Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

SKLÁDÁNÍ PAPÍRU

Vypracovala: Martina Šolá
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Skládání papíru jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ………………………….

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc, za ochotu, velkou trpělivost, cenné rady i připomínky, které mi pomohly při vypracování bakalářské práce.

Anotace

Cílem bakalářské práce Skládání papíru je využití této vědní disciplíny nejen při řešení různých geometrických úloh, od antických až po současné, ale i začlenění do výuky matematiky jako prospěšné pomůcky pro pochopení probíraného učiva.

V práci jsou řešeny a dokázány dva z klasických problémů řecké matematiky - trisekce úhlu a duplikace krychle, konstrukce rovinných a prostorových útvarů a vybrané problémové úlohy.

Annotation

The aim of the bachelor thesis called. Paper Folding is to show the utilization of this scientific discipline not only in solution to various geometric tasks, from ancient to contemporary, but also the incorporation into the teaching of mathematics as a useful tool to help understand the discussed schoolwork.

Two typical problems of the ancient mathematics are solved and proved in this thesis - angle trisection and the duplication of the cube, construction of plane and spatial figures and selected problematic tasks.

Obsah

1. Úvod ... 5
2. Origami ... 6
   2.1. Tradiční a moderní origami ... 6
   2.2. Vývoj origami ... 7
3. Vlastnosti a formát papíru ... 8
   3.1. Vlastnosti a formát papíru ... 8
   3.2. Stříbrný obdélník ... 11
   3.3. Zbytkový obdélník ... 12
4. Axiomy origami v geometrii ... 14
   4.1. Huzitovy axiomy ... 14
   4.2. Trisekce úhlu ... 16
   4.3. Duplikace krychle ... 19
5. Tvorba papírových modelů rovinných a prostorových útvarů ... 21
   5.1. Čtverec ... 21
   5.2. Pravidelný trojúhelník ... 22
   5.3. Pravidelný pětiúhelník ... 25
   5.4. Pravidelný sedmiúhelník ... 27
   5.5. Pythagorejský trojúhelník ... 31
   5.6. Pravidelný čtyřstěn ... 33
   5.7. Möbiův list ... 34
6. Závěr ... 38
Literatura ... 39

1. Úvod

Téma skládání papíru jsem si pro psaní bakalářské práce vybrala proto, že bych chtěla ukázat, že skládání papíru, origami, není jen pro zábavu a náplní různých dětských kroužků, ale i dobrá učební pomůcka.

Začlenění origami do náplně vyučovací hodiny přináší názornost, lepší pochopení a porozumění učiva matematiky, respektive geometrie. Možnost naučit žáky odvozovat a přiblížit se tématu.

Poněkud ve zkratce nahlédneme do historie origami, kde se vzalo, co to je a proč se vůbec začalo se skládáním papíru. Z jakých papírů můžeme skládat, jaké formáty a rozměry papírů jsou kolem nás. Seznámíme se s pojmy stříbrný a zbytkový obdélník. Poznáme Huzitovy axiomy a na základě jejich znalosti si ukážeme řešení nejznámějších antických konstrukčních úloh Trisekce úhlu a Duplikace krychle. Dále se budeme věnovat tvorbě papírových modelů rovinných útvarů, a to čtverce, pravidelného trojúhelníka, pravidelného pětiúhelníka a pravidelného sedmiúhelníka, popíšeme si postupy konstrukcí a poukážeme na vlastnosti, které si mohou na základě modelů žáci odvodit. Ukážeme si konstrukci Pythagorejského trojúhelníku, jehož strany jsou v poměru 3:4:5. Na závěr vytvoříme papírové modely prostorových útvarů, pravidelného čtyřstěnu a Möbiova listu.

Na fotografiích v této práci jsou mnou vytvořené papírové modely, ať už papírové skládanky či postupy konstrukcí rovinných a prostorových útvarů zpracované v programu GeoGebra.

2. Origami

Jakýmkoli skládáním papíru bez použití nůžek a lepidla, které vede k vytvoření papírové skládanky, můžeme rozumět význam pojmu origami. Jedná se o slovo čínského původu, vzniklé složením slova *oru* (skládat) a *kami* (papír). V šestém století našeho letopočtu přinesli buddhističtí mniši znalost výroby papíru do Japonska, kde se začalo rozvíjet skládání papíru. Až do roku 1930 Japonci používali pro skládání papíru pojmy jako *risue, orikata* a *orimono*. V osmém století našeho letopočtu bylo skládání papíru rozšířeno Maury do Španělska, kde se nejprve věnovali poznávání geometrických vlastností čtverce a později umění skládaného papíru, *papiroflexii*. Po dlouhou dobu se rozvíjelo skládání papíru odděleně na východě a na západě.

2.1. Tradiční a moderní origami

Rozlišujeme dva základní typy origami. Prvním typem je **tradiční origami**, které je založeno na jednoduchosti, předávalo se ústně z generace na generaci po celá staletí. Skládalo se vždy z jednoho kusu papíru bez použití nůžek a následného zdobení modelů.

Druhým typem je **moderní origami**, založené v padesátých letech dvacátého století Akirou Yoshizawou. Je zde velký prostor pro fantazii a hravost skládajících. Používání nůžek, lepidla a různých nových typů skladů, které se u tradičního origami nevyskytují, je povoleno. Akira Yoshizawa položil základ znakům a diagramům, využívaných pro zápis instrukcí pro skládání papíru, které se používají dodnes. Vydal knihy s úplně novými modely origami. Uspořádalo se mnoho výstav po celém světě, lidé se seznamovali s touto technikou, což vedlo k zakládání Origami center of America (1958) a British Origami Society (1967). V České republice byla ke dni 2. září 2003 zaregistrována Česká origami společnost (ČOS). Dle posledních dohledaných údajů ze dne 13. prosince 2006 byla tvořena třiceti šesti registrovanými členy, z toho čtyřmi čestnými, dvěma skupinovými, čtyři vystoupili, celkem dvacet šest řádných členů, [2, 3, 4].

2.2. Vývoj origami

S vynálezem papíru se šířilo a zdokonalovalo i umění skládání papíru. Zpočátku se jednalo o velmi drahou surovinu, ze které se mohlo skládat jen pro náboženské účely. Zdobily šintoistické svatyně. Vytvářely se papírové řetízky s trsy slámy navázaných na šňůrách, které vyznačovaly území svatyně, kam mohl vstoupit jen kněz. Šňůry s papírovými skládankami visely i nad vchody do japonských domů. Ukazovaly, že dům je očištěný. Skládanými papírovými motýlky navázanými na šňůře se při šlechtických svatbách zdobili ženich s nevěstou. V sedmnáctém století se v Japonsku začalo skládat pro zábavu - různá zvířátka, pohádkové bytosti, ozdoby. Nejrozšířenější skládankou se stal papírový jeřáb „orizuru“, japonský symbol dlouhého života, [5, 6].

2.2. Jeřábi.

3. Vlastnosti a formát papíru

3.1. Vlastnosti a formát papíru

Ke skládání z papíru můžeme použít libovolný papír, který máme kolem sebe. Ať už kancelářský papír, balicí papíry, dárkové papíry nebo již dobře dostupné origami papíry. Záleží, na jaké úrovni skládáme, ale vždy potřebujeme, aby měl papír vlastnosti popsané v následující tabulce.

Vlastnost papíru	Požadavek skládání
Jemnost	Několikanásobné překlady
Ohebnost, věrnost	Dobře viditelné sklady po rozložení, „držení hran“
Pevnost	V místě překladu se netrhá
Barevnost	Motivační efekt

Origami papíry jsou nejčastěji čtverce o rozměrech 15x15, 17x17, 21x21, 6x6, velmi tenké, jednostranně barevné s příměsí cukrové třtiny, bambusu či moruše.

Většina tradičních skládanek vychází ze čtverce, objevují se i z obdélníku A4 nebo z kruhu. Američané často skládají z formátu dolarové bankovky (obdélník 3:7) nebo z A4.

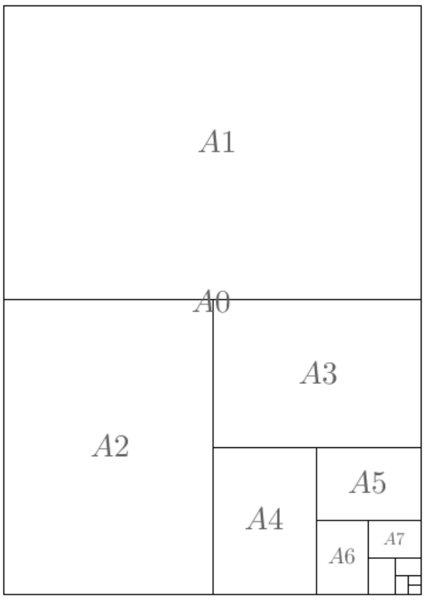
Nejběžnější formáty u nás i ve světě jsou definovány normou ISO 216, která zavádí tři řady formátů, [7, 8].

A – základní řada založená na formátu o ploše 1 m²

B – rozšiřující řada založená na formátu o straně dlouhé 1 m

C – navržena pro obálky

Vzájemný poměr stran zůstává po rozpůlení papíru zachován. Všechny formáty vznikají postupným půlením formátů A0, B0 nebo C0.



