

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Parabolické rovnice řešené metodou konečných
prvků



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Horymír Netuka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
Bc. Petra Crhonková
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení RNDr. Horymíra Netuky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 3. dubna 2014

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Horymíru Netukovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Největší poděkování si zaslouží moje rodina, zejména moje matka, která mě vždy podporovala a motivovala.

Obsah

Použité symboly	4
Úvod	5
1 Eliptické rovnice	7
1.1 Klasická formulace úlohy	7
1.2 Variační předpis úlohy	8
2 Parabolická rovnice	13
2.1 Klasická formulace	13
2.2 Variační předpis úlohy	14
3 MKP pro eliptické úlohy	15
3.1 Triangulace oblasti	15
3.2 Bázové funkce	16
3.3 Diskretizace úlohy	16
3.4 Stabilita řešení	17
4 MKP pro parabolické rovnice I - Semidiskrétní metoda	19
4.1 Semidiskrétní schéma	19
4.2 Řešení vzniklé soustavy ODR s počátečními podmínkami	22
4.2.1 θ -metoda	22
4.3 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru jedné dimenze	26
4.4 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru dvou dimenzí	33
5 MKP pro parabolické rovnice II - Rotheho metoda	44
5.1 Explicitní Eulerova metoda	45
5.2 Implicitní Eulerova metoda	46
5.3 Crank-Nicholsonova metoda	47
5.4 Rotheho funkce	48
5.5 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru jedné dimenze	48
5.6 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru dvou dimenzí	52
6 Stabilita a srovnání metod	58
6.1 Stabilita řešení	58
6.2 Srovnání metod	60
Závěr	63

Použité symboly

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{R}^n	vektorový prostor nad \mathbb{R} dimenze n
Ω	oblast
Γ	hranice oblasti Ω
$\overline{\Omega}$	uzávěr oblasti Ω , tj. $\Omega \cup \Gamma$
$C^k(\Omega)$	množina funkcí, které jsou spojité včetně derivací do k -tého řádu v oblasti Ω
$L^k(\Omega)$	Lebesgueův prostor
$L^\infty(\Omega)$	Lebesgueův prostor
$\ u\ _{L^k}$	norma Lebesgueova prostoru, tj. $\ u\ _{L^k} = \sqrt[k]{\int_{\Omega} u ^k dx}$
$H^k(\Omega)$	Sobolevův prostor
$H_0^1(\Omega)$	funkce Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$ splňující homogenní okrajovou podmínku
$\ u\ _{H^k}$	norma Sobolevova prostoru, tj. $\ u\ _{H^k} = \sqrt{\sum_{ \kappa \leq k} \int_{\Omega} D^\kappa u ^2 dx}$
Δ	Laplaceův operátor
∇	operátor nabra
u_t	první parciální derivace funkce $u(x, t)$ podle časové proměnné t , tj. $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$
u_{xx}	druhá parciální derivace funkce $u(x, t)$ podle prostorové proměnné x , tj. $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$
u'	první derivace funkce jedné proměnné $u(x)$
h	prostorový krok
τ	časový krok
(u, v)	skalární součin
$a(u, v)$	bilineární forma
$L(v)$	lineární fukcionál
$ \cdot $	absolutní hodnota
$\ \cdot\ _V$	norma na prostoru V
$diam(K)$	průměr množiny K
♣	označení konce příkladu

Úvod

K nejnámějším numerickým metodám pro výpočet okrajových úloh patří metoda konečných prvků, dále jen MKP. Nyní si uvedeme několik poznatků o historii této metody.

První pokusy blížící se principům MKP jsou datovány již počátkem 20.století. Poprvé ale byla popsána německým matematikem Richardem Courantem až v roce 1943. Poté se metoda dále nerozvíjela na akademické půdě, ale v průmyslu. Velkou roli hrálo při vývoji MKP letectví, neboť pouze velké průmyslové podniky si mohly dovolit počítače, které byly pro tuto metodu důležité.

Zlatý věk MKP nastává v 70. letech 20.století. Do této doby bylo na konečné prvkové modely nahlíženo spíše jako na idealizaci problematiky. Nyní se však ukazuje, že teorie je v souladu s Rayleigh-Ritzovou teorií o minimální potenciální energii. Dále začíná převládat názor, že konečné prvkové modely jsou aproximací spojených modelů, které popisují skutečné situace a objekty.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s MKP pro řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic. Metoda nepracuje s klasickou, ale s tzv. slabou formulací úlohy. U čtenářů se tedy předpokládá alespoň základní znalost teorie parciálních diferenciálních rovnic a variačních metod.

První dvě kapitoly se věnují eliptické a parabolické rovnici. Jsou zde popsány nejen klasické, ale i slabé formulace úloh.

Ve třetí kapitole je ve stručnosti popsán princip MKP pro eliptickou rovnici. Jsou zde vysvětleny pojmy triangulace a báze funkce. Principem metody je převedení úlohy na soustavu lineárních rovnic.

Na řešení parabolických úloh existují v MKP dva pohledy. Oba kombinují základní pojmy jako triangulace, báze funkce, nahrazení hledané funkce lineární kombinací. Průběh řešení je ale odlišný.

Čtvrtá kapitola se zabývá tzv. semidiskrétní (Faedo-Galerkinovou) metodou. Diskretizací úlohy v prostoru dojde k převedení na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Rovnice poté řešíme vhodnými numerickými metodami. V práci jsou popsány jednokrokové θ -metody. Postup řešení je aplikován na pří-

kladech v 1D a 2D.

Pátá kapitola popisuje tzv. Rotheho metodu nazývanou též jako metoda úplné diskretizace. Úloha je diskretizována nejprve v čase a následně v prostoru. V práci jsou popsány diskretizace explicitní Eulerovou, implicitní Eulerovou a Crank-Nicholsonovou metodou. Součástí kapitoly je popis řešení příkladů v 1D a 2D.

Šestá kapitola se věnuje stabilitě a shrnutí metod. Obě vedou na stejné systémy diferenčních rovnic. Stabilita a konvergence metod je demonstrována srovnáním výsledků získaných MKP s přesným řešením.

Přínosem této práce jsou naprogramované m-fily. Ty jsou spolu s videi věnujícími se příkladům přiložené k práci na CD. Každý m-file má na začátku popsány vstupní i výstupní hodnoty. Všechny použité m-fily jsem vytvořila v matematickém softwaru MATLAB R2010b na notebooku ASUS model F3E s procesorem Intel Core Duo a operační pamětí 2GB. Přiložená videa jsou ve formátu AVI a byla získána pomocí příkazu `movie2avi` v Matlabu. Zobrazují řešení, popř. chyby úloh, a jejich vývoj v čase.

1 Eliptické rovnice

Nejjednodušším typem parciálních diferenciálních rovnic jsou tzv. eliptické rovnice. V rovnici se nevyskytuje časová derivace, takže slouží spíše k popisu ustalených stavů. Setkáme se s ní např. při stacionárním popisu vedení tepla.

1.1 Klasická formulace úlohy

Mezi hlavní a nejznámější zástupce eliptických parciálních diferenciálních rovnic patří Laplaceova a Poissonova rovnice.

Definice 1.1. Nechť je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $f \in C(\overline{\Omega})$. Rovnici definovanou pro neznámou funkci $u \in C^2(\Omega)$ předpisem

$$-\Delta u = f$$

potom nazýváme **Poissonovou rovnicí**. Je-li $f \equiv 0$, mluvíme o **Laplaceově rovnici**.

Eliptickou rovnici je třeba dále charakterizovat, a to užitím okrajových podmínek, které předepisují chování hledané funkce u na hranici Γ . V následující podmínce jsou popsány typy okrajových podmínek.

Poznámka 1.1. Okrajové podmínky

Typy okrajových podmínek:

- **Dirichletova podmínka:** předepisuje hodnoty funkce na hranici

Nechť $g \in C(\Gamma)$

$$u = g \quad \text{na } \Gamma$$

- **Neumannova podmínka:** předepisuje hodnoty normálové derivace na hranici

Nechť $h_1 \in C(\Gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h_1 \quad \text{na } \Gamma$$

- **Newtonova podmínka**

Nechť $h_1, h_2 \in C(\Gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h_2 u = h_1 \quad \text{na } \Gamma$$

- **Smíšená podmínka:** jedná se o kombinaci předchozích typů podmínek

Nechť $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a $g \in C(\Gamma_1)$, $h_1, h_2 \in C(\Gamma_2)$

$$\begin{aligned} u &= g && \text{na } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h_2 u &= h_1 && \text{na } \Gamma_2 \end{aligned}$$

1.2 Variační předpis úlohy

Uvažujeme okrajovou eliptickou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \Gamma \end{aligned} \tag{1.1}$$

Máme dānu tz. testovací funkci $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Rovnici potom vynásobíme touto funkcí v , zintegrujeme přes oblast Ω a upravíme užitím Greenovy formule, čímž získáme

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Označme si nyní

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

kde $a(u, v)$ je symetrickā bilineární forma a $L(v)$ je lineární funkcionāl. Dāle poloŹme $V = H_0^1(\Omega)$, kterou nazveme množina přípustných řešení.

Variační formulace úlohy (1.1) potom zní:

Nalezněte funkci $u \in V$ splňující

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \tag{1.2}$$

Řešení této úlohy potom nazveme variační nebo slabé řešení úlohy (1.1).

Poznámka 1.2. Řekneme, že bilineární forma $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je

- **omezená**, jestliže existuje číslo $c_1 > 0$ takové, že

$$|a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

- **spojitá**, jestliže je omezená a pro libovolné $v \in V$ jsou $a(v, \cdot)$ i $a(\cdot, v)$ lineární funkcionály ve V ,
- **V-eliptická**, jestliže existuje číslo $c_2 > 0$ takové, že

$$a(v, v) \geq c_2 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

- **symetrická**, jestliže platí

$$a(v, w) = a(w, v), \quad \forall v, w \in V.$$

Věta 1.1. *Lax-Milgramova věta.*

Nechť $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá a V-eliptická bilineární forma. Potom pro každý lineární funkcionál L má variační úloha (1.2) právě jedno řešení $u \in V$.

Důkaz: Viz. [9], str. 145-146.

Věta 1.2. *Nechť $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická, spojitá a V-eliptická. Potom funkce $u \in V$ je řešením variačního problému*

$$\min_{v \in V} J(v), \quad \text{kde } J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \quad \forall v \in V \quad (1.3)$$

právě tehdy, když je řešením variační úlohy (1.2).

Důkaz: Viz. [9], str. 146-147.

Eliptická úloha s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h_2 && \text{na } \Gamma \end{aligned}$$

Nechť $f \in L^2(\Omega)$, $h_2 \in L^\infty(\Gamma)$. Variační formulace Neumannovy úlohy je tvaru:

Najít funkci $u \in V = H^1(\Omega)$ splňující

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

kde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} h_2 v \, ds.$$

Eliptická úloha s Newtonovou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + h_1 u &= h_2 && \text{na } \Gamma \end{aligned}$$

Nechť $f \in L^2(\Omega)$, $h_1 \in L^2(\Gamma)$, $h_2 \in L^\infty(\Gamma)$. Variační formulace Newtonovy úlohy je tvaru:

Najít funkci $u \in V = H^1(\Omega)$ splňující

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

kde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} h_1 u v \, ds,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} h_2 v \, ds.$$

Ritzova metoda

Ritzova metoda vychází z minimalizace kvadratického funkcionálu $J(v)$, viz. (1.3). Řešení nebudeme hledat na prostoru V , ale na jeho konečně-dimenzionálním podprostoru S_h . Chceme najít funkci $u_h \in S_h$ splňující

$$J(u_h) = \min_{v_h \in S_h} J(v_h).$$

Konečně-dimenzionální prostor S_h je charakterizován systémem bází $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Hledanou funkci lze pomocí nich zapsat ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Definujeme nový funkcionál $F(\alpha_1, \dots, \alpha_N) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(\alpha) = J\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i\right).$$

Nyní budeme minimalizovat funkcionál F , tj. hledáme α^* splňující

$$F(\alpha^*) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^N} F(\alpha).$$

Ekvivalentně tuto úlohu zapíšeme jako

$$\nabla F(\alpha^*) = 0.$$

Jelikož kvadratický funkcionál je definován ve tvaru $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, platí

$$F(\alpha) = J\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i\right) = \frac{1}{2}a\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j\right) - L\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i\right) = \frac{1}{2}\alpha^T A \alpha - F^T \alpha,$$

kde

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j),$$

$$F = (F_i), \quad F_i = L(\varphi_i).$$

A odtud dostaneme

$$\nabla F(\alpha) = A\alpha - b.$$

Ritzovu úlohu je tedy možné převést na řešení systému lineárních rovnic

$$A\alpha = b.$$

Galerkinova metoda

Galerkinova metoda vychází z variačního předpisu (1.2). Namísto prostoru V hledáme řešení na konečně-dimenzionálním prostoru $S_h \subset V$. Úlohu tedy přepíšeme do tvaru

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad v_h \in S_h.$$

Prostor S_h je definován pomocí posloupnosti jeho bází $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Řešení úlohy $u_h \in S_h$ můžeme zapsat ve tvaru

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Dosadíme-li tuto lineární kombinaci do variačního předpisu, dostáváme soustavu

$$a\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \varphi_j\right) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Maticově můžeme soustavu zapsat jako

$$A\alpha = F,$$

kde

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j),$$

$$F = (F_i), \quad F_j = L(\varphi_j).$$

Galerkinova i Ritzova metoda jsou ekvivalentní metody vedoucí ke stejnému výsledku.

2 Parabolická rovnice

V této kapitole se budeme věnovat diferenciální rovnici parabolického typu. Popíšeme, jak rovnice tohoto typu vypadají a představíme tzv. počátečně-okrajovou úlohu. Dále budeme definovat také variační předpis.

Parabolické diferenciální rovnice patří mezi tzv. evoluční parciální diferenciální rovnice. Název této skupiny je odvozen od přítomnosti časové derivace v rovnici. Nejznámějšími zástupci skupiny parabolických rovnic jsou rovnice vedení tepla a difúzní rovnice. Slouží k popisu přenosu tepla nebo difúze v tekutinách v neustáleném stavu.

2.1 Klasická formulace

Definice 2.1. Parabolická rovnice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast a $I \subset \mathbb{R}$ interval. Jsou dány funkce $f, q \in C(\overline{\Omega \times I})$. Parciální diferenciální rovnice je definovaná předpisem

$$u_t - \Delta u + qu = f \quad \text{na } \Omega \times I.$$

Řešením je funkce $u(x, t)$ vyjadřující teplotu v bodě $x \in \Omega$ a čase $t \in I$.

Rovnici dále charakterizujeme zvolením počátečních a okrajových podmínek. Za okrajovou podmínku můžeme zvolit Dirichletovu, Newmannovu nebo Newtonovu podmínku, které jsou blíže popsány v Poznámce 1.1.

Poznámka 2.1. Počáteční podmínka

Nechť $u^0 \in C(\Omega)$. Počáteční podmínka je tvaru

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{pro } x \in \Omega.$$

Funkce u^0 slouží k popsání počátečního stavu, např. může sloužit k určení výchozí teploty.

