

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

---

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE



PRŮNIKY TĚLES  
V RŮZNÝCH PROJEKČÍCH

Bakalářská práce

Vedoucí práce:

RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:

Petr Kozák

M-DG, 3. ročník

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D., a že jsem uvedl všechnu použitou literaturu.

V Olomouci 22. dubna 2010

.....

Na tomto místě bych rád poděkoval RNDr. Lence Juklové, Ph.D., za poskytnuté materiály a za cenné rady, které přispěly ke zkvalitnění obsahu této práce.

Děkuji také RNDr. Josefu Srovnalovi, CSc., za jeho pečlivě vedené přednášky, které pro mne byly hlavní zdrojem informací při psaní této práce.

# Obsah

Úvod . . . . .	5
1 Základní pojmy a postupy . . . . .	6
1.1 Základní pojmy . . . . .	6
1.2 Postupy konstrukce průniku . . . . .	7
2 Průniky hranatých těles . . . . .	11
3 Průniky oblých těles . . . . .	21
4 Průniky hranatých a oblých těles . . . . .	29
Závěr . . . . .	35
Literatura . . . . .	36
Příloha	

# Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje úlohám o průniku těles. Úlohy jsou řešeny v těchto zobrazovacích metodách; kótovaném zobrazení, Mongeově zobrazení, pravoúhlé axonometrii, kosoúhlém zobrazení, středovém zobrazení a lineární perspektivě. U čtenáře se předpokládají základní znalosti uvedených zobrazovacích metod. Tato práce se zabývá pouze vzájemnými průniky hranolů, jehlanů, kruhových kuželů, kruhových válců a koule. Hranoly a jehlany jsou v textu souhrně označovány jako hranatá tělesa; kruhové kužely, kruhové válce a koule jako tělesa oblá.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola obsahuje základní teorii týkající se dané problematiky. Jsou zde také uvedeny základní postupy konstrukce průniku těles. Zbylé tři kapitoly jsou věnovány řešeným úlohám. Nejprve jsou řešeny úlohy na průnik hranatých těles, tj. hranolů a jehlanů, poté na průnik oblých těles, tj. kruhových kuželů, kruhových válců a koule. Poslední kapitola je věnována průniku hranatého tělesa s tělesem oblým.

V řešených úlohách je pravoúhlá axonometrie zadána axonometrickým osovým křížem a předpokládáme, že je nadhledem. Kosoúhlé zobrazení je určeno kosoúhlým průmětem osového kříže a poměrem zkrácení, který je dán graficky. Středové zobrazení je zadáno pravoúhlým průmětem  $S_2$  středu promítání a distanční kružnicí  $k_d$ . Lineární perspektiva je dána hlavním bodem  $H$ , horizontem  $h$ , základnicí  $z$  a distancí  $d = |HO|$ .

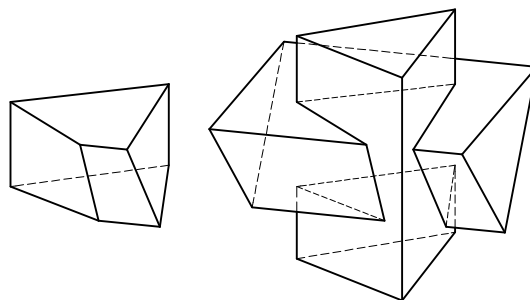
Úlohy a obrázky jsou narýsovány v programu QCad. Bakalářská práce je napsána pomocí typografického systému  $\text{\TeX}$ .

# 1 Základní pojmy a postupy

## 1.1 Základní pojmy

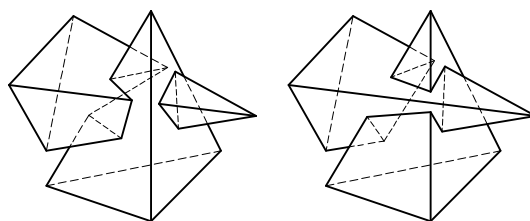
*Průnikem těles* rozumíme množinu všech společných bodů daných těles. Podle vzájemné polohy těles dostáváme různé případy průniku; od prázdného průniku až po situaci, kdy průnikem je některé z těles. Vzhledem k této rozmanitosti se omezíme jen na případ, kdy je průnikem trojrozměrný útvar.

Úlohy na průnik tří a více těles lze řešit pomocí dílčích konstrukcí na průnik dvou těles. Princip řešení spočívá v tom, že sestrojíme průnik dvou z daných těles, čímž dostaneme těleso nové. Dále sestrojíme průnik tělesa určeného předchozí konstrukcí s některým ze zbývajících těles, a tím dostaneme průnik tří těles. Tento krok opakujeme, dokud nepoužijeme všechna tělesa. Těleso určené poslední konstrukcí je pak hledaný průnik všech daných těles. Jelikož lze tento postup použít ve všech případech, budeme se nadále zabývat jen úlohami o průniku dvou těles. Pouze úloha 2.5 je věnována průniku více těles, konkrétně průniku tří jehlanů.



Obr. 1.1. Průnik těles a povrchů.

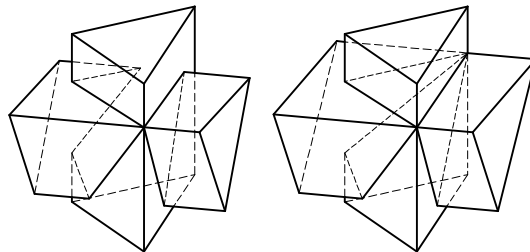
Místo průniku těles ve smyslu množiny všech bodů společných daným tělesům obvykle hledáme jen průnik jejich povrchů, přičemž pojmy *průnik těles* a *průnik povrchů* (obr. 1.1) ve většině případů nerozlišujeme.<sup>1</sup> Nutnost rozlišení těchto pojmů může nastat v případě, kdy máme sestrojít průnik více než dvou těles. Průnik povrchů je obvykle tvořen tzv. *průnikovou čarou*, která se může skládat z jedné, nebo z více částí. Budou-li mít povrchy těles společnou plochu (např. překrývají-li se jejich podstavy), pak tuto část průniku nebudeme považovat za součást průnikové čáry.



Obr. 1.2. Průnik úplný a částečný.

<sup>1</sup> V některé literatuře se můžeme setkat s pojmem *jádro průniku*, který označuje část prostoru společnou oběma tělesům. Pojmem *průnik těles* se poté rozumí množina bodů společná povrchům těles.

Průniková čára dvou hranatých těles je obecně *prostorovou lomenou čarou*. Vrcholy této lomené průnikové čáry jsou průsečíky hran jednoho tělesa se stěnami druhého tělesa. Strany lomené průnikové čáry tvoří průsečnice stěn obou těles. Průnikem dvou oblých těles je obecně *prostorová křivka*. Jak již bylo řečeno, tato křivka se může skládat z více částí, přičemž každá část může být nejvýše křivkou čtvrtého stupně. Průniková čára hranatého a oblého tělesa je tvořena z částí kuželoseček.



Obr. 1.3. Dvojné body.

Podle počtu částí průnikové čáry rozlišujeme průniky na *úplné* a *částečné* (obr. 1.2).

Skládá-li se průniková čára z jediné části, říkáme, že průnik je částečný, a má-li průniková čára více než jednu část, hovoříme o průniku úplném.<sup>2</sup> Speciálním případem částečného průniku je situace, kdy průniková čára prochází některými body dvakrát. Takové body pak nazýváme *dvojnými body* (obr. 1.3).

## 1.2 Postupy konstrukce průniku těles

Zpočátku se budeme zabývat případy, kdy je možné sestrojít průnikovou čáru přímo, bez užití pomocných konstrukcí. Tyto případy nastávají zejména v situaci, kdy mají tělesa zvláštní polohu vzhledem k průmětnám či mezi sebou, přičemž záleží i na volbě zobrazovací metody. Obecně nelze popsat všechny případy, kdy je přímá konstrukce průniku možná, a proto uvedeme jen některé.

Jako první popíšeme situaci, kdy máme v Mongeově zobrazení sestrojít průnik hranolu (resp.válce), jehož směr hran (osy) je kolmý k jedné průmětně, s dalším tělesem. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze případ, kdy se žádná z podstav neúčastní průniku. Jelikož se jeden průmět hranolu (válce) zobrazí jako příslušný průmět své podstavy, zobrazí se hledaná průniková čára jako část obvodu tohoto průmětu. Můžeme tedy snadno určit zbývající průmět průnikové čáry (obr. 1.4).

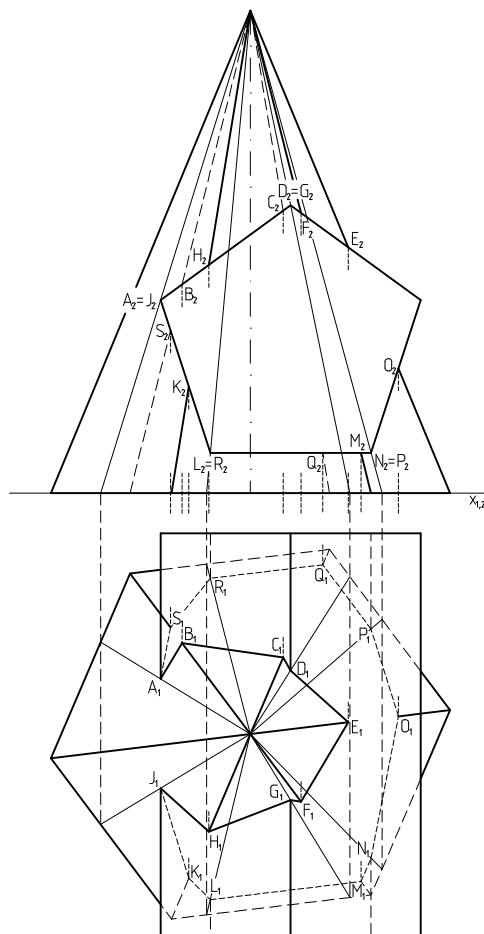
<sup>2</sup> U průniku ploch se můžeme setkat s odlišným zavedením pojmů *úplný* a *částečný průnik*. Jestliže všechny vrcholové či směrové přímky jedné plochy protínají druhou plochu, pak hovoříme o průniku úplném. V opačném případě se jedná o průnik částečný. Dále se zavádí pojem *dokonalý průnik*, jenž je úplný průnik, u kterého všechny vrcholové či směrové přímky každé plochy protínají plochu druhou.

Další případ může nastat pouze u průniku oblých těles. Máme-li sestrotit průnik oblých těles, jejichž příslušné plochy jsou opsány téže kulové ploše, pak je průniková křivka tvořena částmi kuželoseček.<sup>3</sup> V případě sestrojujeme-li tento průnik v kótovaném zobrazení, kde za průmětnu zvolíme rovinu rovnoběžnou s osami těles, zobrazí se jednotlivé části kuželoseček jako úsečky (obr. 1.5).

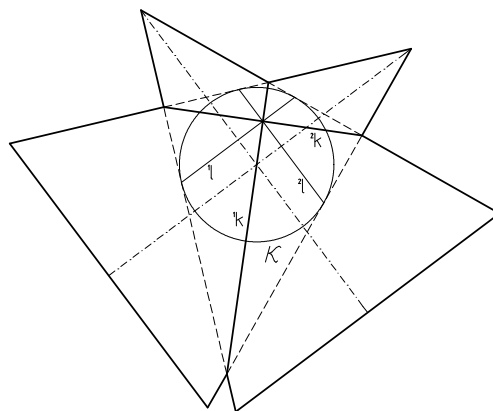
Dále se zaměříme na obecné postupy konstrukce průniku těles. V těchto případech již nebudeme požadovat zvláštní polohy těles. Máme-li sestrotit průnik těles z nichž alespoň jedno je hranaté, můžeme postupovat tak, že sestrojíme řezy druhého tělesa rovinami, které obsahují stěny hranatého tělesa. Části těchto řezů ležící ve stěnách hranatého tělesa tvoří hledanou průnikovou čáru. Pomocí tohoto postupu jsou řešeny především úlohy na průnik hranatého a oblého tělesa (obr. 1.6).

Jako poslední popíšeme metodu, kterou lze použít pro průnik libovolných těles. Princip této metody spočívá v sestrojení průniků daných těles a pomocné plochy. Společné body těchto průniků jsou pak hledané body průniku těles. Za pomocné plochy zpravidla volíme takové, které daná tělesa protnou v co nejjednoduších geometrických útvarech, tj. mnohoúhelnících či kružnicích.

V případě průniku hranatých těles užíváme pomocnou soustavu rovin. Vhodné je volit tuto soustavu tak, aby byla vzhledem k hranolu soustavou směrových rovin a vzhledem k jehlanu soustavou vrcholových rovin (obr. 1.7). Řezy těles stačí sestrotit jen těmi rovinami, jež obsahují alespoň jednu hranu některého tělesa a přitom protínají těleso druhé. Existují-li mezi těmito rovinami ta-



Obr. 1.4. Průnik jehlanu a hranolu.

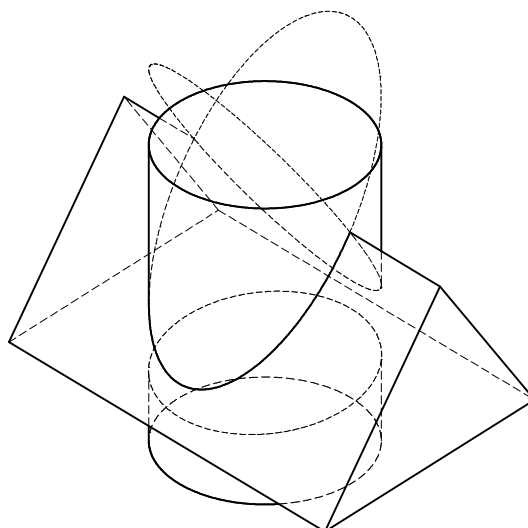


Obr. 1.5. Průnik oblých těles opsaných téže kulové ploše.

<sup>3</sup> Věta: Průnik dvou rotačních ploch se rozpadne na dvě kuželosečky, když jsou obě plochy opsány téže kulové ploše.

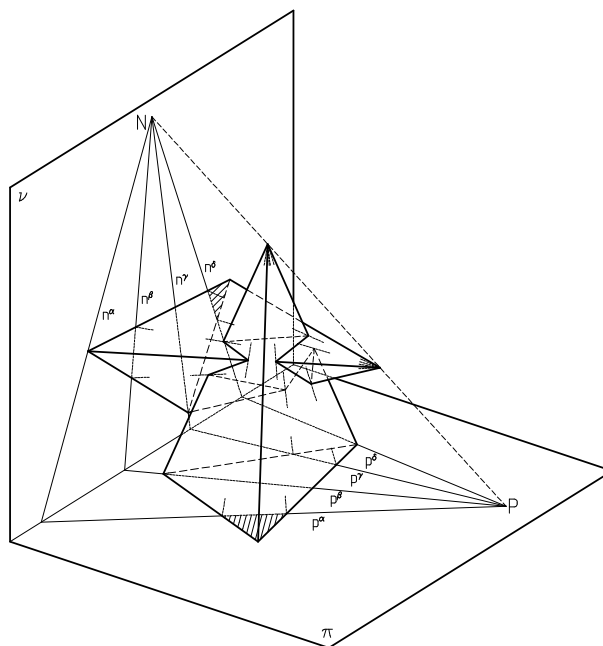


kové, jež jsou vzhledem k jednomu tělesu rovinami styčnými, pak jsou buď styčnými i ke druhému tělesu, nebo oddělují od druhého tělesa tzv. *lichou část*, tedy část neúčastnící se průniku.<sup>4</sup> Společné body sestrojených řezů nám určují vrcholy hledané průnikové čáry. Strany průnikové čáry již snadno sestrojíme jako spojnice vrcholů, musíme však dbát na to, abychom spojovali správné vrcholy. Z toho důvodu je vhodné zavést tzv. *číslování*. Při číslování přiřazujeme čísla průnikům pomocných rovin s obvodem podstavy tělesa a vrcholům průnikové čáry. Číslovat začneme



Obr. 1.6. Průnik hranolu a válce.

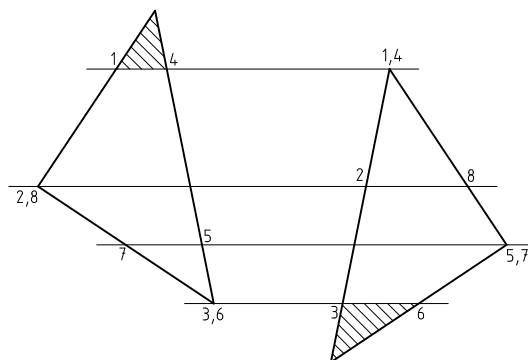
v libovolném vrcholu některé podstavy, stejným číslem označíme i některý z průniků příslušné roviny s obvodem druhé podstavy a příslušný vrchol průnikové čáry. Dále zvolíme směr obíhání na jedné podstavě, přičemž směr obíhání na druhé podstavě je tím také určen, nebo jej lze zvolit libovolně. Takto postupně očíslováme všechny vrcholy v daném směru a jim příslušné průsečíky podstav. Přijdeme-li k liché části, obrátíme na dané podstavě směr obíhání. Po očíslování všech vrcholů průnikové čáry musí být u každého číslovaného vrcholu podstavy právě dvě čísla. V případě, kdy je průniková čára tvořena z více částí, je nutné provést číslování pro každou část (obr. 1.8).



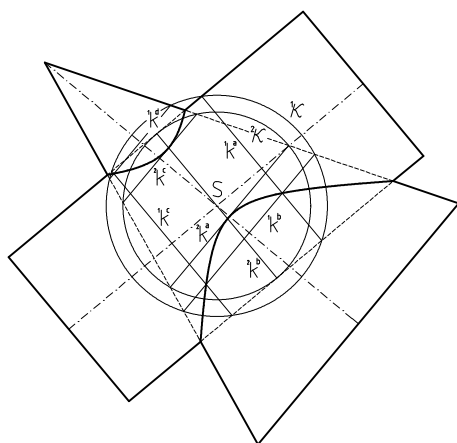
Obr. 1.7. Průnik dvou jehlanů.

<sup>4</sup> Pomocí lichých částí můžeme u průniku ploch zavést pojmy *úplný* a *částečný průnik*. Jsou-li liché části pouze na jedné ploše, pak je průnik úplný. Jsou-li na obou plochách, pak je průnik částečný.

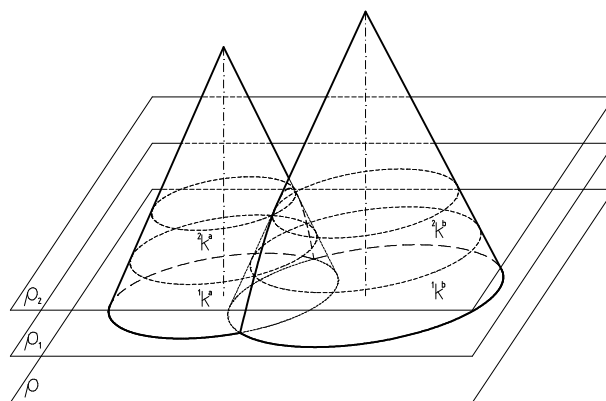
U průniku oblých těles volíme za pomocné plochy zpravidla roviny či kulové plochy, přičemž záleží na vzájemné poloze a tvaru těles. Jestliže se jedná o rotační tělesa s různoběžnými osami, užíváme soustavu soustředných kulových ploch se středem v průsečíku os těles (obr. 1.9). V ostatních případech volíme za pomocné plochy soustavu rovin. Stejně jako u hranatých těles je vhodné volit tuto soustavu tak, aby byla vzhledem k válci soustavou směrových rovin a vzhledem ke kuželi soustavou vrcholových rovin. Sestrojujeme-li průnik dvou rotačních těles s rovnoběžnými osami, volíme zpravidla soustavu rovin kolmých na směr os (obr. 1.10). Jelikož je obecně průniková čára průniku oblých těles křivkou čtvrtého stupně, volíme počet a polohu pomocných rovin v závislosti na požadované přesnosti výsledku. I v případě průniku oblých těles lze zavést číslování, přičemž každý bod obvodu podstavy můžeme považovat za její vrchol.



Obr. 1.8. Číslování.



Obr. 1.9. Průnik rotačních těles s různoběžnými osami.



Obr. 1.10. Průnik rotačních těles s rovnoběžnými osami.

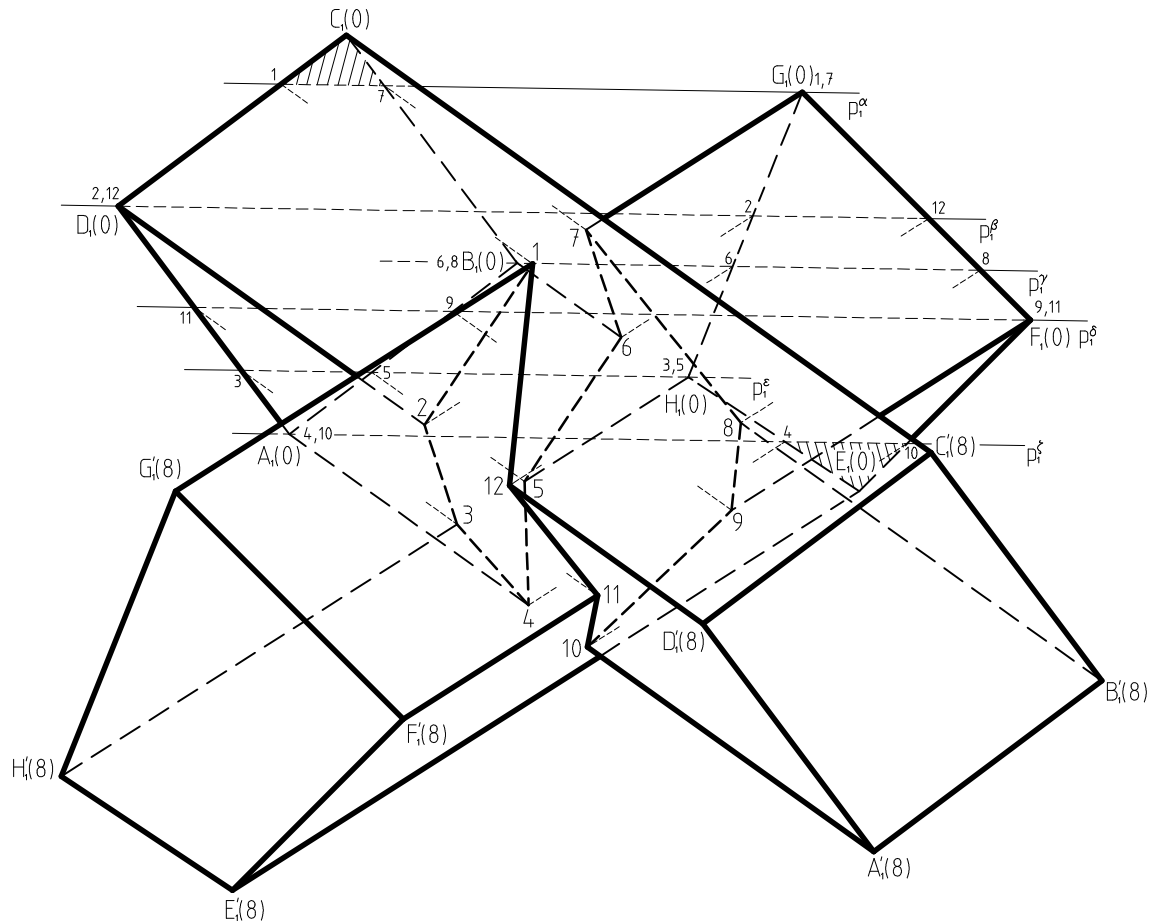
O viditelnosti jednotlivých bodů průnikové čáry rozhodujeme u všech příkladů stejně. Leží-li bod průnikové čáry na viditelných částech obou těles, pak je viditelný, v ostatních případech je neviditelný.