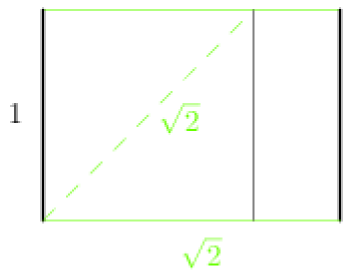
Obr. 3.1. Formát papíru řady A.

Do následující tabulky jsem uvedla rozměry jednotlivých formátů v milimetrech a zažité české názvy pro některé formáty, [7, 8].

Řada A			Řada B		Řada C	
Vžitý český název	Formát A	Velikost v mm	Formát B	Velikost v mm	Formát C	Velikost v mm
	A0	841 × 1189	B0	1000 × 1414	C0	917 × 1297
	A1	594 × 841	B1	707 × 1000	C1	648 × 917
Arch	A2	420 × 594	B2	500 × 707	C2	458 × 648
Půlarch	A3	297 × 420	B3	353 × 500	C3	324 × 458
Čtvrtka	A4	210 × 297	B4	250 × 353	C4	229 × 324
List	A5	148 × 210	B5	176 × 250	C5	162 × 229
Půllist	A6	105 × 148	B6	125 × 176	C6	114 ×162
Čtvrtlist	A7	74 × 105	B7	88 × 125	C7	81 × 114
	A8	52 × 74	B8	62 × 88	C8	57 × 81
	A9	37 × 52	B9	44 × 62	C9	40 × 57
	A10	26 × 37	B10	31 × 44	C10	28 × 40

3.2. Stříbrný obdélník

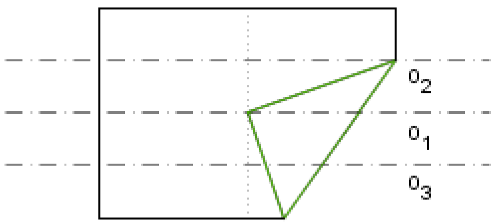
V roce 1979 označila britská origami společnost formát papíru A4 stříbrným obdélníkem. Jedná se o útvar s poměrem stran $1:\sqrt{2}$, ze kterého jednoduše vytvoříme čtverec o délce strany jedna a úhlopříčce délky $\sqrt{2}$. Délka úhlopříčky čtverce je rovna délce delší strany stříbrného obdélníku, [9].



3.2. Stříbrný obdélník.

Abychom vytvořili z jakéhokoli formátu stříbrný obdélník, potřebujeme znát následující vlastnosti.

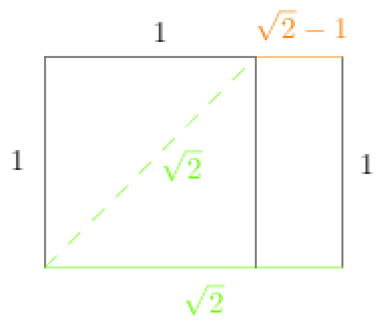
1. Proložíme-li osu souměrnosti stříbrným obdélníkem, vytvoříme dva stříbrné obdélníky. Takto můžeme pokračovat do nekonečna a vždy vzniknou další stříbrné obdélníky s koeficientem zmenšení $\frac{1}{2}$.
2. Přeložíme-li jeden vrchol ke středu delší protilehlé strany, získáme záhyb, jehož vrcholy leží ve $\frac{3}{4}$ strany od překládaného vrcholu, [9].



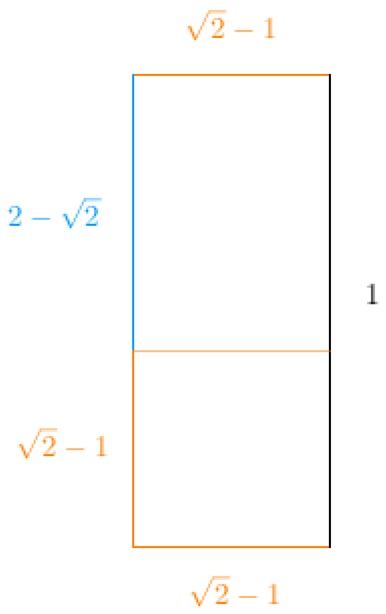
3.3. Vlastnosti stříbrného obdélníku.

3.3. Zbytkový obdélník

Vyjmutím největšího možného čtverce ze stříbrného obdélníku získáme zbytkový obdélník. Poměr jeho stran je roven $(\sqrt{2}-1): 1$, [9].



3.4. Zbytkový obdélník.



3.5. Stříbrný obdélník ve zbytkovém obdélníku.

Poměr stran vzniklého obdélníku činí $(\sqrt{2}-1):(2-\sqrt{2})$. Základními matematickými úpravami zjistíme, že je roven poměru stran stříbrného obdélníku $1:\sqrt{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

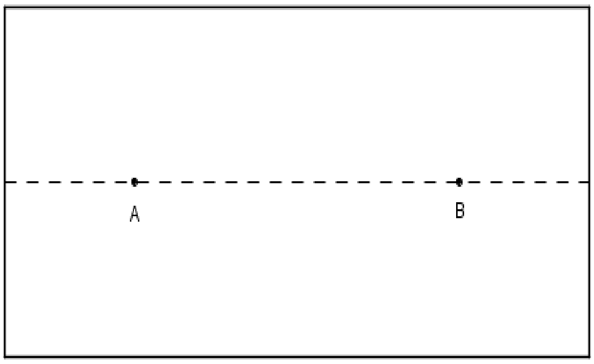
Odebráním největšího možného čtverce ze zbytkového obdélníku, získáme opět stříbrný obdélník s koeficientem zmenšení $\frac{1}{2}$ a poměrem stran $(\sqrt{2}-1):(2-\sqrt{2})$.

4. Axiomy origami v geometrii

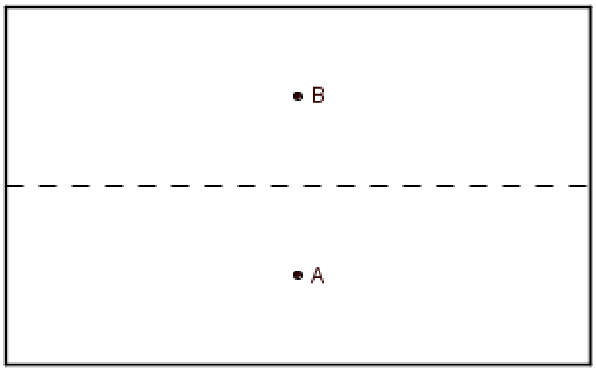
4.1. Huzitovy axiomy

Při skládání papíru využíváme již vzniklých bodů a přehybů a tvoříme základní konstrukce. Tyto základní postřehy zformuloval Huzita v roce 1989 do všeobecně známých šesti Huzitových axiomů, [1, 2].

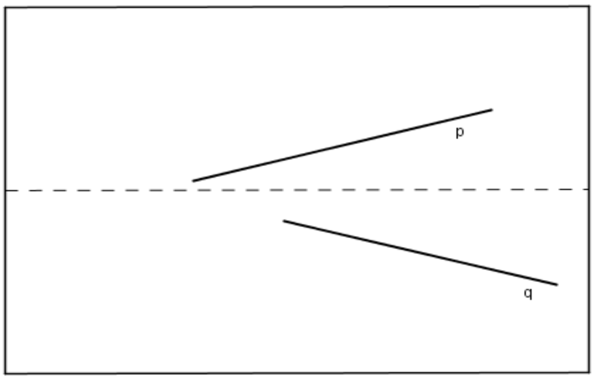
O1: Jsou dány dva body *A*, *B*, můžeme vytvořit přehyb, který jimi prochází.



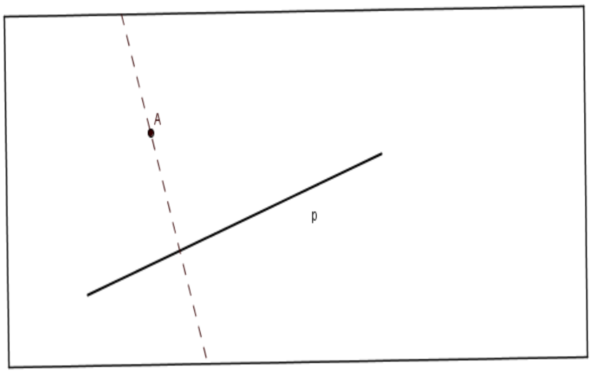
O2: Jsou dány dva body *A*, *B*, můžeme vytvořit přehyb tak, že se bod *A* překryje s bodem *B*.



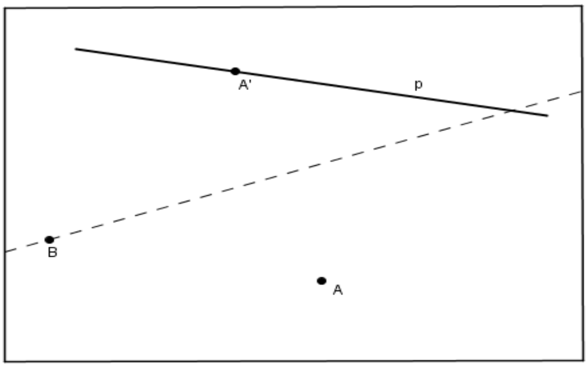
O3: Jsou dány dvě přímky *p*, *q*, můžeme vytvořit přehyb tak, aby se přímka *p* překryla s přímkou *q*.



