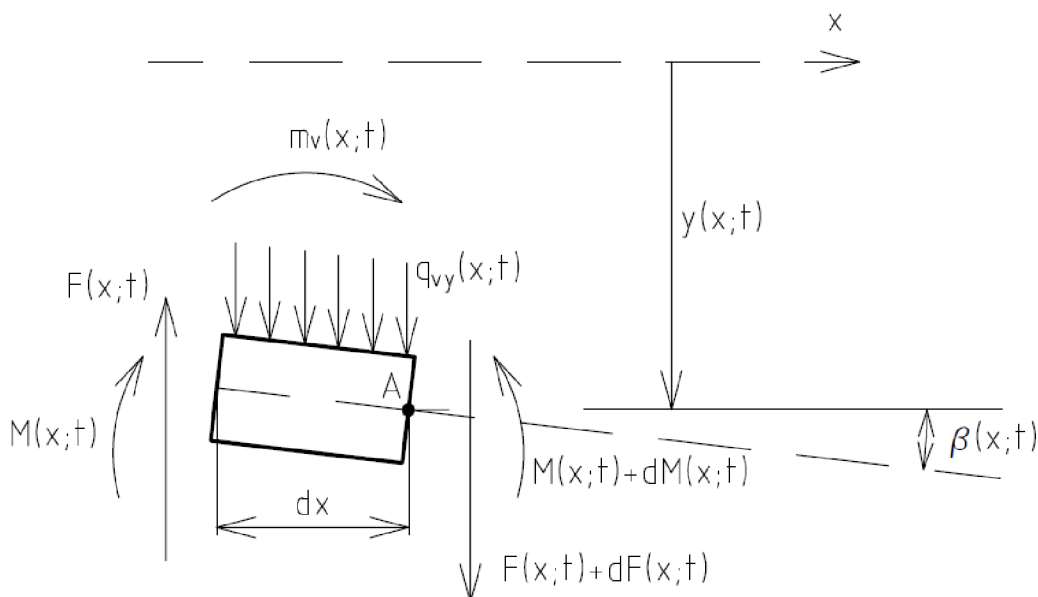
#### 3.2. Odvození rovnice kmitání

Nyní lze na základě d'Alambertova principu sesatvit pohybové rovnice. Výpočet je popsán dle odvození v [2] a [1].

Silová pohybová rovnice ve směru  $y$ :

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + q_v dx - F - \rho Z dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa dx \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

Člen  $\rho Z dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  vyjadřuje setrvačnou sílu. Skládá se z hmotnosti dané  $\rho Z dx$ , která je násobena zrychlením  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Člen  $\kappa dx \frac{\partial y}{\partial t}$  vyjadřuje vliv vnějšího tlumení.  $\kappa dx$  je koeficient



Obrázek 3.2: Uvolnění prvku

tlumení elementu a je násoben rychlostí, danou  $\frac{\partial y}{\partial t}$ .  $\rho$  je hustota materiálu a předpokládá se konstantní,  $Z(x)$  je obsah příčného průřezu a  $\kappa$  je měrný délkový koeficient vnějšího tlumení, který se taktéž předpokládá konstantní.

Po vynásobení členem  $\frac{1}{dx}$  dostaneme následující.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + q_v - \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Přeuspořádání členů vede na základní tvar

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial y}{\partial t} = q_v \quad (3.3)$$

Momentová pohybová rovnice k bodu A:

$$F dx + M - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx - \frac{q_v (dx)^2}{2} + m_v dx - I_z dx \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

Kde člen  $I_z dx \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$  vyjadřuje setrvačný člen v rovnici momentové rovnováhy. Moment setrvačnosti elementu k ose  $z$  daný jako  $I_z dx$  je násoben úhlovým zrychlením  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$ .

Po vynásobení členem  $\frac{1}{dx}$  dostaneme následující.

$$F - \frac{\partial M}{\partial x} + m_v - I_z \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Přičemž člen  $\frac{q_v (dx)^2}{2}$  byl jako jediný druhý diferenciál prostorové souřadnice v rovnici vzhledem ke své velikosti vůči ostatním členům zanedbán a dále se s ním nepočítá.

$$-F + \frac{\partial M}{\partial x} + I_z \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = m_v \quad (3.6)$$

### 3.2. ODVOZENÍ ROVNICE KMITÁNÍ

Následuje doplnění geometrických a konstitutivních vztahů.

Úhel prohnutí nosníku závisí na příčné síle a na ohybovém momentu, přičemž při splnění předpokladů prosté PP lze tyto vlivy dle principu superpozice sečíst.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \gamma + \beta \quad (3.7)$$

Přičemž

$$\gamma = \frac{aF}{GZ} \quad (3.8)$$

Kde  $a$  je koeficient tvaru průřezu, který je konstantní<sup>1</sup> [6], a  $G$  je modul pružnosti ve smyku, taktéž konstantní.

Dále

$$M = -EJ_z \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial t} \right) \quad (3.9)$$

Kde  $E$  je modul pružnosti v tahu, který je konstantní,  $\mu$  je koeficient vnitřního tlumení, taktéž konstantní, a  $J_z(x)$  je osový kvadratický moment příčného průřezu k ose  $z$ , vztažený k těžišti plochy příčného průřezu.

Byl zaveden předpoklad, že vnitřní tlumení je přímo úměrné rychlosti úhlové změny vlivem ohybového momentu, což vyjadřuje výraz vpravo v závorce v rovnici (3.9) [2].

Nyní máme soustavu 5 rovnic o 5 neznámých. Konkrétně rovnice (3.3), (3.6), (3.7), (3.8) a (3.9), ve kterých jsou neznámé  $F$ ,  $M$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $y$ , závislé na čase  $t$  a na souřadnici  $x$ .

Pro další řešení je zaveden předpoklad konstantního příčného průřezu. To znamená, že  $J_z$ ,  $a$ ,  $I_z$  a  $Z$  jsou konstantní.

Rovnici (3.7) lze upravit na tvar

$$\gamma = \frac{\partial y}{\partial x} - \beta \quad (3.10)$$

A dosadit do (3.8).

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \beta = \frac{aF}{GZ} \quad (3.11)$$

Z čehož lze vyjádřit sílu  $F$ .

$$F = \frac{GZ}{a} \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \beta \right) \quad (3.12)$$

Nyní je vyjádřena síla a moment v závislosti na průhybu  $y$  a úhlu natočení  $\beta$ . Ty lze se svými derivacemi podle  $x$  dosadit do (3.3) a (3.6).

Derivace vypadají takto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{GZ}{a} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -EJ_z \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial t} \right) \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>Pokud průřez zůstává po délce konstantní nebo alespoň podobný, je i  $a$  konstantní. Například pro kruhový příčný průřez je  $a_0 = 1,11$ , pro obdélník  $a_{\#} = 1,2$

Dosazení.

$$-\frac{GZ}{a} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial y}{\partial t} = q_v \quad (3.15)$$

$$-\frac{GZ}{a} \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \beta \right) - EJ_z \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial t} \right) + I_z \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = m_v \quad (3.16)$$

Rovnice (3.15) a (3.16) tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých,  $\beta$  a  $y$ .

Rovnici (3.16) lze zderivovat podle  $x$ .

$$-\frac{GZ}{a} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - EJ_z \left( \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^4 \beta}{\partial x^3 \partial t} \right) + I_z \frac{\partial^3 \beta}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial m_v}{\partial x} \quad (3.17)$$

Je vidět, že v rovnici (3.17) se proměnná  $\beta$  vyskytuje pouze v derivacích. Proto je vhodné tyto derivace vyjádřit a dosadit.

