

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Radim Švajnoch

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Grafické řešení algebraických rovnic 2., 3. a 4.
stupně

Graphical solution of algebraic equations of 2^{nd} , 3^{rd}
and 4^{th} degree

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne

Radim Švajnoch

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc. za odborné vedení práce a cenné rady, díky kterým jsem tuto práci zpracoval.

Bibliografická Identifikace

Jméno a příjmení autora: Radim Švajnoch

Název práce: Grafické řešení algebraických rovnic 2., 3. a 4. stupně

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematiky, Pedagogická fakulta

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Studijní program: MVP-2018, AJV-2018, modul pedagogické propedeutiky

Studovaný obor: Předměty pedagogické způsobilosti a společného základu, Matematika se zaměřením na vzdělávání, Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání

Forma studia: Prezenční

Rok Obhajoby: 2021

Klíčová slova: Metody, polynomy, kořeny, binomická rovnice, trinomická rovnice, lineární polynomy, kvadratická rovnice, Diskriminant, Vietovy vzorce, Hornerovo schéma, kartézský souřadnicový systém, komplexní rovina, grafické řešení, kubická rovnice, kvartická rovnice, Geogebra, rovnice bez absolutního členu, sourozenecké křivky

Počet stran: 58

Počet příloh: 0

Jazyk: Čeština

Bibliographical identification

Author's first name and surname: Radim Švajnoch

Title: Graphical solution of algebraic equations of 2^{nd} , 3^{rd} and 4^{th} degree

Type of thesis: Bachelor thesis

Department: Department of Mathematics, Faculty of Education

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Study program: MVP-2018, AJV-2018, module of pedagogical propaedeutic

Study program: Subjects of pedagogical qualification and common basics, Mathematics with focus on education, English with focus on Education

Form of study: Daily

Year of presentation: 2021

Key words: Methods, polynomials, binomial equation, trinomial equation, linear polynomials, quadratic polynomials, discriminant, Vieta's formulas, Horner's scheme, cartesian coordinate system, complex plane, graphical solution, cubic polynomial, quartic polynomial, Geogebra, equations without absolute constant, sibling curves

Number of pages: 58

Number of appendices: 0

Language: Czech

Obsah

Úvod.....	8
Cíl práce.....	10
1. Historie hledání kořenů polynomu.....	11
2. Polynom.....	13
2.1 Polynomická funkce.....	13
3. Matematické řešení algebraických rovnic.....	15
3.1 Lineární polynomy.....	16
3.2 Kvadratické polynomy.....	16
3.2.1 Výpočet přes diskriminant.....	17
3.2.2 Výpočet přes Vietovy vzorce.....	18
3.3 Kubické polynomy.....	21
3.3.1 Výpočet diskriminantu.....	21
3.3.2 Kubický polynom bez absolutního členu.....	23
3.3.3 Výpočet binomické rovnice.....	23
3.3.4 Výpočet přes Cardanovy vzorce.....	25
3.4 Algebraické polynomy čtvrtého stupně.....	25
3.4.1 Řešení trinomických rovnic.....	26
3.4.2 Hornerovo schéma.....	27
3.5 Algebraické rovnice vyššího než čtvrtého stupně.....	28
4. Kartézský souřadnicový systém.....	30
5. Komplexní rovina.....	31
6. Grafické řešení polynomických rovnic.....	32
6.1 Kvadratická funkce – doplnění na čtverec.....	32
6.2 Kvadratické funkce – dva reálné kořeny.....	33
6.3 Kvadratické funkce – jeden reálný kořen.....	33
6.4 Kvadratické funkce – grafická metoda pro nalezení dvou komplexně sdružených kořenů.....	34
6.5 Kvadratické funkce – řešení v komplexní rovině.....	38
7. Sourozenecké křivky.....	40
7.1 Definiční křivky.....	40
8. Grafické řešení kubické funkce.....	43
8.1 Kubická funkce – reálné kořeny.....	43
8.2 Kubická funkce – jeden reálný a dva komplexní kořeny v kartézském souřadnicovém systému.....	45

8.3	Kubická funkce pomocí sourozeneckých křivek	46
9.	Grafické řešení kvartické funkce.....	48
9.1	Kvartické funkce s pouze reálnými kořeny.....	48
9.2	Kvartická funkce – řešení pomocí sourozeneckých křivek.....	51
	Závěr.....	54
	Literatura a jiné zdroje.....	55
	Seznam obrázků.....	56

Úvod

Hledání kořenů polynomů je jeden z nejstarších matematických problémů. Po staletí mnoho Matematiků posouvalo hranice porozumění této problematice řešení polynomů a algebraických rovnic, včetně historických velikánů jako Gerolamo Cardano a jeho žáci, René Descartes ve své knize *La Géométrie*, Isaac Newton ve svém díle *Analýza Nekonečných Řad* a dalších publikacích, či Leonard Euler autor základní věty algebry. Pokrok se nezastavil, a i dnes se vylepšují metody a algoritmy pro nalezení kořenů polynomů, kterých využíváme pro nalezení kořenů polynomů stále vyšších a vyšších stupňů.

Polynomy a hledání jejich kořenů zasahují do spousta oborů a mají využití nejen v matematice ale také v oblastech jako fyzika, počítačové vědy či konstruktérství. Je to jeden ze základních problémů v matematice, a proto jsem si jej vybral pro svou bakalářskou práci. Před strohým pamatováním si matematickým vzorcům dávám přednost hlubšímu pochopení tématu. Grafická řešení jsem měl vždy v oblibě, neboť poskytují novou perspektivu, která může být velice prospěšná, a zároveň prospívají zapamatovatelnosti.

Tato práce je strukturována do 10 kapitol:

Kapitola 1 popisuje historický vývoj polynomů a hledání jeho kořenů, a také nastiňuje současnou situaci výzkumu této problematiky.

Kapitola 2 seznámí čtenáře s pojmem polynom a uvede jeho základní vlastnosti.

Kapitola 3 slouží jednak jako příručka v oblasti kalkulaci kořenů polynomů pro budoucí učitele, a za druhé jako přehled nepoužívanějších matematických metod a vzorců pro nalezení kořenů lineárních, kvadratických, kubických a kvartických polynomů.

Kapitoly 4 a 5 připravují půdu pro grafická řešení, obeznámením s kartézským souřadnicovým systémem a komplexní rovinou, které slouží k vizualizaci řešení algebraických rovnic.

Kapitola 6 se co nejpodrobněji věnuje grafickému řešení kvadratických polynomů, neboť jsou to polynomy, se kterými se pracuje nejčastěji, obzvláště pak na středních školách.

Kapitola 7 definuje sourozenecké křivky, ke kterým se dopravujeme na konci kapitoly 6, a které jsou vitální pro vizualizaci komplexních kořenů.

Kapitola 8 a 9 se věnuje grafickému řešení kubických a kvartických rovnic.

Kapitola 10 je závěr této bakalářské práce a rekapituluje probírané téma a získané poznatky.

Cíl práce

Cílem mé bakalářské práce je poskytnout celistvý a pochopitelný přehled metod pro hledání kořenů polynomů druhého třetího a čtvrtého stupně. Tato práce zopakuje metody využívané na základních a středních školách, a grafická řešení rovnic snad nabídnou čtenáři nový vhled do této problematiky, který poskytne hlubší pochopení této problematiky.

Každou z uvedených metod doplním vypočítaným typickým příkladem, který slouží jako návod pro příklady podobného typu. Také k jednotlivým metodám poskytnu graf funkce vytvořený v programu Geogebra, který slouží k lepší vizualizaci řešení.

1. Historie hledání kořenů polynomu

První známé řešení kvadratické rovnice se nachází v Berlínském papyru 6619, což je prastarý egyptský papyrus, jehož původ se odhaduje okolo roku 1300 př. n. l. Tento papyrus obsahuje staré egyptské matematické a medicínské znalosti. Tento dokument obsahuje problém obsahu čtverce, k jehož nalezení je potřeba znalosti mocnin a odmocnin.

Babyloňané z Mezopotámie poté připravili základy pro práci perského matematika Al-Chorezmího. Věděli, jak řešit jisté typy kvadratických a některé kubické rovnice, avšak není známo, zdali byli schopni odvodit všeobecnou vzorec pro výpočet kubických rovnic.

Později byli Řekové schopni vypočítat kvadratickou rovnici za pomoci geometrických metod, jak demonstroval Euklid v roce 300 př.n.l. První důkaz o využití algebraických metod pro tento účel byl připsán filozofovi Diofantovi okolo roku 210, který zvládl částečně vyřešit kvadratickou rovnici, ale pouze pro kladné racionální čísla. Rovnice, které vedou na záporná nebo iracionální čísla považoval jako zbytečné. Matematici z celého světa postupně objevovali řešení pro kvadratickou rovnici, nicméně během prvních dvou tisíc let zabýváním se touto tematikou byl postup velice pomalý.

