

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Stabilní a nestabilní variety planárních  
dynamických systémů



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**  
Vedoucí diplomové práce: **Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**  
Vypracovala: **Bc. et Bc. Libuše Horáčková**  
Studijní program: N1101 Matematika  
Studijní obor: Matematika a její aplikace  
Forma studia: prezenční  
Rok odevzdání: 2018

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Bc. et Bc. Libuše Horáčková

**Název práce:** Stabilní a nestabilní variety planárních dynamických systémů

**Typ práce:** Diplomová práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

**Rok obhajoby práce:** 2018

**Abstrakt:** Tato práce se zabývá definováním fázového portréту planárního dynamického systému a jeho typických orbit, definováním stabilních a nestabilních variet a popisem metody jejich určování. Dále jsou zde uvedeny příklady homoklinických a heteroklinických orbit. Praktická část se zabývá určením fázových portrétů zadaných planárních dynamických systémů a vytvořením jejich fázových portrétů pomocí matematického softwaru.

**Klíčová slova:** dynamický systém, stabilní a nestabilní variety, homoklinické, heteroklinické a periodické orbity, fázové portréty

**Počet stran:** 59

**Počet příloh:** 0

**Jazyk:** Český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Bc. et Bc. Libuše Horáčková

**Title:** Stable and unstable manifolds of planar dynamical system

**Type of thesis:** Diploma

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

**The year of presentation:** 2018

**Abstract:** This work deals with defining the phase portrait of a planar dynamic system and its typical orbits, defining stable and unstable varieties and describing the methods of their determination. Below are examples of homoclinic and heteroclinic orbits. The practical part deals with determination of phase portraits of given planar dynamical systems and creation of their phase portraits using mathematical software.

**Key words:** dynamical system, stable and unstable varieties, homoclinic, heteroclinic and periodic orbits, phase portraits

**Number of pages:** 59

**Number of appendices:** 0

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením svojí vedoucí diplomové práce a uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci dne

## **Poděkování**

Na tomto místě bych ráda velice poděkovala své vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a vstřícný přístup, který mi při vedení diplomové práce věnovala. Ráda bych také poděkovala svému příteli Ing. Radku Halfarovi za všeobecnou podporu.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Definice fázového portréту planárního dynamického systému a typických orbit</b>	<b>10</b>
1.1	Dynamický systém . . . . .	10
1.2	Planární dynamický systém . . . . .	10
1.3	Typy orbit . . . . .	11
1.3.1	Kritický bod . . . . .	16
1.3.2	Periodická orbita . . . . .	18
1.3.3	Neomezené orbity . . . . .	21
1.3.4	Homoklinické a heteroklinické orbity . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Definice stabilních a nestabilních variet a popis metody jejich určování</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Příklady</b>	<b>31</b>
	<b>Závěr</b>	<b>58</b>
	<b>Literatura</b>	<b>59</b>

# Seznam obrázků

1	Znázornění klasifikace fázových portrétů v rovině stopa-determinant.	13
2	Znázornění stabilního kritického bodu. [1]	17
3	Znázornění asymptoticky stabilního kritického bodu. [1]	17
4	Ukázka periodické orbity $\Gamma = \gamma(\mathbf{x}^0)$ . [2]	19
5	Vpravo: Limitní cyklus, kde $\Gamma = \omega(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^1)$ . Vlevo: Limitní cyklus, kde $\Gamma = \alpha(\mathbf{x}^0) = \alpha(\mathbf{x}^1)$ . [2]	19
6	Případ (i) z věty 1.25. [2]	22
7	Případ (ii) z věty 1.25, kdy $\gamma_+(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$ . [2]	22
8	Případ (ii) z věty 1.25, kdy $\gamma_+(\mathbf{x}^0) \neq \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$ . [2]	22
9	Případ (iii) z věty 1.25, kde $\omega(\mathbf{x}^0)$ se skládá z kritického bodu $\bar{\mathbf{x}}$ a z homoklinické orbity, jejíž $\alpha$ -limitní i $\omega$ -limitní množinou je bod $\bar{\mathbf{x}}$ . [2]	23
10	Na tomto obrázku se vyskytují 4 typy orbit: kritický bod, periodická orbita (zeleně), homoklinická orbita (červeně), neomezené orbity (modře). (Je to fázový portrét systému: $x_1'(t) = 2x_2(t) - x_2^2(t)$ , $x_2'(t) = -2x_1(t)$ .) [1]	24
11	Vlevo: Výlevka rovnice (1). Vpravo: Zřídlo rovnice (1). [1]	25
12	Sedlo rovnice (1). [1]	25
13	Ohnisko rovnice (1), orbita má nekonečný počet oběhů. [1]	26
14	Uzel rovnice (1), orbita má konečný počet oběhů. [1]	26

15	Přímka $\mathbf{p}$ ve fázovém portréту lineární variační rovnice (vlevo) a lokálně stabilní varieta $W_{loc}^S$ (vpravo), na které tok směřuje k bodu $\bar{\mathbf{x}}$ . [2] . . . . .	27
16	Přímka $\mathbf{p}$ ve fázovém portréту lineární variační rovnice (vlevo) a lokálně nestabilní varieta $W_{loc}^N$ (vpravo), na které tok směřuje od bodu $\bar{\mathbf{x}}$ . [2] . . . . .	28
17	Příklady křivek $W_{loc}^S$ a $W_{loc}^N$ ve fázovém portréту rovnice (10). Tyto křivky procházejí počátkem a každá se dotýká jedné osy. [2] . . . . .	29
18	Křivky $W_{loc}^S$ a $W_{loc}^N$ ve fázovém portréту rovnice (9). . . . .	31
19	Fázový portrét lineární soustavy (14). . . . .	33
20	Fázový portrét nelineární soustavy (16) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét rovnice (13) v okolí $\bar{X}_1$ .) . . . . .	35
21	Fázový portrét lineární soustavy (22). . . . .	36
22	Fázový portrét nelineární soustavy (24) v okolí počátku. Je stejný jako fázový portrét rovnice (13) v okolí $\bar{X}_2$ .) . . . . .	38
23	Celkový fázový portrét nelineární soustavy (13) s heteroklinickou orbitou. . . . .	39
24	Fázový portrét rovnice (30) . . . . .	40
25	Fázový portrét lineární soustavy (31) s vlastními přímkami $\mathbf{p}$ a $\mathbf{r}$ . . . . .	41
26	Lokálně nestabilní varieta bodu $\bar{X}_1$ . . . . .	43
27	Lokálně stabilní varieta bodu $\bar{X}_1$ . . . . .	44
28	Fázový portrét nelineární soustavy (34) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí $\bar{X}_1$ .) . . . . .	44
29	Fázový portrét lineární soustavy (39) s vlastní přímkou $\mathbf{p}$ . . . . .	45
30	Fázový portrét nelineární soustavy (42) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí $\bar{X}_2$ .) . . . . .	47
31	Fázový portrét lineární soustavy (45) s vlastními přímkami $\mathbf{p}$ a $\mathbf{r}$ . . . . .	48
32	Lokálně nestabilní varieta bodu $\bar{X}_3$ . . . . .	49
33	Lokálně stabilní varieta bodu $\bar{X}_3$ . . . . .	50
34	Fázový portrét nelineární soustavy (48) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí $\bar{X}_3$ .) . . . . .	51
35	Fázový portrét lineární soustavy (53) s vlastními přímkami $\mathbf{p}$ a $\mathbf{r}$ . . . . .	52
36	Lokálně stabilní varieta bodu $\bar{X}_4$ . . . . .	54
37	Fázový portrét nelineární soustavy (56) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí $\bar{X}_4$ .) . . . . .	54
38	Celkový fázový portrét nelineární soustavy (29) s heteroklinickými orbitami. . . . .	55
39	Výřez z celkového fázového portréту nelineární soustavy (29) s vyznačenými trojúhelníky. . . . .	57

# Úvod

Dynamickými systémy lze popsat různorodé chování v přírodě. Příklady dynamických systémů můžeme nalézt všude v okolním světě, mezi nejznámější fyzikální modely patří matematické kyvadlo, lineární harmonický oscilátor nebo Van der Polův oscilátor. Existuje rozsáhlá literatura věnovaná populačním modelům, epidemickým modelům, neuronovým sítím nebo ekonomickým modelům.

Cílem této diplomové práce je vyšetřování fázových portrétů planárních dynamických systémů a typických orbit. Hlavní pozornost je zaměřena na stabilní a nestabilní variety a popis jejich určování. Dalším cílem je uvedení příkladů homoklinických a heteroklinických orbit, určení fázových portrétů zadaných planárních dynamických systémů a vytvoření jejich fázových portrétů pomocí matematického softwaru. Z fázových portrétů lze vyčíst dlouhodobý vývoj dvou sledovaných veličin  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  měnících se v čase  $t$  pro libovolné počáteční stavy  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ .

Diplomová práce je rozdělena do tří částí. První část se zaměřuje na definování fázového portréту planárního dynamického systému a typických orbit. Druhá část se zabývá definicí stabilních a nestabilních variet a popisem metody jejich určování. Třetí kapitola obsahuje řešené příklady a jejich fázové portréty vykreslené pomocí MATLABu.



**Značení:**

- $\mathbb{R}$  označuje množinu reálných čísel.
- $\mathbb{N}$  označuje množinu přirozených čísel.
- Zvolíme-li  $n \in \mathbb{N}$ , pak  $\mathbb{R}^n$  značí množinu všech  $n$ -tic reálných čísel.
- Normu v  $\mathbb{R}^n$  značíme  $\|\cdot\|$  a definujeme předpisem

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

# 1 Definice fázového portréту planárního dynamického systému a typických orbit

V této kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [1] a [2].

## 1.1 Dynamický systém

Matematický model systému, který se mění v čase nazýváme dynamickým systémem. Dynamický systém může být spojitý (sledování systému nepřetržitě) nebo nespojitý (sledování v oddělených časových okamžicích).

## 1.2 Planární dynamický systém

Při studiu planárních dynamických systémů sledujeme současně časový vývoj dvou veličin (v  $\mathbb{R}^2$ ). Planární dynamické systémy vznikají ze soustavy dvou autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)), \\x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)).\end{aligned}$$

Obecně lze tuto soustavu zapsat ve tvaru vektorové rovnice

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{1}$$

kde  $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  je vektorová funkce dvou proměnných  $x_1, x_2$  a  $\mathbf{f}$  má spojitě parciální derivace na množině  $G$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definice 1.1. Řešení rovnice (1)** na intervalu  $J \subset \mathbb{R}$  rozumíme vektorovou funkci  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  takovou, že  $\mathbf{x} \in C^1(J)$  splňuje rovnici (1) pro každé  $t \in J$ .

**Definice 1.2. Úloha**

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \tag{2}$$

se nazývá počáteční (Cauchyova) úloha.

**Věta 1.3.** (Základní věta o existenci a jednoznačnosti):

Nechť  $G$  je otevřená podmnožina v  $\mathbb{R}^2$  obsahující bod  $\mathbf{x}^0$ . Dále nechť  $\mathbf{f} \in C^1(G)$ .

Potom úloha (2) má jediné řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  definované na maximálním intervalu  $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0}) \subset \mathbb{R}$  obsahujícím 0.

Řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  splňuje

$$\begin{aligned}\varphi'(t, \mathbf{x}^0) &= \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) \text{ pro každé } t \in I_{\mathbf{x}^0}, \\ \varphi(0, \mathbf{x}^0) &= \mathbf{x}^0.\end{aligned}$$

**Věta 1.4.** (Generování dynamického systému):

Nechť  $\mathbf{x}^0$  je libovolný bod z otevřené množiny  $G$  v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(G)$  a nechť  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je řešením úlohy (2) na  $\mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  jako vektorová funkce  $n+1$  proměnných  $t, x_1^0, \dots, x_n^0$  zobrazuje množinu  $\mathbb{R} \times G$  do  $G$ .

Potom  $\varphi$  je tok. Dále pro každé pevné  $t \in \mathbb{R}$  je zobrazení  $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$  dynamický systém v  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.3 Typy orbit

**Definice 1.5.** Orbita řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina bodů  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , kde  $t \in I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0})$ .

**Definice 1.6.** **Kladná část orbity** řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina bodů  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , kde  $t \in [0, b_{\mathbf{x}^0})$ . Značíme ji  $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$ . **Záporná část orbity** řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina bodů  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , kde  $t \in [a_{\mathbf{x}^0}, 0)$ . Značíme ji  $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$ .

**Definice 1.7.** **Fázový portrét** rovnice (1) je množina orbit všech řešení rovnice společně se šipkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  na orbitě pro rostoucí  $t$ . Prostor  $\mathbb{R}^2$  obsahující fázový portrét rovnice (1) nazveme **fázový prostor**.

**Definice 1.8.** Bod  $\mathbf{y}$  je  $\omega$ -limitní bod orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ , jestliže existuje posloupnost reálných čísel  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  taková, že pokud

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = b_{\mathbf{x}^0},$$

potom platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}.$$

**Definice 1.9.** Množina všech  $\omega$ -limitních bodů orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  se nazývá  $\omega$ -limitní množina orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  a značí se  $\omega(\mathbf{x}^0)$ .

Geometricky lze definici množiny  $\omega(\mathbf{x}^0)$  definovat takto:

$$\omega(\mathbf{x}^0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(\gamma^+(\varphi(t, \mathbf{x}^0)))},$$

kde  $\gamma^+$  je kladná část orbity  $\gamma$  a operací uzávěru přidáme k orbitě  $\gamma^+(\varphi(t, \mathbf{x}^0))$  všechny její hromadné body.

**Definice 1.10.** Bod  $\mathbf{y}$  je  $\alpha$ -limitní bod orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ , jestliže existuje posloupnost reálných čísel  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  taková, že pokud

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = a_{\mathbf{x}^0},$$

potom platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}.$$

**Definice 1.11.** Množina všech  $\alpha$ -limitních bodů orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  se nazývá  $\alpha$ -limitní množina orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  a značí se  $\alpha(\mathbf{x}^0)$ .

Geometricky ji lze definovat takto:

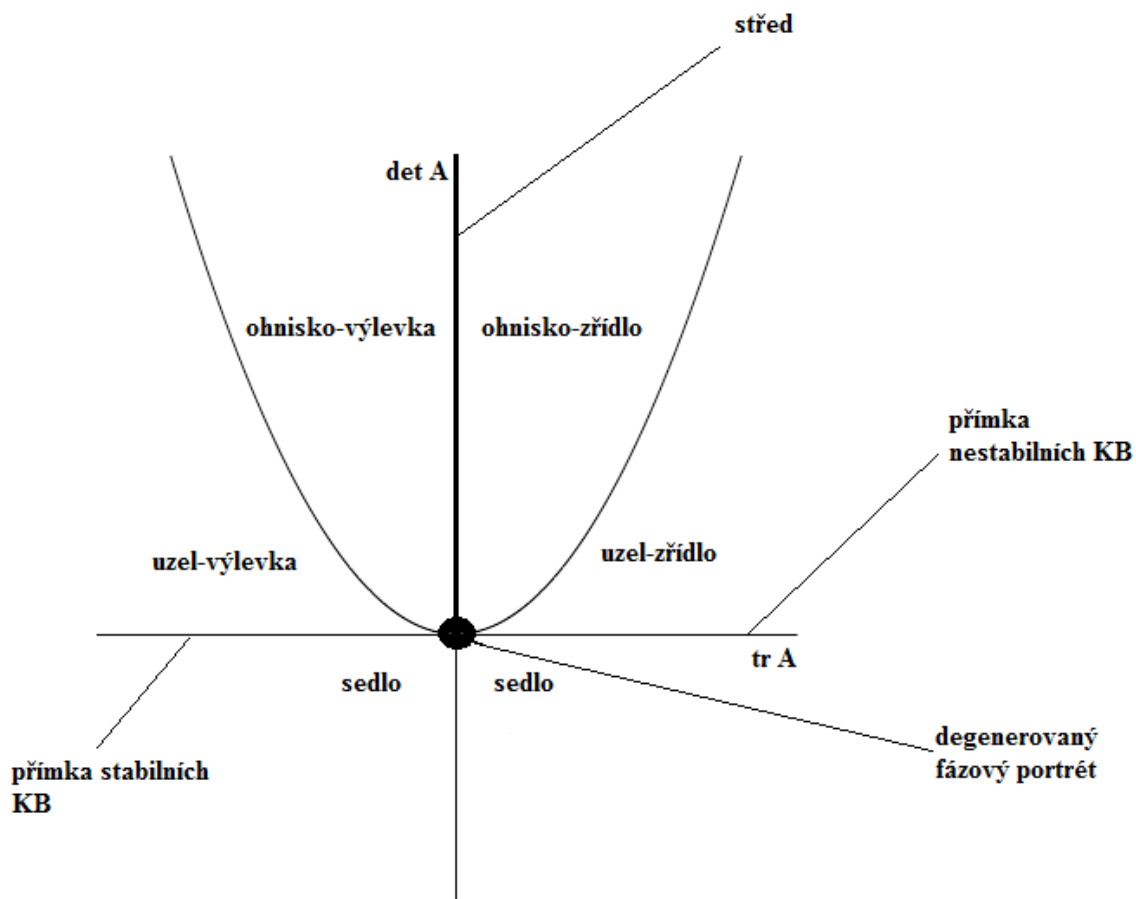
$$\alpha(\mathbf{x}^0) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{(\gamma^-(\varphi(t, \mathbf{x}^0)))},$$

kde  $\gamma^-$  je záporná část orbity  $\gamma$ .