Definice 2.2. Počátečně-okrajová úloha

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast a $I \subset \mathbb{R}$ je časový interval. Dále platí $f, q \in C(\overline{\Omega \times I})$

a $u^0 \in C(\Omega)$. Počátečně-okrajová úloha pro parabolickou rovnici je definovaná předpisem:

Najít funkci $u(x, t) \in C(\overline{\Omega \times I})$ takovou, že $u_t, u_{x_i x_i} \in C(\overline{\Omega \times I} \setminus \Gamma)$, splňující

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + qu &= f && \text{na } \Omega \times I \\ u &= 0 && \text{na } \Gamma \times I \\ u(\cdot, 0) &= u^0 && \text{na } \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2 Variační předpis úlohy

Nechť Ω je ohraničená konvexní oblast s hladkou hranicí Γ , na níž předpokládáme počátečně-okrajovou úlohu (2.1).

Rovnici úlohy (2.1) vynásobíme tzv. testovací funkcí $v \in C_0^\infty(\Omega)$ a poté zintegrujeme přes oblast Ω . Užitím Greenovy formule dostáváme rovnici

$$\int_{\Omega} u_t(x, t)v(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x, t)\nabla v(x) dx + qu(x)v(x)) = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx.$$

Máme dány prostory $V = H_0^1(\Omega)$ a $H = L_2(\Omega)$. Pro každé pevně zvolené t je zobrazení $x \rightarrow u(x, t)$ prvkem prostoru V . Značíme jej jako $u(t) \in V$. Potom můžeme definovat zobrazení $t \rightarrow u(t) \in V$ splňující

$$(u_t(t), v) + a(u(t), v) = L(v), \quad \forall v \in V, t \in I,$$

kde (u, v) je skalární součin na prostoru $L_2(\Omega)$, $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$ je symetrická bilineární forma a $L(v)$ je lineární funkcional.

Variační předpis úlohy (2.1) potom zní:

Nalezněte funkci $u(t) \in V$, $t \in I$ takovou, že

$$\begin{aligned} (u_t(t), v) + a(u(t), v) &= L(v), && \forall v \in V, t \in I \\ (u(0), v) &= (u^0, v), && \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.2)$$

3 MKP pro eliptické úlohy

Metoda konečných prvků je vlastně Galerkinova metoda se speciální volbou prostoru S_h . Volba prostoru a jeho bází neovlivňuje přibližné řešení u_h , ale ovlivňuje tvar soustavy, v tomto případě matice A .

3.1 Triangulace oblasti

Chceme-li řešit úlohu MKP, potom je třeba nejprve provést triangulaci oblasti Ω , na které budeme úlohu řešit. Triangulace oblasti spočívá v pokrytí uzávěru $\bar{\Omega}$ konečným počtem podmnožin K splňujících určité vlastnosti.

Definice 3.1. Množinu $T_h = \{K\}$ nazýváme **přípustnou triangulací** oblasti Ω , jestliže jsou splněny následující vlastnosti:

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$
2. pro $\forall K \in T_h$ je množina K neprázdná a uzavřená
3. pro $\forall K_1, K_2 \in T_h$ takové, že $K_1 \neq K_2$ platí $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
4. pro $\forall K \in T_h$ je hranice ∂K lipschitzovská.

Každá triangulace je charakterizována svými **prvky**, **uzly** a **stranami**.

Množiny K nazýváme **prvky triangulace**. Nejčastěji volíme simplexu v příslušné dimenzi, tj. intervaly v 1D, trojúhelníky ve 2D, čtyřstěny ve 3D. Z trojúhelníkových prvků byl také odvozen název tohoto rozkladu množiny.

Uzly triangulace jsou zvolené body na prvcích. Obvykle se jedná o vrcholy prvků, ale je možné použít také body uprostřed stran nebo těžiště. Uzly rozdělujeme na hraniční, ležící na hranici Γ , a vnitřní.

Strany triangulace jsou hranice prvků ležící na hranici Γ .

Nyní si označíme PP počet prvků, PU počet uzlů, PN počet uzlů ležících na hranici Γ_2 nebo uvnitř oblasti Ω , PB počet uzlů ležících na hranici Γ_1 a PS počet stran na hranici Γ_2 . Množinu těchto stran označujeme jako $TS_h = \{S\}$.

V uzlech triangulace zadáváme hodnoty koeficientů nebo pravých stran a současně v nich hledáme přibližné řešení.

3.2 Bázové funkce

Na základě triangulace T_h definujeme prostor S_h spojitých, po částech lineárních funkcí na T_h . Vzhledem k vlastnostem množiny T_h platí inkluze $S_h \subset V$. Tedy prostor S_h je konečně dimenzionálním podprostorem V .

V uzlech V_i triangulace T_h definujeme funkce $\{\varphi_i\}_{i=1}^{PU} \subset S_h$ předpisem

$$\varphi_i(V_j) = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (3.1)$$

Takto definované pyramidové funkce tvoří bázi prostoru S_h . Libovolnou funkci $v \in S_h$ můžeme zapsat předpisem

$$v(x) = \sum_{i=1}^{PU} v_i \varphi_i(x),$$

kde $v_i = v(V_i)$ jsou hodnoty funkce v v uzlu V_i .

3.3 Diskretizace úlohy

Diskretizace úlohy vychází z jejího varicačního předpisu (1.2), tj.

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

V předchozích kapitolách jsme nadefinovali triangulaci T_h oblasti Ω , prostor S_h nad touto triangulací a báze $\{\varphi_i\} \in S_h$.

Přibližné Galerkinovo řešení úlohy je funkce $u_h \in S_h$ splňující

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in S_h. \quad (3.2)$$

Hledanou funkci u_h je možné vyjádřit pomocí bází prostoru S_h jako

$$u_h = \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i \varphi_i,$$

kde neznámá představuje hodnotu přibližného řešení v příslušném uzlu V_i , tj. $\alpha_i = u_h(V_i)$.

Pomocí této lineární kombinace získáme úlohu ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, PU.$$

Tuto soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat také maticově jako

$$A\alpha = F,$$

kde $A = (a_{ij})$ se nazývá **matice tuhosti**, $F = (F_i)$ **vektor zatížení** a platí pro ně

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx,$$

$$F_i = L(\varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i dx.$$

Pro řešení vzniklé soustavy lineárních rovnic existuje celá řada numerických metod.

Poznámka 3.1. Je-li zadána úloha s Dirichletovou okrajovou podmínkou, sestavujeme báze pouze ve vnitřních uzlech triangulace. Uzly na hranici Γ ze soustavy vyloučíme a za řešení dosadíme předepsané hodnoty.

3.4 Stabilita řešení

Nechť $u \in V$ je řešením úlohy (1.2), tj.

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V$$

a $u_h \in S_h$ je řešením diskrétní úlohy (3.2), tj.

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in S_h.$$

Potom $e = u - u_h$ značí chybu přibližného řešení. Řekneme, že Galerkinova metoda konverguje, jestliže je splněno

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|e\|_V = 0,$$

kde $N = \dim(S_h)$.

Věta 3.1. *Céanovo lemma.*

Nechť $a(u, v)$ je omezená eliptická bilineární forma na V , tj. pro $u, v \in V$ platí

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Nechť $L(v)$ je omezená lineární forma na V , tj. $|L(v)| \leq C_3 \|v\|_V$ pro $v \in V$. Dále nechť u je řešením úlohy (1.2) a u_h je řešením úlohy (3.2).

Potom platí odhad

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_V.$$

Je-li navíc forma $a(u, v)$ symetrická, platí

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_V.$$

Důkaz: viz. [2], str. 218.

Budeme-li chtít dokázat konvergenci Galerkinovy metody, musí být splněny předpoklady Věty 3.1 a současně musí existovat posloupnost prostorů $\{S_h\}_{N=1}^{\infty}$ taková, že pro každé $u \in V$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_V = 0.$$

4 MKP pro parabolické rovnice I - Semidiskrétní metoda

V této kapitole se budeme věnovat řešení lineární parabolické úlohy v prostoru jedné a dvou dimenzí.

Zápis úlohy v obecném tvaru

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= f && \text{na } \Omega \times I \\u &= 0 && \text{na } \Gamma \times I \\u(\cdot, 0) &= u^0 && \text{na } \Omega\end{aligned}$$

V teorii MKP existují dvě metody zabývající se řešením parabolických úloh: semidiskrétní metoda a Rotheho metoda. V této kapitole se představíme první jmenovanou.

Semidiskrétní metoda bývá někdy také nazývána jako Faedo-Galerkinova metoda. Její princip spočívá v diskretizaci úlohy v prostoru Ω a tím k převedení úlohy na řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami.

Nejprve je nutné provést triangulaci oblasti Ω . Tedy musíme tuto oblast rozdělit na konečný počet prvků K podle kapitoly 3.1. Označme si PU počet uzlů.

Nad zvolenou triangulací potom uvažujeme prostor S_h spojitých a po částech lineárních funkcí. Tento prostor dále definujeme množinou bázevých funkcí $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{PU}$ popsaných v kapitole 3.2. Jedná se o spojitě, po částech lineární funkce splňující vlastnost (3.1).

4.1 Semidiskrétní schéma

Semidiskrétní schéma úlohy vychází z jejího variačního předpisu (2.2), tj.

$$\begin{aligned}(u_t(t), v) + a(u(t), v) &= L(v), && \forall v \in V, t \in I \\u(0) &= u^0 && \forall v \in V\end{aligned}$$

Prvním krokem k semidiskretizaci úlohy je aproximace řešení $u(x, t)$ funkcí $u_h(x, t)$ splňující následující vlastnost:

Funkce $u_h(x, t)$ je pro každé pevně zvolené $t \in I$ funkcí po částech lineární nad zvolenou triangulací T_h oblasti Ω , tj. $u_h(x, t) \in S_h$.

Tímto dostáváme **semidiskrétní předpis úlohy** ve tvaru

$$\begin{aligned} (u_{t,h}, v_h) + a(u_h, v_h) &= L(v_h), \\ (u_h(0), v_h) &= (u_h^0, v_h), \end{aligned} \quad \forall v_h \in S_h, \quad (4.1)$$

kde funkce $u_h^0 \in S_h$ je aproximací počáteční funkce u^0 . Jedná se o soustavu N rovnic.

Jelikož platí $u_h \in S_h$, můžeme funkci zapsat jako lineární kombinaci bázevých funkcí $\{\varphi_i\}$ prostoru S_h . Tedy

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i(t) \varphi_i(x),$$

kde $\alpha_i(t)$ je časově závislý koeficient představující hodnotu přibližného řešení v příslušném uzlu V_i , tj. $\alpha_i(t) = u_h(V_i, t)$.

Dosadíme-li toto vyjádření funkce u_h do úlohy (4.1) a současně funkce $v_h \in S_h$ nahradíme bázevými funkcemi φ_j , dostáváme soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i'(t) \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) + a \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i(t) \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) &= L(\varphi_j(x)), \quad j = 1, \dots, PU \\ \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i(0) \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) &= (u_h^0, \varphi_j(x)), \quad j = 1, \dots, PU. \end{aligned}$$

Jelikož pro skalární součin (\cdot, \cdot) i bilineární formu $a(\cdot, \cdot)$ platí linearita, je možné přepsat rovnice na tvar

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i'(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i(t) a(\varphi_i, \varphi_j) &= L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, PU, \quad t \in I \\ \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i(0) (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) &= (u_h^0, \varphi_j(x)), \quad j = 1, \dots, PU. \end{aligned}$$

Nyní jsme převedli parabolickou parciální diferenciální rovnici s okrajovými a počátečními podmínkami na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s po-

čátečními podmínkami. Tuto soustavu včetně počátečních podmínek můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{aligned} B\alpha'(t) + A\alpha(t) &= F(t), \quad t \in I \\ B\alpha(0) &= U^0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ a vektory $F = (F_i)$, $\alpha = (\alpha_i)$, $U^0 = (U_i^0)$ splňují

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx, \\ a_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx, \\ F_i(t) &= L(\varphi_i) = \int_{\Omega} f(t) \varphi_i dx, \\ U_i^0 &= (u^0, \varphi_i) = \int_{\Omega} u^0 \varphi_i dx. \end{aligned}$$

Dále se zaměříme na vlastnosti těchto matic.

Poznámka 4.1. Vlastnosti matic:

Matice hmotnosti B (mass matrix):

- Symetrická: neboť skalární součin (\cdot, \cdot) je symetrický
- Řídká: jestliže nejsou V_i a V_j uzly stejného prvku, potom $b_{ij} = 0$,
- Pozitivně definitní
- Pásová: pouze při správném očíslování prvků a uzlů triangulace

Matice tuhosti A (stiffness matrix):

- Symetrická: neboť bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická,
- Řídká: jestliže nejsou V_i a V_j uzly stejného prvku, potom $a_{ij} = 0$,
- Pozitivně definitní
- Pásová: pouze při správném očíslování prvků a uzlů triangulace

4.2 Řešení vzniklé soustavy ODR s počátečními podmínkami

Aproximací počátečně-okrajové parabolické úlohy jsme dostali soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou (4.2), tj.

$$\begin{aligned} B\alpha'(t) + A\alpha(t) &= F(t), & t \in I \\ B\alpha(0) &= U^0. \end{aligned}$$

Pro vyřešení této soustavy musíme zvolit některou z vhodných numerických metod. Numerická matematika v tomto ohledu nabízí širokou škálu výpočetních nástrojů.

Jednu velkou skupinu tvoří **jednokrokové metody**. Výpočet nové hodnoty se provádí pomocí dat z předchozího kroku. Jednou z jejich výhod je např. možnost měnit délku kroku. Druhou skupinu tvoří **mnohokrokové metody**, které při řešení pracují s hodnotami z několika předchozích kroků.

V této práci si rozebereme jednokrokovou θ -metodu.

4.2.1 θ -metoda

Máme dānu obyčejnou diferenciální rovnici 1. řādu s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Interval $x = [A, B]$ rozdělíme na díly $A = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = B$ s krokem τ . Dále si označíme aproximace $y^i = y(x_i)$ a položíme $y^0 = y_0$.

Obecný tvar metody

$$y^{i+1} = y^i + \tau \cdot f(t_i + \sigma_x \tau, y^i + \sigma_y (y^{i+1} - y^i)), \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Varianty metody

- *explicitní Eulerova metoda* pro $\theta_x = \theta_y = 0$
- *implicitní Eulerova metoda* pro $\theta_x = \theta_y = 1$

- *Crank-Nicholsonova metoda* pro $\theta_x = \theta_y = \frac{1}{2}$

O kvalitách numerických metod vypovídají jejich vlastnosti. V následujících definicích si popíšeme, co znamená konvergence a stabilita.

Definice 4.1. Metoda **konverguje**, jestliže pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} y^n = y(x_n).$$

Definice 4.2. Úloha je **stabilní**, jestliže malá počáteční změna vyvolá malou změnu řešení.

Nyní si rozebereme jednotlivé varianty této metody trochu podrobněji. Uvedeme si vlastnosti těchto metod a ukážeme jejich modifikovaný tvar pro zadanou počáteční úlohu.

Explicitní Eulerova metoda

Explicitní Eulerova metoda je nejjednodušší jednokroková metoda pro řešení počáteční úlohy diferenciálních rovnic 1.řádu. Metodu je snadné odvodit z Taylorova rozvoje hledané funkce y .

