VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

VYŠETŘOVÁNÍ STABILITY NUMERICKÝCH METOD PRO DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE ZPOŽDĚNÝM ARGUMENTEM

STABILITY ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
Bc. Štěpán Obrátil

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR
doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

BRNO 2019

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Bc. Štěpán Obrátil**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.**
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vyšetřování stability numerických metod pro diferenciální rovnice se zpožděným argumentem

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Nastudování vybraných numerických metod pro zpožděné diferenciální rovnice, sestavení programu pro numerické řešení rovnice pantografu. Vyšetřování stability některých numerických schémat.

Cíle diplomové práce:

Nastudování vybraných numerických metod pro zpožděné diferenciální rovnice.
Formulace technické aplikace využívající zpožděné diferenciální rovnice (systém rovnic).
Sestavení programu pro numerické řešení rovnice pantografu.
Vyšetřování stability některých numerických schémat.

Seznam doporučené literatury:

RALSTON, A., Základy numerické matematiky, Academia, Praha, 1978.

BELLEN, A. a ZENNARO,M. Numerical methods for delay differential equations, Clarendon Press, Oxford, 2003.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Práce se zabývá numerickou analýzou řešení diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Zejména je studována rovnice pantografu, na níž je aplikována θ-metoda na ekvidistantní a kvazi-geometrické diskretizační síti. Kvalitativní vlastnosti metod jsou demonstrovány na několika speciálních případech rovnice pantografu.

Summary
The thesis deals with numerical analysis of delay differential equations. Particularly, the θ-method is applied to the pantograph equation considering equidistant and quasi-geometric mesh. Qualitative properties of the numerical methods are demonstrated on several special cases of the pantograph equation.

Klíčová slova
zpožděné diferenciální rovnice, rovnice pantografu, θ-metoda, stabilita numerických metod

Keywords
delay differential equations, pantograph equation, θ-method, stability of numerical methods

OBRÁTIL, Š. *Vyšetřování stability numerických metod pro diferenciální rovnice se zpožděným argumentem.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 50 s. Vedoucí doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Vyšetřování stability numerických metod pro diferenciální rovnice se zpožděným argumentem* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Petra Tomáška, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Štěpán Obrátil

Děkuji doc. Ing. Petru Tomáškovi, Ph.D. za hodiny věnované konzultacím a ochotný přístup po celou dobu vedení mé práce. Dále bych rád poděkoval rodině a přátelům za podporu.

Bc. Štěpán Obrátil

Obsah

1 Úvod **2**

2 Teorie zpožděných diferenciálních rovnic **3**
2.1 Rovnice pantografu . . . 4
2.2 Hladkost řešení . . . 5
2.3 Metoda kroků . . . 6
2.4 Existence a jednoznačnost řešení . . . 7
2.5 Stabilita a kontraktivita DDE . . . 8
2.5.1 Obecná nelineární rovnice DDE . . . 8
2.5.2 Rovnice se zanikajícím zpožděním . . . 10
2.5.3 Rovnice pantografu . . . 11
2.6 Technické aplikace DDE . . . 13
2.6.1 Konstantní zpoždění . . . 13
2.6.2 Rovnice pantografu . . . 13

3 Numerické metody pro DDE **16**
3.1 θ-metoda . . . 16
3.1.1 Odvození metody . . . 16
3.1.2 Kvazi-geometrická síť . . . 18
3.2 Stabilita numerických metod . . . 20
3.2.1 A-stabilita ODE metod . . . 20
3.2.2 BN-stabilita . . . 21
3.2.3 P-stabilita a její zobecnění . . . 22
3.2.4 P-kontraktivita a její zobecnění . . . 23
3.2.5 RN-stabilita a její zobecnění . . . 24
3.2.6 H-stabilita . . . 26

4 Numerická analýza metod **27**
4.1 Skalární rovnice pantografu . . . 27
4.1.1 Stabilita rovnice . . . 27
4.1.2 H-stabilita θ-metody s kvazi-geometrickou sítí . . . 29
4.1.3 Stabilita diferenčního schématu . . . 30
4.1.4 Numerická noční můra a podtečení algoritmu . . . 34
4.1.5 Absolutní chyba metod . . . 36
4.2 Vektorová rovnice pantografu . . . 42
4.2.1 H-stabilita θ-metody s kvazi-geometrickou sítí . . . 42

5 Závěr **45**

6 Seznam použitých zkratek a symbolů **49**

7 Seznam příloh **50**

1. Úvod

Diferenciální rovnice se zpožděným argumentem, nebo také zpožděné diferenciální rovnice (zkráceně DDE z angl. Delay Differential Equations) jsou častým předmětem moderního matematického výzkumu. Od obyčejných diferenciálních rovnic (budeme využívat zkratky ODE z angl. Ordinary Differential Equations) je odlišuje, že kromě hodnoty stavové veličiny v daném čase v nich vystupují rovněž nějaké její hodnoty v čase minulém. To umožňuje v mnoha reálných aplikacích podrobněji vystihnout skutečné vlastnosti zkoumaného problému. Oblastí, ve kterých lze narazit na modely formulované s využitím DDE, je celá řada. Jedná se zejména o problémy ve strojním inženýrství, fyzice, medicíně, či ekonomii a dalších oblastech aplikované matematiky.

Problémem je, že analytické řešení DDE není mnohdy úplně snadné, resp. je často zcela nemožné. Z tohoto důvodu se výzkum věnuje zejména numerickým metodám řešení DDE. Ačkoliv jsou mnohé numerické metody známy a také řádně analyzovány, je stále žádoucí hledat metody lepší ve smyslu nižší výpočetní náročnosti, či vyšší stability. Dalším problémem je pak velká různorodost DDE. Tyto rovnice lze různými způsoby klasifikovat na více typů, které vykazují zásadně odlišné chování. Aplikaci numerických metod je tak obvykle třeba zkoumat pro konkrétní typ rovnice.

Cílem této práce je popsat základní pojmy z teorie DDE a uvést některé technické aplikace. Dalším cílem je popsat vybraná numerická schémata. Důraz je v této práci kladen na tzv. θ-metody. Je zde zkoumáno chování těchto metod při aplikaci na rovnici pantografu, která má široké uplatnění v matematickém modelování. Numerické experimenty v této práci mají za úkol demonstrovat některé vlastnosti metod, zejména co se týče jejich stability. K práci jsou přiloženy programy napsané v prostředí Matlab, umožňující prověřit popsané numerické experimenty, případně provádět další pokusy a analýzy.

Ve druhé kapitole se nachází popis základních pojmů, klasifikací a definic z teorie DDE. Je zde uvedena rovnice pantografu, metoda kroků pro řešení DDE, věty zabývající se existencí a jednoznačností řešení studovaných rovnic a kvalitativními vlastnostmi řešení. Konec kapitoly je věnován vybraným technickým aplikacím DDE.

Třetí část se věnuje už samotným numerickým metodám pro DDE. Je zde popsána θ-metoda se dvěma různými přístupy k časové diskretizaci: ekvidistantní sítí s konstantním krokem a kvazi-geometrickou sítí. Dále jsou zde uvedeny různé typy stability numerických metod pro DDE.

Ve čtvrté kapitole je na několika příkladech specifických tvarů pantografové rovnice ukázáno chování řešení získaného numerickými metodami uvedenými ve třetí kapitole. Je zkoumána H-stabilita metod pro různou volbu vstupních parametrů. Dále jsou zde uvedeny některé postačující podmínky pro zachování stability numerického řešení. Pro specifické případy je ukázáno riziko chybné analýzy numerického řešení, pokud není vyšetřeno na dostatečně velkém časovém intervalu. Metody jsou také mezi sebou porovnány z hlediska vznikající numerické chyby.

Hlavním zdrojem poznatků o zpožděných diferenciálních rovnicích a metodách pro jejich řešení je pro tuto práci kniha autorů Bellena a Zennara s názvem *Numerical methods for delay differential equations* [1]. Dalšími zdroji, které jsou na odpovídajících místech citovány, jsou pak zejména vybrané články zabývající se pantografovou rovnicí, θ-metodami, jejich stabilitou a související problematikou.

2. Teorie zpožděných diferenciálních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat teorií zpožděných diferenciálních rovnic a jejich základními vlastnostmi. Uvedeme zde příslušnou terminologii a obvykle používané značení. Důležité jsou pojmy stability DDE a hladkosti řešení a dále také podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení. Zvláštní pozornost je věnována rovnici pantografu, pro kterou jsou dále zkoumány numerické metody v dalších kapitolách. Na konci kapitoly jsou zmíněny některé technické aplikace zpožděných diferenciálních rovnic.

Základní pojmy

Nejprve uveďme některé základní pojmy a zaveďme značení, které bude konzistentně používáno dále. Pod pojmem zpožděná diferenciální rovnice budeme v tomto textu uvažovat diferenciální rovnici, kde se na pravé straně nachází členy se zpožděným argumentem. Tu budeme navíc obvykle uvažovat doplněnou o počáteční podmínku. Máme tedy rovnici ve tvaru

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_n)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \Phi(t), & t < t_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ jsou jednotlivá *zpoždění*. Za t_0 obvykle bereme počátek časové osy, tedy $t = 0$. Funkci $\Phi(t)$ nazýváme *počáteční funkce*. Tato funkce zde nahrazuje počáteční hodnotu a to z důvodu existence zpožděných členů. Je definována na intervalu $\langle \varrho, t_0 \rangle$, kde

$$\varrho = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min_{t \geq t_0} (t - \tau_i) \right\}.$$

Jinými slovy takový interval je tak velký, aby obsáhl všechny zpožděné členy.

Na pravé straně rovnice se mohou rovněž vyskytovat derivované zpožděné členy, čímž dostáváme tzv. *Neutrální zpožděnou diferenciální rovnici (NDDE)*. Těmto rovnicím se však v této práci hlouběji věnovat nebudeme.

Klasifikace podle typu zpoždění

Zpoždění τ je v obecném případě nějakou funkcí. Na charakteru této funkce pak závisí celkové chování rovnice a zejména náročnost jejího řešení. Podle zpoždění lze DDE klasifikovat různými způsoby. Nejdříve to proveďme podle toho, na čem je funkce τ závislá. Máme tři základní typy:

- $\tau = konst.$,
- $\tau = \tau(t)$,
- $\tau = \tau(t, y(t))$.

Základním případem DDE je rovnice s *konstantním zpožděním*, tedy kde $\tau = konst.$. Takové rovnice jsou nejběžnější pro popis reálných technických problémů. Vlastnosti těchto rovnic byly již vydatně prozkoumány, i co se týče jejich numerického řešení.

Složitější rovnici dostaneme pro případ *zpoždění závislého na čase*, tedy $\tau = \tau(t)$. Řešení takových rovnic není jednoduché a mnohdy vyžaduje individuální přístup podle konkrétního tvaru rovnice. U tohoto typu rovnic je většinou potřeba uchýlit se k numerickému řešení. Těmto rovnicím je věnována hlavní část této diplomové práce, zejména pak speciálnímu případu, *rovnici pantografu*.

Nejkomplikovanějším případem je potom rovnice se *zpožděním závislém na stavu*, tedy $\tau = \tau(t, y(t))$. Těmto rovnicím se v této práci věnovat nebudeme.

2.1. Rovnice pantografu

Významným příkladem DDE s časově závislým zpožděním je tzv. rovnice pantografu. Název pochází z článku Ockendona a Taylera [21], kde autoři odvodili tuto rovnici pro popis pohybu pantografu elektrické lokomotivy po drátu elektrického vedení. Postupem času se však ukázalo, že tato rovnice má celou řadu dalších aplikací v oblastech aplikované matematiky, mechaniky, ekonomie a dalších. V této práci bude rovnici pantografu věnována zvýšená pozornost, zejména pak způsobům numerického řešení této rovnice. Některé aplikace této rovnice (a dalších DDE) jsou uvedeny v podkapitole 2.6.

Podoba rovnice je následující. Mějme $d \in \mathbb{N}$ dimenzi úlohy a A, B, C komplexní matice o rozměrech $d \times d$. Číslo $q \in (0, 1)$ je koeficient tzv. *proporcionálního zpoždění* $\tau(t) = t - qt$. Pak *rovnicí pantografu* rozumíme rovnici

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + B\boldsymbol{y}(qt), \qquad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Obecnějším případem je potom *neutrální rovnice pantografu* obsahující derivovaný zpožděný člen na pravé straně:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + B\boldsymbol{y}(qt) + C\boldsymbol{y}'(qt), \qquad t \geq 0.$$

Dalšími speciálními případy mohou být rovnice, které na pravé straně obsahují více zpožděných členů, které mohou mít navíc každý jiné zpoždění. Z toho důvodu uvedeme pro úplnost ještě zcela obecný zápis neutrální rovnice pantografu:

$$\boldsymbol{y}'(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(q_1 t), \ldots, \boldsymbol{y}(q_k t), \boldsymbol{y}'(r_1 t), \ldots, \boldsymbol{y}'(r_l t)), \qquad t \geq 0,$$

kde $q_i, r_j \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots . k$ a $j = 1, \ldots, l$.

Zvláštní vlastností pantografové rovnice je, že má tzv. *zanikající zpoždění* (angl. *vanishing delay*). Konkrétně v tomto případě zpoždění zaniká v bodě $t = 0$. Z tohoto důvodu je možné rovnici doplnit obyčejnou počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

kde $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{C}^d$ je vektor počátečních hodnot. Druhou možností je zvolit, jak je to obvyklé pro jiné typy DDE, počáteční podmínku ve tvaru počáteční funkce definované na intervalu $\langle q, t_0 \rangle$, $t_0 > 0$. před počátkem, tedy

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), \qquad t \leq t_0. \tag{2.3}$$

Takto zadaná počáteční podmínka je pro nás výhodnější, neboť ji lze lehce aplikovat na numerické algoritmy uvedené v dalším textu.

Je zřejmé, že se složitostí rovnice významně stoupá i náročnost výzkumu příslušných numerických metod pro její řešení. My se v této práci zaměříme zejména na rovnici s jediným zpožděným nederivovaným členem. Budeme se tedy zabývat počáteční úlohou sestávající z rovnic (2.2) a (2.3). Dostáváme tak

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + B\boldsymbol{y}(qt), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Poznámka. Zpožděné členy na pravé straně pantografové rovnice jsou závislé na qt. Ekvivalentně je lze zapisovat v klasické podobě jako závislé na $t - \tau(t)$, kde $\tau(t) = t(1-q)$.

2.2. Hladkost řešení

Zajímavostí DDE je, že její řešení není obecně hladké. Zejména v místě napojení počáteční funkce $\Phi(t)$ na řešení $y(t)$ vzniká nespojitost v první derivaci, protože

$$y'(t_0)^+ \neq \Phi'(t_0)^-.$$

Tedy derivace řešení zprava v počátku se nerovná derivaci počáteční funkce zleva v počátku. Obecně tak platí, že řešení $y(t)$ je pouze třídy C^1 na nějakém integračním intervalu (t_0, t_f), a to i za předpokladů, že funkce f, τ a Φ jsou třídy C^∞. Je ukázáno, že však dochází k postupnému vyhlazování řešení a platí, že řešení $y(t)$ je třídy C^n pro libovolné n, pro dostatečně vysoké t. Toto však neplatí pro NDDE.

Body, kde dochází k nespojitosti některé z derivací funkce $y(t)$ mají potom zásadní vliv zejména na chování numerických schémat pro řešení DDE. Ukázalo se, že je nutné tyto body nespojitosti zahrnout v diskretizační síti numerické metody. Proto potřebujeme vyšetřit, kde se takové body nacházejí. Obecně poloha bodů závisí zejména na podobě zpožděného argumentu $\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$.

V případě rovnic s konstantním zpožděním je to snadné. Potencionální body nespojitosti jsou $t_0 + k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$. Naopak pro případ zpoždění závislého na stavu je vyšetřování hladkosti řešení velmi komplikované. Pro více informací se odkážeme na knihu Bellena a Zennara [1], kde je tato problematika prozkoumána podrobně. Nás však zajímají především rovnice s časově závislým zpožděním, a proto zde uveďme některé jejich vlastnosti.

Především nás bude zajímat typ rovnic se *zanikajícím zpožděním*, jelikož sem spadá i již zmíněná rovnice pantografu. V okolí bodů, kde zpoždění τ úplně zaniká, vzniká nekonečně mnoho bodů nespojitosti vyšších derivací (pro bližší odůvodnění viz [1]). Abychom se takovému případu vyhnuli, budeme při aplikaci numerických metod obvykle požadovat platnost následující hypotézy.

(H_1) Existuje konstanta $\tau_0 > 0$ taková, že $\tau(t) = t - \alpha(t) \geq \tau_0, \quad \forall t \in \langle t_0, t_f \rangle$.

To nám zajistí zejména konečný počet bodů nespojitosti na zvoleném uzavřeném intervalu. Abychom zajistili platnost této hypotézy, musíme v numerickém výpočtu uvažovat první bod časové diskretizace t_0 mimo bod, ve kterém zaniká zpoždění. O tom více v kapitole 3. Další hypotéza

(H_2) $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$,

potom zaručuje, že bude docházet k již zmíněnému vyhlazování řešení. Pro úplnost ještě přidejme třetí hypotézu:

(H_3) Existuje konstanta $\tau_1 > 0$ taková, že $\tau = t - \alpha(t) \leq \tau_1, \quad \forall t \in \langle t_0, t_f \rangle$.

Tato hypotéza by implikovala ohraničenost zpoždění τ. Lze si povšimnout, že H_3 implikuje H_2, to ovšem neplatí obráceně. Zejména pro případ rovnice pantografu nejsou funkce $\alpha(t) = qt$, ani $\tau(t) = t(1-q)$ ohraničené a tak nelze platnost H_3 uvažovat. V mnoha aplikacích se předpokládá platnost další hypotézy:

(H_4) Zpožděný argument $\alpha(t)$ je rostoucí funkce pro všechna $t \in \langle t_0, t_f \rangle$.

Vlastnost H_4 zřejmě platí jak pro rovnice s konstantním zpožděním tak i rovnice s proporcionálním zpožděním.

Z numerického hlediska je důležitý fakt, že pokud není splněna hypotéza H_3, a funkce $\tau(t)$ a $\alpha(t)$ nejsou ohraničené, závisí řešení $y(t)$ na významně velké části svých minulých hodnot, které je potřeba ukládat pro numerický výpočet. Tato část minulosti, kterou je potřeba ukládat, s postupem času roste neomezeně. Zřejmě je vhodné se zabývat tím, jak tuto vlastnost ošetřit, neboť zvyšuje výpočetní náročnost numerických metod.

2.3. Metoda kroků

Důležitým nástrojem pro vyšetřování vlastností numerických metod nám bude metoda, která je obvykle v literatuře nazývána jako *metoda kroků*. Nejedná se o numerickou metodu, ale o metodu analytickou. Její podstatou je postupné převádění DDE na počáteční problém ODE, a to na posloupnosti na sebe navazujících vhodných intervalů (generované na základě tvaru zpožděných argumentů). Převedení na ODE docílíme vhodnou náhradou zpožděného člene nějakou funkcí, jejíž podobu známe buď z předchozích kroků, nebo z počáteční podmínky. Postup opakujeme v každém kroku metody, čímž vždy získáme řešení na nějakém dalším intervalu. Výsledné celkové řešení pak získáme složením těchto dílčích řešení. Uveďme si nyní konkrétní postup pro počáteční úlohu (2.4).