Speciálním případem systému (1) je lineární systém s konstantní maticí  $A$  tvaru

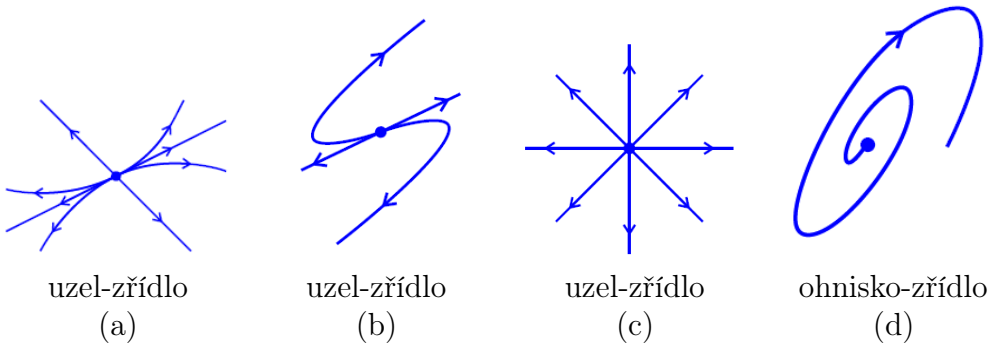
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (3)$$

Pro tento systém jsou známy všechny typy fázových portrétů.



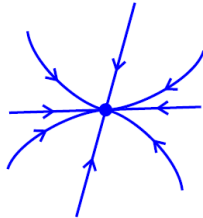
Obr. 1: Znázornění klasifikace fázových portrétů v rovině stopa-determinant.

- **Třída I. (Zřídlo):**  $\det(A) > 0, \operatorname{tr}(A) > 0$   
 Fázový portrét zřídlo je vždy nestabilní.  $\alpha(x^0)$  je kritický bod,  $\omega(x^0)$  neexistuje.

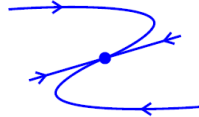


- **Třída II. (Výlevka):**  $\det(A) > 0, \operatorname{tr}(A) < 0$

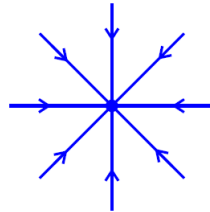
Fázový portrét výlevka je vždy asymptoticky stabilní.  $\alpha(\mathbf{x}^0)$  neexistuje,  $\omega(\mathbf{x}^0)$  je kritický bod.



uzel-výlevka  
(a)



uzel-výlevka  
(b)



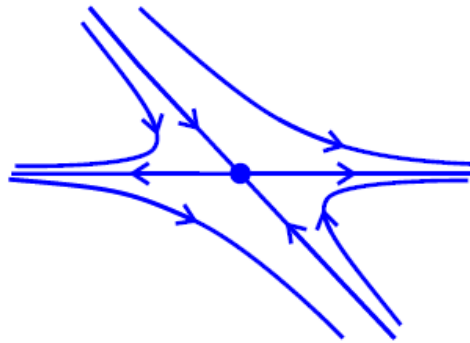
uzel-výlevka  
(c)



ohnisko-výlevka  
(d)

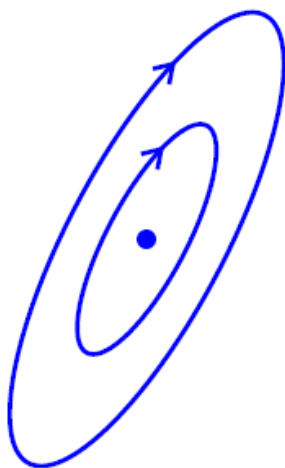
- **Třída III. (Sedlo):**  $\det(A) < 0$

Fázový portrét sedlo je vždy nestabilní.

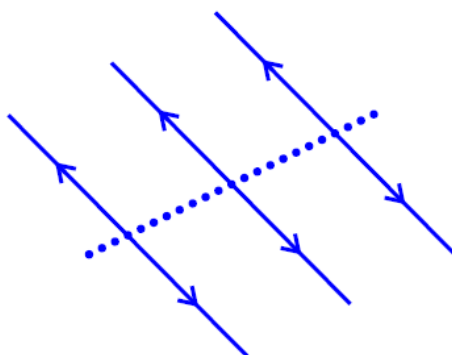


- **Třída IV. (Střed):**  $\det(A) > 0, \operatorname{tr}(A) = 0$

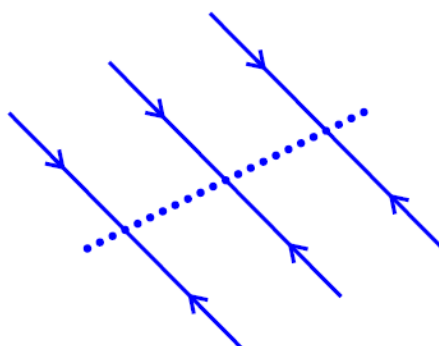
Fázový portrét střed je vždy stabilní.



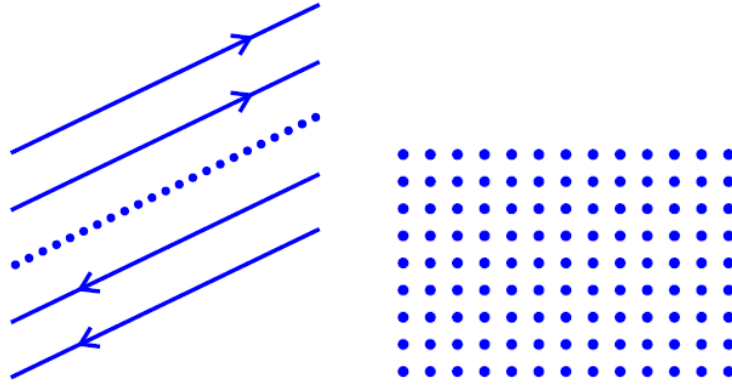
- **Třída V. (Přímka nestabilních KB):**  $\det(A) = 0, \operatorname{tr}(A) > 0$



- **Třída VI. (Přímka stabilních KB):**  $\det(A) = 0, \operatorname{tr}(A) < 0$



- **Třída VII. (Degenerovaný fázový portrét):**  $\det(A) = 0, \operatorname{tr}(A) < 0$



### 1.3.1 Kritický bod

Bod  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  nazveme **kritickým bodem** (KB), pokud platí:

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \end{cases}$$

Pokud  $\bar{\mathbf{x}}$  není kritický bod, nazýváme jej **regulárním bodem**.

Kritický bod je jednobodovou orbitou konstantního řešení. Říká se mu také ekvilibrium.

Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}}$  je charakterizován rovností

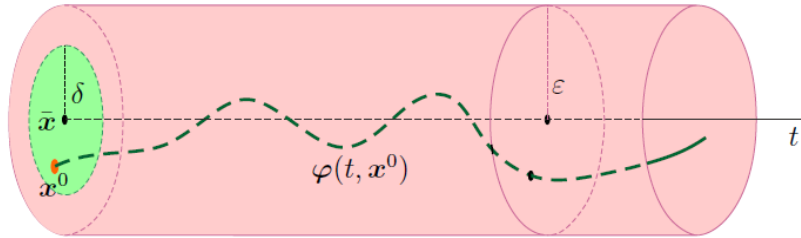
$$\omega(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha(\bar{\mathbf{x}}) = \gamma(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}.$$

Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}}$  se vyskytuje například ve všech fázových portrétech rovnice (3).

**Stabilní kritický bod:** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  je stabilní (S), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$





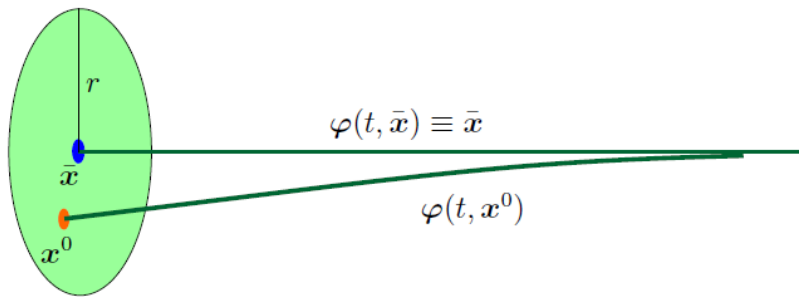
Obr. 2: Znázornění stabilního kritického bodu. [1]

**Nestabilní kritický bod:** Kritický bod  $\bar{x} \in G$  je nestabilní (N), jestliže není stabilní, tedy:  $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x^0 \in G$  :

$$\|\bar{x} - x^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x^0) - \bar{x}\| > \varepsilon, \text{ pro nějaké } t > 0.$$

**Asymptoticky stabilní kritický bod:** Kritický bod  $\bar{x} \in G$  je asymptoticky stabilní (AS), jestliže je stabilní a platí:

$$\exists r > 0 \forall x^0 \in G : \|\bar{x} - x^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x^0) - \bar{x}\| = 0.$$



Obr. 3: Znázornění asymptoticky stabilního kritického bodu. [1]

**Definice 1.12.** Kritický bod  $\bar{x} \in G$  rovnice (1) se nazývá **hyperbolický** (HKB), má-li Jacobiho matice

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

obě vlastní čísla s nenulovými reálnými složkami.

**Definice 1.13.** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  rovnice (1) se nazývá **nehyperbolický** (NKB), má-li Jacobiho matice (4) alespoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou složkou.

**Věta 1.14.** *Nechť  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  je hyperbolický kritický bod rovnice (1). Jestliže vlastní čísla Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  mají záporné reálné části, potom je  $\bar{\mathbf{x}}$  **asymptoticky stabilní**.*

*Navíc, je-li  $G_0 \subset G$  oblast přitažlivosti bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ , pak existuje  $K > 0$  a  $\alpha_0$  tak, že*

$$\|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| \leq Ke^{-\alpha_0 t} \|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}^0 \in G_0.$$

*Pak platí, že  $\bar{\mathbf{x}}$  je **exponenciálně stabilní**.*

**Věta 1.15.** *Nechť  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  je hyperbolický kritický bod rovnice (1). Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  má kladnou reálnou část, pak je  $\bar{\mathbf{x}}$  **nestabilní**.*

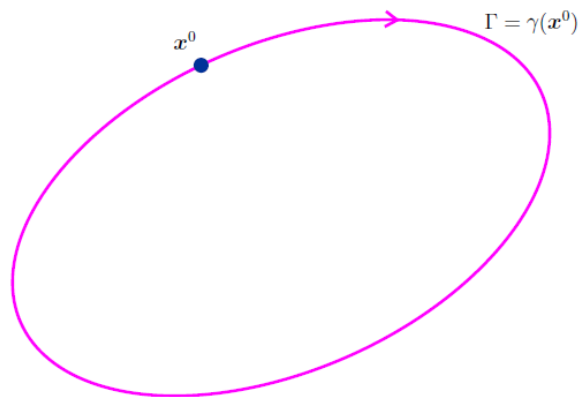
### 1.3.2 Periodická orbita

**Definice 1.16.** **Periodické orbity** neboli **cykly** jsou orbity odpovídající periodickým řešením. Periodickou orbitu budeme značit  $\Gamma$ .

Zvolíme-li bod  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , pak odpovídající řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je periodická funkce s nějakou minimální periodou  $p > 0$ . To znamená, že  $\Gamma = \gamma(\mathbf{x}^0)$  je uzavřená křivka, a proto platí

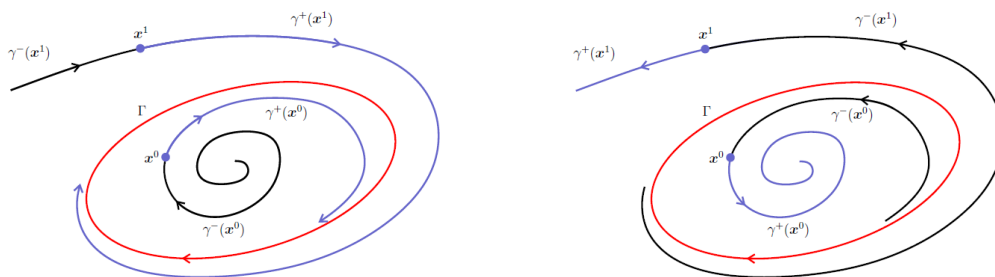
$$\Gamma = \gamma(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^0) = \alpha(\mathbf{x}^0).$$

Periodické orbity se vyskytují například ve fázovém portréту rovnice (3) ve třídě IV.



Obr. 4: Ukázka periodické orbity  $\Gamma = \gamma(\mathbf{x}^0)$ . [2]

**Definice 1.17.** Periodická orbita  $\Gamma \subset G$  se nazývá **limitní cyklus** rovnice (1), existují-li body  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in G$ ,  $\mathbf{x}^0$  uvnitř  $\Gamma$ ,  $\mathbf{x}^1$  vně  $\Gamma$  takové, že  $\alpha$ -limitní množina nebo  $\omega$ -limitní množina orbit  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  a  $\gamma(\mathbf{x}^1)$  je periodická orbita  $\Gamma$ .



Obr. 5: Vpravo: Limitní cyklus, kde  $\Gamma = \omega(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^1)$ . Vlevo: Limitní cyklus, kde  $\Gamma = \alpha(\mathbf{x}^0) = \alpha(\mathbf{x}^1)$ . [2]

**Věta 1.18.** (Poincaré-Bendixsonova):

*Je-li  $\omega(\mathbf{x}^0)$  omezená množina v  $G$ , přičemž  $\omega(\mathbf{x}^0)$  neobsahuje žádný kritický bod, pak je  $\omega(\mathbf{x}^0)$  periodická orbita.*

Pokud chceme pomocí Poincaré-Bendixsonovy věty dokázat existenci periodické orbity diferenciální rovnice (1) v množině  $G$ , jednou z možností je nalézt pozitivně invariantní množinu  $\tilde{G} \subset G$ , která neobsahuje žádný kritický bod rovnice (1).

**Definice 1.19.** Množina  $\tilde{G} \subset G$  se nazývá **pozitivně invariantní**, jestliže pro každý bod  $\mathbf{x}^0 \in \tilde{G}$  platí, že celá kladná část orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  leží v  $\tilde{G}$ , tj.  $\gamma^+(\mathbf{x}^0) \subset \tilde{G}$ .

**Důsledek 1.20.** Nechť  $\tilde{G} \subset G$  je otevřená, omezená, pozitivně invariantní množina, která neobsahuje žádný kritický bod rovnice (1). Dále nechť pro každé  $\mathbf{x}^0 \in \tilde{G}$  je  $\omega(\mathbf{x}^0) \subset \tilde{G}$ . Tj.  $\omega(\mathbf{x}^0)$  nemá společné body s hranicí množiny  $\tilde{G}$ . Potom existuje  $\mathbf{x}^0 \in \tilde{G}$  takové, že  $\gamma(\mathbf{x}^0) = \Gamma$  je periodická orbita.

**Věta 1.21.** (*Bendixsonovo kritérium*):

*Nechť  $G_0 \subset G$  je jednoduše souvislá otevřená množina. Jestliže*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

*má konstantní znaménko na  $G_0$  a není na  $G_0$  identicky nulová, pak rovnice (1) nemá periodickou orbitu, která leží celá v  $G_0$ .*

**Věta 1.22.** (*Dulacovo kritérium*):

*Nechť  $G_0 \subset G$  je jednoduše souvislá otevřená množina a necht' funkce  $b(x_1, x_2)$  (Dulacova funkce) splňuje následující podmínky:*

(i)  $b \in C^1(G_0)$ ,

(ii)  $\operatorname{div}(b\mathbf{f}) \equiv \frac{\partial(bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(bf_2)}{\partial x_2}$  má konstantní znaménko na  $G_0$  a není na  $G_0$  identicky nulová.