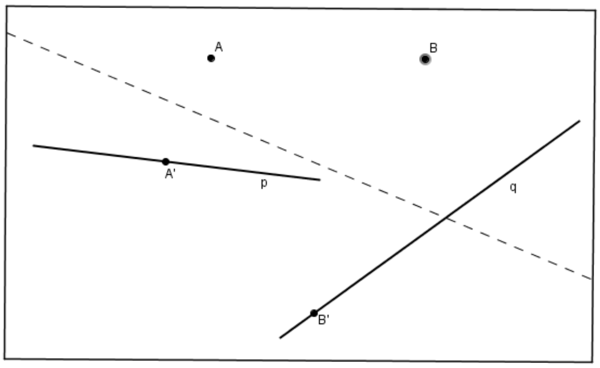
O4: Je dán bod *A* a přímka *p*, můžeme vytvořit přehyb procházející bodem *A* a přímka *p* se rozdělí na dvě části, které se překryjí.



O5: Jsou dány body *A*, *B* a přímka *p*, můžeme vytvořit přehyb procházející bodem *B* a bod *A* bude ležet na přímce *p*.



O6: Jsou dány dva body *A*, *B* a dvě přímky *p*, *q*, můžeme vytvořit přehyb, kdy bod *A* náleží přímce *p* a bod *B* náleží přímce *q*.



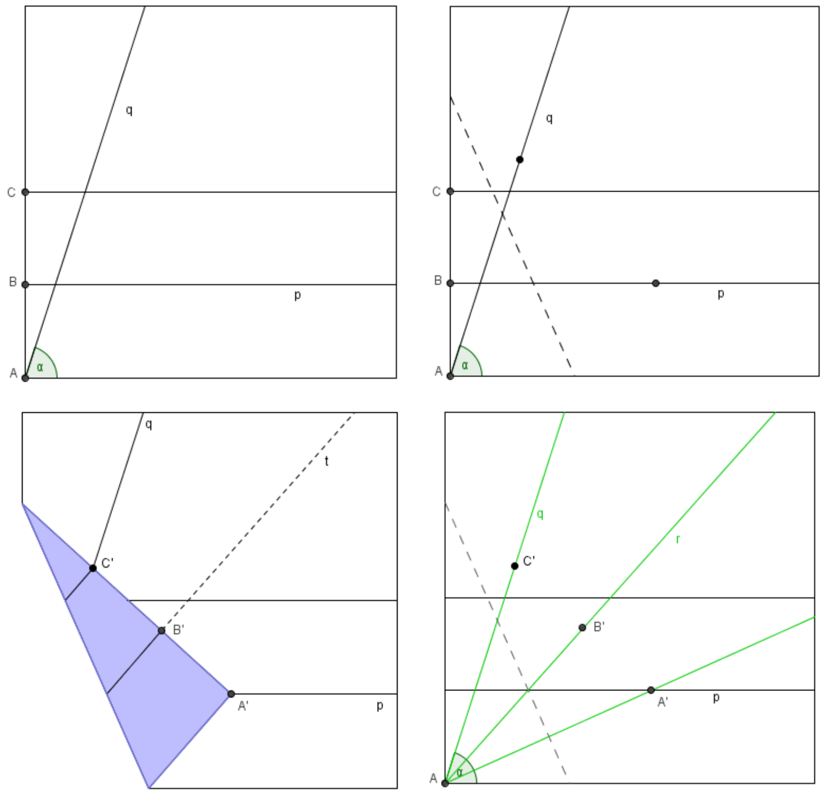
Všechny axiomy, vyjma O6, lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka Euklidovskou geometrií. Konstrukce popsaná axiomem O6 nám umožní vyřešit dva z klasických problémů řecké matematiky - trisekce úhlu a duplikace krychle, [2].

4.2. Trisekce úhlu

Antická úloha, kterou starověcí matematici odkázali potomstvu nerozřešenou. Zdánlivě se jevila jako velmi prostá. Rozdělit úhel na tři stejné části pomocí pravítka a kružítka. Pythagorejci, kteří se zabývali pravidelnými mnohoúhelníky, se pokoušeli rozdělit úhel o velikosti 120° na tři stejné části, aby sestrojili pravidelný devítiúhelník. Často se spokojili s přibližným řešením. K tomu bylo vymyšleno několik přístrojů. Jeden z nich se zakládá na křivce kvadratrix, kterou objevil Hippias z Elidy v 5 stol. př. n. l., jiný na křivce nazývané Nikomédova konchoida. Až v novověké evropské matematice kolem roku 1830 dokázal Évaristeho Galoise, že nelze provést konstrukci pomocí pravítka a kružítka, [25, 26].

Dělení libovolně velkého úhlu na tři shodné části nelze provést pomocí Euklidovské geometrie. Použijeme skládání papíru, klíčový sklad vychází z axiomu O6.

Vezmeme čtvercový papír, na kterém vytvoříme ostrý úhel α a přímku q (obr. 4. 2.).



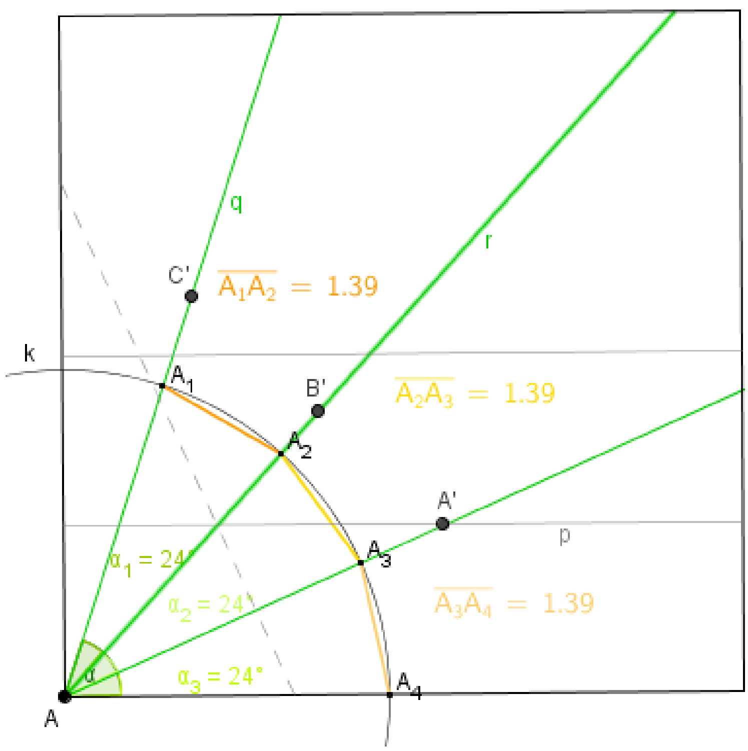
4.2. Postup konstrukce trisekce úhlu.

Papír přeložíme na polovinu a tu ještě na polovinu, překlad nazveme *p*, vzniknou body *A*, *B*, *C*. Použijeme axiom O6, přeložíme roh čtverce s vrcholem *A* tak, aby se bod *C* překryl s přímkou *q* a bod *A* s přímkou *p*. Vzniknou obrazy bodů *A'*, *B'*, *C'*, kterými vedeme přímky z vrcholu *A*. Úhel α jsme rozdělili na tři shodné části, [2, 10].

Zda se nám podařilo úhel α rozdělit opravdu na třetiny, si ukážeme na následujících obrázcích (obr. 4. 3. a obr. 4. 4.).

Numerické ověření

Narýsujeme kružnici *k* se středem ve vrcholu *A* a libovolným poloměrem. Průsečíky kružnice s rameny úhlů nazveme A_1, A_2, A_3, A_4. Spojením bodů vzniknou tři trojúhelníky, o kterých můžeme tvrdit, že jsou rovnoramenné a shodné. O tomto tvrzení se můžeme přesvědčit např. v programu GeoGebra či použitím kružítka a pravítka.



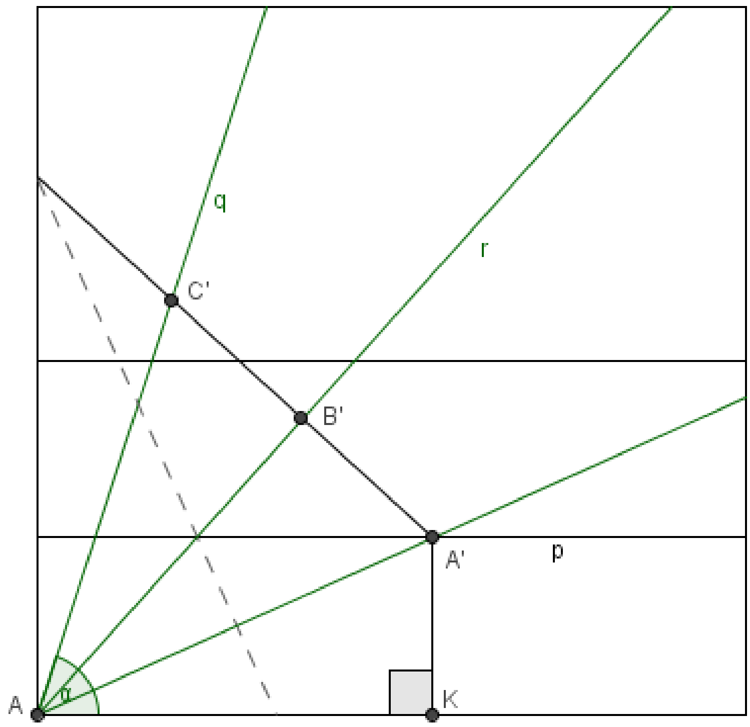
4.3. Numerické ověření trisekce úhlu.