Mějme síť bodů $\{t_{-1} = 0, t_0, t_1, \ldots, t_f\}$, které nám vytváří intervaly, na kterých budeme postupně hledat řešení. Síť zvolíme tak, aby pro jednotlivé její intervaly platilo

$$qt \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle \text{ pro všechna } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle, \qquad i = 0, \ldots, f-1. \tag{2.5}$$

Takovou sítí bude geometrická síť, jejíž zavedení je podrobně vysvětleno v kapitole 3.1. Nyní pouze předpokládejme, že takovou síť splňující (2.5) máme k dispozici. Pro srozumitelnost ještě uveďme, že řešení rovnice na intervalu $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ budeme značit $\boldsymbol{y}_i(t)$. Na prvním intervalu $\langle 0, t_0 \rangle$ je řešení dáno počáteční funkcí, tedy máme $\boldsymbol{y}_0(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)$.

V dalším kroku hledáme řešení DDE

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1'(t) = A\boldsymbol{y}_1(t) + B\boldsymbol{y}_1(qt), & t \in \langle t_0, t_1 \rangle, \\ \boldsymbol{y}_1(t_0) = \boldsymbol{y}_0(t_0). \end{cases}$$

Zpožděný člen $\boldsymbol{y}_1(qt)$ lze však nahradit funkcí $\boldsymbol{y}_0^*(t) = \boldsymbol{y}_0(qt)$, neboť díky vhodně zvolené síti platí, že $\boldsymbol{y}_1(qt) = \boldsymbol{y}_0(qt), \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Tím dostaneme počáteční úlohu ODE ve tvaru

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1'(t) = A\boldsymbol{y}_1(t) + B\boldsymbol{y}_0^*(t), & t \in \langle t_0, t_1 \rangle, \\ \boldsymbol{y}_1(t_0) = \boldsymbol{y}_0(t_0), \end{cases}$$

jejíž řešení spočteme obvyklým postupem známým z teorie ODE. V dalším kroku pak toto řešení $\boldsymbol{y}_1(t)$ opět použijeme pro náhradu zpožděného člene.

Obecně v n-tém kroku tedy řešíme úlohu

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_n'(t) = A\boldsymbol{y}_n(t) + B\boldsymbol{y}_{n-1}^*(t), & t \in \langle t_{n-1}, t_n \rangle, \\ \boldsymbol{y}_n(t_{n-1}) = \boldsymbol{y}_{n-1}(t_{n-1}), \end{cases}$$

kde

$$\boldsymbol{y}_{n-1}^*(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(qt), & t \le t_0 \\ \boldsymbol{y}_{n-1}(qt), & t \in \langle t_{n-1}, t_n \rangle. \end{cases}$$

Postup opakujeme až do požadovaného času.

Používáním analytického řešení však tato metoda zřejmě nebude příliš praktická k řešení úloh. My ji zde však uvádíme, neboť je v praxi používána pro vyšetření stability a dalších vlastností diferenciálních rovnic a příslušných numerických metod.

Součástí přílohy této práce je kód pro prostředí Matlab, kde je tato metoda zpracována. Jedná se o soubor `metoda_kroku.m`. Metoda je zpracována jako funkce pro tento software a je použita v některých skriptech v kapitole 4. Rovněž je přiložena metoda `metoda_kroku_ekv.m`, která funguje na stejném principu, avšak s tím rozdílem, že vyčíslí spočtené analytické řešení na ekvidistantní síť. Aplikací metody kroků si čtenář zřejmě povšimne časové náročnosti výpočtu, neboť analytické řešení soustav ODE je velmi pomalé ve srovnání s aplikací vhodných numerických metod.

2.4. Existence a jednoznačnost řešení

V této podkapitole uveďme několik základních matematických vět ohledně existence a jednoznačnosti řešení DDE. Mějme počáteční úlohu s časově závislým zpožděním

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), & t_0 \le t < t_f, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Existence a jednoznačnost řešení této úlohy závisí zejména na spojitosti funkce $f(t, u, v)$ vzhledem k t a Lipschitzovské spojitosti vzhledem k u a v, a tedy u následujících vět lze vidět podobnost s teorií ODE. Lokální existenci řešení popisuje následující věta.

Věta 2.1 (Lokální existence). *Mějme počáteční úlohu* (2.6) *a předpokládejme, že funkce* $f(t,u,v)$ *je spojitá na oblasti* $A \subseteq \langle t_0, t_f) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *a lokálně Lipschitzovsky spojitá vzhledem k* u *a* v*. Navíc předpokládejme, že funkce zpoždění* $\tau(t) \geq 0$ *je spojitá na* $\langle t_0, t_f), \tau(t_0) = 0$ *a dále, pro nějaké* $\xi > 0$*, platí* $t - \tau(t) > t_0$ *na intervalu* $(t_0, t_0 + \xi\rangle$*. Potom počáteční úloha* (2.6) *má jediné řešení na intervalu* $\langle t_0, t_0 + \delta)$ *pro nějaké* $\delta > 0$ *a toto řešení závisí spojitě na počáteční podmínce.*

Za stejných předpokladů lze ukázat, že takové řešení lze prodloužit až na maximální řešení definované na intervalu $\langle t_0, b)$, kde $t_0 < b \leq t_f$, z čehož plyne následující věta.

Věta 2.2 (Globální existence). *Pokud za stejných předpokladů, jako ve větě 2.1, je jediné maximální řešení úlohy* (2.6) *ohraničené, pak existuje na celém intervalu* $\langle t_0, t_f)$*.*

Pro globální existenci řešení je ještě nutné znát nějakou hranici řešení, která je dána následujícím důsledkem předchozích vět.

Důsledek 2.3. *Nechť platí předpoklady věty 2.1 a dále ještě předpokládejme, že funkce* $f(t,u,v)$ *splňuje podmínku*

$$|f(t,u,v)| \leq M(t) + N(t)(|u| + |v|)$$

na $\langle t_0, t_f) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*, kde* $M(t)$ *a* $N(t)$ *jsou spojité kladné funkce na* $\langle t_0, t_f)$*. Potom řešení úlohy* (2.6) *existuje a je jednoznačné na celém intervalu* $\langle t_0, t_f)$

Důkazy uvedených vět (a také obecnějších vět pro rovnice s obecným zpožděním) lze dohledat v literatuře [1] a [8].

2.5. Stabilita a kontraktivita DDE

V této podkapitole definujeme několik zásadních pojmů, konkrétně kontraktivitu a asymptotickou stabilitu rovnice, tak, jak jsou definovány v literatuře, např. v [1] a [13]. Jsou to důležité vlastnosti rovnic, které udávají, jaké dané rovnice vykazují chování a souvisí zásadně s jejich řešitelností. Navíc tyto vlastnosti potřebujeme pro následnou analýzu stability samotných numerických metod. Dále uvedeme několik souvisejících vět, které se vztahují na konkrétní podobu rovnice. Kromě obecného tvaru DDE se zaměříme především na rovnice se zanikajícím zpožděním, kam spadá i námi studovaná rovnice pantografu.

2.5.1. Obecná nelineární rovnice DDE

Uvažujme počáteční problém, resp. rovnici s počáteční podmínkou

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t - \tau(t))), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

kde $f \in C^0\left(\langle t_0, t_f\rangle \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d\right)$ a časově závislé zpoždění $\tau(t)$ je spojité a splňuje hypotézu (H_1).

Spolu s (2.7) uvažujme také počáteční problém

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}'(t) = f(t, \tilde{\boldsymbol{y}}(t), \tilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau(t))), & t \geq t_0, \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

se stejnou pravou stranou $f(t, y, x)$, ale s rozdílnou počáteční funkcí $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$. Definujme dále

$$\delta \boldsymbol{y}(t) = \tilde{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t),$$

$$\delta \boldsymbol{\Phi}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) - \boldsymbol{\Phi}(t).$$

Pro následující definice kontraktivity a asymptotické stability rovnic ještě potřebujeme zavést spojité funkce $Y(t)$ a $X(t)$ následovně.

$$Y(t) \geq \sup_{x, y_1 \neq y_2} \frac{\mathcal{R}((f(t, y_1, x) - f(t, y_2, x)) \cdot (y_1 - y_2))}{\|y_1 - y_2\|^2}, \tag{2.9}$$

a

$$X(t) \geq \sup_{y, x_1 \neq x_2} \frac{\|f(t, y, x_1) - f(t, y, x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|}, \tag{2.10}$$

kde $a \cdot b$ značí skalární součin v $\mathbb{C}^d$ a $\|\cdot\|$ je příslušná norma, $\mathcal{R}(\cdot)$ značí reálnou část komplexního čísla.

Definice 2.4. Řekneme, že rovnice DDE (2.7) je kontraktivní, pokud pro jakoukoliv jinou počáteční funkci $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ platí, že rozdíl $\delta \boldsymbol{y}(t)$ řešení rovnic (2.7) a (2.8) splňuje podmínku

$$\|\delta \boldsymbol{y}(t)\| \leq \max_{x \leq t_0} \|\delta \boldsymbol{\Phi}(x)\|, \qquad t \geq t_0. \tag{2.11}$$

Definice 2.5. Řekneme, že rovnice DDE (2.7), nebo také její řešení $\boldsymbol{y}(t)$, je asymptoticky stabilní, pokud pro jakoukoliv jinou počáteční funkci $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ platí, že rozdíl $\delta \boldsymbol{y}(t)$ řešení rovnic (2.7) a (2.8) splňuje podmínku

$$\lim_{t \to \infty} \delta \boldsymbol{y}(t) = 0. \tag{2.12}$$

Pro takto definované pojmy již můžeme uvést následující věty.

Věta 2.6. *Mějme rovnice DDE* (2.7) *a* (2.8) *a spojité funkce* $Y(t)$ *a* $X(t)$ *dané vztahy* (2.9) *a* (2.10)*. Pokud platí*

$$Y(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0,$$

pak je rovnice (2.7) *kontraktivní (tedy platí podmínka* (2.11)*) pro všechny počáteční funkce* $\boldsymbol{\Phi}(t)$ *a pro všechna zpoždění* $\tau(t)$ *splňující hypotézu* (H_1)*.*

Věta 2.7. *Mějme rovnici DDE* (2.7)*. Pokud pro spojité funkce* $Y(t)$ *a* $X(t)$ *dané vztahy* (2.9) *a* (2.10) *platí*

$$Y(t) \leq Y_0 < 0, \qquad t \geq t_0,$$

a pro nějaké nezáporné reálné číslo $R < 1$ *platí*

$$RY(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0,$$

pak je rovnice (2.7) *nejen kontraktivní, ale také asymptoticky stabilní (tedy platí podmínka* (2.12)*) pro všechny počáteční funkce* $\boldsymbol{\Phi}(t)$ *a pro všechna zpoždění* $\tau(t)$ *splňující hypotézy* (H_1) *a* (H_2)*. Navíc, pokud platí také hypotéza* (H_3)*, je míra konvergence v podmínce* (2.12) *alespoň exponenciální.*

Důkazy obou vět lze nalézt v [1].

2.5.2. Rovnice se zanikajícím zpožděním

Nyní se zaměřme na problematiku rovnic se zanikajícím zpožděním, kde můžeme uvedené věty díky některým vlastnostem rovnic přeformulovat. Také zde uvedeme, jaký je význam těchto vět pro pantografovou rovnici.

Uvažujme opět rovnici (2.7), kde však tentokrát pro zpoždění $\tau(t)$ platí

$$\tau(t_0) \geq 0 \text{ a } \tau(t) > 0, \qquad \forall t > t_0. \tag{2.13}$$

To znamená, že bod t_0 je jediný, ve kterém může dojít k zániku zpoždění. V tom případě, jak již bylo uvedeno, se počáteční podmínka redukuje na vztah $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$.

Opět budeme potřebovat pro srovnání rovnici (2.8), která má znovu stejnou pravou stranu $f(t, y, x)$, ale jinou počáteční funkci $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$. Dále mějme

$$\delta\boldsymbol{y}(t) = \tilde{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t),$$

$$\delta\boldsymbol{\Phi}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) - \boldsymbol{\Phi}(t),$$

$$\delta\boldsymbol{y}_0 = \tilde{\boldsymbol{y}}_0 - \boldsymbol{y}_0,$$

a zaveďme novou spojitou funkci $Y(t)$ jako

$$Y(t) \geq \sup_{y,u\in\mathbb{C}^d} \mu[f_y(t, y, u)], \tag{2.14}$$

kde $\mu[\cdot]$ je tzv. logaritmická norma matice definovaná jako

$$\mu[L] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|I + \varepsilon L\| - 1}{\varepsilon}.$$

S takto zavedenými pojmy lze již věty o kontraktivitě a asymptotické stabilitě přeformulovat do jediné následující věty.

Věta 2.8. *Mějme rovnice DDE* (2.7) *a* (2.8) *a spojité funkce* $X(t)$ *a* $Y(t)$ *dané vztahy* (2.10) *a* (2.14). *Pokud platí*

$$Y(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0, \tag{2.15}$$

pak je rovnice (2.7) *kontraktivní pro všechny počáteční funkce* $\boldsymbol{\Phi}(t)$ *a pro všechna zpoždění* $\tau(t)$ *splňující* (2.13).

Na druhou stranu, pokud platí

$$Y(t) \leq Y_0 < 0, \qquad t \geq t_0, \tag{2.16}$$

a pro nějaké nezáporné reálné číslo $R < 1$ *platí*

$$RY(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0, \tag{2.17}$$

pak je rovnice (2.7) *nejen kontraktivní, ale i asymptoticky stabilní pro všechny počáteční funkce* $\boldsymbol{\Phi}(t)$ *a pro všechna zpoždění* $\tau(t)$ *splňující* (2.13) *a hypotézu* (H_1) *na* $\langle t_0 + H, \infty)$ *pro nějaké* $H > 0$. *Navíc, pokud platí také hypotéza* (H_3), *je míra konvergence v podmínce* (2.12) *alespoň exponenciální.*

Důkazy obou vět lze opět nalézt v [1].

2.5.3. Rovnice pantografu

Konkrétním případem rovnice se zanikajícím zpožděním je nám již známá rovnice pantografu. Nejprve vezměme pantografovou rovnici s nestacionárními členy A a B a počátkem $t_0 = 0$, tedy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t) + B(t)\boldsymbol{y}(qt), & t \geq 0, \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

Pak můžeme některé vztahy z věty 2.8 vyjádřit lépe. Konkrétně nerovnost (2.15) lze napsat jako

$$\mu[A(t)] + \|B(t)\| \leq 0, \qquad t \geq 0.$$

Podmínka kontraktivity tak nabude tvaru

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leq \|\boldsymbol{y}_0\|, \qquad \forall t \geq 0.$$

Dále vztahy (2.16) a (2.17) přejdou na

$$\mu[A(t)] \leq Y_0 < 0, \qquad t \geq 0,$$

$$R\mu[A(t)] + \|B(t)\| \leq 0, \qquad t \geq 0.$$

Jejich platnost implikuje také splnění podmínky asymptotické stability

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = 0$$

pro nějaké $q \in (0, 1)$ a všechny počáteční hodnoty $\boldsymbol{y}_0$. Konkrétně $\|\boldsymbol{y}(t)\|$ konverguje monotónně k nule, avšak ne nutně exponenciálně, neboť hypotéza (H_3) není v případě pantografové rovnice splněna.

Pro případ skalární pantografové rovnice

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(qt), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$, dokázali Kato a McLeod [14], následující větu.

Věta 2.9. *Skalární pantografová rovnice* (2.18) *je asymptoticky stabilní právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(a) < 0, \\ |a| > |b|. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dále zaveďme následující značení. Nechť $\sigma[\cdot]$ značí spektrum matice (tj. množinu jejích vlastních čísel), a $\rho[\cdot]$ spektrální poloměr matice (tj. maximum z absolutních hodnot vlastních čísel). Pak pro vektorovou pantografovou rovnici (2.2), kterou jsme uvedli dříve, platí následující věta, kterou dokázal Iserles [11].

Věta 2.10. *Pantografová rovnice* (2.2) *je asymptoticky stabilní právě tehdy, když je splněno*

$$\begin{cases} \lambda \in \sigma[A] \Rightarrow \mathcal{R}(\lambda) < 0, \\ \rho[A^{-1}B] < 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Když víme, na kterých členech rovnice závisí její asymptotická stabilita, pak můžeme zavést tzv. *analytickou oblast asymptotické stability* jako množinu k-tic takových členů, pro které platí, že je daná rovnice asymptoticky stabilní.

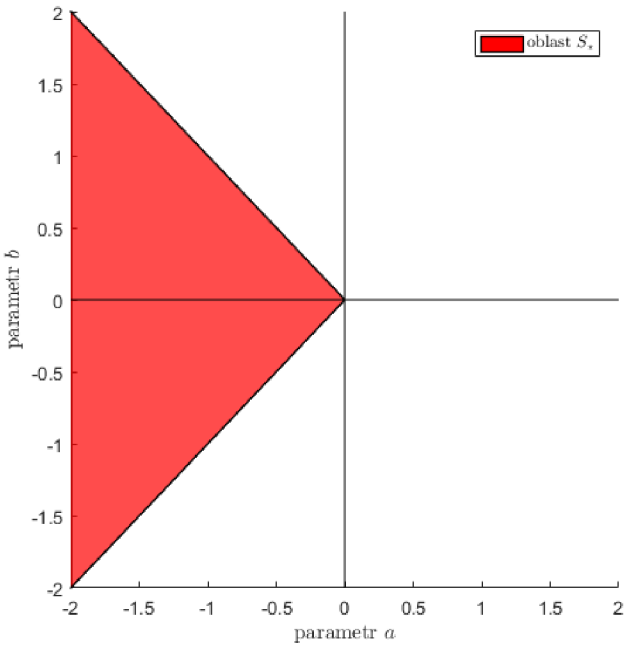
V obecném vektorovém tvaru rovnice máme matice A a B, které jsou obecně rozměrů $d \times d$. Označme $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ množinu prvků matice A a $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ množinu prvků matice B. Mějme $k = 2d^2$ počet těchto prvků.

Definice 2.11. *Analytická oblast asymptotické stability* pantografové rovnice (2.2) je množina $S_\star$ k-tic prvků $\{a_{ij}, b_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ matic A a B takových, že platí (2.20).

Pro skalární případ pantografové rovnice můžeme tuto oblast podle věty 2.9 definovat následovně.

Příklad 2.12. *Analytická oblast asymptotické stability* skalární pantografové rovnice (2.18) je množina $S_\star$ dvojic čísel (a, b) splňujících (2.19).

Názorně můžeme tuto oblast vyobrazit jako na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Analytická oblast asymptotické stability $S_\star$

Takto definované oblasti stability rovnic jsou důležité pro analýzu stability numerických metod pro jejich řešení. V zásadě se jedná o problém hledání takové numerické metody, že množina k-tic, pro které dává metoda stabilní řešení, obsahuje analytickou oblast asymptotické stability dané rovnice. Blíže je toto rozebráno v kapitole 3.2.