Odvození:

Taylorův rozvoj se středem v bodě x je tvaru

$$y(x + \tau) = y(x) + \tau y'(x) + \frac{1}{2} \tau^2 y''(x) + \dots$$

Ze zadané rovnice (4.3) dostáváme

$$y(x + \tau) = y(x) + \tau f(x, y) + O(\tau^2).$$

Předpis metody:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(x_n, y_n).$$

Definice 4.3. Lokální chyba explicitní Eulerovy metody je dána výrazem

$$L(y; \tau) = y(x + \tau) - y(x) - \tau f(x, y(x)).$$

Přesnost je určována velikostí lokální chyby, která je v tomto případě řádu $O(\tau^2)$. Hromaděním lokálních chyb vzniká globální chyba $e_n = y(x_n) - y_n$. Můžeme dokázat, že je řádu $O(\tau)$.

Metoda je **podmíněně stabilní**.

Modifikace explicitní Eulerovy metody pro soustavu (4.2):

$$B\alpha_{i+1} = (B - \tau A)\alpha_i + \tau F(t_i)$$

Shrnutí:

- *Výhody:* snadný výpočet - řešení lineárních rovnic
- *Nevýhody:* pouze podmíněně stabilní, lineární rychlost konvergence

Implicitní Eulerova metoda

Nyní se podíváme na implicitní variantu Eulerovy metody. Opět jednoduše odvodíme z Taylorova rozvoje funkce y .

Odvození:

Taylorův rozvoj se středem v bodě $x + \tau$ je tvaru

$$y(x) = y(x + \tau) - \tau y'(x + \tau) + \frac{1}{2}\tau^2 y''(x + \tau) + \dots$$

Ze zadané rovnice (4.3) dostáváme

$$y(x + \tau) = y(x) + \tau f(x + \tau, y(x + \tau)) + O(\tau^2).$$

Předpis metody

$$y_{n+1} = y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Stejně jako pro explicitní variantu metody je lokální chyba kvadratického řádu, tj. $L(y; \tau) = O(\tau^2)$. Globální chyba je opět lineárního řádu.

Metoda je **absolutně stabilní**.

Modifikace implicitní Eulerovy metody pro soustavu (4.2):

$$(B + \tau A)\alpha_{i+1} = B\alpha_i + \tau F(t_{i+1}).$$

Shrnutí:

- *Výhody:* absolutně stabilní
- *Nevýhody:* lineární konvergence, náročná - řešení nelineárních rovnic

Crank-Nicholsonova metoda

Předpis metody:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f \left(x_n + \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i) \right).$$

Lokální i globální chyba jsou kvadratického řádu.

Metoda je **absolutně stabilní**.

Modifikace Crank-Nicholsonovy metody pro soustavu (4.2):

$$\left(B + \frac{\tau}{2}A \right) \alpha_{i+1} = \left(B - \frac{\tau}{2}A \right) \alpha_i + \tau F \left(t_i + \frac{\tau}{2} \right).$$

Shrnutí:

- *Výhody:* absolutně stabilní, kvadratická rychlost konvergence (nejlepší konvergence z definovaných θ -metod, tj. nejpřesnější výsledky)
- *Nevýhody:* náročná - řešení nelineárních rovnic

Poznámka 4.2. Funkci F v čase $t_i + \frac{\tau}{2}$ můžeme aproximovat výrazem

$$F\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) \approx \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{2}.$$

Srovnání metod

Implicitní Eulerova a Crank-Nicholsonova metoda jsou obě absolutně stabilní, přičemž nejpřesnější výsledky získáme druhou zmíněnou. Obě metody jsou však náročnější na výpočet, jelikož je nutné v každém kroku řešit soustavy nelineárních rovnic.

Oproti nim je explicitní Eulerova metoda jednodušší, neboť řešíme pouze soustavy lineárních rovnic. Nemusíme se však dopočítat výsledku, neboť metoda je pouze podmíněně stabilní.

Problém stability u explicitních metod není ničím vyjímáním. Je možné jej odstranit např. vloženými algoritmy pro kontrolu kroku na základě zvolených tolerancí.

4.3 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru jedné dimenze

V této kapitole si ukážeme výpočet pomocí MKP pro parabolické rovnice v prostoru 1D.

Nechť $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}^+)$, $u^0 \in C([a, b])$, $p, q \in \mathbb{R}$. Okrajovo-počáteční parabolická rovnice v 1D má následující tvar

$$\begin{aligned} u_t - pu_{xx} + qu &= f(x, t), & a < x < b \text{ a } t > 0, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Variační formulace pro tuto úlohu zní:

Najít $u \in H_0^1$ splňující

$$\begin{aligned} (u_t, v) + a(u, v) &= L(v) & \forall v \in H_0^1, t > 0, \\ (u, v) &= (u^0, v) & \forall v \in H_0^1, t = 0, \end{aligned}$$

kde

$$(u_t, v) = \int_a^b u_t v \, dx,$$

$$a(u, v) = \int_a^b (pu_x v_x + quv) \, dx,$$

$$L(v) = \int_a^b f v \, dx.$$

Triangulace v 1D

Nejprve provedeme triangulaci zvolené oblasti, tj. vytvoříme síť. V našem případě máme za oblast zvolen interval $[a, b]$. Ten rozdělíme na konečný počet podintervalů $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, PU$. V takto vytvořené triangulaci máme celkem $PP = PU - 1$ prvků (podintervalů) a $PN = PU - 2$ vnitřních uzlů.

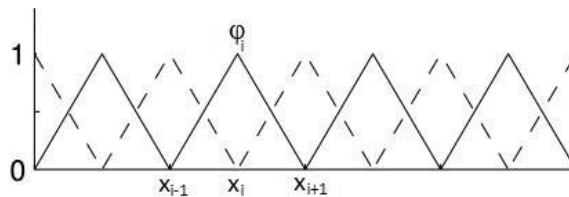
Namísto prostoru $H_0^1([a, b])$ tedy budeme hledat řešení na jeho konečně dimenzionálním podprostoru S_h . Ten se skládá ze spojistých, po částech lineárních funkcí na zvolené triangulaci.

Bázové funkce v 1D

Bázové funkce v 1D jsou definované následujícím předpisem

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & \text{jestliže } x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & \text{jestliže } x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Jak vidíme na obrázku 1, jedná se o po částech lineární funkce s malým nosičem. Někdy bývají tyto funkce označovány jako střešové nebo stanové.



Obrázek 1: Bázové funkce v 1D.

Diskretizace úlohy v 1D

Jelikož máme pro úlohu předepsány Dirichletovy okrajové podmínky, budeme sestavovat bázové funkce $\{\varphi_i\}$ prostoru S_h pouze ve vnitřních uzlech triangulace. Za řešení v hraničních uzlech dosadíme předepsané hodnoty, tedy

$$u_h(x_0, t) = 0, \quad u_h(x_{PU}, t) = 0.$$

Nyní provedeme diskretizaci úlohy ve vnitřních uzlech x_i , $i=1, \dots, PN$. Řešení úlohy u_h můžeme pomocí báзовých funkcí prostoru S_h zapsat jako

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{PN} \alpha_i(t) \varphi_i(x).$$

Po aproximaci řešení dostáváme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{PN} \alpha_i'(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{PN} \alpha_i(t) a(\varphi_i, \varphi_j) &= L(\varphi_j), & j = 1, \dots, PN \\ \sum_{i=1}^{PN} \alpha_i(0) (\varphi_i, \varphi_j) &= (u_h^0, \varphi_j), & j = 1, \dots, PN. \end{aligned}$$

Úlohu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{aligned} B\alpha' + A\alpha &= F, \\ B\alpha(0) &= U_0, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \\ a_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b (p\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q\varphi_i(x)\varphi_j(x)) dx \\ f_j(t) &= L(\varphi_j) = \int_a^b f(x, t)\varphi_j(x) dx. \\ u_j^0 &= (u_h^0, \varphi_j) = \int_a^b u^0(x)\varphi_j(x) dx \end{aligned}$$

Poznámka 4.3. Užitím metod numerické integrace a využitím vlastností báзовých funkcí vypočítáme matice a vektory hledané soustavy:

$$\begin{aligned} B &= \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{p}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{qh}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\ F(t) &= \frac{h}{6} \begin{pmatrix} f_0 + 4f_1 + f_2 \\ f_1 + 4f_2 + f_3 \\ \vdots \\ f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N \end{pmatrix}, \quad U_0 = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} u_1^0 + 4u_2^0 + u_3^0 \\ u_2^0 + 4u_3^0 + u_4^0 \\ \vdots \\ u_{N-3}^0 + 4u_{N-2}^0 + u_{N-1}^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $f_i = f(x_i, t)$ a $u_i^0 = u^0(x_i)$.

Řešení soustav ODR

Soustavy budeme řešit metodami popsány v kapitole 4.2. Výsledky zaznamenáme dvěma způsoby:

- Graf: Vykreslíme graf hledané funkce u_h . Abychom ukázali vývoj řešení, vykreslíme graf ve více časových krocích.
- Video: Grafy funkce u_h v jednotlivých časových krocích spojíme do animace, čímž dostaneme nejlepší ukázkou vývoje řešení úlohy.

Zatímco graf je možné vysázet v textu této práce, případná videa k příkladům budou na příloženém CD.

Příklady

Nyní si ukážeme řešení konkrétních příkladů parabolických úloh v 1D. Příklady byly řešeny v programu MATLAB a příslušné M-fily jsou uloženy na příloženém CD.

Téměř nikdy neznáme přesné řešení, takže nemáme možnost ověřit správnost výsledků. Můžeme ale úlohu spočítat na různých triangulacích nebo použít různé výpočtové metody. Porovnáním získaných hodnoty ukážeme jejich správnost.

Příklad 4.1. V této úloze budeme řešit rovnici vedení tepla s nenulovou pravou stranou a nulovými podmínkami na intervalu $[0, 2]$ v čase $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x^2 & (x, t) &\in (0, 2) \times (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t &\in (0, 1) \\ u(x, 0) &= 0 & x &\in (0, 2) \end{aligned}$$

Triangulace

Nejprve provedeneme triangulaci, tj. rozdělení intervalu $[0, 2]$ pomocí uzlů $\{x_i; i = 0, \dots, 4\}$ na 4 podintervaly o délce $h = 0.5$.

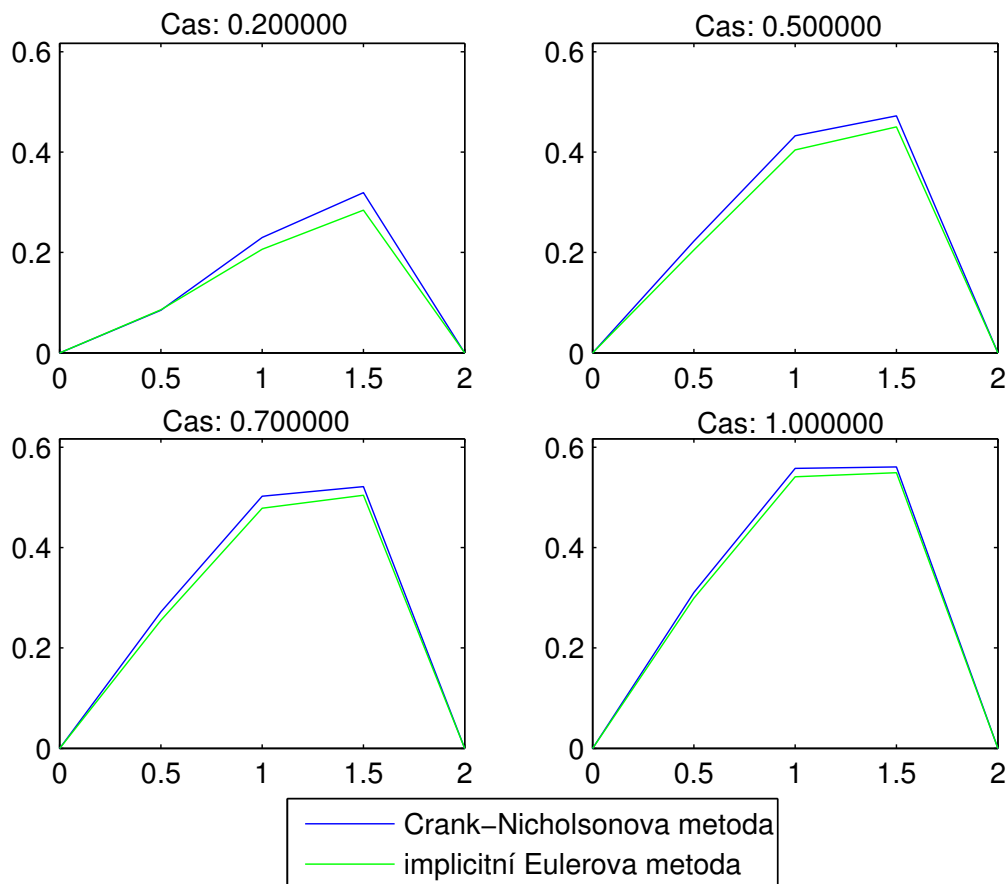
Řešení

Z řešení vyloučíme hraniční uzly $x_0 = 0$ a $x_4 = 2$, v nichž je hodnota předem určena zadanou okrajovou podmínkou. Pro zbylé 3 vnitřní uzly sestavíme dle předpisu v Poznámce 4.3 matice A , B a vektory F , U^0 pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Tu potom můžeme vyřešit metodami popsány v kapitole 4.2 s krokem $\tau = 0.01$.

Úloha je řešena v příloženém M-filu s názvem `Semi1D_Pr1.m`.

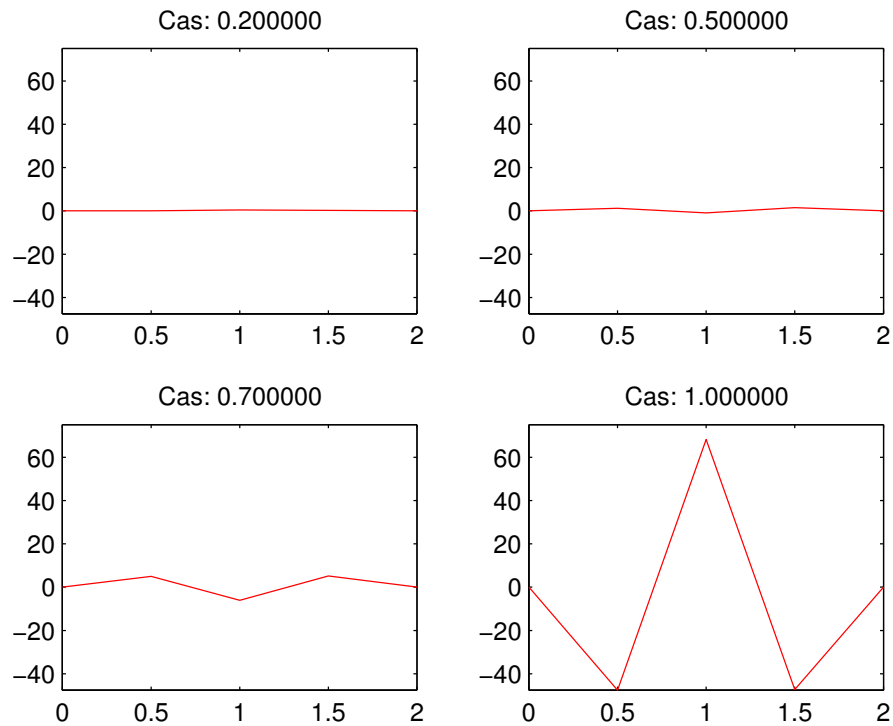
Výsledky

Na obrázku 2 vidíme ve vybraných časových krocích řešení úlohy vypočítané implicitní Eulerovou a Crank-Nicholsonovou metodou. Obě metody jsou absolutně stabilní a jejich řešení jsou si velmi podobná.