Sečny A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 jsou shodné, ramena trojúhelníků AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 jsou též shodná. Jedná se o tři shodné rovnoramenné trojúhelníky A_1AA_2, A_2AA_3, A_3AA_4. Proto i úhly α_1, α_2, α_3 jsou shodné a jsou rovné jedné třetině velikosti úhlu α.

Důkaz

Vztyčíme kolmici k přímce *p* procházející bodem *A'*, její průsečík se spodní stranou čtverce označíme *K*. Přímka procházející body *A'*, *B'*, *C'* je kolmá na přímku *r*.

Nyní budeme dokazovat shodnost trojúhelníků *AB'C', AB'A', AKA'*, z které vyplývá, že úhel α jsme skutečně rozdělili na třetiny.



4.4. Důkaz trisekce úhlu.

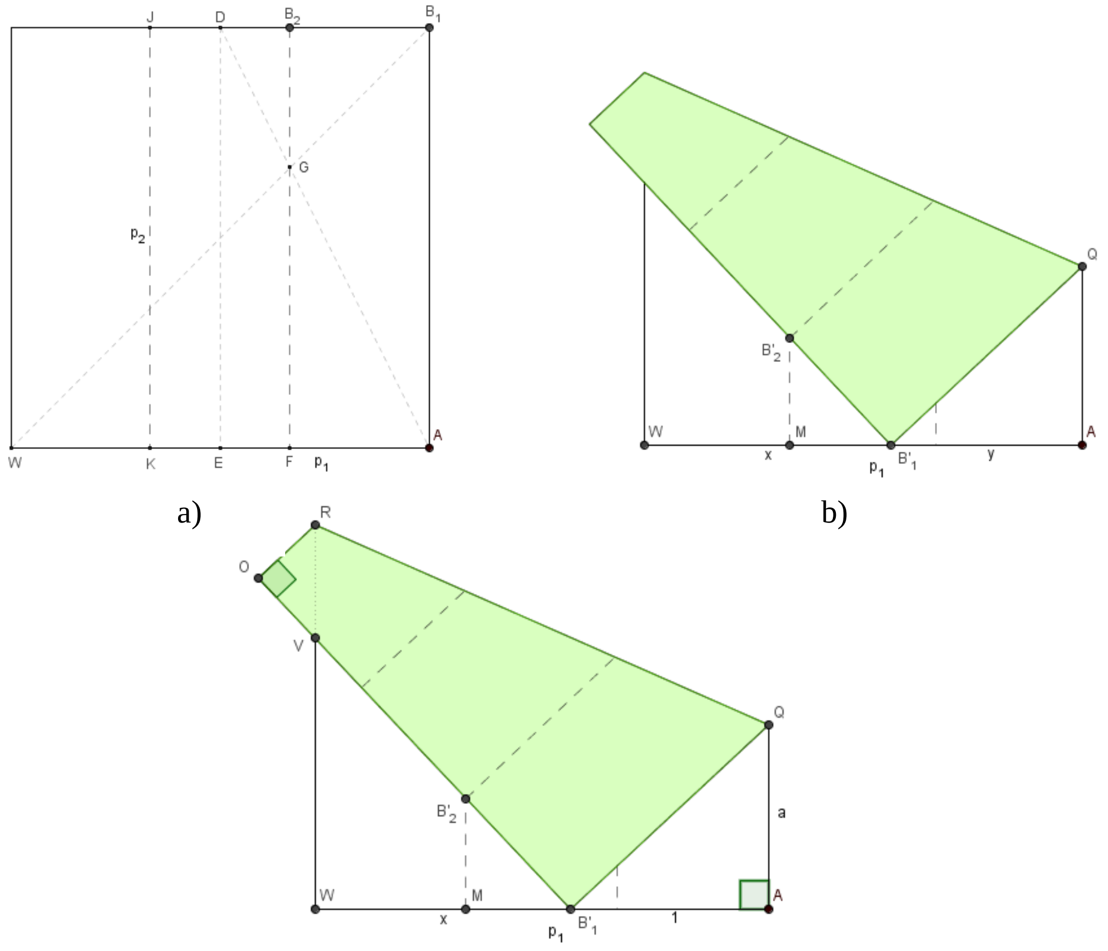
Platí, že $|C'B'| = |B'A'| = |A'K|$ a AB' je kolmá na AC', tedy $|AA'| = |AC'|$, $\Delta AA'C'$ je rovnoramenný. Pak $\Delta AB'C' \cong \Delta AB'A' \cong \Delta AKA'$ dle věty SUS. Dále $|\angle C'AB'| = |\angle A'AB'| = |\angle A'AK| = \frac{\propto}{3}$. Velikost sestrojeného úhlu je rovna třetinové velikosti úhlu α, [2, 10].

4.3. Duplikace krychle

Též v minulosti nazývaná Delský problém. Název vychází z příběhu o Athéňaněch sužovaných morem, kteří plují na ostrov Délos v Egejském moři za tamějšími věštci pro rady. Věštci jim poradili, aby ve stávajícím chrámu postavili nový oltář o dvojnásobném objemu, než je původní oltář. Athéňané stáli před tehdy nevyřešitelným úkolem, oltář měl tvar krychle a oni měli k dospozici jen pravítko a kružítko, [24].

Pro danou krychli o hraně délky a hledáme krychli o délce hrany x, která bude mít dvojnásobný objem. Toto splňuje matematický zápis $x^3 = 2a^3$,[11].

Tuto úlohu vyřešíme pomocí origami, budeme konstruovat úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.



4.5. Postup konstrukce duplikace krychle.

Čtvercový list papíru přeložíme na třetiny jako na obr. 4. 5. a. Začneme překladem úhlopříčky WB_1, poté střední příčky DE. Dále přeložíme úhlopříčku DA v obdélníku EAB_1D. Průsečík úhlopříček WB_1 a DA nazveme G, kterým následně vedeme překlad rovnoběžný se střední příčkou DE. Tímto máme jednu třetinu čtverce hotovou. Zbylou část doděláme jednoduchým překladem bodu W na bod F.

První přehyb zleva nazveme p_2 a spodní stranu čtverce p_1. Pro další překlad využijeme znalost Huzitova axiomu O6. Budeme přehýbat tak, aby se bod B_1 překryl s p_1 a bod B_2 s p_2. Vzniklé body nazveme B_1‘ a B_2‘. Bod B_1‘ dělí spodní stranu čtverce p_1 na dvě úsečky v poměru $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$.

<u>Důkaz platnosti vztahu $x = \sqrt[3]{2}$</u>

Z obr. 4. 5. víme, že $|AQ| = a, |B_1'Q| = x + 1 - a, |B_1'B_2'| = \frac{x+1}{3}, |B_1'M| = x - \frac{x+1}{3}$ a trojúhelníky $\Delta ROV \sim \Delta B_1'WV \sim \Delta QAB_1'$ jsou podobné.

Podobnost trojúhelníků $\Delta ROV \sim \Delta B_1'WV \sim \Delta QAB_1'$ vychází z Hagaovy věty [13], která říká, že na čtvercovém papíru vymodelujeme tři podobné trojúhelníky vytvořením jediného překladu.

$$\frac{|AQ|}{|B_1'Q|} = \frac{|MB_1'|}{|B_2'B_1'|} \rightarrow \frac{a}{x+1-a} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} \rightarrow \frac{a}{x+1-a} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Z $\Delta AQB_1'$pomocí Pythagorovy věty vyjádříme, čemu se rovná a.

$$(x+1-a)^2 = 1 + a^2 \rightarrow a = \frac{x^2+2x}{2x+2}$$

Po dosazení vyjádření a do předchozího výrazu dostáváme:

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1-\frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{2x-1}{x+1} \rightarrow \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \frac{2x-1}{x+1} \rightarrow x^3 = 2x^3 - 2 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

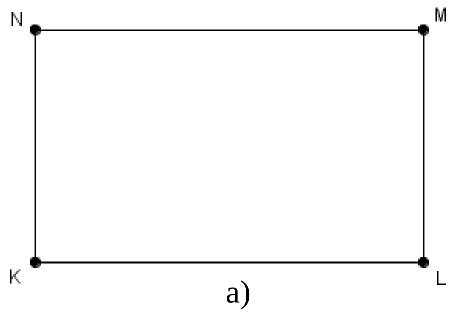
Délka hrany x hledané krychle o dvojnásobném objemu činí skutečně $\sqrt[3]{2}$, [2, 10,12].