2.6. Technické aplikace DDE

Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, aplikací DDE je v dnešní době mnoho v celé řadě vědních a technických oborů. Pomocí DDE lze modelovat různé problémy z oblasti strojírenství, dopravy, ekonomie, robotiky, či biologie a spousty dalších odvětví. Zpožděný člen na pravé straně rovnice vystihuje závislost stavové veličiny na své hodnotě v nějakém minulém čase. Může se stát, že lze daný problém modelovat pomocí jednoduššího (a v praxi snadněji řešitelného) ODE modelu, avšak je otázkou, jestli tak nedochází k zásadním nepřesnostem. Použití DDE modelu tak obvykle bereme jako krok k preciznějšímu popisu dané problematiky. Níže pro ilustraci uvedeme několik konkrétních modelů, které využívají počátečních problémů DDE.

2.6.1. Konstantní zpoždění

Rovnice s konstantním zpožděním jsou základním typem DDE a také se v praxi vyskytují častěji. Zpoždění v daném problému obvykle vzniká nějakými fyzikálními limitacemi systému. Může docházet např. ke transportnímu zpoždění, které je dáno omezenou rychlostí proudění kapaliny významně dlouhým potrubím. Ke komunikačnímu zpoždění, daném omezenou rychlostí šíření signálu na velkou vzdálenost, může dojít např. při řízení strojů ve velkých podmořských hloubkách nebo ve vesmíru. V komplikovaných robotických systémech zase může docházet k informačnímu zpoždění, daném dobou reakce strojů, příp. výpočetní dobou nějakého úkonu.

U obráběcích a frézovacích strojů, nebo u robotů s nějakým pružným komponentem, může zpožděný člen přesně modelovat chvění stroje při jeho práci. Řadu zajímavých aplikací z oblasti technologie obrábění a robotiky lze nalézt v monografii [23].

Dalším příkladem budiž model stavebního jeřábu, kde je zpožděný člen použit k popisu oscilací při výkyvu tělesa zavěšeného na mechanickém rameni jeřábu. V aplikaci z oblasti dopravy, kde diferenciální rovnicí popíšeme rychlost vozidel, se také dá využít zpožděného člene. Rychlost vozidla v daném místě totiž závisí také na rychlosti vozidel, které projely před ním. Těchto modelů se pak dá využít při analýze a návrhu dopravní infrastruktury. Uvedené příklady jsou blíže zpracovány v bakalářské práci J. Kráčmara [15]. Mnoho dalších aplikací lze nalézt v publikaci T. Erneuxe [7].

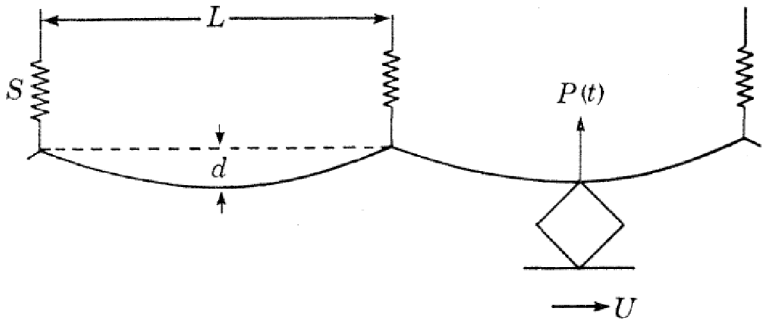
Velmi zajímavé jsou aplikace DDE v oblasti matematické biologie, kde jimi lze popsat vývoj populace nějakých tvorů. Zpoždění zde reprezentuje určitou reakční dobu, např. periodu dozrávání jedince, nebo dobu obnovení zdrojů umožňující další růst populace. Úvod do této problematiky zpracoval ve své publikaci Murray [20], další zmínka je opět v práci [15]. Komplikovanější modely dynamického růstu populace používající dokonce zpoždění závislé na stavu představili např. Zaghrout a spol. [25].

2.6.2. Rovnice pantografu

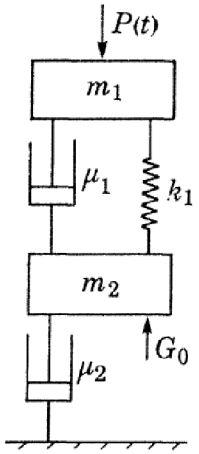
V této práci je věnována pozornost zejména rovnici pantografu a proto si uveďme i nějaké konkrétní aplikace této rovnice. Významné využití má mimo jiné v oblasti výzkumu teorie dynamických systému, viz např. práce Derfela [6]. V článku Iserlese [11] lze nalézt další odkazy na aplikace v oblasti teorie pravděpodobnosti, výzkumu specifických druhů radiace, teorie čísel, či kvantové mechanice. Z techničtějších aplikací lze uvést výzkum chování nevodivých materiálů. V každé práci zabývající se rovnicí pantografu však nelze

opomenout prvotní aplikaci téhle rovnice, ze které pochází její název. Tou aplikací je popis pohybu pantografu elektrické lokomotivy po elektrickém vedení. Autory původního článku z roku 1971 jsou Ockendon a Tayler [21].

Odvození pantografové rovnice je velmi komplikovaná záležitost, zřejmě také proto, že v době odvození nebyla teorie DDE nijak významně prozkoumána. Zde uvedeme jenom stručný souhrn. Pro více informací čtenáře odkážeme na původní článek. Model celého systému pantografu a elektrického vedení je znázorněn na obrázcích 2.2 a 2.3. Elektrické vedení sestává z drátu, který je prověšený mezi jednotlivými pružnými podporami. Samotný pantograf pak sestává ze dvou hmotných těles m_1 a m_2, která jsou spojena pružinami a tlumiči mezi sebou a taktéž se střechou lokomotivy. Veličina $P(t)$ pak udává sílu, kterou působí pantograf na vedení ve vertikálním směru. Uvažovaná lokomotiva (pantograf) se pohybuje konstantní rychlostí U v naznačeném směru.



Obrázek 2.2: Model elektrického vedení [21]



Obrázek 2.3: Model pantografu [21]

Zohledněním všech fyzikálních vztahů v tomto systému a také omezujících podmínek (zabraňující ztrátě kontaktu pantografu s vedením) pak autoři článku odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{Y}(t) + B\boldsymbol{Y}(qt), \qquad t \geq 0, \tag{2.21}$$

kde neznámá $\boldsymbol{Y}(t) = (\phi(t), y(t), z(t), \omega(t))^{\mathrm{T}}$. Funkce $y(t), z(t)$ znázorňují svislé vychýlení hmotných těles m_1, m_2; funkce $\phi(t), \omega(t)$ reprezentují svislou výchylku elektrického vedení.

Matice A, B rozměrů 4×4 pak obsahují celou řadu konstant, daných fyzikálními vlastnostmi materiálů, tuhostí pružin, silou $P(t)$ a podobně. Doplněním o vhodnou počáteční podmínku pak uvedená rovnice úplně popisuje fyzikální chování zjednodušeného modelu. Dodejme, že rovnice zde není uvedena se stejným značením, jaké použili autoři, ale je nepatrně zjednodušena pro celkovou přehlednost textu.

Zpožděný člen zde popisuje vzájemné působení pružícího pantografu a stejně tak pružícího vedení. To vyvolává výchylky, které se postupem času umocňují a projevují se v dalším čase. Funkce $\boldsymbol{Y}(t)$ je tak závislá na svých minulých hodnotách. Zajímavé je, že prvotní přístup k popisu problému byl založen pouze na jednodušším ODE modelu. Zpožděný člen bylo však nutné přidat k preciznějšímu popisu chování modelu v problematičtějších částech (okolo podpor vedení). Autoři článku dále ukázali, že model popsaný rovnicí (2.21) dokáží řešit s libovolnou přesností a tudíž je k popisu pohybu pantografu vhodný.

3. Numerické metody pro DDE

Prvotní přístup k numerickému řešení DDE byl založen na aplikaci známých numerických metod pro ODE. Zpožděný člen v DDE však způsobuje různé potíže, zejména ovlivňuje stabilitu a nebo ohraničenost řešení, a obecně dynamické vlastnosti jednoduššího ODE modelu. Obdobně je to s aplikací ODE metod na DDE, kde zpožděný člen ovlivňuje přesnost a stabilitu metod. Kvůli tomu není tento přístup tak jednoduchý. V knize [1] lze dohledat celou řadu příkladů, jak mohou selhat numerické metody pro ODE při aplikaci na DDE s konstantním zpožděním. Jelikož se navíc DDE zásadně od sebe liší podle typu zpoždění, je obecně vhodné posuzovat každou rovnici zvlášť a navrhovanou metodu volit podle konkrétních vlastností řešení rovnice. V této kapitole se budeme zabývat numerickými metodami pro pantografovou rovnici.

3.1. θ-metoda

V této podkapitole nejdříve uvedeme odvození tzv. θ-metody v klasické podobě s ekvidistantní diskretizační sítí na časové ose. Jedná se o metodu, jejíž konkrétní podoba je dána volbou parametru θ. Aktuálně je tato metoda a její vlastnosti častým předmětem výzkumu a i v této práci jí bude věnován patřičný prostor. Výsledný předpis metody odvodíme rovnou ve tvaru pro rovnici pantografu. Poté uvedeme jinou variantu časové diskretizace, tzv. kvazi-geometrickou síť, která má jisté výhodné vlastnosti.

3.1.1. Odvození metody

Mějme skalární rovnici pantografu

$$y'(t) = ay(t) + by(\alpha(t)), \quad t \geq t_0, \tag{3.1}$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a $\alpha(t) = qt$ je spojitá, diferencovatelná a rostoucí funkce. Pro odvození metody začneme integrací rovnice (3.1), čímž dostaneme

$$\int_0^t y'(u)\mathrm{d}u = \int_0^t ay(u)\mathrm{d}u + \int_0^t by(\alpha(u))\mathrm{d}u.$$

Aplikujme ekvidistantní diskretizaci s krokem $h > 0$, čímž dostaneme

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ay(u)\mathrm{d}u + \int_{t_n}^{t_{n+1}} by(\alpha(u))\mathrm{d}u, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

kde $y_n \approx y(t_n)$ a $t_n = t_0 + nh$. Pro aproximaci integrálů na pravé straně rovnice (3.2) nejprve užijeme klasické obdélníkové kvadraturní formule vztažené k levému krajnímu bodu intervalu. První integrál tak dává

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ay(u)\mathrm{d}u \approx hay_n.$$

U druhého integrálu však nastává problém, jelikož bod $\alpha(t_n) = qt_n$ obecně nemusí být uzel použité sítě. Dostaneme proto

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} by(\alpha(u))\mathrm{d}u \approx hby^h\left(qt_n\right),$$

kde $y^h(qt_n)$ definujeme lineární interpolací mezi sousedními uzly bodu qt_n. Označme $\bar{\alpha}_n = \left(\frac{qt_n - t_0}{h}\right)$. Potom použijeme vztah

$$y^h(qt_n) = (1 - \bar{\alpha}_n + \lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor)\, y_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor} + (\bar{\alpha}_n - \lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor)\, y_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor + 1}, \tag{3.3}$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celočíselnou část čísla. Dosazením do (3.2) máme

$$y_{n+1} = y_n + hay_n + hby^h(qt_n). \tag{3.4}$$

Dále je potřeba provést opět aproximaci integrálů v (3.2), tentokrát pomocí obdélníkové formule vztažené k pravému bodu integračního intervalu. Dostáváme tak

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ay(u)\mathrm{d}u \approx hay_{n+1},$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} by(\alpha(u))\mathrm{d}u \approx hby^h(qt_{n+1}).$$

Dosazením do (3.2) dostáváme diferenční schéma

$$y_{n+1} = y_n + hay_{n+1} + hby^h(qt_{n+1}). \tag{3.5}$$

Lineární kombinací rovnic (3.4) a (3.5) dostaneme hledaný předpis θ-metody

$$y_{n+1} = y_n + h\left((1-\theta)ay_n + \theta ay_{n+1} + (1-\theta)by^h(qt_n) + \theta by^h(qt_{n+1})\right), \tag{3.6}$$

kde $\theta \in \langle 0, 1\rangle$. Odvození vztahu je podrobně provedeno v [12]. Pro úplný použitelný předpis numerické metody nahradíme $y^h(t)$ podle (3.3) a členy y_{n+1} převedeme na levou stranu rovnice. Výsledkem je následující zápis θ-metody pro skalární pantografovou rovnici.

$$y_{n+1} = Ry_n + S\left(\beta_n y_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor} + \alpha_n y_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor + 1} + \widehat{\beta}_n y_{\lfloor \bar{\alpha}_{n+1} \rfloor} + \widehat{\alpha}_n y_{\lfloor \bar{\alpha}_{n+1} \rfloor + 1}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.7}$$

kde

$$R := \frac{1 + (1-\theta)ha}{1 - \theta ha}, \quad S := \frac{bh}{1 - \theta ha},$$

a

$$\alpha_n := (1-\theta)\left(\bar{\alpha}_n - \lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor\right), \qquad \beta_n := 1 - \theta - \alpha_n,$$
$$\widehat{\alpha}_n := \theta\left(\bar{\alpha}_{n+1} - \lfloor \bar{\alpha}_{n+1} \rfloor\right), \qquad \widehat{\beta}_n := \theta - \widehat{\alpha}_n.$$

Užitečnější je však metoda připouštějící obecný vektorový tvar pantografové rovnice (2.2), která je odpovídající maticovou formou formule (3.7):

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = P^{-1}Q\boldsymbol{y}_n + P^{-1}hB\left(\beta_n \boldsymbol{y}_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor} + \alpha_n \boldsymbol{y}_{\lfloor \bar{\alpha}_n \rfloor + 1} + \widehat{\beta}_n \boldsymbol{y}_{\lfloor \bar{\alpha}_{n+1} \rfloor} + \widehat{\alpha}_n \boldsymbol{y}_{\lfloor \bar{\alpha}_{n+1} \rfloor + 1}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.8}$$

kde A a B jsou komplexní matice rozměrů $d \times d$, dále

$$P := I - \theta hA,$$

$$Q := I + (1-\theta)hA,$$

a I značí jednotkovou matici stejných rozměrů, jako matice A, B.

3.1.2. Kvazi-geometrická síť

Odvození metody v předchozí části užívá tzv. ekvidistantní síť. Jedná se tak o metodu s konstantním krokem h. Dělení časového intervalu na rovnoměrné dílky, jako bychom to obvykle prováděli u výpočtu úloh ODE, nebo DDE s konstantním zpožděním, nebude však u úloh s proporcionálním zpožděním výhodné. Kromě potřeby spočítat velké množství iterací, a tak i vyšší náročnosti na paměť, je také problémová nutnost použití lineární interpolace ve zpožděném členu. Ideální je pro naši potřebu taková síť, která nám zajistí, že každá hodnota numerického řešení potřebná v libovolném kroku metody byla již spočítána v některém z předchozích kroků (nebo je známa z počáteční podmínky). Jelikož v našem případě zpoždění s časem proporcionálně roste, budeme chtít aby rovněž délka časových kroků s časem rostla. Také budeme požadovat, abychom zvolili za uzly takové body, ve kterých budeme potřebovat znát hodnotu zpožděného členu.

Pro naše účely tak bude vhodná tzv. kvazi-geometrická síť, ve tvaru, jak je navržena např. v článku [2]. Hledanou síť uzlů budeme značit $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < \infty$. Předpokládejme, že již známe numerické řešení rovnice (2.2) do nějakého bodu $T_0 > 0$. Pro jednoduchost (avšak bez újmy na obecnosti) můžeme položit $T_0 = t_0 = 1$. To je nutné z důvodu zaručení platnosti hypotézy H_1, jak je uvedena v kapitole 2.2. Nejdříve definujme primární síť vztahem

$$T_k := \frac{T_{k-1}}{q}, \qquad k =, 1, 2, \ldots,$$

kde $q \in (0, 1)$ je koeficientem proporcionálního zpoždění. Délky primárních intervalů jsou potom dány vztahem

$$H_k := T_k - T_{k-1} = T_0 \frac{1-q}{q^k} = \frac{1-q}{q^k}, \qquad k =, 1, 2, \ldots. \tag{3.9}$$

Vidíme, že délka primárních intervalů roste geometrickou řadou. Abychom však získali globální kvazi-geometrickou síť, musíme ještě podělit každý primární interval na pevně daný počet m stejných podintervalů. Délky těchto podintervalů (neboli intervalů globální sítě) jsou dány vztahem

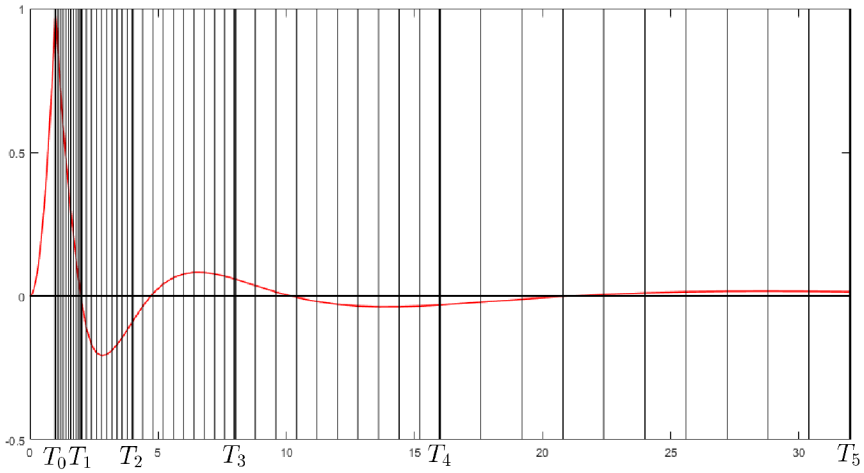
$$h_{n+1} := \frac{H_{\lfloor n/m \rfloor + 1}}{m} = \frac{1-q}{m q^{\lfloor n/m \rfloor + 1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.10}$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celočíselnou část. Z toho již lehce získáme obecný vztah pro jednotlivé uzly globální kvazi-geometrické sítě

$$t_n = \frac{t_{n-m}}{q}, \qquad n > m. \tag{3.11}$$

V řadě článků (uveďme např. [2],[16], [24]) je ukázáno, že je takto definovaná časová diskretizace pro účely diferenciálních rovnic s proporcionálním zpožděním, a zejména pro rovnice pantografu, velmi výhodná. Ostatně ukáže se to i v našem dalším postupu.

Na obrázku 3.1 je tato kvazi-geometrická síť znázorněna pro skalární pantografovou rovnici s $q = \frac{1}{2}$ a použitým dělením $m = 10$. Tučné čáry značí uzly primární sítě, tenčí čáry potom všechny ostatní uzly sítě. Červeně je znázorněno řešení rovnice $y(t)$. Na obrázku je názorné postupné prodlužování kroku mezi uzly primární sítě.