## 2 Průniky hranatých těles

Ve všech zde uvedených úlohách na průnik dvou hranatých těles užíváme ke konstrukci průniku pomocnou soustavu rovin. Jedná-li se o průnik dvou hranolů, volíme takovou soustavu rovin, jež je vzhledem k oběma hranolům soustavou směrových rovin. U průniku dvou jehlanů volíme soustavu vrcholových rovin vzhledem k oběma jehlanům a u průniku jehlanu s hranolem užíváme soustavu vrcholových-směrových rovin. Z této pomocné soustavy rovin užijeme jen ty roviny, jež obsahují alespoň jednu hranu některého tělesa a zároveň protínají těleso druhé. Dále sestrojíme řezy těles těmito rovinami, přičemž sestrojíme pouze řez toho tělesa, jehož hranu daná rovina neobsahuje. Určením společných bodů řezů a hran dostaneme hledané vrcholy průnikové lomené čáry. Pro usnadnění konstrukce průnikové čáry zavedeme číslování a poté jednotlivé vrcholy průnikové čáry ve správném pořadí pospojujeme. Nakonec rozhodneme o viditelnosti jednotlivých částí těles a průnikové lomené čáry. O viditelnosti stran lomené průnikové čáry rozhodneme z viditelnosti stěn obou těles. Jsou-li obě stěny viditelné, pak je i příslušná strana průnikové čáry viditelná. V ostatních případech je strana průnikové čáry neviditelná.

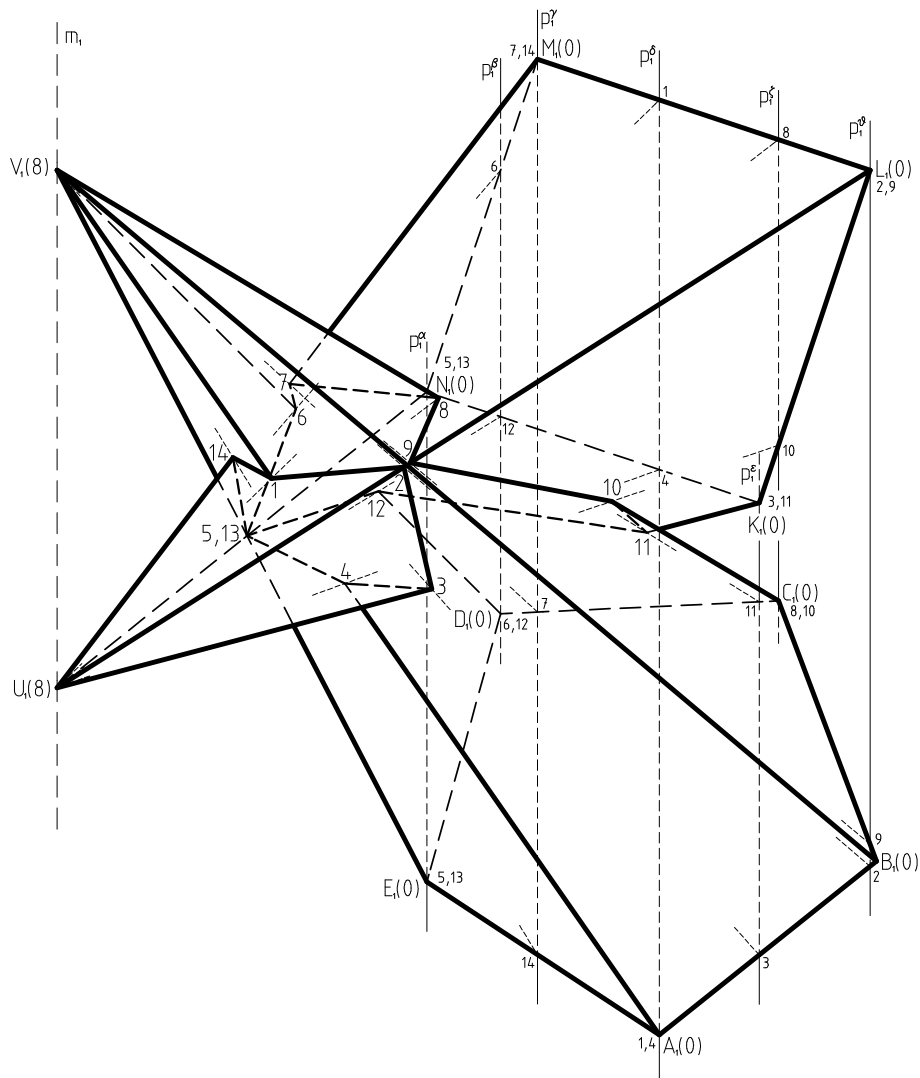
V úloze 2.5 je řešen průnik tří jehlanů. V této úloze nehovoříme o průnikové čáře jako o množině bodů, které jsou společné povrchům všech tří těles, ale jako o množině bodů, které jsou společné povrchům alespoň dvou jehlanů a zároveň neleží uvnitř žádného z daných jehlanů.

Úloha 2.1. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik daných kosých hranolů, jejichž podstavy  $ABCD$ ,  $EFGH$  leží v průmětně a podstavy  $A'B'C'D'$ ,  $E'F'G'H'$  leží v téže rovině s kladnou kótou.



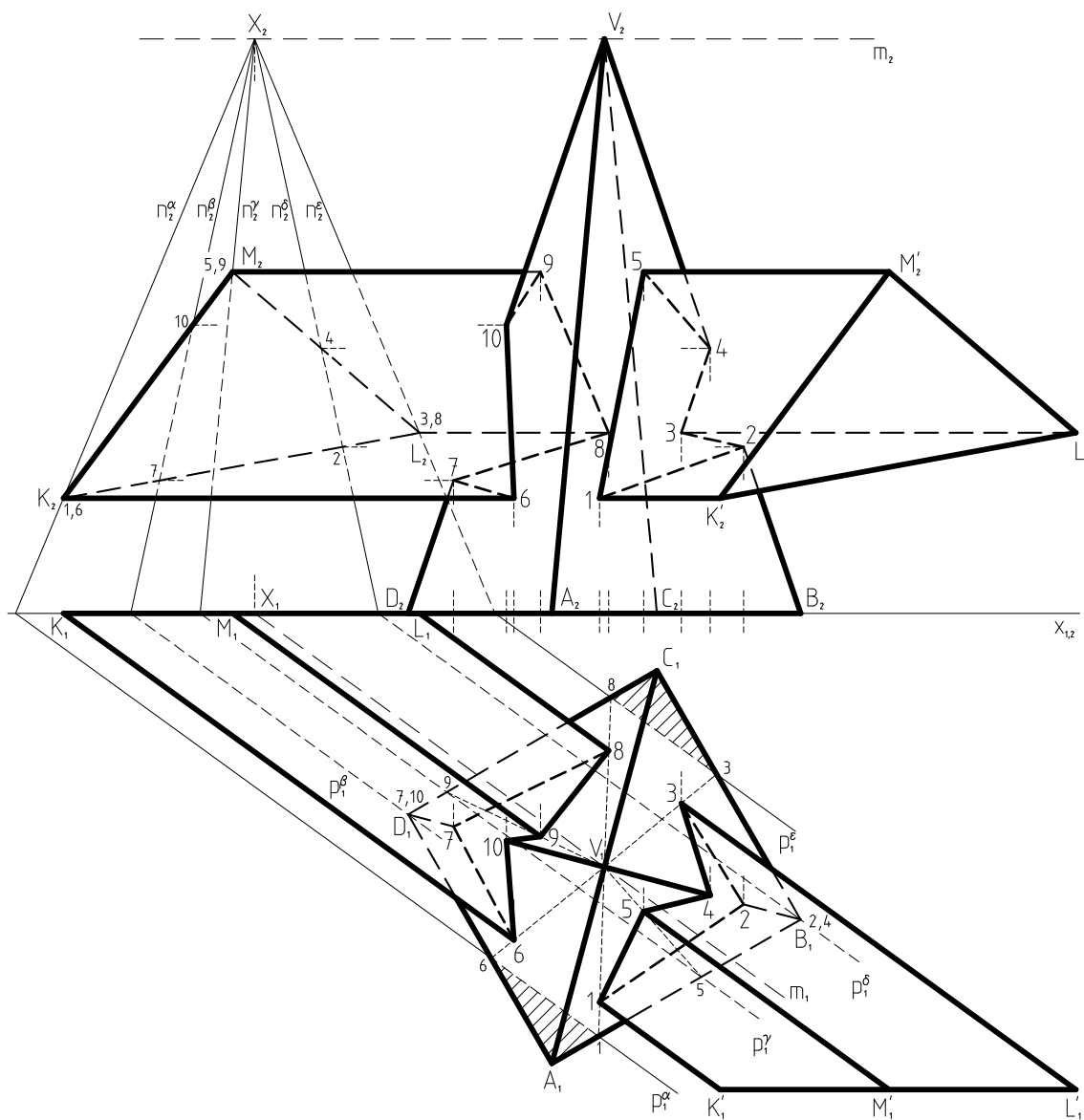
*Řešení.* Hranami  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $DD'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$  a  $HH'$  proložíme pomocné směrové roviny. Hranami  $CC'$  a  $EE'$  neprochází žádná pomocná směrová rovina, jež by zároveň protínala i druhý hranol. Tyto hrany tedy leží v lichých částech. Pomocné roviny jsou navzájem rovnoběžné, a tedy i jejich stopy  $p_1^\alpha$ ,  $p_1^\beta$ ,  $p_1^\gamma$ ,  $p_1^\delta$ ,  $p_1^\epsilon$  a  $p_1^\zeta$  jsou navzájem rovnoběžné. Jelikož navíc podstavy leží v průmětně zobrazí se stopy jako přímky procházející vrcholy těchto podstav. Dále sestrojíme řezy hranolů pomocnými rovinami a určíme společné body těchto řezů a příslušných hran. Například v rovině  $\alpha$  leží vrcholy 1 a 7 hledané průnikové čáry. K zjednodušení konstrukce stran průnikové čáry zavedeme číslování. Z číslování je možné vidět, že průniková lomená čára je tvořena z jedné části, a tedy že průnik je částečný. Na závěr podle výše uvedených pravidel rozhodneme o viditelnosti.

Úloha 2.2. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik dvou jehlanů, jejichž podstavy  $ABCDE$  a  $KLMN$  leží v průmětně. Vrcholy  $U$  a  $V$  jehlanů leží na přímce  $m$  rovnoběžné s průmětnou (s kladnou kótou).



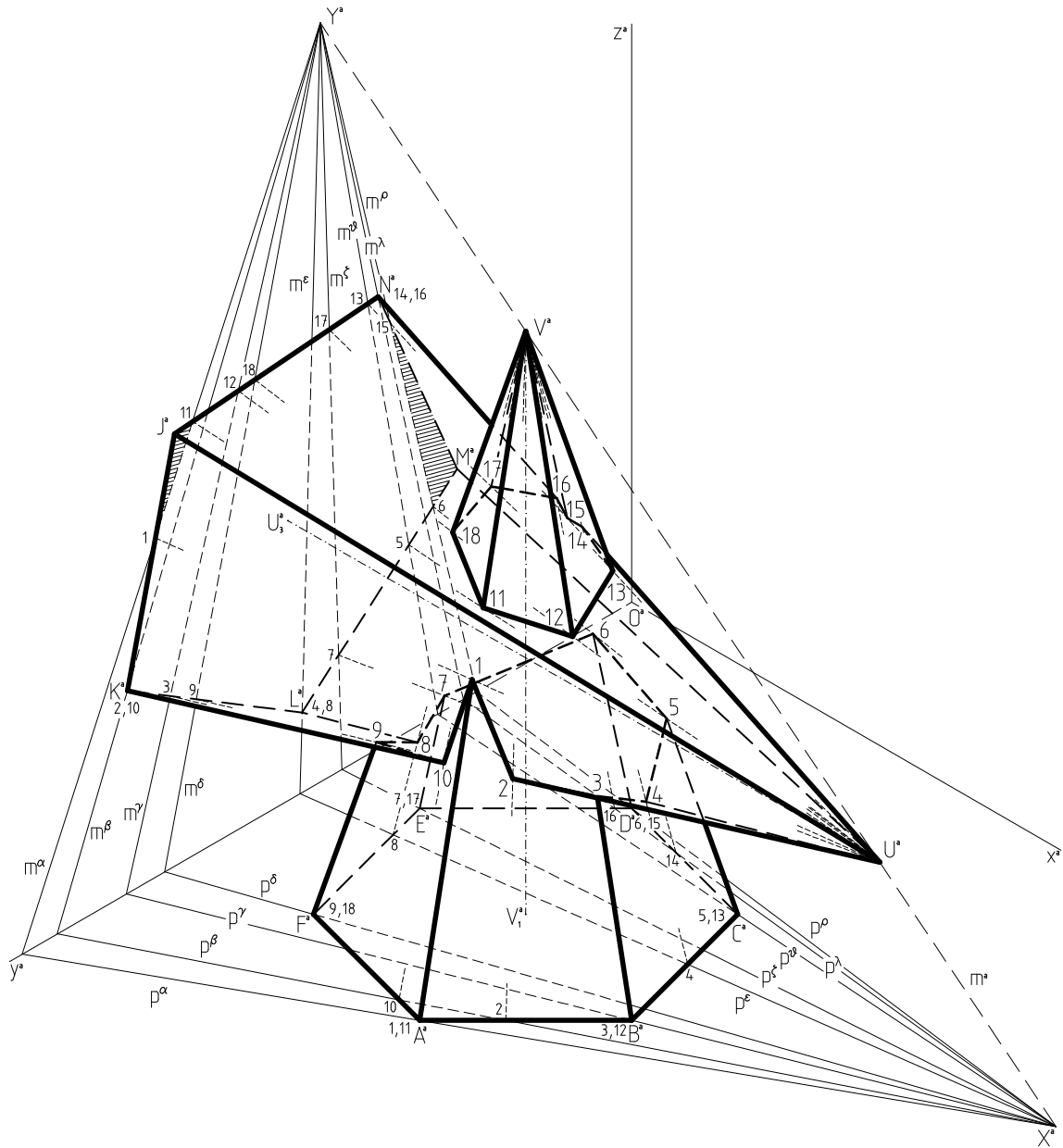
*Řešení.* Přímka  $m$  procházející vrcholy obou jehlanů určuje svazek pomocných vrcholových rovin. Díky poloze přímky  $m$  ( $m \parallel \pi$ ) a podstav jehlanů sestrojíme stopy pomocných rovin jako přímky rovnoběžné s přímkou  $m$  procházející vrcholy podstav jehlanů. Pouze hranou  $BV$  neprochází pomocná rovina daného svazku protínající druhý jehlan, a tedy vrcholem  $B$  neprochází žádná stopa roviny daného svazku. Dále si může všimnout, že rovina  $\alpha$  prochází jak hranou  $EV$ , tak i hranou  $NU$ . Průsečík těchto hran je tedy jedním z vrcholů hledané průnikové čáry. Jelikož se navíc jedná o styčnou rovinu obou jehlanů, je tento vrchol (5,13) dvojným bodem průnikové čáry. Zbylé vrcholy průnikové čáry určíme jako společné body rovinných řezů jehlanů a jejich hran. Zavedeme číslování a sestrojíme strany průnikové čáry. Části 14–1–2–3 a 8–9–10 průnikové čáry jsou viditelné, zbylé části jsou neviditelné.

Úloha 2.3. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik hranolu a jehlanu. Podstava hranolu leží v nárýsně a podstava jehlanu leží v půdorysně.



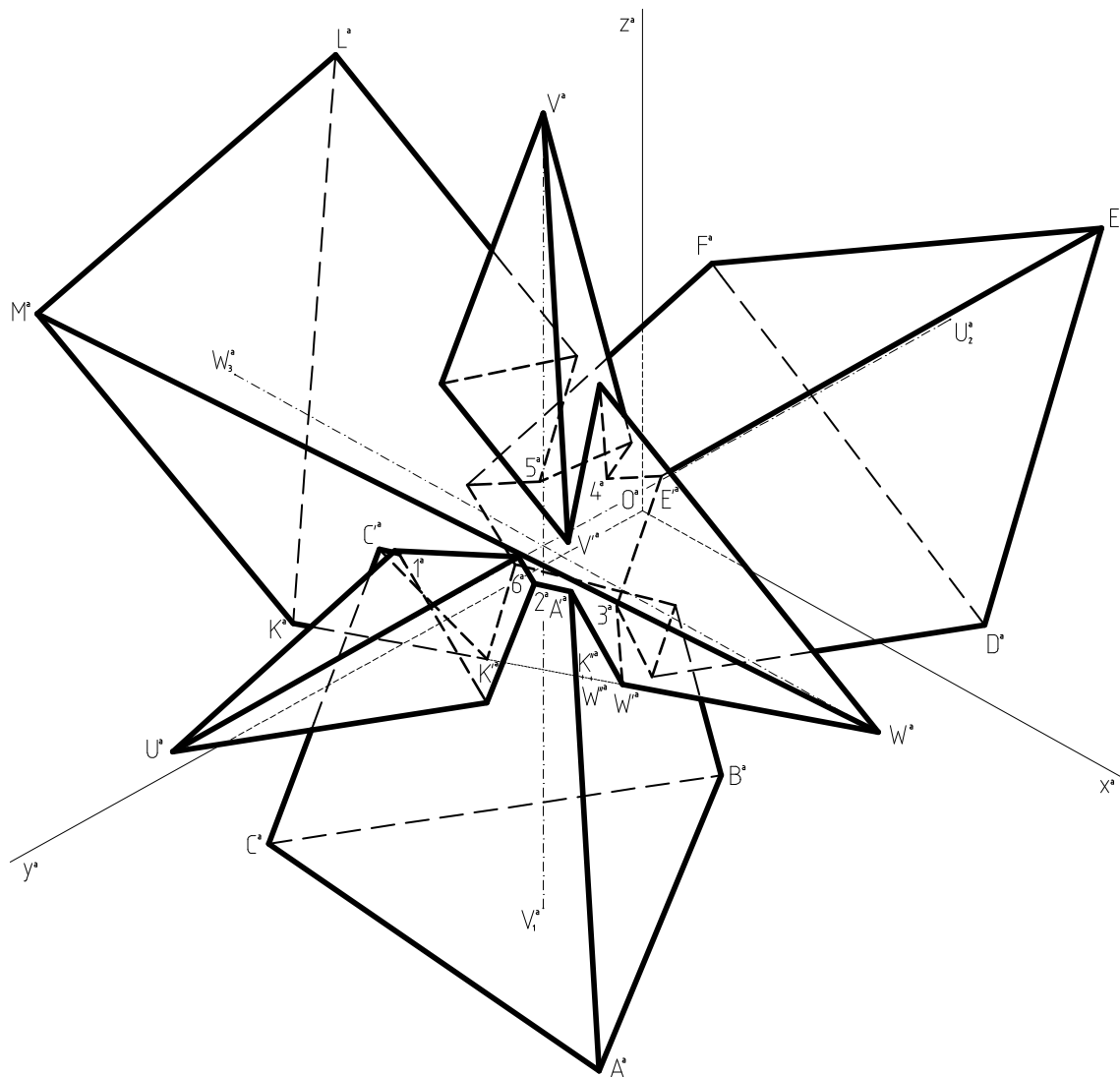
*Řešení.* Soustava pomocných rovin tvoří svazek s průsečnicí  $m$ . Přímka  $m$  prochází vrcholem  $V$  jehlanu a je rovnoběžná se směrem hran hranolu. Půdorysné stopy rovin jsou vzhledem k poloze přímky  $m$  ( $m \parallel \pi$ ) navzájem rovnoběžné a nárýsné stopy tvoří svazek přímek o středu  $X$ . Hranami  $KK'$ ,  $LL'$ ,  $MM'$ ,  $BV$  a  $DV$  proložíme pomocné roviny. Hranami jehlanu  $AV$  a  $CV$  neprochází žádná pomocná rovina daného svazku, jež by protínala i druhý hranol. Tyto hrany tedy leží v lichých částech, které vyšrafuje. Poté sestrojíme řezy těles danými rovinami a určíme společné body těchto řezů a příslušných hran. Dále zavedeme číslování a sestrojíme strany průnikové lomené čáry. Jelikož se průniková čára rozpadla na dvě části jedná se o průnik úplný. Nakonec rozhodneme o viditelnosti hran těles a stran průnikové čáry.

Úloha 2.4. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik dvou daných kolmých jehlanů. Podstava jehlanu  $ABCDEFV$  leží v průmětně  $\pi$  a podstava jehlanu  $KLMNJU$  leží v průmětně  $\mu$ .



*Řešení.* Všechny pomocné vrcholové roviny procházejí přímkou  $m$ , která je spojnicí vrcholů obou jehlanů. Jedná se tedy o svazek pomocných rovin. Půdorysné i bokorysné stopy pomocných rovin tvoří svazky přímek. Hranami, kromě  $MU$  a  $JU$ , proložíme pomocné roviny daného svazku a sestrojíme řezy těmito rovinami. Dále určíme společné body těchto řezů a příslušných hran, čímž získáme vrcholy hledané průnikové čáry. Zavedeme číslování a sestrojíme strany průnikové lomené čáry. Průniková lomená čára je tvořena ze dvou částí, průnik je tedy úplný. Zbývá již jen určit viditelnost těles a průniku. Viditelné části průniku jsou  $10-1-2$  a  $18-11-12-13$ .

Úloha 2.5. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik tří kolmých jehlanů  $J^\pi$ ,  $J^\nu$  a  $J^\mu$ . Podstava jehlanu  $J^\pi$  leží v průmětně  $\pi$ , podstava jehlanu  $J^\nu$  leží v průmětně  $\nu$  a podstava jehlanu  $J^\mu$  leží v průmětně  $\mu$ .

