UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vybrané příklady a protipříklady z teorie míry a integrálu

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Jakub Kočí**
Studijní program: Aplikovaná matematika
Specializace: Data Science
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2023

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jakub Kočí
Název práce: Vybrané příklady a protipříklady z teorie míry a integrálu
Typ práce: Bakalářská práce
Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Rok obhajoby práce: 2023
Abstrakt: Obsahem této práce je představení některých základních tvrzení z oblasti teorie míry a Lebesgueova integrálu. Tyto poznatky jsou v práci aplikované na konkrétních řešených příkladech. Důraz je kladen především na důležitost předpokladů, které jsou nedílnou součástí matematických tvrzení. Formou protipříkladů je ukazováno, že nezbytné předpoklady nelze zanedbávat.
Klíčová slova: Míra, integrál, Lebesgueův integrál
Počet stran: 43
Počet příloh: 0
Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jakub Kočí
Title: Examples and counterexamples in the theory of measure and integral
Type of thesis: Bachelor's thesis
Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics
Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
The year of presentation: 2023
Abstract: The content of this thesis is an introduction to some elementary statements from the field of measure theory and Lebesgue integration. These concepts are applied to specific solved examples in this thesis. The emphasis is placed on the importance of assumptions that are a necessary part of mathematical statements. Using counterexamples, it is shown that necessary assumptions cannot be neglected.
Key words: Measure, integral, Lebesgue integral
Number of pages: 43
Number of appendices: 0
Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka, Ph.D. a všechny využité zdroje jsem uvedl na seznamu literatury.

V Olomouci dne 17. 4. 2023 ....

Poděkování

Mé poděkování patří docentovi Janu Tomečkovi za veškeré připomínky, rady, čas a ochotu při konzultacích a zpracování této práce.

Obsah

Úvod

Integrace funkcí jedné či více proměnných jsou jedny ze základních disciplín z oblasti matematické analýzy, které jsou bezesporu důležité nejen pro samotný svět matematiky, ale také v ostatních přírodních vědách. Při řešení problémů se lze obrátit na široké spektrum tvrzení, které nám mohou při výpočtech různými způsoby pomoci a výrazně nám tak práci v některých případech usnadní. V této práci budou právě některá taková základní tvrzení představena.

Cílem této práce je nejen ukázat řešení konkrétních vybraných příkladů za použití základních nástrojů z teorie míry a Lebesgueova integrálu, ale také pomocí takových příkladů ukázat, jaká tvrzení naopak neplatí, respektive poukázat na to, jak důležité je věnovat speciální pozornost všem předpokladům v matematických tvrzeních. Na to se zaměříme formou protipříkladů, kde se vždy podíváme na nějakou konkrétní situaci, kdy daný předpoklad evidentně splněn nebude, a ukážeme si, že v takových situacích aparát nelze použít a že můžeme dostávat výsledky, které nejsou pravdivé. Příklady jsou vybírány buď jako neřešené z literatury uvedené na konci práce a nebo jsou cíleně sestrojeny a doupraveny tak, aby odpovídajícím způsobem vystihovaly daný problém co nejlépe.

Tato práce je rozdělena do dvou kapitol. První kapitola stručně představuje koncept měření a míry, druhá kapitola se pak věnuje Lebesgueově integrálu, který je na teorii míry založen.

Věřím, že tato práce bude užitečným přínosem zejména pro ty čtenáře, kteří se rádi matematikou baví a rádi nad ní přemýšlí, a že čtenáře případně motivuje k dalším úvahám v podobných směrech.

1 Prostory s mírou

Teorie míry se zabývá zobecněním pojmu délky intervalu, plošného obsahu v rovině či objemu množiny v prostoru. V této kapitole si ji představíme, uvedeme potřebné definice a poukážeme na základní vlastnosti míry. Především se podíváme na různé příklady z této problematiky včetně Lebesgueovy míry, která pro nás bude velmi důležitým prostředkem k sestrojení Lebesgueova integrálu.

1.1 Sigma-algebra

Míru nelze definovat na jakémkoli systému podmnožin množiny X. Libovolný systém by nám ani nezaručoval, že na něm definice míry bude mít smysl. Pokud navíc začneme na vlastnosti míry klást různé pro nás důležité požadavky, ukazuje se, že ne každé podmnožině $\mathbb{R}^n$ budeme moci takovou míru přiřadit. Budeme se tedy muset omezit na nějaký systém podmnožin uzavřený na konkrétní množinové operace. Takový systém podmnožin, který je základem pro definici míry, je tzv. σ-algebra.

Definice 1. [1, str. 15] *Nechť X je neprázdná množina. Systém podmnožin $\mathcal{A}$ množiny X se nazývá σ-algebra na X, jestliže je splněno*

- $X \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$,
- $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Lze snadno ukázat, že

- σ-algebra je systém podmnožin obsahující prázdnou množinu, dále je uzavřený také na běžné operace s množinami jako konečná sjednocení, konečné průniky, spočetné průniky nebo množinové rozdíly. [1, str. 15]
- Průnik libovolného množství σ-algeber je opět σ-algebra na dané množině X. Pro každý množinový systém $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra, jež tento systém obsahuje. Říkáme jí σ-obal a značíme $\sigma(\mathcal{G})$. [1, str. 16]

Příklad 1. Uvažujme množinu $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Najděme nejmenší σ-algebru na X, která obsahuje intervaly $\left[0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$.

- V σ-algebře musí být podle její definice obsažena celá množina X.

- Dále potřebujeme zajistit uzavřenost na sjednocení (zde pouze konečná) přidáním množiny $\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$.
- Nyní už stačí nalézt všechny množinové doplňky. Jedná se o prázdnou množinu (doplněk X) a intervaly $\left[\frac{1}{4}, 1\right], \left[0, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
- Výsledná σ-algebra má podobu

$$\mathcal{A} = \left\{\emptyset, [0,1], \left[0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, 1\right], \left[\frac{1}{4}, 1\right], \left[0, \frac{3}{4}\right], \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right\}.$$

Příklad 2. [1, str. 20] Mějme $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní podmnožiny X. Určeme, kolik množin se nachází v $\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$.

- Z n objektů lze vybrat k objektů $\binom{n}{k}$ způsoby, pokud je $k \leq n$.
- Vybereme-li takto libovolných k množin z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kde $k \leq n$, pak jejich doplňky, sjednocení a doplněk tohoto sjednocení musí náležet do σ-algebry.
- Doplněk libovolného sjednocení vybraných množin vznikne sjednocením zbývajících množin, které jsme nevybrali. Celá množina X vznikne sjednocením všech n množin a prázdná množina vznikne, pokud nevybereme žádnou z množin.
- Počet množin v celém σ-obalu vznikne součtem všech kombinací, tedy

$$|\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Uvedli jsme si, že průnik σ-algeber je opět σ-algebra. Podívejme se, jak je to se sjednocením.

Příklad 3. Ukažme, že pokud $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou dvě σ-algebry na X, jejich sjednocení $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ještě nemusí být σ-algebra na X.

- Uvažujme dvě σ-algebry $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ na $\{a, b, c, d\}$ ve tvaru

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\},$$
$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

- Lze snadno ověřit, že platí

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

- Protože ale $\{a\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ a zároveň $\{b\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, mělo by taktéž platit, že $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, což není pravda. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tedy není σ-algebra.

Množinový systém, který je σ-algebra, může obsahovat různé systémy podmnožin množiny X.

- V $\mathbb{R}^n$ nás bude při zkoumání měr zajímat zejména jedna ze standardních σ-algeber, která je σ -obalem systému otevřených množin $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme jí borelovská σ-algebra. Její množiny nazveme borelovské nebo borelovsky měřitelné. Značíme ji $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nebo zkráceně $\mathcal{B}^n$.
  [1, str. 17]

- Dvojice $(X, \mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je σ-algebra na množině X, se nazývá měřitelný prostor. Ten pro nás bude klíčovým pro definici míry. [1, str. 22]

1.2 Míra

Nyní již víme, co je σ-algebra. Množiny tohoto systému budeme nazývat měřitelné, budeme jim chtít přiřadit míru. Vzniknou tak prostory s mírou.