*Pak rovnice (1) nemá periodickou orbitu, která celá leží v  $G_0$ .*

**Poznámka 1.23.** Bendixsonovo kritérium je speciálním případem Dulacova kritéria pro  $b(x_1, x_2) \equiv 1$ .

**Věta 1.24.** *Nechť  $\Gamma$  je periodická orbita rovnice (1) ležící v  $G$ . Pak uvnitř  $\Gamma$  existuje alespoň jeden kritický bod rovnice (1).*

### 1.3.3 Neomezené orbity

Zbývající orbity vyskytující se ve fázových portrétech rovnice (3) ve třídách I-III jsou neomezené, což znamená, že alespoň jedna z množin  $\alpha(\mathbf{x}^0)$ ,  $\omega(\mathbf{x}^0)$  neexistuje. Rozlišujeme tři případy. Předpokládáme, že  $\bar{\mathbf{x}}$  je kritický bod a  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$  je bod různý od  $\bar{\mathbf{x}}$ .

1. Všechny orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  z třídy I a dvě orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  z třídy III mají vlastnost

$$\alpha(\mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \omega(\mathbf{x}^0) \text{ neexistuje.} \quad (5)$$

2. Všechny orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  z třídy II a dvě orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  z třídy III mají vlastnost

$$\alpha(\mathbf{x}^0) \text{ neexistuje,} \quad \omega(\mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}}. \quad (6)$$

3. Zbývající orbity  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  z třídy III mají vlastnost

$$\alpha(\mathbf{x}^0) \text{ neexistuje,} \quad \omega(\mathbf{x}^0) \text{ neexistuje.} \quad (7)$$

Hned vidíme, že orbity v třídách V-VII jsou buď kritické body, nebo mají jednu z vlastností (5)-(7). Všechny uvedené typy orbit se vyskytují nejen u lineární rovnice (3), ale také u nelineární rovnice (1), v níž  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  nemá speciální tvar  $\mathbf{A}\mathbf{x}$ . V takovém případě se mohou vyskytovat i další typy orbit, které u lineární rovnice neexistují.

### 1.3.4 Homoklinické a heteroklinické orbity

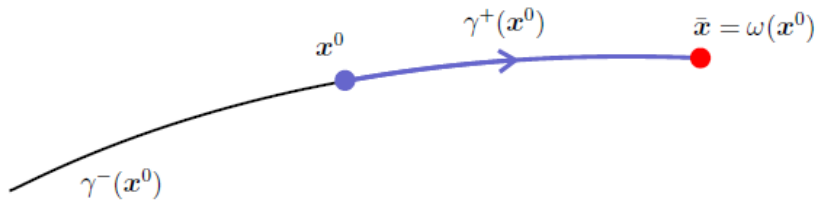
Homoklinické a heteroklinické orbity dostáváme v případě (iii) následující věty.

**Věta 1.25.** (*O  $\omega$ -limitních a  $\alpha$ -limitních množinách*):

*Předpokládejme, že rovnice (1) má konečný počet kritických bodů v  $G$ . Jestliže kladná orbita  $\gamma^+(\mathbf{x}^0) \subset G$  je omezená, pak platí jedno z následujících tvrzení:*

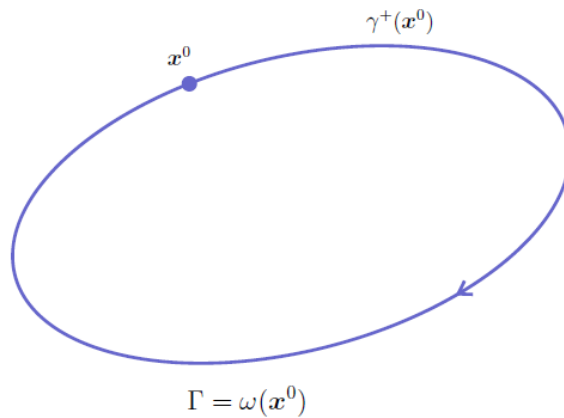
- (i)  $\omega(\mathbf{x}^0)$  je jednobodová a je rovna kritickému bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ , přičemž

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}}.$$

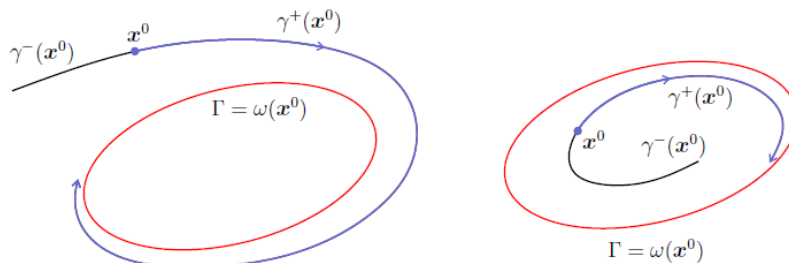


Obr. 6: Příklad (i) z věty 1.25. [2]

(ii)  $\omega(\mathbf{x}^0)$  je periodická orbita  $\Gamma$  a buď  $\gamma^+(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$ , nebo se  $\gamma^+(\mathbf{x}^0)$  spirálovitě navíjí na  $\Gamma$  z jedné strany pro  $t \rightarrow \infty$ , tedy  $\gamma^+(\mathbf{x}^0) \neq \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$  (tento případ se označuje jako **limitní cyklus**).

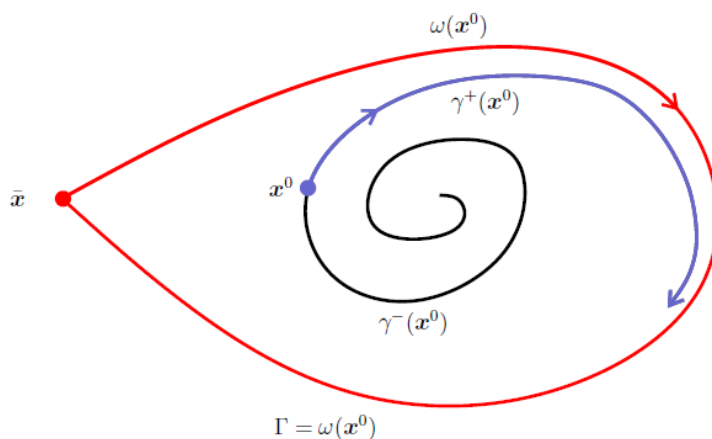


Obr. 7: Příklad (ii) z věty 1.25, kdy  $\gamma_+(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$ . [2]



Obr. 8: Příklad (ii) z věty 1.25, kdy  $\gamma_+(\mathbf{x}^0) \neq \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$ . [2]

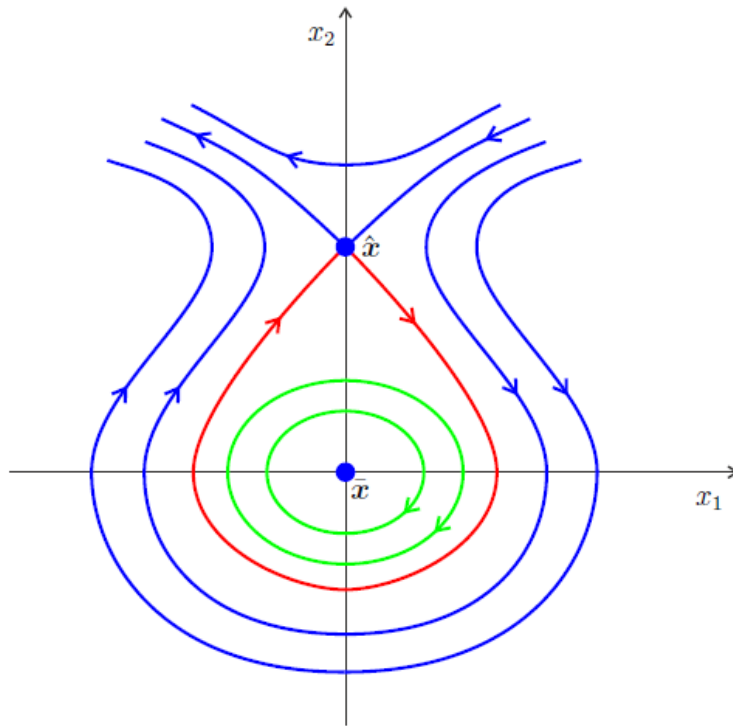
(iii)  $\omega(\mathbf{x}^0)$  se skládá z kritických bodů a orbit, jejichž  $\alpha$ - a  $\omega$ -limitní množiny jsou tyto kritické body.



Obr. 9: Příklad (iii) z věty 1.25, kde  $\omega(\mathbf{x}^0)$  se skládá z kritického bodu  $\bar{\mathbf{x}}$  a z homoklinické orbity, jejíž  $\alpha$ -limitní i  $\omega$ -limitní množinou je bod  $\bar{\mathbf{x}}$ . [2]

Analogicky tyto možnosti platí pro  $\omega(\mathbf{x}^0)$ , je-li  $\gamma^-(\mathbf{x}^0)$  omezená.

- **Homoklinická orbita:** Odpovídá řešení, které konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  i  $t \rightarrow -\infty$  témuž kritickému bodu. Platí pro ni, že  $\alpha(\mathbf{x}^0)$  je kritický bod a  $\omega(\mathbf{x}^0)$  je stejný kritický bod.
- **Heteroklinická orbita:** Odpovídá řešení, které konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  k jednomu kritickému bodu a pro  $t \rightarrow -\infty$  k jinému kritickému bodu. Platí pro ni, že  $\alpha(\mathbf{x}^0)$  je kritický bod a  $\omega(\mathbf{x}^0)$  je jiný kritický bod.



Obr. 10: Na tomto obrázku se vyskytují 4 typy orbit: kritický bod, periodická orbita (zeleně), homoklinická orbita (červeně), neomezené orbity (modře). (Je to fázový portrét systému:  $x_1'(t) = 2x_2(t) - x_2^2(t)$ ,  $x_2'(t) = -2x_1(t)$ .) [1]

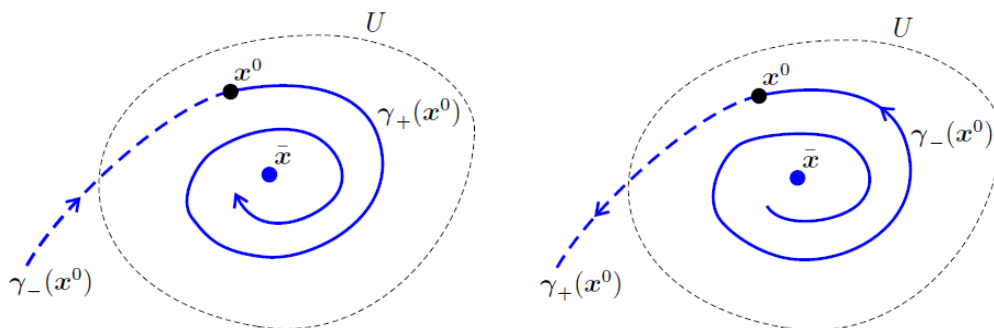
Nemá-li funkce  $f$  v rovnici (1) speciální tvar  $f(x) = Ax$ , nelze provést úplnou klasifikaci fázových portrétů jako u lineární rovnice (3). Můžeme ale definovat zřídla, výlevky a sedla pro rovnici (1) takto:

**Definice 1.26.** Kritický bod  $\bar{x}$  rovnice (1) se nazývá **výlevka (zřídlo)**, pokud existuje okolí  $U$  bodu  $\bar{x}$  takové, že pro každý bod  $x^0 \in U$  celá kladná (záporná) část orbity řešení  $\varphi(t, x^0)$  zůstává v  $U$  a navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x^0) = \bar{x} \quad \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x^0) = \bar{x} \right)$$

(viz následující obrázky 11).



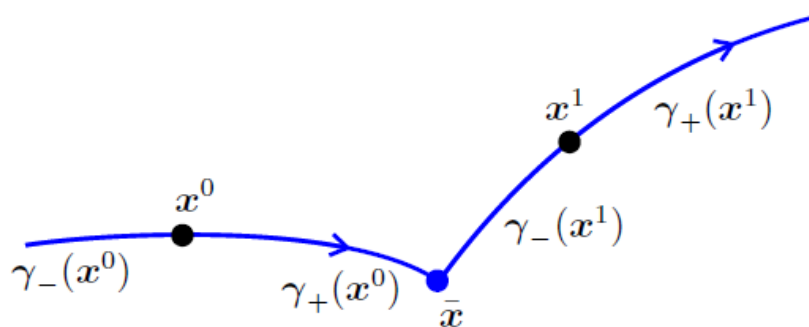


Obr. 11: Vlevo: Výlevka rovnice (1). Vpravo: Zřídlo rovnice (1). [1]

**Definice 1.27.** Kritický bod  $\bar{x}$  rovnice (1) se nazývá **sedlo**, jestliže existují body  $x^0 = \bar{x}$  a  $x^1 = \bar{x}$  takové, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x^0) = \bar{x} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x^1) = \bar{x}$$

(viz následující obrázek 12).



Obr. 12: Sedlo rovnice (1). [1]

**Definice 1.28.** Necht'  $\bar{x} \in G$  je kritický bod (1). Rovnice

$$y' = Df(\bar{x})y \tag{8}$$

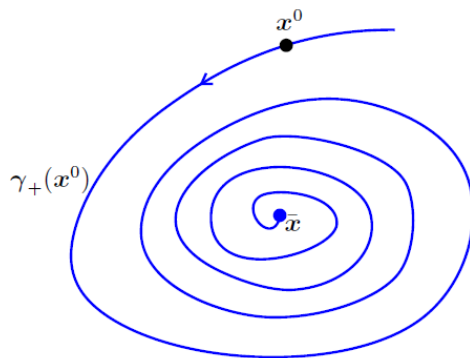
se nazývá **lineární variační rovnice** k rovnici (1) v bodě  $\bar{x}$ .

**Věta 1.29.** *Nechť  $\bar{x} \in G$  je HKB nelineární rovnice (1). Potom  $\bar{x}$  je zřídlo (výlevka, sedlo), právě když kritický bod  $(0, 0)$  lineární variační rovnice (8) v bodě  $\bar{x}$  je zřídlo (výlevka, sedlo).*

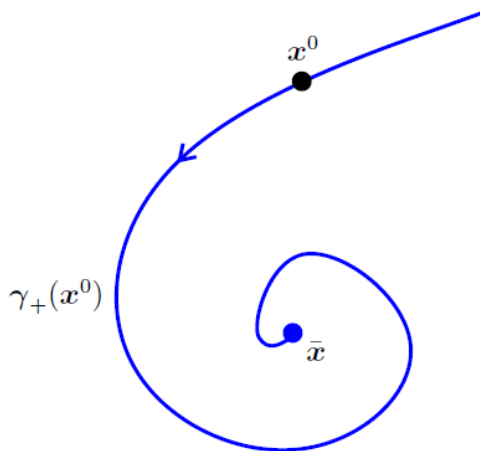
**Definice 1.30.** Kritický bod  $\bar{x}$  rovnice (1), který je výlevkou nebo zřídlem se nazývá ohnisko, jestliže existuje okolí  $U$  bodu  $\bar{x}$  takové, že pro každý bod  $x^0 \in U$  oběhne buď kladná nebo záporná část orbity řešení  $\varphi(t, x^0)$  nekonečněkrát bod  $\bar{x}$ . To znamená, že při transformaci do polárních souřadnic  $r(t)$  a  $\theta(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta(t)| = \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\theta(t)| = \infty.$$

Oběhnou-li orbity kolem  $\bar{x}$  pouze konečněkrát, nazývá se  $\bar{x}$  uzem.



Obr. 13: Ohnisko rovnice (1), orbita má nekonečný počet oběhů. [1]



Obr. 14: Uzem rovnice (1), orbita má konečný počet oběhů. [1]

Nechť  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  je hyperbolický kritický bod diferenciální rovnice (1). Pak lze o **přibližném tvaru fázového portréту** diferenciální rovnice (1) v okolí bodu  $\bar{x}$  rozhodnout pomocí linearizace, tj. pomocí lineární variační rovnice (8).