Obrázek 2: Crank-Nicholsonova a implicitní Eulerova metoda.

Na obrázku 3 vidíme, že řešení explicitní Eulerovou metodou zcela zřejmě není správné. Metoda je pouze podmíněně stabilní a v tomto případě se zvolený krok $\tau = 0.1$ ukázal jako nedostatečný. Jako vhodně zvolený se ukazuje již poloviční krok $\tau = 0.05$.



Obrázek 3: Explicitní Eulerova metoda.

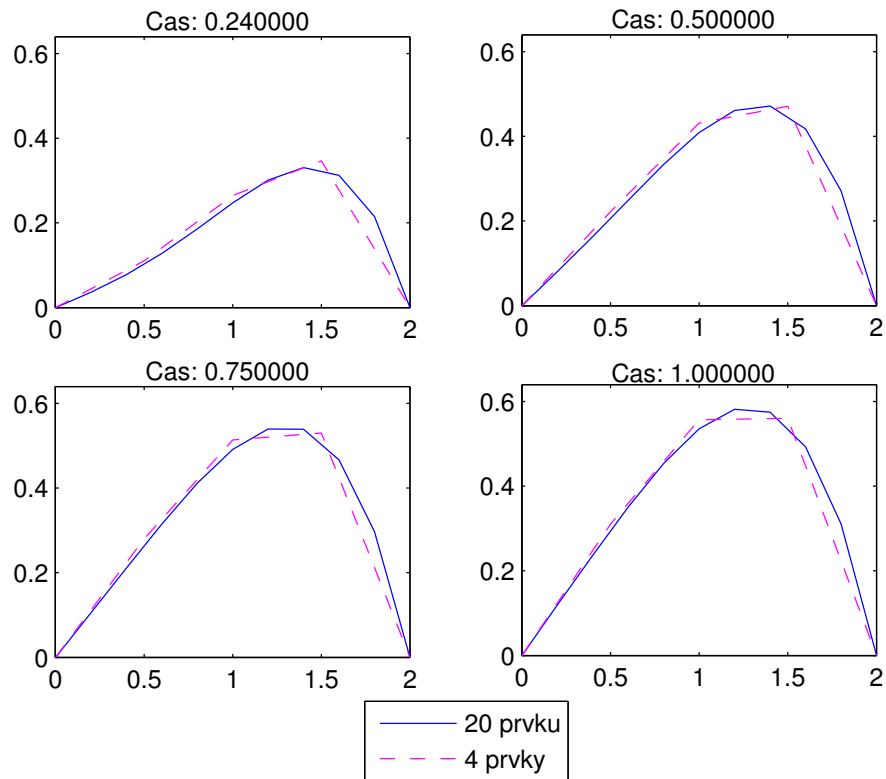
Řešení úlohy na různých triangulacích

Nyní si ukážeme řešení úlohy na dvou různých triangulacích. Počítáme úlohu se 4 prvkovou a 20-ti prvkovou triangulací. Interval $[0, 2]$ dělíme postupně s krokem $h = 0.5$ a $h = 0.1$. Při řešení použijeme Crank-Nicholsonovu metodu s krokem $\tau = 0.01$. Srovnáním triangulací se věnuje M-file `Semi1D_Pr1_2.m`.

Výsledky

Na obrázku 4 vidíme srovnání výsledků zadané úlohy řešené Crank-Nicholsonovou metodou pro obě zvolené triangulace. Řešení s větším počtem kroků je přesnější.

Průběh řešení pro obě triangulace je zaznamenán na videu `Semi1D_Pr1_CN.avi`.



Obrázek 4: Řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou pro triangulace se 4 a 20 prvky.



Příklad 4.2. Řešíme úlohu s nenulovou časově závislou pravou stranou a nenulovou počáteční podmínkou. Při zadání úlohy je nutné, aby si počáteční a okrajové podmínky odpovídaly. Na levé straně rovnice navíc přibyl nový lineární člen hledané funkce u .

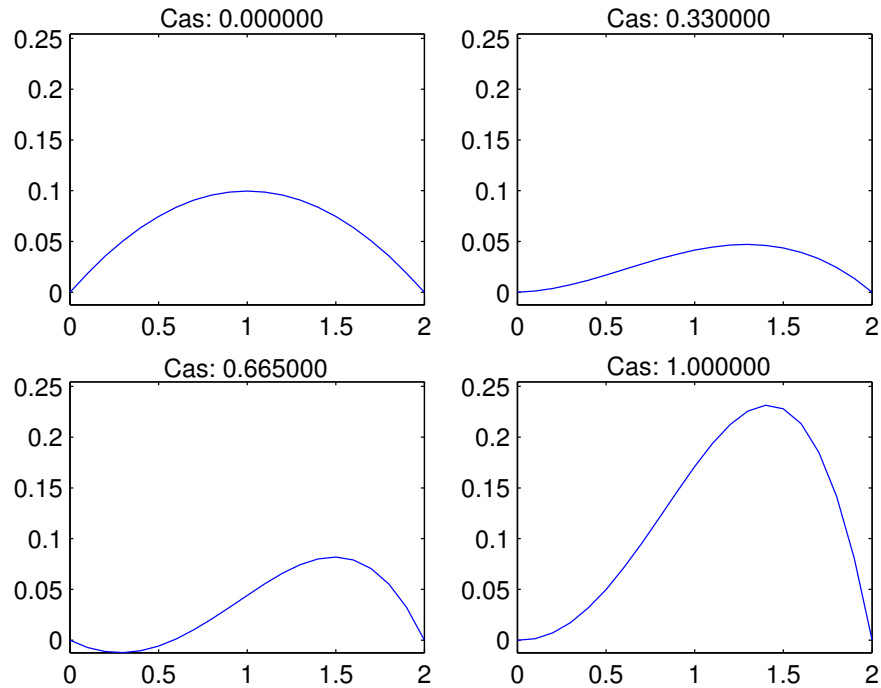
$$\begin{aligned}
 u_t - 2u_{xx} - 3u &= t^2 x^2 - \sin(t) \cos(x) & (x, t) &\in (0, 2) \times (0, 1) \\
 u(0, t) = u(2, t) &= 0 & t &\in (0, 1) \\
 u(x, 0) &= x(2 - x) & x &\in (0, 2)
 \end{aligned}$$

Řešení

Pracujeme s 20-ti prvkovou triangulací, tj. $h = 0.1$. Vzniklou soustavu budeme nyní řešit Crank-Nicholsonovou metodou s krokem $\tau = 0.005$. Úloha je řešena v příloženém M-filu `Semi1D_Pr2.m`.

Výsledky

Na obrázku 5 vidíme řešení úlohy ve vybraných časových krocích. Náhled na průběh celého řešení v čase je možný ve videu `Semi1D_Pr2_CN.avi`.



Obrázek 5: Řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou.

Stejně jako v předchozím příkladě je možné úlohu vyřešit také explicitní či implicitní Eulerovou metodou na různých triangulacích.



4.4 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru dvou dimenzí

V této kapitole si ukážeme MKP pro parabolické rovnice v prostoru 2D.

Nechť je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a platí $c, p, q, f \in C(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, $u^0 \in C(\Omega)$ a $h_1, h_2 \in C(\Gamma_2 \times \mathbb{R}^+)$. Potom okrajovo-počáteční parabolickou rovnici definujeme

v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}
cu_t - p \Delta u + qu &= f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \text{ a } t > 0, \\
u(x, y, 0) &= u^0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\
u(x, y, t) &= 0, & t > 0, (x, y) \in \Gamma_1, \\
-p \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} &= h_1 u - h_2, & t > 0, (x, y) \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Variační formulace pro tuto úlohu zní:

Najít $u(t) \in H_0^1$ splňující

$$\begin{aligned}
(u_t, v) + a(u, v) &= L(v), & \forall v \in H_0^1, t > 0 \\
(u, v) &= (u^0, v), & \forall x \in H_0^1, t = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

kde

$$\begin{aligned}
(u_t, v) &= \int_{\Omega} u_t v \, dx dy, \\
a(u, v) &= \int_{\Omega} (p \nabla u \nabla v + quv) \, dx dy + \int_{\Gamma_2} h_1 uv \, ds, \\
L(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx dy + \int_{\Gamma_2} h_2 v \, ds.
\end{aligned}$$

Triangulace ve 2D

Nejprve provedeme triangulaci zvolené oblasti Ω , tj. vytvoříme síť. Tuto oblast rozdělíme na konečný počet podoblastí K , které splňují podmínky triangulace popsané v kapitole 3.1. Ve dvourozměrných prostorech se nejčastěji používají trojúhelníkové prvky, ale je možné zvolit libovolné oblasti. My budeme pracovat s trojúhelníkovými prvky.

Označíme si PP počet prvků (trojúhelníků), PU počet uzlů, PN počet uzlů ležících na hranici Γ_2 nebo uvnitř oblasti Ω , PB počet uzlů ležících na hranici Γ_1 a PS počet stran na hranici Γ_2 . Označme si T_h množinu prvků K a TS_h množinu stran S hranice Γ_2 .

Dále si označíme prvky a uzly triangulace. Pro lepší práci při výpočtech očíslovujeme uzly na hranici Γ_1 čísly $PN + 1, \dots, PP$. Prvky značíme $\{K_i\}_{i=1}^{PP}$ a uzly $\{V_i\}_{i=1}^{PU}$. Prvek můžeme zapsat pomocí trojčíslic označujících vrcholy prvku.

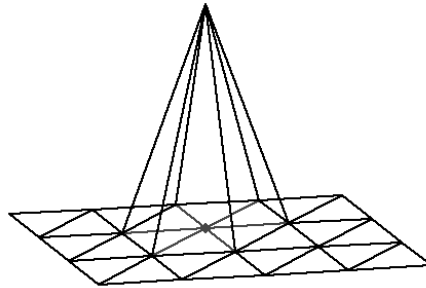
Namísto prostoru $H_0^1(\Omega)$ budeme hledat řešení na jeho konečně dimenzionálním podprostoru S_h . Ten se skládá ze spojitých, po částech lineárních funkcí na zvolené triangulaci.

Bázové funkce ve 2D

Bázové funkce $\{\varphi_i\}_{i=1}^{PU}$ prostoru S_h jsou po částech lineární funkce definovány v uzlech V_i , $i = 1, \dots, PU$ splňující

$$\varphi_i(V_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Tyto báze nazýváme **globální**, neboť jsou takto definované na celé triangulaci T_h . Příklad triangulace a globální báze ve 2D vidíme na obrázku 6. S nimi jsme si vystačili při řešení problematiky parabolické úlohy v 1D, ale nyní je při řešení nevyužijeme.



Obrázek 6: Globální bázové funkce v 2D.

Jelikož předpokládáme trojúhelníkové prvky, je zřejmé, že na každém prvku K existují právě 3 báze mající zde svůj nosič. Označme si $N^K = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ restrikce těchto bází nad zvoleným prvkem. Dle definice prostoru S_h víme, že tyto báze jsou tvaru $\omega_j(x, y) = a_j + b_jx + c_jy$, $j = 1, \dots, 3$ a splňují

$$\omega_j(V_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

kde V_i , $i = 1, 2, 3$ jsou vrcholy prvku K . Takto vyjádřené báze na konkrétním prvku nazýváme **lokální**.

Při řešení budeme hledat tzv. elementární matice a vektory pro jednotlivé prvky za pomoci lokálních bází. Z nich potom sestavíme globální matice pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.

Diskretizace úlohy ve 2D

Diskrétní formulace úlohy je tvaru:

Najít $u_h \in S_h$ splňující

$$(u_{t,h}, v_h) + a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in S_h,$$

kde

$$(u_{t,h}, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K c u_{t,h} v_h \, dx dy,$$

$$a(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (p \nabla u_h \nabla v_h + q u_h v_h) \, dx dy + \sum_{S \in TS_h} \int_S (h_1 u_h v_h) \, ds,$$

$$L(v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K f v_h \, dx dy + \sum_{S \in TS_h} \int_S h_2 v_h \, ds.$$

Diskretizaci úlohy rozdělíme na diskretizace na prvcích a diskretizace na stranách, kde musí být splněna předepsaná okrajová podmínka.

Diskretizace na prvcích

Řešení úlohy u_h na prvku K zapíšeme pomocí lokálních bázevých funkcí ve tvaru

$$u_h^K(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K(t) \omega_i(x, y) = N^K \alpha^K.$$

Pomocí takto vyjádřené funkce budeme hledat vyjádření matic a vektorů na prvcích dle následujících předpisů:

$$B^K(t) = (N^K, N^K) = \int_K (N^K)^T c(t) N^K \, dx dy$$

$$A^K(t) = a(N^K, N^K) = \int_K \left((\nabla N^K)^T p(t) \nabla N^K + (N^K)^T q(t) N^K \right) \, dx dy$$

$$F^K(t) = L(N^K) = \int_K \left((N^K)^T f(t) \right) \, dx dy$$

Při řešení těchto integrálů budeme využívat některé numerické formule, např.

$$\int_K g \, dx dy = S(K)g(x_T, y_T),$$

nebo

$$\int_K g \, dx dy = \frac{1}{3}S(K)(g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2) + g(x_3, y_3)),$$

kde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) jsou souřadnice vrcholů trojúhelníka K , (x_T, y_T) jsou souřadnice těžiště tohoto trojúhelníku a $S(K)$ je obsah trojúhelníka K .

Aplikací těchto integrálních formulí na integrály pro elementární matice a vektory dostáváme

$$B^K(t) = \frac{v^K}{6} \begin{pmatrix} c(x_1, y_1, t) & 0 & 0 \\ 0 & c(x_2, y_2, t) & 0 \\ 0 & 0 & c(x_3, y_3, t) \end{pmatrix},$$

$$A_1^K(t) = \frac{p(x_T, y_T, t)}{2v^K} \begin{pmatrix} -r_1^K - r_2^K & r_1^K & r_2^K \\ r_1^K & -r_1^K - r_3^K & r_3^K \\ r_2^K & r_3^K & -r_2^K - r_3^K \end{pmatrix},$$

$$A_2^K(t) = \frac{v^K}{6} \begin{pmatrix} q(x_1, y_1, t) & 0 & 0 \\ 0 & q(x_2, y_2, t) & 0 \\ 0 & 0 & q(x_3, y_3, t) \end{pmatrix},$$

$$F^K(t) = \frac{v^K}{6} f(x_T, y_T, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $A^K = A_1^K + A_2^K$,

$$v^K = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2),$$

$$r_1^K = (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1),$$

$$r_2^K = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1),$$

$$r_3^K = (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_1).$$

Diskretizace na stranách

Řešení úlohy u_h musí na stranách S splňovat předepsanou Neumannovu okrajovou podmínku.