Obrázek 3.1: Kvazi-geometrická časová diskretizační síť

Použitím kvazi-geometrické sítě můžeme předpis θ-metody (3.6) poupravit následovně. Konstantní krok h bude nahrazen krokem h_{n+1} podle (3.10). Dále, jak již bylo řečeno, díky vhodně zvolené síti se zcela vyhneme lineární interpolaci, neboť pokud bychom vztah pro lineární interpolaci zapsali jako

$$y^h(t) = \frac{t - t_i}{t_j - t_i} y_j + \frac{t_j - t}{t_j - t_i} y_i, \qquad t_i \leq t < t_j, \tag{3.12}$$

potom podle (3.11) a (3.12) platí

$$y^h(qt_n) = y^h(t_{n-m}) = y(t_{n-m}), \qquad n > m. \tag{3.13}$$

Aplikací výše uvedených vztahů (3.6) a (3.13) na rovnici pantografu (2.2) dostáváme schéma vyjádřené rovnou ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h_{n+1}[(1-\theta)(A\boldsymbol{y}_n + B\boldsymbol{y}_{n-m}) + \theta(A\boldsymbol{y}_{n+1} + B\boldsymbol{y}_{n-m+1})], \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{3.14}$$

Převedením všech členů $\boldsymbol{y}_{n+1}$ na levou stranu rovnice dostáváme schéma lineární θ-metody s kvazi-geometrickou sítí

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = M_{n+1}^{-1} N_{n+1} \boldsymbol{y}_n + \theta h_{n+1} M_{n+1}^{-1} B \boldsymbol{y}_{n-m+1} + h_{n+1}(1-\theta) M_{n+1}^{-1} B \boldsymbol{y}_{n-m}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.15}$$

kde

$$M_{n+1} := I - \theta h_{n+1} A,$$
$$N_{n+1} := I + (1-\theta) h_{n+1} A,$$

a I je jednotková matice stejných rozměrů jako matice A a B.

Metoda s kvazi-geometrickou sítí je zdánlivě výhodnější, jednak díky absenci lineární interpolace v případě některých členů v předpisu metody, což vede k přímočařejšímu výpočtu, a také díky obecně menšímu počtu výpočetních cyklů, což je způsobeno prodlužujícím se krokem. Na druhou stranu je také dobré si povšimnout, že v předpisu metody

s kvazi-geometrickou sítí vystupují matice M_{n+1} a N_{n+1}, které je potřeba přepočítávat v každém kroku. Výpočetně náročné bude zejména násobení inverzní maticí M_{n+1}^{-1}. V případě metody s ekvidistantní sítí jsou na stejné pozici konstantní matice P a Q, s kterými je potřeba vykonat stejné operace pouze jednou na začátku výpočtu.

Obě metody budeme v dalším textu porovnávat, a případně posuzovat, jestli některé známé vlastnosti metody s ekvidistantní sítí platí i pro metodu s kvazi-geometrickou sítí.

Poznámka. Speciální volbou parametru $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ lze získat některé známé metody. Pro $\theta = 0$ dostáváme explicitní Eulerovu metodu, $\theta = 1$ potom dává implicitní Eulerovu metodu. Nakonec volbou $\theta = 0{,}5$ dostáváme metodu používající lichoběžníkovou integrační formuli. Zkráceně ji nazývejme lichoběžníkovou metodou. Každá z těchto metod má nějaké výhody a nevýhody. θ-metoda pak zřejmě může posloužit jako jistý kompromis, kdy vhodnou volbou θ můžeme dosáhnout vysoké přesnosti a zároveň dostatečné stability metody.

Poznámka. Obě uvedené θ-metody jsou naprogramovány jako funkce pro prostředí Matlab a přiloženy k této práci. θ-metodu s kvazi-geometrickou sítí nalezneme v souboru `theta_metoda.m`, θ-metodu s ekvidistantní sítí potom v souboru `theta_met_ekv.m`. V uvedených souborech jsou popsány principy metod, i potřebné vstupy a výsledné výstupy. Metody jsou používány v numerických výpočtech v kapitole 4.

3.2. Stabilita numerických metod

V kapitole 2.5 jsme uvedli definice a nutné podmínky stability DDE. Po numerických metodách, kterými tyto rovnice řešíme, budeme logicky považovat, aby zachovávaly stejné vlastnosti stability a nebo kontraktivity za stejných podmínek, které je zaručují pro přesné řešení.

Při analýze stability numerických metod obecně rozlišujeme více typů stability. V případě metod pro ODE je základním typem tzv. A-stabilita (neboli absolutní stabilita), která je vázána na stabilní skalární testovací rovnici. Dalším typem je obecnější BN-stabilita vztažená na obecnou vektorovou rovnici. Některé definice stability (a také kontraktivity) metod pro DDE jsou potom z A-stability, příp. BN-stability, odvozeny. Vybrané definice jsou v této kapitole uvedeny. Nás budou zajímat zejména definice vztažené na rovnici s časově závislým zpožděním – FP-stabilita a FRN-stabilita. Pro úplnost jsou zde však uvedeny i dílčí definice, které k nim vedou při postupném zobecňování.

3.2.1. A-stabilita ODE metod

Nejprve uveďme nejjednodušší pojem stability pro ODE metody, kterým je absolutní stabilita, zkráceně A-stabilita. Pro její definici potřebujeme tzv. testovací rovnici

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.16}$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom A-stabilitu metod definujeme následovně.

Definice 3.1. *Oblast A-stability* numerické metody pro ODE je množina S_A komplexních čísel $\alpha = h\lambda$ takových, že numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice (3.16) získané touto metodou s konstantním krokem h splňuje podmínku

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Definice 3.2. Numerická metoda pro ODE je *A-stabilní*, pokud

$$S_A \supseteq \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}(\alpha) < 0\}.$$

Jinými slovy, numerická metoda je A-stabilní, pokud při implementaci s konstantním krokem h zachovává asymptotickou stabilitu řešení $y(t)$ rovnice (3.16).

Za testovací rovnici můžeme rovněž vzít lineární soustavu

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = L\boldsymbol{y}(t), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{3.17}$$

kde L je komplexní matice rozměrů $d \times d$. Potom bude platit následující věta, kterou lze nalézt v [3].

Věta 3.3. *Numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice* (3.17) *získané numerickou metodou pro ODE s konstantním krokem h splňuje podmínku*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

pro všechny počáteční podmínky $\boldsymbol{y}_0$ právě tehdy když platí $h\lambda \in S_A$ pro všechna vlastní čísla λ matice L.

3.2.2. BN-stabilita

Pojem A-stability vztažený na úplně obecnou vektorovou testovací rovnici vede k zavedení *BN-stability*. Jako testovací rovnici mějme

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = g(t, \boldsymbol{y}(t)), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

kde $g \in C^0\left([t_0, \infty) \times \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d\right)$. Rozdíl u lineárních testovacích rovnic (3.16) a (3.17) je ten, že jejich skutečné, i numerické řešení jsou rovny nulové funkci, když $y_0 = 0$. Díky tomu, a také díky linearitě, je možné posuzovat kontraktivitu a stabilitu řešení jednoduše porovnáním s nulovou funkcí. Avšak u obecně nelineární rovnice (3.18) toto zjednodušení nemůžeme uvažovat, zejména v případě numerického řešení. Proto mějme další rovnici

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}'(t) = g(t, \tilde{\boldsymbol{y}}(t)), & t \geq t_0, \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{y}}_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

se stejnou funkcí $g(t, \boldsymbol{y})$, ale jinou počáteční podmínkou $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$. Dále definujeme rozdíl řešení těchto testovacích rovnic

$$\delta\boldsymbol{y}_n = \tilde{\boldsymbol{y}}_n - \boldsymbol{y}_n,$$

a dále předpokládáme existenci spojité funkce

$$Y(t) \geq \sup_{y_1 \neq y_2} \frac{\mathcal{R}((g(t,y_1) - g(t,y_2)) \cdot (y_1 - y_2))}{\|y_1 - y_2\|^2}.$$

Potom definujeme BN-stabilitu metody následovně.

Definice 3.4. Numerická metoda pro ODE je *BN-stabilní*, když pro rozdíl $\{\delta \boldsymbol{y}_n\}_{n\geq 0}$ řešení rovnic (3.18) a (3.19) platí, že

$$\|\delta y_{n+1}\| \leq \|\delta y_n\|,$$

pro libovolnou diskretizační síť a zároveň platí

$$Y(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0.$$

3.2.3. P-stabilita a její zobecnění

Nyní přejděme k definicím stability pro metody pro DDE. Nejjednodušším zobecněním pojmu A-stability pro DDE je tzv. P-stabilita. Vezměme testovací rovnici rozšířenou na pravé straně o zpožděný člen.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau), & t \geq t_0, \\ y(t) = \Phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

kde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ a τ je konstantní zpoždění. Potom P-stabilitu numerické metody pro DDE definujeme obdobným způsobem, jako A-stabilitu pro ODE metody.

Definice 3.5. *Oblast P-stability* numerické metody pro DDE je množina S_P dvojic komplexních čísel $(\alpha, \beta),\ \alpha = h\lambda, \beta = h\mu$, takových, že numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice (3.20) získané touto metodou s konstantním krokem h za předpokladu

$$h = \tau/m, m \geq 1, m \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

splňuje podmínku

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

pro všechna konstantní zpoždění τ a všechny počáteční funkce $\Phi(t)$.

Definice 3.6. Numerická metoda pro DDE je *P-stabilní*, pokud

$$S_P \supseteq \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathcal{R}(\alpha) + |\beta| < 0\}.$$

Podmínka (3.21) může být v jistých případech příliš omezující pro volbu diskretizační sítě, a tak se v literatuře uvádí pojem GP-stability (tj. zobecněné P-stability).

Definice 3.7. *Oblast GP-stability* numerické metody pro DDE je množina S_{GP} dvojic komplexních čísel $(\alpha, \beta),\ \alpha = h\lambda, \beta = h\mu$, takových, že numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice (3.20) získané touto metodou s konstantním krokem h, splňuje podmínku

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

pro všechna konstantní zpoždění τ a všechny počáteční funkce $\Phi(t)$.

Definice 3.8. Numerická metoda pro DDE je *GP-stabilní*, pokud

$$S_{GP} \supseteq \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathcal{R}(\alpha) + |\beta| < 0\}.$$

GP-stabilita je silnějším typem stability, neboť nedává taková omezení na volbu sítě. U metody s ekvidistantní sítí je tato definice dostatečná. Ovšem fakt, že vyžaduje konstantní volbu délky kroku h, může být příliš omezující. Zvlášť v našem případě, kdy chceme vyšetřit stabilitu metody používající kvazi-geometrickou síť. Toto omezení je zřejmě způsobeno i volbou testovací rovnice, kde se nachází konstantní zpoždění. Vezměme tedy jinou testovací rovnici s časově závislým zpožděním.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau(t)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \Phi(t), & t \leq t_0. \end{cases} \tag{3.22}$$

S touto testovací rovnicí už můžeme zavést pojem tzv. FP-stability (tj. úplné P-stability).

Definice 3.9. Numerická metoda pro DDE je *FP-stabilní*, pokud numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice (3.22) získané touto metodou na libovolné diskretizační síti splňuje podmínku

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

pro všechny počáteční funkce $\Phi(t)$ a všechna zpoždění $\tau(t)$ splňující hypotézy $(H_1), (H_2)$ a (H_4), a zároveň platí

$$\mathcal{R}(\lambda) + |\mu| < 0.$$

FP-stabilita je z uvedených definic nejsilnějším typem stability a platí, že FP-stabilní metoda je rovněž GP-stabilní. Dále také GP-stabilní metoda je P-stabilní a P-stabilní metoda pro DDE je A-stabilní pro ODE.

3.2.4. P-kontraktivita a její zobecnění

Pojmy kontraktivity numerických metod lze postupně odvodit prakticky velmi podobným postupem, jako je tomu u předchozích uvedených definic stability. K definicím jsou potřeba stejné testovací rovnice, pouze podmínka stability je nahrazena podmínkou kontraktivity.

Definice 3.10. *Oblast P-kontraktivity* numerické metody pro DDE je množina C_P dvojic komplexních čísel $(\alpha, \beta), \alpha = h\lambda, \beta = h\mu$ takových, že diskrétní numerické řešení y_n rovnice (3.20), získané metodou s konstantním krokem h splňujícím

$$h = \tau/m, \quad m \geq 1, m \in \mathbb{Z},$$

splňuje

$$|y_n| \leq \max_{t\leq t_0} |\phi(t)|, \quad n \geq 0 \tag{3.23}$$

pro všechna konstantní zpoždění τ a všechny počáteční funkce $\Phi(t)$.

Definice 3.11. Numerická metoda pro DDE je *P-kontraktivní*, pokud platí

$$C_P \supseteq \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 | \mathcal{R}(\alpha) + |\beta| \leq 0\right\}.$$

Odstraněním podmínky na délku kroku h máme definici GP-kontraktivity (tedy obecné P-kontraktivity).

Definice 3.12. *Oblast GP-kontraktivity* numerické metody pro DDE je množina C_{GP} dvojic komplexních čísel $(\alpha, \beta), \alpha = h\lambda, \beta = h\mu$ takových, že diskrétní numerické řešení y_n rovnice (3.20), získané metodou s konstantním krokem h splňuje (3.23) pro všechna konstantní zpoždění τ a všechny počáteční funkce $\Phi(t)$.

Definice 3.13. Numerická metoda pro DDE je *GP-kontraktivní*, pokud platí

$$C_{GP} \supseteq \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 | \mathcal{R}(\alpha) + |\beta| \leq 0\right\}.$$

Nakonec použitím testovací rovnice s časově proměnným zpožděním máme dostáváme hledanou definici úplné FP-kontraktivity.

Definice 3.14. Numerická metoda pro DDE je *FP-kontraktivní*, pokud numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ testovací rovnice (3.22) získané touto metodou na libovolné diskretizační síti splňuje podmínku (3.23) pro všechny počáteční funkce $\Phi(t)$ a všechna zpoždění $\tau(t)$ splňující hypotézy (H_1) a (H_4), a zároveň platí

$$\mathcal{R}(\lambda) + |\mu| \leq 0.$$

Zřejmě FP-kontraktivní metoda je GP-kontraktivní a ta je také P-kontraktivní. Dále zřejmě platí $C_{GP} \subseteq C_P$.

3.2.5. RN-stabilita a její zobecnění

Další typy stability pro vektorovou rovnici odvodíme přímo z pojmu BN-stability. Přímé zobecnění ODE (3.18) na DDE dostaneme opět přidáním zpožděného člene na pravou stranu. Máme tak testovací rovnici

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.24}$$

kde τ je konstantní zpoždění. Dále vezměme druhou testovací rovnici

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}'(t) = f(t, \tilde{\boldsymbol{y}}(t), \tilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t), & t \leq t_0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Označme rozdíl numerických řešení těchto rovnic

$$\delta \boldsymbol{y}_n = \tilde{\boldsymbol{y}}_n - \boldsymbol{y}_n,$$

a rozdíl počátečních funkcí

$$\delta \boldsymbol{\Phi}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) - \boldsymbol{\Phi}(t).$$

Navíc budeme opět potřebovat funkce $X(t)$ a $Y(t)$ definované vztahy (2.10) a (2.9). Pro takto zavedené rovnice se zavádí následující pojem RN-stability, resp. GRN-stability (tj. obecné RN-stability).

Definice 3.15. Numerická metoda pro DDE je *RN-stabilní*, když pro rozdíl $\{\delta \boldsymbol{y}_n\}_{n\geq 0}$ řešení rovnic (3.24) a (3.25) splňující

$$Y(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0,$$

platí, že

$$\|\delta \boldsymbol{y}_n\| \leq \max_{t \leq t_0} \|\delta \boldsymbol{\Phi}(t)\|, \quad n \geq 0$$

pro všechny počáteční funkce $\boldsymbol{\Phi}(t)$ a $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$, pro všechna konstantní zpoždění τ a pro libovolnou konstantní délku kroku h splňující podmínku

$$h = \tau/m, \quad m \geq 1, m \in \mathbb{Z}.$$

Obecnější definici opět dostaneme odstraněním omezující podmínky na délku kroku h.

Definice 3.16. Numerická metoda pro DDE je *GRN-stabilní*, když pro rozdíl $\{\delta \boldsymbol{y}_n\}_{n \geq 0}$ řešení rovnic (3.24) a (3.25) splňující

$$Y(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0,$$

platí, že

$$\|\delta \boldsymbol{y}_n\| \leq \max_{t \leq t_0} \|\delta \boldsymbol{\Phi}(t)\|, \quad n \geq 0,$$

pro všechny počáteční funkce $\boldsymbol{\Phi}(t)$ a $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$, pro všechna konstantní zpoždění τ a pro libovolnou konstantní délku kroku h.

Podobně, jako u skalárních rovnic, i zde dostaneme definici úplné *RN-stability* (zkráceně FRN-stability) použitím testovacích rovnic se zpožděním závislým na čase. Mějme tedy rovnice

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t - \tau(t))), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.26}$$

a

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}'(t) = f(t, \tilde{\boldsymbol{y}}(t), \tilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau(t))), & t \geq t_0, \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.27}$$

kde časově závislé zpoždění $\tau(t)$ splňuje hypotézy (H_1) a (H_4).

Definice 3.17. Numerická metoda pro DDE je *FRN-stabilní*, když pro rozdíl $\{\delta \boldsymbol{y}_n\}_{n \geq 0}$ řešení rovnic (3.26) a (3.27) splňující

$$Y(t) + X(t) \leq 0, \qquad t \geq t_0,$$

platí, že

$$\|\delta \boldsymbol{y}_n\| \leq \max_{t \leq t_0} \|\delta \boldsymbol{\Phi}(t)\|, \quad n \geq 0,$$

pro všechny počáteční funkce $\boldsymbol{\Phi}(t)$ a $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$, pro všechna časově závislá zpoždění $\tau(t)$ splňující hypotézy (H_1) a (H_4), a pro libovolnou časovou diskretizační síť.

Pro uvedené definice stability opět platí, že silnější vlastnost implikuje slabší. Máme tedy, že FRN-stabilní metoda bude také GRN-stabilní, GRN-stabilní bude RN-stabilní a nakonec RN-stabilní bude BN-stabilní. Poznamenejme rovněž, že FRN-stabilní metoda bude také FP-kontraktivní.

Uvedené vlastnosti jsou prozkoumány zejména u známějších zavedenějších metod. Např. o Eulerově metodě s lineární interpolací, kterou dostaneme použitím θ-metody s ekvidistantní sítí při volbě $\theta = 1$, je známo (viz [1]), že je nejen BN-stabilní, ale dokonce FRN-stabilní.

3.2.6. H-stabilita

Uvedené pojmy FRN-stability, příp. FP-stability, jsou platné, pokud je ukázána stabilita metody pro všechny diskretizační sítě H. Velmi užitečnou definicí stability metody z hlediska analýzy je však tzv. H-stabilita, tedy stabilita vztažená ke konkrétní diskretizační síti H.

Mějme rovnici pantografu

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + B\boldsymbol{y}(qt), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.28}$$

a označme $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ množinu prvků matice A a $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ množinu prvků matice B. Mějme $k = 2d^2$ počet těchto prvků. Pak definujme H-stabilitu metody následovně.