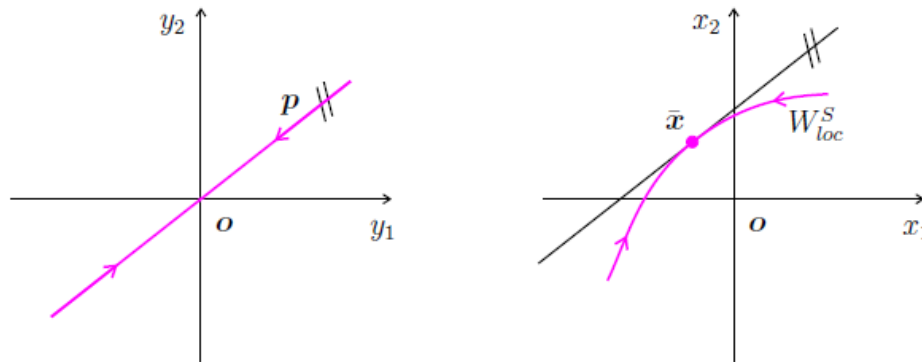
**Věta 1.31.** (*Metoda linearizace*):

Nechť  $f \in C^2(G)$  a necht'  $\bar{x} \in G$  je HKB nelineární rovnice (1). Potom  $\bar{x}$  je uzel-zřídlo (ohnisko-zřídlo, uzel-výlevka, ohnisko-výlevka, sedlo), právě, když kritický bod  $(0,0)$  lineární variační rovnice (8) v bodě  $\bar{x}$  je uzel-zřídlo (ohnisko-zřídlo, uzel-výlevka, ohnisko-výlevka, sedlo).

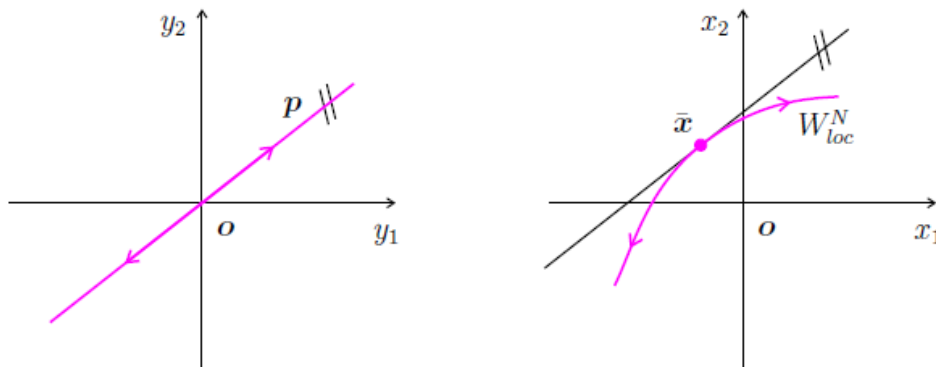
## 2 Definice stabilních a nestabilních variet a popisy metody jejich určování

V této kapitole bylo čerpáno ze zdroje [2].

Uvažujme nelineární rovnici (1) mající HKB  $\bar{x}$  a lineární variační rovnici (8) v  $\bar{x}$ .



Obr. 15: Přímka  $p$  ve fázovém portréту lineární variační rovnice (vlevo) a lokálně stabilní varieta  $W_{loc}^S$  (vpravo), na které tok směřuje k bodu  $\bar{x}$ . [2]



Obr. 16: Přímka  $p$  ve fázovém portréту lineární variační rovnice (vlevo) a lokálně nestabilní varieta  $W_{loc}^N$  (vpravo), na které tok směřuje od bodu  $\bar{x}$ . [2]

U fázových portrétů rovnice (8) mohou existovat přímkové orbity procházející kritickým bodem  $\mathbf{o}$  (počátkem). Potom ve fázovém portrétu rovnice (1) mohou existovat křivky  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  definované následovně.

**Definice 2.1.** Nechť  $\bar{x}$  je sedlo nebo uzel rovnice (1). Nechť  $U$  je okolí bodu  $\bar{x}$ . Pak **lokálně stabilní varietou** nazveme množinu:

$$W_{loc}^S := \left\{ \mathbf{x}^0 \in U : \varphi(t, \mathbf{x}^0) \in U \text{ pro } t \geq 0 \text{ a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{x} \right\}$$

a **lokálně nestabilní varietou** nazveme množinu:

$$W_{loc}^N := \left\{ \mathbf{x}^0 \in U : \varphi(t, \mathbf{x}^0) \in U \text{ pro } t \leq 0 \text{ a } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{x} \right\}.$$

Rovnici (1) lze substitucí  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{x}$  převést na tvar

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{f}(\bar{x})\mathbf{y} + \mathbf{g}^*(\mathbf{y}), \quad (9)$$

kde  $\mathbf{g}^*(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$  a  $D\mathbf{g}^*(\mathbf{o}) = \mathbf{O}$ .

Rovnice (9) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je opět sedlem nebo uzlem.

Je-li  $\mathbf{J}$  Jordanův kanonický tvar matice  $D\mathbf{f}(\bar{x})$ , pak existuje regulární matice  $\mathbf{P}$  splňující rovnost

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}D\mathbf{f}(\bar{x})\mathbf{P}.$$

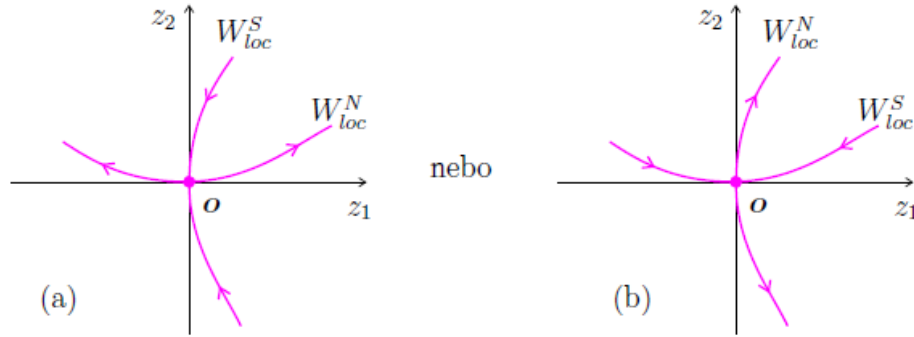
Pomocí transformace  $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}$  převedeme rovnici (9) na tvar

$$\mathbf{z}' = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad (10)$$

kde  $\mathbf{g}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$  a  $D\mathbf{g}(\mathbf{o}) = \mathbf{O}$ .

Rovnice (10) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je opět sedlem nebo uzlem. Přitom fázový portrét příslušné lineární variační rovnice  $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\mathbf{z}$  obsahuje osu  $z_1$  i osu  $z_2$ .

Nechť  $\mathbf{J}$  má jedno vlastní číslo kladné a jedno záporné. Potom kritický bod  $\mathbf{o}$  rovnice (10) je sedlem a fázový portrét rovnice (10) obsahuje obě křivky  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$ . Tyto křivky procházejí počátkem a každá se dotýká jedné osy. Příklady lze vidět na následujících obrázcích 17.



Obr. 17: Příklady křivek  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  ve fázovém portrétu rovnice (10). Tyto křivky procházejí počátkem a každá se dotýká jedné osy. [2]

Předpokládejme, že matice  $\mathbf{J}$  v rovnici (10) má tvar  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Jestliže  $\lambda_1 > 0$  a  $\lambda_2 < 0$  nastane případ (a) na obrázku 17, pokud  $\lambda_1 < 0$  a  $\lambda_2 > 0$  nastane případ (b) na obrázku 17. Přesněji lze tvar křivek  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  určit metodou řad dle následující věty.

**Věta 2.2.** (*O tvaru  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  v kanonickém případě*): Existuje  $\delta > 0$  takové, že v okolí

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < \delta, |x_2| < \delta\}$$

je lokálně stabilní varieta  $W_{loc}^S$  a lokálně nestabilní  $W_{loc}^N$  rovnice (10) dána těmito vzorci:

Pro  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  platí

$$W_{loc}^N : z_2 = h(z_1) \quad \text{pro } |z_1| < \delta, \quad W_{loc}^S : z_1 = k(z_2) \quad \text{pro } |z_2| < \delta.$$

Pro  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  platí

$$W_{loc}^S : z_2 = h(z_1) \quad \text{pro } |z_1| < \delta, \quad W_{loc}^N : z_1 = k(z_2) \quad \text{pro } |z_2| < \delta.$$

Funkce  $h$  a  $k$  mají stejnou hladkost jako  $\mathbf{g}$  v (10).

Navíc platí

$$h(0) = 0, \quad k(0) = 0, \quad \frac{dh}{dz_1}(0) = 0, \quad \frac{dk}{dz_2}(0) = 0. \quad (11)$$

Vzorce (11) vyjadřují, že grafy funkcí  $h$  a  $k$  procházejí počátkem a dotýkají se os  $z_1$  a  $z_2$ . Funkci  $h(z_1)$  hledáme ve tvaru Taylorovy řady v počátku, tj.

$$h(z_1) = h(0) + \frac{dh}{dz_1}(0)z_1 + \frac{1}{2!} \frac{d^2h}{dz_1^2}(0)z_1^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3h}{dz_1^3}(0)z_1^3 + \dots$$

Z (11) plyne

$$h(z_1) = az_1^2 + bz_1^3 + \dots,$$

kde  $a, b, \dots$  jsou neznámé koeficienty, které určíme pomocí rovnice (10).

Analogicky postupujeme při hledání funkce  $k(z_2)$ .

Křivky  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  můžeme také určit přímo pro rovnici (9) aniž ji převádíme do kanonického tvaru. Předpokládejme, že  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  je vlastní vektor odpovídající kladnému vlastnímu číslu  $\lambda_1$  a  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  je vlastní vektor odpovídající zápornému vlastnímu číslu  $\lambda_2$ . Dále předpokládejme, že vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$  jsou různé od souřadných os  $y_1$  a  $y_2$ .

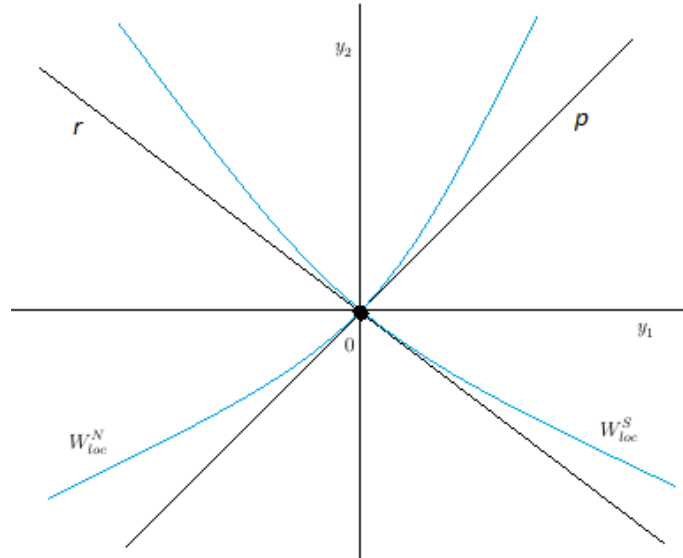
Potom existuje  $\delta > 0$  takové, že

$$W_{loc}^N : y_2 = h(y_1) \quad \text{pro } |y_1| < \delta, \quad W_{loc}^S : y_2 = k(y_1) \quad \text{pro } |y_1| < \delta,$$

kde funkce  $h$  a  $k$  mají stejnou hladkost jako  $\mathbf{g}^*$  v (9) a

$$h(0) = 0, \quad k(0) = 0, \quad \frac{dh}{dy_1}(0) = \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{dk}{dy_1}(0) = \frac{r_2}{r_1}. \quad (12)$$

Vzorce (12) vyjadřují, že grafy funkcí  $h$  a  $k$  procházejí počátkem a dotýkají se vlastních přímek  $\boldsymbol{p}$  a  $\boldsymbol{r}$ .



Obr. 18: Křivky  $W_{loc}^S$  a  $W_{loc}^N$  ve fázovém portrétu rovnice (9).

Nechť  $\mathbf{J}$  má dvě různá kladná (záporná) vlastní čísla. Potom kritický bod  $\boldsymbol{o}$  rovnice (10) je uzel-zřídlo (uzel-výlevka) a tímto bodem prochází samé lokálně nestabilní (lokálně stabilní) variety. Dvě z těchto variet se dotýkají os  $z_1$  a  $z_2$ . Totéž platí, má-li  $\mathbf{J}$  stejná vlastní čísla a je přitom diagonální.

Analogické tvrzení platí pro kritický bod  $\boldsymbol{o}$  rovnice (9) s jediným rozdílem, že tentokrát se dvě z variet dotýkají vlastních přímek. Postup při určování variet je stejný jako u sedla.

### 3 Příklady

**Příklad 3.1.** Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 - x_2^2 - 1, \\ x_2' &= 2x_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Tato soustava má dva kritické body  $\bar{X}_1 = (1, 0)$  a  $\bar{X}_2 = (-1, 0)$ .

Zjistíme, zda osa  $x_1$ , která prochází body  $\bar{X}_1$  a  $\bar{X}_2$  patří do fázového portréту.

Osa  $x_1$  má rovnici  $x_2 \equiv 0$ . Uvažujme funkci  $(x_1(t), 0)$ . Tato funkce splňuje druhou rovnici v (13) a dále rovnici  $x_1' = x_1^2 - 1$ . Tedy tato funkce má orbitu na ose  $x_1$ . Osa  $x_1$  se skládá z 5 orbit: intervalu  $(-\infty, -1)$ , kritického bodu  $(-1, 0)$ , intervalu  $(-1, 1)$ , kritického bodu  $(1, 0)$  a intervalu  $(1, \infty)$ .

Nyní určíme typy kritických bodů  $\bar{X}_1$  a  $\bar{X}_2$ .

Jacobiho matice je tvaru

$$Df(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme kritický bod  $\bar{X}_1$ , čímž získáme matici

$$\mathbf{A} := Df(\bar{X}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

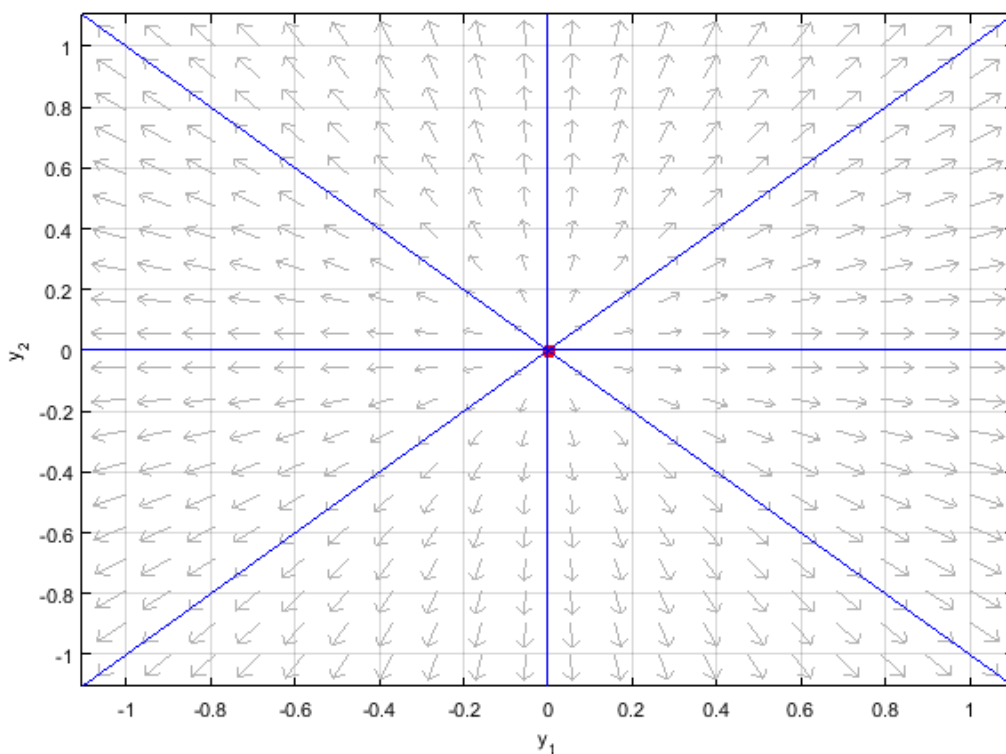
která je v kanonickém tvaru. Vlastní čísla této matice jsou  $\lambda_{1,2} = 2$ . Protože  $tr(A) = 4 > 0$ ,  $det(A) = 4 > 0$ , kritický bod  $\bar{X}_1$  je nestabilní hyperbolický bod typu uzel-zřídlo z třídy I (c).

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_1$  má tvar

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{14}$$

a její fázový portrét je na obrázku 19. Osy  $y_1$  a  $y_2$  patří do fázového portréту rovnice (14).





Obr. 19: Fázový portrét lineární soustavy (14).