Během renesance zaznamenáváme rozkvět matematiky. První krok k vyřešení kubické rovnice našel Italský matematik Scipione dal Ferro (okolo roku 1500), který vyřešil rovnici $x^3 + ax = b$. Nicméně svůj objev tajil, stejně jako většina matematiků té doby, kteří se tak snažili být o krok napřed před konkurencí. Později Italský matematik Niccoló Fontana Tartaglia. Objevil řešení pro rovnice typu $x^3 + ax^2 = b$, ale také svůj objev tajil.

Gerolamo Cardano později přesvědčil Tartagliu, aby mu poskytl rovnici pro řešení těchto rovnic a Tartaglia mu ji věnoval ve formě básně za podmínky, že jí publikuje až po jeho vlastní publikaci. Nicméně Cardano ji zveřejnil v roce 1545 ve svém díle *Ars Magna* před Tartagliem, a tak je řešení kubické rovnice připisováno Cardanovi. Jeho řešení bylo první, které pracovalo i s komplexními čísly, což bylo v té době považováno za absurdní. Nicméně ani Cardano plně nerozuměl těmto komplexním řešením.

Francouzský matematik Albert Girard jako první vyslovil, že polynom stupně n má n kořenů roku 1629. Krátce poté roku 1637 René Descartes rozpracoval Girardovu teorii a zapracoval do ní možnost komplexních kořenů, nicméně jejich specifické řešení nemohl uchopit. Roku 1702 Leibniz věřil, že vyvrátil dnes známou základní větu algebry. Nicméně jeho důkaz vyvrátil o 40 let později Euler.

Hned několik známých matematiků se pokusilo nalézt důkaz pro základní větu algebry, včetně D'Alemberta, Laplace, Eulera a Lagrange. Lagrange jako první dokázal důležitý fakt o neřešitelnosti polynomů pátého a vyššího stupně za pomoci radikálů. Nicméně jejich důkazy nebyly kompletní, a Gauss je ten kterému je připisován první důkaz základní věty algebry. Roku 1799 poskytl svůj vlastní důkaz včetně kritiky předchozích důkazů. Ironicky i tento důkaz byl chybný a později vypiloval svou práci třemi dalšími důkazy. V roce 1814 švýcarský matematik Jean Robert Argand zavedl myšlenku geometrické interpretace komplexního čísla, čehož využil Gauss ve svém finálním čtvrtém důkazu, který se stal jeho vrcholným úspěchem. Tento důkaz jako první dovolil mít polynomům komplexní koeficienty.

Řešení rovnic druhého stupně bylo známo od dávných dob, třetího a čtvrtého stupně díky práci Tartaglii a Cardana, nicméně obecné řešení rovnic pátého stupně se matematikům dlouho vyhýbalo. V roce 1829 Abel dokázal neexistenci obecného řešení pro rovnice pátého a vyššího stupně.

Lidský pokrok a mechanizace přinesly nový způsob řešení těchto rovnic za pomoci konstrukce specifických výpočetních zařízení sloužících k tomuto účelu. První z těchto zařízení zkonstruoval John Rowing roku 1770, nicméně dokázalo počítat pouze kořeny kvadratické rovnice. Roku 1895 španělský inženýr zkonstruoval stroj pro mechanickou kalkulaci reálných a komplexních kořenů trinomických rovnic. Vědci z Bellových laboratoří poté postavili Izograf – zařízení schopné výpočtu kořenů polynomů až do patnáctého stupně.

V současnosti studium vyšších polynomů nehraje v matematice až tak důležitou roli. Existence programů, které poskytnou uživateli řešení pouhým stisknutím tlačítka, odrazují od získání precizní znalosti komplikovaných metod nalézání kořenů polynomů. Tyto programy využívají aproximace kořenů za pomoci iterativních algoritmů, kterých existuje spousta.

2. Polynom

Polynom neboli také pro školáky známější mnohočlen, je matematický výraz, který je součtem jednočlenů. Tyto jednočleny se skládají ze dvou částí a to koeficientu, pro který platí $a \in \mathbb{R}$ a obvykle jedné (avšak může jich být i více) proměnné s kladným celočíselným exponentem.

Bud' P okruh a x symbol. Označme $P(x)$ množinu všech výrazů ve tvaru $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}_0$, a $a_0 \neq 0$. Obvykle se ale setkáváme s polynomy zapsanými v rozepsaném tvaru: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x^1 + a_n$. Tento výraz je zobrazení z množiny \mathbb{R} do množiny \mathbb{R} . Koeficient a_0 nazveme vedoucí koeficient polynomu $P_n(x)$ a koeficient a_n nazveme absolutní člen polynomu $P_n(x)$. Nenulový člen $a_0 x^n$ poté nazveme vedoucí člen polynomu $P_n(x)$. Číslo n nám poté označuje stupeň daného polynomu, což je nejvyšší exponent vedoucího členu polynomu. Nulové koeficienty v zápisu tohoto polynomu neuvádíme.

Polynomy prvního stupně nazýváme lineární polynomy, druhého stupně nazýváme kvadratické polynomy, třetího stupně nazýváme kubické polynomy a čtvrtého stupně nazýváme kvartické polynomy. V této práci budeme pracovat pouze s polynomy s jednou proměnnou s reálnými koeficienty, i přesto, že některé ze zde uvedených metod pro zjištění kořenů se dají také využít pro polynomy s komplexními koeficienty.

Operaci sčítání polynomů definujeme:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} + \sum_{i=0}^m b_i x^{m-i} = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^{n-i}$$

Operaci součinu dvou polynomů definujeme:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \right) \left(\sum_{i=0}^m b_i x^{m-i} \right) = \sum_{i=0}^{n+m} c_k x^{(n+m)-k}, \text{ kde } c_k = \sum_{i+j=k}^n a_i b_j$$

2.1 Polynomická funkce

Polynomická funkce je funkce, která vznikne vyhodnocením polynomu $P(x)$ na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$. Tato funkce má tvar $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x^1 + a_n$. Definičním oborem $D(f)$ této funkce je celá množina \mathbb{R} . Tato funkce

má spojitou derivaci libovolného řádu na celém svém definičním oboru $D(f)$ a touto derivací je opět polynom.

Polynomická funkce jedné proměnné může být reprezentována jako graf. Grafem nulového polynomu je osa x , grafem lineární funkce je přímka, a grafem polynomu druhého a vyššího stupně je nepřetržitá nelineární křivka.

3. Matematické řešení algebraických rovnic

Pod pojmem řešení algebraických rovnic rozumíme hledání takových čísel x , pro která platí, že pokud je dosadíme do daného polynomu, bude hodnota polynomu v daném bodě rovna 0. Jinými slovy hledáme takové x , pro které se rovná $P(x) = 0$. Každou hodnotu proměnné x , která splňuje toto pravidlo nazveme kořenem polynomu, nebo nulové body dané polynomické funkce. Tento proces nazýváme hledání kořenů polynomu, nebo také řešení algebraických rovnic. Polynom stupně n má nejméně jeden a nejvýše n různých kořenů a tyto kořeny mohou být z reálného i komplexního oboru.

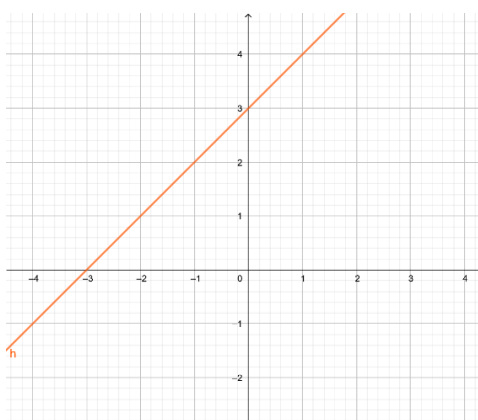
Každý polynom lze poté rozepsat ve tvaru $P(x) = (x - k_1)(x - k_2) \dots (x - k_n)$, kde k_1, k_2, \dots, k_n jsou kořeny daného polynomu $P(x)$. Jednotlivé členy tohoto tvaru $(x - k_i)$ potom označujeme jako kořenové činitele, přičemž každému z kořenů náleží právě jeden kořenový činitel. Pokud převedeme polynom do tohoto tvaru je poté velice snadné nalézt jeho kořeny. Může se stát, že v rozkladu na kořenové činitele se budou činitele opakovat a tento rozklad pak bude vypadat následovně: $P(x) = (x - k_t)^m(x - k_2) \dots (x - k_n)$, kořen k_t poté nazveme m -násobným kořenem polynomu $P(x)$.