Definice 3.18. *Oblast H-stability* numerické metody pro rovnici (3.28) s diskretizační sítí $H = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ je množina S_H k-tic $\{a_{ij}, b_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ prvků matic A a B takových, že numerické řešení $\{y_n\}_{n\geq 0}$ získané touto metodou na dané diskretizační síti splňuje podmínku

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Nechť $S_\star$ je analytická oblast asymptotické stability rovnice (3.28) podle definice (2.11). Pak H-stabilitu numerické metody definujme tímto způsobem.

Definice 3.19. Numerická metoda pro rovnici (3.28) je *H-stabilní*, pokud

$$S_H \supseteq S_\star.$$

Poznámka. Při analýze můžeme zkoumanou oblast asymptotické stability S_H zúžit pevnou volbou některých parametrů. Stejným způsobem pak zúžíme i analytickou oblast stability $S_\star$ a uvedené definice se nezmění. Příkladem takového postupu může být, když vezme matice A a B diagonální. Potom $k = 2d$ a celá problematika se tak zjednoduší.

4. Numerická analýza metod

V této kapitole vyšetříme některé vlastnosti numerických metod pro konkrétní případy rovnice pantografu, zejména pro skalární případ pantografové rovnice. Výsledky získané numerickým výpočtem jsou zde srovnány s některými známými poznatky z literatury. Numerické výpočty jsou provedeny v prostředí Matlab a lze je opakovat pomocí skriptů, které jsou přílohou této práce. V jednotlivých skriptech lze dále upravovat vstupní hodnoty a tak provádět další pokusy. Důraz je kladen na použití θ-metody s kvazi-geometrickou sítí. Dále je v některých příkladech použita i θ-metoda s ekvidistantní sítí, potom metoda kroků a metoda `ddesd`, která je integrovaná v prostředí Matlab a jedná se o lichoběžníkovou metodu.

4.1. Skalární rovnice pantografu

Zaměřme se především na nejjednodušší případ – skalární rovnici pantografu

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(qt), & t \geq t_0, \\ y(t) = \Phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a $q \in (0, 1)$. Za počáteční bod sítě t_0 budeme vždy volit $t_0 = 1$, jak je to uvedeno v předchozí kapitole.

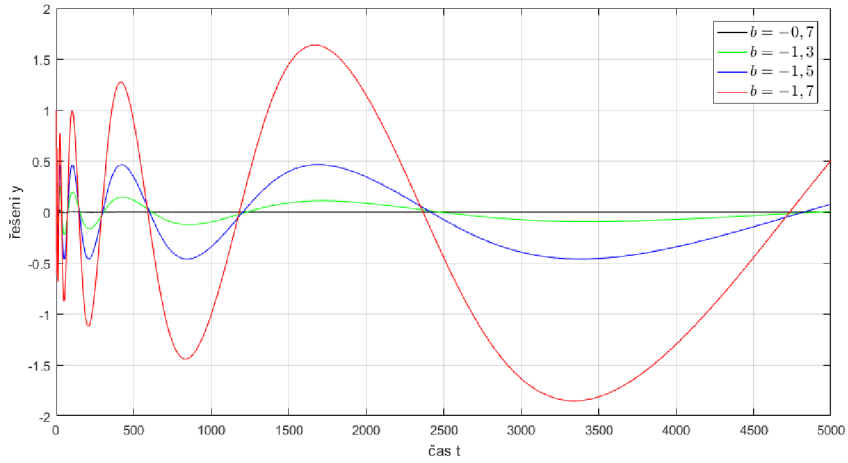
4.1.1. Stabilita rovnice

Nejprve na jednoduchém příkladu demonstrujme chování řešení stabilní a nestabilní rovnice, resp. rovnice na hranici stability. Mějme počáteční problém

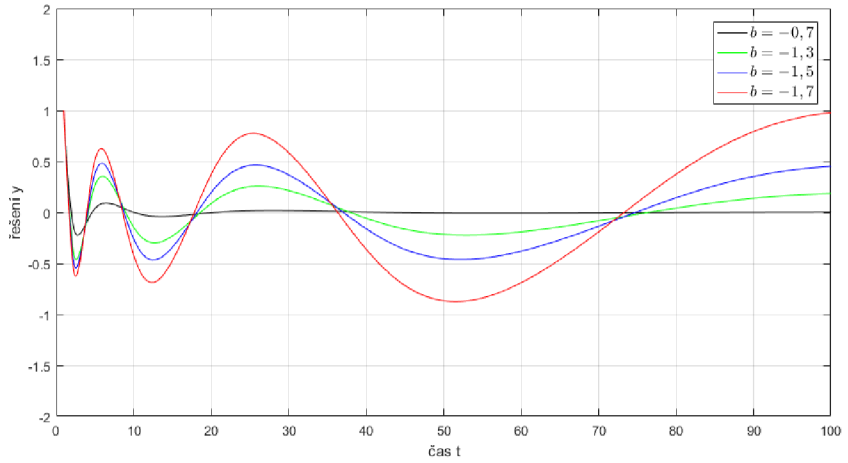
$$\begin{cases} y'(t) = -1{,}5y(t) + by\left(\frac{1}{2}t\right), & t \geq 1, \\ y(t) = t^2, & t \leq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

kde koeficient $a = -1{,}5$ je zvolen pevně. Sledujme řešení rovnice pro různé volby koeficientu b. Jako konečný čas výpočtu vezměme $T = 5000$. Jelikož chceme demonstrovat pouze stabilitu, resp. nestabilitu rovnice, výpočet provedeme metodou *ddesd* pro řešení DDE, která je integrovaná v prostředí Matlab.

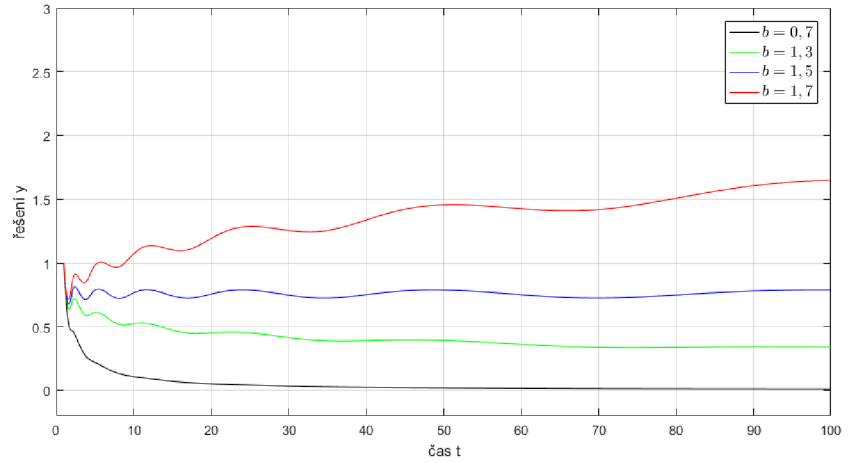
Obrázky 4.1 a 4.3 zobrazují řešení pro různé záporné, resp. kladné hodnoty koeficientu b, na obrázku 4.2 pak vidíme detail prvního obrázku do času $t = 100$. Dle věty 2.9 je rovnice (4.1) stabilní právě tehdy, když $\mathcal{R}(a) < 0$, $|a| > |b|$, což je na obrázcích názorné. Navíc je zřejmě řešení „stabilnější“ (tedy konverguje k nule rychleji), čím menší je $|b|$. Pro případ $|b| = |a|$ vidíme, že řešení se sice neblíží k nule, ale je ohraničené dvěma hodnotami, mezi kterými po nějakém čase osciluje. Výpočty lze zopakovat spuštěním přiloženého skriptu `skript1.m`.



Obrázek 4.1: Řešení (4.2) pro $b < 0$.



Obrázek 4.2: Řešení (4.2) pro $b < 0$ (detail do času $t = 100$).



Obrázek 4.3: Řešení (4.2) pro $b > 0$ (detail do času $t = 100$).

4.1.2. H-stabilita θ-metody s kvazi-geometrickou sítí

Pro použití θ-metody v praxi je třeba znát některé její vlastnosti, zejména co se týče její stability. V literatuře lze dohledat některé dílčí závěry ohledně H-stability θ-metod, konkrétně při aplikaci na skalární pantografovou rovnici (4.1). Liu a spol. [16] zkoumali stabilitu θ-metody na obecnější kvazi-geometrické síti, podobné té uvedené v této práci. V jejich článku dokázali zejména následující věty.

Věta 4.1. *Platí-li* $\mathcal{R}(a) < 0$, $(2\theta-1)|a| = |b|$ *a navíc* $\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{-1} < \infty$, *potom je numerické řešení získané* θ*-metodou* (3.14) *na kvazi-geometrické síti stejnoměrně ohraničené.*

Věta 4.2. *Platí-li* $\mathcal{R}(a) < 0$, $(2\theta - 1)|a| > |b|$ *a navíc* $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$, *potom pro numerické řešení získané* θ*-metodou* (3.14) *na kvazi-geometrické síti platí*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Na tuto práci navázali Bellen a spol. [2], kteří dokázali následující větu o H-stabilitě θ-metody na síti (3.11), tedy na námi zkoumané kvazi-geometrické síti.

Věta 4.3. *Numerická metoda* (3.14) *na síti* (3.11) *je* H*-stabilní právě tehdy, když*

$$\frac{1}{2} < \theta \leq 1.$$

Konkrétně pro $\theta = \frac{1}{2}$, tedy pro lichoběžníkovou metodu, pak rovněž Bellen a spol. ukázali, že metoda není stabilní ve smyslu definic 3.18 a 3.19. Řešení získané touto metodou je však alespoň ohraničené, což může být v některých případech postačující vlastnost. Zřejmě tak alespoň splňuje podmínku kontraktivity.

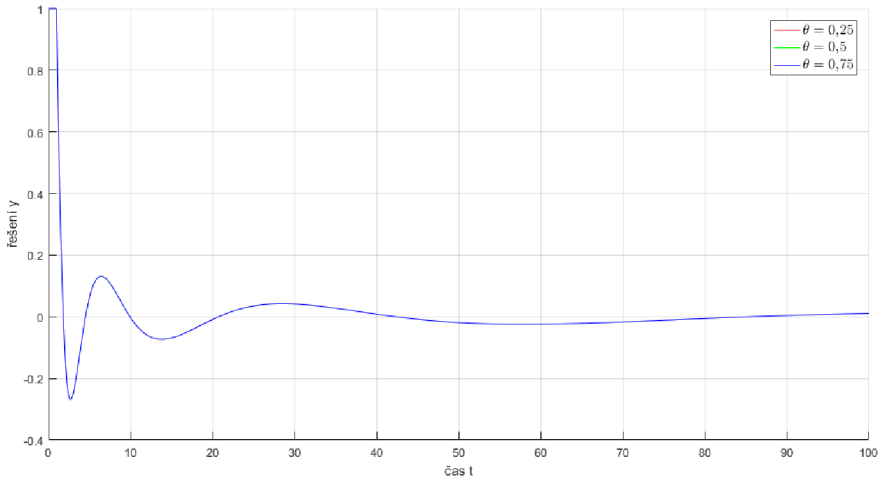
Ukázkový příklad

Platnost uvedených vět demonstrujeme na následujícím příkladu. Mějme počáteční problém

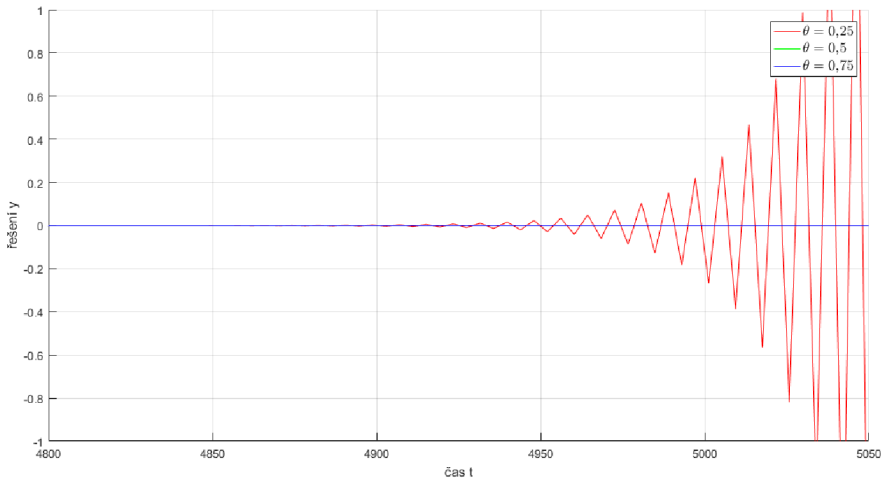
$$\begin{cases} y'(t) = -1{,}2y(t) - 0{,}7y\left(\frac{t}{2}\right), & t \geq 1, \\ y(t) = 1, & t \leq 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

kde je rovnice zřejmě stabilní, a tedy řešení by mělo konvergovat k nule. Řešení počítejme do času $T = 5050$ s dělením $m = 1000$. Parametr θ volíme různý.

Na obrázku 4.4 vidíme detail do času $t = 100$. Jednotlivá řešení pro různou volbu θ jsou zde nerozeznatelná (křivky se v grafu překrývají). Na dalším obrázku 4.5 (detail od času $t = 4800$) už však lze spatřit, jak se naplno projeví nestabilita metody po určitém čase pro parametr $\theta = 0{,}25$. Ohraničenost řešení pro $\theta = 0{,}5$ se zdá být v tomto případě dostatečná vlastnost, neboť rozdíl oproti řešení pro $\theta = 0{,}75$ je stále neznatelný. Výpočty a konkrétní spočítané numerické hodnoty můžeme blíže prozkoumat spuštěním skriptu `skript2.m`.



Obrázek 4.4: Řešení příkladu (4.3) pro různou volbu θ (detail do $t = 100$).



Obrázek 4.5: Řešení příkladu (4.3) pro různou volbu θ (detail od $t = 4800$).

4.1.3. Stabilita diferenčního schématu

Článek Čermáka a spol. [4] se zabývá analýzou stability diferenčního schématu ve tvaru

$$y_{n+1} + \alpha y_n + \beta y_{n-m+1} + \gamma y_{n-m} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a $m \geq 2$ je celé číslo. Toto diferenční schéma je v zásadě obecným vyjádřením dříve uvedeného předpisu θ-metody (3.6) pro skalární rovnici pantografu (avšak s reálnými koeficienty), který můžeme získat volbou

$$\alpha = -\frac{1 + (1-\theta)ah}{1 - \theta ah}, \quad \beta = -\frac{\theta bh}{1 - \theta ah}, \quad \gamma = -\frac{(1-\theta)bh}{1 - \theta ah}. \tag{4.5}$$

Proto se zabývejme tím, jak lze závěry uvedené v citovaném článku dále použít pro zkoumání θ-metody. V článku nalezneme odvození několika nutných a zároveň postačujících podmínek pro stabilitu schématu (4.4) s příslušnými důkazy. Shrnuty jsou do následujících vět, zvlášť pro případy, kdy je číslo m liché a kdy je sudé.

Věta 4.4. *Nechť α, β, γ jsou reálné konstanty a m je kladné liché celé číslo. Potom je schéma* (4.4) *stabilní právě tehdy, když*

$$|\alpha + \beta| < 1 + \gamma, \tag{4.6}$$

a dále platí

$$\gamma - 1 < |\alpha - \beta| \leq 1 - \gamma, \tag{4.7}$$

a nebo

$$|\alpha - \beta| > |1 - \gamma|, \quad m < \frac{\arccos\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 1\right)/(2|\alpha\gamma - \beta|)\right)}{\arccos\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1\right)/(2|\alpha - \beta\gamma|)\right)}. \tag{4.8}$$

Věta 4.5. *Nechť α, β, γ jsou reálné konstanty a m je kladné sudé celé číslo. Potom je schéma* (4.4) *stabilní právě tehdy, když*

$$|\alpha + \gamma| < 1 + \beta, \tag{4.9}$$

a dále platí

$$\beta - 1 < |\alpha - \gamma| \leq 1 - \beta, \tag{4.10}$$

a nebo

$$|\alpha - \gamma| > |1 - \beta|, \quad m < \frac{\arccos\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 1\right)/(2|\alpha\gamma - \beta|)\right)}{\arccos\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1\right)/(2|\alpha - \beta\gamma|)\right)}. \tag{4.11}$$

Uvedené věty lze dále shrnout. Pro obecné m dostaneme, pokud současně uvažujeme platnost vztahů (4.6),(4.7),(4.9) a (4.10), následující větu.

Věta 4.6. *Nechť α, β, γ jsou reálné konstanty. Potom je schéma* (4.4) *stabilní pro libovolné $m \geq 1$ právě tehdy, když*

$$|\alpha + \beta| < 1 + \gamma, \quad \gamma - 1 < \beta - \alpha \leq 1 - \gamma. \tag{4.12}$$

Pokud podmínku (4.12) z této věty uvažujeme se vztahy (4.5), dostaneme po několika úpravách podmínku na velikost kroku h. Konkrétně platí, že pokud je splněno

$$h \leq \frac{1}{|a| + |b|}, \tag{4.13}$$

potom je schéma (4.4), (4.5) asymptoticky stabilní pro libovolné kladné celé m právě tehdy, když platí také $|a| > b$, což je dříve uvedená podmínka stability skalární pantografové rovnice.

Užití podmínky na kvazi-geometrické síti

Je potřeba zdůraznit, že uvedené závěry platí pro α, β, γ konstantní, tedy i délka kroku h musí být konstantní. Dostáváme tak podmínku na volbu kroku pro ekvidistantní síť, ne však pro případ kvazi-geometrické sítě uvedené v předchozím textu. Vlastností této sítě je ale to, že se délka kroku zvětšuje pouze skokově v uzlech primární sítě. Mezi těmito uzly zůstává délka kroku konstantní, a tedy vždy na omezeném intervalu, ohraničeném uzly primární sítě, lze také uvažovat platnost uvedených vět.

Navíc se délka kroku sice zvětšuje teoreticky do nekonečna, výpočet však provádíme pouze do nějakého zvoleného času T. Můžeme tedy zkoumat, jak volit parametry metody

tak, aby ani největší použitá délka kroku nepřekročila podmínku (4.13). Potom bude podmínka splněna i pro všechny ostatní intervaly. Jediný volený parametr metody bude zřejmě číslo m, které určuje, na kolik dílků se dělí intervaly primární sítě.