Pro strany triangulace platí, že existují právě 2 báze, které jsou zde nenulové. Restrikce těchto bází na dané straně S označíme jako $N^S = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Na základě zvolené báze zapíšeme hledanou funkci u_h na straně jako

$$u_h^S(t, x, y) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i^S \omega_i(x, y) = N^S \alpha^S.$$

Pomocí tohoto zápisu budeme hledat matice a vektory na stranách podle předpisu

$$A^S(t) = a(N^S, N^S) = \int_S \left((N^S)^T \alpha(t) N^S \right) dx dy,$$

$$F^S(t) = L(N^S) = \int_S \left((N^S)^T h_2(t) \right) dx dy.$$

Při výpočtu integrálů využijeme opět integrálních formulí, např. lichoběžníkovou formuli

$$\int_S g dx dy = \frac{d}{2} (g(x_1^s, y_1^s) + g(x_2^s, y_2^s)) dx dy,$$

kde $(x_1^s, y_1^s), (x_2^s, y_2^s)$ jsou krajní body strany S a $d = \sqrt{(x_2^s - x_1^s)^2 + (y_2^s - y_1^s)^2}$ je délka strany.

Aplikací této formule dostáváme matici a vektor pro strany ve tvaru

$$A^S(t) = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} h_1(x_1^s, y_1^s, t) & 0 \\ 0 & h_1(x_2^s, y_2^s, t) \end{pmatrix}, \quad F^S(t) = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} h_2(x_1^s, y_1^s, t) \\ h_2(x_2^s, y_2^s, t) \end{pmatrix}$$

Sestavení globálních matic a vektoru

Pomocí nalezených matic pro prvky a strany můžeme zapsat úlohu ve tvaru

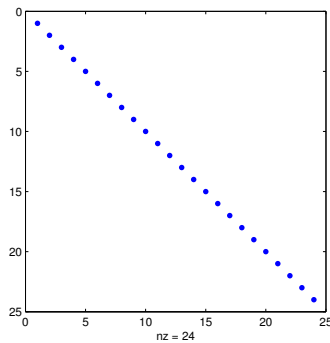
$$\sum_{K \in T_h} B^K \alpha'^K + \sum_{K \in T_h} A^K \alpha^K + \sum_{S \in TS_h} K^S \alpha^S = \sum_{K \in T_h} F^K + \sum_{S \in TS_h} F^S.$$

Při sestavování budeme postupovat dle tzv. eliminačního algoritmu. Rovnice příslušné uzlům na hranici Γ_1 nesestavujeme a za řešení dosadíme hodnoty pře-
depsané podmínkou.

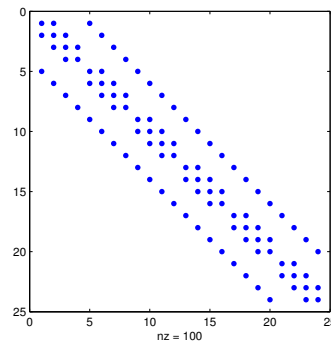
Na základě tohoto vyjádření můžeme sestavit globální matice B , A a vektor F ,
pro něž platí

$$\begin{aligned} B\alpha' + A\alpha &= F \\ B\alpha(0) &= U_0. \end{aligned}$$

Užitím popsaného postupu jsme získali řídké pásové matice, jejichž zaplnění
vidíme na obrázku 7. Matice B je v tomto případě dokonce diagonální. Zobrazené
matice jsou převzaty z příkladu 4.3.



(a) Matice hmotnosti B .



(b) Matice tuhosti A .

Obrázek 7: Schéma globálních matic soustavy

Soustavu budeme řešit některou z metod popsaných v kapitole 4.2.

Příklady

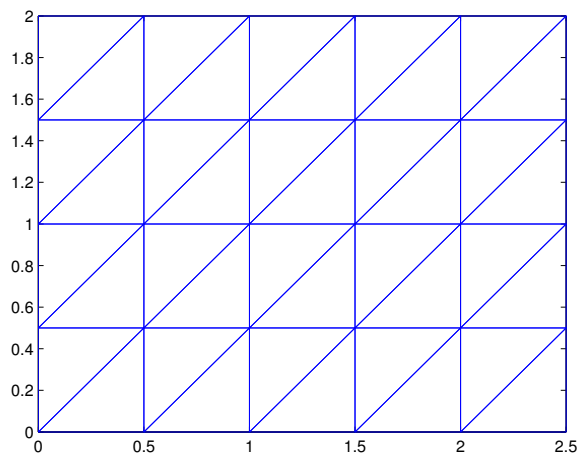
Příklad 4.3. V tomto příkladě si ukážeme řešení parabolické úlohy tvaru

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u &= x + y & (x, y) \in (0, 2.5) \times (0, 2), \quad t \in (0, 1) \\ u(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in (0, 2.5) \times (0, 2), \\ u(x, y, t) &= 0 & y = 0, \quad x \in [0, 2.5] \\ -\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} &= -1 & x = 0, \quad x = 2.5, \quad y = 2. \end{aligned}$$

Máme zadánu parabolickou úlohu na obdélníku s nulovou počáteční podmínkou a smíšenou okrajovou podmínkou.

Triangulace

Nejprve vytvoříme síť pro zadanou oblast dle obrázku 8. Osu x i osu y jsme rozdělili s krokem $h_x = h_y = 0.5$, čímž jsme dostali 40 prvků. Těmi jsou rovnoramenné trojúhelníky.



Obrázek 8: Triangulace zadané oblasti.

Řešení

Dle postupu v kapitole Diskretizace úlohy ve 2D na straně 36 sestavíme matice a vektory pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Vzniklou soustavu budeme řešit θ -metodami (tj. implicitní Eulerovou, explicitní Eulerovou a Crank-Nicholsonovou metodou) s krokem $\tau = 0.1$.

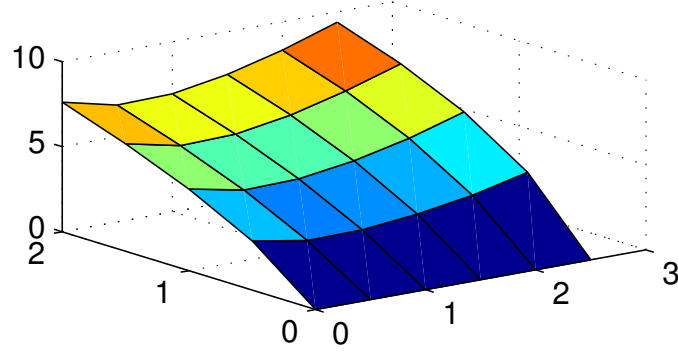
Úloha je řešena v příloženém M-filu `Semi2D_Pr1.m`.

Výsledky

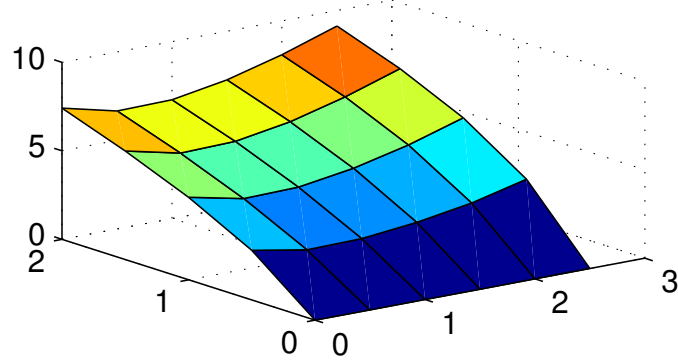
Na obrázku 9 jsou zakreslena v grafech řešení jednotlivých metod v konečném čase 1s.

Z obrázku vidíme, že výsledky úlohy získané implicitní Eulerovou metodou a Crank-Nicholsonovou metodou jsou velmi podobné. Lepší náhled získáme zhlédnutím celého průběhu řešení úlohy na videích `Semi2D_Pr1_iEM.avi` (implicitní Eulerova) a `Semi2D_Pr1_CN.avi` (Crank-Nicholsonova).

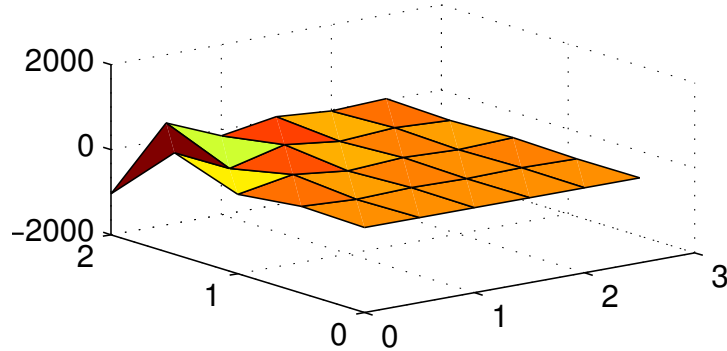
Crank–Nicholsonova metoda – Cas: $t=1.000000$



Implicitní Eulerova metoda – Cas: $t=1.000000$



Explicitní Eulerova metoda – Cas: $t=1.000000$



Obrázek 9: Řešení úlohy v čase 1s.

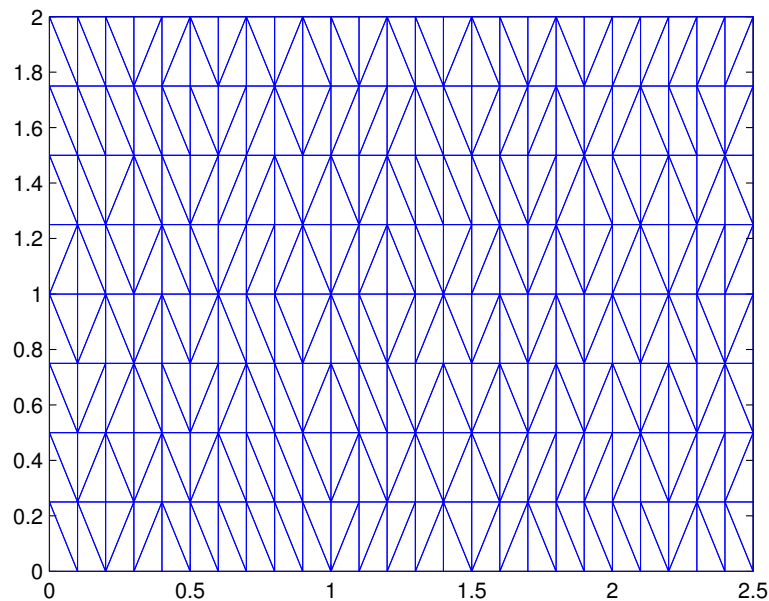
Zvolený krok nebyl dostatečný pro explicitní Eulerovu metodu, což je patrné z obrázku 9 i ze záznamu řešení na videu `Semi2D_Pr1_eEM.avi`. Správné řešení získáme například volbou kroku $\tau = 0.01$. Můžeme se o tom přesvědčit na videu `Semi2D_Pr1_eEM2.avi`. ♣

Příklad 4.4. Ukážeme si řešení parabolické úlohy tvaru

$$\begin{aligned}
 u_t - \Delta u + u &= x + y & (x, y) \in (0, 2.5) \times (0, 2), \quad t \in (0, 1) \\
 u(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in (0, 2.5) \times (0, 2), \\
 u(x, y, t) &= 0 & y = 0, \quad x \in [0, 2.5] \\
 -\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} &= -1 & x = 0, \quad x = 2.5, \quad y = 2.
 \end{aligned}$$

Řešení

Vidíme, že se jedná o stejné zadání jako v předchozím příkladu, ale použijeme jemnější síť dle obrázku 10. Osu x rozdělíme s krokem $h_x = 0.1$ a osu y s krokem $h_y = 0.25$. Tímto dostaneme triangulaci o 400 prvcích.



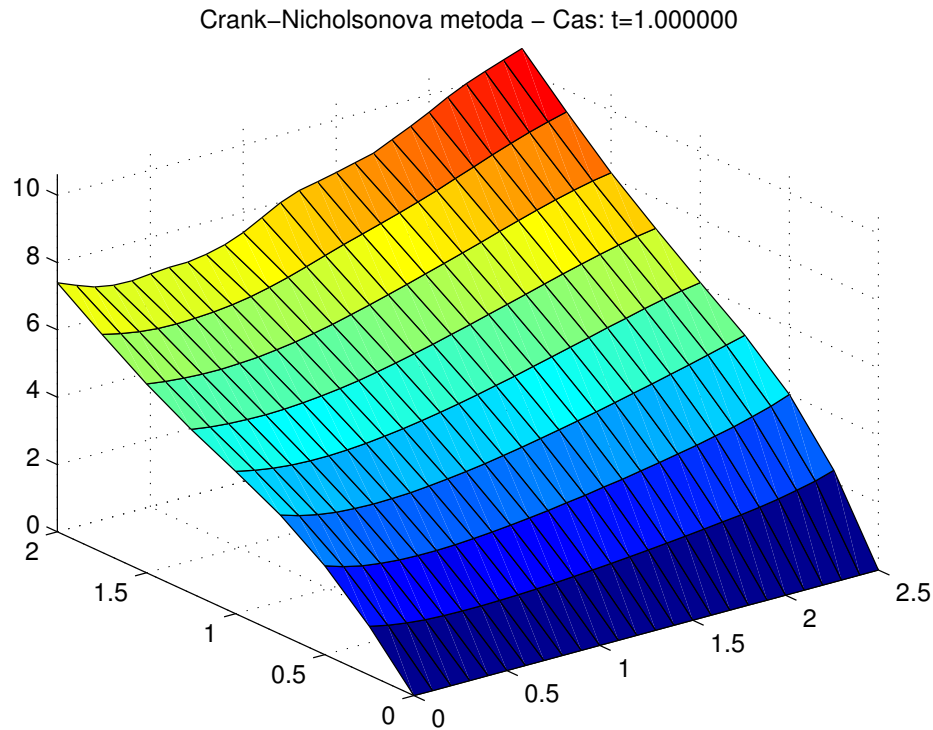
Obrázek 10: Jemnější triangulace zadané oblasti.

Na rozdíl od předchozího příkladu, kdy jsme triangulaci vytvořili ručně, byla nyní použita matlabovská funkce `DelaunayTri`, proto je síť nepravidelná.

Při řešení použijeme Crank-Nicholsonovu metodu s krokem délky $\tau = 0.005$. Úloha je řešena v příloženém M-filu `Semi2D_Pr2.m`.

Výsledky

Na obrázku 11 vidíme řešení úlohy v konečném čase 1s. Lépe uvidíme průběh zadané úlohy na příloženém videu s názvem `Semi2D_Pr2_CN.avi`. Na videu `Semi2D_Pr2_CN2.avi` potom vidíme řešení včetně prvků triangulace. ♣



Obrázek 11: Řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou v čase 1s.

5 MKP pro parabolické rovnice II - Rotheho metoda

Druhá metoda, kterou se budu ve své práci zabývat, se jmenuje Rotheho metoda, někdy nazývaná také jako metoda časové diskretizace. Stejně jako v předchozí kapitole se budeme věnovat řešení lineární parabolické úlohy v jedné a dvou prostorových dimenzích.