Pokud má polynom všechny koeficienty reálné a některé kořeny komplexní, jsou všechny komplexní kořeny komplexně sdružené se svým protějškem. Což znamená, že mají shodnou reálnou, ale opačnou imaginární hodnotu. Je-li k kořenem polynomu $P(x)$ stupně $n \geq 1$, pak $P(x) = (x - k)G(x)$, kde $G(x)$ je polynom stupně $n - 1$. (Bezoutova věta)

3.1 Lineární polynomy

S lineárními polynomy se žáci setkávají již na prvním stupni základní školy, i když si nejsou vědomi, co to vlastně lineární polynom je. Slovní úlohy na základních školách jsou často lineárními polynomy, zpracované do tvaru, který děti osloví. Algebraické rovnice druhého stupně mají triviální řešení, neboť se už primárně nachází ve tvaru rozepsaném na kořenové činitele, ze kterého lze snadno vyčíst kořen daného polynomu. Pojdme se podívat na lineární polynom $P_1(x) = x + 3$ z *Obrázku 1*. Pro řešení tohoto polynomu položíme jeho pravou stranu rovnu nule. A pomocí převedení konstanty na druhou stranu snadno získáme výsledek.

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$



Obrázek 1: Graf lineárního polynomu $P(x)=x+3$

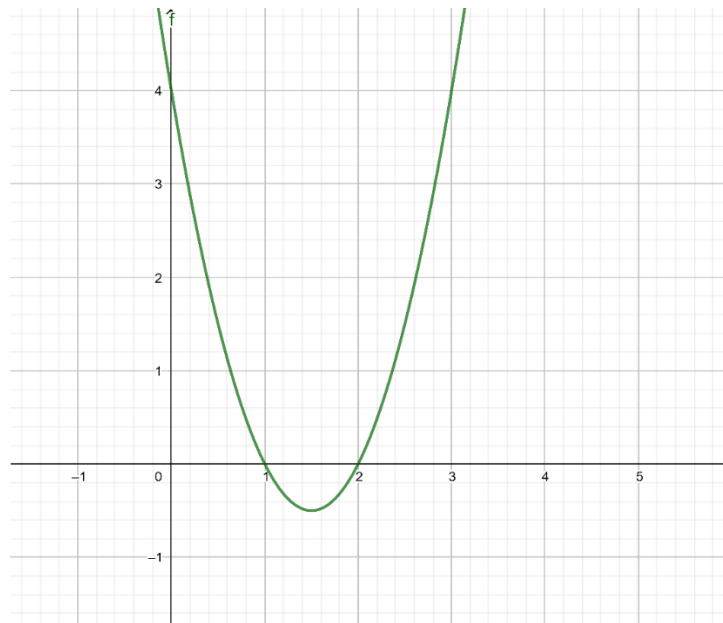
3.2 Kvadratické polynomy

S kvadratickými polynomy se žáci zpravidla seznámí na prvním stupni střední školy, a poté se s nimi pravidelně setkávají po celou dobu studia matematiky. Kvadratický polynom je polynom 2. stupně, jehož rovnice má tvar:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Kde $a \neq 0$. Tuto rovnici poté můžeme zapsat jako rozklad na kořenové činitele $a(x - k_1)(x - k_2) = 0$.

Jelikož se s kvadratickými polynomy pracuje poměrně často, je jejich rychlé a efektivní řešení výhodou.



Obrázek 2: Graf kvadratické funkce polynomu $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$

3.2.1 Výpočet přes diskriminant

Existuje hned několik způsobů, jak vypočítat kořeny kvadratického polynomu, pojďme se tedy podívat na ten nejuniverzálnější a nejpoužívanější, a to výpočet kořenů pomocí diskriminantu. Diskriminant značíme D a výpočet kořenů x_1, x_2 pomocí D odvodíme z obecného předpisu kvadratické funkce následovně:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \rightarrow D = b^2 - 4ac$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0 \rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0 \rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Pokud se podíváme na tento vzorec vidíme, že diskriminant D je pod odmocninou a tím pádem můžou nastat tři případy.

Pokud je diskriminant:

- Kladný – polynom má dva různé reálné kořeny
- Nulový – polynom má jeden dvojný reálný kořeny
- Záporný – polynom nemá v oboru reálných čísel řešení, ale stále má řešení v oboru komplexních čísel

Pojďme pomocí tohoto vzorce najít kořeny polynomu $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

Dosadíme koeficienty do vzorce pro diskriminant:

$$D = (-6)^2 - 4 * 2 * 4 = 36 - 32 = 4$$

Můžeme vidět, že diskriminant je kladný, a tím pádem má polynom dva reálné kořeny, o čem se přesvědčíme dosazením:

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + 2}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - 2}{4} = 1$$

3.2.2 Výpočet přes Vietovy vzorce

Takovéto počítání přes diskriminant je sice spolehlivý a univerzální způsob nicméně pokud má rovnice dva reálné kořeny existuje rychlejší a jednodušší způsob, a to pomocí Vietových vzorců. Pro jejich odvození využijeme klasický tvar polynomu a jeho rozklad na kořenové činitele.

Pokud hledáme kořeny rovnice, chceme rozložit polynom $P(x)$ na součin kořenových činitelů.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Po roznásobení pravé strany dostaneme:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$$

$$x^2 + bx + c = ax^2 - ax(x_2 + x_1) + ax_1x_2$$

Víme, že jednotlivé koeficienty polynomů si musí být rovny, aby si polynomy byly rovny. Z předchozí rovnice tedy dostáváme vztahy:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2, \quad \frac{c}{a} = x_1x_2$$

V minulé kapitole jsme si ukázali, jak vypočítat kořeny pomocí diskriminantu, Vietovy vzorce můžeme dostat taky pomocí vzorců pro kořeny, které používáme při výpočtu přes diskriminant.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \\ x_1 * x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} * \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Nyní tedy máme tyto dvě rovnice:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Pokud se pak $a = 1$, dostáváme klasické Vietovy vzorce.

V těchto případech, kdy máme jednodušší formu těchto vzorců, bychom měli většinou být schopní spočítat tyto kořeny i z hlavy, tyto vzorce jsou obzvláště užitečné pro žáky, protože jsou triviální a obsahují menší prostor pro chybu, kdežto při klasickém výpočtu přes diskriminant může být chybovost větší.

Pojďme se podívat na příklad $P(x) = x^2 - 9x + 18$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1x_2 &= 18 \end{aligned}$$

Jako první je třeba zjistit dělitele 18 což jsou: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$, po krátké úvaze můžeme vidět, že jediná z těchto čísel vyhovující tomuto předpisu jsou $x_1 = 3$ a $x_2 = 6$.

Tyto vzorce můžeme také využít, pokud je kvadratický polynom v následujícím tvaru $P(x) = ax^2 + c$. Tento tvar nazýváme ryzí/binomický tvar polynomu, a jelikož $b = 0$, víme, že kořeny této rovnice jsou stejné číslo s opačným znaménkem.

V případě $P(x) = x^2 - 18$ jsou kořeny:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

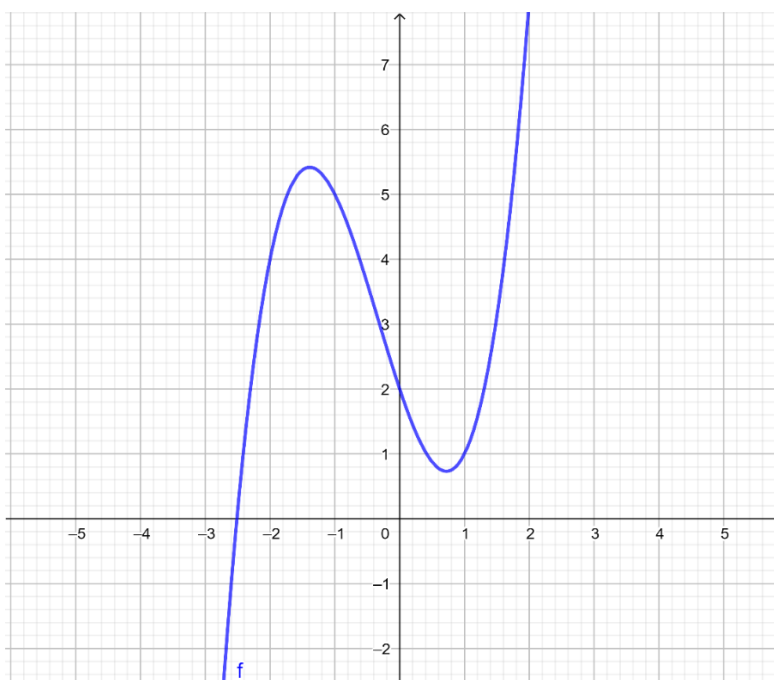
$$x^2 = 18 \rightarrow x_1 = 3\sqrt{2}, x_2 = -3\sqrt{2}$$

3.3 Kubické polynomy

Polynomy 3. stupně nazýváme kubické polynomy (z latinského *cubus*-krychle). S těmito polynomy se žáci setkají zpravidla v posledním ročníku střední školy a v matematických seminářích, nicméně nalezení kořenů těchto polynomů sahá za rámec znalostí středoškolské matematiky, a tak se s nimi setkají především při probírání derivací. Kubický polynom má tvar:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Kde $a \neq 0$.