5. Tvorba papírových modelů rovinných a prostorových útvarů

V této kapitole se zaměříme na stavbu papírových modelů, na kterých si ukážeme základní vlastnosti daných rovinných a prostorových útvarů, které si žáci mohou na základě modelů odvodit a tím snáze učivo geometrie pochopit.

5.1. Čtverec

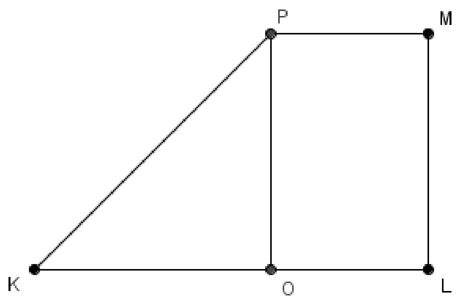
Z obdélníkového papíru vytvoříme čtverec jednoduchými překlady. Vrchol čtverce *N* přeložíme k protější straně *KL* a vznikne bod *O*. Zbylý menší obdélník *OLMP* po straně přeložíme tak, aby se jeho spodní strana *OL* překrývala se spodní stranou obdélníku *KL*. Po rozložení papíru vidíme tři části, dva pravoúhlé trojúhelníky $\Delta\, KPN\ a\ \Delta\, KOP$, které tvoří čtverec *KOPN*, a menší obdélník *OLMP* po straně.



a)

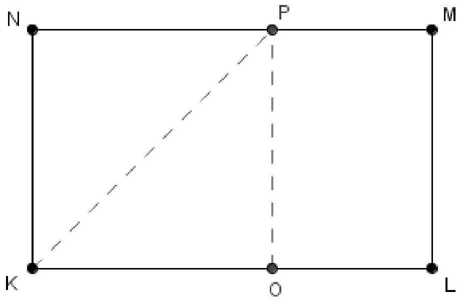
Základní pozorované vlastnosti:

Obdélník společně se čtvercem patří mezi rovnoběžníky. Každé jejich dvě protější strany jsou shodné a rovnoběžné. Sousední strany jsou na sebe kolmé. Kolmice svírají úhly o velikosti 90°, tzv. pravé úhly.



b)

ΔKOP je pravoúhlý, ostroúhlý a rovnoramenný. Strany v pravoúhlém trojúhelníku se nazývají odvěsny a přepona, v rovnoramenném ramena a základna. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku činí 180°. Máme úhly vrcholové, vedlejší, souhlasné a střídavé.



Čtverec $KOPN$ se skládá ze dvou shodných trojúhelníků. Platí osová souměrnost. KP je úhlopříčka čtverce.

c)

5.1. Postup konstrukce čtverce.

Důkaz

ΔKPN je rovnoramenný a pravoúhlý, ramena svírají se základnou úhel 45°. Přeložením ΔKPN vznikne druhý, shodný trojúhelník ΔKOP. Oba trojúhelníky tvoří čtverec *KOPN*.

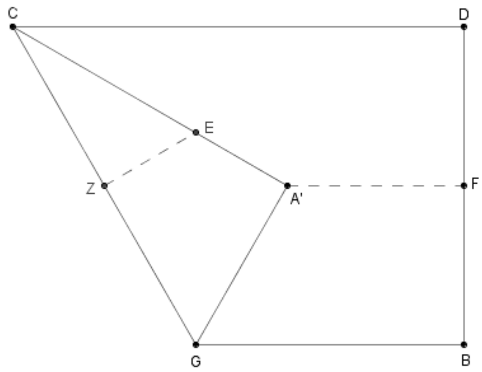
5.2. Pravidelný trojúhelník

Obdélníkový list papíru, jehož vrcholy nazveme *ABCD* (obrázek 5. 2.), přeložíme na polovinu, přehyb *EF*. Vrchol *A* přeložíme na přehyb *EF*, vzniknou body *A‘* a *G*. Dále přeložíme bod *B* na přehyb *GC* a bod *D* na přehyb *GH*.

Základní pozorované vlastnosti:

Obdélník patří mezi rovnoběžníky. Každé jeho dvě protější strany jsou shodné a rovnoběžné. Sousední strany jsou na sebe kolmé. Kolmice svírají úhly o velikosti 90°, tzv. pravé úhly. Přehyb *EF* je osa úseček *AC* a *BD*.

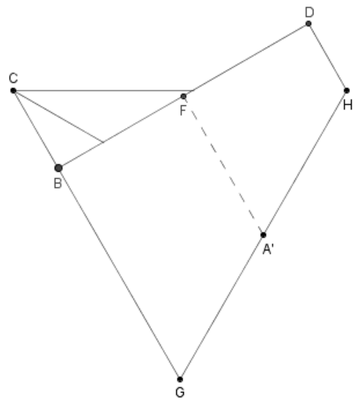
a)



$\Delta CGA'$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A'. Strany v pravoúhlém trojúhelníku nazýváme odvěsny a přepona.

GBFA' a *CDFA'* jsou pravoúhlé lichoběžníky, jež mají dvě rovnoběžné základny a jedno rameno k nim kolmé.

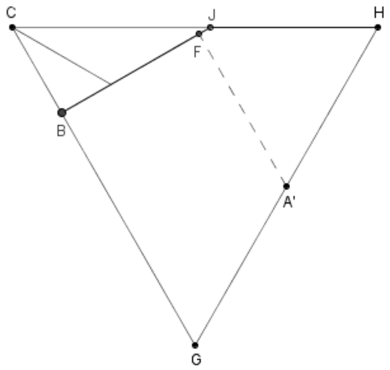
b)



Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Součet vnitřních úhlů v lichoběžníku je 360°.

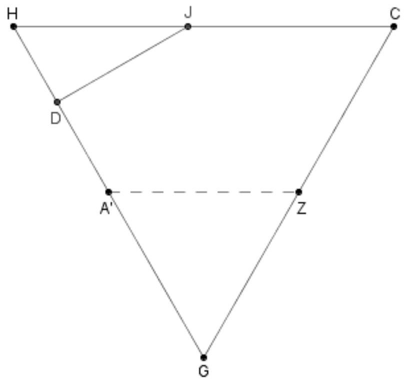
Početní operace s úhly: sčítání, odčítání, násobení, dělení.

c)



Rovnostranný trojúhelník: všechny strany stejně dlouhé, vnitřní úhly shodné a rovné 60°, výšky splývají s těžnicemi.

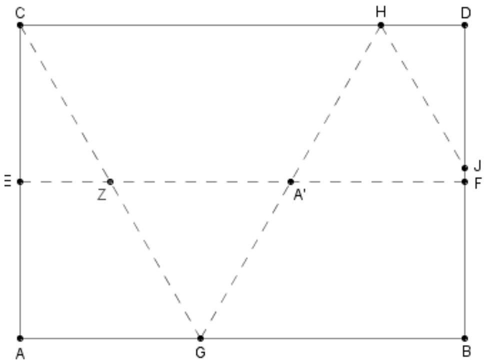
d)



e)

Trojúhelník ΔHDJ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *D*.

$\Delta GZA'$ je rovnostranný trojúhelník.



f)

Věty o podobnosti trojúhelníků: USU, SSS, SUS.

5.2. Postup konstrukce pravidelného trojúhelníku.

<u>*Důkaz, že ΔCGH je rovnostranný*</u>

Vycházíme z obr. 5. 2. f. Platí, že $|AG| = |GA'|$, z překladu bodu *A* na přehyb *EF*, též platí, že $\Delta CAG \cong \Delta CA'G$. Úsečka *CA'* je osou souměrnosti pro bod *G*, jehož obrazem je bod *H*, platí tedy $|A'G| = |A'H|$. Úsečka *CA'* je společná pro $\Delta GA'C$ a $\Delta HA'C$ a jako osa souměrnosti je kolmá k úsečce *GH*. Z toho plyne, že $\Delta GA'C \cong \Delta HA'C$ dle věty SUS, a proto platí $\Delta CAG \cong \Delta CA'G \cong \Delta CA'H$ a rovněž jsou trojúhelníky *CAG*, *CA'G*, *CA'H* pravoúhlé. Úhel při vrcholu *C* je tudíž dělen na třetiny, $|\angle ACG| = |\angle GCA'| = |\angle A'CH| = \frac{90°}{3} = 30°$.

Ze znalosti součtu úhlů v trojúhelníku víme, že $|\angle GCH| = 2 \cdot 30° = 60°, |\angle CGA'| = |\angle CHA'| = 180° - (30° + 90°) = 60°$.

Úhly v trojúhelníku ΔCGH jsou shodné a měří 60°, strany v trojúhelníku jsou shodné. Trojúhelník ΔCGH je rovnostranný.

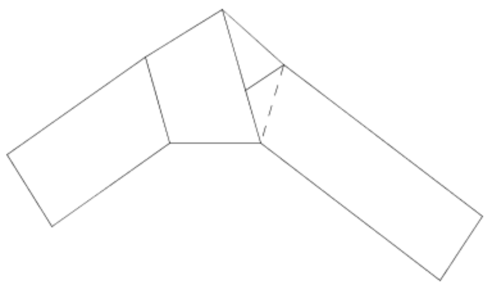
5.3. Pravidelný pětiúhelník

Rovinný obrazec s pěti vrcholy, pěti stranami o stejné délce, vnitřními úhly o stejné velikosti a obsahující pět shodných rovnoramenných trojúhelníků, nazývame pravidelným pětiúhelníkem, [14].