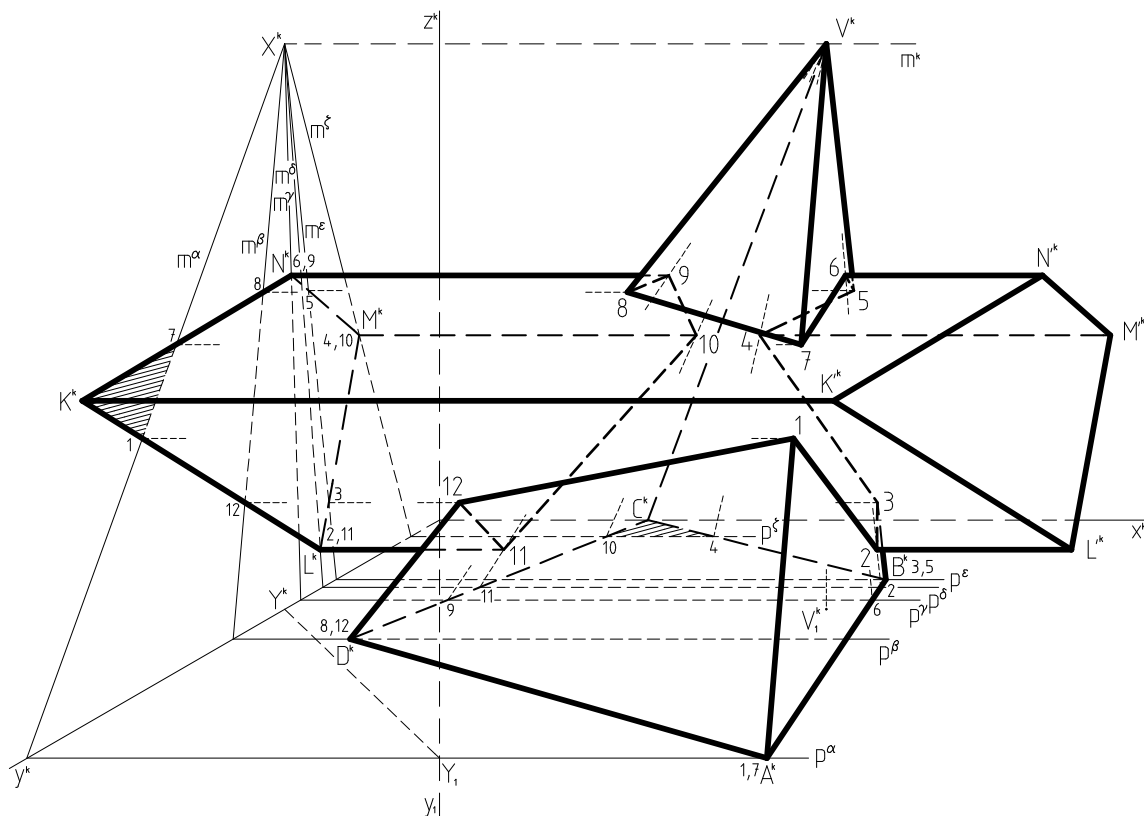


*Řešení.* Nejprve sestrojíme průnikové čáry všech dvojic jehlanů ( $J^\pi \cap J^\nu$ ;  $J^\pi \cap J^\mu$ ;  $J^\nu \cap J^\mu$ ). Hrana  $MW$  jehlanu  $J^\mu$  se neúčastní žádného z průniků  $J^\pi \cap J^\mu$  a  $J^\nu \cap J^\mu$ , a proto se neúčastní ani průniku  $J^\pi \cap J^\nu \cap J^\mu$ . Hrana  $AV$  se účastní pouze průniku  $J^\pi \cap J^\mu$  a leží na ní vrcholy  $A'$  a  $V'$  průnikové čáry tohoto průniku. Oba tyto body jsou současně vrcholy hledané průnikové čáry. Stejně lze postupovat i u hran  $BV$ ,  $CV$ ,  $DU$  a  $LW$ . Hrana  $KW$  se účastní obou příslušných průniků ( $J^\pi \cap J^\mu$ ;  $J^\nu \cap J^\mu$ ) a leží na ní tedy jak vrcholy  $K'$ ,  $W'$  průnikové čáry  $J^\pi \cap J^\mu$ , tak i vrcholy  $K''$ ,  $W''$  průnikové čáry  $J^\nu \cap J^\mu$ . Z těchto čtyř bodů jsou však pouze dva současně i vrcholy hledané průnikové čáry. Jedním vrcholem hledané průnikové čáry je takový bod z daných čtyř,



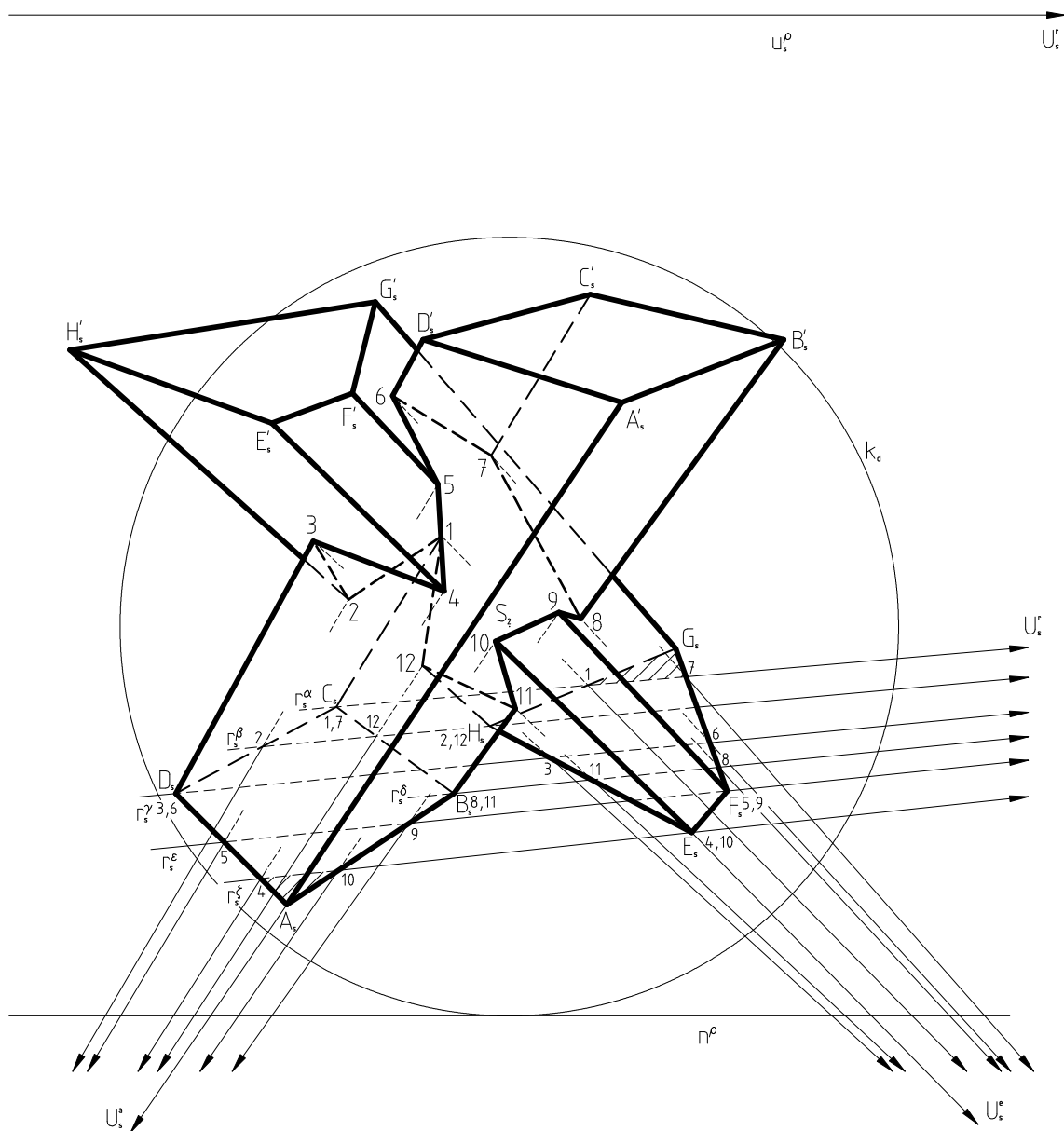
který leží nejbližší vrcholu  $W$  jehlanu  $J^\mu$ , tedy bod  $W'$ . Druhým vrcholem je bod, který je nejdále od vrcholu  $W$  jehlanu  $J^\mu$ , tedy bod  $K'$ . Stejným způsobem určíme vrcholy hledané průnikové čáry na hranách  $EU$  a  $FU$ . Oproti průniku dvou hranatých těles, kde všechny vrcholy průnikové čáry leží na hranách těles, mohou u průniku tří těles existovat vrcholy průnikové čáry, které neleží na žádné hraně. Tyto vrcholy (1, 2, 3, 4, 5, 6) určíme jako společné body všech průnikových čar průniku dvou jehlanů. Máme tedy určeny všechny vrcholy hledané průnikové čáry a zbývá nám sestrojít její strany. Strany hledané průnikové čáry jsou částmi stran průnikových čar dvou jehlanů. Jsou-li oba krajní body strany průnikové čáry dvou jehlanů současně i vrcholy hledané průnikové čáry a zároveň na této úsečce neleží žádný z bodů 1, 2, 3, 4, 5, 6, pak je celá tato úsečka stranou hledané průnikové čáry. Příkladem takové strany je úsečka  $A'W'$ . Vrcholy  $A'$  a  $C'$  jsou vrcholy hledané průnikové čáry, které zároveň určují stranu průnikové čáry jehlanů  $J^\pi$  a  $J^\mu$ . Zároveň však na úsečce  $A'C'$  leží vrcholy 1 a 2 hledané průnikové čáry, které ji rozdělují na tři části. Úsečky  $A'2$  a  $1C'$  jsou stranami hledané průnikové čáry, úsečka  $12$  nikoli. Je-li pouze jeden krajní bod strany průnikové čáry dvou jehlanů zároveň vrcholem hledané průnikové čáry, leží na této straně právě jeden z vrcholů 1, 2, 3, 4, 5, 6 a tyto dva vrcholy určují stranu hledané průnikové čáry. Příkladem takové strany je úsečka  $E'3$ . Pomocí těchto pravidel sestrojíme všechny strany hledané průnikové čáry. Na závěr nám zbývá rozhodnout o viditelnosti průnikové čáry a daných jehlanů.

Úloha 2.6. V kosoúhlém zobrazení sestrojte průnik jehlanu s hranolem. Podstava  $KLMN$  hranolu leží v rovině  $\mu$  a podstava jehlanu leží v rovině  $\pi$ .



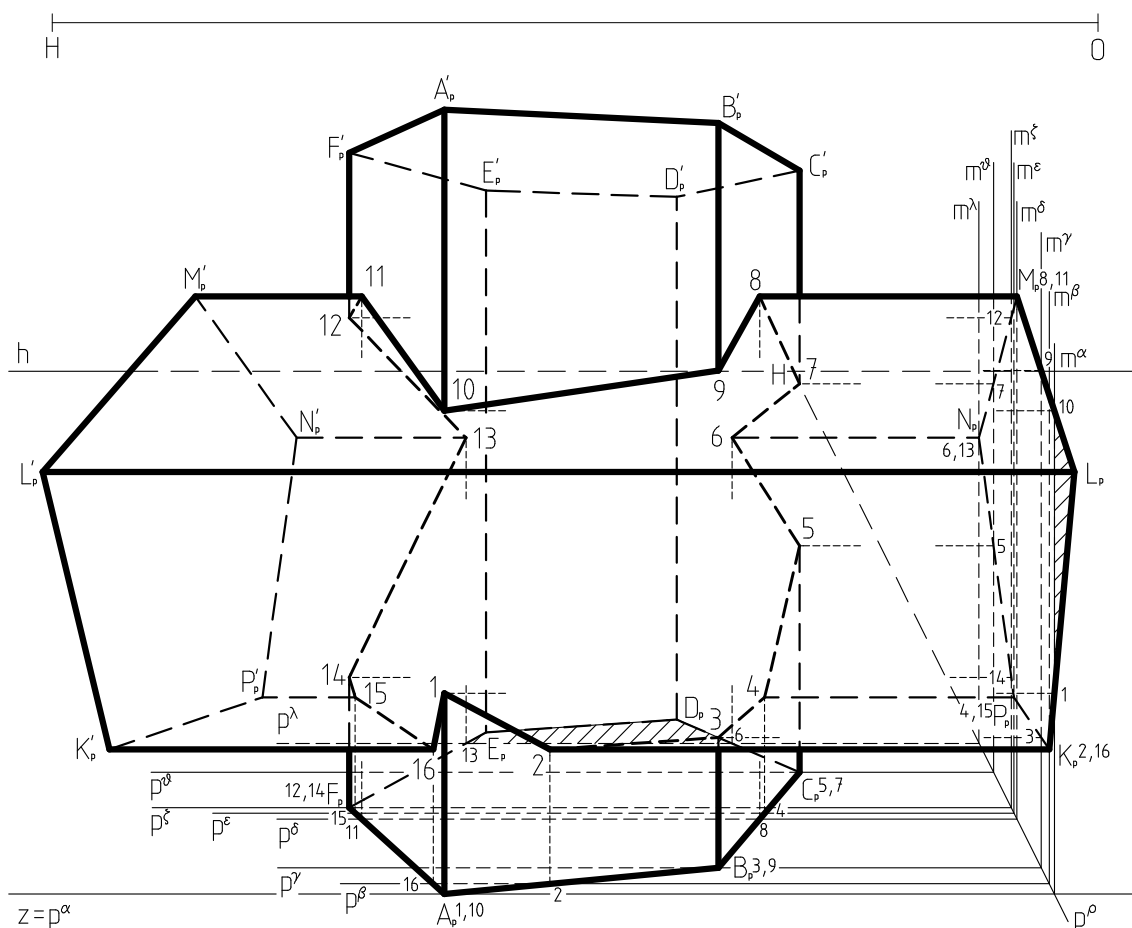
*Řešení.* Soustava pomocných rovin tvoří svazek s průsečnicí  $m$ . Půdorysné stopy rovin jsou vzhledem k poloze přímky  $m$  ( $m \parallel \pi$ ) navzájem rovnoběžné a bokorysné stopy tvoří svazek přímek o středu  $X$ . Hranami  $KK'$  a  $CV$  neprochází žádná pomocná rovina svazku, která by protínala obě tělesa, tyto hrany tedy leží v lichých částech. Ostatními hranami proložíme pomocné roviny. Vzhledem k poloze podstav těles platí, že  $A \in p^\alpha$ ,  $B \in p^\epsilon$ ,  $D \in p^\beta$ ,  $L \in m^\delta$ ,  $M \in m^\zeta$  a  $N \in m^\delta$ . Sestrojíme řezy těmito rovinami a určíme společné body hran a řezů. Získali jsme tedy vrcholy hledané průnikové čáry. Pro usnadnění konstrukce stran průnikové čáry zavedeme číslování. Po sestrojení stran průnikové lomené čáry zbývá již jen rozhodnout o viditelnosti. Viditelné části průniku jsou 12–1–2 a 6–7–8.

Úloha 2.7. Ve středovém zobrazení sestrojte průnik dvou daných hranolů. Podstavy  $ABCD$  a  $EFGH$  leží v rovině  $\rho \equiv (n^{\rho}u_s^{\rho})$ .



*Řešení.* Soustava pomocných směrových rovin je určena úběžnicí  $U_s^{\alpha}U_s^{\epsilon}$ . Sestrojíme průsečnice  $r^{\alpha}$ ,  $r^{\beta}$ ,  $r^{\gamma}$ ,  $r^{\delta}$ ,  $r^{\epsilon}$  a  $r^{\zeta}$  pomocných rovin s rovinou  $\rho$ . Středové průměty těchto průsečnic mají společný úběžník  $U_s^r = U_s^{\alpha}U_s^{\epsilon} \cap u_s^{\rho}$  a procházejí jednotlivými středovými průměty vrcholů obou podstav. Roviny  $\alpha$  a  $\zeta$  oddělují na hranolech liché části. Dále sestrojíme řezy hranolů pomocnými rovinami a určíme vrcholy průnikové lomené čáry. Zavedeme číslování a určíme viditelnost. Části 3–4–5–6 a 8–9–10–11 průnikové čáry jsou viditelné, ostatní části jsou neviditelné.

Úloha 2.8. V lineární perspektivě sestrojte průnik daných kolmých hranolů. Podstava  $ABCDEF$  leží v základní rovině a podstava  $KLMNP$  leží v rovině  $\rho$  kolmé k základnici  $z$ .



*Řešení.* Pomocné roviny jsou navzájem rovnoběžné a vzhledem k poloze těles se jejich půdorysné stopy zobrazí jako rovnoběžné. Jako rovnoběžné se zobrazí také průsečnice pomocných rovin s rovinou  $\rho$ . Rovina  $\alpha$  odděluje na jednom hranolu lichou část, v níž leží hrana  $LL'$  a rovina  $\lambda$  odděluje na druhém hranolu lichou část, v níž leží hrany  $DD'$  a  $EE'$ . Dále sestrojíme řezy hranolů danými rovinami a určíme společné body těchto řezů a příslušných hran obou hranolů. K jednodušší konstrukci stran průnikové lomené čáry zavedeme číslování. Pro kontrolu, zda jsme číslování provedli správně, ověříme, že u všech číslovaných vrcholů jsou právě dvě čísla. Po sestrojení celé průnikové čáry zjistíme, že je průniková čára tvořena z jediné části a tedy že průnik je částečný. Na závěr zbývá rozhodnout o viditelnosti průnikové čáry a obou hranolů. Viditelné části průniku jsou 16–1–2 a 8–9–10–11. Z viditelnosti průniku již snadno poznáme, jaké části hranolů jsou viditelné a které naopak neviditelné.

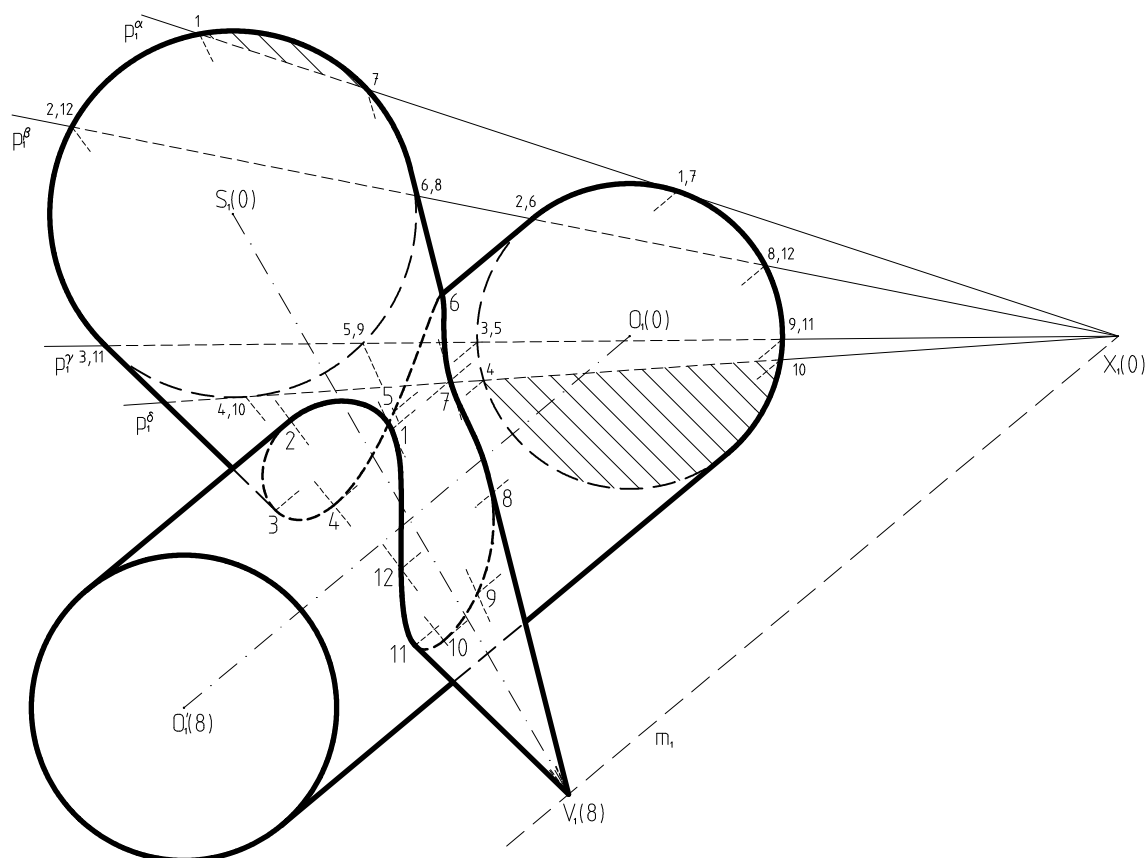
### 3 Průniky oblých těles

V řešených úlohách na průnik oblých těles budeme ke konstrukci průnikové čáry užívat soustavu pomocných rovin. U průniku dvou válců budeme volit tuto soustavu tak, aby byla vzhledem k oběma válcům soustavou směrových rovin. Při průniku dvou kůželů uijeme soustavu směrových rovin vzhledem k oběma kuželům a při průniku kužele a válce uijeme soustavu vrcholových-směrových rovin. Oproti úlohám na průnik hranatých těles využijeme v této kapitole i soustavu rovin, jež není soustavou vrcholových ani směrových rovin některého tělesa. Konkrétně v úloze na průnik kulové plochy s kuželem uijeme soustavu rovin kolmých na osu kužele. Dále sestrojíme řezy obou daných těles zvolenými pomocnými rovinami a určíme společné body těchto řezů. Tím získáme hledané body průnikové čáry, které následně spojíme plynulou čarou.

Z důvodu přehlednosti nejsou ve výsledné konstrukci zobrazeny všechny užití pomocné roviny. Zobrazeny jsou zejména ty roviny, jež obsahují důležité body průnikové čáry, například body v nichž se mění viditelnost průnikové čáry, nebo které oddělují na některém z těles liché části. Přičemž ze stejného důvodu nejsou mnohdy zobrazovány ani všechny body průniku, které leží v zobrazených rovinách.

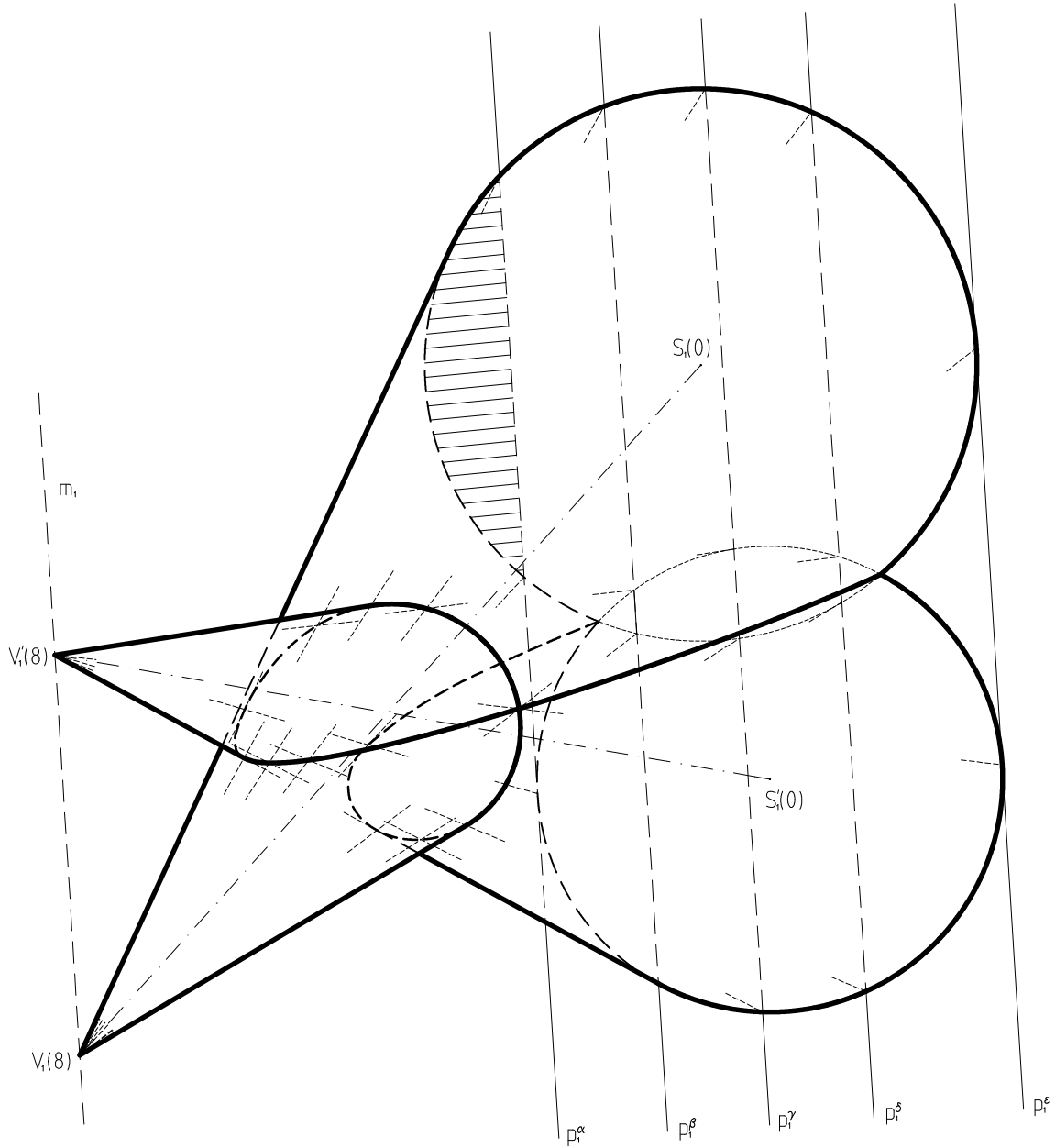
Na úlohách 3.1 a 3.3 je ukázáno užití pomocného číslování u oblých těles. Jelikož však není, vzhledem k množství bodů užitých k určení průnikové čáry, užití číslování nutné, je v ostatních úlohách vynecháno.