Obrázek 3: Graf kubické funkce polynomu $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$

3.3.1 Výpočet diskriminantu

Výpočet kubické rovnice je značně komplikovanější než výpočet kvadratické rovnice. Celkově platí pravidlo, že se zvyšujícím se stupněm polynomu se exponenciálně zvyšuje obtížnost jeho výpočtu. Nicméně stále máme k dispozici vzorec pro výpočet diskriminantu, který nám alespoň přiblíží, jak bude vypadat řešení.

Důkaz tohoto řešení vychází z tvaru křivky kubické funkce. Jako první si převedeme kubickou funkci $f(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$ do redukovaného tvaru $f(x) = x^3 + px + q$, pomocí substituce $y = x - \frac{a}{3}$. Poté nalezneme extrémy funkce pomocí derivace.

$$f'(x) = 3x^2 + p \rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$f''(x) = 6x = 0$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0$$

Pak rozlišujeme dva případy

- Pro $p > 0$ není extrém; $f'(x) > 0$ což znamená, že funkce f je rostoucí na $D(f)$
- Pro $p < 0$ dva extrémy; v x_1 má funkce minimum, v x_2 má funkce maximum

První případ nám říká, že funkce je rostoucí na celém $D(f) = \mathbb{R}$ a je spojitá a má tím pádem pouze jeden reálný kořen., který je záporný pro $q > 0$, nulový pro $q = 0$ a kladný pro $q < 0$.

Druhý případ nám odvodí vzorec pro diskriminant. Nejprve vypočítáme funkční hodnoty v extrémech.

$$f(x_1) = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q$$

$$f(x_2) = -\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q$$

Součinem těchto funkčních hodnot pak je:

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2) &= \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q\right)\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q\right) = \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt{-\frac{p}{3}}pp\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + q^2 = 4\left(\frac{q}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4D \\ D &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

Tento vztah nám vypovídá o poloze extrémů funkce.

- $D > 0$ – rovnice má jeden reálný kořen a jeden kořen komplexně sdružený, neboť oba extrémy leží na jedné straně osy x .
- $D = 0$ – rovnice má buď jeden trojnásobný kořen, nebo jeden dvojnásobný a jeden jednoduchý kořen, neboť nejméně jeden z extrémů leží na ose x .
- $D < 0$ – rovnice má tři reálné kořeny, neboť jeden z extrémů leží pod osou x a jeden nad ní.

Pojďme si spočítat diskriminant polynomu $P(x) = x^3 + 5x - 4$.

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(5)^3}{27} = 4 + \frac{125}{27} > 0$$

Vidíme, že je diskriminant kladný a tím pádem víme, že má tento polynom jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny.

3.3.2 Kubický polynom bez absolutního členu

Speciální případ kubické rovnice je kubická rovnice bez absolutního členu. Pokud kubická rovnice nemá absolutní člen, značně nám to usnadní výpočet, neboť pouhým vytknutím x převedeme kubickou rovnici na kvadratickou, která je mnohem jednodušší a její výpočet známe.

$$ax^3 + bx^2 + cx + 0 = x(ax^2 + bx + c)$$

Kořeny této rovnice potom jsou kořeny získané kvadratické rovnice a 0.

Spočítejme takto kořeny polynomu: $P(x) = 2x^3 - 24x^2 + 64x$

$$2x^3 - 24x^2 + 64x = 2x(x^2 - 12x + 32)$$

Nyní použijeme Vietovy vzorce a snadno dohledáme kořeny:

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 x_2 = 32$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 8$$

3.3.3 Výpočet binomické rovnice

Speciálním případem výpočtu kořenů je ten, kdy se rovnice nachází v binomickém tvaru: $x^n - c = 0$, kde $x, c \in \mathbb{C}$, a $n \in \mathbb{N}$. S těmito příklady se žáci středních škol mohou setkat zpravidla ve 2 ročníku, jako rozšiřující učivo pro komplexní čísla. Tyto rovnice řešíme na Gaussově rovině komplexních čísel, a i jejich řešením jsou komplexní čísla. Pokud se polynom nachází ve tvaru $ax^n + b = 0$, vydělíme celou rovnici a , čímž dostaneme $x^n + \frac{b}{a} = 0$, dostaneme tím tvar $x^n - c = 0$, kde $c = -\frac{b}{a}$. Kořenem rovnice je poté zjevně každé x , pro které platí $x^n = c$, tím pádem je x n -tou odmocninou z čísla $c = -\frac{b}{a}$. Toto číslo poté převedeme na goniometrický tvar: $c = |c|(\cos(\alpha_z + k * 360^\circ) + i \sin(\alpha_z + k * 360^\circ))$.

Nyní máme rovnici v následujícím tvaru:

$$x^n = |c|(\cos(\alpha_z + k * 360^\circ) + i \sin(\alpha_z + k * 360^\circ))$$

Celou rovnici odmocníme na n -tou $\sqrt[n]{}$:

$$x = \sqrt[n]{|c|(\cos(\alpha_z + k * 360^\circ) + i \sin(\alpha_z + k * 360^\circ))}$$

$$x = \sqrt[n]{|c|}(\cos(\alpha_z + k * 360^\circ) + i \sin(\alpha_z + k * 360^\circ))^{\frac{1}{2}}$$

Poté užitíme Moivreovu větu, která zní $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ a dostáváme vzorec:

$$x_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos\left(\frac{\alpha_z + k * 360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha_z + k * 360^\circ}{n}\right) \right), \text{ kde } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Binomická rovnice má celkem n řešení, a hledáme je tak, že za koeficient k postupně dosazujeme hodnoty množiny $\{0; 1; 2; \dots; n - 1\}$. Takto nalezená řešení, leží v komplexní rovině na kružnici a tyto řešení tvoří pravidelný n -úhelník, kde n je stupeň polynomu.

Nyní si pomocí tohoto postupu pojdme spočítat kořeny polynomu $P(x) = x^3 - 64$.

První si rovnici upravíme a převedeme do goniometrického tvaru.

$$x^3 - 64 = 0$$

$$x^3 = 64$$

$$x^3 = \sqrt[3]{64}(\cos(0) + i \sin(0))$$

$$x_0 = 4 * (\cos(0) + i \sin(0)) = 4$$

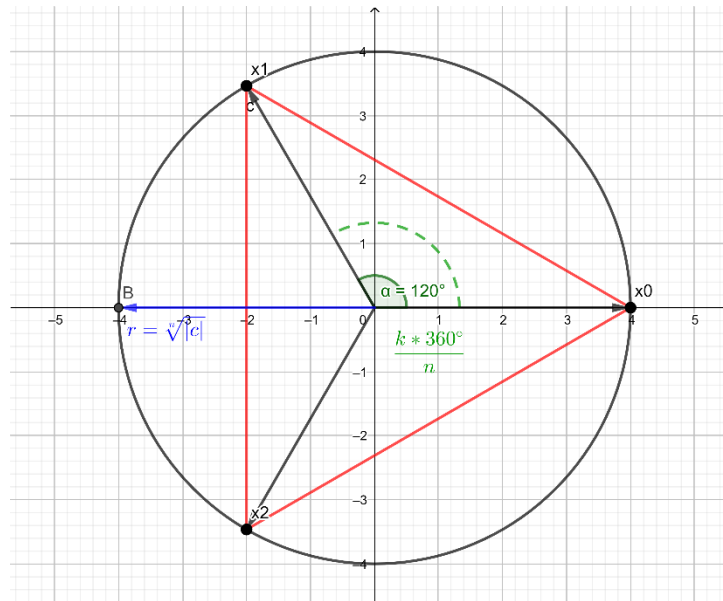
$$x_1 = 4 * \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} \right) = -2 + i 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = 4 * \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right) = -2 - i 2\sqrt{3}$$

Můžeme tedy vidět, že kořeny tohoto polynomu jsou:

$$x_0 = 4, \quad x_1 = -2 + i 2\sqrt{3}, \quad x_2 = -2 - i 2\sqrt{3}$$

Na obrázku máme zobrazení těchto kořenů v komplexní rovině a vidíme, že tyto kořeny tvoří pravidelný trojúhelník.