Nyní budeme vyšetřovat nelineární soustavu (13) v okolí bodu  $\bar{X}_1$ . Přesunutím bodu  $\bar{X}_1$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 1, \\ y_2 &= x_2, \end{aligned} \tag{15}$$

jsme získali soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + 2y_1 - y_2^2, \\ y_2' &= 2y_2, \end{aligned} \tag{16}$$

která má kritický bod  $\mathbf{o}$  typu uzel-zřídlo. Určíme lokálně nestabilní varietu dotýkající se os  $y_1$  a  $y_2$ .

$W_{loc}^N$  dotýkající se osy  $y_2$  hledáme ve tvaru

$$y_1 = k(y_2) = k(0) + \frac{dk}{dy_2}(0)y_2 + ay_2^2 + by_2^3 + \dots \tag{17}$$

přičemž  $k(0) = 0$ ,  $\frac{dk}{dy_2}(0) = 0$ . Funkci  $k$  z (17) derivujeme, čímž získáme

$$\frac{dk}{dy_2} = 2ay_2 + 3by_2^2 + \dots \quad (18)$$

Protože  $W_{loc}^N$  je částí fázového portréту soustavy (16), tak leží na orbitě řešení  $(y_1(t), y_2(t))$  soustavy (16) a proto existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že

$$y_1(t) = k(y_2(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Derivací podle  $t$  dostáváme

$$y_1'(t) = \frac{dk}{dy_2}(y_2(t)) \cdot y_2'(t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (19)$$

Do (19) dosadíme (18) a (16) čímž získáme rovnost

$$y_1^2 + 2y_1 - y_2^2 = (2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(2y_2),$$

do které za  $y_1$  dále dosadíme (17) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_2^2$  získáme  $2a - 1 = 4a$ , odkud vyjádříme  $a = -\frac{1}{2}$ .  $W_{loc}^N$  dotýkající se osy  $y_2$  je tedy přibližně tvaru  $y_1 = -\frac{1}{2}y_2^2$ . Viz obrázek 20.

$W_{loc}^N$  dotýkající se osy  $y_1$  hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = h(0) + \frac{dh}{dy_1}(0)y_1 + ay_1^2 + by_1^3 + \dots, \quad (20)$$

kde  $h(0) = 0$ ,  $\frac{dh}{dy_1}(0) = 0$ .

Funkci  $h$  z (20) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (21)$$

Dosazením (21) a (16) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh}{dy_1}y_1'$$

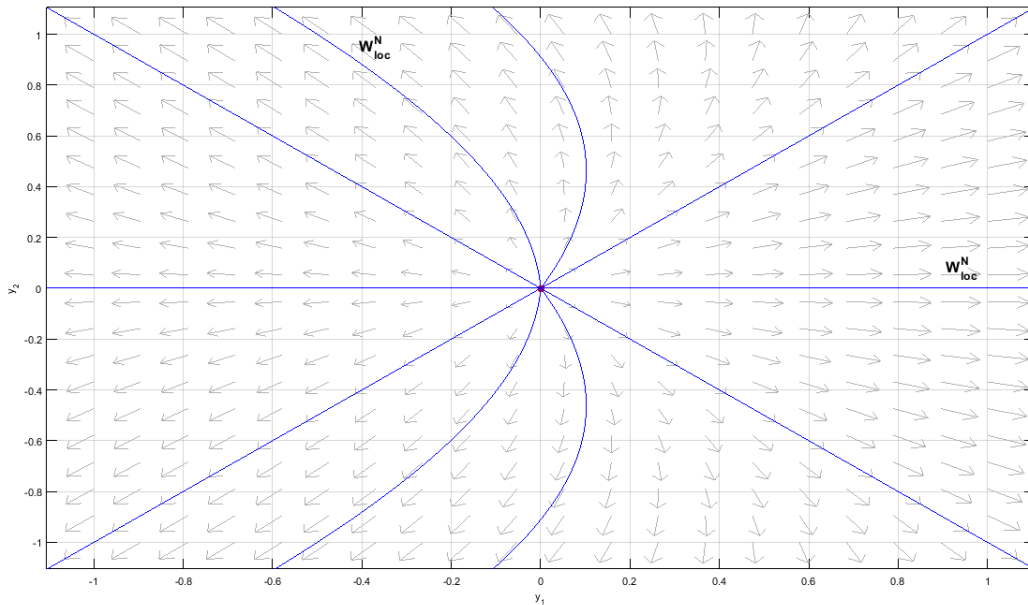
získáme rovnost

$$2y_2 = (2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(y_1^2 + 2y_1 - y_1^2),$$

do které dále dosadíme za  $y_2$  vztah (20) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme  $2a = 4a$ , odkud vidíme, že  $a = 0$ . Podobně porovnáme koeficienty u  $y_1^3$  a získáme  $2b = 2a + 6b$ , odkud vidíme, že  $b = 0$ . Pomocí stejného postupu dostáváme, že všechny koeficienty v (20) jsou nulové a proto  $W_{loc}^N$  dotýkající se osy  $y_1$  má tvar  $y_2 \equiv 0$  a splývá proto s částí osy  $y_1$ . V tomto případě dostáváme přesný tvar variety  $W_{loc}^N$ , protože osa  $y_1$  je částí fázového portréту soustavy (16). Platí totiž, že po transformaci (15) přejde soustava (16) na soustavu (13) a osa  $y_1$  na osu  $x_1$ . Přitom osa  $x_1$  je částí fázového portréту soustavy (13).

Dále vidíme, že položíme-li v (16)  $y_2^2 = y_1^2$ , dostaneme lineární soustavu (14), která má řešení  $(y_1(t), y_2(t)) = (e^{2t}, e^{2t})$  a  $(y_1(t), y_2(t)) = (e^{2t}, -e^{2t})$ .

Proto přímky  $y_2 = y_1$  a  $y_2 = -y_1$  jsou částí fázového portréту soustavy (16). Viz obrázek 20.



Obr. 20: Fázový portrét nelineární soustavy (16) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét rovnice (13) v okolí  $\bar{X}_1$ .)

Analogicky postupujeme v případě kritického bodu  $\bar{X}_2$ , kdy matice

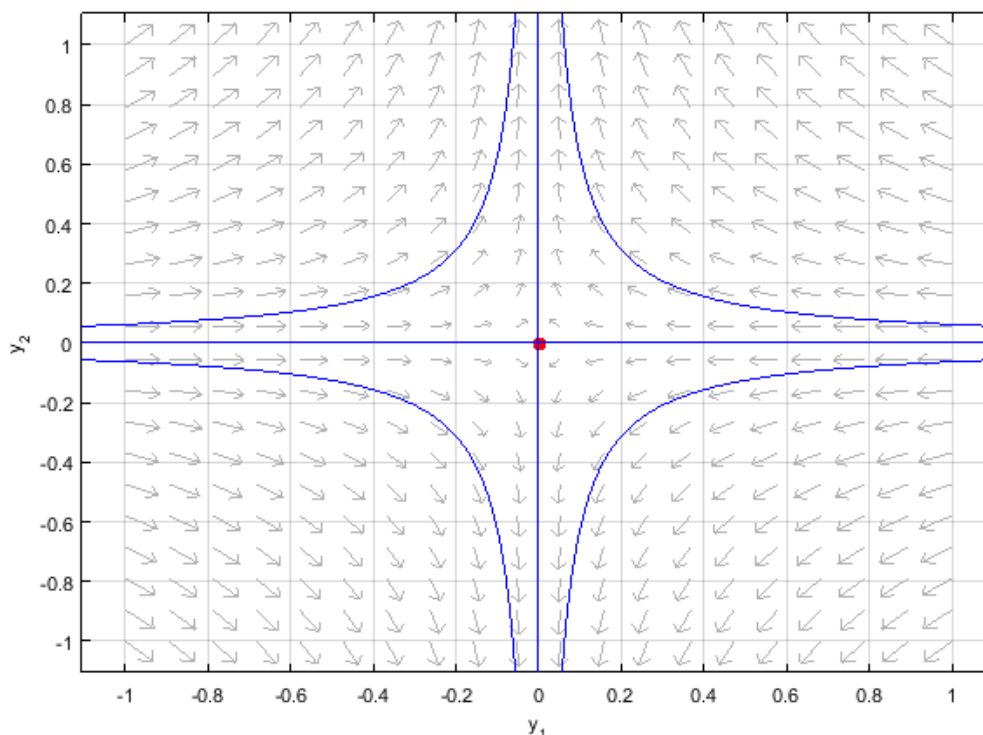
$$\mathbf{A} := D\mathbf{f}(\bar{X}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je opět v kanonickém tvaru. Tedy její vlastní čísla jsou  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Protože  $\det(\mathbf{A}) = -4 < 0$ , vidíme že kritický bod  $\bar{X}_2$  je nestabilní hyperbolický bod typu sedlo z třídy III.

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_2$  má tvar

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (22)$$

a její fázový portrét je na obrázku 21. Osy  $y_1$ ,  $y_2$  patří do fázového portréту rovnice (22).



Obr. 21: Fázový portrét lineární soustavy (22).

Vyšetříme nelineární soustavu (13) v okolí kritického bodu  $\bar{X}_2$ . Přesunutím bodu  $\bar{X}_2$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 + 1, \\y_2 &= x_2,\end{aligned}\tag{23}$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1^2 - 2y_1 - y_2^2, \\y_2' &= 2y_2,\end{aligned}\tag{24}$$

kteřá má kritický bod  $\mathbf{o}$  typu sedlo.

Dále vypočítáme  $W_{loc}^N$  dotýkající se osy  $y_2$ , kterou hledáme ve tvaru:

$$y_1 = k(y_2) = ay_2^2 + by_2^3 + \dots\tag{25}$$

Funkci  $k$  z (25) derivujeme a získáme

$$\frac{dk}{dy_2} = 2ay_2 + 3by_2^2 + \dots\tag{26}$$

Dosazením (26) a (24) do vztahu

$$y_1' = \frac{dk}{dy_2} y_2'$$

dostáváme rovnost

$$y_1^2 - 2y_1 - y_2^2 = (2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(2y_2),$$

do které dále za  $y_1$  dosadíme (25) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_2^2$  získáme  $-2a - 1 = 4a$ , odkud vyjádříme  $a = -\frac{1}{6}$ .  $W_{loc}^N$  je tedy přibližně tvaru

$$y_1 = -\frac{1}{6}y_2^2.$$

$W_{loc}^S$  dotýkající se osy  $y_1$  hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = ay_1^2 + by_1^3 + \dots,\tag{27}$$

Funkci  $h$  z (27) rovnici derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots\tag{28}$$

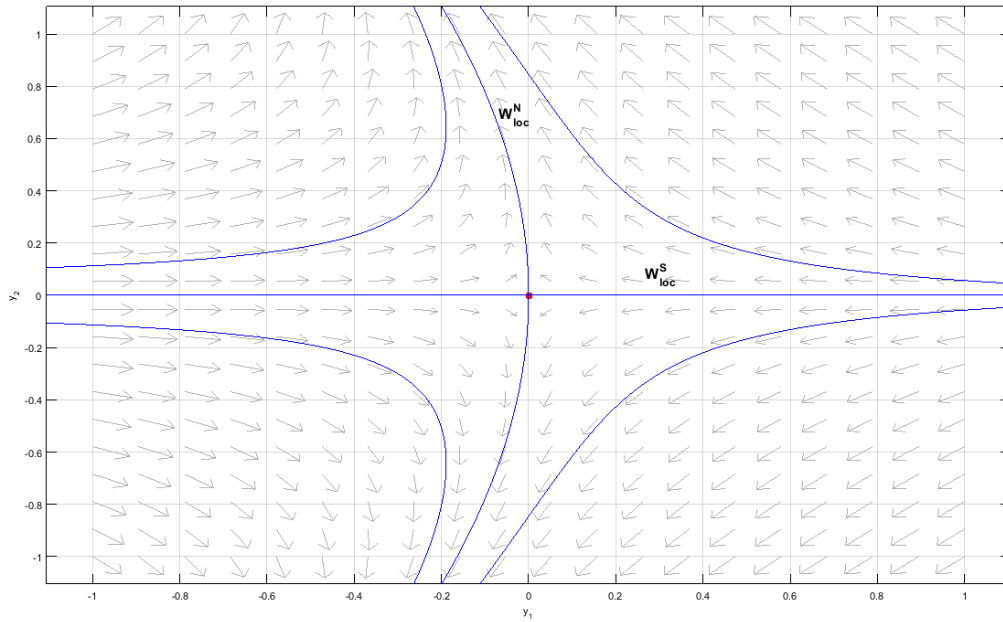
Dosazením (28) a (24) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

získáme rovnost

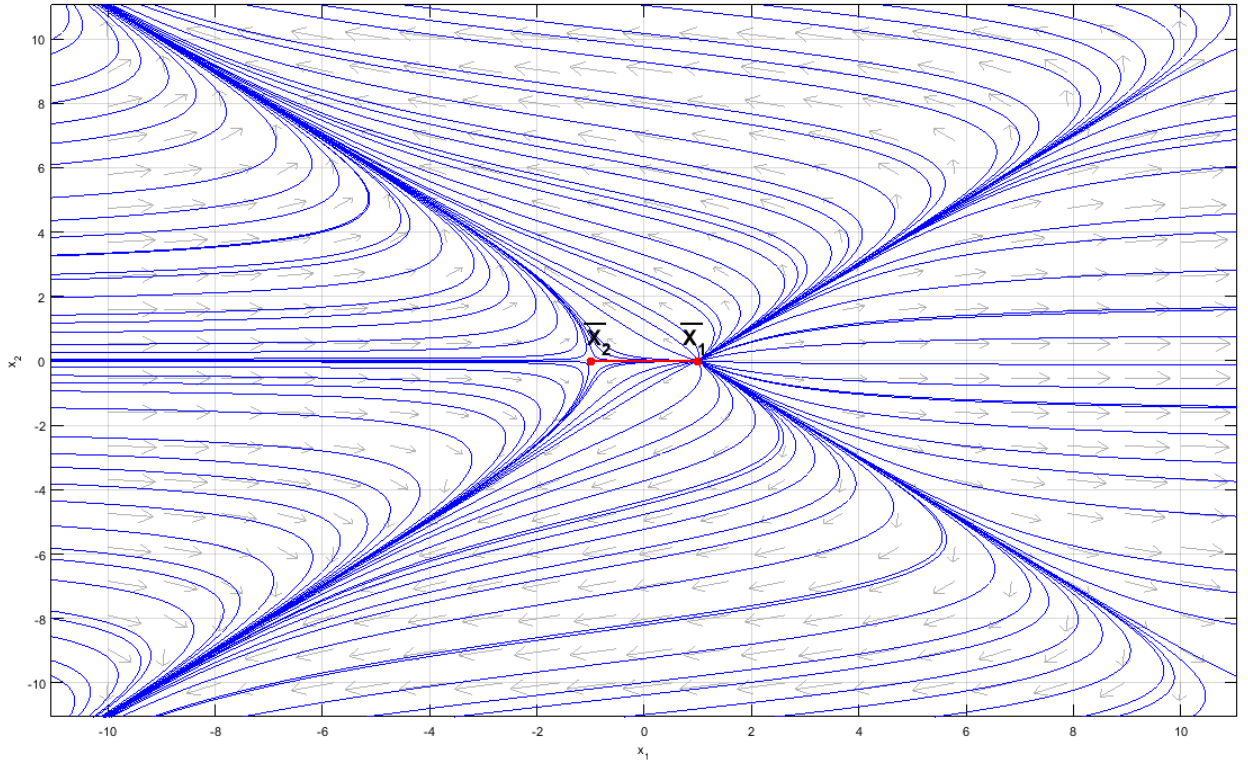
$$2y_2 = (2ay_1 + 3by_1^2 + \dots) (y_1^2 - 2y_1 - y_1^2),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme (27) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme  $2a = -4a$ , odkud vidíme, že  $a = 0$ . Stejně jako u bodu  $\bar{X}_1$  dostáváme zde přesný tvar stabilní variety  $W_{loc}^S$ , která je částí osy  $y_1$ .



Obr. 22: Fázový portrét nelineární soustavy (24) v okolí počátku. Je stejný jako fázový portrét rovnice (13) v okolí  $\bar{X}_2$ .

Pomocí transformací (15) a (23) dostáváme fázový portrét rovnice (13) s heteroklinickou orbitou (na ose  $x_1$ ), která spojuje kritické body  $\bar{X}_1$  a  $\bar{X}_2$ . Viz obrázek 23.



Obr. 23: Celkový fázový portrét nelineární soustavy (13) s heteroklinickou orbitou.