Konstrukci pravidelného pětiúhelníku budeme demonstrovat na uzlu z proužku papíru.

Vezmeme libovolný proužek papíru obdélníkového tvaru a vytvoříme z něho uzel, řádně utáhneme a smáčkneme, [15].

a)



b)

5.3. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku.

Základní pozorované vlastnosti:

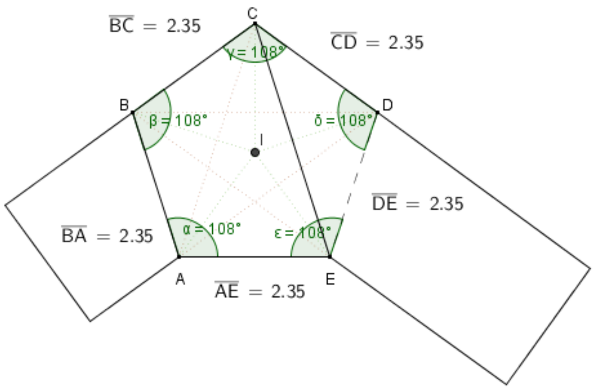
Po rozložení na proužku papíru: čtyři shodné rovnoramenné lichoběžníky a dva různé pravoúhlé lichoběžníky.

Rovnoramenný lichoběžník má dvě rovnoběžné základny a dvě ramena, která jsou shodná a se základnami svírají shodné úhly.

Pravoúhlý lichoběžník má dvě rovnoběžné základny a dvě ramena, přičemž jedno rameno svírá se základnami pravý úhel.

Numerické ověření

Zda má uzel z proužku papíru skutečně tvar pravidelného pětiúhelníku se přesvědčíme v programu GeoGebra.



5.4. Naměřené hodnoty složeného pravidelného pětiúhelníku.

Jak je z obr. 5. 4. patrné, jedná se o pravidelný pětiúhelník, který má pět vrcholů, pět shodných stran, pět shodných vnitřních úhlů a pět shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Náhled důkazu pravidelného pětiúhelníku

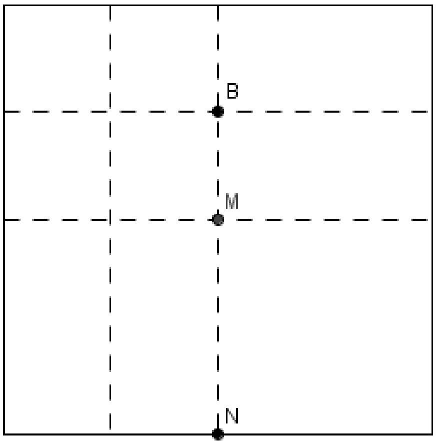
Skládáme z proužku, který má rovnoběžné strany (tvoří základny lichoběžníků), po celé délce stejné šíře (tvoří kratší základny a ramena lichoběžníků) a překládáme ho čtyřikrát, abychom udělali uzel. Strany pravidelného pětiúhelníku jsou tvořeny kratší základnou a rameny rovnoramenných lichoběžníků, které jsou shodné, proto nám vždy vyjde pravidelný pětiúhelník.

5.4. Pravidelný sedmiúhelník

Rovinný obrazec se sedmi vrcholy, sedmi stranami o stejné délce, vnitřními úhly o stejné velikosti a obsahující sedm shodných rovnoramenných trojúhelníků, nazýváme pravidelným sedmiúhelníkem, [14].

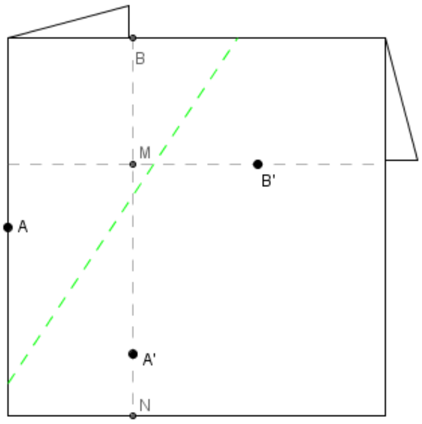
Na základě znalostí Origami geometrie provedeme konstrukci pravidelného sedmiúhelníku, kterou nebudeme dokazovat.

Postup konstrukce uvádí Robert Geretschläger ve své práci Skládání pravidelného sedmiúhelníku, [16].



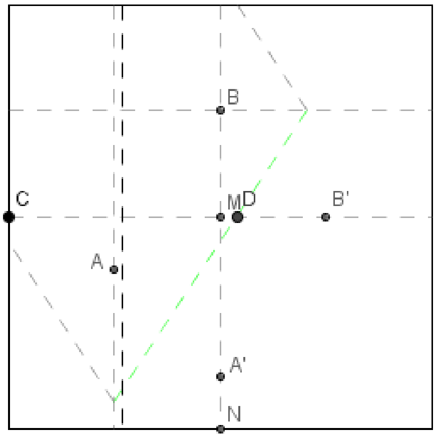
a)

Čtvercový papír přeložíme na čtyři shodné čtverce, body *M*, *N*. Nejprve vrchní a poté levou boční stranu čtverce přehneme k bodu *M* a poté dozadu.



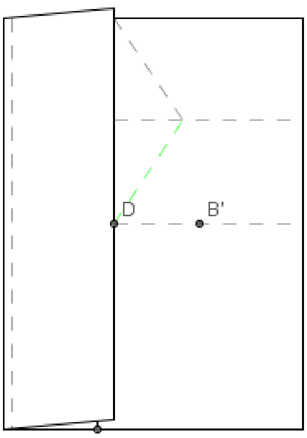
b)

Středem levé boční strany je bod *A*. Obrazy bodů *A*, *B* nazveme *A*‘, *B*‘, použijeme Huzitův axiom O6 (podkapitola 4. 1.).



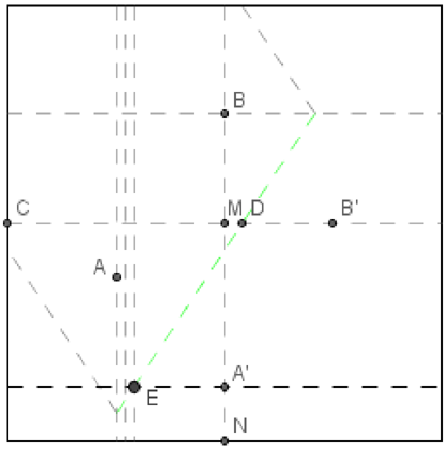
c)

Rozložíme na původní velký čtverec a vyznačíme body *C* a *D*. Přeložíme bod *C* na bod *D*.



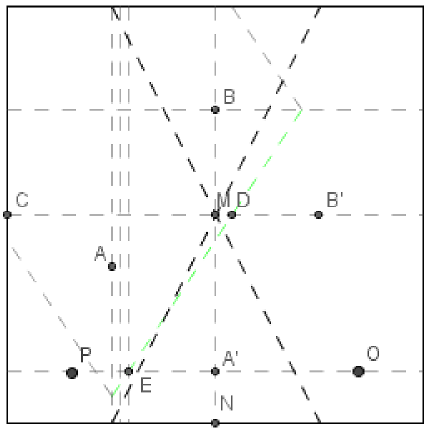
d)

Boční přehyb přehneme již podle naznačeného přehybu doprava. Po rozložení budeme mít tři rovnoběžné a stejně od sebe vzdálené přehyby.



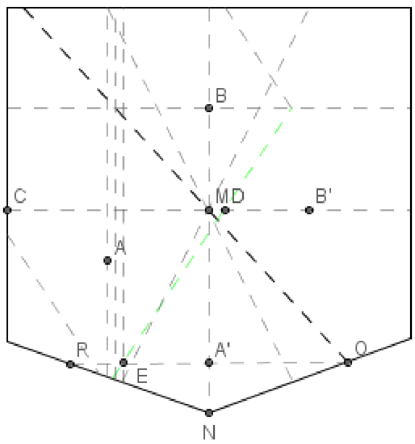
e)

Bodem E vedeme přehyb rovnoběžný se spodní stranou čtverce.



f)

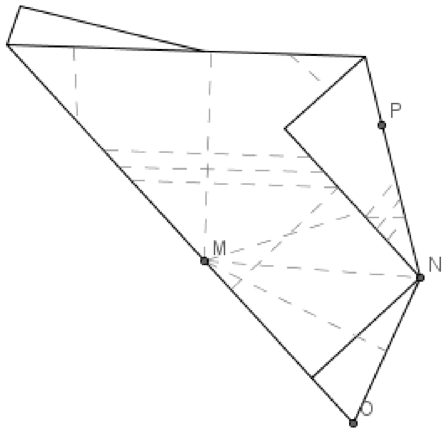
Provedeme dva přehyby bodem M, kdy bod N leží na přehybu, který prochází bodem E. Body O, P jsou obrazy bodu N.



g)

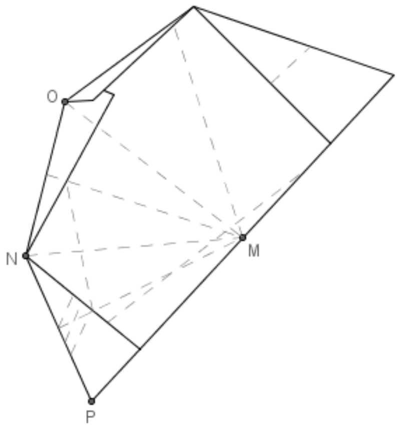
První vrchol pravidelného sedmiúhelníku tvoří přehyby procházející body P, N, O.