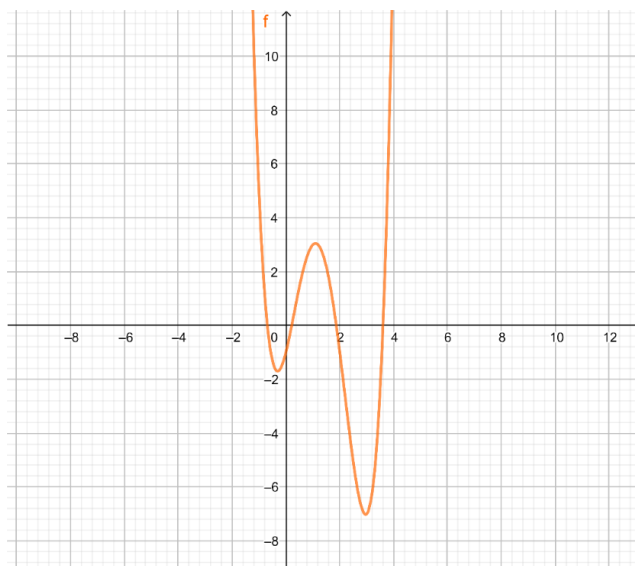
Obrázek 4: zobrazení kořenů funkce $f(x) = x^2 - 64$ v komplexní rovině

3.3.4 Výpočet přes Cardanovy vzorce

Stejně jako se dá spočítat kořeny libovolné kvadratické rovnice pomocí výpočtu přes diskriminant, existuje také metoda nalezení libovolných kořenů kubické rovnice, a to pomocí výpočtu přes Cardanovy vzorce. I přesto, že tato metoda nese Cardanovo jméno, jejím autorem je Nicolo Fontano Tartaglia, který prozradil svou metodu Cardanovi, a ten porušil slib a publikoval ji jako první. Nicméně tento proces je značně komplikovaný a zdaleka přesahuje středoškolské znalosti matematiky, a vyžaduje nadměrný matematický nadhled. Proto se s ním na středních školách nesetkáme a student se o nich doslechne teprve až na vysokých školách. Komplikovanost tohoto řešení nás navádí k využití jiné metody, jako například grafické metody nalezení kubických kořenů, pomocí sourozeneckých křivek, kterou si ukážeme v kapitole 6, která se jeví být jednodušší.

3.4 Algebraické polynomy čtvrtého stupně

Polynomy 4. stupně nazýváme kvartickými polynomy, jak jsme si již uvedli v předchozích kapitolách, obtížnost výpočtu kořenů polynomů se s rostoucím stupněm exponenciálně zvyšuje a pouze vypsání vzorců pro jejich výpočet by vystačilo na valnou část této bakalářské práce. Proto se jejich výpočtu pomocí Cardanových vzorců nebudeme věnovat a pouze si uvedeme poslední ze speciálních případů, který nám může pomoci při hledání kořenů polynomů. Stále ovšem můžeme využít některých speciálních případů, které jsme si uvedli v předchozích kapitolách a to jmenovitě: polynom bez absolutního členu a binomická rovnice, které jistě zvládneme s malými obměnami použít i pro čtvrtý stupeň.



Obrázek 5: Graf kvartické funkce polynomu $P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

3.4.1 Řešení trinomických rovnic

Posledním z případů, kdy je rovnice ve specifickém tvaru, který nám může pomoci při výpočtu kořenů polynomu je, pokud se rovnice nachází v trinomickém tvaru:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

V takovém případě provedeme substituci $t = x^n$, čímž rovnici převedeme na kvadratický tvar, který umíme vyřešit, a výsledek tohoto kvadratického tvaru poté dosadíme do naší substituce.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \rightarrow t = x^n$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$a(t - t_1)(t - t_2) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \sqrt[n]{t_1}, x_{3,4} = \sqrt[n]{t_2}$$

Pojďme si takto nalézt kořeny polynomu $P(x) = x^4 - 2x^2 - 24$

$$x^4 - 2x^2 - 24 = 0, \quad t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 24 = 0$$

Hravě spočítáme pomocí výpočtu přes diskriminant.

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \{-4, 6\}$$

Získaný výsledek dosadíme do substituce a dostaneme kořeny:

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i, \quad x_3 = \sqrt{6}, \quad x_4 = -\sqrt{6}$$

3.4.2 Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je metoda výpočtu kořenů polynomů, která je velice efektivní a poměrně jednoduchá. Nicméně je schopná najít pouze kořeny ležící v \mathbb{R} , a tak není zcela univerzální. Obzvláště účinná je poté, když se kořeny polynomu nacházejí v \mathbb{Z} , neboť tato čísla můžeme odvodit z absolutního členu.

Nechť je dán polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, kde a_0, \dots, a_n jsou reálná čísla. Pokud pak dělíme tento polynom polynomem $x - c$ obdržíme polynom $G(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x^1 + b_0$ a zbytek $P(c)$ poté:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + c b_{n-1}$$

...

$$b_0 = a_0 + c b_0$$

$$P(c) = a_0 + c b_0$$

Pokud rozepíšeme polynom $P(x) = (x - c)G(x) + P(c)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \\ = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x^1 + b_0) + P(c) \end{aligned}$$

Odtud porovnáme koeficienty a dostaneme:

$$a_n = b_{n-1}$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1}$$

...

$$a_1 = b_0 - c b_1$$

$$a_0 = P(c) - c b_0$$

Což nám dává předešlý vztah koeficientů. Pokud je potom číslo c kořenem, pak $P(c) = 0$, tím pádem vytkneme z polynomu $P(x)$ kořenový činitel $(x - c)$.

Výpočet pomocí Hornerova schéma spočívá v prvotním odhadu kořenů z absolutního členu. Jako první nalezneme všechny celočíselné dělitele absolutního členu $\{b_0, b_1, \dots, b_k\}$, poté si připravíme tabulku, kde v prvním řádku budeme mít koeficienty dané rovnice: a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 a vlevo budeme mít jeden z kořenů následujícím způsobem:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
b_0	a_n	$(a_{n-1} + b_0 a_n)$	$(a_{n-2} + b_0 a_{n-1} + b_0^2 a_n)$...	$(a_0 + b_0 a_1 + b_0^2 a_2 + \dots + b_0^n a_n)$

Tato tabulka možná může vypadat složitě, nicméně po bližší inspekci zjistíme, že tyto kalkulace jsou ve skutečnosti poměrně jednoduché. Do druhé buňky druhého sloupce opišeme první koeficient a poté začneme v druhé buňce třetího sloupce a postupujeme následovně:

- Vynásobíme druhou buňku předchozího sloupce potencionálním kořenem b_0 a přičteme koeficient z horní buňky našeho sloupce.
- Přesuneme se do druhé buňky dalšího sloupce.

Pokud se poslední buňka posledního řádku rovná 0, dané číslo je kořenem polynomu $P(x)$. A pro usnadnění výpočtu můžeme vzít nově vzniklý třetí řádek, jako náš nový polynom. Dobré je taky vyzkoušet znova stejný kořen, protože může být více násobný.

Tento postup opakujeme pro všechna čísla $\{b_0, b_1, \dots, b_k\}$, nebo dokud nenajdeme všechny kořeny.

Pojďme si takto najít kořeny polynomu $P(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8$.

Vidíme, že čísla podezřelé z kořenů jsou: $\pm 1, \pm 2, \pm 4 \pm 8$

	1	4	-3	-14	-8
1	1	5	2	-12	-20
-1	1	3	-6	-8	0
-1	1	2	-8	0	
-1	1	1	-9		
2	1	4	0		
-4	1	0			

Vidíme, že kořeny polynomu $P(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8$ jsou:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2$$

3.5 Algebraické rovnice vyššího než čtvrtého stupně

Člověk by mohl nabýt dojmu, že pro řešení rovnic pátého a vyššího stupně můžeme využít nějakého obecného vzorce. To si mysleli i starší matematikové, a považovali to za samozřejmé, ale jak se hranice poznání matematiky posouvaly, matematikům se dlouho nedařilo takové

řešení najít. Časem se ukázalo, že takové řešení není vůbec možné. U zrodu tohoto důkazu stál francouzský matematik Évariste Galois, který konečně dokázal, že pro výpočet algebraických rovnic pátého a vyššího stupně, vzorce využívající pouze základní operace (+, −, *, ÷) neexistují. Nicméně dnes se vyšší polynomy díky pokroku v informačních technologiích dají najít pomocí aproximačních metod a výpočetní techniky.

4. Kartézský souřadnicový systém

Kartézský souřadnicový systém je pojmenován podle jeho autora francouzského matematika Reného Descarta. Nezávisle na něm byl tento systém vyvinut také matematikem Pierrem de Fermatem, který na rozdíl od Descarta svůj objev nepublikoval.