Definice 2. [1, str. 22] *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X. Pak zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ nazveme mírou, pokud platí*

- $\mu(\emptyset) = 0$,

- *zobrazení je σ-aditivní, tedy pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ platí*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou. [1, str. 22]

- Ačkoli se dále budeme bavit o měrách, které nemohou být pro jejich důležité vlastnosti definovány na celé potenční množině, na libovolné σ-algebře $\mathcal{A}$ lze definovat vždy alespoň jednu míru. [1, str. 26]

- Důležitý pro nás bude zejména prostor s Lebesgueovou mírou, která je definovaná na borelovské σ-algebře.

Příklad 4. [1, str. 26] Existuje míra, kterou lze definovat na zcela libovolné σ-algebře $\mathcal{A}$, tedy i na potenční množině $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Příkladem takové míry je Diracova míra δ_x pro pevně zvolený bod $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{A}$, definovaná předpisem

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

Ukažme, že takto definované zobrazení je míra.

- Pro libovolnou množinu $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\delta_x(A) \geq 0,$$
$$\delta_x(\emptyset) = 0.$$

- Je-li $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost po dvou disjunktních množin, pak

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies \forall i \in \mathbb{N} : x \notin A_i \implies \delta_x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_x(A_i) = 0,$$
$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies \exists! i \in \mathbb{N} : x \in A_i \implies \delta_x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_x(A_i) = 1.$$

Příklad 5. [1, str. 28] Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezáporných čísel, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost měr na σ-algebře $\mathcal{A}$. Ukažme, že $\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\mu_i$ je míra na $\mathcal{A}$.

- Stačí ověřit, že uvedené zobrazení splňuje všechny vlastností míry. Platí totiž, že

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\mu_i(A) \geq 0,$$
$$\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\mu_i(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0.$$

- Dále pro libovolnou posloupnost $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ po dvou disjunktních množin, $A_j \in \mathcal{A}$, platí, že

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\mu_i\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_i(A_j)\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i\mu_i(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\mu_i(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

kde jsme využili znalosti z teorie číselných řad o zachování součtu při přerovnání řad s nezápornými členy.

- Poznamenejme ještě, že důkaz by se provedl analogickým způsobem, pokud by měr bylo konečně mnoho a $\{a_n\}$ by byla odpovídající konečná posloupnost nezáporných čísel.

Definice 3. [1, str. 27] *Nechť* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ *je měřitelný prostor s borelovskou* σ*-algebrou. Potom míra* $\lambda^n : \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$*, které každému zleva polouzavřenému intervalu* $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ *přiřadí hodnotu*

$$\lambda^n([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

se nazývá n*-rozměrná Lebesgueova míra.*

Uvedená definice říká, jak spočítat Lebesgueovu míru pouze pro n-rozměrné intervaly.

- Lze však ukázat, že takto definovaná míra na borelovské σ-algebře existuje a je jednoznačná. [1, str. 28]

- Lebesgueova míra je rovněž invariantní na translace či rotace, přičemž existují neměřitelné množiny. [1, str. 28]

- Můžeme snadno nahlédnout, že Lebesgueova míra skutečně zobecňuje pojem délky, plošného obsahu či objemu.

Mějme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$ prostor s Lebesgueovou mírou. Nulovými množinami rozumíme takové množiny, jejichž míra je nulová.

- Definujeme-li $(\mathcal{B}^n)^*$ jako

  $$(\mathcal{B}^n)^* = \{B \cup N, B \in \mathcal{B}^n, N \text{ podmnožina nulové množiny z } \mathcal{B}^n\},$$

  potom $(\mathcal{B}^n)^*$ je σ-algebra.

- Dále $\bar{\lambda}^n : (\mathcal{B}^n)^* \to [0, \infty]$ definované jako

  $$\bar{\lambda}^n(B^*) = \bar{\lambda}^n(B \cup N) = \lambda^n(B), \forall B^* \in (\mathcal{B}^n)^*$$

  je úplná Lebesgueova míra. Pro úplnou míru tedy platí, že všechny podmnožiny množin s nulovou mírou jsou automaticky měřitelné, tedy mají také nulovou míru. V rámci dohody budeme i zúplněnou míru značit bez pruhu, tedy pouze λ^n. [1, str. 29]

- Budeme říkat, že daný výrok platí skoro všude na množině E, pokud platí na $E \setminus N$, kde $\lambda^n(N) = 0$.

Podívejme se nyní na příklady týkající se míry.

Příklad 6. [2, str. 99] Je dána posloupnost $\{a_n\}$ nezáporných reálných čísel s vlastností $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$. Pro posloupnost množin $\{A_n\}$, kde $\mu(A_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, ještě nemusí platit, že

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = a.$$

- Uvažujme posloupnost množin $\{A_n\}$, kde $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Definujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \lambda^1(A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$.
- Platí, že číselná řada členů a_n má nekonečný součet, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty.$$

- Podíváme-li se však na sjednocení množin A_n, snadno zjistíme, že

$$\lambda^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda^1\left((-1, 1)\right) = 2.$$

Poznatky o zachovávání σ-aditivity pouze v případě po dvou disjunktních množin, které lze pozorovat v příkladu, shrnuje následující věta.

Věta 1. [1, str. 23] *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Pro libovolnou posloupnost $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ a množiny $A, B \in \mathcal{A}$ platí*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$
$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

Pro $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní platí

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Věta 2. [1, str. 24] *(Spojitost míry vzhledem k inkluzi nahoru) Nechť $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ je posloupnost množin, pro něž platí $A_j \subset A_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$. Potom platí*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Věta 3. [1, str. 24] *(Spojitost míry vzhledem k inkluzi dolů) Nechť $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ je posloupnost množin, pro něž platí $A_{j+1} \subset A_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Dále nechť $\mu(A_1) < \infty$. Potom platí*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Pozastavme se nad důležitostí konečnosti míry množiny A_1. Bez ní uvedená věta obecně neplatí, což ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 7. Uvažujme $A_j = (j, \infty) \subset \mathbb{R}$, kde $j \in \mathbb{N}$. Spočítejme Lebesgueovu míru průniku těchto množin.

- Platí $\lambda^1(A_j) = \infty$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$.
- Za absence výše uvedeného předpokladu by muselo platit, že

  $$0 = \lambda^1(\emptyset) = \lambda^1\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \lambda^1(A_j) = \lim_{j\to\infty} \infty = \infty.$$

  neboť průnik uvažovaných množin je prázdný. To je zcela jistě spor a důležitost předpokladu předchozí věty se nám tedy potvrzuje.

Využijme věty o spojitosti míry k dalším úvahám.

Příklad 8. [1, str. 29] Uvažujme $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$ prostor s mírou. Spočítejme Lebesgueovu míru jednoprvkové množiny $\{a\}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

- Rozmysleme si, že platí

  $$\{a\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right).$$

- Lebesgueova míra každé množiny, z nichž počítáme průnik, je konečná a množiny jsou v požadovaném vztahu inkluze. Můžeme tedy podle předchozí věty psát, že

  $$\lambda^1(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^1\left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Uvědomíme-li si, že každou spočetnou množinu v $\mathbb{R}$ lze zapsat jako spočetné sjednocení jednoprvkových množin, dostaneme tato pozorování:

- Každou spočetnou množinu lze Lebesgueovou mírou měřit.
- Navíc má každá taková množina nulovou míru.
- Analogicky bychom toto tvrzení mohli zobecnit i do $\mathbb{R}^n$.

Uvažujme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$ prostor s Lebesgueovou mírou.

- Potom každá omezená měřitelná množina v $\mathbb{R}^n$ má konečnou Lebesgueovu míru (je podmnožinou intervalu s konečnou Lebesgueovou mírou). Tvrzení plyne z monotonie míry (Věta 1).
- Neplatí, že každá neomezená měřitelná množina má nekonečnou Lebesgueovu míru.

Příklad 9. [2, str. 98] Uvažujme množinu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$.