Z rovnice (3.15) lze vyjádřit člen  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  a derivovat jej.

$$\frac{GZ}{a} \frac{\partial \beta}{\partial x} = q_v + \frac{GZ}{a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{a}{GZ} \left( q_v - \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} = \frac{a}{GZ} \left( \frac{\partial^2 q_v}{\partial x^2} - \rho Z \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \kappa \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial t^2} = \frac{a}{GZ} \left( \frac{\partial^2 q_v}{\partial t^2} - \rho Z \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - \kappa \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \right) + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^3 \partial t} = \frac{a}{GZ} \left( \frac{\partial^3 q_v}{\partial x^2 \partial t} - \rho Z \frac{\partial^5 y}{\partial x^2 \partial t^3} - \kappa \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} \quad (3.22)$$

Dosazení do rovnice (3.17).

$$\begin{aligned} & -\frac{GZ}{a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{GZ}{a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q_v - \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{EJ_z a}{GZ} \left( \frac{\partial^2 q_v}{\partial x^2} - \rho Z \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \kappa \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) - \\ & - EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\mu EJ_z a}{GZ} \left( \frac{\partial^3 q_v}{\partial x^2 \partial t} - \rho Z \frac{\partial^5 y}{\partial x^2 \partial t^3} - \kappa \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - \mu EJ_z \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \\ & + \frac{I_z a}{GZ} \left( \frac{\partial^2 q_v}{\partial t^2} - \rho Z \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - \kappa \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \right) + I_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial m_v}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Po lehké úpravě má následující tvar.

$$\begin{aligned} & -\mu EJ_z \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\mu EJ_z a \rho}{Z} \frac{\partial^5 y}{\partial x^2 \partial t^3} - EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left( \frac{EJ_z a \rho}{G} + \frac{\mu EJ_z a \kappa}{GZ} + I_z \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \\ & - \frac{I_z a \rho}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{EJ_z a \kappa}{GZ} \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} - \frac{I_z a \kappa}{GZ} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} - \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\mu EJ_z a}{GZ} \frac{\partial^3 q_v}{\partial x^2 \partial t} - \\ & - \frac{I_z a}{GZ} \frac{\partial^2 q_v}{\partial t^2} + \frac{EJ_z a}{GZ} \frac{\partial^2 q_v}{\partial x^2} - q_v + \frac{\partial m_v}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Rovnice (3.24) je rovnice kmitání prizmatického nosníku s konstantní hustotou v plném tvaru.

### 3.3. ŘEŠENÍ

Protože cílem je zjistit vlastní frekvence a vlastní tvary nosníku, bude dále řešeno jeho volné netlumené kmitání. Z toho plyne, že parametry tlumení a budící silové a momentové působení budou dále nulové. Tedy  $\kappa = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $q_v = 0$  a  $m_v = 0$ . Pokud bude zanedbán vliv příčné síly způsobující namáhání smykem ( $a = 0$ ) a rotační setrvačnosti elementu ( $I_z = 0$ ), zbyde rovnice ve zjednodušeném tvaru.

$$EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho Z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.25)$$

Tu je dobré upravit na tvar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\xi^4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (3.26)$$

$$\text{Kde } \xi^4 = \frac{\rho Z}{EJ_z}$$

## 3.3. Řešení

### 3.3.1. Řešení rovnice kmitání

Hlavní myšlenkou při hledání integrálu rovnice (3.26) je předpoklad řešení ve tvaru součinu časové a polohové funkce [2]. Tomu lze také rozumět tak, že každému bodu trvá kmit stejně dlouho.

To vyjadřuje výraz

$$y(x, t) = Y(x) \cdot K(t) \quad (3.27)$$

$Y(x)$  představuje vlastní tvar nosníku (průhyb) a  $K(t)$  časový průběh kmitání.

Dle [4] je z dynamiky obecně známo, že časový průběh volného netlumeného kmitání se dá vyjádřit výrazem

$$K(t) = e^{\omega t} \quad (3.28)$$

Kde  $t$  je čas a  $\omega$  je vlastní úhlová frekvence kmitání. Předpokládané řešení má tedy tvar

$$y(x, t) = Y(x) \cdot e^{\omega t} \quad (3.29)$$

Poté se nabízí tuto rovnici zderivovat a dosadit do (3.26).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y\omega^2 e^{\omega t} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = e^{\omega t} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \quad (3.31)$$

Dosazení

$$Y\omega^2 e^{\omega t} + \frac{1}{\xi^4} e^{\omega t} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \quad (3.32)$$

Následující úprava vede na tvar

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \xi^4 \omega^2 Y = 0 \quad (3.33)$$

Člen  $\xi^4\omega^2$  je výhodné substituuovat následujícím způsobem.

$$\xi^4\omega^2 = k^4 = \frac{\rho Z\omega^2}{EJ_z} \quad (3.34)$$

Rovnice (3.33) tedy přejde na tvar

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + k^4 Y = 0 \quad (3.35)$$

Což už je obyčejná lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Dá se ukázat, že řešení rovnice (3.35) má tvar

$$Y(x) = A \sinh(kx) + B \cosh(kx) + C \sin(kx) + D \cos(kx) \quad (3.36)$$

Celkové řešení má tedy tvar

$$y(x, t) = \left( A \sinh(kx) + B \cosh(kx) + C \sin(kx) + D \cos(kx) \right) e^{\omega t} \quad (3.37)$$

Kde  $A, B, C, D$ , jsou konstanty závislé na okrajových podmínkách každé konkrétní úlohy.

### 3.3.2. Okrajové podmínky

Řešeno bude volné netlumené kmitání volně uloženého prizmatického nosníku o délce  $l$ .

Dle [2] je na tomto tělese posouvající síla třetí derivací průhybu podle délkové souřadnice a ohybový moment druhou derivací průhybu podle délkové souřadnice.

Pro volně uložený nosník mají okrajové podmínky tvar

$$\begin{aligned} x = 0 \quad F = 0 & \Rightarrow \frac{\partial^3 Y(0)}{\partial x^3} = 0 \\ & M = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 Y(0)}{\partial x^2} = 0 \\ x = l \quad F = 0 & \Rightarrow \frac{\partial^3 Y(l)}{\partial x^3} = 0 \\ & M = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 Y(l)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

Je vhodné si předpřipravit derivace rovnice (3.36).

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = Ak^2 \sinh(kx) + Bk^2 \cosh(kx) - Ck^2 \sin(kx) - Dk^2 \cos(kx) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = Ak^3 \cosh(kx) + Bk^3 \sinh(kx) - Ck^3 \cos(kx) + Dk^3 \sin(kx) \quad (3.39)$$

### 3.3. ŘEŠENÍ

Dosazení okrajových podmínek do těchto derivací vede na následující soustavu rovnic.

$$Ak^3 - Ck^3 = 0 \quad (3.40)$$

$$Bk^2 - Dk^2 = 0 \quad (3.41)$$

$$Ak^3 \cosh(kl) + Bk^3 \sinh(kl) - Ck^3 \cos(kl) + Dk^3 \sin(kl) = 0 \quad (3.42)$$

$$Ak^2 \sinh(kl) + Bk^2 \cosh(kl) - Ck^2 \sin(kl) - Dk^2 \cos(kl) = 0 \quad (3.43)$$

Tato soustava se dá zapsat maticově.

$$\begin{pmatrix} k^3 & 0 & -k^3 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 & -k^2 \\ k^3 \cosh(kl) & k^3 \sinh(kl) & -k^3 \cos(kl) & k^3 \sin(kl) \\ k^2 \sinh(kl) & k^2 \cosh(kl) & -k^2 \sin(kl) & -k^2 \cos(kl) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Respektive

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

Kde  $\mathbf{A}$  je matice soustavy,  $\mathbf{x}$  vektor neznámých a  $\mathbf{0}$  vektor pravých stran.