Vezmeme-li $T_k \geq T$ jako poslední uzlový bod primární sítě, index k je dán vztahem

$$k = \left\lceil \log_q \frac{1}{T} \right\rceil,$$

kde $\lceil \cdot \rceil$ značí nejbližší větší celé číslo. Délka posledního intervalu bude podle (3.9) rovna

$$H_k = \frac{1-q}{q^k}.$$

Největší délka kroku použitá v algoritmu metody bude potom

$$h_{\max} = \frac{H_k}{m} = \frac{1-q}{mq^k}.$$

Zároveň chceme, aby tato délka kroku splňovala (4.13), tedy máme

$$h_{\max} = \frac{1}{|a|+|b|}.$$

Z těchto vztahů plyne, že minimální vhodnou volbu parametru m dělení sítě dostaneme podle vztahu

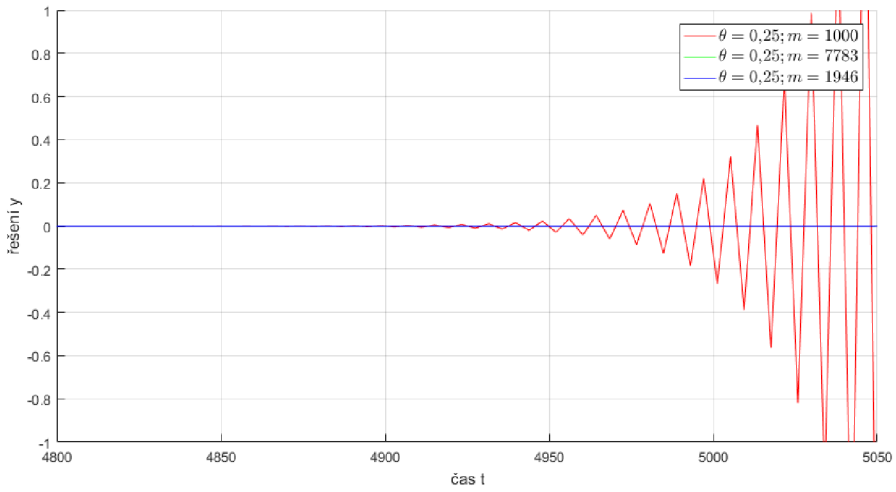
$$m_{\min} = \left\lceil \frac{H_k}{h_{\max}} \right\rceil = \left\lceil \frac{(1-q)(|a|+|b|)}{q^{\lceil \log_q \frac{1}{T} \rceil}} \right\rceil. \tag{4.14}$$

Zaokrouhlení na celé číslo je nutné, protože m předpokládáme celočíselné. Pro libovolné $m \geq m_{min}$ by tak mělo být uvedené diferenční schéma θ-metody s kvazi-geometrickou sítí asymptoticky stabilní.

Vynucení stability řešení do času T

Dodejme, že podmínka (4.13) není nutná, je však postačující. Tedy metoda může být stabilní, i když podmínka není splněna. A naopak splněním podmínky lze „zaručit“ stabilitu uvedeného diferenčního schématu. V předchozím příkladě (4.3) jsme ukázali, že je metoda nestabilní pro $\theta < \frac{1}{2}$, konkrétně pro $\theta = 0{,}25$. My však můžeme použít vztahy (4.13) a (4.14) a nastavit podle nich dělení m tak, aby řešení získané touto metodou bylo stabilní alespoň do času T. Dosazením parametrů příkladu (4.3) do (4.14) máme $h_{\max} = 0{,}5263$ a $m_{\min} = 7783$. Na obrázku 4.6 vidíme, že se řešení pro toto jemnější dělení opravdu drží hodnot blízkých nule (na obrázku se opět zelená a modrá linka překrývají) do požadovaného času $T = 5050$. Tento závěr je však vhodné chápat především jako varování, že při vysokém dělení sítě může metoda vyvolat dojem, že je stabilní, ač tomu tak není. Proto je potřeba být obezřetný při interpretaci numerických výsledků.

Zajímavé je, že vztah (4.13) není nijak závislý na parametru θ. Dosazením konkrétní hodnoty θ a také hodnot koeficientů a, b do nerovnic (4.12) dostaneme méně restriktivní podmínku na krok h. Lze jednoduše ověřit, že dosazením libovolných hodnot $\theta \geq \frac{1}{2}$ nám vyjde pouze podmínka $h > 0$. Tedy pro tyto hodnoty θ je metoda stabilní nezávisle na



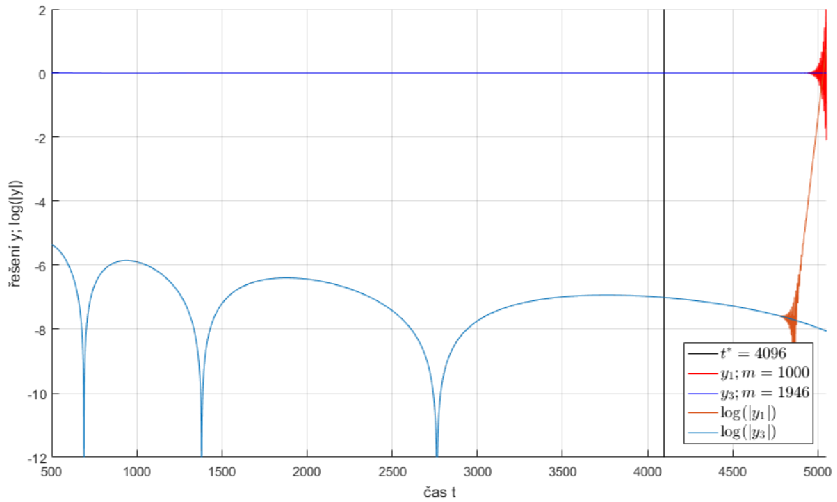
Obrázek 4.6: Řešení získané nestabilní metodou pro různé dělení m.

délce kroku, což je závěr konzistentní s větou 4.3. Naopak dosazením $\theta = 0{,}25$ dostáváme podmínku

$$0 < h < 2{,}1053,$$

z čehož spočteme $m_{\min} = 1946$. I toto dělení bude dostatečné pro zachování stability řešení až do času T, jak lze rovněž vidět na obrázku 4.6.

Dále můžeme zjistit kritický časový bod t^*, ve kterém dochází ke změně stability schématu. V našem případě pro hrubější dělení $m = 1000$ bude $t^* = 4096$, neboť před tímto časem je $h = 2{,}048 < h_{\max}$, po tomto čase je to však $h = 4{,}096 > h_{\max}$. Máme tak časový bod, o kterém víme, že řešení je zaručeně stabilní až do tohoto času. Pro zjištění nestability metody je však nutné provést výpočet dostatečně daleko za t^*. Kromě sledování samotného řešení y může být užitečnější sledovat chování logaritmu řešení $\log(|y|)$, na kterém se nestabilita projeví zřetelněji, viz obrázek 4.7 (spodní křivky). Uvedené výpočty příkladu lze zopakovat spuštěním skriptu `skript3.m`.



Obrázek 4.7: Srovnání řešení a logaritmu řešení, kritický bod t^*.

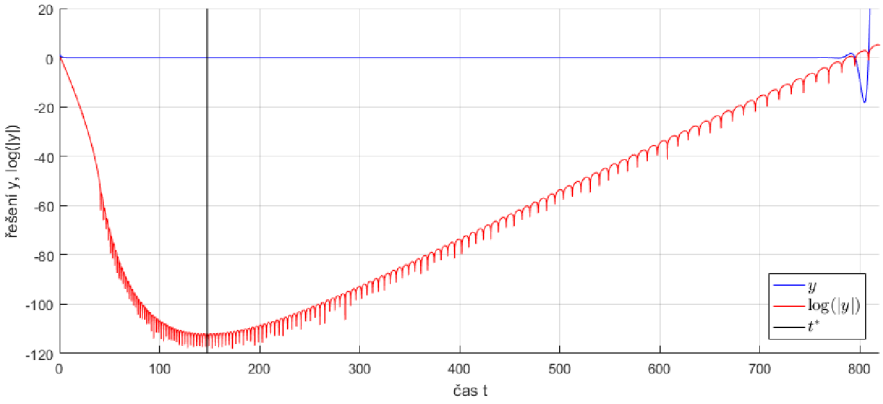
4.1.4. Numerická noční můra a podtečení algoritmu

Předchozí příklad ukazoval možnost nesprávné interpretace výsledků numerické metody, kdy bychom mohli mylně považovat nestabilní metodu za stabilní. Podobně se může stát, že bychom stabilní metodu aplikovali na nestabilní rovnici, ovšem výpočet ukončili ještě před kritickým časem t^*, ve kterém se začne teprve projevovat nestabilita rovnice. „Naivní“ interpretací takového numerického řešení by se mohlo zdát, že je skutečné řešení stabilní.

Tímto problémem na rovnici pantografu se zabýval například Liu [16] ve svém článku, kde ho nazývá „Numerickou noční můrou“. Ukázal, že problém nastává především při vysokých hodnotách parametru q. Ukažme si tuto situaci na příkladu. Mějme počáteční problém

$$\begin{cases} y'(t) = 0{,}1y(t) - y\left(0{,}99t\right), & t \geq 1, \\ y(t) = 1, & t \leq 1. \end{cases} \tag{4.15}$$

Použijme opět θ-metodu s kvazi-geometrickou sítí, s $\theta = 1$ a počítejme řešení do času $T = 820$. Bližším pohledem na řešení této rovnice (vykresleném na obrázku 4.8) vidíme, že se nejdříve řešení blíží nule v tom smyslu, že se snižují amplitudy „kmitů“ kolem nuly. V kritickém bodě t^* se však charakter řešení změní a amplitudy začnou opět růst. Řešení tak zjevně diverguje, ovšem to bychom nezjistili, pokud bychom neprovedli výpočet dostatečně daleko za čas t^*. Zřejmě až někdy kolem času $t = 800$ je nestabilita viditelná i v grafu.



Obrázek 4.8: Srovnání řešení a logaritmu řešení, kritický bod t^*.

V článku [19] nalezneme odvození vzorce pro nalezení tohoto kritického bodu. Při odvozování autor postupoval přes použití Schurových polynomů ke stanovení stability rovnice, což zde však pro jednoduchost vynecháme. Pouze uvedeme výsledné vztahy podstatné pro náš příklad. Kritický bod t^* vypočteme podle

$$t^* := \frac{L}{1-q}, \tag{4.16}$$

kde L je konstanta, jejíž hodnota je závislá na parametrech rovnice a, b a spočteme ji vztahem

$$L = \begin{cases} \min\left\{ \frac{1}{(b^2-a^2)^{1/2}} \arctan \frac{\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{a}, \frac{1}{a} \right\}, & a > 0 \\ \frac{\pi}{2|b|}, & a = 0 \\ \frac{1}{(b^2-a^2)^{1/2}} \left(\pi + \arctan \frac{\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{a} \right). & a < 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

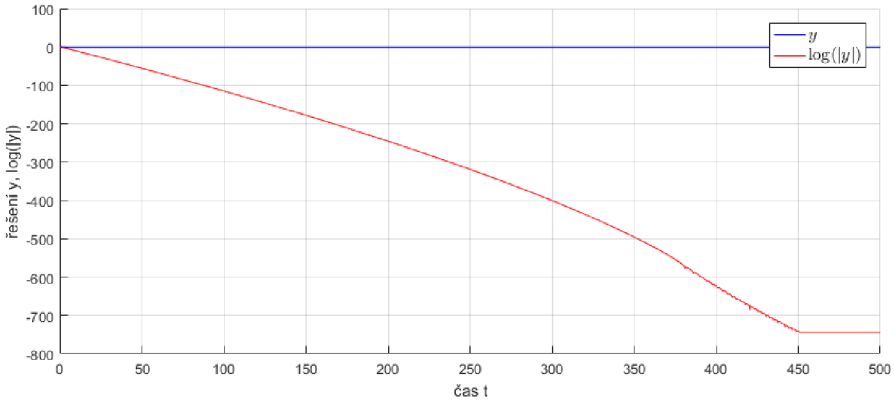
Příslušný důkaz platnosti vztahů rovněž nalezneme v [19]. V příkladu (4.15) potom bude podle (4.16) a (4.17) $t^* \doteq 147{,}8$. Vykreslením logaritmu řešení vidíme, že se bod t^* nachází v minimu pomyslné křivky, kterou bychom proložili lokální maxima grafu logaritmické funkce. To je názorné na obrázku 4.8. Hodnota t^* je zřejmě nepřímo úměrná $1 - q$. Proto je potřeba věnovat tomuto problému pozornost právě u případů rovnice pantografu, kde q je velmi blízké jedné.

Podtečení algoritmu

S předchozím problémem souvisí další problém, který může nastat u specifických případů rovnice. Pokud se numerické řešení nějakou dobu blíží nule, může se stát, že se přiblíží „příliš“. Tím máme na mysli, že jsou hodnoty řešení tak extrémně malé, až se dostanou na minimální hodnotu, se kterou ještě dokáže pracovat počítač. Pak dochází k numerické chybě – podtečení algoritmu. V tu chvíli přestane algoritmus metody fungovat a numerické řešení je dále konstantní. Pokud se toto stane v případě nestabilní rovnice ještě před kritickým bodem t^*, můžeme opět dojít k chybnému závěru, že řešení konverguje k nule. Ukažme si tuto situaci na příkladě. Mějme počáteční problém

$$\begin{cases} y'(t) = -0{,}1y(t) - y\left(0{,}999t\right), & t \geq 1, \\ y(t) = 1, & t \leq 1. \end{cases} \tag{4.18}$$

Použijeme stejnou metodu, jako v příkladě (4.15) a počítáme řešení do času $T = 500$. Na obrázku 4.9 vidíme, jak je řešení zdánlivě konvergentní. Pohled na logaritmus řešení však jasně odhalí místo, kde došlo k podtečení algoritmu (zřejmě přibližně v čase $t = 450$), a další hodnoty řešení jsou tak zbytečné, neboť jsou zcela chybné. Konkrétně má od času $t = 450,81$ numerické řešení konstantní hodnotu -1×10^{-323}.



Obrázek 4.9: Srovnání řešení a logaritmu řešení.

Pokud však spočteme polohu kritického bodu t^* pomocí (4.16) a (4.17), dostaneme $t^* \doteq 1679{,}4$. K chybě tedy došlo významně dříve, než by se stihly projevit nestabilní

vlastnosti rovnice. Oba dva uvedené příklady (4.15) a (4.18) můžeme nalézt zpracované ve skriptu `skript4.m`.

4.1.5. Absolutní chyba metod

Při zkoumání vlastností metody je vhodné se také podívat, jaká vzniká při výpočtu numerická chyba. Ukážeme zde dva příklady, stabilní a nestabilní rovnici, které budeme řešit jak uvedenou θ-metodou s kvazi-geometrickou sítí, tak θ-metodou s ekvidistantní sítí. Přesné řešení, se kterým budeme srovnávat výsledky spočtené pomocí numerických metod, získáme analytickou metodou kroků. Výpočty provádíme v programu Matlab R2016a, použitím naprogramovaných metod:

- `theta_metoda.m` – θ-metoda s kvazi-geometrickou sítí,
- `theta_met_ekv.m` – θ-metoda s ekvidistantní sítí,
- `metoda_kroku.m` – Metoda kroků s výsledky na kvazi-geometrické síti,
- `metoda_kroku_ekv.m` – Metoda kroků s výsledky na ekvidistantní síti.

Metody použijeme vždy s několika různými volbami parametru θ. Zkoumáme, k jaké dochází při výpočtu absolutní a relativní chybě, které definujeme následovně. Označme $y_i, i = 1, 2, \ldots$ jednotlivá numerická řešení pro různou volbu θ a y_k řešení získané metodou kroků. Pak absolutní chybou i-té metody máme na mysli

$$e_i = |y_k - y_i|, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

a relativní chybou i-té metody myslíme

$$e_{r,i} = \left| \frac{y_k - y_i}{y_k} \right|, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

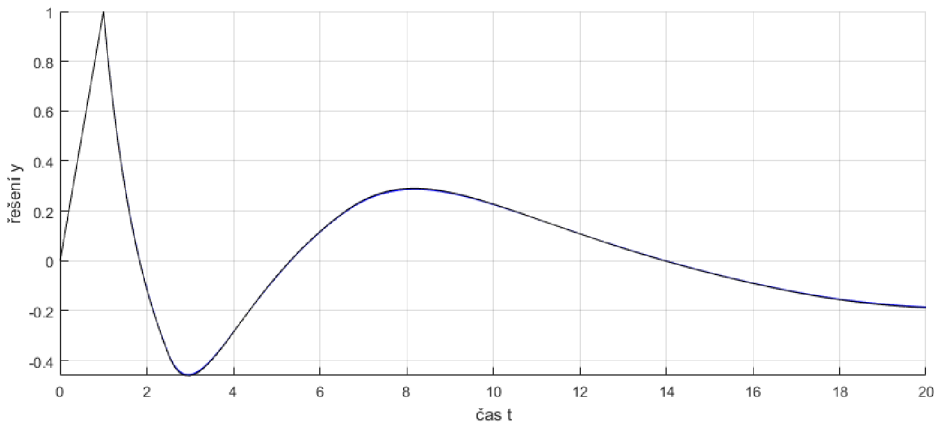
U každého příkladu je vždy vykreslen graf absolutní i relativní chyby. Výsledky jsou potom shrnuty v tabulce, kde jsou vypsány maximální hodnoty absolutní chyby na menších časových intervalech. Dále je v tabulce uvedena celková doba výpočtu, která rovněž může napovědět něco o kvalitativních vlastnostech dané metody. Nyní přejděme k prvnímu příkladu.

Stabilní rovnice

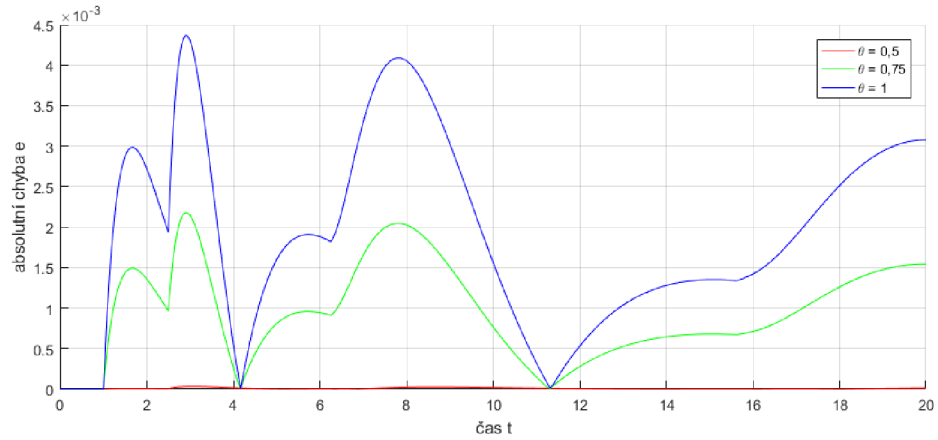
Řešíme počáteční problém se stabilní pantografovou rovnicí

$$\begin{cases} y'(t) = -1{,}5y(t) - y\left(0{,}4t\right), & t \geq 1, \\ y(t) = t, & t \leq 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

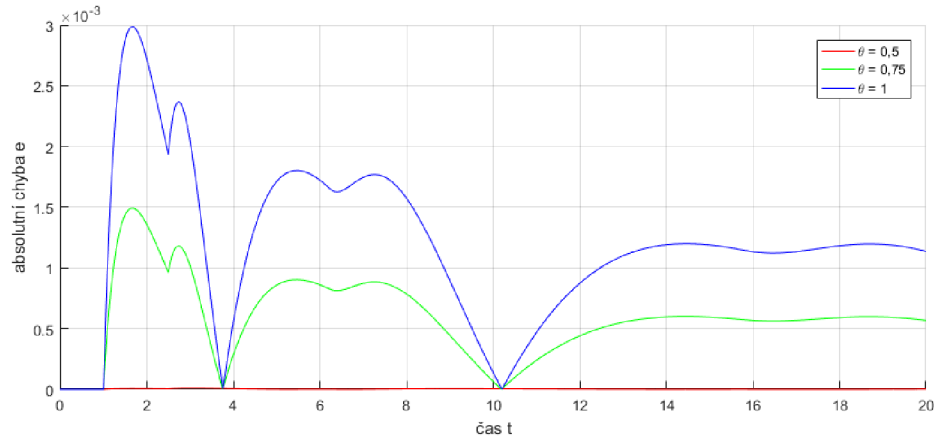
Na ekvidistantní síti volíme vždy délku kroku $h = 0{,}01$. Volbu dělení na kvazi-geometrické síti volíme tak, abychom dostali stejnou délku kroku v prvním intervalu, jako je krok h. Proto volíme $m = 150$. Výpočet provádíme pouze do času $T = 20$, především kvůli časové náročnosti metody kroků. Spočtené řešení vidíme na obrázku 4.10. Na dalších obrázcích je absolutní chyba (obrázky 4.11 a 4.12) a relativní chyba (obrázky 4.13 a 4.14) uvedených θ-metod.