- Uvedenou množinu lze zapsat jako spočetné disjunktní sjednocení $A = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j$, kde
$$A_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [j, j+1)\},$$
a $A_j = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_{jk}$, kde
$$A_{jk} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), x \in [j, j+1)\}.$$
- Podle definice Lebesgueovy míry platí $\lambda^2(A_{jk}) = \frac{2}{k}$. Posloupnost množin $\{A_{jk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ splňuje požadavky věty o spojitosti míry vzhledem k inkluzi dolů a platí
$$\lambda^2(A_j) = \lim_{k \to \infty} \lambda^2(A_{jk}) = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{k} = 0, \forall j \in \mathbb{Z}.$$
- Ze σ-aditivity míry potom plyne, že také $\lambda^2(A) = 0$, tedy množina A má konečnou Lebesgueovu míru, i když je neomezená.

V minulém příkladu jsme si ukázali neomezenou množinu s konečnou mírou, která však byla nulová. Pojďme se podívat, jak to bude u neprázdných otevřených množin, kde míra nulová být nemůže.

Uvažujme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$ prostor s Lebesgueovou mírou.

- Potom každá neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ má kladnou Lebesgueovu míru (existuje okolí bodu, které je podmnožinou této množiny, do tohoto okolí lze vepsat interval s kladnou Lebesgueovou mírou). Tvrzení plyne z monotonie míry (Věta 1).

- Neplatí však, že každá neprázdná otevřená množina s konečnou (nenulovou) Lebesgueovou mírou je omezená.

Příklad 10. [2, str. 98] Mějme množinu $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, kde $A_j = \left(2j - \frac{1}{2^j}, 2j + \frac{1}{2^j}\right)$.

- Množina A vznikla jako sjednocení otevřených intervalů, sama je tedy také otevřená. Dále A není omezená.

- Posloupnost množin $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin, neboť výpočtem snadno ověříme, že

$$\forall j \in \mathbb{N}: \; 2(j-1) + \frac{1}{2^{j-1}} < 2j - \frac{1}{2^j}.$$

- Podle σ-aditivity platí

$$\lambda^1(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^1(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{2^j} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 < \infty,$$

tedy tato otevřená množina s konečnou mírou je neomezená.

- Poznamenejme ještě pro zajímavost, že aplikace pravidla o σ-aditivitě je v souladu s větou o spojitosti míry vzhledem k inkluzi nahoru, neboť je $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} A_j$. Aplikací uvažované věty na novou posloupnost $\{B_n\}$, kde $B_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ bychom dostali naprosto stejný závěr. Stačí si jen uvědomit, že $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ a využít vlastnost konečné aditivity míry, která plyne induktivně z posledního tvrzení Věty 1.

2 Lebesgueův integrál

V minulé kapitole jsme se věnovali základům teorie míry a definovali jsme si Lebesgueovu míru, která nám umožňuje množinám z borelovské, případně zúplněné borelovské (lebesgueovské) σ-algebry přiřazovat jejich „velikost“. Tuhle myšlenku nyní využijeme při práci s měřitelnými funkcemi a následné konstrukci Lebesgueova integrálu měřitelné funkce. Zaměříme se na příklady poukazující na jeho zajímavé vlastnosti a protipříklady, které budou poukazovat na důležitost uvedených předpokladů.

2.1 Konstrukce Lebesgueova integrálu

Lebesgueův integrál definujeme postupně v několika krocích, nejprve pro jednoduché měřitelné funkce. Tyto funkce poté v dalším kroku využijeme k definici integrálu pro obecné měřitelné funkce, kdy budeme plošný obsah či objem pod grafem funkce postupně zezdola vyplňovat právě jednoduchými funkcemi. Tato definice odpovídá intuitivnímu pojetí interpretace integrálu.

Definice 1. [1, str. 57] *Nechť* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ *je měřitelný prostor. Potom zobrazení* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nazveme měřitelné, pokud*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}.$$

Definice 2. [1, str. 68] *(Lebesgueův integrál jednoduchých funkcí)*
Charakteristická funkce $\mathcal{X}_A$ *měřitelné množiny* A *je definovaná předpisem*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- *Lebesgueův integrál této funkce přes lebesgueovsky měřitelnou množinu* E *budeme definovat jako*

$$\int_E \mathcal{X}_A(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^n(A \cap E).$$

- *Pro jednoduchou funkci, vyjádřenou pomocí lineární kombinace charakteristických funkcí, ve tvaru* $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$*, kde* A_i *jsou lebesgueovsky měřitelné a* $a_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ *je*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^n(A_i \cap E).$$

Definice 3. [1, str. 69] *(Lebesgueův integrál měřitelných funkcí)*

- *Pro nezápornou měřitelnou funkci f a lebesgueovsky měřitelnou množinu E definujeme*
$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_E s(x)\,\mathrm{d}x, s \leq f, s \text{ je jednoduchá funkce}\right\}.$$
- *Pro obecnou měřitelnou funkci f a lebesgueovsky měřitelnou množinu E definujeme*
$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x,$$
kde $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.
- *Pokud $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$ jsou nekonečné, řekneme, že Lebesgueův integrál funkce f neexistuje.*

Poznamenejme, že v definici měřitelnost množin A_i zajišťuje měřitelnost uvedené jednoduché funkce. Společně s měřitelností množiny E je garantováno, že součty měr v jeho definici budou mít smysl.
Podle uvedené definice bychom však v praxi jen těžko počítali. Uveďme si proto následující větu, která nám dává do souvislosti vztah Newtonova integrálu k Lebesgueově integrálu.

Věta 1. [3, str. 82] *(O vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu) Nechť platí, že*

- *$f \in \mathcal{C}(a, b)$, kde $(a, b) \subset \mathbb{R}$,*
- *$f \in \mathcal{L}^*(a, b)$, tj. existuje Lebesgueův integrál f přes (a, b).*

Označíme-li F jako primitivní funkci k f na (a, b), potom je
$$(L)\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+).$$

2.2 Konvergence a limitní věty

Měřitelnost funkce mimo jiné zaručuje, že limitní funkce libovolné posloupnosti takových funkcí bude taky měřitelná. Uveďme si nyní dvě základní věty, které budou právě s takovou konvergencí souviset, a které nám usnadní mnohé výpočty.

Věta 2. [3, str. 71] *(Leviho o monotónní konvergenci) Nechť* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost měřitelných funkcí, pro které platí, že*

- *jsou nezáporné,*
- $f_{n+1} \geq f_n$ *skoro všude na* E, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pokud pro skoro všechna $x \in E$ *označíme*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

potom je

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nabízí se otázka, zda je opravdu nutný předpoklad o nezápornosti funkcí. Podívejme se proto na následující příklad.

Příklad 1. Je dána posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde f_n jsou funkce vyjádřené ve tvaru $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Ověřme možnost záměny limity a Lebesgeuova integrálu na $(-1, 0)$.

- Triviálně lze ověřit, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (-1,0) : f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)x} \geq \frac{1}{nx} = f_n(x).$$

- Dále platí, že

$$\forall x \in (-1,0) : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0.$$

- Spočítejme nyní Lebesgueův integrál členů posloupnosti a následně jejich limitu. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-1,0)} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|x| \Big|_{-1}^{0} = \lim_{n\to\infty} -\infty = -\infty.$$

  Nyní však počítejme integrál limitní funkce f. Dostáváme

$$\int_{(-1,0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(-1,0)} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

  a vidíme, že tato čísla jsou různá.

[3, str. 79] Předpoklad nezápornosti lze nahradit předpokladem, že

$$-\infty < \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \forall n \in \mathrm{N}, \text{nebo} \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x > -\infty.$$

Tento předpoklad v uvedeném protipříkladu splněn nebyl.

Leviho větu lze však použít k řešení příkladů o konvergenci integrálů nejen v $\mathbb{R}$, které bychom jinak jen těžko vyřešili.

Příklad 2. Spočítejme $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{1+(xyz)^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $E = [0,1]^3$.