Kartézský souřadnicový systém je soustava souřadnic, jejíž osy jsou vzájemně kolmé přímky, které mají jeden společný bod (ve dvojrozměrné soustavě je to bod $(0,0)$) zvaný počátek. Obvykle je jednotka na každé ose stejně velká. Souřadnice jednotlivých bodů tohoto systému, potom můžeme dostat sestrojením kolmic na dané osy protínající onen bod, souřadnice pak označují délku kolmice mezi bodem a osou.

Jedno rozměrový souřadnicový systém je nejjednodušší kartézskou soustavou a říkáme mu číselná osa. Body této osy mají pouze jednu souřadnici, která je buďto kladná, či záporná, podle toho, na které straně nuly leží.

Nejpoužívanější souřadný systém je dvojrozměrný a tento systém potom tvoří rovinu. Tento systém obsahuje dvě vzájemně kolmé osy, které mají průsečík v počátku. Vodorovnou osu poté obvykle značíme jako osu x a svislou osu jako osu y . V tomto systému mají všechny body dvě souřadnice, které zapisujeme ve tvaru uspořádané dvojice čísel (x, y) , kde první člen nazýváme x -ová souřadnice či abscisa a druhý člen y -ová souřadnice či ordináta. Tyto dvě osy poté rozčtvrtí rovinu na 4 části, kterým říkáme kvadranty. Kvadranty, ve kterém jsou všechny osově souřadnice kladné značíme první kvadrant, a postupně je číslujeme proti směru hodinových ručiček.

Pokud pracujeme ve třech dimenzích, budeme potřebovat trojrozměrný souřadnicový systém. Do tohoto systému zavedeme novou osu, kterou obvykle značíme osa z . Novou třetí souřadnici v tomto systému nazýváme z -ová souřadnice či aplikáta. Při uspořádání jednotlivých os pak využíváme takzvané pravidlo pravé ruky, které nám pomáhá k jejich zapamatování. Toto pravidlo nám říká, že pokud ukážeme ukazováčkem k obloze a natáhneme palec, osa x nám pak vychází z palce, osa y z ukazováčku a osa z z prostředníčku. Tyto tři osy poté rozdělí prostor na osm oktantů.

5. Komplexní rovina

Komplexní rovina je matematický systém pro zobrazení komplexních čísel. Myšlenku komplexních čísel zpracovalo hned několik matematiků nezávisle na sobě, a tak si jejich objev a objev komplexní roviny přisvojil jako svůj vlastní. Proto dnes máme více názvů pro komplexní rovinu, mezi které patří: Gaussova rovina, Argandova rovina, Argandův diagram či Cauchyho rovina.

Imaginární číslo z zapisujeme ve tvaru $z = a + ib$. Ose x říkáme reálná, neboť se na ní vynáší reálná část a komplexního čísla z , a ose y říkáme imaginární, neboť se na ní vynáší jeho imaginární část b . Pokud komplexní čísla zobrazujeme tímto způsobem, pak součet těchto dvou čísel je roven jejich vektorovému součtu.

6. Grafické řešení polynomických rovnic

U algebraického řešení funkce jsme hledali taková čísla x , pro které má polynom hodnotu 0. Grafický ekvivalent tohoto řešení v kartézském souřadnicovém systému je nalezení průsečíků naší funkce $f(x)$ s osou x , kde kořeny těchto funkcí pak budou abscisy těchto bodů. Pro reálné kořeny je takovéto řešení přímočaré, nicméně pokud má funkce komplexní kořeny, je jejich nalezení komplikovanější a často je zapotřebí pracovat s komplexní rovinou, či ji proložit do kartézského souřadnicového systému. Toho docílíme tak, že otočíme osu z o 90° a sjednotíme ji s osou y , čímž ji převedeme do roviny a souřadnice v tomto systému bodů (a, b) , poté odpovídají komplexním číslům $z = a + ib$.

6.1 Kvadratická funkce – doplnění na čtverec

Při tvorbě grafů kvadratické funkce je velice nápomocná takzvaná úprava na čtverec. Tato metoda nám pomůže přeměnit rovnici do tvaru $f(x) = (x - m)^2 + n$, k čemu využívá známý vzorec pro umocnění závorky $(x + m)^2 = x^2 + 2xm + m^2$. Tato metoda je velice užitečná, neboť koeficienty m, n nám prozradí vrchol naší paraboly.

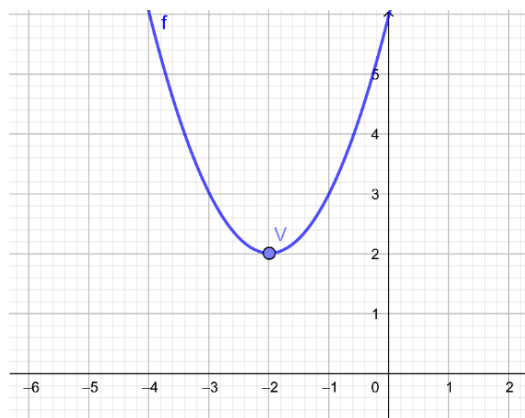
Jako první je třeba upravit polynom do tvaru kde $a = 1$ pomocí vhodné úpravy. Následně se ptáme, jaké číslo dosadíme za m . K tomu využijeme koeficient b následujícím způsobem $bx = 2xm \rightarrow m = \frac{b}{2}$. Nyní máme tvar $a(x + m)^2 + c$, kde nám ale nyní přebývá am^2 a pokud ho nyní odečteme, platí nám rovnost:

$$ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 - am^2 + c = a(x + m)^2 + n$$

Tento tvar je nám nyní přijde vhod, neboť vrchol této paraboly má souřadnice $(-m, n)$.

Pokud bychom chtěli dokázat, že se vrchol nachází v bodě $(-m, n)$ můžeme použít následující úvahu. Pokud má funkce vrchol v bodě $(0,0)$ můžeme ji zapsat ve tvaru $a(x + 0)^2 + 0 = ax^2$. pokud budeme dosazovat za m funkce a její vrchol se budou pohybovat pouze po ose x , neboť tato funkce má stále dvojný kořen určený závorkou $(x + m)^2$. Pokud potom dosazujeme za n posouváme celou parabolu ve směru y -ové osy v poměru jedna ku jedné. Tím pádem vrchol této paraboly leží v bodě $(-m, n)$.

Pro příklad si uveďme funkci $f(x) = x^2 + 4x + 6$. Tuto funkci převedeme na tvar $f(x) = (x + 2)^2 - 4 + 6 = (x + 2)^2 + 2$, z čehož vyčteme, že parabola má vrchol v bodě $(-2, 2)$, což můžeme také vidět na *obrázku 6*.

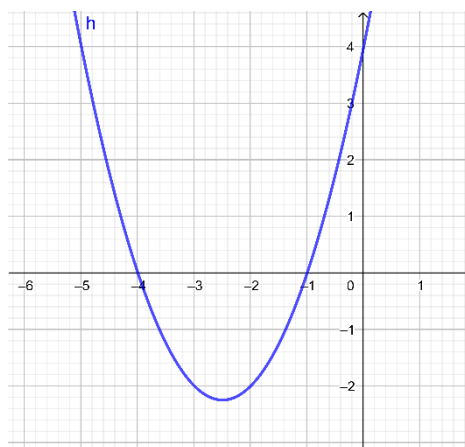


Obrázek 6: Parabola $f(x) = x^2 + 4x + 6$ s vrcholem $V(-2,2)$

6.2 Kvadratické funkce – dva reálné kořeny

Pokud má kvadratická funkce dva reálné kořeny, pak hledáme dva průsečíky funkce $f(x)$ s osou x . V případě funkce $f(x) = x^2 + 5x + 4$ pak na grafu funkce na *obrázku 7* vidíme, že tyto průsečíky jsou body $(-4,0)$, $(-1,0)$ a tím pádem kořeny této funkce jsou $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Tento výsledek si můžeme snadno ověřit pomocí roznásobení rozkladu na kořenové činitele.

$$(x + 4)(x + 1) = x^2 + 4x + x + 4 = x^2 + 5x + 4$$



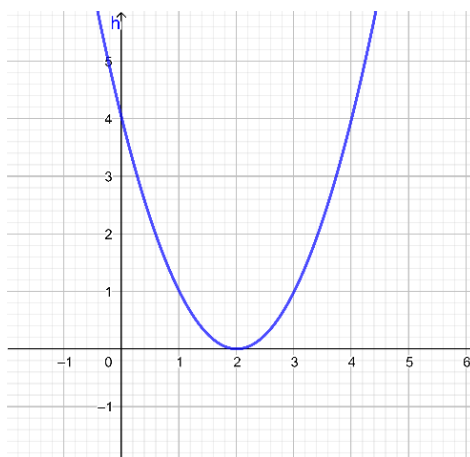
Obrázek 7: Graf funkce $f(x) = x^2 + 5x + 4$

6.3 Kvadratické funkce – jeden reálný kořen

Pokud se kvadratická funkce nachází ve tvaru $f(x) = ax^2 + 2bx + b^2$, má tato funkce jeden dvojnásobný kořen, neboť její rozklad na kořenové činitele je ve tvaru $f(x) = (x - x_1)(x - x_1) = (x - x_1)^2$. Kořenem této funkce je tedy její vrchol, který leží na ose x , která je zároveň tečnou této funkce.