Poté přehneme tak, aby přehyb procházel body O, M a bod N ležel na pravé boční straně čtverce.



h)

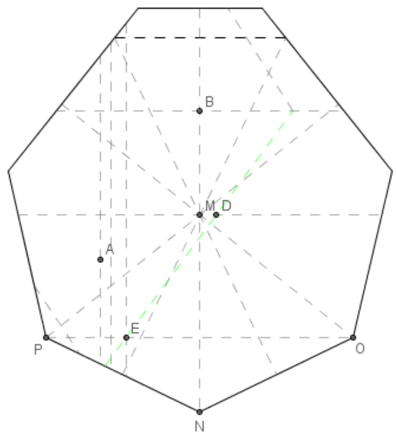
Přesahující trojúhelníky zahneme dozadu.



i)

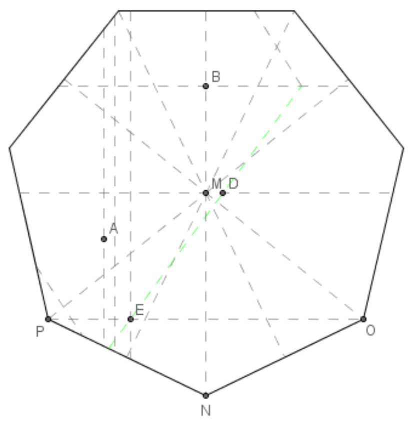
Provedeme přehyb procházející body *P*, *M* tak, aby bod *N* ležel na levé boční straně čtverce.

Přesahující trojúhelníky zahneme dozadu.



j)

Posledním záhybem dozadu získáváme pravidelný sedmiúhelník.



Pravidelný sedmiúhelník.

k)

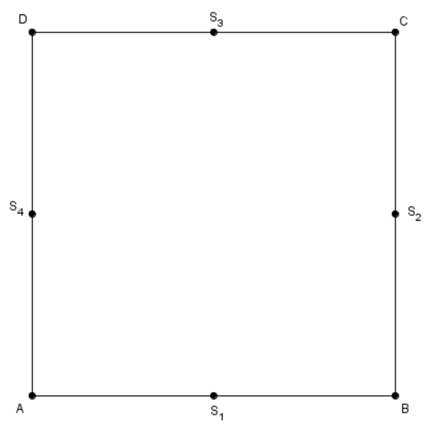
5.5. Postup konstrukce pravidelného sedmiúhelníku.

5.5. Pythagorejský trojúhelník

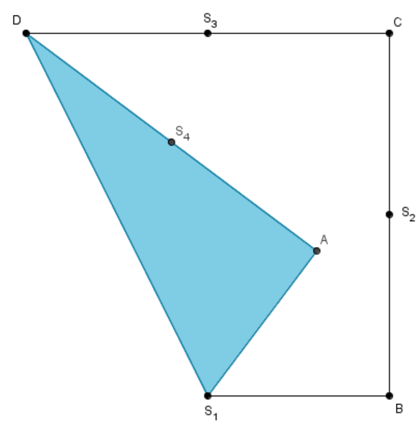
Každý pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou v poměru 3:4:5, můžeme nazvat Pythagorejským trojúhelníkem (Egyptským trojúhelníkem).

Již ve starověkém Egyptě využívali těchto vlastností ve stavební praxi pro vytyčení pravého úhlu, pomocí provazce rozděleného na dvanáct dílů.

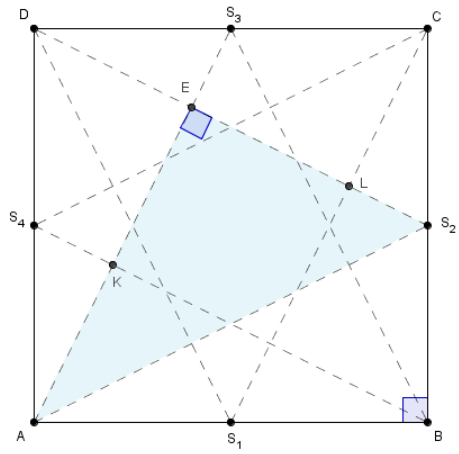
Překládáním čtvercového papíru získáme třicet dva trojúhelníků, z nichž osm bude Pythagorejských, [17, 18].



a)



b)



c)

5.6. Postup konstrukce Pythagorejského trojúhelníku.

Na čtvercovém listu papíru o libovolné délce strany a si vyznačíme středy stran S_1, S_2, S_3, S_4. Provedeme překlad DS_1 a stejným postupem ještě dalších sedm (S_1C, S_4B, BS_3, AS_2, S_2D, S_4C, AS_3), obr. 5. 6.

Vybereme si jeden z osmi Pythagorejských trojúhelníků, ΔAS_2E vyznačený na obr. 5. 6. c, ověříme si u něho vlastnosti pro Pythagorejský trojúhelník.

Důkaz, že ΔAS_2E je Pythagorejským trojúhelníkem.

1. Trojúhelník ΔAS_2E je pravoúhlý.

   Víme, že strany DA a DC jsou na sebe kolmé. Bod S_3 je středem DC. Bod S_2 je středem CB. Pak AS_3 a DS_2 jsou též na sebe kolmé, vycházíme z otočení stran DA a DC. Pak ΔAS_2E je pravoúhlý.

2. Délky stran trojúhelníku ΔAS_2E jsou v poměru 3:4:5.

   Víme, že úsečky AS_3 a S_1C jsou rovnoběžné, také ES_3 a LC jsou rovnoběžné. Bod E je středem úsečky CL, bod S_3 je středem DC a bod K je středem AE.

Trojúhelníky CLS_2, DES_3, AKS_4 jsou shodné.

Úsečka ES_3 je rovnoběžná s úsečkou LC a tvoří střední příčku v ΔDLC, měří polovinu délky úsečky LC.

Řekněme, že $|ES_3| = 1$, potom $|LC| = 2$.

Potom $|AE| = |AK| + |KE|$, $|AK| = |KE| = |LC| = 2$, $|AE| = 4$.

Potom $|ES_2| = |EL| + |LS_2|$, $|EL| = |KE| = 2$, $|LS_2| = |ES_3| = 1$, $|ES_2| = 3$.

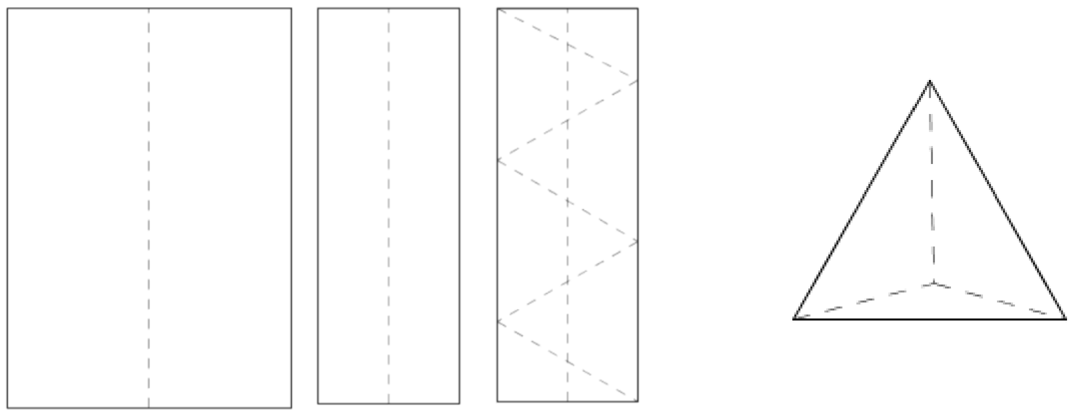
Potom $|AS_2| = 5$, dle Pythagorovy věty.

Pak $|ES_2| : |EA| : |AS_2| = 3 : 4 : 5$.

Trojúhelník ΔAS_2E je pravoúhlý a jeho strany jsou v poměru 3:4:5, jedná se o Pythagorejský trojúhelník.

5.6. Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn (tetraedr), též pravidelný trojboký jehlan, řadíme mezi Platónská tělesa, pravidelné konvexní mnohostěny. Z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří stejný pravidelný mnohoúhelník. Tetraedr má čtyři vrcholy a čtyři stěny tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky, [19].



a) b) c) d)

5.7. Postup konstrukce pravidelného čtyřstěnu.

Papír formátu A4 přeložíme na polovinu. Krajní strany přiložíme ke středové hraně, kdybychom papír rozložili, viděli bychom, že jsme papír rozdělili na čtvrtiny. Následně budeme překládat rovnostranné trojúhelníky dle postupu z podkapitoly 5. 2. Na závěr vložíme krajní trojúhelníky do sebe a složíme pravidelný čtyřstěn, [20].