- Pro $(x,y,z) \in E$ platí, že

$$(xyz)^{n+1} \leq (xyz)^n, \text{ a tedy } \frac{1}{1+(xyz)^{n+1}} \geq \frac{1}{1+(xyz)^n}.$$

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde $f_n(x,y,z) = \frac{1}{1+(xyz)^n}$ jsou nezáporné funkce.
- Bodová limita posloupnosti $\{f_n\}$ je skoro všude na E rovna 1, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(xyz)^n} = 1, (x,y,z) \in E \setminus \{(1,1,1)\},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(xyz)^n} = \frac{1}{2}, (x,y,z) \in \{(1,1,1)\}.$$

- Celkově tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{1+(xyz)^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_E \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(xyz)^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_E 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lambda^3(E) = 1,$$

  kde jsme využili toho, že předefinování funkce na množině nulové míry nemá na hodnotu integrálu vliv. Integrál funkce přes množinu E, která je skoro všude na E rovna 1, je stejný, jako integrál funkce, která je všude na E rovna 1.

Věta 3. [3, str. 80] *(Lebesgueova o majorizované konvergenci) Nechť* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost měřitelných funkcí, pro které platí, že*

- *skoro všude na* E *existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$*,*
- *existuje* $g \in \mathcal{L}^1(E)$ *(tj.* g *má přes* E *konečný Lebesgueův integrál) taková, že* $|f_n| \le g, \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Pokud pro skoro všechna $x \in E$ *označíme*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

potom je

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. [2, str. 71] Spočítejme $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ přímo i s využitím věty o majorizované konvergenci pro

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+(nx)^2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ n, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Volme $n \in \mathbb{N}$. Potom Newtonův integrál funkce $\frac{nx}{1+(nx)^2}$ spočteme jako

$$\int \frac{nx}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} (nx)^2 = t \\ 2n^2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{2n}\int \frac{2n^2x}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \\ = \frac{1}{2n}\ln|1+t| = \frac{1}{2n}\ln\left(1+(nx)^2\right).$$

- Lebesgueův integrál funkce f_n spočítáme podle věty o vztahu k Newtonově integrálu. Bude nás zajímat pouze hodnota funkce f_n na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, protože $\lambda^1(\mathbb{Q}) = 0$ a hodnoty funkce f_n na této množině tedy nijak hodnotu integrálu neovlivní. Proveďme tedy spojité předefinování funkcí $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Máme tedy

$$\int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)} \frac{nx}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\ln\left(1+(nx)^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right).$$

- Snadno poté již ověříme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right) = 0.$$

- Zkusme se nyní podívat na druhý přístup a omezit všechny funkce jedinou integrovatelnou majorantou. Pro zvolené pevné $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$ na intervalu $[0,1]$ spojitá funkce, a je tudíž omezená. Poznamenejme opět, že uvažujeme tyto funkce v předefinovaném tvaru oproti původnímu zadání, kdy víme, že tento postup nebude mít na výsledek žádný vliv. Spočítejme jejich derivace a najděme stacionární body funkcí f_n. Řešme následující rovnici.

$$f_n'(x) = \frac{n - n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2} = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}.$$

- Platí, že $f_n(0) = 0, f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{1}{2}, f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Každá funkce f_n je tedy nezáporná a shora omezená konstantní funkcí $\frac{1}{2}$, přičemž $\frac{1}{2} \in L^1\left((0,1)\right)$.

- Spočítejme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+(nx)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{nx}+nx} = 0, x > 0$. Podle věty o majorizované konvergenci je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} \frac{nx}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

což je výsledek shodný s předchozím rozborem pomocí přímého výpočtu.

- Skutečně, nalezná majoranta omezuje funkce z původního zadání skoro všude a jejich bodová limita je skoro všude na $(0,1)$ nulová. Pokud bychom spojité předefinování funkcí na nulové množině $\mathbb{Q}$ vynechali, výrazně by se nám zkomplikovala práce, neboť bychom nemohli využít derivace k hledání extrémů.

Předpoklad o konečnosti integrálu majoranty z věty o majorizované konvergenci je důležitý a nelze ho vynechat, což ukazuje následující příklad.

Příklad 4. Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}$, kde $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}$. Vyšetřeme konvergenci posloupnosti integrálů funkcí přes interval $(0,1)$.

- Spočítejme napřed bodovou limitu f funkcí f_n

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x} = 0, x > 0.$$

  Limitní funkce je všude na $(0,1)$ nulová, a tedy platí $\int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

- Zvolme nyní pevné $n \in \mathbb{N}$ a zkoumejme $\int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x} \, \mathrm{d}x$. Protože je

  $$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-nx} = 1,$$

  pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje $0 < \delta < 1$ tak, že $\forall x \in (0, \delta) : \mathrm{e}^{-nx} > 1 - \epsilon$. Volbou např. $\epsilon = \frac{1}{2}$ získáme odhad

  $$\int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x} \, \mathrm{d}x \geq \int_{(0,\delta)} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x} \, \mathrm{d}x \geq \int_{(0,\delta)} \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x = \infty,$$

  což naznačuje, že limita posloupnosti integrálů těchto funkcí nemůže být rovna 0.

- To, že jsou integrály nekonečné, také znamená, že integrované funkce nelze shora omezit majorantou s konečným integrálem.

Pokud však funkce budou mít konečný integrál, ani to neznamená, že budou předpoklady splněny, což ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 5. Ukažme, že neexistuje konečně integrovatelná funkce g, která stejnoměrně omezuje skoro všude na $\mathbb{R}$ posloupnost funkcí $\{f_n\}$, kde tyto funkce jsou dány předpisem

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}.$$

- Opět jednoduše ověříme, že

  $$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{e}^{-(x-n)^2} = 0, x \in \mathbb{R}.$$

- Protože platí $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, lze snadno substitucí ověřit, počítáme-li tento integrály jako Newtonovy, že

  $$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-n)^2} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x - n = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

- Pokud by existovala integrovatelná majoranta g, která omezuje všechny funkce na $\mathbb{R}$, muselo by podle věty o majorizované konvergenci platit

  $$0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} \mathrm{e}^{-(x-n)^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-n)^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}.$$

- Lze nahlédnout, že grafy funkcí f_n jsou postupně posouvané o n jednotek doprava. Není možné, aby existovala konečně integrovatelná nezáporná funkce g, která by tyto funkce shora stejnoměrně omezovala skoro všude na $\mathbb{R}$, to by bylo v rozporu s větou o majorizované konvergenci. Průsečík grafů funkcí f_n a f_{n+1} je vždy v bodě $x = n + \frac{1}{2}$, což lze snadno spočítat vyřešením jednoduché lineární rovnice při porovnání předpisů těchto funkcí a platí $f_n(n + \frac{1}{2}) = f_{n+1}(n + \frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$. Majoranta by tedy musela být větší než tato konstantní funkce, která má samozřejmě přes $\mathbb{R}$ nekonečný integrál.

Abychom ale demonstrovali sílu věty o majorizované konvergenci, pojďme se podívat na příklad, kde by bylo velmi obtížné, až nemožné uplatnit postup s přímým výpočtem.

Příklad 6. Spočítejme $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(0,1)} \frac{n^2 a \sin^2 x}{x + n^2 b \cos^2 x} \,\mathrm{d}x$, kde $a, b > 0$ jsou libovolné parametry.

- Pro $x \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}$ platí následující odhady:

$$\frac{n^2 a \sin^2 x}{x + n^2 b \cos^2 x} \leq \frac{n^2 a}{x + n^2 b \cos^2 x} \leq \frac{n^2 a}{n^2 b \cos^2 x} = \frac{a}{b \cos^2 x}.$$

- Tyto odhady nám dají integrovatelnou majorantu $g(x) = \frac{a}{b \cos^2 x}$, neboť

$$\int_{(0,1)} \frac{a}{b \cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{b} \tan x \Big|_0^1 = \frac{a}{b} \tan 1 < \infty.$$

- Máme tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} \frac{n^2 a \sin^2 x}{x + n^2 b \cos^2 x} \,\mathrm{d}x &= \int_{(0,1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 a \sin^2 x}{x + n^2 b \cos^2 x} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{(0,1)} \frac{a}{b} \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{a}{b} (\tan x - x) \Big|_0^1 = \frac{a}{b} (\tan 1 - 1). \end{aligned}$$

Příklad 7. Sestrojme posloupnost jednoduchých funkcí, která bodově konverguje k limitní funkci $f(x) = x^2$. Využijme tuto posloupnost k výpočtu Lebesgueova integrálu této funkce přes interval $[0,1]$.