Aby taková soustava měla netriviální řešení, musí být splněna následující podmínka:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.46)$$

Což se nazývá frekvenční rovnice, ze které již lze obdržet konkrétní hodnoty vlastních frekvencí nosníku.

#### 3.3.3. Vlastní frekvence

Rovnice (3.46) má následující řešení.

$$\begin{aligned} 0 = & k^2 \begin{vmatrix} k^3 & -k^3 & 0 \\ k^3 \cosh(kl) & -k^3 \cos(kl) & k^3 \sin(kl) \\ k^2 \sinh(kl) & -k^2 \sin(kl) & -k^2 \cos(kl) \end{vmatrix} - \\ & - k^2 \begin{vmatrix} k^3 & 0 & -k^3 \\ k^3 \cosh(kl) & -k^3 \sinh(kl) & -k^3 \cos(kl) \\ k^2 \sinh(kl) & k^2 \cosh(kl) & -k^2 \sin(kl) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Čili

$$\begin{aligned} & \left( k^8 \cos^2(kl) - k^8 \sinh(kl) \sin(kl) + k^8 \sin^2(kl) - k^8 \cosh(kl) \cos(kl) \right) k^2 - \\ & - \left( -k^8 \sinh(kl) \sin(kl) - k^8 \cosh^2(kl) + k^8 \sinh^2(kl) + \right. \\ & \left. + k^8 \cosh(kl) \cos(kl) \right) k^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dále pak

$$2k^{10} \left( 1 - \cosh(kl) \cos(kl) \right) = 0 \quad (3.49)$$

Z čehož plyne

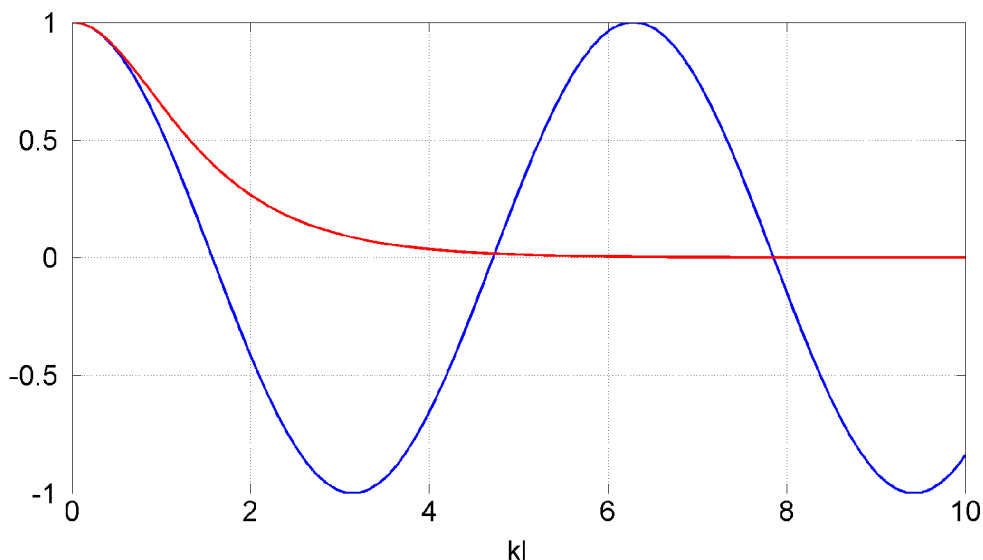
$$1 = \cosh(kl) \cos(kl) \quad (3.50)$$



Nebo také

$$\cos(kl) = \frac{1}{\cosh(kl)} \quad (3.51)$$

Což se dá graficky interpretovat následujícím způsobem (dle [7]).



Obrázek 3.3: Grafické znázornění rovnice (3.51)

Numerické řešení rovnice je

$$k_1 l = 1,506\pi \quad (3.52)$$

$$k_2 l = 2,5\pi \quad (3.53)$$

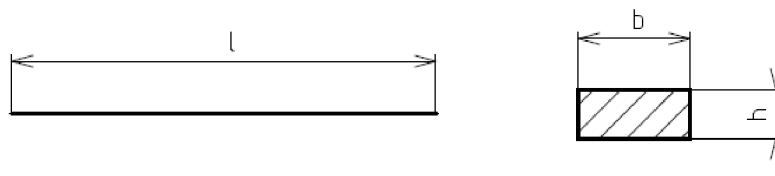
Jelikož funkce  $\frac{1}{\cosh(kl)}$  se rychle blíží k nule, další řešení už lze s dostatečnou přesností psát ve tvaru

$$\cos(k_n l) = 0 \quad (3.54)$$

Respektive

$$k_n l = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad ; \quad n > 2 \quad (3.55)$$

V další fázi již bude počítán konkrétní prismatický nosník o dané délce a obdélníkovém příčném průřezu, viz obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: Geometrie nosníku a jeho příčný průřez

Kde

$$l = 550 \text{ mm} \quad b = 100 \text{ mm} \quad h = 6 \text{ mm} \quad (3.56)$$

### 3.3. ŘEŠENÍ

$J_z$  a  $Z$  mají hodnoty

$$Z = bh = 600 \text{ mm}^2 \quad (3.57)$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 1800 \text{ mm}^4 \quad (3.58)$$

Materiál je konstrukční ocel s následujícími vlastnostmi

$$E = 206 \text{ GPa} \quad \rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Pro rekapitulaci

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho Z}{E J_z}} \omega^2$$

Výsledný vzorec pro výpočet vlastní úhlové frekvence frekvence nosníku je tedy dle rovnic (3.52) až (3.55)

$$\omega_1 = 1,506^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.59)$$

$$\omega_2 = 2,5^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.60)$$

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.61)$$

Pro následný přepočít na vlastní frekvenci vždy platí

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (3.62)$$

Tedy vlastní frekvence tohoto nosníku jsou dány vztahy

$$f_1 = 1,506^2 \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.63)$$

$$f_2 = 2,5^2 \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.64)$$

$$f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{E J_z}{\rho Z}} \quad (3.65)$$

A výsledkem je

$$f_1 = 104,5 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 288,0 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 564,4 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 933,0 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 1393,7 \text{ Hz}$$

### 3.3.4. Vlastní tvary

Vlastní tvar nosníku představuje výraz (3.36), tedy  $n$ -tý vlastní tvar představuje výraz

$$Y_n(x) = A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x) + C_n \sin(k_n x) + D_n \cos(k_n x) \quad (3.66)$$

Přičemž konstanty  $A_n$  až  $D_n$  lze obdržet řešením soustavy (3.45). Výrazy  $k_n l$  z rovnic (3.52) až (3.55) představují charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$ . Proto budou dále značeny takto

$$k_n l = \lambda_n \quad (3.67)$$

Charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou tedy

$$\lambda_1 = 1,506\pi \quad (3.68)$$

$$\lambda_2 = 2,5\pi \quad (3.69)$$

$$\lambda_3 = 3,5\pi \quad (3.70)$$

$$\lambda_4 = 4,5\pi \quad (3.71)$$

$$\lambda_5 = 5,5\pi \quad (3.72)$$

Z prvních dvou rovnic soustavy (3.45) plyne

$$A_n = C_n \quad (3.73)$$

$$B_n = D_n \quad (3.74)$$

Následující dvě se poté dají upravit na tvar

$$C_n \left( \cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n) \right) + D_n \left( \sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n) \right) = 0 \quad (3.75)$$

$$C_n \left( \sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n) \right) + D_n \left( \cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n) \right) = 0 \quad (3.76)$$