Podle věty 1.24 musí uvnitř každé periodické orbity ležet kritický bod. Pokud by fázový portrét soustavy (13) obsahoval periodickou orbitu, musela by tato orbita obíhat alespoň jeden z bodů  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$  a musela by proto protínat některé orbity na ose  $x_1$ , což je ve sporu s jednoznačností podle věty 1.3. Proto fázový portrét soustavy (13) neobsahuje žádné periodické orbity.

**Příklad 3.2.** Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= 2(x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 2), \\ x_2' &= x_1^2 - x_2^2. \end{aligned} \tag{29}$$

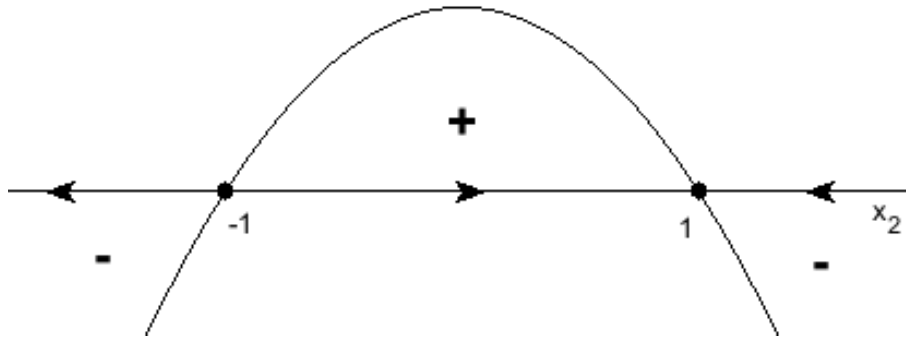
Tato soustava má čtyři kritické body  $\bar{X}_1 = (2, 2)$ ,  $\bar{X}_2 = (1, 1)$ ,  $\bar{X}_3 = (-2, 2)$  a  $\bar{X}_4 = (1, -1)$ .

Ukažme, že přímka  $x_1 \equiv 1$ , která prochází body  $\bar{X}_2$  a  $\bar{X}_4$  patří do fázového portréту soustavy (29). Uvažujme funkci  $(1, x_2(t))$ . Tato funkce splňuje první

rovnici v (29). Pokud  $x_2$  splňuje rovnici

$$x_2' = 1 - x_2^2. \quad (30)$$

je funkce  $(1, x_2(t))$  řešením rovnice (29). To znamená, že přímka  $x_1 \equiv 1$  patří do fázového portréту rovnice (29). Tato přímka se přitom skládá z následujících orbit, které určíme z fázového portréту skalární rovnice (30).



Obr. 24: Fázový portrét rovnice (30)

Orbity fázového portrétu (29): polopřímka  $x_1 \equiv 1, x_2 < -1$ , kritický bod  $(1, -1)$ , úsečka  $x_1 \equiv 1, x_2 \in (-1, 1)$ , kritický bod  $(1, 1)$ , polopřímka  $x_1 \equiv 1, x_2 > 1$ .

Jacobiho matice je tvaru

$$Df(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 2x_2 - 4 & 2x_1 - 2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Dosadíme kritický bod  $\bar{X}_1$ , čímž získáme matici

$$\mathbf{A} := Df(\bar{X}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Z této matice určíme  $tr(\mathbf{A}) = -4$ ,  $det(\mathbf{A}) = -8$ .

Dále použijeme vzorec pro vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr(\mathbf{A})^2 - 4det(\mathbf{A})}}{2}.$$



Vlastní čísla této matice jsou  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{12}$ .

Zjistili jsme, že kritický bod  $\bar{X}_1$  je nestabilní hyperbolický bod typu sedlo z třídy III.

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_1$  má tvar

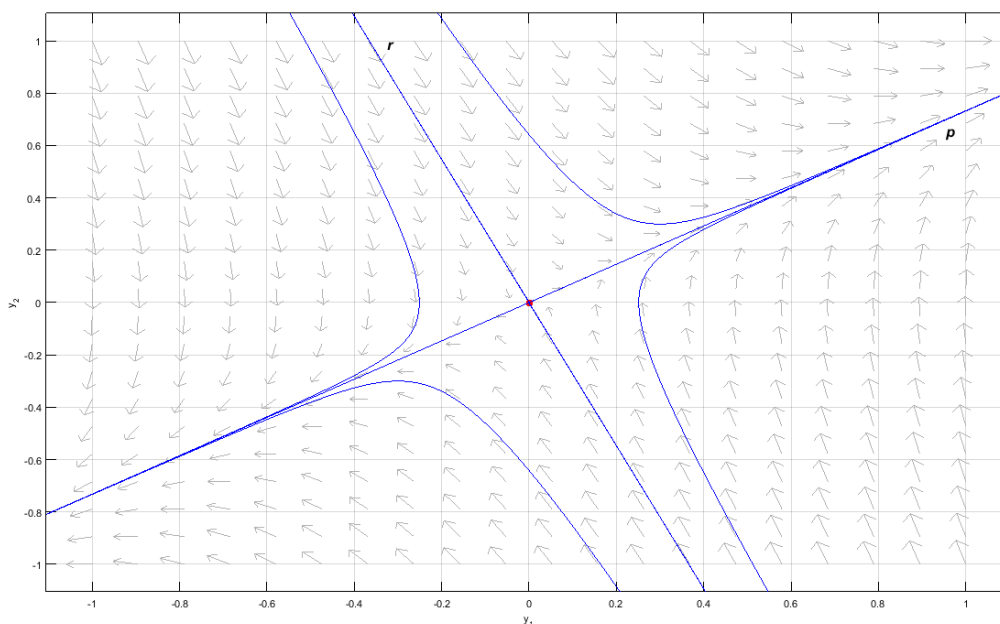
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (31)$$

Nyní najdeme vlastní vektory vyřešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{12} & 0 \\ 0 & -2 - \sqrt{12} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Ze soustavy (32) získáme vlastní vektory  $\mathbf{p} = (1, -1 + \sqrt{3})$  pro kladné vlastní číslo a  $\mathbf{r} = (1, -1 - \sqrt{3})$  pro záporné vlastní číslo.

Fázový portrét soustavy (31) je na obrázku 25. Vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$  patří do tohoto fázového portréту.



Obr. 25: Fázový portrét lineární soustavy (31) s vlastními přímkami  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$ .

Vyřešíme nelineární soustavu (29) v okolí kritického bodu  $\bar{X}_1$ .  
Přesunutím bodu  $\bar{X}_1$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2, \\ y_2 &= x_2 - 2, \end{aligned} \quad (33)$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2(y_1 y_2 + y_2), \\ y_2' &= y_1^2 - y_2^2 + 4(y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (34)$$

Soustava (34) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je sedlem.

Dále vypočítáme  $W_{loc}^N$ , která se dotýká vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a kterou hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = (-1 + \sqrt{3})y_1 + ay_1^2 + by_1^3 + \dots \quad (35)$$

Funkci  $h$  z (35) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = (-1 + \sqrt{3}) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (36)$$

Dosazením (36) a (34) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

dostaneme rovnost

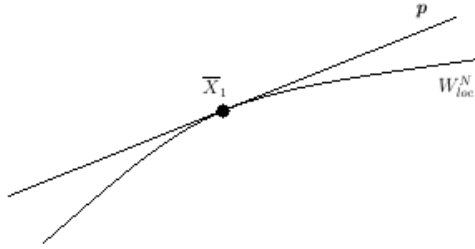
$$y_1^2 - y_2^2 + 4(y_1 - y_2) = ((-1 + \sqrt{3}) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(2(y_1 y_2 + y_2)),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme (35) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme

$$-3 + 2\sqrt{3} - 4a = 6a\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6a + 2 \cdot 3 + 2,$$

odkud vyjádříme  $a = \frac{11-6\sqrt{3}}{2-6\sqrt{3}} < 0$ .  $W_{loc}^N$  je tedy přibližně tvaru

$$y_2 = (-1 + \sqrt{3})y_1 + \frac{11 - 6\sqrt{3}}{2 - 6\sqrt{3}}y_1^2.$$



Obr. 26: Lokálně nestabilní varieta bodu  $\bar{X}_1$ .

Dále vypočítáme  $W_{loc}^S$  dotýkající se vlastní přímky  $r$ , kterou hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = (-1 + \sqrt{3})y_1 + ay_1^2 + by_1^3 + \dots \quad (37)$$

Funkci  $h$  z (37) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = (-1 + \sqrt{3}) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (38)$$

Dosazením (38) a (34) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

dostaneme rovnost

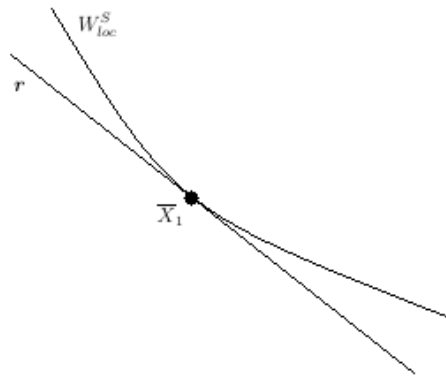
$$y_1^2 - y_2^2 + 4(y_1 - y_2) = ((-1 - \sqrt{3}) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(2(y_1y_2 + y_2)),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme (37) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme

$$-3 - 2\sqrt{3} - 4a = 4\sqrt{3} - 6a - 6a\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 2,$$

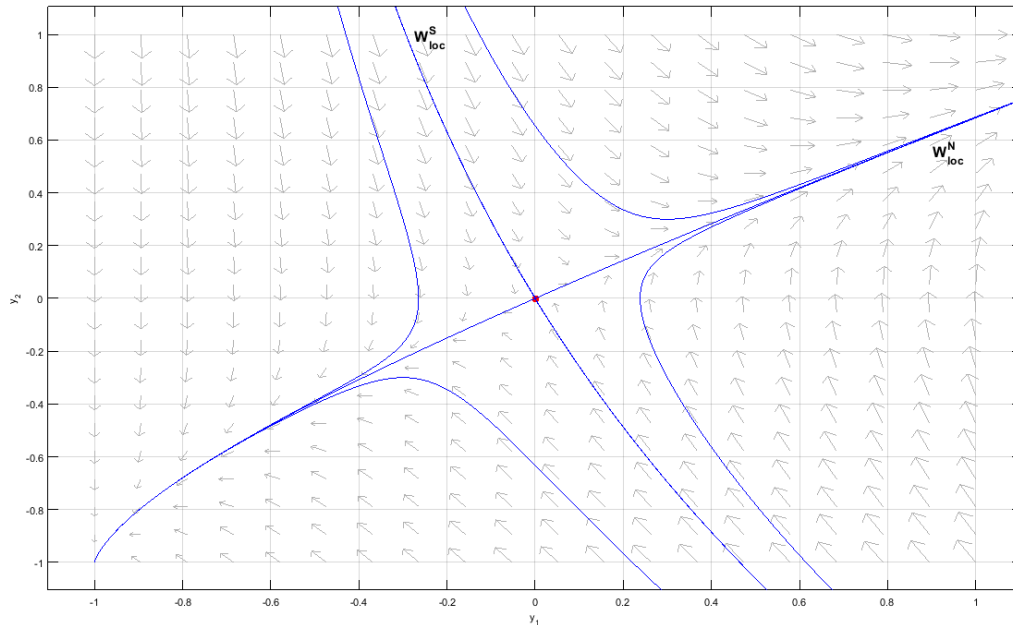
odkud vyjádříme  $a = \frac{11+6\sqrt{3}}{2+6\sqrt{3}} > 0$ .  $W_{loc}^S$  je tedy přibližně tvaru

$$y_2 = (-1 - \sqrt{3})y_1 + \frac{11 + 6\sqrt{3}}{2 + 6\sqrt{3}}y_1^2.$$



Obr. 27: Lokálně stabilní varieta bodu  $\bar{X}_1$ .

Viz obrázek 28.



Obr. 28: Fázový portrét nelineární soustavy (34) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí  $\bar{X}_1$ .)

2. Pro kritický bod  $\bar{X}_2$ , získáme matici

$$\mathbf{A} := Df(\bar{X}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z této matice určíme  $tr(\mathbf{A}) = -4$ ,  $det(\mathbf{A}) = 4$ . Vlastní čísla této matice jsou

$\lambda_{1,2} = -2$ . Zjistili jsme, že kritický bod  $\bar{X}_2$  je asymptoticky stabilní hyperbolický bod typu uzel-výlevka z třídy II (b).

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_2$  má tvar

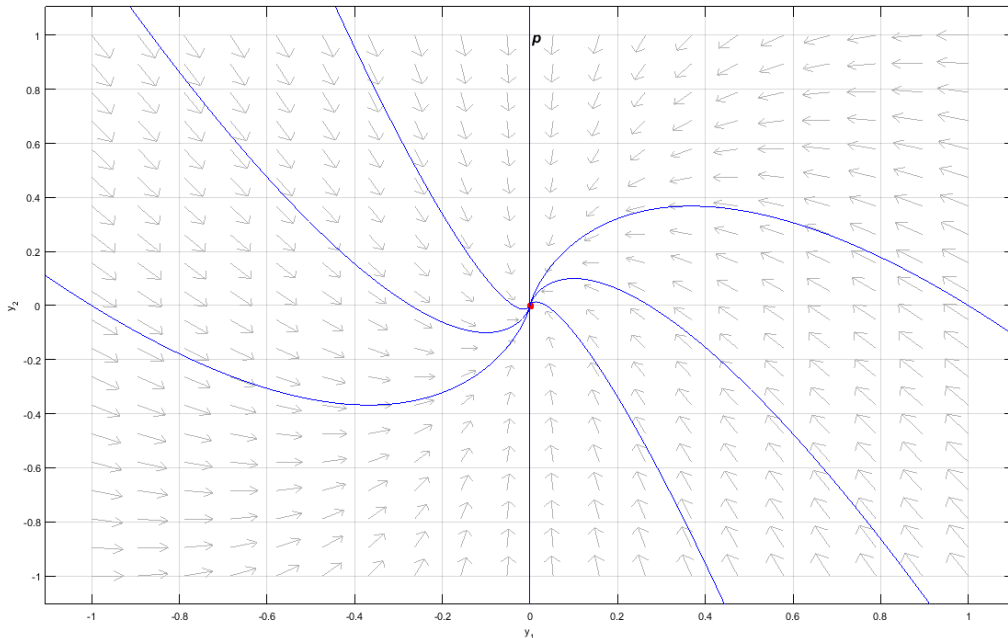
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (39)$$

Matice  $\mathbf{A}$  má jediný (až na násobek) vlastní vektor  $\mathbf{p}$ , který najdeme vyřešením soustavy

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Z (40) získáme  $\mathbf{p} = (0, 1)$ ; vlastní přímka  $\mathbf{p}$  tedy splývá s osou  $y_2$ .

Fázový portrét soustavy (39) obsahující přímku  $\mathbf{p}$  je na obrázku 29.



Obr. 29: Fázový portrét lineární soustavy (39) s vlastní přímkou  $\mathbf{p}$ .

Vyřešíme nelineární soustavu (29) v okolí kritického bodu  $\bar{X}_2$ .

Přesunutím bodu  $\bar{X}_2$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 1, \\ y_2 &= x_2 - 1, \end{aligned} \tag{41}$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2(y_1 y_2 - y_1), \\ y_2' &= y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 - y_2). \end{aligned} \tag{42}$$

Soustava (42) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je typu uzel-výlevka.