Zápis úlohy v obecném tvaru

$$\begin{aligned} \dot{u} - \Delta u &= f && \text{na } \Omega \times I \\ u &= 0 && \text{na } \Gamma \times I \\ u(\cdot, 0) &= u^0 && \text{na } \Omega. \end{aligned}$$

Při řešení budeme vycházet ze semidiskrétního přepisu úlohy (4.1). Tedy nejprve je nutné zvolit triangulaci $T_h = \{K\}$ oblasti Ω podle kapitoly 3.1. Označme si PU počet uzlů. Dále nad zvolenou triangulací uvažujeme prostor S_h spojitých a po částech lineárních funkcí s bázovými funkcemi $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{PU}$, které byly popsány v kapitole 3.2. Semidiskrétní schéma úlohy zní

Najít $u_h \in S_h$ splňující

$$\begin{aligned} (u_{t,h}, v_h) + a(u_h, v_h) &= L(v_h), \\ (u_h(0), v_h) &= (u_h^0, v_h), \quad \forall v_h \in S_h. \end{aligned}$$

Nyní zvolme dělení časového intervalu $[0, T]$. Tedy najdeme posloupnost bodů $\{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, M\}$ s krokem $\tau = \frac{T}{M}$. Poté si označíme restrikce funkce u_h v daných časových bodech t^n jako $u_h^n(x) = u_h(x, t^n)$, $x \in \Omega$. Podobně označíme $f^n = f(\cdot, t^n)$ a $L^n(v_h) = (f^n, v_h)$. Tím dostaneme soustavu rovnic ve tvaru

$$(u_{t,h}^n, v_h) + a(u_h^n, v_h) = L^n(v_h) \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 1, \dots, M. \quad (5.1)$$

Hodnotu funkce u_h^0 známe, neboť je dána počáteční podmínkou, tj. $u_h^0 = u_h(0)$.

Prostorové derivace neměníme, ale je potřeba odstranit v úloze časovou derivaci. Tu můžeme nahradit pomocí různých diferencních podílů. V následujících kapitolách si ukážeme použití některých numerických metod při časové diskretizaci úlohy.

5.1 Explicitní Eulerova metoda

Nejprve se podíváme na nahrazení časové derivace pomocí explicitní Eulerovy metody

$$u_{t,h}^n \approx \frac{u_h(t_{n+1}) - u_h(t_n)}{\tau} = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau}.$$

Nahradíme-li tímto výrazem derivaci v soustavě (5.1), dostaneme rovnice ve tvaru

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau}, v_h \right) + a(u_h^n, v_h) = L^n(v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (5.2)$$

Ty můžeme dále upravit

$$\frac{1}{\tau} (u_h^{n+1}, v_h) + a(u_h^n, v_h) = \frac{1}{\tau} (u_h^n, v_h) + L^n(v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Nyní provedeme diskretizaci řešení v prostoru. Řešení potom hledáme jako v klasické MKP ve tvaru lineární kombinace koeficientů α_i^n a bázových funkcí $\{\varphi_i\}_{i=1}^{PU} \in S_h$, tj.

$$u_h^n = \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x).$$

Dosadíme-li toto vyjádření funkce u_h^n do rovnice (5.2) a současně funkce v_h nahradíme bázovými funkce φ_j , dostáváme soustavu rovnic ve tvaru

$$\frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^{n+1} \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) = \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) - a \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) + L^n(\varphi_j(x)), \quad j = 1, \dots, PU; \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Soustavu zapíšeme maticově

$$\frac{1}{\tau} B \alpha^{n+1} = \frac{1}{\tau} B \alpha^n - A \alpha^n + F^n, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (5.3)$$

kde

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx,$$

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx,$$

$$F^n = (F_j^n), \quad F_j^n = L^n(\varphi_j) = \int_{\Omega} f^n \varphi_j \, dx.$$

Jak je vidět, jedná se o matice A, B a vektor pravé strany F , které již byly popsány při řešení parabolické úlohy semidiskrétní metodou. Vlastnosti matic tedy zůstávají stejné, jako byly popsány v Poznámce 4.1.

Soustavu můžeme ještě upravit na tvar

$$B\alpha^{n+1} = (B - \tau A)\alpha^n + \tau F^n, \quad n = 0, \dots, M - 1,$$

5.2 Implicitní Eulerova metoda

Dále si ukážeme nahrazení časové derivace pomocí implicitní Eulerovy metody

$$u_{t,h}^n \approx \frac{u_h(t_n) - u_h(t_{n-1})}{\tau} = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau}.$$

Dosazením do rovnice (5.1) dostaneme

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau}, v_h \right) + a(u_h^n, v_h) = L^n(v_h), \quad \forall v \in S_h, \quad n = 1, \dots, M. \quad (5.4)$$

Rovnici můžeme dále upravit

$$\frac{1}{\tau} (u_h^n, v_h) + a(u_h^n, v_h) = \frac{1}{\tau} (u_h^{n-1}, v_h) + L^n(v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 1, \dots, M.$$

Řešení opět hledáme ve tvaru lineární kombinace koeficientů a bázových funkcí

$$u_h^n = \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x).$$

Dosadíme-li toto vyjádření funkce u_h^n do rovnice (5.4) a současně funkce v_h nahradíme bázovými funkce φ_j , dostáváme soustavu rovnic ve tvaru

$$\frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) + a \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) = \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^{n-1} \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) + L^n(\varphi_j(x)), \quad j = 1, \dots, PU, \quad n = 1, \dots, M.$$

Soustavu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$\frac{1}{\tau} B \alpha^n + A \alpha^n = \frac{1}{\tau} B \alpha^{n-1} + F^n, \quad n = 1, \dots, M.$$

Jedná se opět o stejné matice, které byly popsány v Poznámce 4.1.

Soustavu můžeme ještě upravit na tvar

$$(B + \tau A) \alpha^n = B \alpha^{n-1} + \tau F^n, \quad n = 1, \dots, M. \quad (5.5)$$

5.3 Crank-Nicholsonova metoda

Na rozdíl od předchozích Eulerových metod, budeme nyní celé schéma diskretizovat v čase $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})\tau$. Řešíme tedy soustavu

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau}, v_h \right) + a \left(\frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}, v_h \right) = \frac{1}{2} (L^n(v_h) + L^{n-1}(v_h)), \quad (5.6)$$

$$\forall v_h \in S_h, \quad n = 1, \dots, M.$$

Řešení hledáme ve tvaru lineární kombinace koeficientů a bázových funkcí, tj.

$$u_h^n = \sum_{i=1}^{PU} \alpha_i^n \varphi_i(x).$$

Dosazením tohoto vyjádření funkce u_h^n do rovnice (5.6), dostáváme soustavu rovnic zapsanou maticově ve tvaru

$$\left(B + \frac{\tau}{2} A \right) \alpha^n = \left(B - \frac{\tau}{2} A \right) \alpha^{n-1} + \frac{\tau}{2} (F^n + F^{n-1}), \quad n = 1, \dots, M. \quad (5.7)$$

Matice v soustavě opět splňují podmínky popsané v Poznámce 4.1.

5.4 Rotheho funkce

Vyřešením získaných soustav diferenčních rovnic dostáváme hodnotu hledané funkce u_h v čase t^n . Nyní si ukážeme, jak získáme aproximaci přesného řešení $u(x, t)$.

Nadefinujeme si pro dělení časového intervalu po částech lineární funkci

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{i-1})}{\tau} & \text{jestliže } t_{i-1} < t \leq t_i \\ \frac{(t_{i+1}-t)}{\tau} & \text{jestliže } t_i < t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Pomocí těchto funkcí definujeme **Rotheho funkci** předpisem

$$u^\tau(x, t) = \sum_{n=0}^M u_h^n(x) \psi(t).$$

Právě Rotheho funkce u^τ je hledanou aproximací přesného řešení.

5.5 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru jedné dimenze

Nechť $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}^+)$, $u^0 \in C([a, b])$ a $p, q \in \mathbb{R}$. Okrajovo-počáteční parabolická úloha v 1D má následující tvar

$$\begin{aligned} u_t - pu_{xx} + qu &= f(t, x), & a < x < b \text{ a } 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Víme, že řešení vychází ze semidiskrétní formulace.

Je nutné najít triangulaci oblasti dle kapitoly Triangulace v 1D na straně 27. Interval rozdělíme na konečný počet podintervalů $[x_{i-1}, x_i]$. Označme si PU počet uzlů x_i a $PN = PU - 2$ počet vnitřních uzlů.

Řešení poté můžeme hledat na konečně dimenzionálním podprostoru $S_h \subset V$, který se skládá ze spojitých, po částech lineárních funkcí na zvolené triangulaci.

Prostor je charakterizován bázovými funkcemi, které jsou v 1D definovány předpisem

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & \text{jestliže } x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & \text{jestliže } x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Jelikož máme pro úlohu předepsány pouze Dirichletovy podmínky, budeme sestavovat bázové funkce $\{\varphi_i\}$ prostoru S_h pouze ve vnitřních uzlech triangulace x_i , $i = 1, \dots, PN$. Za řešení v hraničních uzlech dosadíme hodnoty předepsané v podmínce.

Semidiskrétní formulace pro tuto úlohu poté zní:

Najít $u_h \in S_h$ splňující

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, v_h) + a(u_h, v_h) &= L(v_h) & \forall v \in S_h, t > 0, \\ (u_h, v_h) &= (u_h^0, v_h) & \forall x \in S_h, t = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Rozdělení časové osy

Úlohu máme předepsanou na časové ose $[0, T]$. Tuto osu si rozdělíme na M podintervalů o délce τ , tj. $t = \{t_i\}_{n=0}^M$, kde $t_0 = 0$, $t_M = T$ a $\tau = t_n - t_{n-1}$.

Časová diskretizace úlohy

Nyní provedeme diskretizaci úlohy např. pomocí Crank-Nicholsony metody. Hledanou funkci u_h nahradíme hodnotami v čase $t_{n-\frac{1}{2}}$. Tím dostaneme soustavu (5.6), kterou můžeme dále upravit jako

$$\begin{aligned} (u_h^n, v_h) - (u_h^{n-1}, v_h) + \frac{\tau}{2}a(u_h^n, v_h) + \frac{\tau}{2}a(u_h^{n-1}, v_h) &= \frac{\tau}{2}L^n(v_h) + \frac{\tau}{2}L^{n-1}(v_h), \\ &\forall v_h \in S_h, n = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

kde hodnota u_h^n pro $n = 0$ je definována počáteční podmínkou úlohy.

Nyní nás už v rovnici netrápí časová proměnná t , můžeme tedy postupovat jako při klasické MKP pro eliptické úlohy.

Diskretizace úlohy v 1D

Řešení úlohy u_h^n v čase t_n můžeme pomocí báзовých funkcí prostoru S_h zapsat

$$u_h^n(x) = \sum_{i=1}^{PN} \alpha_i^n \varphi_i(x).$$

Takto vyjádřenou funkci u_h^n dosadíme do schématu (5.8). Po úpravě dostáváme soustavu

$$\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) \alpha^n = \left(B - \frac{\tau}{2}A\right) \alpha^{n-1} + \frac{\tau}{2} (F^n + F^{n-1}), \quad n = 1, \dots, M,$$

kde matice A, B a vektory $F^n = F(t_n), U^0$ jsou definovány stejně jako v Poznámce 4.3. Pouze vektor pravé strany není v tomto případě funkcí proměnné t , ale pracujeme s jeho hodnotami v čase t_n . Odtud dostaneme posloupnost vektorů $\{F^n\}_{n=0}^M$.

Tímto jsme dostali soustavu diferenčních rovnic, kterou můžeme vyřešit pomocí Matlabu nebo jiného výpočetního programu. Jedná se o stejnou rovnici, kterou dostaneme při semidiskrétní metodě užitím Crank-Nicholsonovy metody pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.

Příklady

Příklad 5.1. V této úloze budeme řešit rovnici vedení tepla s nenulovou pravou stranou a nenulovou počáteční podmínkou na intervalu $[-\pi, \pi]$ v čase $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} u_t - 5u_{xx} - u &= \sin(x) \cos(x) & (x, t) &\in (-\pi, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t &\in (0, 1) \\ u(x, 0) &= \sin(x) & x &\in (-\pi, \pi) \end{aligned}$$

Triangulace

Nejprve provedeneme triangulaci oblasti, tj. rozdělení intervalu $[-\pi, \pi]$ pomocí uzlů $\{x_i; i = 0, \dots, 11\}$ na 10 podintervalů (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, 11$ o délce $h = \frac{\pi}{5}$.

Časová diskretizace

Zadaný časový interval $[0, 1]$ rozdělíme s krokem $\tau = 0.01$. Diskretizaci provedeme pomocí Crank-Nicholsonovy metody dle předpisu (5.6).

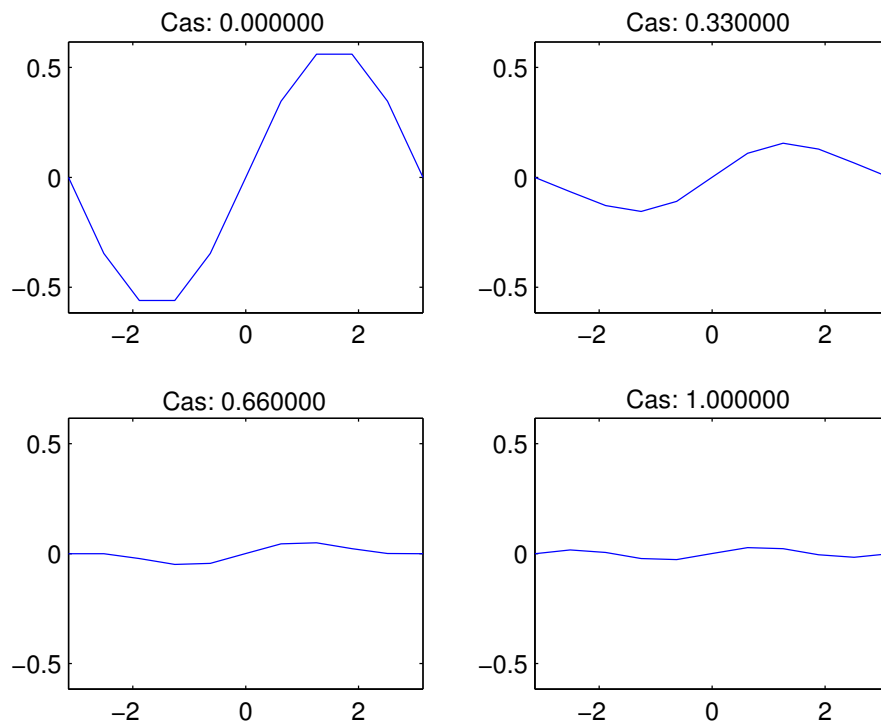
Řešení

Matice a vektory sestavíme podle kapitoly Diskretizace v 1D na straně 50. Poté dostaneme soustavu tvaru (5.7).

Úloha je řešena v příloženém M-filu s názvem `Rothe1D_Pr1.m`.

Výsledky

Na obrázku 12 vidíme řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou ve vybraných časových krocích.



Obrázek 12: Řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou.