Obrázek 4.10: Řešení příkladu (4.19).

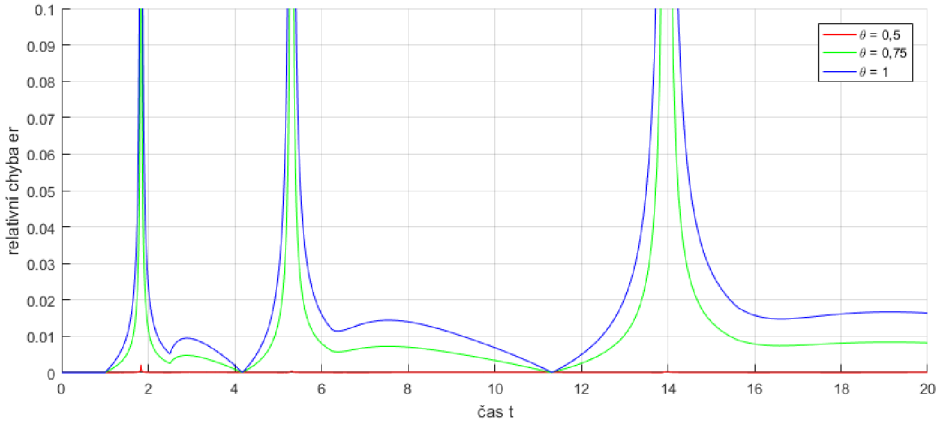


Obrázek 4.11: Absolutní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí, příklad (4.19).

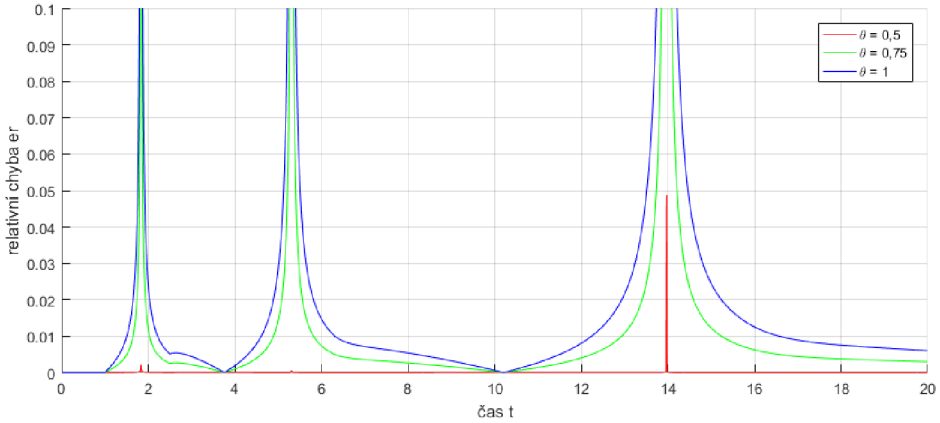


Obrázek 4.12: Absolutní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí, příklad (4.19).

Z uvedených grafů si můžeme povšimnout, že absolutní chyba metod v čase nemá vůbec jednoduchý průběh. Její hodnota značně kolísá a dosahuje nejvyšších hodnot v místech, kde se nachází lokální extrémy řešení. Z grafů i z tabulky 4.1 je také patrné, že lokální maxima chyby v průběhu času dosahují menších a menších hodnot. Zřejmě to bude dáno



Obrázek 4.13: Relativní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí, příklad (4.19).



Obrázek 4.14: Relativní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí, příklad (4.19).

především stabilitou rovnice, neboť kvůli tomu řešení konverguje k nule, a stejně tak numerická řešení získaná uvedenými metodami.

Při srovnání θ-metod s kvazi-geometrickou a s ekvidistantní sítí nám vychází, že metoda s ekvidistantní sítí dává o něco přesnější výsledky. Použití rozdílných parametrů θ pak ukazuje, že metoda s volbou $\theta = 0{,}5$ dává o několik řádů přesnější výsledky, a vzniklá absolutní i relativní chyba řešení je v porovnání s vyššími hodnotami θ prakticky zanedbatelná.

Uvedené hodnoty doby výpočtu je třeba brát s rezervou, neboť jsou významně závislé na parametrech počítače, na kterém proběhly výpočty. Všechny výpočty uvedené v této práci byly provedeny na počítači s procesorem Intel Core i5-4200M, operační pamětí 8GB a operačním systémem Windows 10. Kromě faktu, že metody s vyšší hodnotou θ zřejmě zaberou nepatrně méně času, je ještě z tabulky patrné, že řešení metodou kroků je časově velmi náročné, a to i na tomto jednoduchém příkladě. Metoda kroků je tedy zřejmě nepoužitelná k jiným, než výzkumným účelům k posouzení kvality numerických metod.

Kvazi-geometrická síť						
Metoda	θ	Maximální hodnota chyby e_i na podintervalu				Čas $[s]$
		$\langle 0, \frac{1}{4}T\rangle$	$\langle \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T\rangle$	$\langle \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T\rangle$	$\langle \frac{3}{4}T, T\rangle$	
θ-metoda	0,5	$3{,}170 \times 10^{-5}$	$2{,}450 \times 10^{-5}$	$1{,}740 \times 10^{-5}$	$1{,}310 \times 10^{-5}$	0,0201
	0,75	$2{,}178 \times 10^{-3}$	$2{,}047 \times 10^{-3}$	$7{,}250 \times 10^{-4}$	$1{,}543 \times 10^{-3}$	0,0037
	1	$4{,}366 \times 10^{-3}$	$4{,}089 \times 10^{-3}$	$1{,}477 \times 10^{-3}$	$3{,}079 \times 10^{-3}$	0,0043
Met. kroků	-	0	0	0	0	12,59
Ekvidistantní síť						
Metoda	θ	Maximální hodnota chyby e_i na podintervalu				Čas $[s]$
		$\langle 0, \frac{1}{4}T\rangle$	$\langle \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T\rangle$	$\langle \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T\rangle$	$\langle \frac{3}{4}T, T\rangle$	
θ-metoda	0,5	$1{,}201 \times 10^{-5}$	$5{,}572 \times 10^{-6}$	$4{,}913 \times 10^{-6}$	$1{,}902 \times 10^{-6}$	0,0169
	0,75	$1{,}492 \times 10^{-3}$	$9{,}031 \times 10^{-4}$	$6{,}010 \times 10^{-4}$	$5{,}980 \times 10^{-4}$	0,0032
	1	$2{,}986 \times 10^{-3}$	$1{,}801 \times 10^{-3}$	$1{,}198 \times 10^{-3}$	$1{,}196 \times 10^{-3}$	0,0025
Met. kroků	-	0	0	0	0	308,66

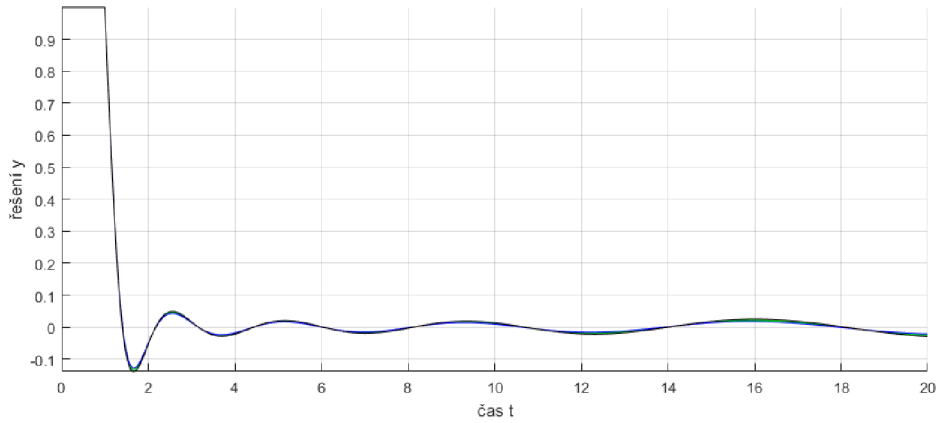
Tabulka 4.1: Příklad (4.19)

Nestabilní rovnice

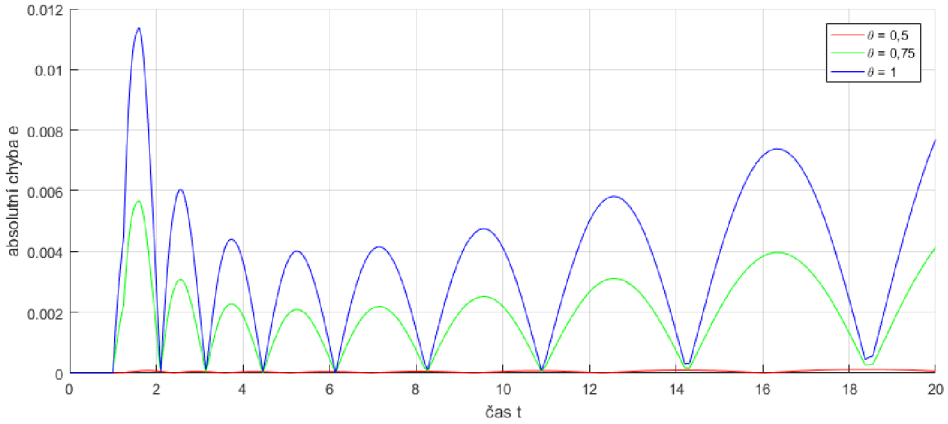
Jako druhý příklad vezměme pro změnu počáteční problém s nestabilní rovnicí

$$\begin{cases} y'(t) = -1{,}5y(t) - 2y\left(0{,}8t\right), & t \geq 1, \\ y(t) = 1, & t \leq 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

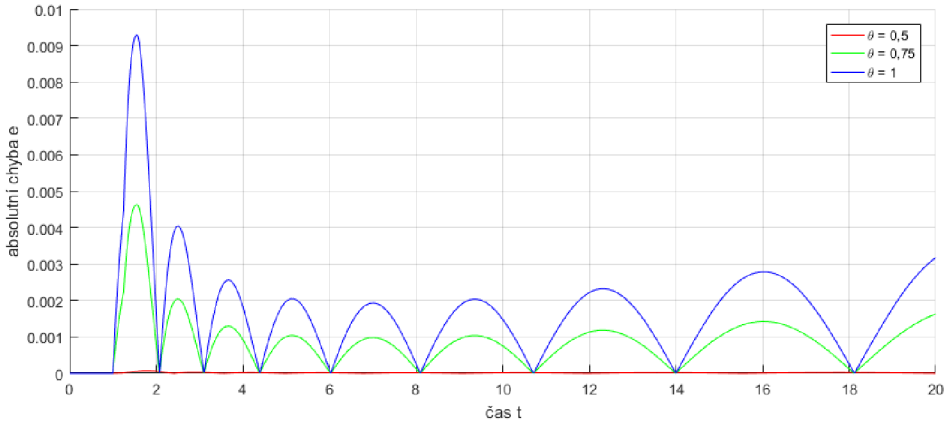
Opět provedeme výpočet do času $T = 20$. Délku kroku ekvidistantní sítě volíme znovu $h = 0{,}01$. Se stejným odůvodněním, jako u předchozího příkladu, volíme $m = 25$. Na obrázku 4.15 je znázorněno řešení rovnice, na další obrázcích 4.16 - 4.19 nalezneme vzniklé absolutní a relativní chyby metod. Shrnutí v tabulce 4.2 je obdobné, jako u předchozího příkladu.



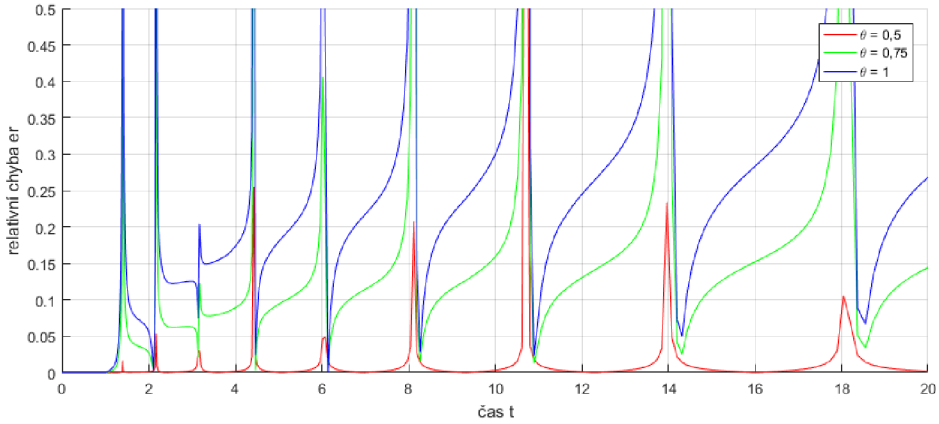
Obrázek 4.15: Řešení příkladu (4.20).



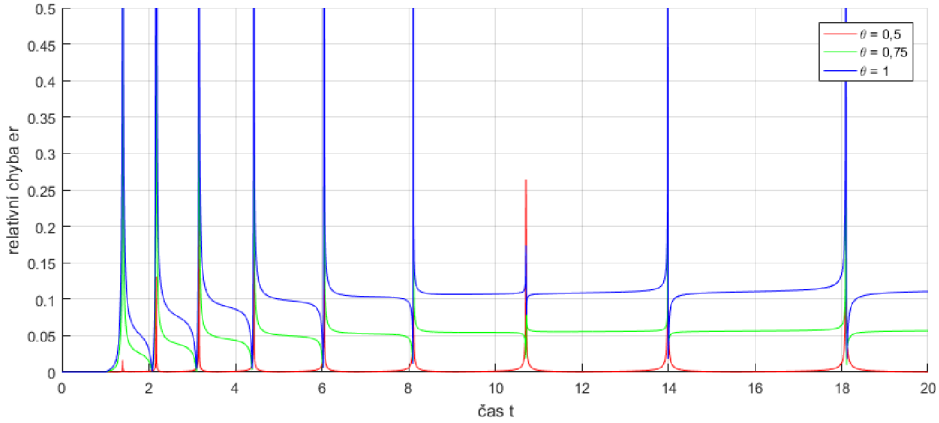
Obrázek 4.16: Absolutní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí, příklad (4.20).



Obrázek 4.17: Absolutní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí, příklad (4.20).



Obrázek 4.18: Relativní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí, příklad (4.20).



Obrázek 4.19: Relativní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí, příklad (4.20).

Z grafů a tabulky můžeme vyvodit obdobné závěry, jako v předchozím příkladě, co se týče srovnání metod na dvou diskretizačních sítích, i co se týče rozdílné volby parametru θ. Rozdíl však můžeme spatřit v průběhu chyby v čase. Jelikož se skutečné řešení uvedené rovnice nejdříve blíží k nule, ale potom začíná zase divergovat, má podobný průběh i absolutní chyba. Lokální maxima absolutní chyby se nejdříve postupně snižují, po nějakém čase však začnou zase narůstat. Tyto maxima opět odpovídají lokálním extrémům řešení. Můžeme usoudit, že v případě rovnice, jejíž řešení by nemělo stejný kolísavý průběh kolem nulové hodnoty, by ani nedocházelo k velkým výkyvům absolutní chyby numerických metod.

Co se týče času výpočtu, je znovu zřejmý veliký rozdíl mezi metodou kroků a všemi ostatními metodami.

Příklad (4.19) je zpracován ve skriptech `skript5a.m` a `skript5b.m`, příklad (4.20) potom nalezneme ve skriptech `skript5c.m` a `skript5d.m`. Snadnou změnou parametrů v některém ze skriptů lze snadno otestovat metody na jiných rovnicích.

Kvazi-geometrická síť						
Metoda	θ	Maximální hodnota chyby e_i na podintervalu				Čas $[s]$
		$\langle 0, \frac{1}{4}T\rangle$	$\langle \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T\rangle$	$\langle \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T\rangle$	$\langle \frac{3}{4}T, T\rangle$	
θ-metoda	0,5	$7{,}840 \times 10^{-5}$	$5{,}710 \times 10^{-5}$	$9{,}150 \times 10^{-5}$	$1{,}220 \times 10^{-4}$	0,0194
	0,75	$5{,}678 \times 10^{-3}$	$2{,}521 \times 10^{-3}$	$3{,}112 \times 10^{-3}$	$4{,}142 \times 10^{-3}$	0,0021
	1	$1{,}136 \times 10^{-2}$	$4{,}753 \times 10^{-3}$	$5{,}824 \times 10^{-3}$	$7{,}698 \times 10^{-3}$	0,0015
Met. kroků	-	0	0	0	0	101,58
Ekvidistantní síť						
Metoda	θ	Maximální hodnota chyby e_i na podintervalu				Čas $[s]$
		$\langle 0, \frac{1}{4}T\rangle$	$\langle \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T\rangle$	$\langle \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T\rangle$	$\langle \frac{3}{4}T, T\rangle$	
θ-metoda	0,5	$7{,}100 \times 10^{-5}$	$1{,}770 \times 10^{-5}$	$2{,}070 \times 10^{-5}$	$2{,}500 \times 10^{-5}$	0,0211
	0,75	$4{,}636 \times 10^{-3}$	$1{,}043 \times 10^{-3}$	$1{,}185 \times 10^{-3}$	$1{,}626 \times 10^{-3}$	0,0046
	1	$9{,}289 \times 10^{-3}$	$2{,}049 \times 10^{-3}$	$2{,}321 \times 10^{-3}$	$3{,}174 \times 10^{-3}$	0,0045
Met. kroků	-	0	0	0	0	175,16

Tabulka 4.2: Příklad (4.20)

4.2. Vektorová rovnice pantografu

Na konec naší práce ještě zaměříme krátce pozornost k obecnému vektorovému tvaru pantografové rovnice, tedy již dříve uvedené rovnici

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t) + B\boldsymbol{y}(qt), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{4.21}$$

kde A, B jsou čtvercové matice rozměrů $d \times d$, $q \in (0,1)$ a počáteční bod sítě opět volíme $t_0 = 1$. Zkoumání kvalitativních vlastností θ-metody pro zcela obecnou rovnici je zřejmě násobně náročnější záležitost. Většina závěrů v kapitole 4.1 je ostatně odvozena a dokázána speciálně pouze pro skalární případ rovnice. Ve vektorovém případě rovnice je obvyklé alespoň nějakým způsobem rovnici zjednodušit, např. speciální volbou matic A, B. Ukažme si tak vlastnosti H-stability metody pro jednu speciální rovnici pantografu.