Z rovnice (3.75) lze vyjádřit  $C_n$

$$C_n = -D_n \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \quad (3.77)$$

A dosazením do (3.76) vznikne

$$-D_n \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \left( \sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n) \right) + D_n \left( \cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n) \right) = 0 \quad (3.78)$$

Neboli

$$D_n \left[ \left( \cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n) \right) - \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \left( \sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n) \right) \right] = 0 \quad (3.79)$$

$$D_n \left[ \frac{\cosh^2(\lambda_n) - 2 \cosh(\lambda_n) \cos(\lambda_n) + \cos^2(\lambda_n) - \sinh^2(\lambda_n) + \sin^2(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \right] = 0 \quad (3.80)$$

$$D_n \left( \frac{\cosh(\lambda_n) \cos(\lambda_n) - 1}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \right) = 0 \quad (3.81)$$

### 3.3. ŘEŠENÍ

Výraz v závorce v rovnici (3.81) je dle frekvenční rovnice roven nule. Proto  $D_n$  může být libovolným parametrem. Potom tedy máme výsledek v závislosti na parametru  $p$ .

$$A_n = -p \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \quad (3.82)$$

$$B_n = p \quad (3.83)$$

$$C_n = -p \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \quad (3.84)$$

$$D_n = p \quad (3.85)$$

Pro další použití je ještě vhodné vyjádřit hodnoty  $k_n$ . Z rovnice (3.67) plyne

$$k_n = \frac{\lambda_n}{l} \quad (3.86)$$

A proto

$$k_1 = 8,60 \quad (3.87)$$

$$k_2 = 14,28 \quad (3.88)$$

$$k_3 = 19,99 \quad (3.89)$$

$$k_4 = 25,70 \quad (3.90)$$

$$k_5 = 31,42 \quad (3.91)$$

Výsledný vzorec pro výpočet vlastních tvarů je po dosazení rovnic (3.82) až (3.85) do rovnice (3.66)

$$\begin{aligned} Y_n(x) = & - p \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \sinh(k_n x) + p \cosh(k_n x) - \\ & - p \frac{\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)} \sin(k_n x) + p \cos(k_n x) \end{aligned} \quad (3.92)$$

Volba  $p = 1$  a dosazení příslušných konstant  $\lambda_n$  a  $k_n$  vede pro jednotlivé vlastní frekvence na následující vlastní tvary.

$$Y_1(x) = -0,98 \sinh(8,60x) + \cosh(8,60x) - 0,98 \sin(8,60x) + \cos(8,60x) \quad (3.93)$$

$$Y_2(x) = -\sinh(14,28x) + \cosh(14,28x) - \sin(14,28x) + \cos(14,28x) \quad (3.94)$$

$$Y_3(x) = -\sinh(19,99x) + \cosh(19,99x) - \sin(19,99x) + \cos(19,99x) \quad (3.95)$$

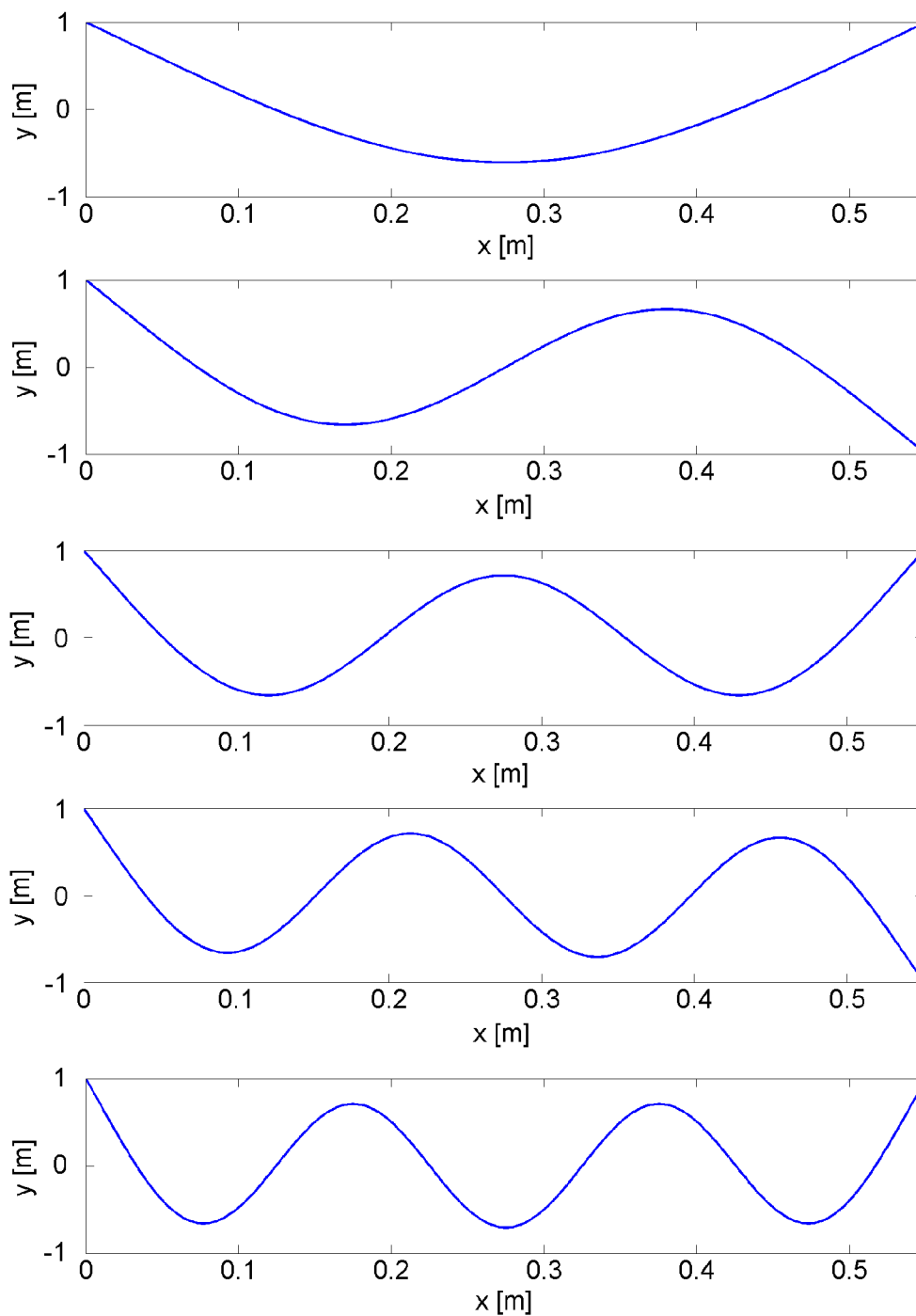
$$Y_4(x) = -\sinh(25,70x) + \cosh(25,70x) - \sin(25,70x) + \cos(25,70x) \quad (3.96)$$

$$Y_5(x) = -\sinh(31,42x) + \cosh(31,42x) - \sin(31,42x) + \cos(31,42x) \quad (3.97)$$

Obrázek 3.5 představuje postupně tyto vlastní tvary od prvního po pátý.

Na závěr výpočtu je třeba ještě ověřit splnění předpokladů.