- Definujme

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \mathcal{X}_{(x_i, x_{i+1}]}, \text{ kde } x_i = \frac{i}{n}.$$

- Volme $x \in [0,1]$. Potom platí

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(1) - f(1)|, \forall n \in \mathbb{N},$$

kdy tato nerovnost plyne z toho, že derivace f je kladná a rostoucí na celém intervalu $[0,1]$. Platí totiž, že hodnota funkce $f_n(x)$ je vždy rovna hodnotě funkce $f(x)$ v levém dělícím bodu intervalu $(x_i, x_{i+1}]$, na kterém se zrovna pohybujeme. Nerovnost je důsledkem Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Zvolíme-li x v posledním z intervalů, nerovnost platí taky, neboť funkce f je rostoucí.

- Limitním přechodem pro $x \in [0,1]$ obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} |f_n(1) - f(1)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n-1)^2}{n^2} - 1 \right| = 0,$$

tedy ekvivalentně $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

- Spočítejme nyní integrály

$$\int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \lambda^1 \left(\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$
$$= \frac{1}{n^3} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \bigg|_{k=n-1} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}.$$

- Podle věty o majorizované konvergenci (Věta 3), kde integrovatelná majoranta by mohla být například $g(x) = 1$ je

$$\int_{(0,1)} x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

- Poznamenejme, že pokud bychom tento integrál spočítali jako Newtonův (tedy pomocí primitivní funkce), dostaneme stejný výsledek, což je v souladu s větou o vztahu Lebesgueova a Newtonovu integrálu. Platí totiž

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2.3 Integrace funkčních řad

Uvedeme si pár zajímavých a důležitých důsledků vět uvedených v předchozí části. Tyto důsledky plynou z aplikace těchto konvergenčních vět na částečné součty uvažovaných řad.

Věta 4. *Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost měřitelných nezáporných funkcí skoro všude na E. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_E\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tato věta je jednoduchým důsledkem Leviho věty a lze ji použít při výpočtu integrálů, které by jako Newtonovy integrály vedly na výpočet neelementárních primitivních funkcí.

Příklad 8. [2, str. 92] Spočtěme $\int_{(0,1)}\frac{\ln(1-x^p)}{x}\,\mathrm{d}x$, kde $p>0$ je parametr.

- Integrací řad lze odvodit důležité vztahy. Uvažujme $t\in(0,1)$, pak platí

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

- Volme nyní libovolné $x\in(0,1)$, obdržíme

$$\begin{aligned}-\ln(1-x)&=\int_{(0,x)}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\int_{(0,x)}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,x)}t^n\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\end{aligned}$$

  kde záměna sumačního a integračního procesu je obhájena Větou 4.

- Protože $x\in(0,1)$, pak $x^p\in(0,1)$, a následně

$$-\frac{\ln(1-x^p)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{pn}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{pn-1}}{n}.$$

- Nyní můžeme spočítat

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}\frac{\ln(1-x^p)}{x}\mathrm{d}x&=-\int_{(0,1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{pn-1}}{n}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,1)}\frac{x^{pn-1}}{n}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{pn^2}=-\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6p},\end{aligned}$$

  kde jsme využili známou identitu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Uveďme si ještě protipříklad k důležitosti nezápornosti funkcí f_n.

Příklad 9. Vyšetřeme možnost záměny sumace a integrace mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ přes interval $(0, \infty)$.

- Platí známý vzorec
$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$
- Mělo by platit následující
$$\begin{aligned} 1 = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_{(0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{(0,\infty)} x^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
- Protože je $\int_{(0,\infty)} x^n\,\mathrm{d}x = \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, poslední uvedený součet nemá smysl. Předpoklad nezápornosti je pro lichá n porušen.

Předpoklad nezápornosti může být poněkud omezující. Uveďme ještě větu pro integraci řad, která je důsledkem věty o majorizované konvergenci.

Věta 5. [3, str. 80] *Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost měřitelných funkcí a existuje posloupnost měřitelných funckí $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takových, že*

- $|f_n| \le g_n, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje skoro všude na E,*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x$ *má konečný součet.*

Potom platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10. [2, str. 96] Spočítejme pomocí výše uvedené věty $\int_{(0,1)} \frac{1+x}{1-x} \ln \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$.

- Víme, že pro $t \in (0,1)$ je $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, a tedy

$$\int_{(0,1)} \frac{1+x}{1-x} \ln \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\int_{(0,1)} (1+x) \ln x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, \mathrm{d}x$$
$$= -\int_{(0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n + x^{n+1}) \ln x \, \mathrm{d}x.$$

- Odhadněme posloupnost funkcí f_n jako

$$|(x^n + x^{n+1}) \ln x| \leq -(x^n + x^{n+1}) \ln x = g_n(x),$$

přičemž je pro použití věty nutné, aby

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} -(x^n + x^{n+1}) \ln x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} < \infty,$$

kde jsme pro výpočet integrálů použili metodu per-partes a spočítali je jako Newtonovy. Je totiž

$$\int_{(0,1)} x^n \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \Big|_0^1 - \int_{(0,1)} \frac{x^n}{n+1} \, \mathrm{d}x$$
$$= -\int_{(0,1)} \frac{x^n}{n+1} \, \mathrm{d}x = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- Podle Věty 5 je

$$\int_{(0,1)} \frac{1+x}{1-x} \ln \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\int_{(0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+x) x^n \ln x \, \mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} (x^n + x^{n+1}) \ln x \, \mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

2.4 Absolutní konvergence integrálu

Nyní poukážeme na důležitost existence Lebesgueova integrálu ve větě o jeho vztahu k Newtonově integrálu. Newtonův integrál je totiž na rozdíl od Lebesgueova neabsolutně konvergentní.

Příklad 11. [1, str. 131] Ukažme, že $\int_{(0,\infty)} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ neexistuje ve smyslu definice Lebesgueova integrálu.

- Podívejme se napřed, jak to vypadá s kladnou částí integrované funkce. Integrovaná funkce nabývá nezáporných hodnot na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, kde $A_k = [2k\pi, (2k+1)\pi]$, a přičemž platí následující odhady.

$$\begin{aligned}\int_{A_k} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{(0,\pi)} \frac{\sin(x+2k\pi)}{x+2k\pi}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\pi)} \frac{\sin(x)}{x+2k\pi}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{(0,\pi)} \frac{\sin(x)}{\pi+2k\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k+1)\pi}\int_{(0,\pi)} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2k+1)\pi}.\end{aligned}$$

- Odtud plyne nerovnost

$$\int_{(0,\infty)} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^+ \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty.$$

- Integrací přes intervaly ze sjednocení $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, kde je zkoumaná funkce nekladná, a analogickou úvahou bychom ukázali, že

$$\int_{(0,\infty)} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^- \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2} = \infty,$$

  z čehož můžeme učinit závěr, že zkoumaný integrál neexistuje ve smyslu definice Lebesgueova integrálu.

Nyní se podívejme na stejný problém z hlediska Newtonova integrálu.

Příklad 12. [1, str. 131] Ukažme, že $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{(0,t)} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existuje a je rovna číslu $\frac{\pi}{2}$.