Úloha 3.1. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik válce a kužele. Podstavy obou těles leží v průmětně  $\pi$  a vrchol  $V$  kužele leží ve stejné rovině (s kladnou kótou) jako druhá podstava válce.



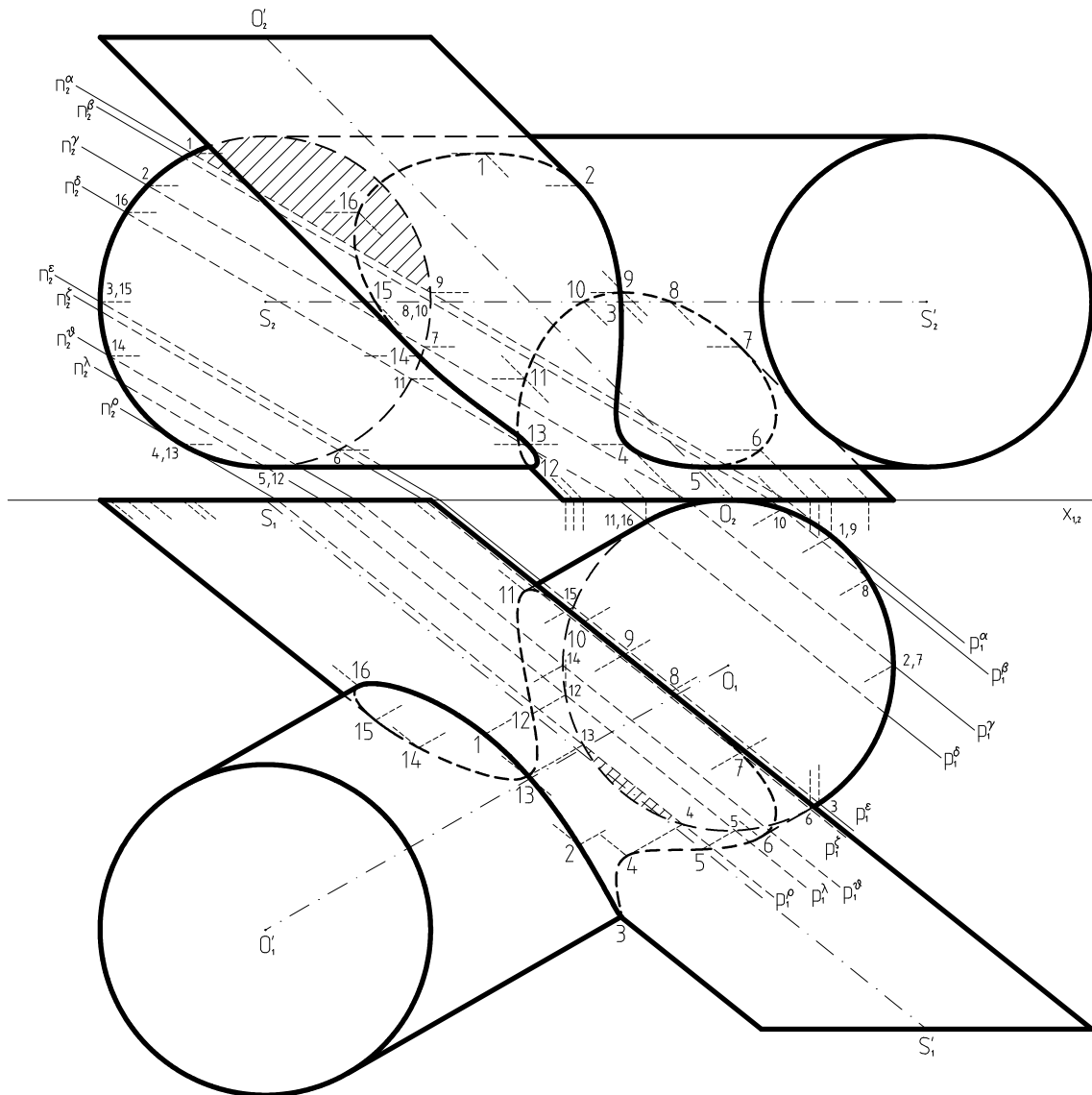
*Řešení.* Soustava pomocných rovin tvoří svazek o průsečnici  $m$ . Vzhledem k vzájemné poloze přímky  $m$  a průmětny  $\pi$  tvoří stopy pomocných rovin svazek přímek o středu v bodě  $X = \pi \cap m$ . Roviny  $\alpha$  a  $\delta$  oddělují na tělesech liché části. V rovinách  $\beta$  a  $\gamma$  leží body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Sestrojíme řezy pomocnými rovinami a určíme společné body těchto řezů. Zavedeme číslování a získané body průnikové čáry ve správném pořadí spojíme plynulou čarou. Na závěr určíme viditelnost průnikové čáry a daných těles. Viditelné části průnikové čáry jsou 2–1–12–11 a 6–7–8. Jelikož je průniková čára tvořena z jedné části, je průnik částečný.

Úloha 3.2. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik dvou daných kuželů. Podstavy obou kuželů leží v průmětně  $\pi$  a vrcholy na téže přímkce  $m$  rovnoběžné s průmětnou (s kladnou kótou).



*Řešení.* Pomocné roviny tvoří svazek rovin o průsečnici  $m = VV'$ . Stopy pomocných rovin jsou vzhledem k poloze přímky  $m$  ( $m \parallel \pi$ ) navzájem rovnoběžné. Rovina  $\alpha$  je vzhledem k jednomu kuželi rovinou styčnou a na druhém vymezuje lichou část. Rovina  $\varepsilon$  je zároveň styčnou rovinou obou kuželů a současně se příslušné povrchové úsečky protínají ve dvojném bodě průnikové čáry. V rovinách  $\gamma$  a  $\delta$  leží body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Další postupujeme stejně jako v předchozí úloze.

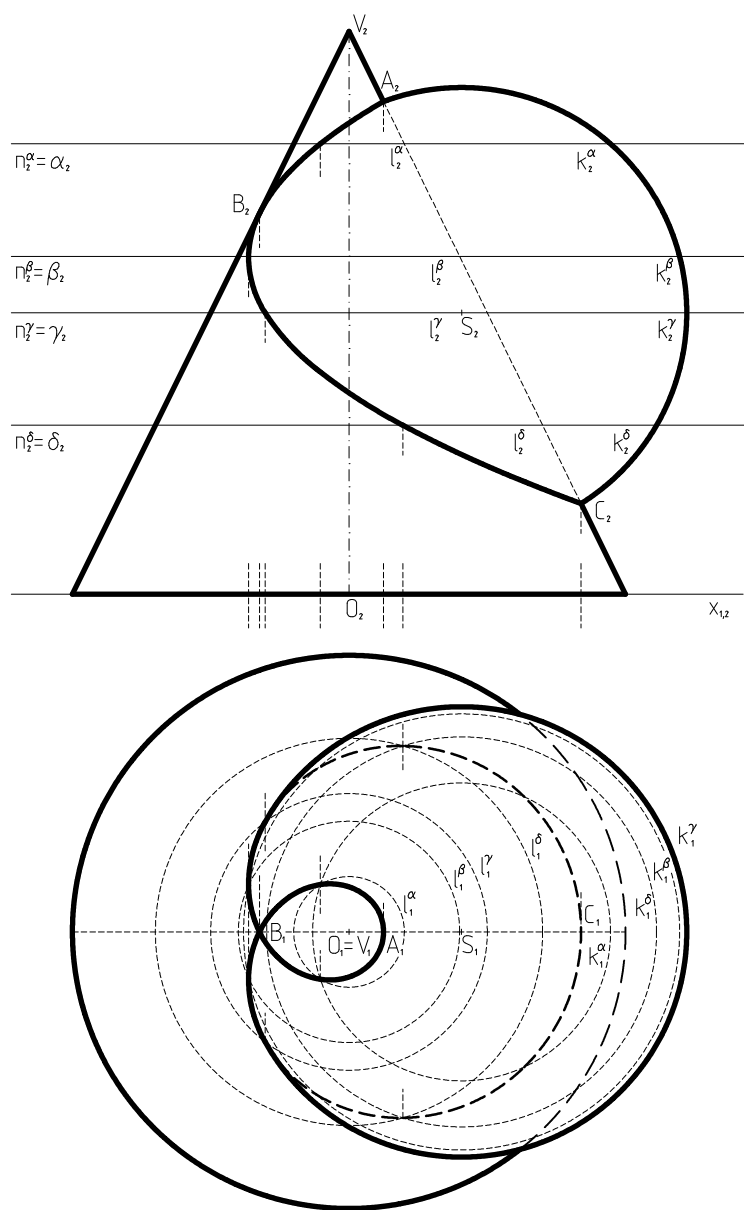
Úloha 3.3. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik dvou daných válců. Podstava jednoho válce leží v půdorysně a podstava druhého válce leží v nárysně.



*Řešení.* Pomocné roviny tvoří soustavu rovnoběžných rovin a tedy i jejich půdorysné (resp. nárysné) stopy jsou navzájem rovnoběžné. Roviny  $\alpha$  a  $\rho$  oddělují na tělesech liché části. Roviny  $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \vartheta$  a  $\lambda$  obsahují body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Pomocí řezů rovinami určíme body hledané průnikové čáry a zavedeme číslování. Nakonec rozhodneme o viditelnosti půdorysu a nárysu průnikové čáry. Viditelné části průnikové čáry jsou 16–1–2–3, 8–9–10 v půdoryse a 2–3–4–5, 12–13–14 v náryse. Průniková čára je tvořena z jediné části a tudíž se jedná o průnik částečný.

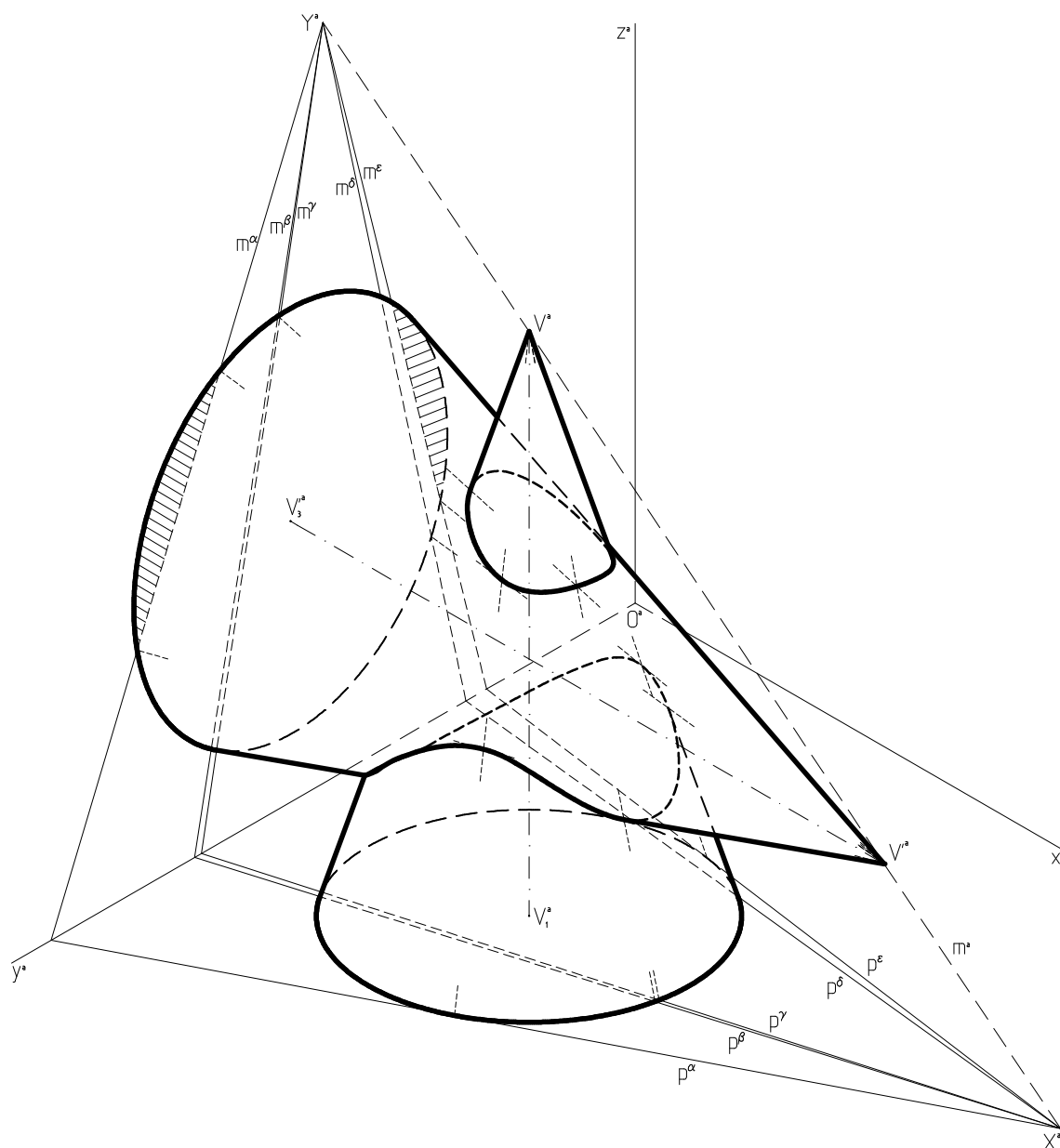


Úloha 3.4. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik kulové plochy a rotačního kužele, jehož podstava leží v půdorysně.



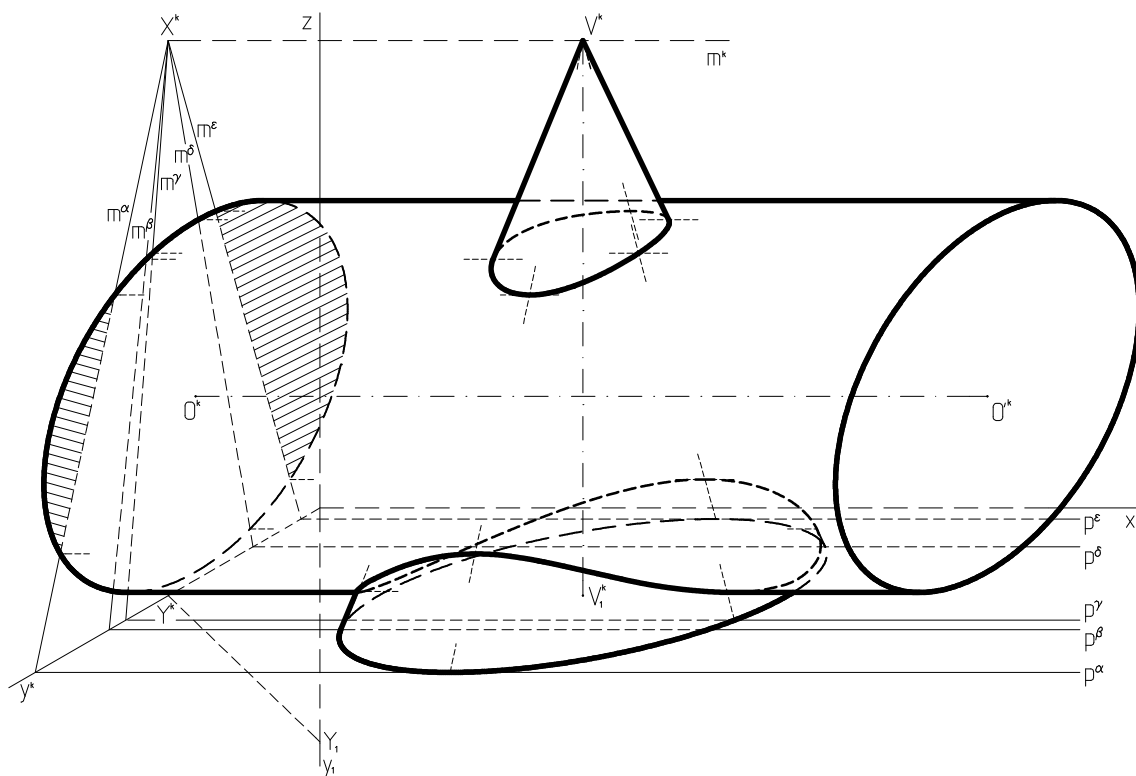
*Řešení.* Ke konstrukci užijeme soustavu rovnoběžných rovin kolmých na osu kužele. Vzhledem k rovnoběžnosti pomocných rovin s průmětnou  $\pi$  neexistují jejich půdorysné stopy. V náryse se pomocné roviny zobrazí jako přímky totožné se svými nárysnými stopami ( $n_2^\alpha = \alpha_2$ ). Body průnikové čáry určíme jako společné body řezů obou těles pomocnými rovinami. Například rovina  $\alpha$  protíná kužel v kružnici  $l^\alpha$  a kulovou plochu v kružnici  $k^\alpha$ . Body, v nichž se tyto dvě kružnice protínají, jsou body průnikové čáry. K určení bodů  $A, B, C$  není třeba pomocných rovin, jelikož díky poloze těles známe jejich druhé průměty  $A_2, B_2, C_2$  a první průměty již snadno sestrojíme. Průniková čára má pouze jednu část, jedná se tedy o průnik částečný s dvojným bodem  $B$ .

Úloha 3.5. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik dvou rotačních kuželů. Podstava jednoho kužele leží v průmětně  $\pi$  a podstava druhého kužele v průmětně  $\mu$ .



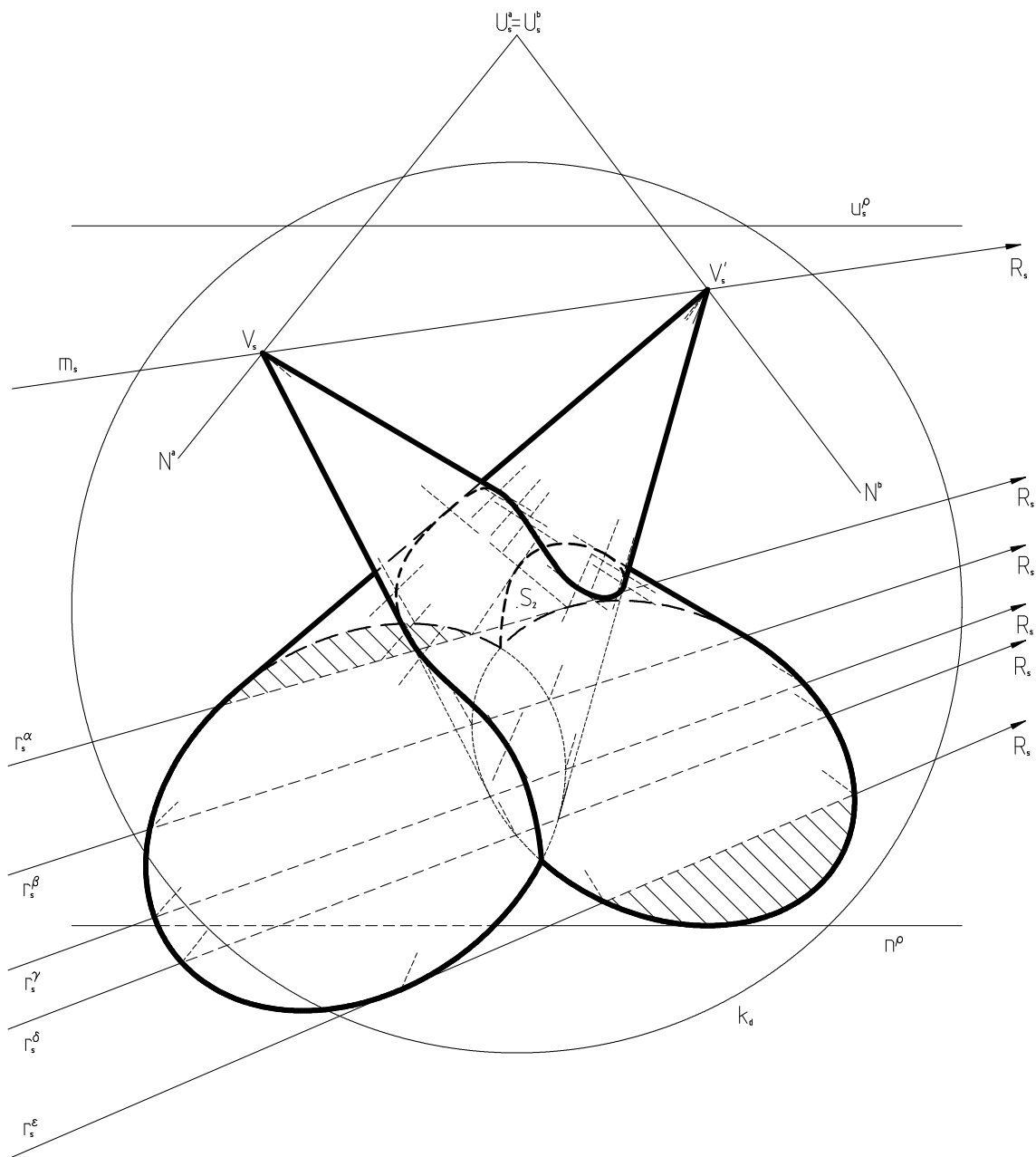
*Řešení.* Přímka  $m$  procházející vrcholy  $V$  a  $V'$  obou kuželů určuje svazek pomocných vrcholových rovin. Půdorysné stopy pomocných rovin tvoří svazek přímek o středu  $X = \pi \cap m$  a bokorysné stopy tvoří svazek přímek o středu  $Y = \mu \cap m$ . Roviny  $\alpha$  a  $\varepsilon$  vymezují liché části a v rovinách  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\delta$  leží body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Dále postupujeme stejně jako v předešlých úlohách. Nejprve sestojíme řezy kuželů pomocnými rovinami a určíme jejich společné body. Poté spojíme získané body plynulou čarou a určíme viditelnost. Průniková čára je tvořena ze dvou částí a průnik je tedy úplný.