- Malé deformace nelze posuzovat, jelikož velikost výchylek vlastních tvarů je závislá na volbě parametru, tedy je normovaná. Konkrétní velikosti výchylek lze obdržet až řešením úlohy uloženého prutu s konkrétním zatížením.



Obrázek 3.5: Prvních pět vlastních tvarů nosníku

- Materiálem je ocel. Pokud nedojde k překročení meze kluzu, předpoklad Hookeovského materiálu byl splněn<sup>1</sup>.
- Prutové předpoklady daný nosník beze všeho splňuje.
- Nosník je uložen volně, tudíž podmínku lineárních okrajových podmínek splňuje.

<sup>1</sup>Při konkrétním výpočtu s daným zatížením by se tato skutečnost měla ověřit. V tomto případě stejně jako u malých deformací nelze posoudit.

### 3.4. Využití Krylovových funkcí

Uvedení do problematiky a značení je uvedeno v kapitole 1.1. Nyní následuje výpočet téhož problému pomocí Krylovových funkcí.

#### 3.4.1. Vlastní frekvence

Jak již bylo zmíněno, vlastní tvar kmitání představuje rovnice (3.36), jenž je obecným řešením rovnice (3.33).

$$Y(x) = A \sinh(kx) + B \cosh(kx) + C \sin(kx) + D \cos(kx)$$

Tuto rovnici je třeba nejprve upravit na tvar

$$Y(x) = OS(kx) + PT(kx) + QU(kx) + RV(kx) \quad (3.98)$$

Konstanty  $A, B, C, D$  a konstanty  $O, P, Q, R$  nejsou totéž a mají mezi sebou vztah, který je vidět v následující rovnici využitím vztahů (1.2).

$$\begin{aligned} 2Y(x) &= O \cosh(kx) + O \cos(kx) + P \sinh(kx) + P \sin(kx) + \\ &+ Q \cosh(kx) - Q \cos(kx) + R \sinh(kx) - R \sin(kx) = \\ &= (P + R) \sinh(kx) + (O + Q) \cosh(kx) + (P - R) \sin(kx) + \\ &+ (O - Q) \cos(kx) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Je dobré zmínit ještě tvar derivací rovnice (3.98).

$$\frac{dY}{dx} = k[OV(kx) + PS(kx) + QT(kx) + RU(kx)] \quad (3.100)$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = k^2[OU(kx) + PV(kx) + QS(kx) + RT(kx)] \quad (3.101)$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = k^3[OT(kx) + PU(kx) + QV(kx) + RS(kx)] \quad (3.102)$$

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = k^4[OS(kx) + PT(kx) + QU(kx) + RV(kx)] \quad (3.103)$$

Okrajové podmínky pro  $x = 0$  jsou

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = 0 \quad (3.105)$$

Vztahy (1.5) říkají, že

$$S(0) = 1 \quad T(0) = 0 \quad U(0) = 0 \quad V(0) = 0$$

Proto

$$k^2 Q = 0 \quad (3.106)$$

$$k^3 R = 0 \quad (3.107)$$

Tedy  $Q = R = 0$ .

Poté pro  $x = l$  platí

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = k^2[OU(kl) + PV(kl)] = 0 \quad (3.108)$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = k^3[OT(kl) + PU(kl)] = 0 \quad (3.109)$$

Frekvenční rovnice má tedy tvar

$$U^2(kl) - V(kl)T(kl) = 0 \quad (3.110)$$

Což je s využitím rovnice (1.6) ekvivalentní se zápisem

$$W = 0 \quad (3.111)$$

Tedy

$$\cos(kl) \cosh(kl) - 1 = 0 \quad (3.112)$$

Řešením této rovnice jsou opět charakteristická čísla, jenž jsou dána výrazy

$$k_1l = 1,506\pi \quad (3.113)$$

$$k_2l = 2,5\pi \quad (3.114)$$

$$k_nl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad ; \quad n > 2 \quad (3.115)$$

Z nichž lze stejným způsobem jako v minulé podkapitole dle vztahů (3.63) až (3.65) vyčíslit vlastní frekvence nosníku.

$$f_1 = 104,5 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 288,0 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 564,4 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 933,0 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 1393,7 \text{ Hz}$$

### 3.4.2. Vlastní tvary

Vlastní tvar, náležící n-té vlastní frekvenci obecně popisuje vztah

$$Y_n(x) = O_nS(k_nx) + P_nT(k_nx) + Q_nU(k_nx) + R_nV(k_nx) \quad (3.116)$$

Kde konstanty  $Q_n, R_n$  jsou rovny nule a konstanty  $O_n, P_n$  lze obdržet pro jednotlivé  $k_nl$  řešením rovnic (3.108) a (3.109).

Výrazy  $k_nl$  jsou dále značeny následujícím způsobem.

$$k_nl = \lambda_n \quad (3.117)$$

### 3.4. VYUŽITÍ KRYLOVOVÝCH FUNKCÍ

Tedy

$$\lambda_1 = 1,506\pi \quad (3.118)$$

$$\lambda_2 = 2,5\pi \quad (3.119)$$

$$\lambda_3 = 3,5\pi \quad (3.120)$$

$$\lambda_4 = 4,5\pi \quad (3.121)$$

$$\lambda_5 = 5,5\pi \quad (3.122)$$

Z rovnice (3.109) lze vyjádřit  $P$  a dosadit do rovnice (3.108)

$$-O_n \frac{T(\lambda_n)}{U(\lambda_n)} = P_n \quad (3.123)$$

$$O_n U(\lambda_n) - O_n \frac{T(\lambda_n)}{U(\lambda_n)} V(\lambda_n) = 0 \quad (3.124)$$

Což úpravou vede na tvar

$$O_n \frac{U^2(\lambda_n) - V(\lambda_n)T(\lambda_n)}{U(\lambda_n)} = 0 \quad (3.125)$$

Výraz v čitateli rovnice (3.125) je pro charakteristická čísla  $\lambda_n$  roven nule. Tedy  $O_n$  je libovolný parametr.

Poté

$$O_n = p \quad (3.126)$$

$$P_n = -p \frac{T(\lambda_n)}{U(\lambda_n)} \quad (3.127)$$

Z rovnice (3.117) plyne

$$k_n = \frac{\lambda_n}{l} \quad (3.128)$$

Proto

$$k_1 = 8,60 \quad (3.129)$$

$$k_2 = 14,28 \quad (3.130)$$

$$k_3 = 19,99 \quad (3.131)$$

$$k_4 = 25,70 \quad (3.132)$$

$$k_5 = 31,42 \quad (3.133)$$

Vztah pro vlastní tvary nosníku je po dosazení konstant  $O_n$ ,  $P_n$ ,  $Q_n$  a  $R_n$  do rovnice (3.116) následující.

$$Y_n(x) = pS(k_n x) - p \frac{T(\lambda_n)}{U(\lambda_n)} T(k_n x) \quad (3.134)$$