- Uvážíme-li, že

$$\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-yx}\Big|_{y=0}^{\infty} = \frac{1}{x}, x > 0,$$

  lze integrál ze zadání přepsat jako

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \int_{(0,t)} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_{(0,t)} \sin(x) \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_{(0,t)} \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

- Užitím Fubiniho věty (Věta 7) dále dostaneme, že

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(0,t)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_{(0,\infty)}\int_{(0,t)} \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

  Předpoklad o použití Fubiniho věty je splněn, neboť dvourozměrný integrál z absolutní hodnoty integrované funkce je pro pevné $t \in (0,\infty)$ konečný, protože integrovaná funkce je na zadaném intervalu vždy omezená, tedy

$$\int_{(0,t)\times(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}|\sin(x)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{(0,t)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}|\sin(x)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{(0,t)} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

- Nyní potřebujeme spočítat vnitřní integrál, zde využijeme metodu per-partes a spočteme jej jako Newtonův

$$\int_{(0,t)} \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-xy}(y\sin(x)+\cos(x))}{y^2+1}\Bigg|_{x=0}^{t}$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{-ty}(y\sin(t)+\cos(t))}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{1-\mathrm{e}^{-ty}(y\sin(t)+\cos(t))}{y^2+1}.$$

- Celý problém se nám nyní redukuje na hledání

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(0,\infty)} \frac{1-\mathrm{e}^{-ty}(y\sin(t)+\cos(t))}{y^2+1}\,\mathrm{d}y.$$

- Volme tedy libovolnou Heineho posloupnost $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s požadovanou vlastností $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $t_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Problém se nám redukuje na situaci, kdy budeme chtít použít větu o majorizované konvergenci k hledání

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} \frac{1-\mathrm{e}^{-t_n y}(y\sin(t_n)+\cos(t_n))}{y^2+1}\,\mathrm{d}y.$$

- Vyřešme nyní omezení takto vzniklé posloupnosti integrovaných funkcí majorantou

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-t_n y}(y\sin(t_n)+\cos(t_n))}{y^2+1}\right| \le \frac{1}{y^2+1} + \left|\frac{\mathrm{e}^{-t_n y}(y\sin(t_n)+\cos(t_n))}{y^2+1}\right|$$
$$\le \frac{1}{y^2+1} + \left|\frac{\mathrm{e}^{-y}(y+1)}{y^2+1}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-y}(y+1)+1}{y^2+1}.$$

- Ověřme ještě konečnou integrovatelnost majoranty

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-y}(y+1)+1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y &= \int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-y}(y+1)}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &\le \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-y}(y+1) + \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= -\mathrm{e}^{-y}(y+1) - \mathrm{e}^{-y} + \arctan(y)\Big|_{y=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} + 2 < \infty.\end{aligned}$$

- Můžeme tedy konečně napsat, že

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{1-\mathrm{e}^{-t_n y}(y\sin(t_n)+\cos(t_n))}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{(0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t_n y}(y\sin(t_n)+\cos(t_n))}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \arctan(y)\Big|_{y=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

- Závěrem tedy dostáváme, že

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(0,t)} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

což je přesně výsledek, který obdržíme, spočítáme-li uvedený integrál jako Newtonův. Při integraci přes libovolný interval $(0,t), 0 < t < \infty$ existují oba intergrály Newtonův i Lebesgueův a rovnají se. Při integraci přes $(0,\infty)$ již Lebesgueův integrál neexistuje, což jsme ukázali dříve, zatímco Newtonův integrál dává výsledek $\frac{\pi}{2}$. Předpoklad o existenci Lebesgueova integrálu ve větě o jeho vztahu k Newtonovu integrálu je tedy nesmírně důležitý.

2.5 Integrály s parametrem

V této sekci se budeme zabývat integrály, které budou funkčně záviset na parametru a ukážeme si, jaké máme při práci s nimi možnosti, zejména pro nás bude prakticky důležité podle parametru derivovat, což nám často velice usnadní postup výpočtu.

Věta 6. [3, str. 85] *(O derivaci integrálu podle parametru) Mějme $A \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. Nechť platí, že*

- *$f(\cdot, \alpha) : E \to \mathrm{R}$ je měřitelná funkce, $\forall \alpha \in A$,*
- *pro skoro všechna $x \in E$ a všechna $\alpha \in A$ existuje vlastní derivace $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)$,*
- *existuje $g \in \mathcal{L}^1(E)$ taková, že $|\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro skoro všechna $x \in E$ a všechna $\alpha \in A$,*
- *existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že $\int_E f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x < \infty$.*

Potom je

$$\int_E f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x < \infty, \forall \alpha \in A,$$

a navíc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_E f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \int_E \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Poměrně jednoduchou aplikací této věty můžeme například získat explicitní výjádření pro derivaci funkcí libovolného řádu.

Příklad 13. [3, str. 89] Uvažujme gama funkci, což je funkce mající předpis

$$\Gamma(p) = \int_{(0,\infty)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \ p > 0.$$

Ukažme, že všechny derivace jsou spojité pro $p > 0$ a že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma^{(k)}(p) = \int_{(0,\infty)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \ln^k(x)\,\mathrm{d}x$ pro $p > 0$.

- Nechť $p \in (a, b)$, kde $0 < a < b < \infty$ jsou libovolné avšak pevně zvolené hodnoty. Ukážeme-li, že $\Gamma^{(k)}$ je spojitá na libovolném takovém intervalu, pak je $\Gamma^{(k)}$ spojitá na $(0, \infty)$. Pro $k = 0$ máme i spojitost Γ.
- Pro $p \in (a, b)$ ukažme, že $\Gamma^{(k)}$ je spojitá v bodě p. Volme libovolnou Heineho posloupnost $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$ s vlastností $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$.
- Předpokládejme nyní, že známe integrální předpis derivace všech řádů k. Stačí pro spojitost ukázat, že pro $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \Gamma^{(k)}(p_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{(0,\infty)} x^{p_n - 1} \mathrm{e}^{-x} \ln^k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{(0,\infty)} \lim_{n \to \infty} x^{p_n - 1} \mathrm{e}^{-x} \ln^k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\infty)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \ln^k(x)\,\mathrm{d}x = \Gamma^{(k)}(p),$$

kde potřebujeme obhájit záměnu limity a integrálu v druhé rovnosti, neboť třetí rovnost plyne ze spojitosti integrandu $x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^k(x)$ jakožto funkce proměnné p při pevně zvoleném $x \in (0,\infty)$.

- Pokud $x \in (0,1)$, najdeme omezení integrovatelnou majorantou následujícím způsobem

$$|x^{p_n-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^k(x)| \leq x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}|\ln^k(x)|,$$

  přičemž

$$\int_{(0,1)} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}|\ln^k(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{(0,1)} x^{a-1}|\ln^k(x)|\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \ln(x) = t \\ x = \mathrm{e}^t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix}$$
$$= \int_{(-\infty,0)} e^{t(a-1)}|t|^k\,\mathrm{d}t = \int_{(0,\infty)} e^{-t(a-1)}t^k\,\mathrm{d}t < \infty.$$

- Pokud $x \in (1,\infty)$, dostaneme snadno

$$x^{p_n-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^k(x) \leq x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}x^k = x^{b+k-1}\mathrm{e}^{-x},$$

  přičemž

$$\int_{(1,\infty)} x^{b+k-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

- Závěrem dostáváme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsou splněny předpoklady věty o majorizované konvergenci, která obhajuje záměnu limitního a integračního procesu v třetím bodu postupu. $\Gamma^{(k)}$ jsou tedy spojité funkce, včetně samotné funkce Γ.

- Protože jsme během postupu majorizovali n-tou derivaci integrandu podle parametru $p \in (a,b)$, tedy výraz

$$|x^{p_n-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^k(x)|,$$

  podle věty o derivaci integrálu závislého na parametru platí, že

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_{(0,\infty)} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^k(x)\,\mathrm{d}x,$$

  a to pro libovolné $p \in (a,b)$, kde a,b byly voleny libovolně na začátku úlohy, tedy opět pro $p \in (0,\infty)$.

- Splnění předpokladu věty o derivaci integrálu podle parametru, který požaduje konečnost integrálu aspoň v jednom přípustném bodě, zde plyne opět z omezení konečně integrovatelnou majorantou, pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uveďme si protipříklad k tomu, proč je samotná existence α_0 s vlastností $\int_E f(x,\alpha_0)\,\mathrm{d}x < \infty$ důležitá.

Příklad 14. Spočítejme $\int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha > 0$ je hodnota parametru.

- Snadno si můžeme spočítat, že

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x} = \frac{x\mathrm{e}^{\alpha x}}{x} = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

- Volíme-li $\alpha \in (0,a), 0 < a < \infty$, potom

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \le \mathrm{e}^{ax}, \forall \alpha \in (0,a),$$

  a samozřejmě

$$\int_{(0,1)} \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{a}-1}{a} < \infty.$$

- Mělo by tedy platit, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{(0,1)}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)}\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha}.$$

- Integrací obou stran podle α dostaneme, že

$$\int_{(0,1)}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + C,$$

  kde C je vhodná konstanta. Dostáváme tedy nějakou formu funkční závislosti našeho integrálu na proměnné α.