Úloha 3.6. V kosoúhlém zobrazení sestrojte průnik rotačního kužele a rotačního válce. Podstava kužele leží v průmětně  $\pi$  a podstava válce v průmětně  $\mu$ .



*Řešení.* Pomocné roviny tvoří svazek rovin o průsečnici  $m$ , kde přímka  $m$  prochází vrcholem  $V$  kužele a je rovnoběžná se osou válce. Půdorysné stopy pomocných rovin jsou vzhledem k poloze přímky  $m$  ( $m \parallel \pi$ ) navzájem rovnoběžné a bokorysné stopy tvoří svazek přímek o středu  $X = \mu \cap m$ . Roviny  $\alpha$  a  $\varepsilon$  vymezují na válci liché části. V rovinách  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\delta$  leží body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Dále sestrojíme řezy obou těles pomocnými rovinami a určíme jejich společné body. Tyto body spojíme plynulou čarou a rozhodneme o viditelnosti. Průniková čára je tvořena ze dvou částí a průnik je tedy úplný.

Úloha 3.7. Ve středovém zobrazení sestrojte průnik dvou daných kuželů. Podstavy obou kuželů leží v rovině  $\rho$ . Vrcholy  $V$  a  $V'$  kuželů leží na nositelkách  $N^aU^a$  a  $N^bU^b$ .



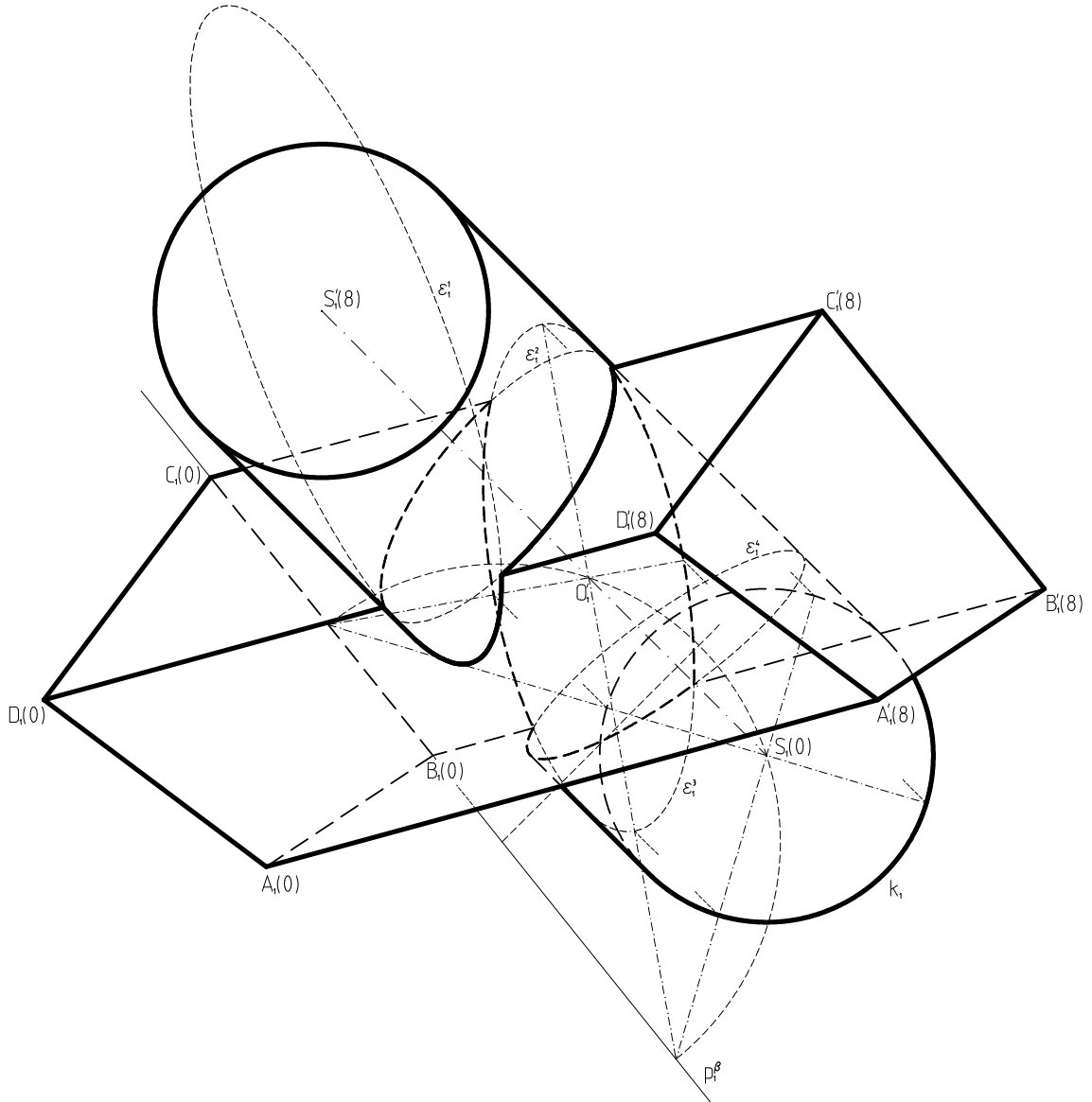
*Řešení.* Sestrojíme průsečík  $R$  přímky  $m = VV'$  s rovinou  $\rho$ . Tímto bodem procházejí všechny průsečnice pomocných vrcholových rovin s rovinou  $\rho$ . Pomocné vrcholové roviny tvoří svazek rovin o průsečnici  $m$ . Pomocné roviny  $\alpha$  a  $\epsilon$  oddělují na kuželech liché části. Dále sestrojíme řezy obou těles pomocnými rovinami a určíme jejich společné body. Jelikož se části podstav kuželů navzájem překrývají, jsou průsečíky podstavných hran kuželů body průnikové čáry. Na závěr spojíme získané body plynulou čarou a rozhodneme o viditelnosti.

## 4 Průniky hranatých a oblých těles

V úlohách na průnik hranatého tělesa s tělesem oblým budeme průnikovou čáru konstruovat pomocí řezů oblého tělesa rovinami, které obsahují stěny hranatého tělesa. Části řezů, které leží ve stěnách hranatého tělesa, pak budou tvořit průnikovou čáru. Jelikož za oblá tělesa uvažujeme pouze kruhové válce, kruhové kužele či koule, jsou průnikové čáry tvořeny z částí kuželoseček.

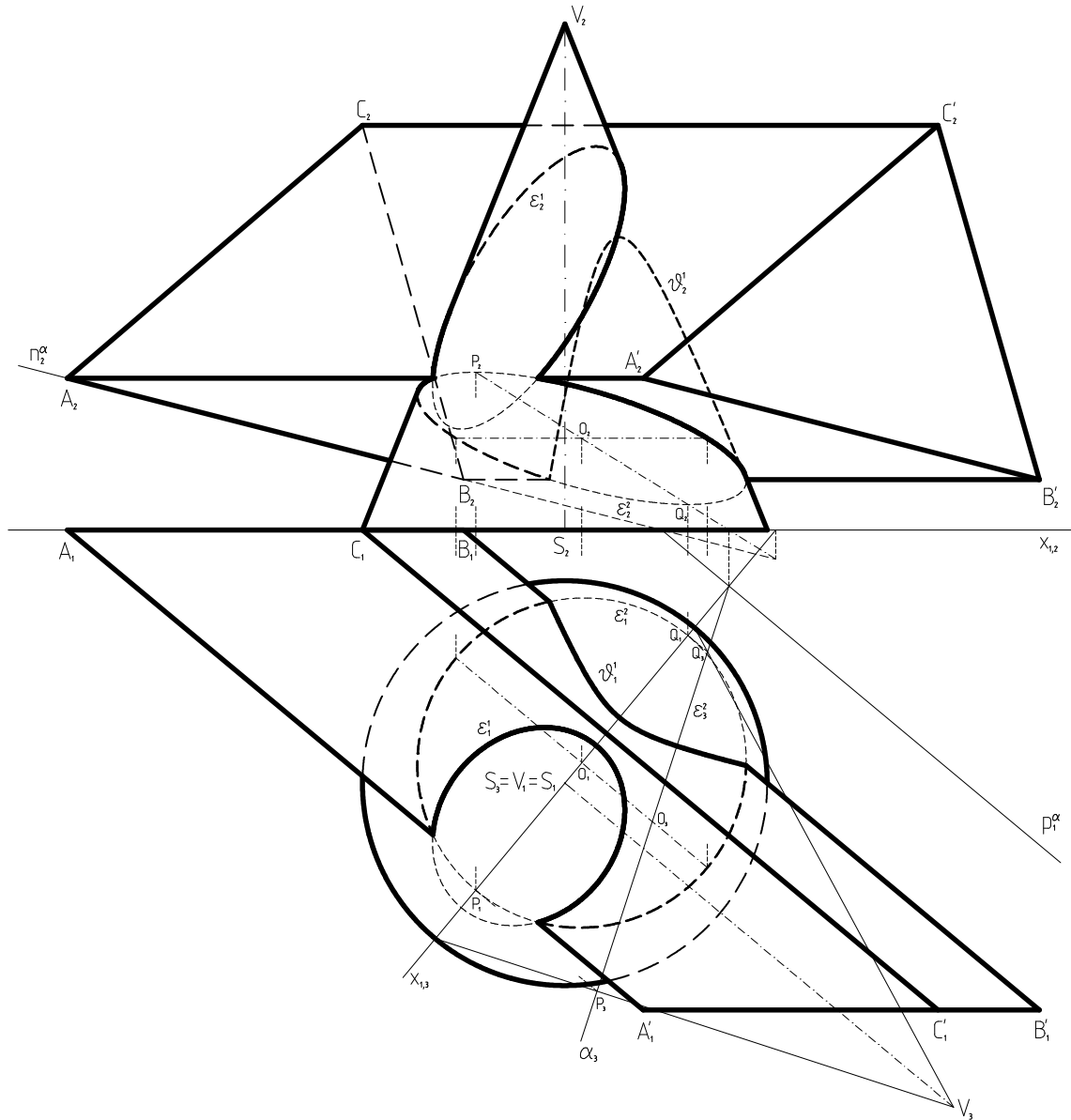
Z důvodu přehlednosti je v každé úloze zobrazena a popsána jediná konstrukce řezu příslušné plochy rovinou. V úlohách 4.1, 4.3, 4.4 a 4.5 jsou všechny řezy kuželosečkou stejného typu a postupy konstrukce řezů jsou tedy analogické. V úloze 4.2 jsou řezy dvou typů (dva eliptického a jeden hyperbolického), přičemž je zobrazena konstrukce eliptického řezu.

Úloha 4.1. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik válce a hranolu. Podstava  $ABCD$  hranolu a podstava válce o středu  $S$  leží v průmětně  $\pi$ . Podstava  $A'B'C'D'$  hranolu a podstava válce o středu  $S'$  leží v téže rovině (s kladnou kótou).



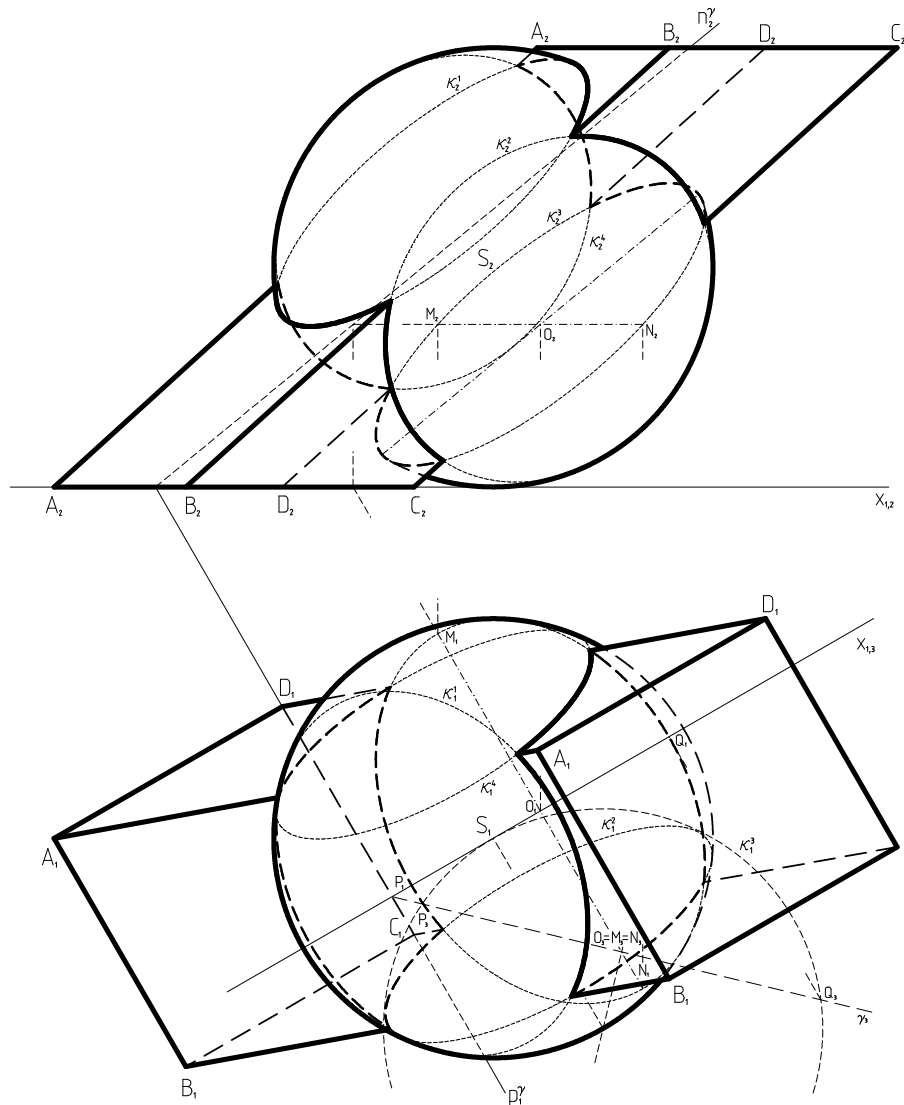
*Řešení.* Sestrojíme řezy válcové plochy příslušné k válci rovinami, které obsahují stěny hranolu. Rovina  $\beta$  obsahuje stěnu  $BCB'C'$  a tedy její půdorysná stopa  $p_1^\beta$  prochází vrcholy  $B$  a  $C$ . Nejprve určíme průsečík  $O'$  přímky  $SS'$  s rovinou  $\beta$ . Bod  $O'$  je středem hledané elipsy, v níž rovina  $\beta$  protíná válcovou plochu. Průmět hledané elipsy sestrojíme pomocí osové afinity  $\mathcal{A} = (p_1^\beta; S_1 \rightarrow O_1')$ , v níž průmět  $\varepsilon_1^3$  hledané elipsy odpovídá průmětu  $k_1$  podstavné hrany válce. Analogicky sestrojíme i ostatní řezy a určíme ty jejich části, které leží ve stěnách hranolu. Tím získáme hledanou průnikovou čáru. Na závěr rozhodneme o viditelnosti průnikové čáry a obou těles.

Úloha 4.2. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik rotačního kužele a hranolu. Podstava kužele leží v půdorysně a podstava hranolu leží v nárysně.



*Řešení.* Rovina obsahující stěnu  $BCB'$  hranolu protíná příslušnou kuželovou plochu v hyperbole, zbylé dvě roviny protínají kuželovou plochu v elipsách. K sestrojení řezu kužele rovinou  $\alpha = ABA'$  uijeme třetí vedlejší průmětnu obsahující osu kužele a kolmou k rovině  $\alpha$ . Hledaná elipsa se ve třetím průmětu zobrazí jako úsečka  $P_3Q_3$ . Z třetího průmětu hledané elipsy již snadno sestrojíme průmět první a následně i druhý. Části všech tří řezů, které leží ve stěnách hranolu, tvoří hledanou průnikovou čáru. Průniková čára je tvořena z jedné části a průnik je tedy částečný.

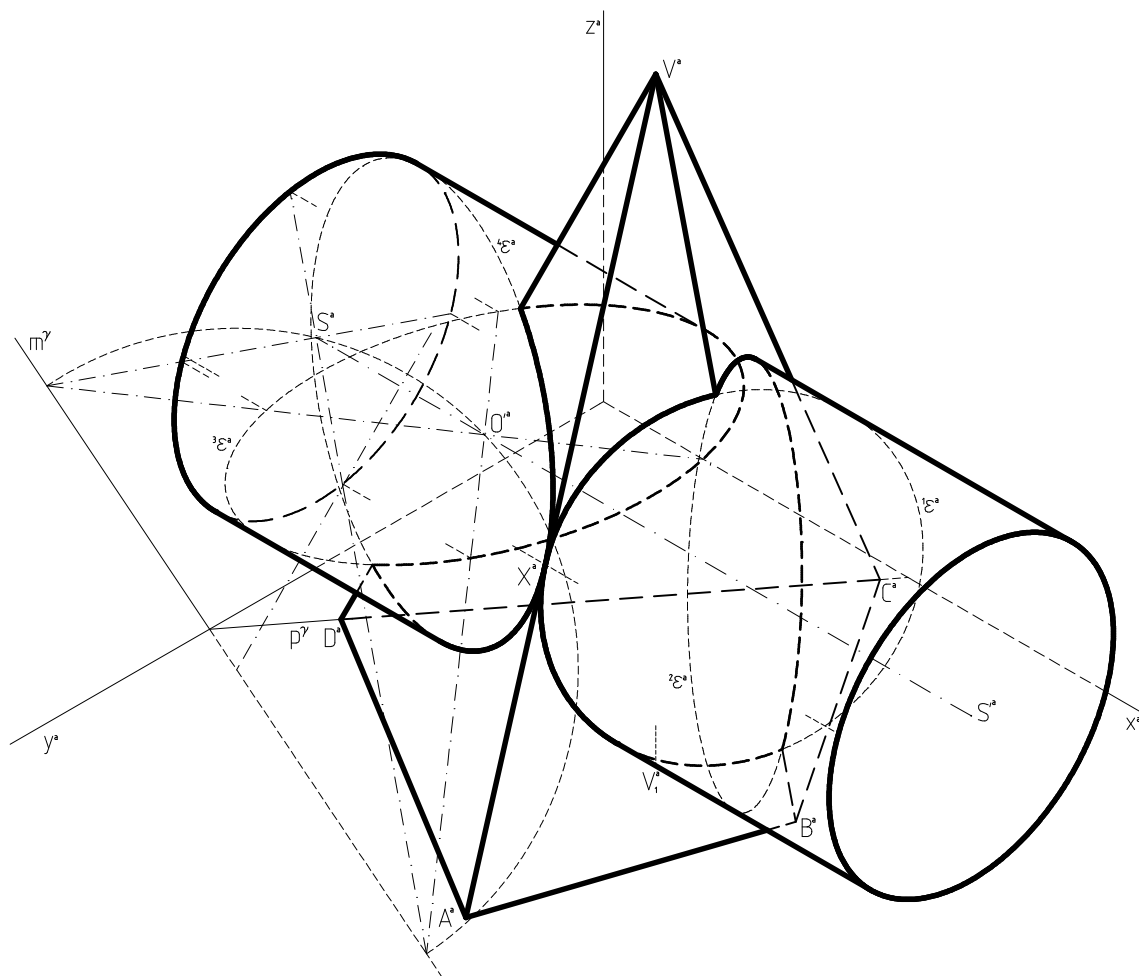
Úloha 4.3. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik kulové plochy a hranolu, jehož podstava leží v půdorysně.



*Řešení.* Roviny obsahující stěny hranolu protínají kulovou plochu v kružnicích, které se v obou průmětech zobrazí jako elipsy. K sestrojení řezu kulové plochy rovinou  $\gamma = CDC'$  užijeme třetí vedlejší průmětnu procházející středem kulové plochy a kolmou k rovinám  $\pi$  a  $\gamma$ . Hledaná kružnice se ve třetím průmětu zobrazí jako úsečka  $P_3Q_3$ , tato úsečka určuje průměr hledané kružnice. Prvním průmětem hledané kružnice je elipsa s hlavní hlavní osou  $M_1N_1$  a vedlejší osou  $P_1Q_1$ . Sestrojení druhého průmětu kružnice je již otázkou elementárních konstrukcí. Takto sestrojíme i zbylé řezy a poté určíme ty části, které leží ve stěnách hranolu. Hledaná průniková čára je tvořena ze dvou částí, jedná se tedy o průnik úplný.



Úloha 4.4. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik rotačního válce a jehlanu. Podstava jehlanu leží v průmětně  $\pi$  a podstava válce v průmětně  $\mu$ .



*Řešení.* Sestrojíme řezy válce rovinami obsahujícími stěny jehlanů. Tyto roviny protínají příslušnou válcovou plochu v elipsách. Rovina  $\gamma$  obsahující stěnu  $CDV$  jehlanu protíná osu válce v bodě  $O'$ , který je středem hledané elipsy. K sestrojení hledané elipsy užijeme osové afinity  $\mathcal{A} = (m^\gamma; S^a \rightarrow O'^a)$ , v níž hledaná elipsa odpovídá podstavné hraně válce. Stejným postupem sestrojíme i ostatní elipsy a určíme ty části, které leží ve stěnách jehlanu. Získáme tedy hledanou průnikovou čáru. Části průnikové čáry ležících na elipsách  ${}^1\varepsilon$  a  ${}^4\varepsilon$  se navzájem dotáknou v bodě  $X$ , který leží na hraně  $AV$  jehlanu. Tento bod je tedy dvojným bodem průnikové čáry.



# Závěr

Cílem této práce bylo sestrojít průniky těles v různých zobrazovacích metodách. Práce může sloužit studentům či učitelům deskriptivní geometrie jako doplňující materiál ke studiu či výkladu dané látky. Součástí práce je příloha, která obsahuje předrýsovaná zadání řešených úloh.