5.7. Möbiův list

Při topologických experimentech objevili vědci útvar, též nazývaný Möbiova páska (proužek, pás), který si vytvoříme z úzkého obdélníkového proužku papíru. Slepíme dva konce proužků tak, že jeden pootočíme oproti druhému o 180°. Pokud je počet půlotáček lichý, vzniká jednostranná plocha, pokud je sudý, vzniká dvojstranná plocha.

5.8. Möbiův list.

U tohoto útvaru můžeme pozorovat specifické vlastnosti.

Neodlišíme rub a líc jako u obyčejného papíru. Má jen jeden povrch.

Obarvíme Möbiův list na dvě barvy. Vezmeme první a zjistíme, že jsme obarvili celý proužek, na druhou barvu již nezbývá prostor.

Jedinou uzavřenou křivkou je okraj.

Prstem budeme objíždět okraj Möbiova listu. Zjistíme, že zdání klame. Má pouze jeden okraj místo pro oko dvou zřejmých okrajů.

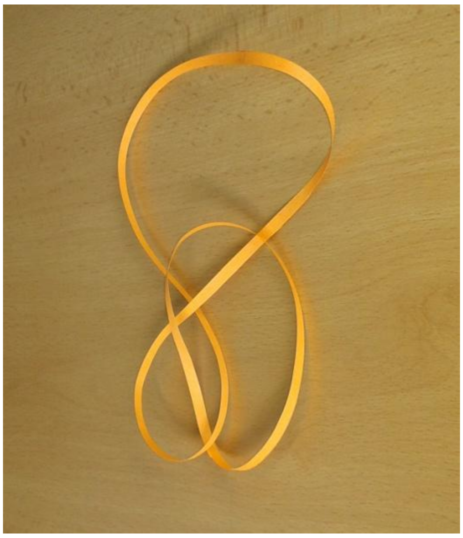
Nemá parametrizovatelnou plochu.

Na každém papíře si můžeme zakreslit souřadný systém a jednoznačně popsat bod dvěma souřadnicemi. Na Möbiově listu se nám jednoznačné přiřazení mezi body na povrchu a souřadnicemi nepodaří.

Möbiův list můžeme dále upravovat stříháním. Rozstřihneme-li list uprostřed, vznikne jeden dlouhý pásek, který již má dvě strany, rub a líc.

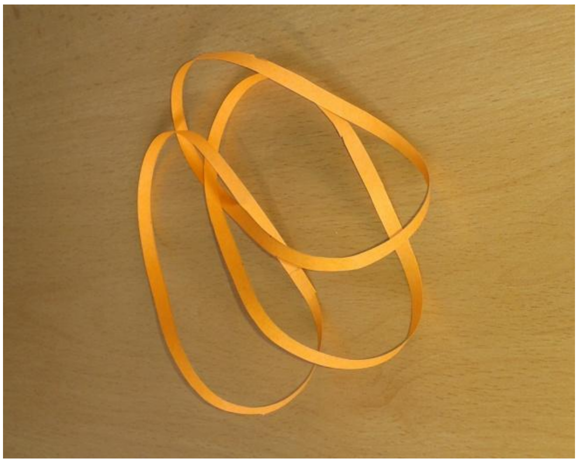
5.9. Möbiův list rozstřižený v polovině.

Rozstřihneme-li list na třetiny, získáme dva proužky. První proužek je dvakrát větší a má rub a líc oproti druhému.



5.10. Möbiův list rozstřižený v polovině.

Rozstřihneme-li na třetiny list, který je dvojitý Möbiův proužek (vytvoříme z úzkého obdélníkového proužku papíru, kdy slepíme dva konce proužků tak, že jeden pootočíme oproti druhému o 360°), utvoříme tři do sebe propletené proužky s dvěma stranami.



5.11. Dvojitý Möbiův list rozstřižený na třetiny.

Tematika Möbiova listu se vyskytuje i ve výtvarném umění, známé je dílo M. C. Eschera „Möbius Strip II“, kde po Möbiově listu kráčí mravenci. Své zastoupení má ve vědeckofantastickém žánru. Při praktickém využití slouží například jako přehrávací páska s dvojnásobnou dobou záznamu nebo součást tiskáren a psacích strojů, [21, 22, 23].

6. Závěr

Skládání papíru, origami, představuje hravou a motivující složku ve výuce geometrie. Je přínosem pro žáky všech věkových kategorií. Podněcuje je k zamyšlení, probouzí v nich zvídavost a zájem o danou problematiku. Žáci hledají odpovědi na otázky typu, co skládají, proč to skládají a hlavně proč to takto lze složit. Na základě složených modelů dokážou odvodit základní vlastnosti rovinných a prostorových útvarů. Zlepšují si svoji představivost, fantazii i manuální zručnost.

Skládání papíru sahá nad rámec Euklidovské geometrie. Znalost Huzitových axiomů přineslo rozřešení pro mnoho úloh (např. duplikace krychle, trisekce úhlu). Velké využití nalezneme také např. v průmyslových konstrukcích.

Přínos této disciplíny do matematiky je značný, a proto má v tomto vědním oboru své nezastupitelné místo.

Literatura

[1] GHOURABI, F., KASEM, A., KALISZYK, C. Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and their Extensions. T. Ida and J. Fleuriet (Eds): ADG 2012, LNAI7993, pp. 143-160, 2013. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

[2] BOHÁČOVÁ, Jana. Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání [online], Karlova Univerzita, Praha, 2009. Dostupné z WWW: <http://jana.vysehrad.org/diplomka.pdf>.

[3] Česká origami společnost [online]. [cit. prosinec 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.origami.cz/COS/>.

[4] Origami [online]. Dostupné z WWW: <http://new.origami.cz/index.php/Origami>.

[5] Počátky origami [online]. [cit. leden 2015]. Dostupné z WWW: <http://new.origami.cz/index.php/Po%C4%8D%C3%A1tky_origami>.

[6] Historie origami [online]. Dostupné z WWW: <http://origami.webz.cz/historie.htm>.

[7] Papír [online]. [cit. únor 2015]. Dostupné z WWW: <http://www.origami-cos.cz/clanky/papir>.

[8] Formáty papíru [online]. [cit. únor 2015]. Dostupné z WWW: <http://www.prepocet.cz/papir/>.

[9] Tvary papíru [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://origami.webz.cz/matematika/pdf/tvarypapiru.pdf>.

[10] CHRENČÍKOVÁ, Markéta. Konstruovatelnost pravítkem a kružítkem [staženo únor 2015]. Dostupné z WWW: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/92615/>.

[11] LOMTATIDZE, Lenka. Některé netradiční úlohy o křivkách [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <educoland.muni.cz/down-280/>.

[12] Neřešitelné matematické úlohy [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1438-neresitelne-matematicke-ulohy>.

[13] Hagaova věta [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://www.origami.gr.jp/Archives/People/CAGE_/divide/02-e.html>.

[14] VILDOMCOVÁ, Zuzana. Pravidelné n-úhelníky [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://www.strojka.opava.cz/UserFiles/File/_sablony/TEK_I_obor_IT/VY_32_INOVACE_F-16-05.pdf>.

[15] Pravidelný pětiúhelník [online]. Dostupné z WWW: <http://www.darius.cz/ag_nikola/cl_dvanacti.html>.

[16] Skládání pravidelného sedmiúhelníku [staženo březen 2015]. Dostupné z WWW: <https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page81-88.pdf>.

[17] Ševců, Ondřej. Lexikon architektonických prvků a stavebního řemesla [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <https://books.google.cz/books?isbn=8024731207>.

[18] Pythagorejský trojúhelník [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PaperFolding/345Triangle.shtml>.

[19] CHMELÍKOVÁ, Vlasta, MORAVEC, Luboš. Pravidelné mnohostěny. [online]. [cit.březen 2015]. Dostupné z WWW: <www.sgo.cz/show-file/466/>.

[20] Pravidelný čtyřstěn [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://users.datarealm.com/hecht/origami/diags/tetra.pdf>.

[21] Möbiův list [online]. [cit. březen 2015]. Dostupné z WWW: <http://hyperkrychle.cz/topologie.html>.

[22] Möbiův list - stříhání [online]. Dostupné z WWW: <http://sifry.lasakovi.com/hlavolamy/mobiuv-pasek/>.

[23] ŠTÍBROVÁ, Zuzana. Neuklidovské geometrie v historii matematiky a jejich využití pro současné cíle vyučování matematice. [staženo leden 2015]. Dostupné z WWW: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/74062/>.

[24] Delský problém [online]. [cit. duben 2015]. Dostupné z WWW: <https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/rokyta_a.pdf>.

[25] KOWAL, Stanislav. Matematika pro volné chvíle. [staženo a cit. duben 2015]. Dostupné z WWW: <http://uloz.to/xa5bEvW/kowal-matematika-pro-volne-chvile-zip#download>.

[26] Historie trisekce úhlu. Wikipedia : the free encyclopedia [online]. [cit. duben 2015]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Trisekce_%C3%BAhlu>.