- Nicméně samotné C se nám spočítat už nepodaří. Naše integrály jsou totiž ve skutečnosti nekonečné, protože

$$\int_{(0,1)}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x \ge \int_{(0,1)}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_0^1 = \infty, \forall\alpha\in(0,\infty).$$

Dále jsme mohli vidět, že spojitost integrandu se díky Heineho větě přenáší na spojitost integrálu, jakožto funkce parametru. Může se však stát, že i když integrand spojitá funkce nebude, přesto výsledný integrál s parametrem bude spojitá funkce, což ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 15. [2, str. 162] Mějme $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Definujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \in \mathbb{Q} \cap (0, 1), x \in (0, 1), \\ x, & y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1), x \in (0, 1). \end{cases}$$

- Zřejmě f není spojitá v proměnné y (pokud $x \neq \frac{1}{2}$, což je pouze jediný bod).
- Platí však, že

$$F(y) = \int_{(0,1)} f(x, y) \,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)} \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \text{ pro } y \in \mathbb{Q} \cap (0, 1),$$
$$F(y) = \int_{(0,1)} f(x, y) \,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \text{ pro } y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1).$$

- Celkem tedy máme, že

$$F(y) = \frac{1}{2}, y \in (0, 1).$$

  a tedy F je spojitá na $(0, 1)$.

Příklad 16. Najděme rekurentní funkční vztah pro výpočet $\int_{(0,\infty)} \frac{1}{(x^2+t^2)^n} \,\mathrm{d}x$, kde $t > 0$ je parametr, $n \in \mathbb{N}$.

- Pro $n = 1$ dostáváme

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{x^2 + t^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{(\frac{x}{t})^2 + 1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2} t \arctan(\frac{x}{t}) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2t}.$$

- Uvažujme nyní

$$F_n(t) = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{(x^2 + t^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

- Potom je

$$F_n'(t) = \int_{(0,\infty)} -\frac{2tn}{(x^2+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -2tnF_{n+1}(t),$$

neboť pro pevné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(x^2+t^2)^n} = -\frac{2tn}{(x^2+t^2)^{n+1}}$$

a zvolíme-li $0 < a < t < b < \infty$, pro libovolné vyhovující hodnoty a, b, dostaneme omezení

$$\left|-\frac{2tn}{(x^2+t^2)^{n+1}}\right| = \frac{2tn}{(x^2+t^2)^{n+1}} \le \frac{2bn}{(x^2+a^2)^{n+1}}.$$

- Podstatné je, že

$$\int_{(0,\infty)} \frac{2bn}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

neboť v bodě $x = 0$ se nenachází vertikální asymptota díky tomu, že $a > 0$ a pro $x \to \infty$ dostaneme konvergenci například srovnáním s integrálem funkce $\frac{1}{x^2}$, která má konečný integrál přes $(k, \infty), k > 0$.

- Dále z takového srovnání víme, že např. pro $t = 1$ je $\int_{(0,\infty)} \frac{1}{(x^2+1)^n} < \infty$.

- Podle věty o derivaci integrálu podle parametru dostáváme, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $0 < a < t < b < \infty$ (tedy $t > 0$) platí

$$F_{n+1}(t) = -\frac{F_n'(t)}{2tn},$$

přičemž víme, že $F_1(t) = \frac{\pi}{2t}$.

- Dostáváme tedy například

$$F_2(t) = -\frac{-\frac{\pi}{2t^2}}{2t} = \frac{\pi}{4t^3},$$
$$F_3(t) = -\frac{-\frac{3\pi}{4t^4}}{4t} = \frac{3\pi}{16t^5}.$$

2.6 Vícerozměrné integrály

V této sekci se podíváme na základní, ale velmi důležité a praktické nástroje, jak přistupovat k výpočtu integrálů funkcí přes mnohorozměrné množiny. Důležitými přístupy pro nás bude výpočet mnohorozměrného integrálu pomocí sekvence jednorozměrných integrálů, ale také transformace množiny, přes kterou integrujeme na množinu jinou, což může v praxi vést na snazší výpočet.

Věta 7. [3, str. 91] *(Fubiniho) Nechť $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelná množina a $f \in \mathcal{L}^*(E)$, tj. existuje Lebesgueův integrál f přes E. Pak jsou měřitelné řezy*

- $E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$ *pro skoro všechna* $x \in \mathbb{R}^n$,
- $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$ *pro skoro všechna* $y \in \mathbb{R}^m$

a platí, že

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Pojďme se nejdříve přesvědčit, že je skutečně důležitý předpoklad existence integrálu funkce f přes množinu E. Uvažujme následující příklad.

Příklad 17. Zkoumejme $\int_E \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $E = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$.

- Spočítejme nejprve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{(-\pi,\pi)} \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} -\sin(y)\cos(x)\Big|_{x=-\pi}^{\pi}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

- Obrátíme-li pořadí integrace, obdržíme nyní

$$\int_{(-\pi,\pi)} \int_{\mathbb{R}} \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{(-\pi,\pi)} -\sin(x)\cos(y)\Big|_{y=-\infty}^{\infty}\,\mathrm{d}x,$$

avšak $\lim\limits_{y\to\infty} \cos(y)$ a rovněž $\lim\limits_{y\to-\infty} \cos(y)$ neexistují. Uvedený výpočet nedává smysl a $\int_E \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ neexistuje.

Pokud ve Fubiniho větě nebudeme vnější integrály počítat přes $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, ale pouze přes množiny, kde jsou řezy neprázdné (jinde bude integrál stejně nulový), je nutné přidat předpoklad o měřitelnosti těchto množin.

Příklad 18. Z první kapitoly víme, že existuje lebesgueovsky neměřitelná množina. Označme ji M.

- Definujme si $E = M \times \{1\}$. Protože víme, že $E \subset \mathbb{R} \times \{1\}$, přičemž $\lambda^2(\mathbb{R} \times \{1\}) = 0$, z úplnosti Lebesgueovy míry víme, že taky $\lambda^2(E) = 0$.
- Uvažujme na E libovolnou měřitelnou funkci f. Potom platí, že

$$\int_E f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

integrál tedy existuje a je konečný.

- Zkusme se na tento problém nyní podívat z hlediska Fubiniho věty, která využívá projekce množin. Mělo by platit, že

$$\int_E f(z)\,\mathrm{d}z = \int_M \int_{\{1\}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_M 0\,\mathrm{d}x,$$

protože $\int_{\{1\}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.

- Ale z definice Lebesgueova integrálu by ale muselo platit

$$\int_M 0\,\mathrm{d}x = 0 \cdot \lambda^1(M),$$

kdy jsme ale na začátku předpokládali, že M je neměřitelná. Uvedený výraz $\lambda^1(M)$ tedy nemá vůbec žádný smysl.

Pojďme se podívat na příklad, kdy nám Fubiniho věta bude při výpočtu velmi užitečným nástrojem a ukažme si, že někdy může být z praktického hlediska klíčové i pořadí provedení dílčích integrací.

Příklad 19. [2, str. 146] Spočítejme $\int_E x\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pokud $E = (0,\infty) \times (a,b)$, kde $a, b > 0$ jsou libovolné parametry.

- Uvedená funkce na E nemění znaménko. V takovém případě dle definice Lebesgueova integrálu nemůže nastat problém s nekonečností jak kladné, tak záporné části. Integrál funkce tedy existuje.
- Podle Fubiniho věty jej můžeme počítat jako

$$\int_E x\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(a,b)} \int_{(0,\infty)} x\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(a,b)} -\frac{1}{2y}\mathrm{e}^{-x^2y}\Big|_{x=0}^{\infty}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(a,b)} \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(y)\Big|_{y=a}^{b} = \frac{1}{2}(\ln(b) - \ln(a)) = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

- Pojďme se podívat na druhou možnost postupu.

$$\int_E x\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\infty)}\int_{(a,b)} x\mathrm{e}^{-x^2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{(0,\infty)} \frac{x}{-x^2}\mathrm{e}^{-x^2y}\Big|_{y=a}^{b}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

- Vidíme, že tento integrál bychom přímým postupem jen těžko spočítali. Užitím Fubiniho věty jsme však zadaný integrál spočítali dříve a navíc jsme nepřímo odvodili vztah ve tvaru

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},\ \text{kde } a,b>0.$$

Další zajímavou aplikací je výpočet míry dané množiny. Můžeme si snadno rozmyslet, že pro výpočet Lebesgueovy míry n-rozměrné množiny E platí $\lambda^n(E) = \int_E 1\,\mathrm{d}x$. Uveďme si příklad.