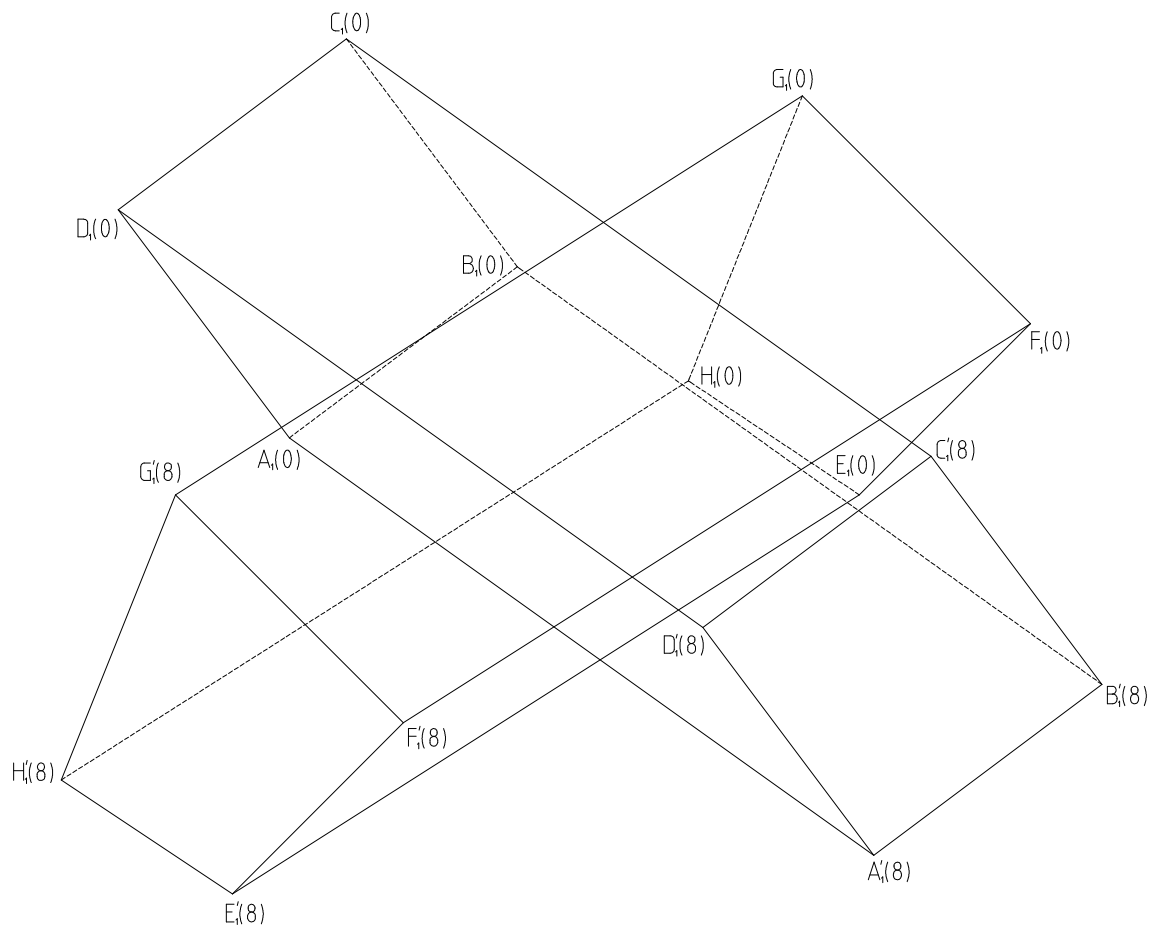
Jelikož studium průniku těles zahrnuje širokou škálu případů v závislosti na samotných tělesech, jejich počtu a jejich vzájemné poloze, nelze obecně popsat všechny situace, a proto jsme se omezili jen na vyšetřování průniku základních těles. Dále jsme se omezili především na průniky dvou těles. Úloha 2.5 věnovaná průniku tří těles nám dává nahlédnout na rozdíl mezi průnikem dvou těles a průnikem více těles. Abychom redukovali množství a obtížnost pomocných konstrukcí, a přitom zachovali základní princip řešení, volili jsme speciální polohy těles, konkrétně jejich podstav. Podstavy těles jsme nejčastěji volili v průmětnách, případně jsme podstavy obou těles umístili do téže roviny. Díky tomu jsme se v úlohách mohli zabývat především samotnou konstrukcí průniku.

# Literatura

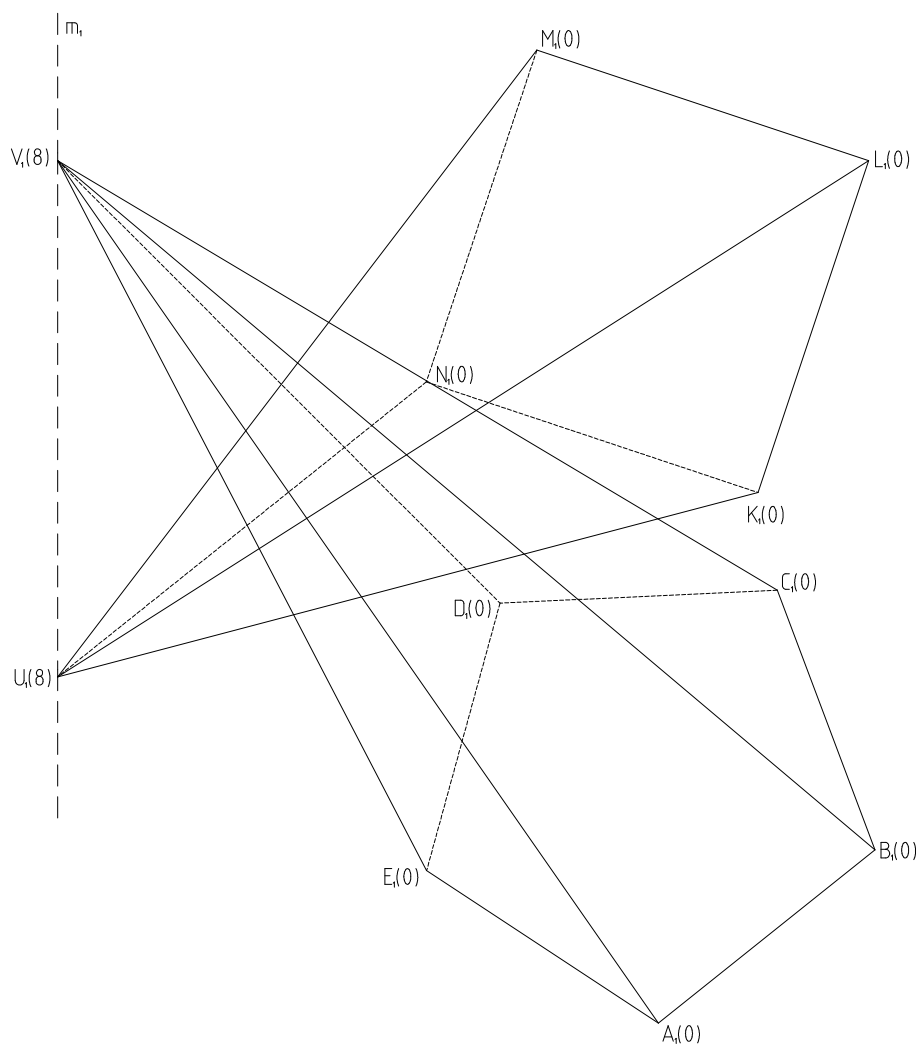
- [1] BRAUNER, M.: *Průniky těles v kolmé axonometrii (sbírka příkladů)*, Bakalářská práce, Brno, 2006
- [2] DRÁBEK, K.; et al.: *Deskriptivní geometrie II.*, dotisk, Praha, SNTL, 1964
- [3] HANUŠOVÁ, M.: *Průniky těles*, Bakalářská práce, Brno, 2009
- [4] JAROLÍMEK, V.: *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné*, 3. vyd., Praha, Jednota českých matematiků, 1904
- [5] KEJZLAR, K.; KŘEČEK, V.; NOVÁK, J.: *Deskriptivní geometrie*, 2. vyd., Liberec, Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1966
- [6] PISKA, R.; MEDEK, V.: *Deskriptivní geometrie I.*, 2. vyd., Praha, SNTL/ALFA, 1972
- [7] PISKA, R.; MEDEK, V.: *Deskriptivní geometrie II.*, 2. vyd., Praha, SNTL/ALFA, 1975
- [8] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I.*, 1. vyd., Praha, SNTL/SVTL, 1965
- [9] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II.*, 3. vyd., Praha, SNTL/ALFA, 1984

# Příloha

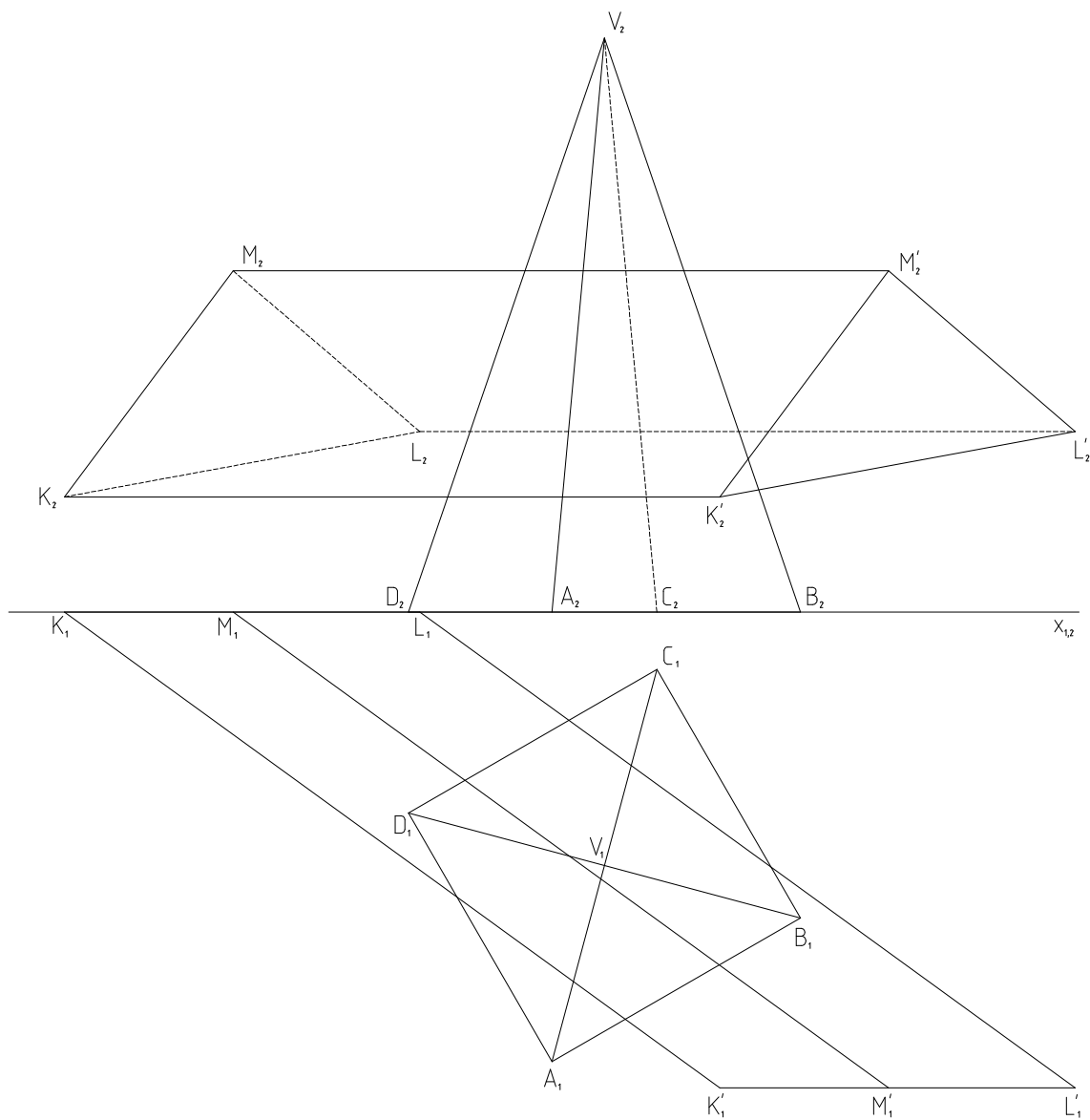
*Zadání 2.1.* V kótovaném zobrazení sestrojte průnik daných kosých hranolů, jejichž podstavy  $ABCD$ ,  $EFGH$  leží v průmětně a podstavy  $A'B'C'D'$ ,  $E'F'G'H'$  leží v téže rovině s kladnou kótou.



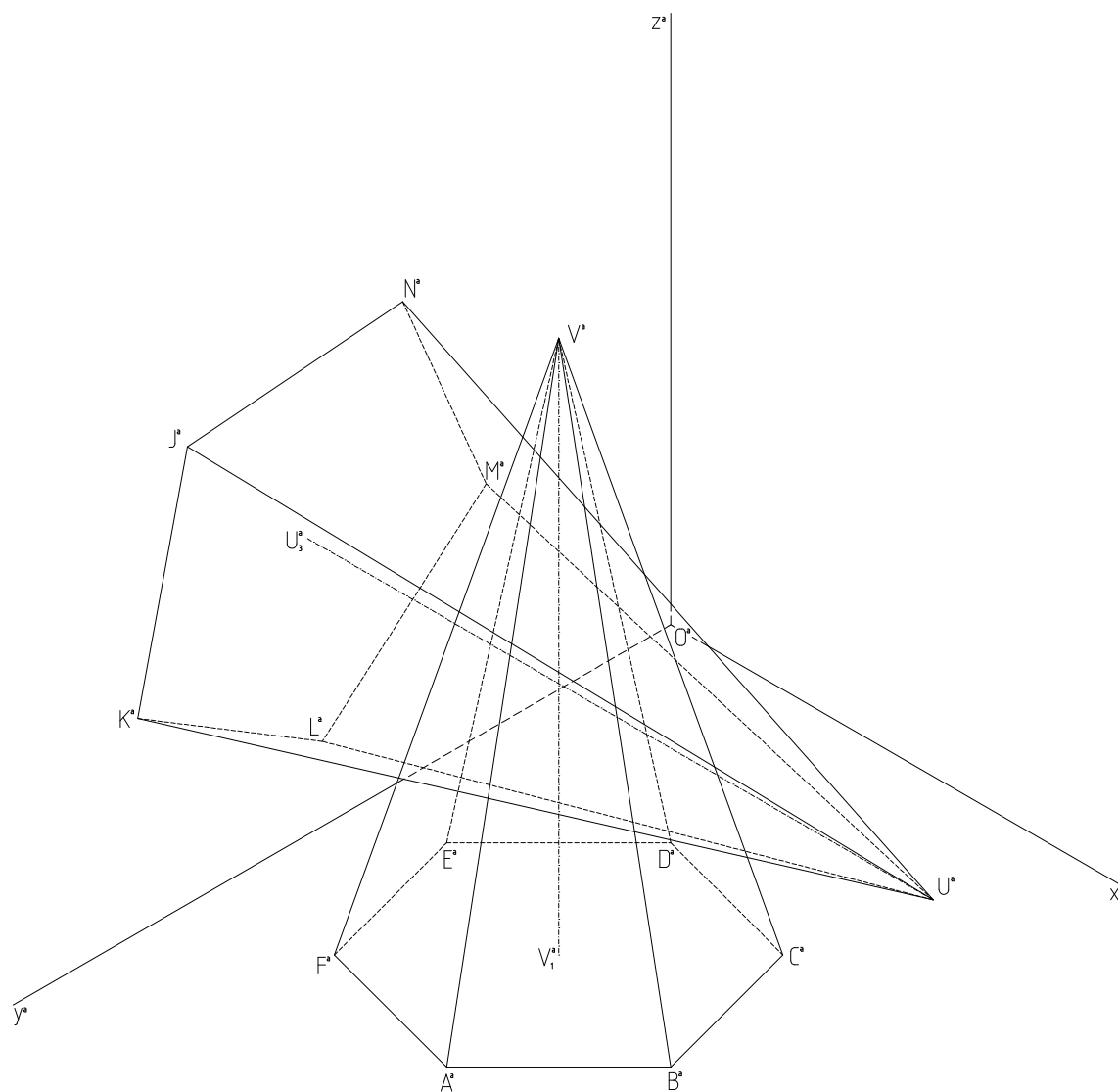
Zadání 2.2. V kótovaném zobrazení sestrojte průnik dvou jehlanů, jejichž podstavy  $ABCDE$  a  $KLMN$  leží v průmětně. Vrcholy  $U$  a  $V$  jehlanů leží na přímce  $m$  rovnoběžné s průmětnou (s kladnou kótou).



*Zadání 2.3.* V Mongeově zobrazení sestrojte průnik hranolu a jehlanu. Podstava hranolu leží v nárysně a podstava jehlanu leží v půdorysně.

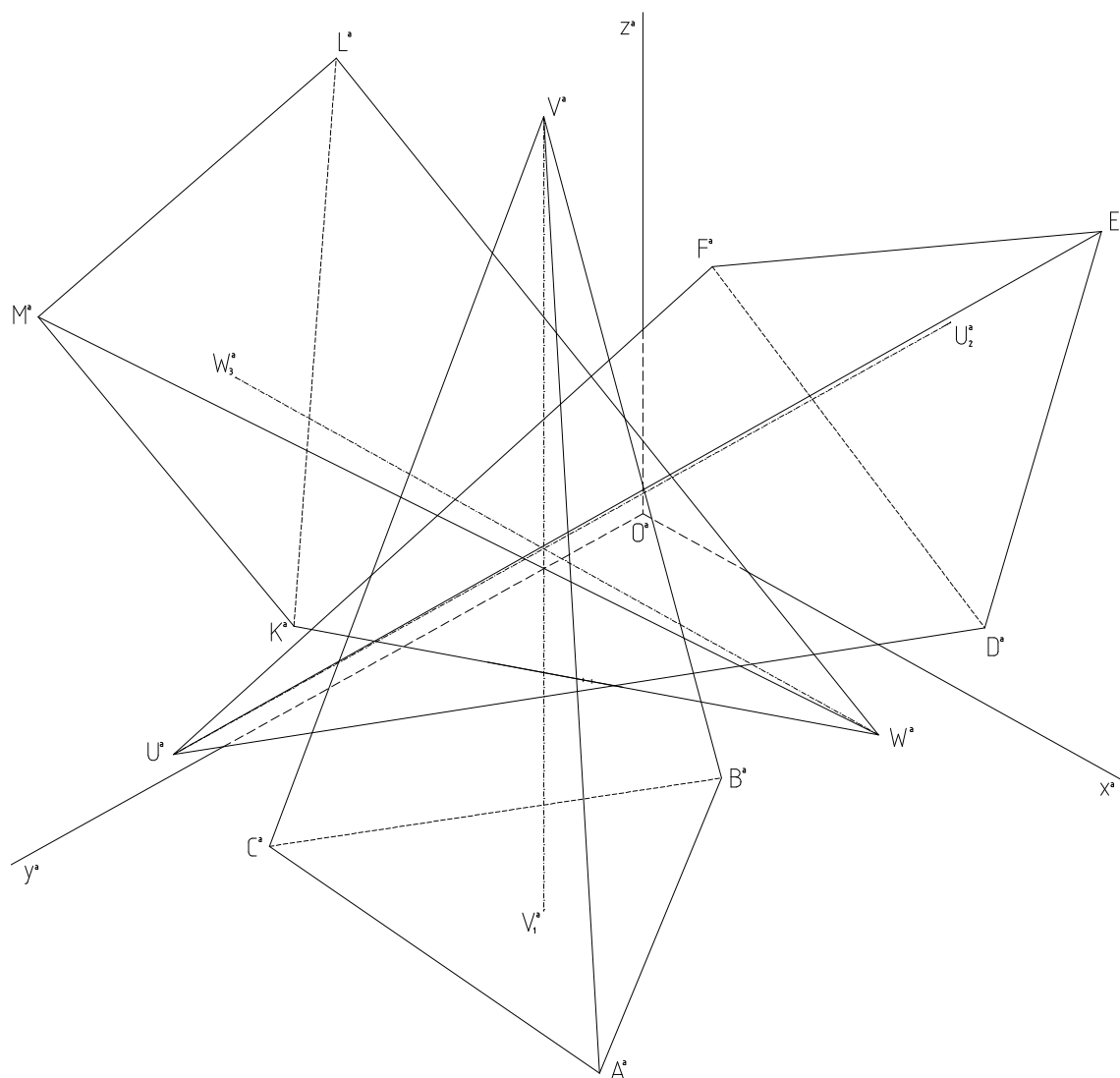


Zadání 2.4. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik dvou daných kolmých jehlanů. Podstava jehlanu  $ABCDEFV$  leží v průmětně  $\pi$  a podstava jehlanu  $KLMNJU$  leží v průmětně  $\mu$ .