Vlastní tvary nosníku, při volbě  $p = 1$  a dosazení  $\lambda_n$ ,  $k_n$  tedy jsou

$$Y_1(x) = S(8,60x) - 0,98T(8,60x) \quad (3.135)$$

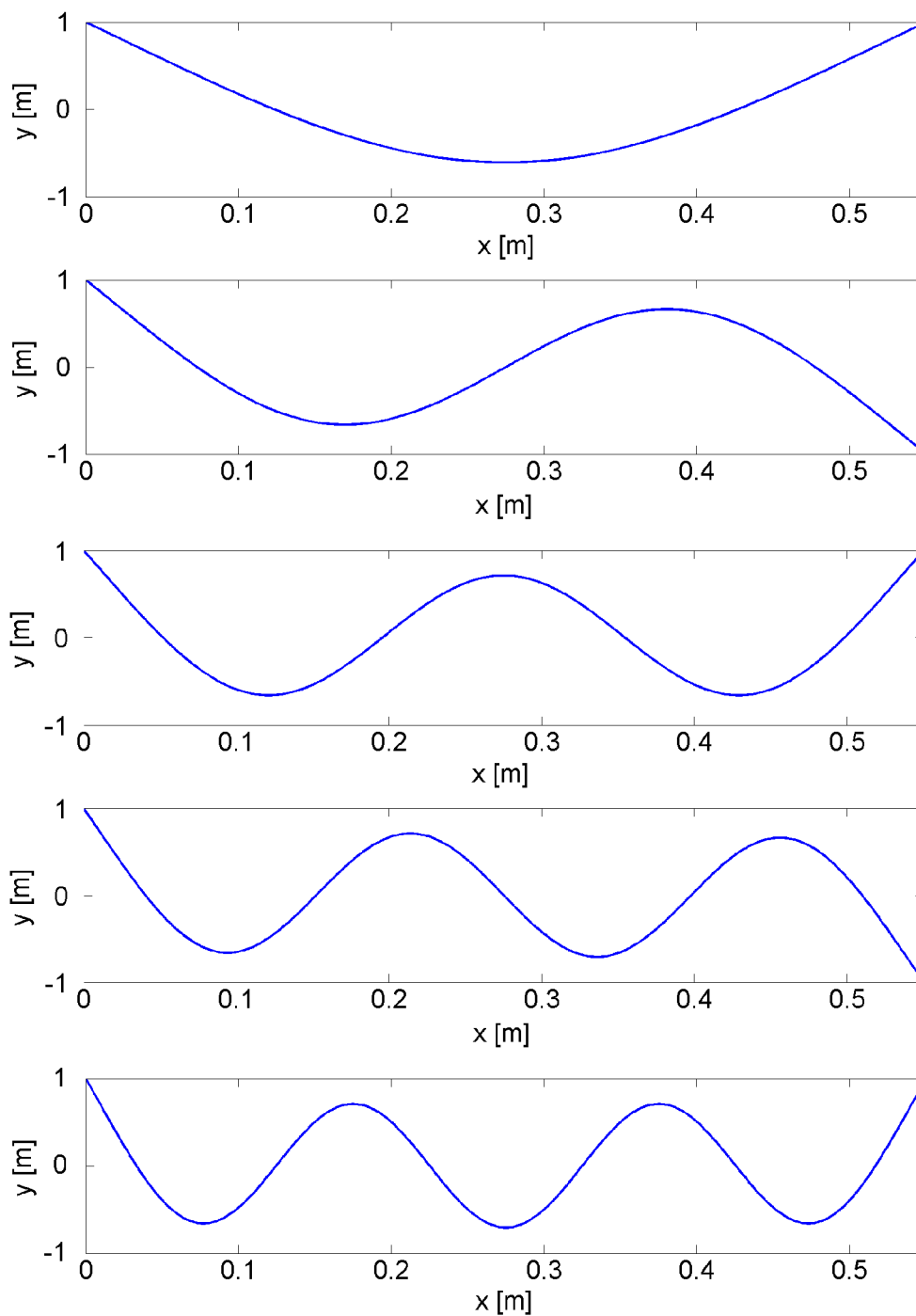
$$Y_1(x) = S(14,28x) - T(14,28x) \quad (3.136)$$

$$Y_1(x) = S(19,99x) - T(19,99x) \quad (3.137)$$

$$Y_1(x) = S(25,70x) - T(25,70x) \quad (3.138)$$

$$Y_1(x) = S(31,42x) - T(31,42x) \quad (3.139)$$





Obrázek 3.6: Prvních pět vlastních tvarů nosníku

Obrázek 3.6 představuje tyto vlastní tvary postupně od prvního po pátý. Ty jsou s ohledem na definici Krylovových funkcí totožné s (3.93) až (3.97).

Je vidět, že s pomocí Krylovových funkcí je řešení frekvenční rovnice i vlastních tvarů kmitání nosníku mnohem kratší, přehlednější a výhodnější.

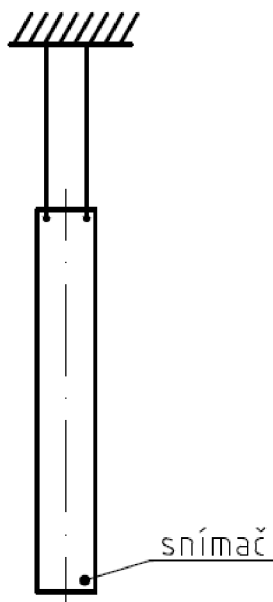
## 4. Experimentální část

Výsledky analytického výpočtu zde budou porovnány s experimentem, provedeným za účelem zjištění vlastních frekvencí nosníku. Experiment proběhl v laboratořích Vysokého učení technického v Brně společně s měřením pro diplomovou práci [8].

### 4.1. Modelování okrajových podmínek

Modelování okrajových podmínek je obecně problematická záležitost. Analytický výpočet byl proveden pro volné netlumené kmitání volně uloženého nosníku. Jeden ze způsobů, jak tyto podmínky v realitě vytvořit, je nosník zavěsit za jeden konec na lano. Ve směrech kolmých ke střednici tedy není žádné přímé omezení pohybu. Vliv působení vlastní tíhy nosníku má v tomto případě na výsledek marginální vliv, a proto jej lze bez větší ztráty přesnosti zanedbat.

Provedení bylo totožné jako v práci [9], což je vidět na obrázku 4.1.



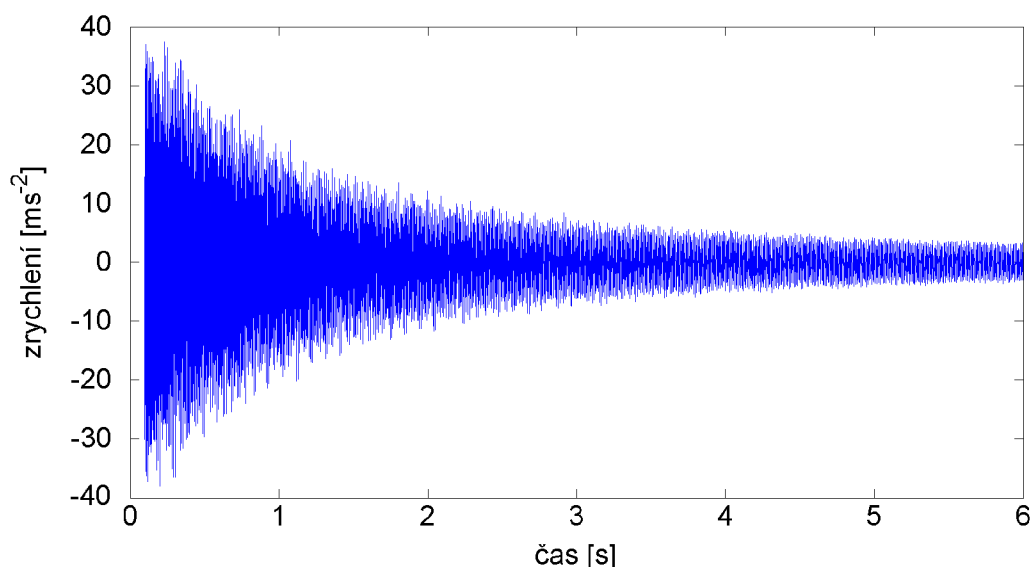
Obrázek 4.1: Nákres realizace zkoušky

### 4.2. Měření

Měření bylo provedeno pevným snímačem zrychlení umístěným na tělese v jeho pravém dolním rohu, jak je vidět na obrázku 4.1.