Dále vypočítáme  $W_{loc}^S$  dotýkající se osy  $y_2$ , kterou hledáme ve tvaru

$$y_1 = k(y_2) = ay_2^2 + by_2^3 + \dots \tag{43}$$

Funkci  $k$  z (43) derivujeme a získáme

$$\frac{dk}{dy_2} = 2ay_2 + 3by_2^2 + \dots \tag{44}$$

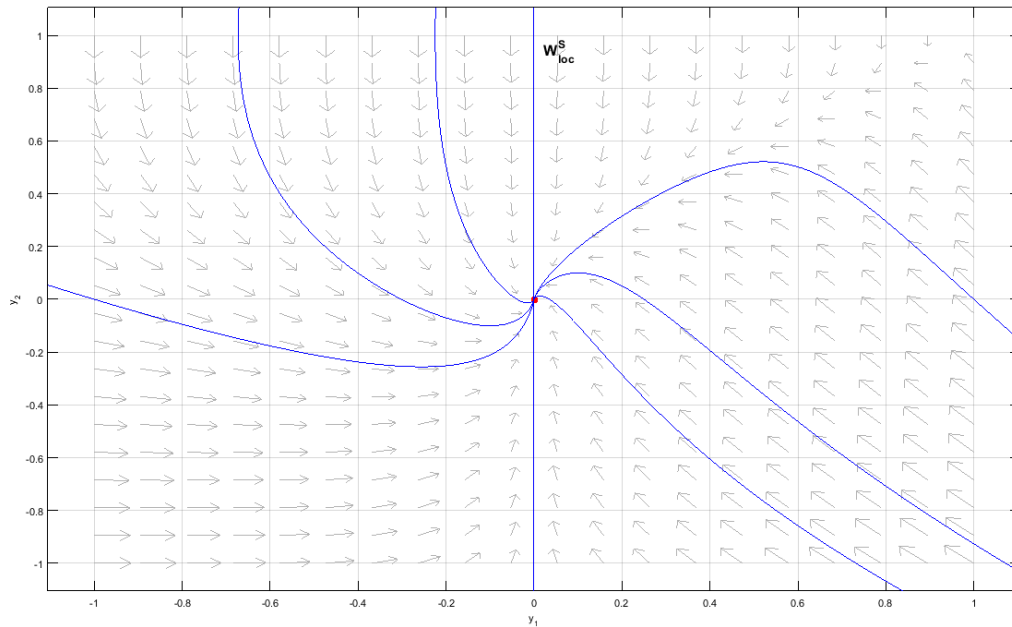
Dosazením (44) a (42) do vztahu

$$y_1' = \frac{dk(y_2)}{dy_2} y_2'$$

dostaneme rovnost

$$2(y_1 y_2 - y_2) = (2ay_2 + 3by_2^2 + \dots)(y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 - y_2)),$$

do které dále za  $y_1$  dosadíme (43) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_2^2$  získáme  $0 = -4a$ , odkud vyjádříme  $a = 0$ . Dále porovnáme koeficienty u  $y_2^3$  a získáme:  $2a = 2a(2a - 1) - 6b$ , odtud vidíme, že  $b = 0$ . Postupně dostáváme, že všechny koeficienty v (43) jsou nulové a proto  $W_{loc}^S$  splývá s částí osy  $y_2$ . Podobně jako v předchozím případě, protože přímka  $x_1 \equiv 1$  patří do fázového portréту rovnice (29), máme přesný tvar variety, protože osa  $y_2$  je částí fázového portréту soustavy (42). Viz obrázek 30.



Obr. 30: Fázový portrét nelineární soustavy (42) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí  $\bar{X}_2$ .)

3. Pro kritický bod  $\bar{X}_3$ , získáme matici

$$\mathbf{A} := D\mathbf{f}(\bar{X}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Z této matice určíme  $tr(\mathbf{A}) = -4$ ,  $det(\mathbf{A}) = -24$ . Vlastní čísla této matice jsou  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{28}$ . Zjistili jsme, že kritický bod  $\bar{X}_3$  je nestabilní hyperbolický bod typu sedlo z třídy III.

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_3$  má tvar

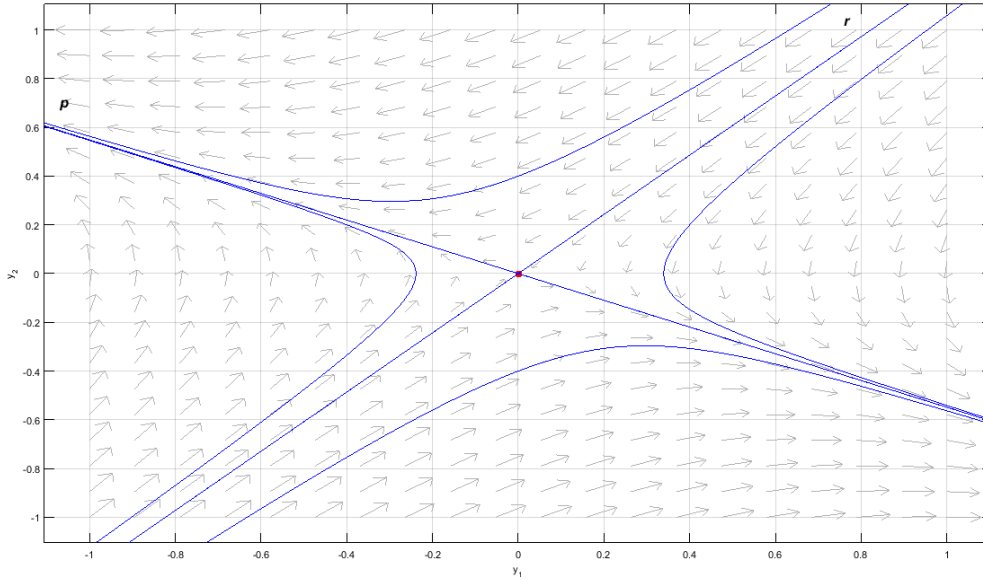
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (45)$$

Nyní najdeme vlastní vektory vyřešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{28} & 0 \\ 0 & -2 - \sqrt{28} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Ze soustavy (46) získáme vlastní vektory  $\mathbf{p} = \left(1, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$  pro kladné vlastní číslo  $\lambda_1 = -2 + \sqrt{28}$  a  $\mathbf{r} = \left(1, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$  pro záporné vlastní číslo  $\lambda_2 = -2 - \sqrt{28}$ .

Fázový portrét soustavy (45) obsahující vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$  je na obrázku 31.



Obr. 31: Fázový portrét lineární soustavy (45) s vlastními přímkami  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$ .

Vyřešíme nelineární soustavu (29) v okolí kritického bodu  $\bar{X}_3$ .

Přesunutím bodu  $\bar{X}_3$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2, \\ y_2 &= x_2 - 2, \end{aligned} \quad (47)$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2(y_1 y_2 - 3y_2), \\ y_2' &= y_1^2 - y_2^2 - 4(y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (48)$$

Soustava (48) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je sedlem.

Dále vypočítáme  $W_{loc}^N$ , která se dotýká vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a kterou hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = \left( \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \right) y_1 + a y_1^2 + b y_1^3 + \dots \quad (49)$$



Funkci  $h$  z (49) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = \left( \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \right) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (50)$$

Dosazením (50) a (48) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

dostaneme rovnost

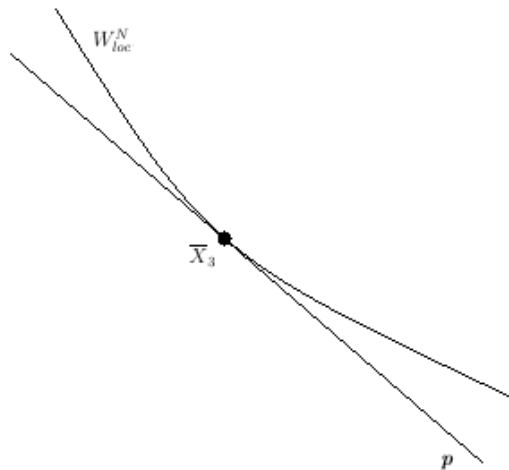
$$y_1^2 - y_2^2 - 4(y_1 + y_2) = \left( \left( \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \right) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \right) (2(y_1 y_2 - 3y_2)),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme (49) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme:

$$-\frac{7}{9} + \frac{2\sqrt{7}}{9} - 4a + \frac{8}{9} = 6a\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{9} - 6a + \frac{2 \cdot 7}{9} + \frac{2}{9},$$

odkud vyjádříme  $a = \frac{15-6\sqrt{7}}{18-54\sqrt{7}} > 0$ .  $W_{loc}^N$  je tedy přibližně tvaru

$$y_2 = \left( \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \right) y_1 + \frac{15 - 6\sqrt{7}}{18 - 54\sqrt{7}} y_1^2.$$



Obr. 32: Lokálně nestabilní varieta bodu  $\bar{X}_3$ .

Dále vypočítáme  $W_{loc}^S$ , která se dotýká vlastní přímky  $r$  a kterou hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = \left( \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right) y_1 + ay_1^2 + by_1^3 + \dots \quad (51)$$

Funkci  $h$  z (51) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = \left( \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (52)$$

Dosazením (52) a (48) do vztahu

$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

dostaneme rovnost

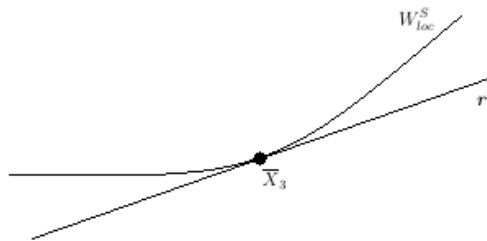
$$y_1^2 - y_2^2 - 4(y_1 + y_2) = \left( \left( \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right) + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \right) (2(y_1 y_2 - 3y_2)),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme vztah (51) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme

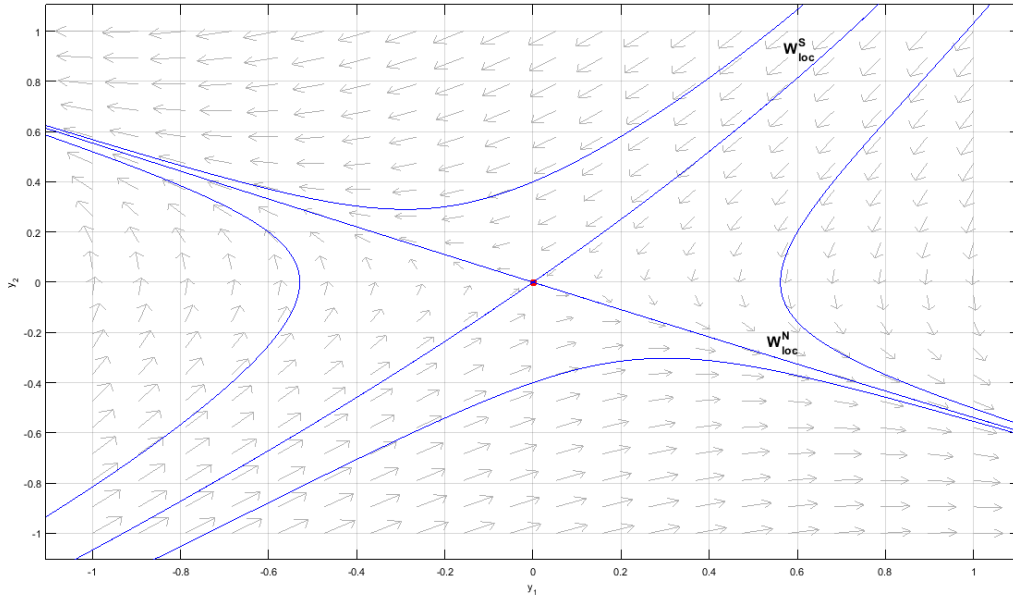
$$\frac{-7}{9} - \frac{2\sqrt{7}}{9} - 4a + \frac{8}{9} = \frac{4\sqrt{7}}{9} - 6a - 6a\sqrt{7} + \frac{(2 \cdot 7)}{9} + \frac{2}{9},$$

odkud vyjádříme  $a = \frac{15+6\sqrt{7}}{18+54\sqrt{7}} > 0$ .  $W_{loc}^S$  je tedy přibližně tvaru

$$y_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right) y_1 + \frac{15 + 6\sqrt{7}}{18 + 54\sqrt{7}} y_1^2.$$



Obr. 33: Lokálně stabilní varieta bodu  $\bar{X}_3$ .



Obr. 34: Fázový portrét nelineární soustavy (48) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí  $\bar{X}_3$ .)

4. Pro kritický bod  $\bar{X}_4$ , získáme matici

$$\mathbf{A} := D\mathbf{f}(\bar{X}_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z této matice určíme  $\text{tr}(A) = -4$ ,  $\det(A) = -12$ . Vlastní čísla této matice jsou  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -6$ . Zjistili jsme, že kritický bod  $\bar{X}_4$  je nestabilní hyperbolický bod typu sedlo z třídy III.

Lineární variační rovnice příslušná k bodu  $\bar{X}_4$  má tvar

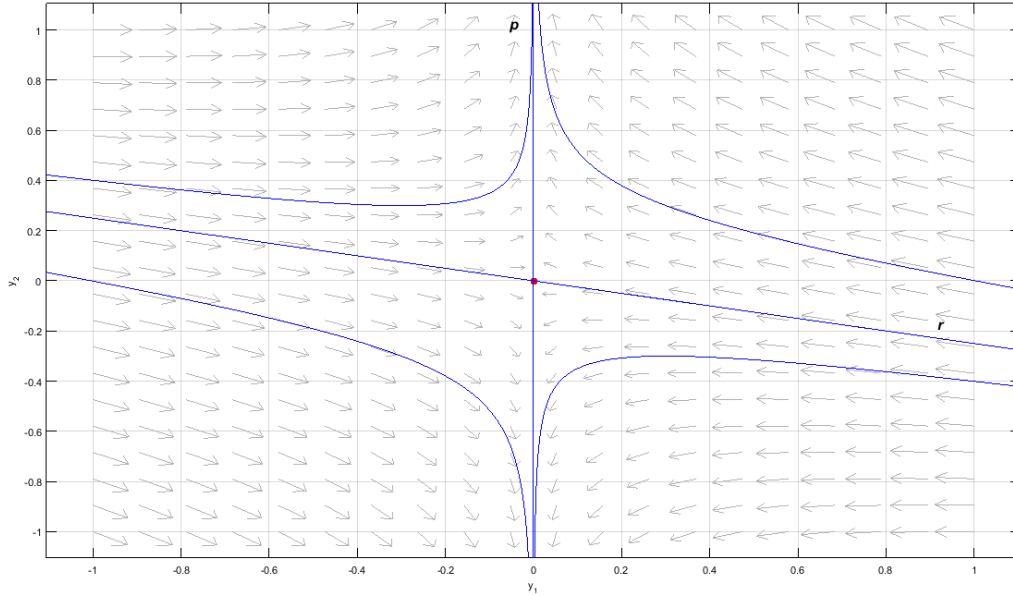
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (53)$$

Nyní najdeme vlastní vektory vyřešením soustavy:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Ze soustavy (54) získáme vlastní vektory  $\mathbf{p} = (0, 1)$  pro kladné vlastní číslo a  $\mathbf{r} = (1, -\frac{1}{4})$  pro záporné vlastní číslo. Tedy vlastní přímka  $\mathbf{p}$  splývá s osou  $y_2$ .

Fázový portrét soustavy (53) obsahující vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$  je na obrázku 35.



Obr. 35: Fázový portrét lineární soustavy (53) s vlastními přímkami  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$ .

Vyřešíme nelineární soustavu (29) v okolí bodu  $\bar{X}_4$ .

Přesunutím bodu  $\bar{X}_4$  do počátku pomocí transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 1, \\ y_2 &= x_2 + 1, \end{aligned} \quad (55)$$

získáme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2(y_1 y_2 - 3y_1) \\ y_2' &= y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (56)$$

Soustava (56) má kritický bod  $\mathbf{o}$ , který je sedlem.