Z obrázku je zřejmé, že řešení je liché, tedy symetrické podle počátku souřadnic. To není příliš překvapivé, jelikož pravá strana úlohy a počáteční podmínka jsou na zvoleném intervalu také liché funkce.

Stejně jako u semidiskrétních metod bychom nyní mohli tuto úlohu vyřešit s jemnější triangulací nebo použít jinou metodu. Při volbě implicitní Eulerovy metody bychom řešili soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru (5.5) a v případě explicitní Eulerovy metody soustavu (5.3). Pro tento časový i prostorový krok dávají všechny metody podobná řešení. Předvědět se o tom můžeme na videích `Rothe1D_Pr1_CN.avi` (Crank-Nicholson), `Rothe1D_Pr1_iEM.avi` (implicitní Euler), `Rothe1D_Pr1_eEM.avi` (explicitní Euler).



5.6 Parabolická parciální diferenciální rovnice v prostoru dvou dimenzí

Nechť je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a platí $c, p, q, f \in C(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, $u^0 \in C(\Omega)$, $h_1, h_2 \in C(\Gamma_2 \times \mathbb{R}^+)$. Potom okrajovo-počáteční parabolickou úlohu definujeme v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} cu_t - p \Delta u + qu &= f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \text{ a } t > 0, \\ u(x, y, 0) &= u^0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) &= 0, & t > 0, (x, y) \in \Gamma_1, \\ -p \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} &= h_1 u - h_2, & t > 0, (x, y) \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Nejprve najdeme triangulaci zadané oblasti dle kapitoly Triangulace ve 2D na straně 34. Zvolenou oblast rozdělíme na konečný počet trojúhelníkových prvků K . Označíme PP počet prvků, PU počet všech uzlů a PN počet uzlů ležících na hranici Γ_2 nebo uvnitř oblasti Ω .

Řešení budeme hledat na konečně dimenzionálním podprostoru $S_h \subset V$. Namísto globálních bází φ_i , pracujeme s lokálními bázemi $N^K = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, které jsou blíže popsány v kapitole Bázové funkce ve 2D na straně 35.

Dále rozdělíme časový interval na M podintervalů s krokem τ a zvolíme vhodnou metodu pro časovou diskretizaci. Podrobněji si rozebereme užití Crank-Nicholsonovy metody. Stejně jako u úloh v 1D dostaneme soustavu diferenciálních rovnic (5.7).

Diskretizace úlohy ve 2D

Diskrétní formulace úlohy pro Crank-Nicholsonovu metodu je tvaru:

Najít $u_h^n \in S_h$ splňující

$$(u_h^n, v_h) - (u_h^{n-1}, v_h) + \frac{\tau}{2} (a(u_h^n, v_h) + a(u_h^{n-1}, v_h)) = \frac{\tau}{2} L^n(v_h) + \frac{\tau}{2} L^{n-1}(v_h),$$

$$\forall v_h \in S_h, n = 1, \dots, M,$$

kde

$$(u_h^n, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (c^n u_h^n v_h) \, dx dy,$$

$$a(u_h^n, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (p^n \nabla u_h^n \nabla v_h + q^n u_h^n v_h) \, dx dy + \sum_{S \in TS_h} \int_S (h_1^n u_h^n v_h) \, ds,$$

$$L^n(v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K f^n v_h \, dx dy + \sum_{S \in TS_h} \int_S h_2^n v_h \, ds,$$

$$c^n = c(x, y, t_n), p^n = p(x, y, t_n), q^n = q(x, y, t_n), h_2^n = h_2(x, y, t_n), h_1^n = h_1(x, y, t_n).$$

Jelikož pracujeme s lokálními bázemi, budeme provádět diskretizaci jednotlivě pro prvky a strany.

Diskretizace na prvcích

Na každém trojúhelníkovém prvku existují právě 3 báze $N^K = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, které jsou zde nenulové. Pomocí nich můžeme řešení úlohy $u_h^{n,K}$ v čase t_n na prvku K zapsat ve tvaru

$$u_h^{n,K} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{n,K} \omega_i(x, y) = N^K \alpha^{n,K}.$$

Pomocí takto vyjádřené funkce hledáme matice $B^{n,K}$, $A^{n,K}$ a vektor $F^{n,K}$ jako $B^{n,K} = (N^K, N^K)$, $A^{n,K} = a(N^K, N^K)$, $F^{n,K} = L^n(N^K)$.

S využitím příslušných integrálních formulí dostaneme matice $A^{n,K} = A^K(t_n)$, $B^{n,K} = B^K(t_n)$ a vektor $F^{n,K} = F^K(t_n)$ pro prvek K ve stejném tvaru jako pro semidiskrétní metodu, viz. kapitola Diskretizace úlohy ve 2D na straně 36. V tomto případě matice ani vektor nejsou časově závislé, ale pracujeme s jejich hodnotami

v časech t^n , $n = 1, \dots, M$. Tím dostaneme posloupnosti matic $\{B^{n,K}\}_{n=1}^M$ a $\{A^{n,K}\}_{n=1}^M$ a posloupnost vektorů $\{F^{n,K}\}_{n=1}^M$.

Diskretizace na stranách

Na každé straně existují 2 báze $N^S = \{\omega_1, \omega_2\}$, které jsou na ní nenulové. Hledané řešení u_h^n v čase t_n na straně S zapíšeme jako

$$u_h^{n,S}(t, x, y) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i^{n,S} \omega_i(x, y) = N^S \alpha^{n,S}.$$

Matici a vektor příslušný zvolené straně hledáme jako $A^{n,S} = a(N^S, N^S)$ a $F^{n,S} = L^n(N^S)$.

S využitím příslušné numerické formule dostane matici $A^{n,S} = A^S(t_n)$ a vektor $F^{n,S} = F^S(t_n)$ pro stranu S ve stejném tvaru jako pro semidiskrétní metodu, viz. kapitola Diskretizace úlohy ve 2D na straně 36. V tomto případě matice ani vektor nejsou již časově závislé, ale pracujeme s jejich hodnotami v čase t_n , $n = 1, \dots, M$. Odtud dostáváme posloupnost matic $\{A^{n,S}\}_{n=1}^M$ a vektorů $\{F^{n,S}\}_{n=1}^M$.

Sestavení globálních matic a vektoru

Pomocí nalezených matic a vektorů pro prvky a strany můžeme zapsat úlohu v čase t_n , $n = 1, \dots, M$ ve tvaru

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in T_h} (B^{n,K} \alpha^{n,K} - B^{n-1,K} \alpha^{n-1,K}) + \frac{\tau}{2} \sum_{K \in T_h} (A^{n,K} \alpha^{n,K} + A^{n-1,K} \alpha^{n-1,K}) + \\ & + \frac{\tau}{2} \sum_{S \in TS_h} (A^{n,S} \alpha^{n,S} + A^{n-1,S} \alpha^{n-1,S}) = \frac{\tau}{2} \sum_{K \in T_h} (F^{n,K} + F^{n-1,K}) + \\ & + \frac{\tau}{2} \sum_{S \in TS_h} (F^{n,S} + F^{n-1,S}). \end{aligned}$$

Při sestavování budeme postupovat dle tzv. eliminačního algoritmu. Rovnice příslušné uzlům na hranici Γ_1 nesestavujeme a za řešení dosadíme hodnoty předepsané v podmínce.

Na základě tohoto vyjádření sestavíme globální matice A, B a vektor F , pro něž platí

$$\left(B + \frac{\tau}{2}\right) \alpha^n = \left(B - \frac{\tau}{2}A\right) \alpha^{n-1} + \frac{\tau}{2} (F^n + F^{n-1}), \quad n = 1, \dots, M.$$

Příklady

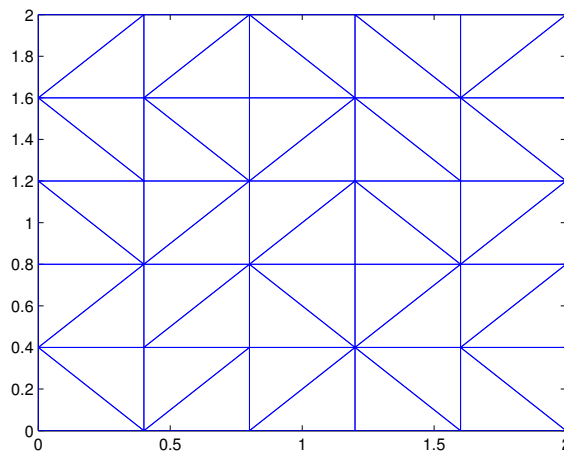
Příklad 5.2. V tomto příkladě si ukážeme řešení parabolické úlohy tvaru

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u &= x^4 - y & (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2), \quad t \in (0, 1) \\ u(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2), \\ u(x, y, t) &= 0 & y = 0, \quad x \in [0, 2] \\ -\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} &= u - 1 & x = 0, \quad x = 2, \quad y = 2. \end{aligned}$$

Máme zadánu parabolickou úlohu na obdélníku s nulovou počáteční podmínkou a smíšenou okrajovou podmínkou.

Řešení

Pracujeme na síti dle obrázku 13. Osu x i osu y jsme rozdělili se stejným krokem $h_x = h_y = 0.4$. Tím jsme dostali 50 trojúhelníkových prvků.



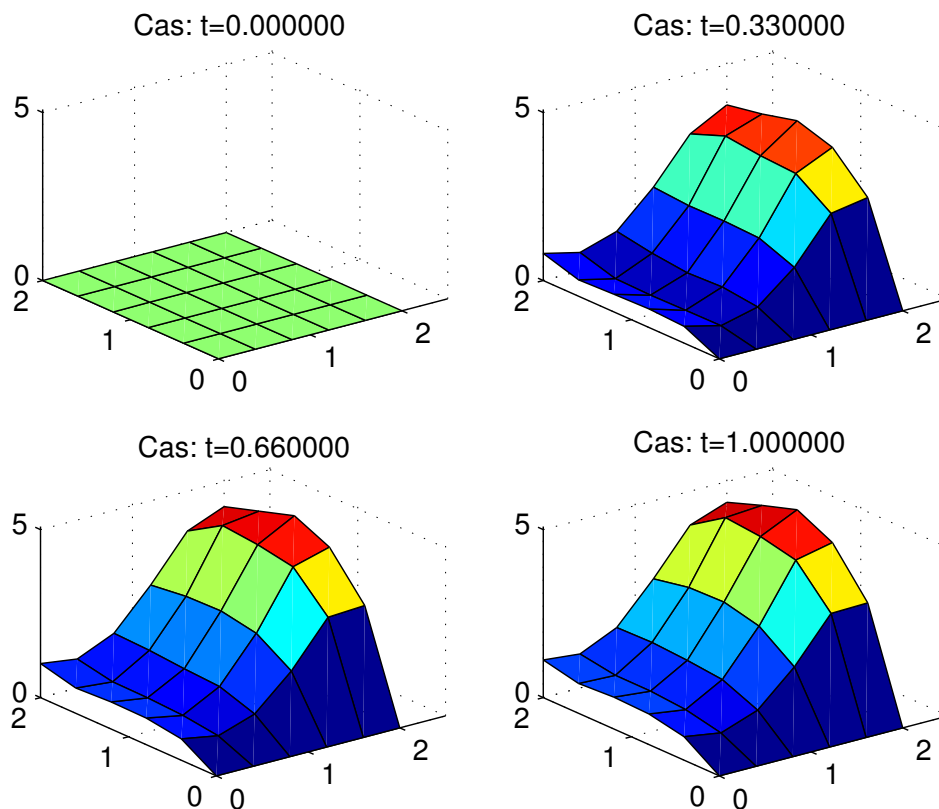
Obrázek 13: Triangulace zadané oblasti.

Provedeme časovou diskretizaci s krokem $\tau = 0.01$ a derivaci u_t nahradíme postupně všemi definovanými metodami, tj. explicitní Eulerova, implicitní Eulerova, Crank-Nicholsonova.

Úloha je řešena v příloženém M-filu `Rothe2D_Pr1.m`.

Výsledky

Na obrázku 14 je zakresleno řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou ve vybraných časech.



Obrázek 14: Řešení úlohy Crank-Nicholsonovou metodou ve vybraných časech.

Výsledky získané jednotlivými metodami jsou vykresleny v příložených videích `Rothe2D_Pr1_CN.avi` (Crank-Nicholsonova), `Rothe2D_Pr1_iEM.avi` (implicitní Eulerova) a `Rothe2D_Pr1_eEM.avi` (explicitní Eulerova).

Řešení implicitní Eulerovou a Crank-Nicholsonovou metodou jsou podobné.

Zvolený krok $\tau = 0.01$ byl v tomto případě dostatečný také pro explicitní Eulerovu metodu. Použitím většího kroku, např. $\tau = 0.1$, by se již projevila nestabilita metody. ♣

6 Stabilita a srovnání metod

6.1 Stabilita řešení

Obecně každá numerická metoda, tedy i MKP, by měla splňovat následující vlastnosti:

- **Konzistence:** diskretizací musíme získat dobrou aproximaci zadané úlohy
- **Konvergence:** numerické řešení musí být dostatečně blízké přesnému řešení úlohy
- **Stabilita:** řešení nesmí být náchylné na malé změny ve vstupních datech

Budeme vycházet z diferenčního systému

$$(B + \sigma\tau A)\alpha^{n+1} = (B - (1 - \sigma)\tau A)\alpha^n + \tau((1 - \sigma)F^n + \sigma F^{n+1}). \quad (6.1)$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že matice B a A jsou nezávislé na čase.

Definice 6.1. Diferenční systém je **stabilní**, jestliže malá změna v čase t_n zůstává ohraničená v dalším čase $t \leq T$.

Označme $\delta^n = \alpha^n - \bar{\alpha}^n$ rozdíl dvou řešení systému (6.1). Potom je splněna rovnost

$$(B + \sigma\tau A)\delta^{n+1} = (B - (1 - \sigma)\tau A)\delta^n.$$

Definice 6.2. Diferenční systém (6.1) je **stabilní**, jestliže existuje kladná konstanta C nezávislá na kroku τ splňující

$$\|\delta^n\| < C\|\delta^0\|$$

pro $n \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, $t \leq T$.

Definice 6.3. Diferenční systém (6.1) je **absolutně stabilní**, jestliže platí

$$\|\delta^n\| < \|\delta^0\|.$$

Pro $\theta \geq \frac{1}{2}$ je systém (6.1) absolutně stabilní. Pro $\theta < \frac{1}{2}$ musíme volit krok τ splňující podmínku

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{6(1-2\theta)},$$

kde $h = \max_{K \in T_h} \text{diam}(K)$.

Nyní se zaměříme na semidiskrétní schéma (4.1).

Věta 6.1. *Nechť $\delta \in S_h$ splňuje homogenní semidiskrétní schéma, tj.*

$$\begin{aligned} (\delta_t, v_h) + a(\delta, v_h) &= 0 & \forall v_h \in S_h, t > 0 \\ (\delta, v_h) &= (\delta^0, v_h) & \forall v_h \in S_h. \end{aligned}$$

Potom platí $\|\delta(t)\| \leq \|\delta^0\|$, $t > 0$.

Důkaz: Viz. [8], str. 23.