Samotná zkouška byla provedena pomocí úderu kladívkem do nosníku. Impulz byl směřován do bodu na ose nosníku, aby se co nejméně vybuzovaly krutové vlastní frekvence.

Výstupem z tohoto měření je průběh zrychlení snímače v čase, jak je zobrazeno na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Záznam z měření zrychlení

### 4.3. Zpracování dat

Data ze snímače byla zobrazena do frekvenčního spektra pomocí Fourierovy transformace v programu Matlab R2018a. Byl použit algoritmus FFT. Ze záznamu byl vzat vzorek, bez prvních dvou desetín sekundy po dopadu kladívka. Tímto se eliminoval vliv samotného impulzu. V ideálním případě by totiž mělo být kmitání vybuzeo Diracovým impulzem, což v realitě není možné. Záznam pro vyhodnocení nesmí být moc krátký, abychom správně pokryli vlastní frekvence. Z toho důvodu byla zvolena délka v řádu jednotek sekund.

Výstupem je závislost amplitudy zrychlení na frekvenci. O frekvencích, na kterých se nacházejí ostrá a výrazná maxima lze prohlásit, že jsou to vlastní frekvence nosníku.

Je třeba ještě ověřit, zda-li některý z nich nepředstavuje navzdory zmíněným opatřením krutovou nebo jinou vlastní frekvenci. To lze poznat tak, že hodnota amplitudy zrychlení na této vlastní frekvenci je výrazně nižší, než u ostatních (ohybových) vlastních frekvencí. Tyto výsledky byly ještě porovnány s výpočtem a tak byly validovány jako ohybové.

Konečným výsledkem je amplitudově-frekvenční charakteristika, zobrazená na obrázku 4.3. Pro porovnání s analytickým výpočtem bylo bráno prvních 5 vlastních ohybových frekvencí.

Prvních pět naměřených vlastních frekvencí je

$$f_{m1} = 107,7 \text{ Hz} \quad (4.1)$$

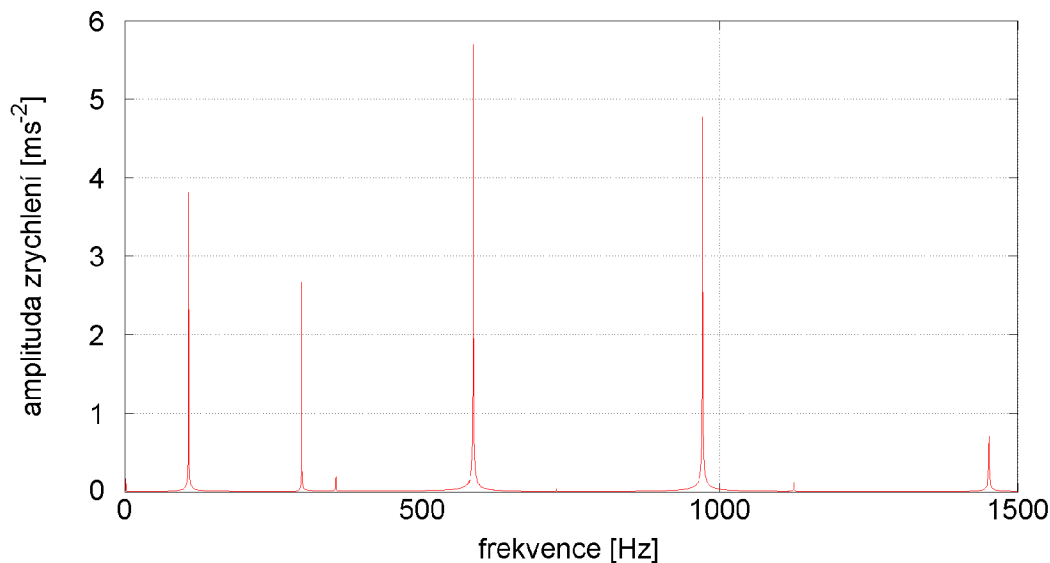
$$f_{m2} = 297,9 \text{ Hz} \quad (4.2)$$

$$f_{m3} = 585,9 \text{ Hz} \quad (4.3)$$

$$f_{m4} = 970,8 \text{ Hz} \quad (4.4)$$

$$f_{m5} = 1452 \text{ Hz} \quad (4.5)$$

#### 4.4. VYHODNOCENÍ



Obrázek 4.3: Amplitudově-frekvenční charakteristika

#### 4.4. Vyhodnocení

Nyní následuje porovnání experimentálně zjištěných vlastních frekvencí s výsledky výpočtu. Vyhodnocena bude vždy procentuální odchylka  $n$ -té výpočtem získané frekvence od změřené. Následující tabulka udává přehled výsledků.

Tabulka 4.1: Přehled naměřených a spočítaných výsledků

naměřené hodnoty	spočítané hodnoty
$f_{m1} = 107,7 \text{ Hz}$	$f_1 = 104,5 \text{ Hz}$
$f_{m2} = 297,9 \text{ Hz}$	$f_2 = 288,0 \text{ Hz}$
$f_{m3} = 585,9 \text{ Hz}$	$f_3 = 564,4 \text{ Hz}$
$f_{m4} = 970,8 \text{ Hz}$	$f_4 = 933,0 \text{ Hz}$
$f_{m5} = 1452 \text{ Hz}$	$f_5 = 1393,7 \text{ Hz}$

Porovnání bylo provedeno dle vztahu (4.6).

$$\delta_n = \frac{|f_{mn} - f_n|}{f_{mn}} \cdot 100 \quad (4.6)$$

Výsledkem je

$$\delta_1 = 3,0 \% \quad (4.7)$$

$$\delta_2 = 3,3 \% \quad (4.8)$$

$$\delta_3 = 3,7 \% \quad (4.9)$$

$$\delta_4 = 3,9 \% \quad (4.10)$$

$$\delta_5 = 4,0 \% \quad (4.11)$$

#### 4. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

Je vidět, že maximální odchylka v porovnávaných datech je 4 %. Výpočet se tedy velmi dobře shoduje s naměřenými hodnotami. Pro výpočet vlastních ohybových frekvencí je tento postup vyhovující. Zanedbané veličiny mají v případě této geometrie na přesnost minimální vliv.

# Závěr

Cílem této práce bylo provést rešerši metod analytického výpočtu kmitání nosníků, dále provést výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů ohybového kmitání jednoduchého nosníku a následně je porovnat s již dříve publikovanými výsledky.

V první části práce byly definovány Krylovovy funkce, tedy specifický matematický aparát používaný k výpočtu. Dále byl popsán problém vlastních čísel, jenž je dále v práci využíván pro zjištění vlastních tvarů.

V druhé části bylo pojednáno o možných metodách výpočtu a vysvětlen jejich hlavní princip. Byly zde popsány hlavní výhody a nevýhody a nastíněna možná konkrétní aplikace na nosník.

Třetí část se již věnovala hledání řešení zadaného problému pomocí jedné z těchto metod. Konkrétně pomocí metody popisu nosníku jako spojitého kontinua o daných vlastnostech. Bylo provedeno uvolnění elementárního prvku nosníku a zavedeno elementární silové a momentové působení. Následovalo sestavení pohybových rovnic (silové i momentové), doplnění geometrických a konstitutivních vztahů a řešení celé soustavy rovnic, jehož výsledkem byla lineární parciální diferenciální rovnice popisující kmitání nosníku.