Dále vypočítáme  $W_{loc}^N$ , která se dotýká vlastní přímky  $\mathbf{p}$  a kterou hledáme ve tvaru

$$y_1 = k(y_2) = ay_2^2 + by_2^3 + \dots \quad (57)$$

Funkci  $k$  z (57) derivujeme a získáme

$$\frac{dk}{dy_2} = 2ay_2 + 3by_2^2 + \dots \quad (58)$$

Dosazením (58) a (56) do vztahu

$$y_1' = \frac{dk(y_2)}{dy_2} y_2'$$

dostaneme rovnost

$$2(y_1 y_2 - 3y_2) = (2ay_1 + 3by_1^2 + \dots)(y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)),$$

do které dále za  $y_1$  dosadíme vztah (57) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_2^2$  získáme  $0 = 4a$ , odkud vidíme, že  $a = 0$ . Dále porovnáme koeficienty u  $y_2^3$  a získáme  $2a = 6b + 2a(2a - 1)$ , odkud vidíme, že  $b = 0$ . Postupně dostáváme, že všechny koeficienty v (57) jsou nulové a proto  $W_{loc}^N$  splývá s částí osy  $y_2$ . Získáváme tedy přesný tvar variety, protože osa  $y_2$  je částí fázového portréту soustavy (56). Dále vypočítáme  $W_{loc}^S$ , která se dotýká vlastní přímky  $\mathbf{r}$  a kterou hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = -\frac{1}{4}y_1 + ay_1^2 + by_1^3 + \dots \quad (59)$$

Funkci  $h$  z (59) derivujeme a získáme

$$\frac{dh}{dy_1} = -\frac{1}{4} + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots \quad (60)$$

Dosazením (60) a (56) do vztahu

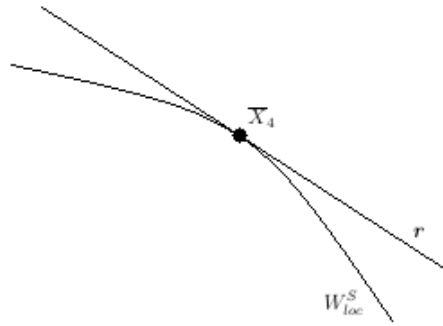
$$y_2' = \frac{dh(y_1)}{dy_1} y_1'$$

dostaneme rovnost

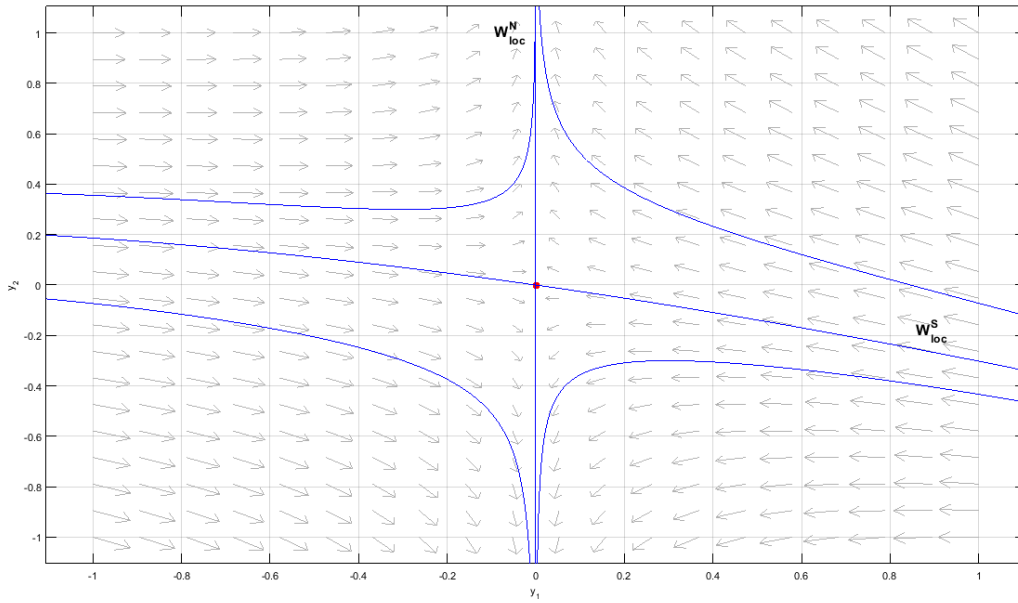
$$y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2) = \left(-\frac{1}{4} + 2ay_1 + 3by_1^2 + \dots\right)(2(y_1 y_2 - 3y_1)),$$

do které dále za  $y_2$  dosadíme vztah (59) a roznásobíme. Porovnáním koeficientů u  $y_1^2$  získáme  $2a + \frac{15}{16} = \frac{1}{8} - 12a$ , odkud vyjádříme  $a = -\frac{13}{224} < 0$ .  $W_{loc}^S$  je tedy přibližně tvaru:

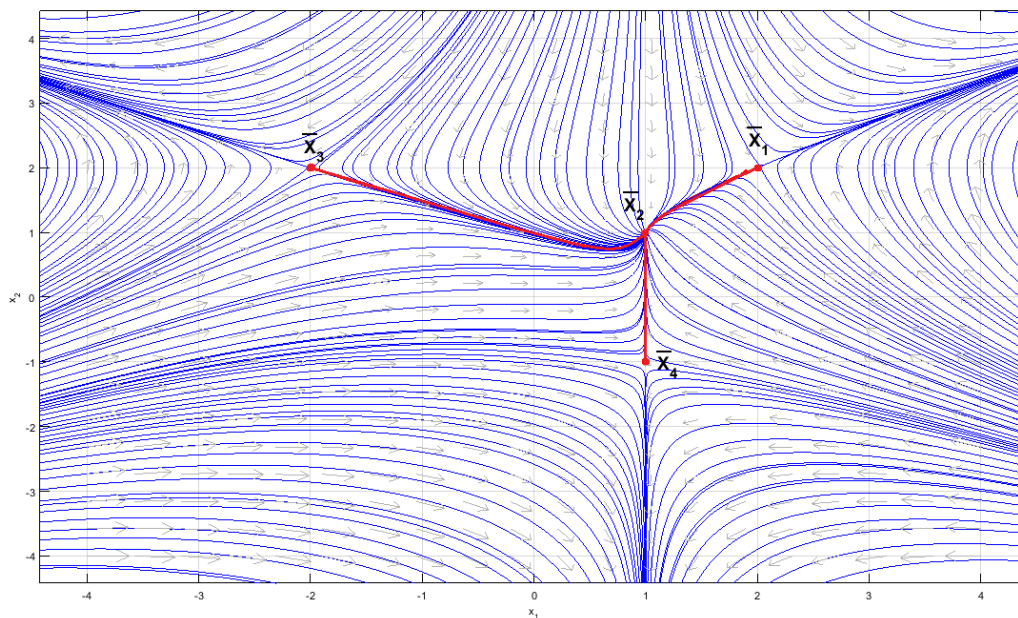
$$y_2 = -\frac{1}{4}y_1 - \frac{13}{224}y_1^2.$$



Obr. 36: Lokálně stabilní varieta bodu  $\bar{X}_4$ .



Obr. 37: Fázový portrét nelineární soustavy (56) v okolí počátku. (Je stejný jako fázový portrét soustavy (29) v okolí  $\bar{X}_4$ .)



Obr. 38: Celkový fázový portrét nelineární soustavy (29) s heteroklinickými orbitami.

Nyní se zaměříme na existenci heteroklinických orbit ve fázovém portrétu soustavy (29).

Vidíme, že první heteroklinická orbita spojuje body  $\bar{X}_2$  a  $\bar{X}_4$ , protože přímka  $x_1 \equiv 1$  patří do fázového portrétu, a leží na této přímce (viz začátek příkladu 3.2).

Druhá heteroklinická orbita by měla spojoval body  $\bar{X}_2$  a  $\bar{X}_3$ . Pomocí invariantních oblastí dokážeme, že existuje.

Nejprve si uvedeme některé definice, čerpané ze zdroje [3], potřebné pro invariantní princip:

**Definice 3.3.** Řekneme, že podmnožina  $U \in \mathbf{R}^2$  je pozitivně invariantní (respektive negativně invariantní) pod tokem  $\varphi$  rovnice  $\dot{x} = f(x)$ , jestliže pro nějaké  $x^0 \in U$ , pozitivní orbita  $\gamma^+(x^0)$  (respektive negativní orbita  $\gamma^-(x^0)$ ) vycházející z  $x^0$  patří do  $U$ .

**Definice 3.4.** Řekneme, že podmnožina  $M \in \mathbf{R}^2$  je invariantní pod tokem  $\varphi$

rovnice  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , jestliže pro každé  $\mathbf{x}^0 \in M$ , orbita  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  vycházející z  $\mathbf{x}^0$  patří do  $M$  (neboli  $\varphi(t, M) = M$  pro každé  $t \in \mathbf{R}$ ).

**Lemma 3.5.** Jestliže je pozitivní orbita  $\gamma^+(\mathbf{x}^0)$  (respektive negativní orbita  $\gamma^-(\mathbf{x}^0)$ ) ohraničená, pak  $\omega$ -limitní množina  $\omega(\mathbf{x}^0)$  (respektive  $\alpha(\mathbf{x}^0)$ ) je neprázdná, kompaktní a souvislá invariantní množina.

Ukážeme, že každá orbita startující uvnitř trojúhelníka  $\mathbf{T}_1$  o vrcholech  $\overline{X}_3, A, \overline{X}_4$  zůstává pro  $t > 0$  uvnitř tohoto trojúhelníka a je proto ohraničená. Nejdříve vyřešíme tok na úsečce  $(\overline{X}_3, A)$ , pro kterou platí, že  $x_1 \in (-2, 1), x_2 = 2$ . Tyto hodnoty dosadíme do systému rovnic (29) a zjistíme, že  $x'_1 = 0, x'_2 = x_1^2 - 4 < 0$ . Pro vektor tečný k orbitě platí  $\tau = (x'_1, x'_2)$ . Tečný vektor k libovolné orbitě protínající tuto úsečku je tedy tvaru  $\tau = (0, x_2 < 0)$  a směřuje proto svisle dolů. Dále vyřešíme tok na úsečce  $(\overline{X}_3, \overline{X}_4)$ , která je částí přímky o rovnici  $x_2 = -x_1$  a skládá se z bodů  $(x_1, -x_1)$ , kde  $x_1 \in (-2, 1)$ . Dosazením do první z rovnic (29) získáme  $x'_1 = 2(-x_1^2 - x_1 + 2)$ , tedy platí, že  $x'_1 > 0$  pro  $x_1 \in (-2, 1)$ . Dosazením do druhé z rovnic (29) máme  $x'_2 = 0$ . Získali jsme tedy tečný vektor  $\tau = (x_1 > 0, 0)$  směřující vodorovně doprava. Úsečka  $(A, \overline{X}_4)$  je částí přímky  $x_1 \equiv 1$ , kterou nemůže protínat žádná jiná orbita. Viz obrázek 39.

Ukázali jsme, že trojúhelník  $\mathbf{T}_1$  je pozitivně invariantní vzhledem k soustavě (29). Proto  $\omega$ -limitní množina každé orbity startující v  $\mathbf{T}_1$  na  $W_{loc}^N$  (příslušné k bodu  $\overline{X}_3$ ) musí ležet uvnitř nebo na hranici  $\mathbf{T}_1$ . Podle věty 1.25(i) je tato  $\omega$ -limitní množina rovna bodu  $\overline{X}_2$ . Tedy existuje heteroklinická orbita spojující body  $\overline{X}_2$  a  $\overline{X}_3$ .

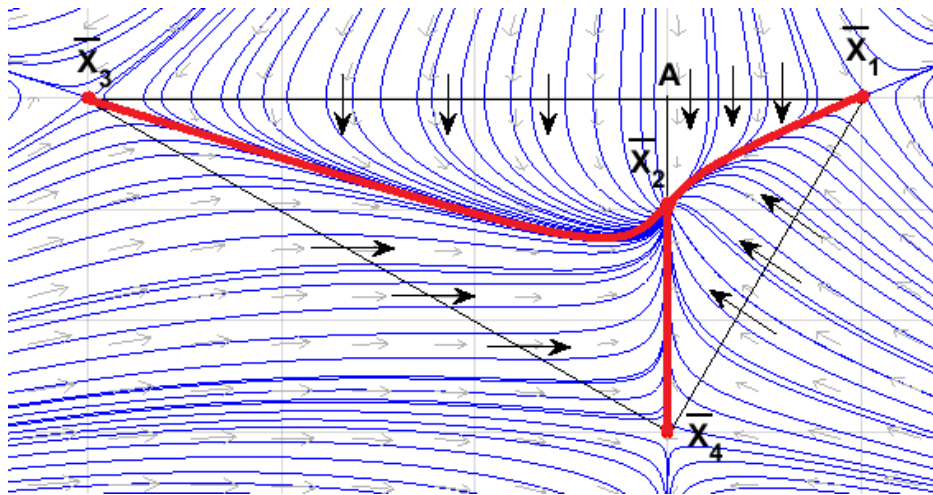
Třetí heteroklinická orbita by měla spojit body  $\overline{X}_1$  a  $\overline{X}_2$ . Pomocí invariantních oblastí dokážeme, že existuje. Ukážeme, že každá orbita startující uvnitř trojúhelníka  $\mathbf{T}_2$  s vrcholy  $A, \overline{X}_1, \overline{X}_4$  zůstává pro  $t > 0$  uvnitř tohoto trojúhelníka a proto je ohraničená. Nejdříve vyřešíme tok na úsečce  $(A, \overline{X}_1)$ , pro kterou platí, že  $x_1 \in (1, 2), x_2 = 2$ . Tyto hodnoty dosadíme do systému rovnic (29) a zjistíme, že  $x'_1 = 0, x'_2 = x_1^2 - 4$ , kde  $x'_2 < 0$ . V tomto případě pro tečný vektor k libovolné orbitě protínající tuto úsečku platí  $\tau = (0, x_2 < 0)$  a směřuje proto



svisle dolů. Dále vyřešíme tok na úsečce  $(\bar{X}_1, \bar{X}_4)$ , která je částí přímky o rovnici  $x_2 = 3x_1 - 4$  a skládá se z bodů  $(x_1, 3x_1 - 4)$ , kde  $x_1 \in (1, 2)$ . Dosazením do soustavy rovnic (29) získáme  $x'_1 = 2(3x_1^2 - 9x_1 + 6)$ , které je záporné pro  $x_1 \in (1, 2)$ ,  $x'_2 = -5x_1^2 + 24x_1 - 16$ , které je kladné pro  $x_1 \in (1, 2)$ . Získali jsme tedy tečný vektor  $\tau = (x_1 < 0, x_2 > 0)$  směřující doleva a nahoru. Úsečka  $(A, \bar{X}_4)$  je částí přímky  $x_1 \equiv 1$ , kterou nemůže protínat žádná jiná orbita. Viz obrázek 39.

Ukázali jsme, že trojúhelník  $\mathbf{T}_2$  je pozitivně invariantní vzhledem k soustavě (29). Proto  $\omega$ -limitní množina každé orbity startující v  $\mathbf{T}_2$  na  $W_{loc}^N$  (příslušné k bodu  $\bar{X}_1$ ) musí ležet uvnitř nebo na hranici  $\mathbf{T}_2$ . Podle věty 1.25(i) je tato  $\omega$ -limitní množina rovna bodu  $\bar{X}_2$ . Tedy existuje heteroklinická orbita spojující body  $\bar{X}_1$  a  $\bar{X}_2$ .

Dle věty 1.24 v tomto fázovém portréту neexistuje žádná periodická orbita. Pokud by existovala periodická orbita ve fázovém portrétu soustavy (29), pak by podle věty 1.24 musela obíhat aspoň jeden z bodů  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$ . V tom případě by musela protínat buď přímku  $x_1 \equiv 1$ , nebo jednu z heteroklinických orbit spojujících body  $\bar{X}_3, \bar{X}_1$  s bodem  $\bar{X}_2$ . Toto nemůže nastat, protože podle věty 1.3 se orbity nemohou protínat. Proto ve fázovém portrétu soustavy (29) neexistuje žádná periodická orbita.



Obr. 39: Výřez z celkového fázového portrétu nelineární soustavy (29) s vyznačenými trojúhelníky.

## Závěr

V práci byla ukázána konstrukce fázových portrétů u dvou zadaných modelů. První model určený rovnicí (13) má dva kritické body (rovnovážné stavy - v těchto bodech se veličiny  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  nemění v čase), jejichž typy byly určeny pomocí linearizace. Odpovídající lineární variační rovnice (14) a (22) jsou zde v kanonickém tvaru, což usnadnilo nalezení asymptoticky stabilních a nestabilních variet procházejících kritickými body. Tyto variety rozdělují fázovou rovinu na oblasti se stejným typem chování sledovaných veličin  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ . Dále byla dokázána existence heteroklinické orbity spojující oba kritické body. Její význam spočívá v tom, že popisuje přechod od jednoho rovnovážného stavu k druhému rovnovážnému stavu. Závěrem bylo dokázáno, že fázový portrét neobsahuje žádnou periodickou orbitu. Druhý model určený rovnicí (29) je komplikovanější. Má čtyři kritické body jejichž typy byly opět určeny pomocí linearizace. Odpovídající lineární variační rovnice (31), (39), (45) a (53) zde však nejsou v kanonickém tvaru a proto bylo určování asymptoticky stabilních a nestabilních variet procházejících kritickými body složitější. Na rozdíl od prvního modelu, kde byla jediná heteroklinická orbita, která ležela na ose  $x_1$ , v tomto případě jsou tři heteroklinické orbity, které jsou různé od os  $x_1$  a  $x_2$ . Jejich existence je zde dokázána pomocí invariantních množin. Opět je také dokázáno, že zde neexistují periodické orbity.

Teorie je průběžně ilustrována numerickými simulacemi v MATLABu. K vykreslování byl použit skript `pplane8.m`. Po zadání rovnic byly nalezeny kritické body a příslušné orbity. Pro zakreslení určitých orbit bylo potřeba je zadávat pomocí vhodné počáteční podmínky.

Podrobnější informace k teorii lze nalézt například ve zdrojích [3] a [4].

## Literatura

- [1] I. Rachůnková a J. Fišer: Dynamické systémy 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.
- [2] Opory projektu MATAP, předmětu Dynamické systémy 2.
- [3] J.K.Hale, H. Kocak : Dynamics and Bifurcations, Springer, New York 1991.
- [4] L. Perko: Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York 1993.