V případě funkce $f(x) = x^2 - 4x + 4$, pak jasně vidíme na jejím grafu na *obrázku 8*, že funkce má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 2$, který lehce zkontrolujeme pomocí roznásobení rozkladu na kořenové činitele.

$$(x - 2)(x - 2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$



Obrázek 8: Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 4$

6.4 Kvadratické funkce – grafická metoda pro nalezení dvou komplexně sdružených kořenů

Pokud máme kvadratickou funkci s dvěma komplexními kořeny jako na *obrázku 13*, můžeme najít jeho komplexní kořeny následujícím způsobem.

Provedeme úpravu na čtverec a funkci přepíšeme ve tvaru $f(x) = c(x - a)^2 + b$. Horizontálně překloupíme funkci okolo tečny funkce v jejím vrcholu vynásobením konstanty c číslem -1 . Výsledná funkce $g(x)$ tedy bude ve tvaru: $g(x) = -c(x - a)^2 + b$, a funkce se budou dotýkat ve svém minimu/maximu. Sestrojíme průsečíky A, B funkce $g(x)$ a osy x , a poté sestrojíme střed těchto dvou bodů C . Tento střed C je středem kružnice c s poloměrem $|CB| \rightarrow c = (C, |CB|)$, poté sestrojíme kolmici h kolmou na osu x a procházející bodem C , průsečíky této kolmice h a kružnice c označíme body E a D . Tyto body E a D mají souřadnice $(o_{1,2}, p_{1,2})$, které odpovídají komplexním kořenům $x_{1,2} = o_{1,2} + ip_{1,2}$ původního polynomu $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Odvození této metody vychází z následující úvahy. Mějme kvadratickou funkci $f(x)$, která má dva reálné kořeny, potom pokud vytvoříme novou kvadratickou funkci otočením funkce $f(x)$ okolo tečny v jejím extrému, dostaneme kvadratickou rovnici se dvěma komplexními kořeny. Pokud máme rovnici v obecném tvaru $y = ax^2 + bx + c$, můžeme ji upravit pomocí úpravy na čtverec.

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Obrácená parabola má potom tvar:

$$y = -a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Tuto parabolu si upravíme do základního tvaru.

$$y = -a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = -ax^2 - bx - \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = -ax^2 - bx - \frac{b^2}{2a} + c$$

Nyní zjistíme kořeny této rovnice pomocí výpočtu přes diskriminant.

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(-a) \left(c - \frac{b^2}{2a} \right)}}{-2a}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac - 2b^2}}{-2a}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{-2a}$$

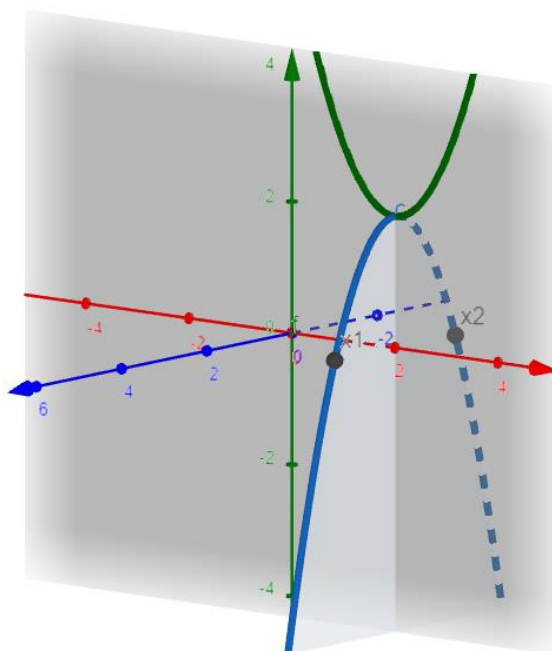
Poté můžeme převést znaménko $-$ ze jmenovatele do čitatele čímž dostaneme:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Jelikož víme, že kořeny jsou komplexní můžeme vytknout -1 z odmocniny.

$$x = \frac{b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}$$

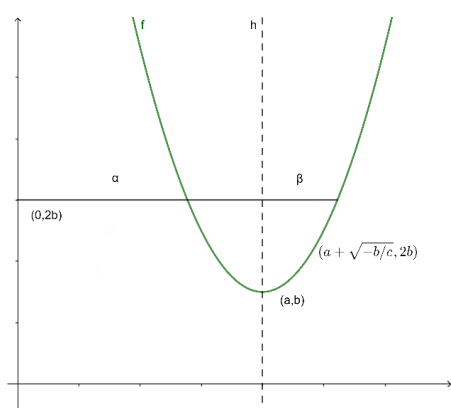
Můžeme vidět, že tento vzorec se od klasického vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice liší pouze v imaginární jednotce. Kořeny této funkce tak leží v komplexní rovině. Pokud se podíváme na graf na *obrázku 9* vidíme, že tyto kořeny leží na parabole otočené o 90 stupňů.



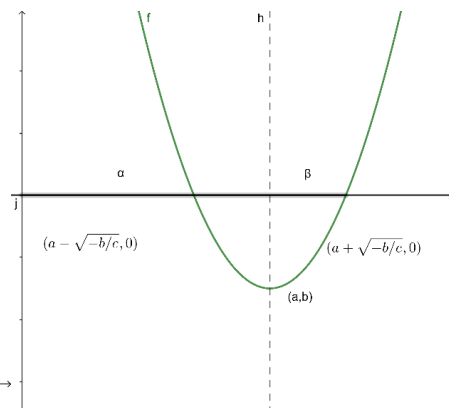
Obrázek 9: Zobrazení komplexních kořenů kvadratické rovnice v komplexní rovině

Tato jednoduchá konstrukce vzešla z nápadů z relativně nedávné práce Nortona a Lotta, kteří zpracovali tento problém následujícím způsobem.

Předpokládejme, že kvadratická funkce $f(x)$ je konvexní a má kořeny $\alpha \pm i\beta$. Poté α a β jsou jako ukázány v obrázku 10. Specificky α je abscisa vrcholu a β je polovina tětivy vytyčenou kolmicí k ose y v bodě $(0, 2b)$, kde b je ordináta vrcholu. Ať $f(x) = c(x - a)^2 + b$ pro $b, c > 0$, poté má funkce $f(x)$ kořeny $a \pm i\sqrt{b/c}$ a $\alpha = a$, $\beta = \sqrt{b/c}$ jsou přesně určené hodnoty. Tato interpretace se jeví být přirozená, neboť v případě reálných kořenů jako na obrázku 11 je situace stejná kromě toho, že horizontálu nahradíme osou x , a kořeny jsou nyní $\alpha \pm \beta$ místo $\alpha \pm i\beta$.