Příklad 20. [2, str. 141] Spočítejme Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}^3$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (0,a), y \in (0,b), z \in (0, \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q})\}$, kde parametry $a,b,p,q > 0$ jsou libovolně volitelné.

- Z definice Lebesgueova integrálu víme, že

$$\lambda^3(M) = \int_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

- Rozepišme nyní tento integrál pomocí Fubiniho věty jako

$$\int_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{(0,a)\times(0,b)}\int_{\left(0,\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{(0,b)}\int_{(0,a)}\int_{\left(0,\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- Tento integrál nyní spočítáme jako iterovaný a obdržíme míru množiny M jako

$$\lambda^3(M) = \int_{(0,b)}\int_{(0,a)}\int_{\left(0,\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,b)}\int_{(0,a)} \frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{(0,b)} \frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\,\mathrm{d}y = \frac{a^3b}{6p}+\frac{ab^3}{6q} = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

V některých případech pro nás může být složitá integrace díky tomu, jak je zadaná množina, přes kterou integrujeme. Pojďme se podívat na nástroj, který nám v takovém případě může pomoci.

Věta 8. [3, str. 101] *(O substituci) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a pro zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí, že*

- $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$,
- *φ je prosté zobrazení na množině G.*

Potom pro libovolnou měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou na $\varphi(G)$ platí

$$\int_{\varphi(G)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(x))|\det J_\varphi(x)|\,\mathrm{d}x,$$

má-li aspoň jeden z integrálů smysl.

Připomeňme, že $\det J_\varphi(x)$ je determinant tzv. Jacobiho matice φ v bodě x, což je matice parciálních derivací vektorové funkce φ postupně podle všech proměnných. Zaměřme se nyní na to, proč je důležité, aby zobrazení φ bylo prosté.

Příklad 21. Spočítejme Lebesgueův integrál funkce $f(x, y) = xy$ přes množinu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, kde $r > 0$ je parametr.

- Definujme dvě zobrazení φ_1, φ_2 následujícím způsobem
$$\varphi_1(\rho, \psi) = (\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi)),\ \text{kde } \rho \in (0, r), \psi \in (0, 2\pi),$$
$$\varphi_2(\rho, \psi) = (\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi)),\ \text{kde } \rho \in (0, r), \psi \in (0, \frac{5}{2}\pi).$$
- Geometricky lze obraz $\varphi_1((0, r)\times(0, 2\pi))$ stejně jako $\varphi_2((0, r)\times(0, 3\pi))$ interpretovat jako kruh o poloměru r. Platí však, že φ_1 je na svém definičním oboru prosté zobrazení, zatímco φ_2 nikoli.
- V obou případech je $\det J_{\varphi_1}(\rho, \psi) = \det J_{\varphi_2}(\rho, \psi) = \rho$.
- V prvním případě, kdy předpoklady Věty 8 platí, dostaneme
$$\int_E xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,r)\times(0,2\pi)} \rho\cos(\psi)\rho\sin(\psi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\psi$$
$$= \int_{(0,r)}\int_{(0,2\pi)} \rho^3\frac{\sin(2\psi)}{2}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\rho = \int_{(0,r)} \rho^3 \frac{-\cos(2\psi)}{4}\bigg|_{\psi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_{(0,r)} 0\,\mathrm{d}\rho = 0.$$

- V druhém případě, kdy φ_2 prosté není, však máme

$$\int_E xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,r)\times(0,\frac{5}{2}\pi)} \rho\cos(\psi)\rho\sin(\psi)\rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\psi$$
$$= \int_{(0,r)}\int_{(0,\frac{5}{2}\pi)} \rho^3 \frac{\sin(2\psi)}{2}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\rho = \int_{(0,r)} \rho^3 \frac{-\cos(2\psi)}{4}\Big|_{\psi=0}^{\frac{5}{2}\pi}\,\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_{(0,r)} \frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^3}{4}\,\mathrm{d}\rho = \int_{(0,r)} \frac{\rho^3}{2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{r^4}{8}.$$

- Vidíme, že ve dvou případech dostáváme dva různé výsledky. Správně je však jen první výsledek a $\int_E xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. V druhém případě jsme díky tomu, že substituční zobrazení nebylo prosté, integrovali přes určitou část množiny E dvakrát, a proto jsme nedostali správný výsledek.

Věta o substituci má své užití zejména tehdy, chceme-li počítat integrály přes množiny, které nelze zapsat jako kartézský součin intervalů a pouze použití Fubiniho věty by vedlo na neúměrně náročný výpočet.

Příklad 22. [2, str. 142] Určeme Lebesgueovu míru množiny A, která je ohraničená plochou s rovnicí $c(x^2+y^2) = a^2(c-z)$ a rovinou $z=0$ pro $a, c > 0$ libovolné.

- Geometricky je uvedený útvar kužel s vrcholem pro $z = c$. Definujme proto zobrazení φ jakožto jedno ze standardních zobrazení pro substituci

  $$\varphi(\rho,\psi,z) = (\rho\cos(\psi), \rho\sin(\psi), z),$$

  s definičním oborem $G \subset \mathbb{R}^3$, popsaným nerovnostmi

  $$0 < \rho < \frac{a^2(c-z)}{c},$$
  $$0 < \psi < 2\pi,$$
  $$0 < z < c.$$

- Poznamenejme, že nezáleží na tom, zda uvedené nerovnosti budeme uvažovat v ostrém či neostrém tvaru, neboť uvedené množiny by se lišily pouze o množinu nulové míry, která by na hodnotu integrálu neměla vliv.

- Lze spočítat, že opět platí $\det J_\varphi(\rho,\psi,z) = \rho$.

- Dále platí, že $\varphi(G) = A$, φ je prosté zobrazení.
- Můžeme tedy psát, že

$$\lambda^3(A) = \int_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_{(0,c)} \int_{(0,2\pi)} \int_{(0,t)} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}z,$$

kde $t = \sqrt{\frac{a^2(c-z)}{c}}$.

- Konečně obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{(0,c)} \int_{(0,2\pi)} \int_{(0,t)} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}z &= \int_{(0,c)} \int_{(0,2\pi)} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{t} \mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}z \\ = \int_{(0,c)} \int_{(0,2\pi)} \frac{a^2(c-z)}{2c} \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}z &= \frac{a^2}{2c} 2\pi \int_{(0,c)} (c-z) \,\mathrm{d}z \\ = \frac{\pi a^2}{c}(cz - \frac{z^2}{2})\bigg|_{z=0}^{c} &= \frac{\pi a^2}{c}\frac{c^2}{2} = \frac{\pi a^2 c}{2}.\end{aligned}$$

- Pro Lebesgueovu míru množiny A tedy platí

$$\lambda^3(A) = \frac{\pi a^2 c}{2}.$$

Závěr

Cílem mojí práce bylo představit stručně teorii míry a Lebesgueova integrálu a vyřešit při tom příklady a protipříklady, které ilustrovaly to, že v matematických tvrzeních jsou jejich předpoklady nepostradatelné a nelze je v žádném případě zanedbat.

Povedlo se mi shrnout základní teoretické poznatky a zkonstruovat výstižné protipříklady k představenému matematickému aparátu. Příklady se mi podařilo úspěšně vyřešit i s podrobným komentářem.

Seznam použité literatury

Reference

[1] SCHILLING, René L. *Measures, integrals and martingales.* New York: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521615259.

[2] LUKEŠ, Jaroslav. *Příklady k teorii Lebesgueova integrálu.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968.

[3] ČERNÝ, Robert a Milan POKORNÝ. *Matematická analýza pro fyziky III.* [online]. 2020, [cit. 2023-03-23]. dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/stary_web/skripta_MAF3.pdf.