4.2.1. H-stabilita θ-metody s kvazi-geometrickou sítí

Mějme počáteční problém s pantografovou rovnicí ve tvaru

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(qt), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{4.22}$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Nejprve uveďme, že podmínky stability (2.10) takové rovnice se díky diagonálnímu, resp. anti-diagonálnímu tvaru matic značně zjednoduší.

Věta 4.7. *Pantografová rovnice* (4.22) *je asymptoticky stabilní právě tehdy, když platí*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(a_1) < 0, & \mathcal{R}(a_2) < 0, \\ |a_1| > |b_1|, & |a_2| > |b_2|. \end{cases} \tag{4.23}$$

Věta je dokázána v článku [24]. Pro tuto rovnici je ve stejném článku dále dokázána následující věta o H-stabilitě rovnice.

Věta 4.8. *Numerická metoda* (3.14) *na síti* (3.11) *aplikovaná na rovnici* (4.22) *splňující podmínku* (4.23) *je H-stabilní právě tehdy, když*

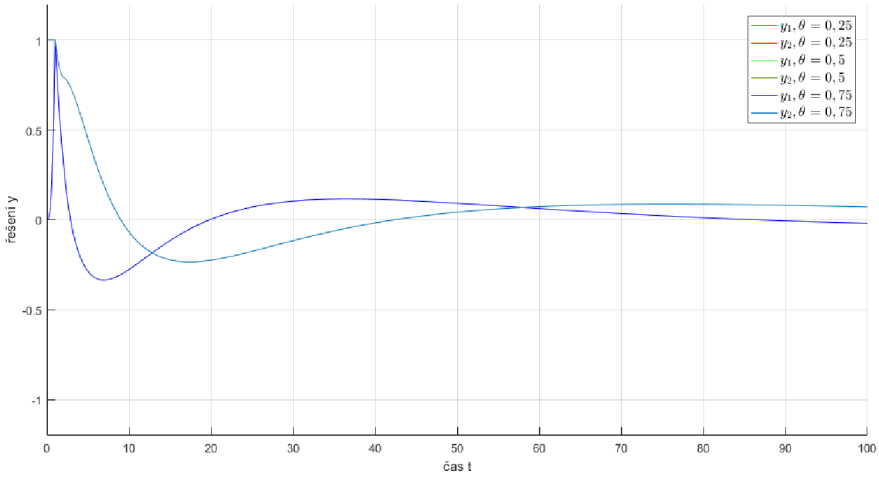
$$\frac{1}{2} < \theta \leq 1.$$

Jedná se tedy o jisté zobecnění dříve uvedené věty 4.3. Dodejme, že větu 4.8 autoři článku zobecnili i na případ, kdy se v rovnici (4.22) vyskytují dvě různá zpoždění. To však vyžaduje zavedení komplikovanější diskretizační sítě, která by zahrnovala všechny potřebné časové uzly. Stabilitu, resp. nestabilitu metody můžeme opět názorně ukázat na příkladu.

Mějme počáteční problém

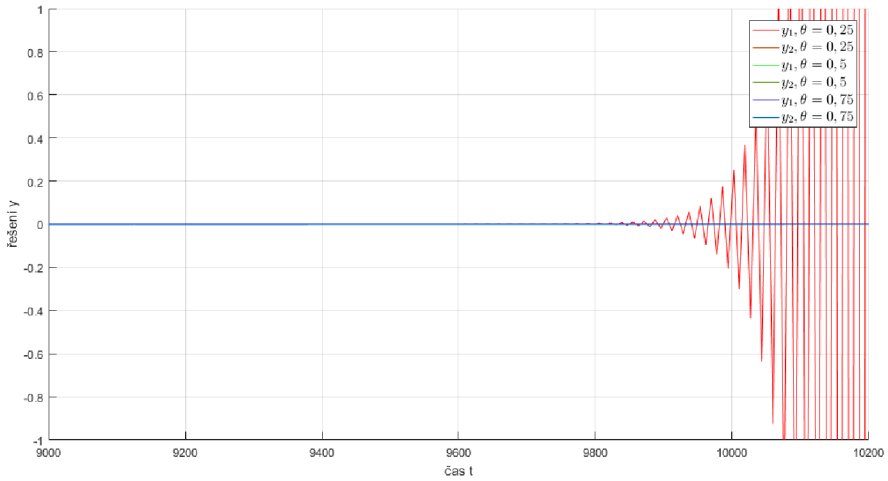
$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\left(\tfrac{1}{2}t\right), & t \geq 1, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), & t \leq 1, \end{cases} \tag{4.24}$$

kde $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Phi} = (t^3, 1)^{\mathrm{T}}$. Výpočet proveďme až do času $T = 18500$, použijeme dělení sítě $m = 1000$. Zvolme opět tři různé možnosti parametru θ tak, abychom získali stabilní i nestabilní případ.

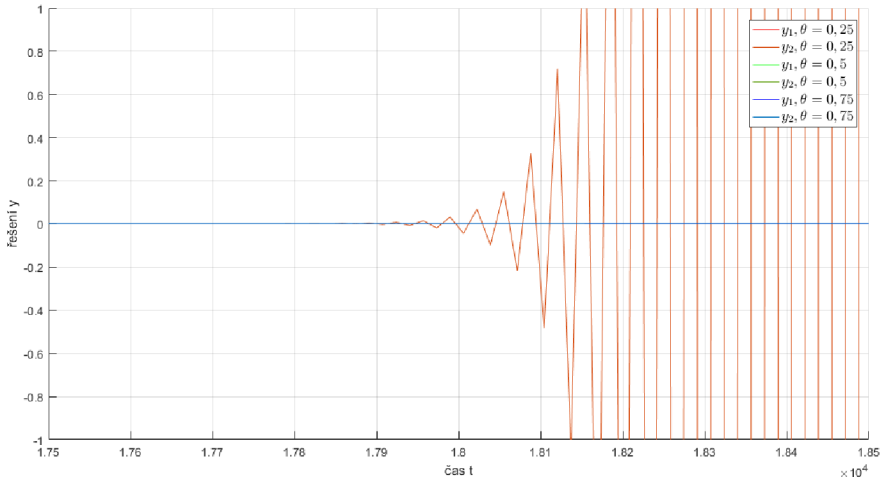


Obrázek 4.20: Řešení příkladu (4.24) pro různou volbu θ (detail do $t = 100$).

Na obrázku 4.20 vidíme detail numerických řešení do času $t = 100$. Zde není mezi řešeními patrný prakticky žádný rozdíl, křivky se v grafu překrývají.



Obrázek 4.21: Řešení příkladu (4.24) pro různou volbu θ (detail od $t = 9000$).



Obrázek 4.22: Řešení příkladu (4.24) pro různou volbu θ (detail od $t = 17500$).

Na dalším obrázku 4.21 je vyříznutý detail v časovém rozmezí od $t = 9000$ do $t = 10200$, kde se projevuje očekávaná nestabilita metody s volbou $\theta = 0{,}25$. Konkrétně však jenom v řešení y_1, řešení druhé rovnice y_2 se v tomto čase chová ještě stabilně, tedy drží se hodnot blízkých nule.

Na posledním obrázku 4.21 vidíme konec vyšetřovaného časového intervalu. Tady se již projeví i nestabilita druhého řešení y_2 pro $\theta = 0{,}25$. Zelená řešení pro volbu $\theta = 0{,}5$ jsou po celou dobu skrytá pod stabilním řešením získaným volbou $\theta = 0{,}75$. Získali jsme tak stejné závěry, jako v příkladě se skalární rovnicí (4.3). Příklad lze spustit skriptem `skript6.m`, případně v něm změnit vstupní parametry.

5. Závěr

Jedním z cílů práce bylo popsat základy z teorie zpožděných diferenciálních rovnic a uvést některé technické aplikace. Důraz byl kladen zejména na rovnici pantografu a její specifické vlastnosti. Výklad je doplněn podstatnými matematickými větami ohledně existence a jednoznačnosti řešení a jeho kvalitativních vlastností.

Dále jsou v textu odvozeny a popsány θ-metody, nejdříve na běžné ekvidistantní síti a potom na kvazi-geometrické síti, která má jisté výhodnější vlastnosti při aplikaci na DDE s proporcionálním zpožděním. Jedná se zejména o výpočetní náročnost a také vhodnější volbu výpočetních uzlů, které jsou voleny přesně pro potřebu konkrétní rovnice. Text je dále doplněn výčtem různých typů stability numerických metod pro DDE.

Těžiště této práce leží v poslední kapitole, kde bylo provedeno několik numerických experimentů majících za úkol demonstrovat některé vlastnosti θ-metod. Pro aplikaci θ-metody na skalární pantografovou rovnici, a také na specifický případ vektorové rovnice, bylo demonstrováno, že je H-stabilní pro volbu parametru $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$. Dále byly uvedeny některé postačující podmínky na stabilitu diferenčního schématu θ-metody vztažené na použitou délku kroku.

Na případu nestabilní skalární rovnice bylo vysvětleno nebezpečí tzv. „Numerické noční můry“, tj. případu, kdy může dojít k nesprávné interpretaci numerických výsledků z důvodu technicky nulového numerického řešení, ačkoliv skutečný asymptotický charakter analytického řešení je nestabilní. Řešení lze pak intuitivně zcela chybně označit za stabilní. Na obdobném příkladu bylo dále ukázáno možné riziko podtečení, pokud algoritmus pracuje s příliš malými číselnými hodnotami. Oba uvedené rizikové případy jsou zřejmě významné zejména pro hodnoty koeficientu proporcionálního zpoždění q blízké jedné. Dále byly θ-metody na obou uvedených diskretizačních sítích porovnány s analytickou metodou kroků a byla srovnána vzniklá absolutní a relativní chyba numerického výpočtu.

Obě θ-metody a rovněž metoda kroků byly naprogramovány v prostředí Matlab speciálně pro aplikaci na pantografovou rovnici. Metody jsou zpracovány jako funkce pro toto výpočetní prostředí a spolu se skripty, obsahující všechny výpočty uvedené v poslední kapitole, jsou přílohou této práce.

Na uvedené výsledky je možné navázat např. zkoumáním aplikací dalších numerických metod na pantografovou rovnici, nebo se zabývat složitějšími typy pantografové rovnice – neutrálního tvaru s derivovaným členem na pravé straně, rovnicí s více zpožděnými členy, obecnou vektorovou rovnicí a podobně. Problematika numerických metod pro zpožděné diferenciální rovnice patří mezi mladší a méně prostudované oblasti matematického výzkumu. Je zde tedy velký prostor pro další bádání.

Literatura

[1] BELLEN, A. a M. ZENNARO. *Numerical methods for delay differential equations*. 2. New York: Clarendon Press, 2003. ISBN 01-985-0654-6.

[2] BELLEN, A., N. GUGLIELMI a L. TORELLI. Asymptotic stability properties of θ-methods for the pantograph equation. *Applied Numerical Mathematics*. 1997, **24**(2-3), 279-293. DOI: 10.1016/S0168-9274(97)00026-3. ISSN 01689274. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927497000263

[3] BUTCHER, J. C. *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge--Kutta and general linear methods*. 1. New York: J. Wiley, c1987. ISBN 04-719-1046-5.

[4] ČERMÁK, J., J. JÁNSKÝ a P. KUNDRÁT. On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012, **18**(11), 1781-1800. DOI: 10.1080/10236198.2011.595406. ISSN 1023-6198. Dostupné také z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10236198.2011.595406

[5] ČERMÁK, L. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*. 2. Brno: Litera Brno, 2013. ISBN 978-80-903586-7-6.

[6] DERFEL, G. A. Kato Problem for Functional-Differential Equations and Difference Schrödinger Operators. *Order,Disorder and Chaos in Quantum Systems*. Basel: Birkhäuser Basel, 1990, 1990, s. 319-321. DOI: 10.1007/978-3-0348-7306-2_31. ISBN 978-3-0348-7308-6.

[7] ERNEUX, T. *Applied delay differential equations*. New York: Springer, c2009. Surveys and tutorials in the applied mathematical sciences, 3. ISBN 978-0-387-74371-4.

[8] HALE, J. K. *Homoclinic orbits and chaos in delay equations*. Proceedings of The Ninth Dundee Conference on Ordinary and Partial Differential Equations. New York: B.D. Sleeman and R.J. Jarvis Eds., Wiley, 1986.

[9] IN 'T HOUT, K.J. On the stability of adaptations of Runge-Kutta methods to systems of delay differential equations. *Applied Numerical Mathematics* [online]. 1996, **22**(1-3), 237-250 [cit. 2019-04-25]. DOI: 10.1016/S0168-9274(96)00035-9. ISSN 01689274. Dostupné z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927496000359

[10] ISERLES, A. Exact and discretized stability of the pantograph equation. *Applied Numerical Mathematics* [online]. 1997, **24**(2-3), 295-308. DOI: 10.1016/S0168-9274(97)00027-5. ISSN 01689274. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927497000275

[11] ISERLES, A. On the generalized pantograph functional-differential equation. *European Journal of Applied Mathematics*. 1993, **4**(01), 1-38. DOI: 10.1017/S0956792500000966. ISSN 0956-7925. Dostupné také z: http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0956792500000966

[12] JÁNSKÝ, J. *Delay Difference Equations and Their Applications* [online]. Brno, 2010 [cit. 2019-04-15]. Dostupné z: http://hdl.handle.net/11012/15628. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav matematiky. Vedoucí práce Jan Čermák.

[13] JIAOXUN, K. a C. YUHAO. *Stability of numerical methods for delay differential equations.* 1. Beijing: Science Press, 2005. ISBN 978-7-03-016317-2.

[14] KATO, T. a J. B. MCLEOD. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1971, (77).

[15] KRÁČMAR, J. *Diferenciální rovnice se zpožděním.* Brno, 2011. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

[16] LIU, Y. On the θ-method for delay differential equations with infinite lag. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1996, **71**(2), 177-190. DOI: 10.1016/0377-0427(95)00222-7. ISSN 03770427. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0377042795002227

[17] LIU, M. Z. a D. LI. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Applied Mathematics and Computation.* 2004, **155**(3), 853-871. DOI: 10.1016/j.amc.2003.07.017. ISSN 00963003. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0096300303008245

[18] LIU, M. Z., Z. W. YANG a Y. XU. The stability of modified Runge-Kutta methods for the pantograph equation. *Mathematics of Computation.* 2006, **75**(255), 1201-1216. DOI: 10.1090/S0025-5718-06-01844-8. ISSN 0025-5718. Dostupné také z: http://www.ams.org/journal-getitem?pii=S0025-5718-06-01844-8

[19] LIU, Y. Numerical investigation of the pantograph equation. *Applied Numerical Mathematics.* 1997, **24**(2-3), 309-317. DOI: 10.1016/S0168-9274(97)00028-7. ISSN 01689274. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927497000287

[20] MURRAY, J. D. *Mathematical biology.* 3rd ed. New York: Springer, 2003. ISBN 978-0-387-95223-9.

[21] OCKENDON, J. R. a A. B. TAYLER. The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* London: Royal Society, 1971, **322**(1551), 447-468.

[22] SONG, M.H., Z.W. YANG a M.Z. LIU. Stability of θ-methods for advanced differential equations with piecewise continuous arguments. *Computers and Mathematics with Applications.* 2005, **49**(9-10), 1295-1301. DOI: 10.1016/j.camwa.2005.02.002. ISSN 08981221. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122105001501

[23] STÉPÁN, G. *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions.* New York: Wiley, 1989. ISBN 04-702-1335-3.

[24] XU, Y. a M. LIU. H-stability of linear θ-method with general variable stepsize for system of pantograph equations with two delay terms. *Applied Mathematics and Computation.* 2004, **156**(3), 817-829. DOI: 10.1016/j.amc.2003.06.008. ISSN 00963003. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0096300303009056

[25] ZAGHROUT, A.A.S. a S.H. ATTALAH. Analysis of a model of stage--structured population dynamics growth with time state-dependent time delay. *Applied Mathematics and Computation.* 1996, **77**(2-3), 185-194. DOI: 10.1016/S0096-3003(95)00212-X. ISSN 00963003. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S009630039500212X

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

DDE	zpožděné diferenciální rovnice (angl. *delay differential equations*)
ODE	obyčejné diferenciální rovnice (angl. *ordinary differential equations*)
NDDE	neutrální zpožděné diferenciální rovnice (angl. *neutral delay differential equations*)
$\tau(t, y(t))$	zpoždění
$\Phi(t)$	počáteční funkce
y_0	počáteční hodnota
$\boldsymbol{v}$	vektor
$\alpha(t)$	zpožděný argument
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	přirozená, reálná, komplexní čísla
$a \times b$	rozměry matice
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval od a do b
(a, b)	otevřený interval od a do b
$y'(t)^+, y'(t)^-$	derivace funkce zprava, derivace funkce zleva
C^n	třída funkcí diferencovatelných až do řádu n
$\|\cdot\|$	norma vektoru
$\mathcal{R}(\cdot)$	reálná část komplexního čísla
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	skalární součin vektorů a a b
$\mu[\cdot]$	logaritmická norma matice
$\sigma[\cdot]$	spektrum matice
$\rho[\cdot]$	spektrální poloměr matice
$S_\star$	analytická oblast asymptotické stability rovnice
$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$	transponovaný vektor či matice
$\lfloor \cdot \rfloor$	nejbližší nižší celé číslo
$\lceil \cdot \rceil$	nejbližší vyšší celé číslo

7. Seznam příloh

Funkce v prostředí Matlab:

`theta_metoda.m`	θ-metoda s kvazi-geometrickou sítí
`theta_met_ekv.m`	θ-metoda s ekvidistantní sítí
`metoda_kroku.m`	Metoda kroků s kvazi-geometrickou sítí
`metoda_kroku_ekv.m`	Metoda kroků s ekvidistantní sítí

Skripty v prostředí Matlab:

`skript1.m`	Příklad (4.2) - stabilita rovnice,
`skript2.m`	Příklad (4.3) - H-stabiltia θ-metody, skalární rovnice,
`skript3.m`	Příklad (4.3) - Vynucení stability do času T,
`skript4.m`	Příklady (4.15) a (4.18) - Numerická noční můra a podtečení algoritmu,
`skript5a.m`	Příklad (4.19) - Absolutní a relativní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí,
`skript5b.m`	Příklad (4.19) - Absolutní a relativní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí,
`skript5c.m`	Příklad (4.20) - Absolutní a relativní chyba θ-metody s kvazi-geometrickou sítí,
`skript5d.m`	Příklad (4.20) - Absolutní a relativní chyba θ-metody s ekvidistantní sítí,
`skript6.m`	Příklad (4.24) - H-stabiltia θ-metody, vektorová rovnice.