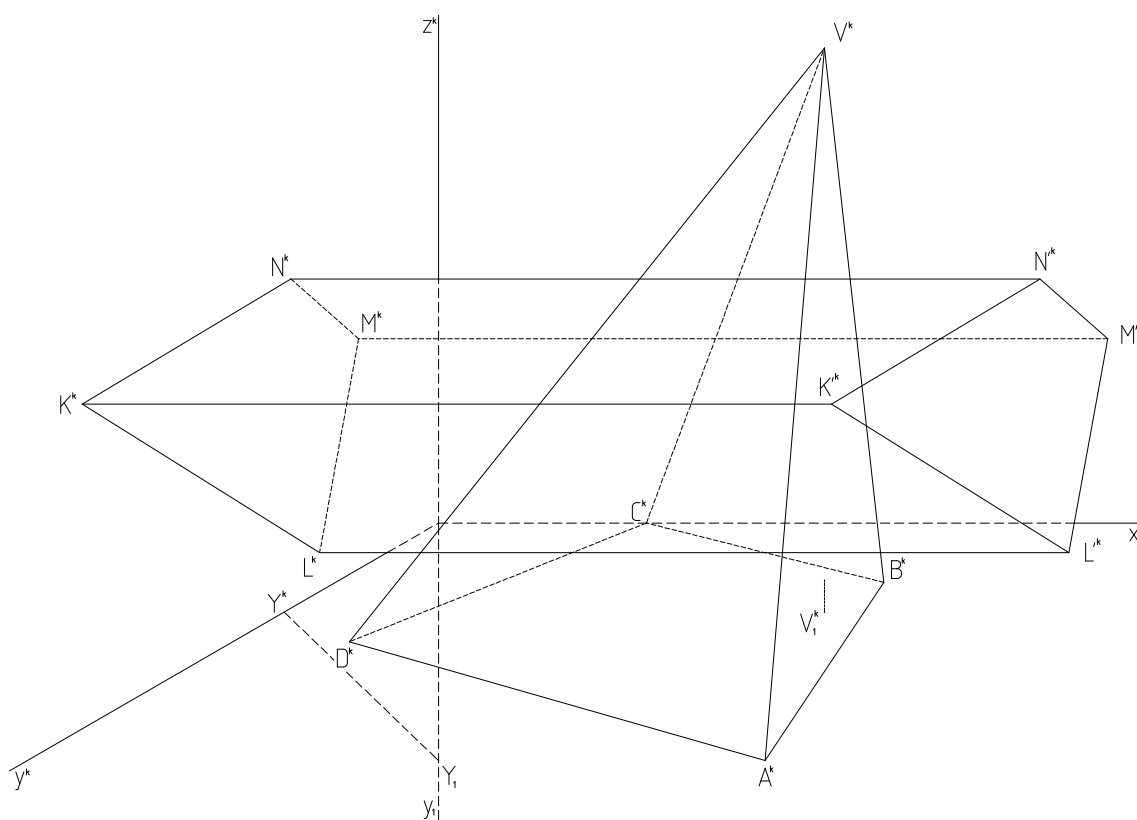




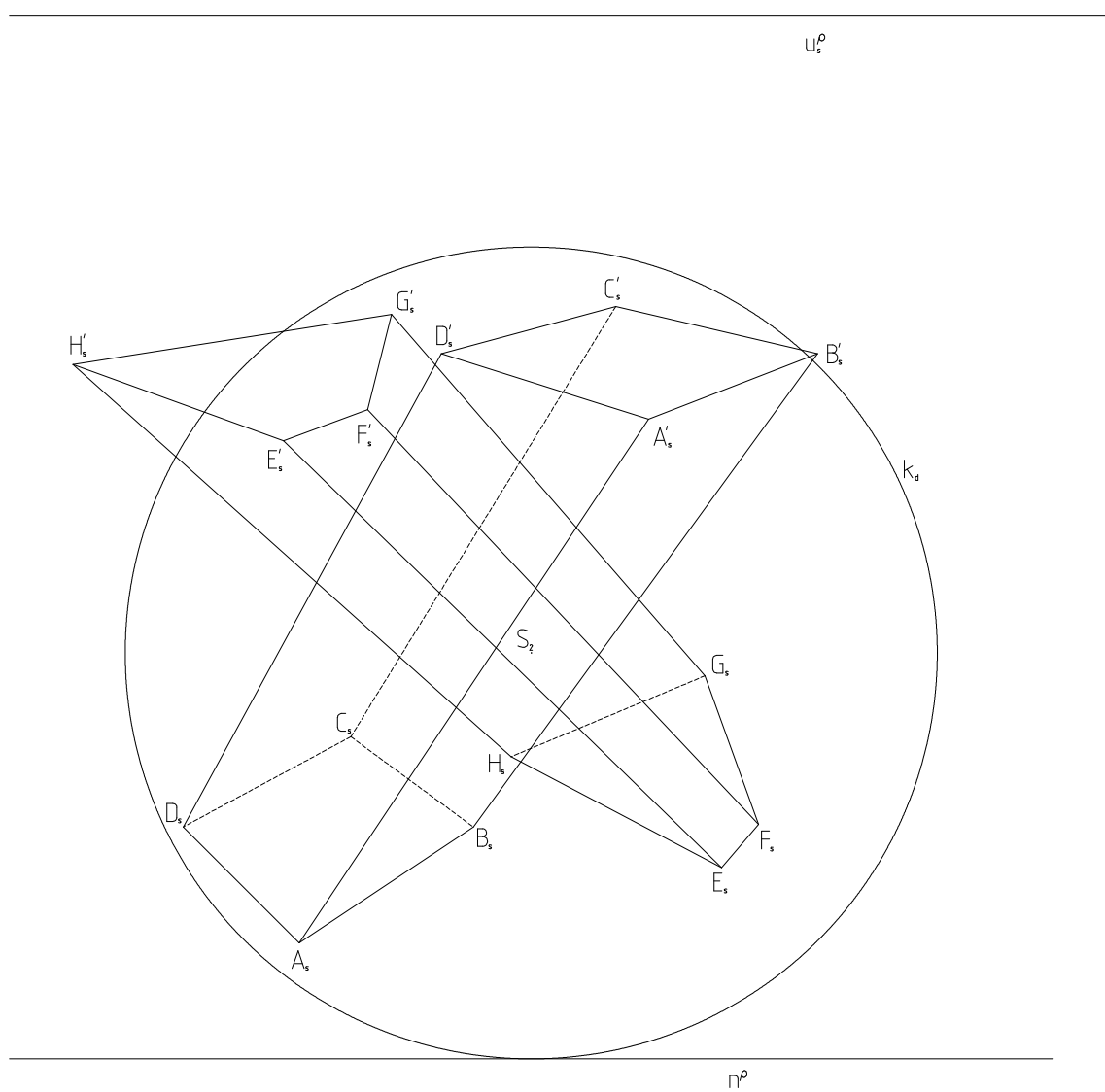
Zadání 2.5. V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik tří kolmých jehlanů  $J^\pi$ ,  $J^\nu$  a  $J^\mu$ . Podstava jehlanu  $J^\pi$  leží v průmětně  $\pi$ , podstava jehlanu  $J^\nu$  leží v průmětně  $\nu$  a podstava jehlanu  $J^\mu$  leží v průmětně  $\mu$ .



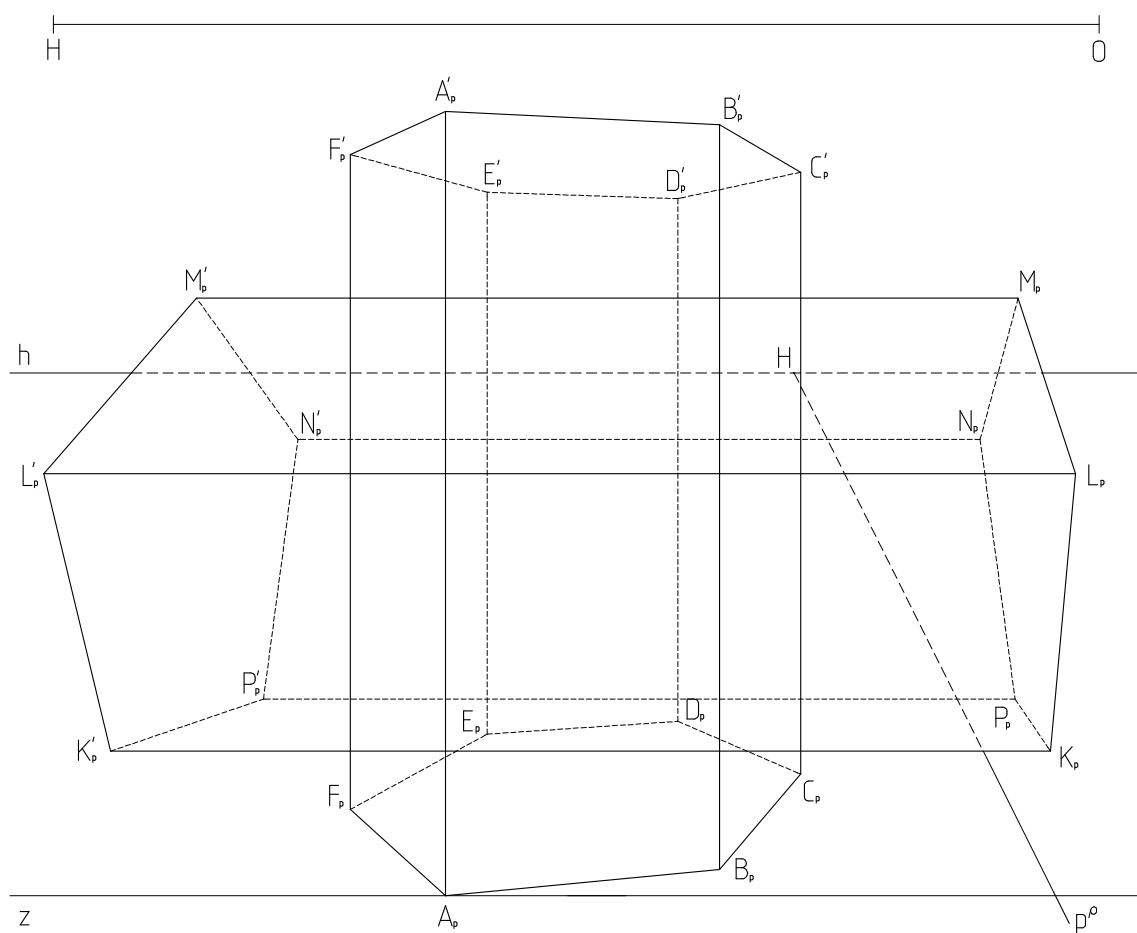
Zadání 2.6. V kosoúhlém zobrazení sestrojte průnik jehlanu s hranolem. Podstava  $KLMN$  hranolu leží v rovině  $\mu$  a podstava jehlanu leží v rovině  $\pi$ .



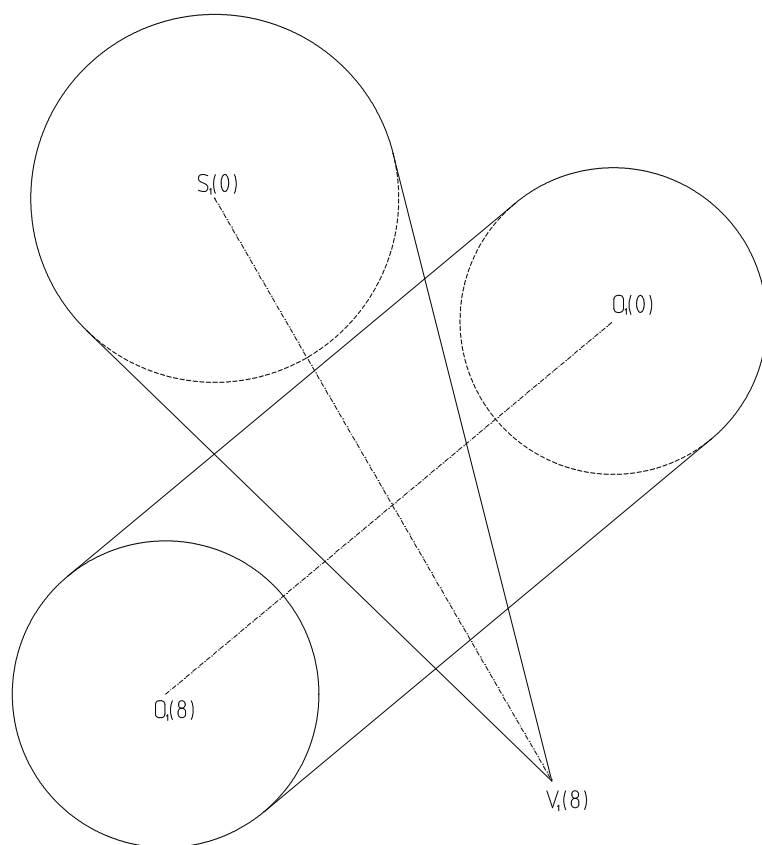
Zadání 2.7. Ve středovém zobrazení sestrojte průnik dvou daných hranolů. Podstavy  $ABCD$  a  $EFGH$  leží v rovině  $\rho \equiv (n^{\rho}u_s^{\rho})$ .



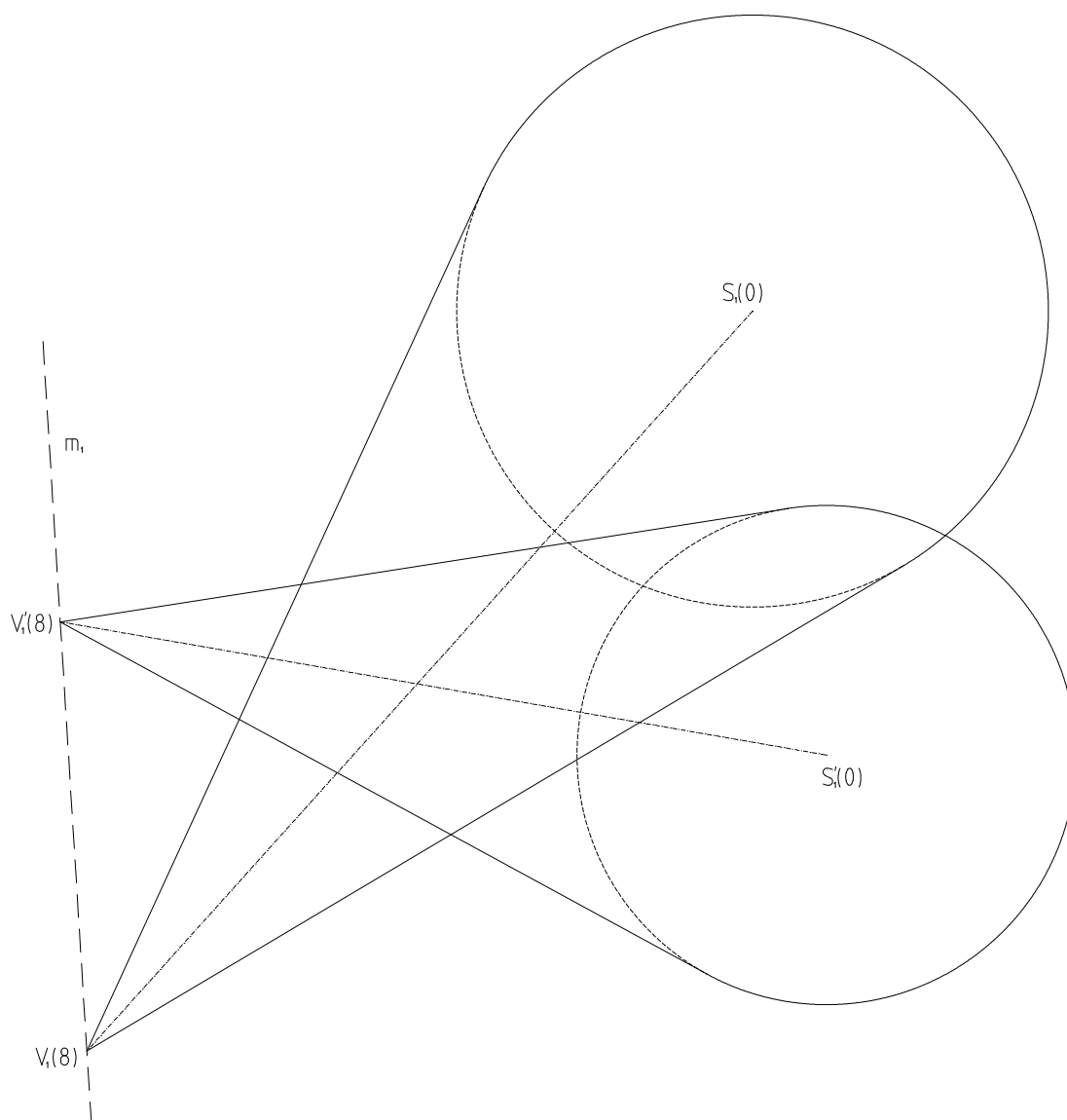
Úloha 2.8. V lineární perspektivě sestrojte průnik daných kolmých hranolů. Podstava  $ABCDEF$  leží v základní rovině a podstava  $KLMNP$  leží v rovině  $\rho$  kolmé k základnici  $z$ .



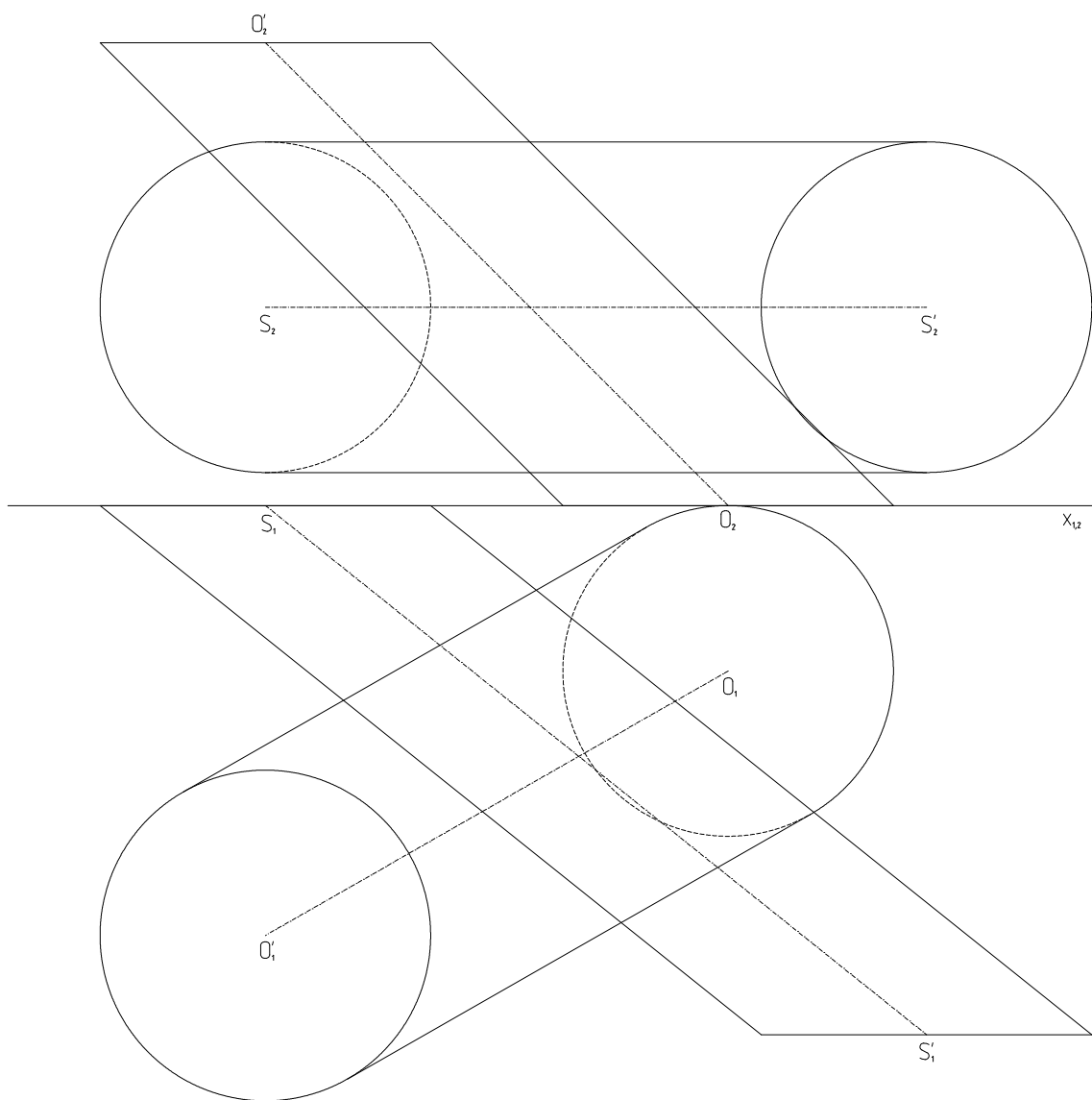
*Zadání 3.1.* V kótovaném zobrazení sestrojte průnik válce a kužele. Podstavy obou těles leží v průmětně  $\pi$  a vrchol  $V$  kužele leží ve stejné rovině (s kladnou kótou) jako druhá podstava válce.



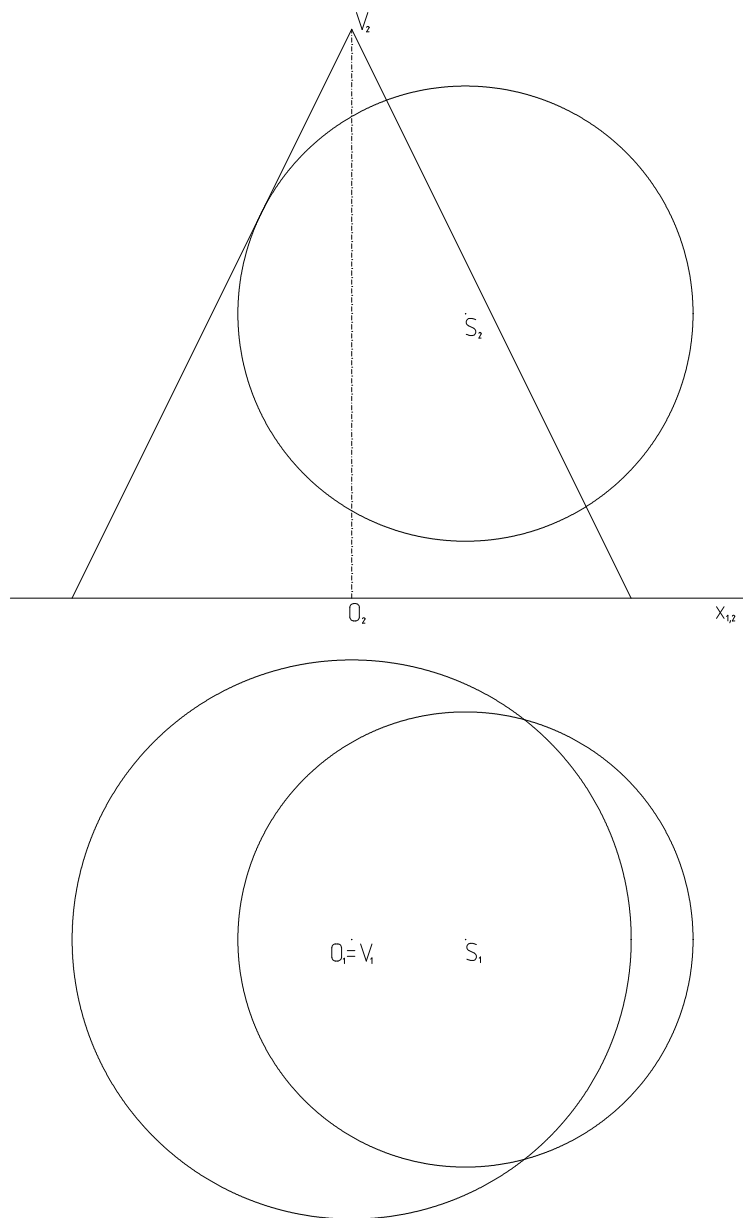
*Zadání 3.2.* V kóvaném zobrazení sestrojte průnik dvou daných kuželů. Podstavy obou kuželů leží v průmětně  $\pi$  a vrcholy na téže přímce  $m$  rovnoběžné s průmětnou (s kladnou kótou).



*Zadání 3.3.* V Mongeově zobrazení sestrojte průnik dvou daných válců. Podstava jednoho válce leží v půdorysně a podstava druhého válce leží v nárysně.

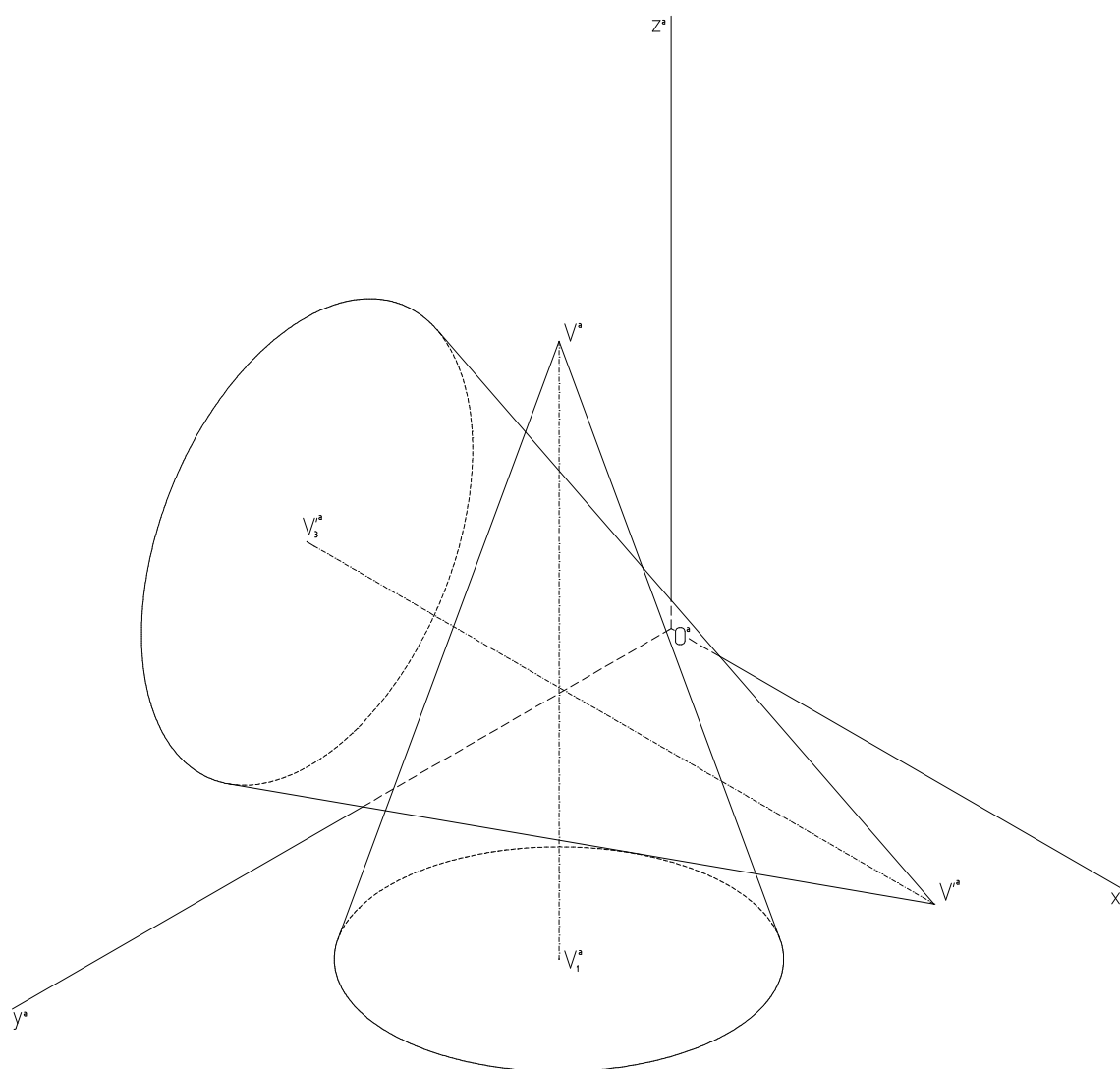


*Zadání 3.4.* V Mongeově zobrazení sestrojte průnik kulové plochy a rotačního kužele, jehož podstava leží v půdorysně.