Poznámka 6.1. Funkce δ v předchozí větě značí rozdíl dvou řešení semidiskrétního schématu. S přihlédnutím k definicím na začátku této kapitoly, je uvedenou nerovností dokázána absolutní stabilita semidiskrétního schématu.

Nyní si uvedeme jednu větu popisující konvergenci semidiskrétního schématu pro parabolické úlohy.

Věta 6.2. *Nechť u je řešením variační úlohy (2.2) a u_h splňuje semidiskrétní schéma (4.1). Potom existuje konstanta C taková, že platí*

$$\max_{t \in (0, T]} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(1 + \left| \log \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in (0, T]} \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

kde $h = \max_{K \in T_h} \text{diam}(K)$.

Důkaz: Viz. [8], str. 23-26.

Další informace ke stabilitě a konvergenci metod pro parabolické úlohy jsou uvedeny např. v literatuře [9].

6.2 Srovnání metod

Semidiskrétní i Rotheho metoda vedou při použití stejných numerických metod (explicitní Eulerova, implicitní Eulerova, Crank-Nicholsonova) na stejné soustavy diferenčních rovnic. Obě vychází z triangulace oblasti a rozdělení časové osy. Liší se pouze v pořadí provedených kroků.

Při řešení úlohy semidiskrétní metodou nejprve provedeme diskretizaci prostorové proměnné, čímž dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. K vyřešení této soustavy můžeme použít celou řadu numerických metod.

Pomocí Rotheho metody provedeme diskretizaci řešení pro časovou i prostorovou proměnnou současně. Pro nahrazení časové derivace využijeme některou z numerických metod. Úlohu převedeme na řešení soustavy diferenčních rovnic.

Nyní si vypočítáme příklad, u něhož známe přesné řešení a ověříme tak přesnost našich výpočtů.

Příklad 6.1. Zadání úlohy:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sin(x) & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t \in (0, 1) \\ u(x, 0) &= 0 & x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Známe přesné řešení této úlohy:

$$u(t, x) = (1 - \exp^{-t}) \sin(x).$$

Řešení

Najdeme triangulaci intervalu $[0, \pi]$ s krokem $h = \frac{\pi}{4}$ a rozdělíme časovou osu pomocí $\tau = 0.05$.

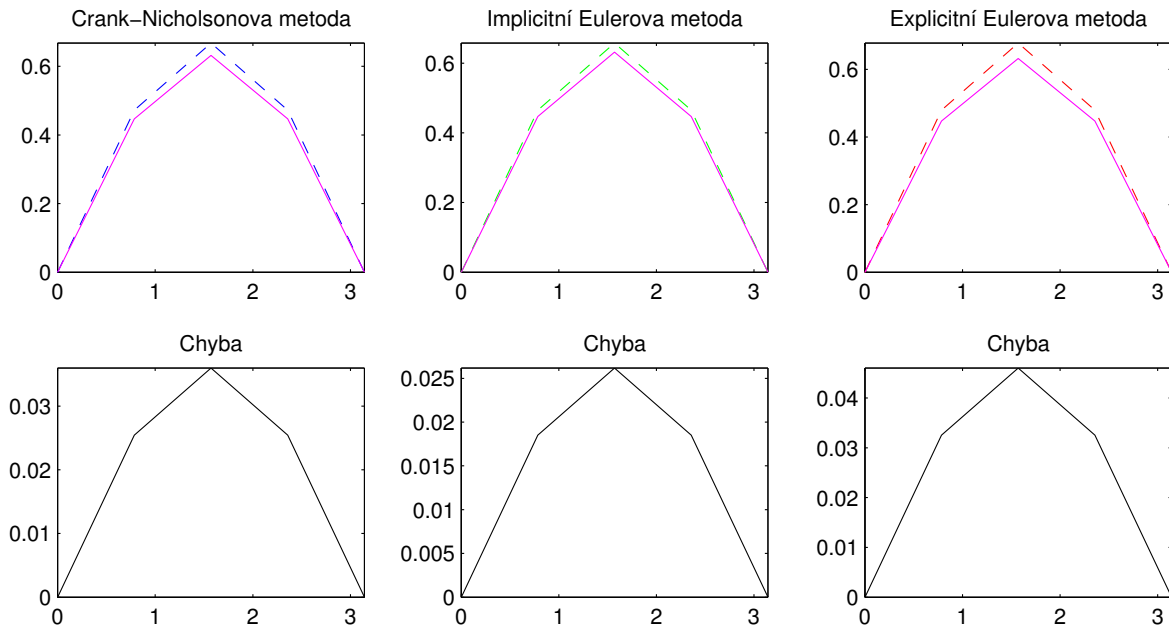
Použijeme varianty definované θ -metody (explicitní Eulerova, implicitní Eulerova, Crank-Nicholsonova). Postupně tedy budeme řešit diferenční soustavy

$$\begin{aligned} B\alpha^{n+1} &= (B - \tau A)\alpha^n + \tau F^n && \text{explicitní Eulerova metoda,} \\ (B + \tau A)\alpha^{n+1} &= B\alpha^n + \tau F^{n+1} && \text{implicitní Eulerova metoda,} \\ (B + \frac{\tau}{2}A)\alpha^{n+1} &= (B - \frac{\tau}{2}A)\alpha^n + \frac{\tau}{2}(F^{n+1} + F^n) && \text{Crank-Nicholsonova metoda.} \end{aligned}$$

Úloha je řešena v příloženém M-filu s názvem `Srovnani1D.m`.

Výsledky

Na obrázku 15 vidíme řešení úlohy v čase $t = 1$. Přesné řešení je v grafech zakresleno plnou křivkou. Nejmenší chybu získáváme v tomto případě implicitní Eulerovou metodou.



Obrázek 15: Řešení úlohy a chyby pro jednotlivé metody zobrazené v čase $t = 1$.

Kompletní výsledky úlohy pomocí jednotlivých metod jsou na příložených videích `Presne1D_Exp1EM4.avi`, `Presne1D_ImplEM4.avi` a `Presne1D_CN4.avi`. Výsledky všech metod se blíží přesné hodnotě.

Chyby metod v průběhu celého řešení jsou zobrazeny na příložených videích `Chyba1D_Exp1EM4.avi`, `Chyba1D_ImplEM4.avi` a `Chyba1D_CN4.avi`.

Jemnější síť

Řešení

Nyní vytvoříme novou triangulaci intervalu $[0, \pi]$ s krokem $h = \frac{\pi}{20}$ a rozdělíme časovou osu opět pomocí $\tau = 0.05$.

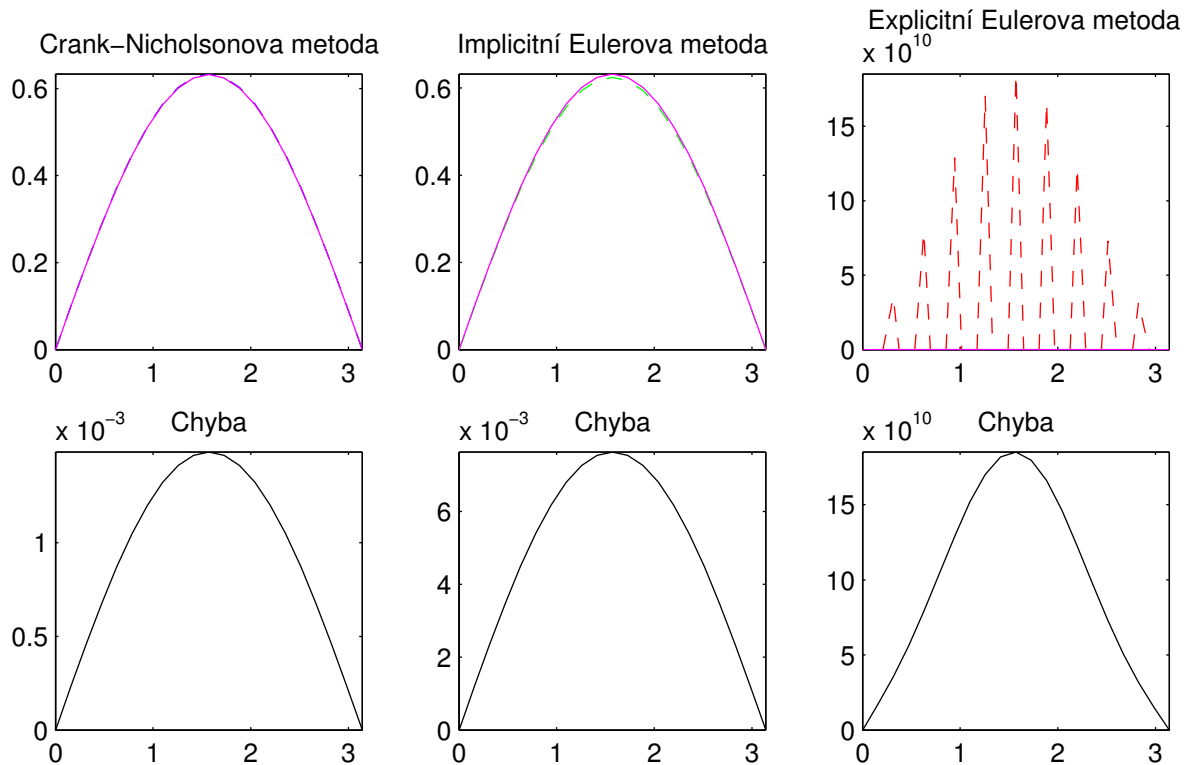
Řešení provedeme stejně jako pro předchozí triangulaci.

Výsledky

Na obrázku 16 vidíme řešení úlohy v čase $t = 1$. Přesné řešení je v grafech zakresleno plnou křivkou. Crank-Nicholsonova a implicitní Eulerova metoda jsou velmi přesné a jejich maximální chyba je řádu 10^{-3} . Přesnější je v tomto případě Crank-Nicholsonova metoda.

Průběh řešení těchto těchto metod je zakreslen na videích `Presne1D_CN20.avi` a `Presne1D_ImpleM20.avi`. Jejich chyby jsou ke zhlédnutí na `Chyba1D_CN20.avi` a `Chyba1D_ImpleM20.avi`.

Pro explicitní Eulerovu metodu byl zvolený krok nedostatečný. Celé řešení je zakresleno na videu `Presne1D_Exp1EM20.avi`. Je zřejmé, že metoda je nestabilní a bylo by nutné zvolit jemnější časový krok τ .



Obrázek 16: Řešení úlohy a chyby pro jednotlivé metody zobrazené v čase $t = 1$.



Závěr

Cílem práce bylo nastudovat teorii metody konečných prvků a její aplikaci při řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic. MKP je výpočtová numerická metoda založená na diskretizaci úlohy. Je charakteristická rozdělením oblasti na elementy, obvykle trojúhelníkového tvaru. Řešení hledáme jako lineární kombinaci jednoduchých funkcí, které jsou nenulové pouze na malém počtu elementů.

Pro parabolické úlohy existují dva typy metod. První je tzv. semidiskrétní metoda. Jejím principem je provedení diskretizace úlohy v prostoru a tím k převedení hledané úlohy na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Druhou je tzv. Rotheho metoda, nazývaná též jako metoda úplné diskretizace. Jak již název napovídá, provedeme diskretizaci v čase i prostoru. Řešíme poté soustavu diferenčních rovnic.

Při řešení jsme využívali 3 numerické metody: explicitní Eulerovu, implicitní Eulerovu a Crank-Nicholsonova. První zmíněná metoda je pouze podmíněně stabilní, jak jsme zjistili na několika příkladech. Ne vždy byly dostatečně zvoleny vstupní parametry, tudíž ne každý výsledek je správný. Ale i s tím se můžeme při výpočtech setkat. Zbývající dvě metody jsou absolutně stabilní, takže vstupní parametry neměly na výsledek vliv.

Nastudované metody jsou doplněny názornými příklady v 1D a 2D. Výsledky jsou interpretovány pomocí obrázků vyobrazených v textu nebo na videích na přiloženém CD. Pro výpočty jsem vytvořila vlastní M-fily v matematickém softwaru Matlab, které jsou dostupné na přiloženém CD.

Téma práce mě zaujalo, protože MKP je v praxi využívaná metoda. Vyzkoušela jsem si práci s česky i anglicky psanou odbornou literaturou, přičemž jsem využívala především anglickou literaturu, neboť v české literatuře převažuje MKP pro eliptické úlohy. Jelikož jsem měla při psaní drobné problémy s aplikací teorie z literatury na řešení příkladů, snažila jsem se práci psát tak, aby čtenáři pochopili principy výpočtů. Doufám, že nejen já, ale i další čtenáři si z této práce odnesou co nejvíce užitečných informací.

Literatura

- [1] BLAHETA R.: Matematické modelování a metoda konečných prvků, Text byl vytvořen v rámci realizace projektu Matimatika pro inženýry 21. století, 2012.
- [2] BRANDNER M., MÍKA S., PŘIKRYL P.: Speciální numerické metody - Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice, Vydavatelství servis, Plzeň, 2006.
- [3] BRANDNER M., EGERMAIER J., KOPICOVÁ H.: Numerické metody pro řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic, Text byl vytvořen v rámci realizace projektu Matimatika pro inženýry 21. století, 2012.
- [4] ČERMÁK L.: Algoritmy konečných prvků, učební texty vysokých škol, v elektronické podobě, Brno, 2005.
- [5] ČERMÁK L.: Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic, učební texty vysokých škol, v elektronické podobě, Ústav matematiky FSI VUT v Brně.
- [6] FLAHERTY J.E: Course Notes for Finite Element Analysis (Lecture 1 - One-Dimensional Finite Element Problem) [online], [cit. 21.2.2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea2.pdf>>.
- [7] FLAHERTY J.E: Course Notes for Finite Element Analysis (Lecture 3 - Multi-Dimensional Variational Principles) [online], [cit. 21.3.2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea3.pdf>>.
- [8] FLAHERTY J.E: Course Notes for Finite Element Analysis (Lecture 9 - Parabolic Problems) [online], [cit. 21.2.2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea9.pdf>>.
- [9] GROSSMANN C., ROOS H-G.: Numerical Treatment of Partial Differential
- [10] Introduction to Finite Element Methods - Appendix O Index [online], texty k přednáškám, Department of Aerospace Engineerign Sciences University of Colorado at Boulder, poslední aktualizace: 11.1.2013, [cit. 16.3.2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/IFEM.App0.d/IFEM.App0.pdf>>.
- [11] JOHNSON: Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press, 1987.
- [12] LARSSON S., VIDAR T.: Partial differential equations with numerical methods, Springer-Verlag Berlin Heidenberg, 2009.

- [13] MATHWORKS: Ordinary Differential Equations [online], [cit. 20.3.2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.mathworks.com/help/matlab/ordinary-differential-equations.html>>.
- [14] TRCALA M.: Řešení úlohy vedení tepla, Přf MU, 2011.
- [15] THOMÉE V.: Galerkin finite element methods for parabolic problems, Springer, 1997.
- [16] VITÁSEK E.: Vybrané kapitoly z teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, Katedra matematiky FAV ZČU, Plzeň, 2005.
- [17] WIKIPEDIA: Finite Element Method [online], [cit. 7.3.2014]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method>.
- [18] ŽENČÁK P.: Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic - počáteční úlohy, Texty k přednáškám z předmětu NDR1, v elektronické podobě, Olomouc, 2011.