Následovalo zacílení na volné kmitání nosníku za účelem nalezení ohybových vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Bylo provedeno zanedbání vlivu vnitřního a vnějšího tlumení, vlivu příčné síly a vlivu rotační setrvačnosti elementu, díky čemuž byla odvozena rovnice kmitání ve zjednodušeném tvaru a nalezeno její obecné řešení.

Pro další postup byl zvolen nosník konkrétního materiálu a geometrie. Do obecného řešení byly dosazeny okrajové podmínky a byly sestaveny rovnice pro zjištění potřebných konstant. Nutností k nalezení netriviálního řešení této soustavy bylo splnění frekvenční rovnice, ze které byly získány hledané vlastní frekvence. S jejich využitím byly nalezeny vlastní tvary kmitání.

Dále byl proveden znovu stejný výpočet konkrétního nosníku, ovšem pomocí Krylovových funkcí. Na tomto výpočtu byla demonstrována efektivita jejich použití, jelikož je vidět, že velmi zjednodušují cestu k hledaným výsledkům. Bylo ještě ověřeno, že oba dva způsoby výpočtu vedou na stejné výsledky, čímž byla prokázána věrohodnost druhého způsobu.

Čtvrtá část práce se věnovala popisu a vyhodnocení provedeného experimentu. Ten byl proveden na reálném nosníku o stejném materiálu, geometrii i okrajových podmínkách, jako mělo těleso, které bylo dříve v práci řešeno. Pomocí tohoto experimentu byly s určitou přesností změřeny hodnoty jeho ohybových vlastních frekvencí.

Závěrem čtvrté části byly porovnány vypočtené a naměřené hodnoty, přičemž u prvních pěti vlastních frekvencí byla zjištěna maximální odchylka o velikosti 4 %.

Celkově se v této práci podařilo odvodit analytické vztahy pro výpočet ohybových vlastních frekvencí a vlastních tvarů jednoduchého prizmatického nosníku. Dále se podařilo prokázat, že vlivy, zanedbané v průběhu výpočtu pro jeho výrazné zjednodušení, jsou z hlediska přesnosti řešení na dané rozlišovací úrovni nepodstatné. Z toho plyne, že pro výpočet ohybových vlastních frekvencí nosníku je tento postup vyhovující.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] RAO, Singiresu S. *Mechanical vibrations*. 4th ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004, xxvi, 1078 s.
- [2] GONDA, Ján. *Kmitanie pružných telies*. 1.vyd. Bratislava: SAV, 1961, 364 s.
- [3] Grigorjev *Rasčot kritičeskich čisel oborotov rotorov*. Poperečnyje kolebanija. Izd. AN SSSR, 1951.
- [4] BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. *Mechanické kmitání*. 1. vyd. Praha: Sobotáles, 1994, 589 s. ISBN 80-901684-8-5.
- [5] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X
- [6] NĚMEC, Jaroslav, Jan DVOŘÁK a Cyril HÖSCHL. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. Praha: SNTL, 1989, 599 s. : il. ISBN 80-03-00193-5.
- [7] GONDA, Ján. *Ohybové kmitanie nosníkov*. 1. vyd. Bratislava: VEDA, 1977, 247 s.
- [8] ČERNÝ, Tomáš. *Ověření vlivu geometrie na dynamické vlastnosti ponořeného tělesa*. Brno, 2019. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [9] GREŠÁKOVÁ, Kristýna. *Experimentální stanovení vlivu kapaliny na kmitající těleso*. Brno, 2018. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

## Seznam zkratek

Symbol	Jednotka	Popis
$A$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$B$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$C$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$D$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$E$	[ $Pa$ ]	modul pružnosti v tahu
$F$	[ $N$ ]	posouvající síla
$G$	[ $Pa$ ]	modul pružnosti ve smyku
$I_z$	[ $kg \cdot m$ ]	měrný moment setrvačnosti k ose $z$
$J_z$	[ $m^4$ ]	osový kvadratický moment k ose $z$
$K$	[ – ]	časový průběh kmitání nosníku
$M$	[ $N \cdot m$ ]	ohybový moment
$O$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$P$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$Q$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$R$	[ – ]	konstanta vlastního tvaru
$S$	[ – ]	Krylovova funkce $S$
$T$	[ – ]	Krylovova funkce $T$
$U$	[ – ]	Krylovova funkce $U$
$V$	[ – ]	Krylovova funkce $V$
$W$	[ – ]	pomocná Krylovova funkce $W$
$Y$	[ – ]	vlastní tvar nosníku
$Z$	[ $m^2$ ]	obsah plochy příčného průřezu
$a$	[ – ]	koeficient tvaru průřezu
$b$	[ $m$ ]	šířka nosníku
$c$	[ – ]	konstanta polynomu
$f$	[ $s^{-1}$ ]	vypočítaná frekvence
$f_m$	[ $s^{-1}$ ]	naměřená frekvence
$h$	[ $m$ ]	výška nosníku
$k$	[ $m^{-1}$ ]	substituent v rovnici
$l$	[ $m$ ]	délka nosníku
$m$	[ $kg$ ]	hmotnost
$m_v$	[ $N$ ]	liniové momentové vnější zatížení
$p$	[ – ]	parametr pro výpočet vlastního tvaru
$q_{vy}$	[ $N \cdot m^{-1}$ ]	složka liniového silového zatížení ve směru $y$
$t$	[ $s$ ]	čas
$x$	[ $m$ ]	souřadnice
$y$	[ $m$ ]	souřadnice
$z$	[ $m$ ]	souřadnice



Symbol	Jednotka	Popis
$\beta$	[ <i>rad</i> ]	úhel natočení střednice vlivem momentu
$\gamma$	[ <i>rad</i> ]	úhel natočení střednice vlivem síly
$\delta$	[ % ]	procentuální odchylka
$\kappa$	[ <i>N · s · m</i> ]	měrný délkový koeficient vnějšího tlumení
$\lambda$	[ - ]	vlastní číslo
$\mu$	[ <i>s</i> ]	měrný koeficient vnitřního tlumení
$\xi$	[ $s^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-1}$ ]	substituent v rovnici
$\rho$	[ <i>kg · m<sup>-3</sup></i> ]	hustota materiálu
$\omega$	[ <i>rad · s<sup>-1</sup></i> ]	vlastní úhlová frekvence
<b>A</b>	[ - ]	matice soustavy rovnic
<b>x</b>	[ - ]	vektor neznámých
<b>0</b>	[ - ]	nulový vektor

# Seznam obrázků

2.1	Střednice a příčný průřez obecného nosníku . . . . .	15
2.2	Nosník před diskretizací . . . . .	17
2.3	Diskretizovaný nosník . . . . .	17
3.1	Schema řezů nosníkem . . . . .	18
3.2	Uvolnění prvku . . . . .	19
3.3	Grafické znázornění rovnice (3.51) . . . . .	25
3.4	Geometrie nosníku a jeho příčný průřez . . . . .	25
3.5	Prvních pět vlastních tvarů nosníku . . . . .	29
3.6	Prvních pět vlastních tvarů nosníku . . . . .	33
4.1	Nákres realizace zkoušky . . . . .	34
4.2	Záznam z měření zrychlení . . . . .	35
4.3	Amplitudově-frekvenční charakteristika . . . . .	36