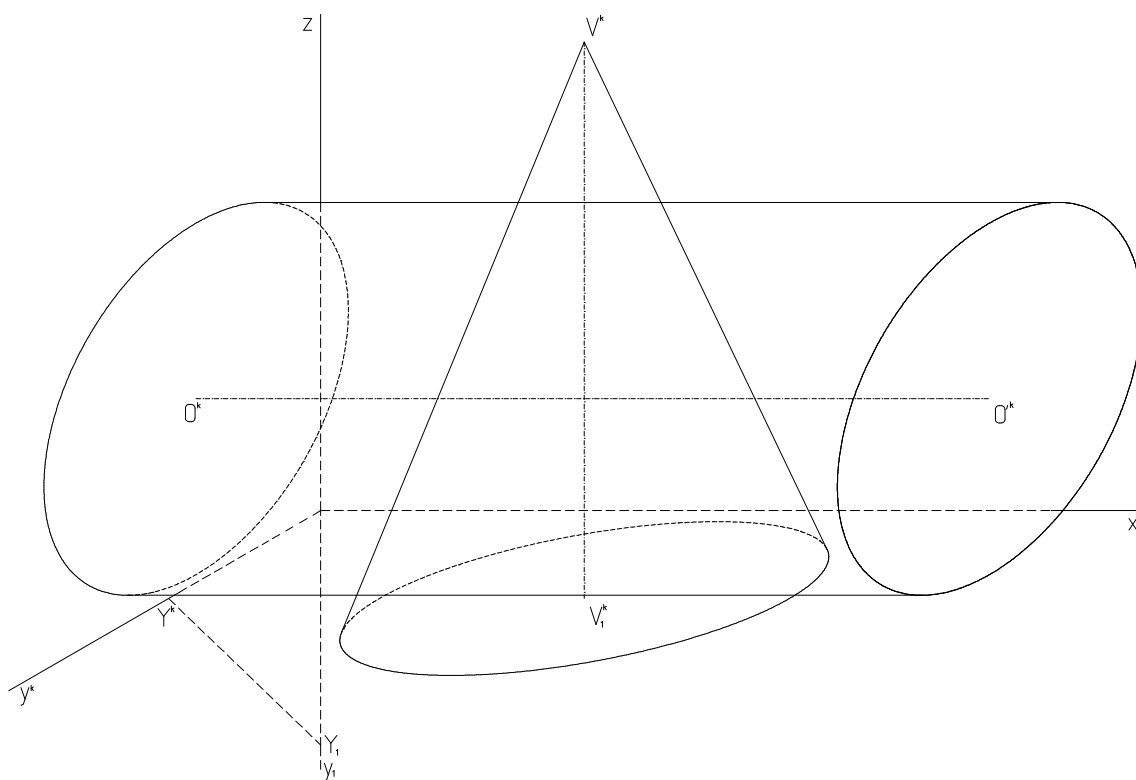




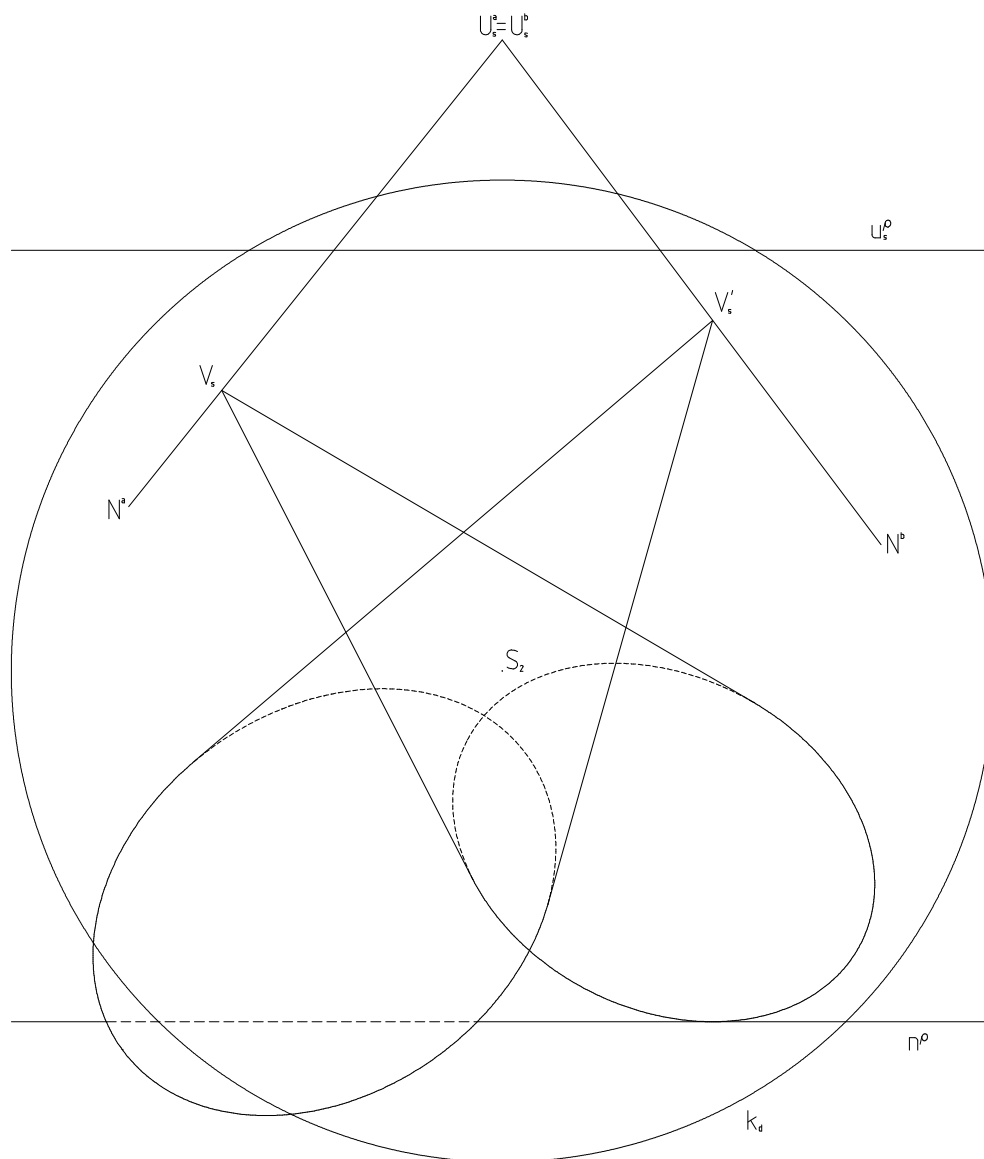
*Zadání 3.5.* V pravoúhlé axonometrii sestrojte průnik dvou rotačních kuželů. Podstava jednoho kužele leží v průmětně  $\pi$  a podstava druhého kužele v průmětně  $\mu$ .



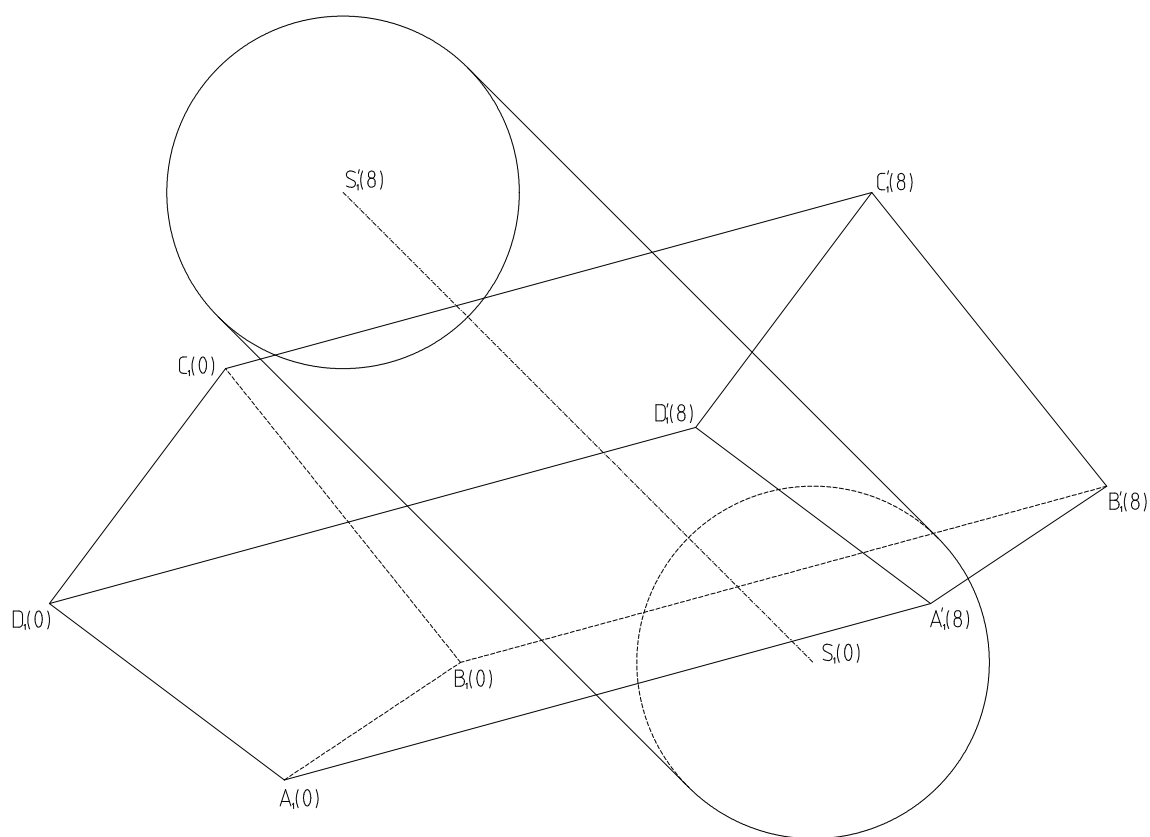
*Zadání 3.6.* V kosoúhlém zobrazení sestrojte průnik rotačního kužele a rotačního válce. Podstava kužele leží v průmětně  $\pi$  a podstava válce v průmětně  $\mu$ .



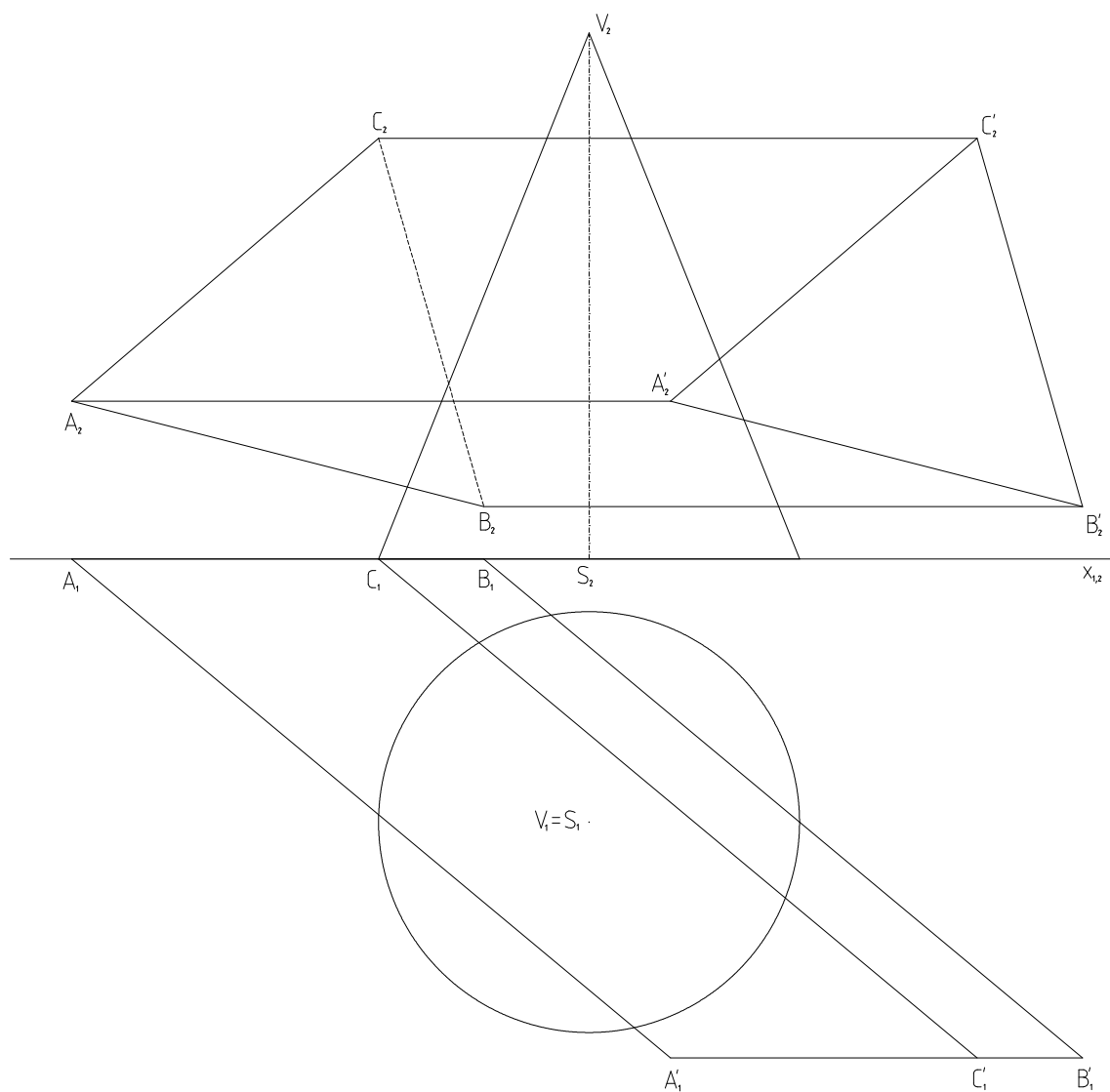
*Zadání 3.7.* Ve středovém zobrazení sestrojte průnik dvou daných kuželů. Podstavy obou kuželů leží v rovině  $\rho$ . Vrcholy  $V$  a  $V'$  kuželů leží na nositelkách  $N^aU^a$  a  $N^bU^b$ .



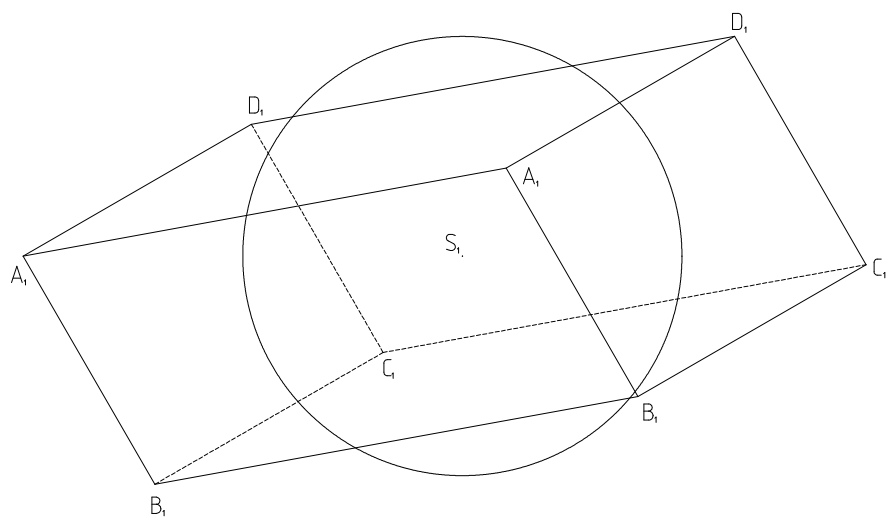
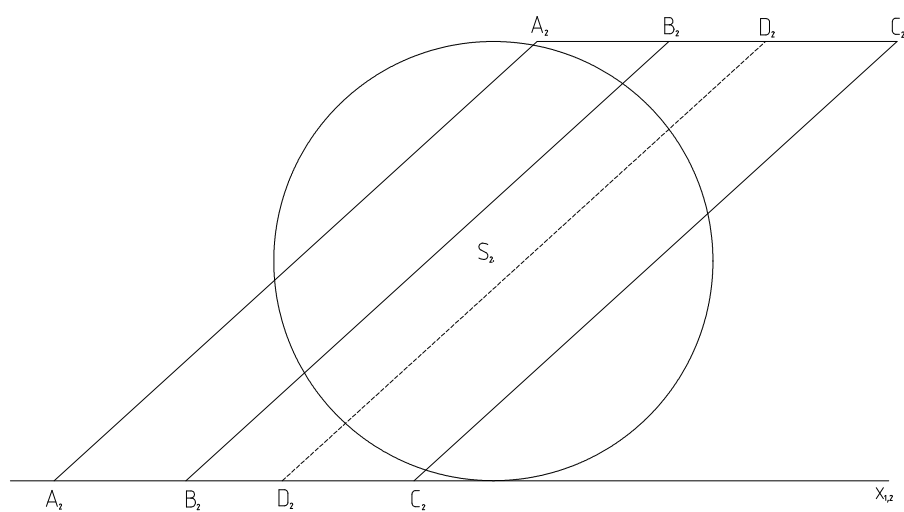
*Zadání 4.1.* V kótovaném zobrazení sestrojte průnik válce a hranolu. Podstava  $ABCD$  hranolu a podstava válce o středu  $S$  leží v průmětně  $\pi$ . Podstava  $A'B'C'D'$  hranolu a podstava válce o středu  $S'$  leží v téže rovině (s kladnou kótou).



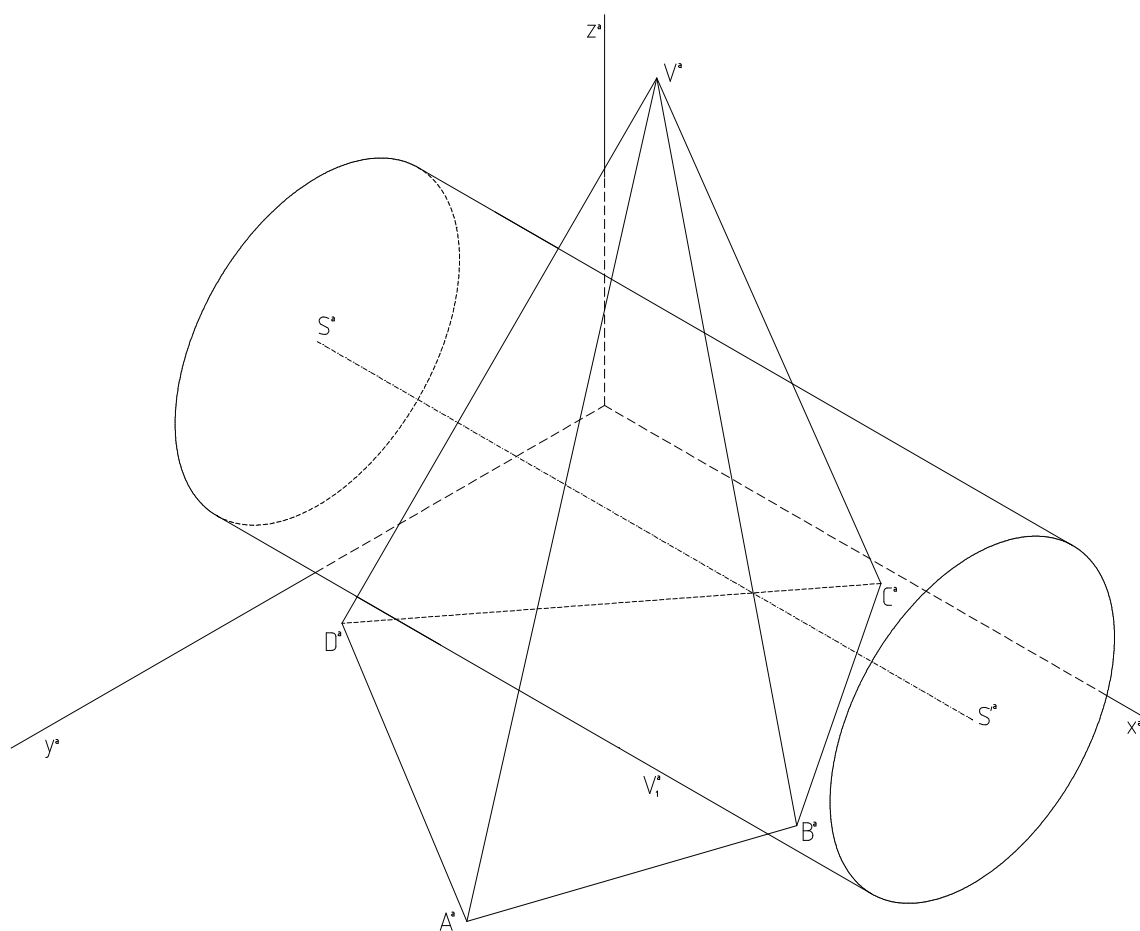
Zadání 4.2. V Mongeově zobrazení sestrojte průnik rotačního kužele a hranolu. Podstava kužele leží v půdorysně a podstava hranolu leží v nárysně.



*Zadání 4.3.* V Mongeově zobrazení sestrojte průnik kulové plochy a hranolu, jehož podstava leží v půdorysně.



*Zadání 4.4.* V pravouhlé axonometrii sestrojte průnik rotačního válce a jehlanu. Podstava jehlanu leží v průmětně  $\pi$  a podstava válce v průmětně  $\mu$ .



Zadání 4.5. V kosoúhlém zobrazení sestrojte průnik rotačního kužele a jehlanu. Podstava kužele leží v průmětně  $\pi$  a podstava jehlanu v průmětně  $\mu$ .