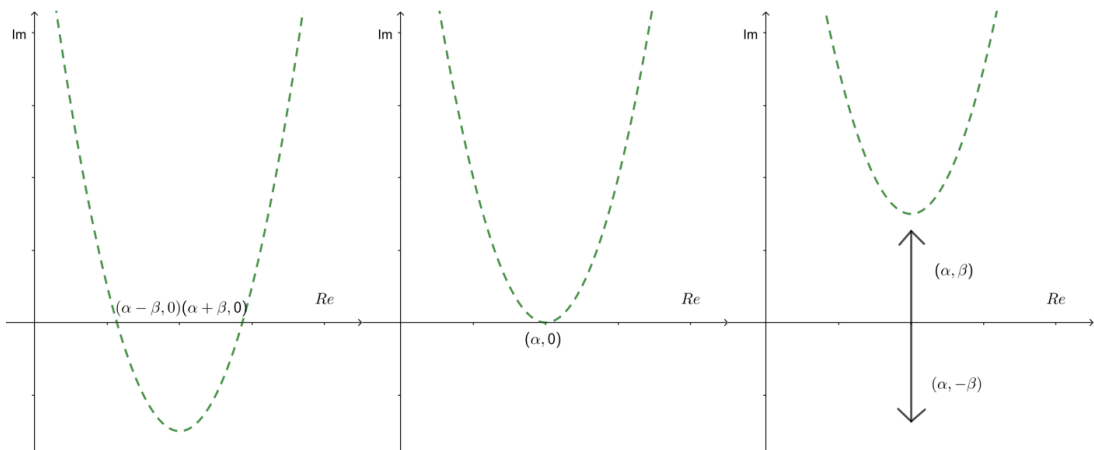


Obrázek 10: funkce s kořeny $\alpha + i\beta = a \pm i\sqrt{b/c}$



Obrázek 11: funkce s kořeny $\alpha + \beta = a \pm \sqrt{b/c}$

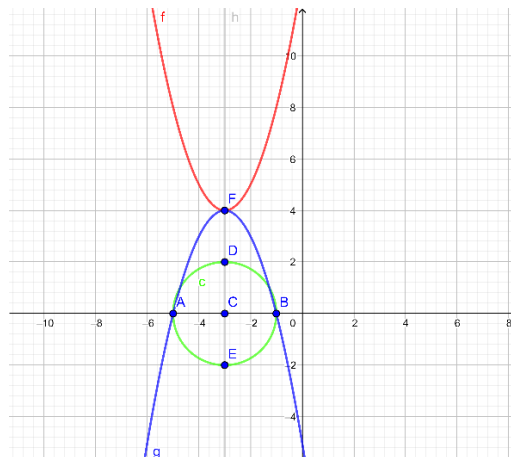
Pokud si představíme parabolu, pro kterou platí $(b < 0 < c)$, která se pohybuje v kartézském souřadnicovém systému proloženém komplexní rovinou vzhůru, a sledujeme chování komplexních kořenů, všimneme si, že jak se b zvyšuje k nule, tak se $\beta = \sqrt{|b/c|}$ snižuje k nule. Tím pádem, dokud parabola leží na ose x , kořeny jsou reálné a symetrické podle osy $x = a$ a jak se parabola pohybuje vzhůru kořeny k sobě konvergují. Pokud vrchol poté leží na ose $x \rightarrow (b = 0)$, pak kořeny konvergují úplně a stane se z nich kořen dvojný. Jak parametr b roste nad nulou, β se také zvyšuje a tyto dva kořeny divergují na komplexní ose stejnou rychlostí, kterou předtím konvergovali. (Norton a Lotto 1984, 248-249).



Obrázek 12: Znáornění vztahu mezi kořeny x_1 a x_2

Na obrázku 13 vidíme graf kvadratické funkce $f(x) = x^2 + 6x + 13$. Z grafu je zjevné, že body D, E odpovídají kořenům $x_1 = -3 + i2$, $x_2 = -3 - i2$. Pro kontrolu si můžeme dohledat kořeny pomocí výpočtu kvadratické rovnice přes diskriminant.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm -i4}{2} = -3 \pm i2$$



Obrázek 13: Grafická metoda nalezení kořenů polynomu $P(x) = x^2 + 6x + 13$

6.5 Kvadratické funkce – řešení v komplexní rovině

Pokud víme, že má kvadratická funkce komplexní kořeny, můžeme také nalézt její kořeny následujícím způsobem.

Uvažujme funkci ve tvaru $y = ax^2 + c$. Pokud víme, že kořeny jsou komplexní, můžeme tuto funkci zapsat jako:

$$y = a(p + iq)^2 + c$$

$$y = ap^2 - aq^2 + c + 2apiq$$

Víme, že $y = 0$, a tím pádem musí být jak reálná složka $ap^2 - aq^2 + c$ tak komplexní složka $2apq$ také rovny nule. Jelikož ale hledáme komplexní kořeny $q \neq 0$, a tím pádem ani $a \neq 0$, jediná možnost, která nám zbývá je, že $p = 0$. Tím pádem jsme redukovali rovnici na:

$$y = -aq^2 + c$$

Z tohoto vzorce vidíme, že tato parabola se nám vykreslí zcela do roviny yz , jak je vidět na *obrázku 14*. Tyto komplexní kořeny pak budou na průsečících s rovinou xz .

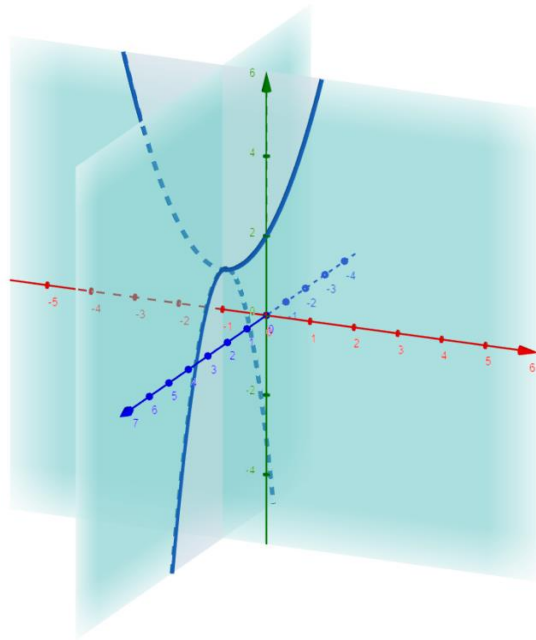
Pokud dále převedeme obecnou kvadratickou rovnici úpravou na čtverec, dostaneme rovnici ve tvaru $y = a(x - b)^2 + c$, pokud pak měníme koeficient b , posouváme se po ose x , a pokud měníme koeficient c , posouváme se po ose y , ale ani v jednom případě neměníme tvar paraboly. Pokud toto pravidlo aplikujeme na graf na *obrázku 14* vidíme, že takto lze zkonstruovat jakýkoliv graf paraboly, a sestrojít tak jeho sourozeneckou křivku, která nám určuje jeho kořeny v komplexní rovině.

Uvažujme kvadratickou funkci $f(z) = z^2 + 2z + 2$, pokud dosadíme tvar komplexního čísla $z = x + iw$, upravíme funkci do tvaru:

$$f(z) = x^2 - w^2 + 2x + 2 + 2iw(x + 1)$$

Můžeme vidět, že tato rovnice vrací reálné hodnoty, pouze pokud se $x = -1$, nebo $w = 0$. Tím pádem víme, že jedna ze sourozeneckých křivek leží v kartézském souřadnicovém systému pro $w = 0$ a má tvar $y = x^2 + 2x + 2$, a druhá leží v komplexní rovině pro $x = -1$ a má tvar $y = -w^2 + 1$, graf těchto křivek můžeme vidět na *obrázku 13*. Kořeny tedy musí ležet na průsečících těchto křivek a roviny xw . Tuto rovinu protíná komplexní parabola v bodech $(1,0, -1)$ a $(1,0,1)$, z čehož lze vyčíst, že funkce $f(z)$ má kořeny:

$$x_1 = 1 - i, \quad x_2 = 1 + i$$



Obrázek 14: vykreslení sourozeneckých křivek kvadratického polynomu

7. Sourozenecké křivky

V kapitole 6.5 jsme si poprvé zavedli pojem sourozenecká křivka. Roku 1951 Howard Fehr tehdejší prezident Národní Rady pro Učitele Matematiky v USA a účinkující učitel na Columbijské Univerzitě, vydal učebnici pro střední školy, ve které nastínil jejich existenci.

Jestliže funkce $f(z)$ zobrazuje komplexní čísla na komplexní čísla, zavedeme jako definiční obor ta komplexní čísla, která se zobrazují na reálné hodnoty, v tomto novém definičním oboru má funkce jako obor hodnot reálné hodnoty, a může být reprezentována ve třech dimenzích s definičním oborem v horizontální rovině a oborem hodnot podél vertikální osy. Jestliže funkce $f(z)$ zobrazuje komplexní čísla na komplexní čísla, můžeme ji zapsat ve tvaru:

$$y = f(z) = f(x + iw) = g(x, w) + ih(x, w)$$

Pokud poté tato funkce zobrazuje komplexní čísla $x + iw$ na reálná čísla y , tak musí platit rovnost $h(x, w) = 0$. Omezíme tak definiční obor funkce na všechny body roviny xw , tak že $h(x, w) = 0$. Tato podmínka nám definuje křivku v komplexní rovině, která může být definičním oborem další křivky, pro jejíž formulaci můžeme substituovat řešení $h(x, w) = 0$ do rovnice $g(x, w)$. Z čehož nám vzejde, že naše křivka se promítá také mimo rovinu definovanou osami x a z , v komplexní sféře y . Na definičních křivkách definovaných pravidlem $h(x, w) = 0$ nám leží takzvané sourozenecké křivky $y = g(x, w)$. Konstrukce takové kvadratické sourozenecké křivky jsme mohli vidět v předchozí kapitole.

Na *obrázku 13* z předchozí kapitoly můžeme vidět dvě roviny, přičemž v každé z nich leží jedna ze sourozeneckých křivek. První rovina je definována výrazem $x = -1$ a druhá výrazem $w = 0$.

7.1 Definiční křivky

Existuje také další způsob, jak hledat komplexní kořeny $z = x + iw$ kvadratické rovnice $f(z) = Az^2 + Bz + C$ v komplexní rovině, a to za pomoci imaginárních sourozeneckých definičních křivek. Začneme tím, že dosadíme obecnou formu čísla $z = x + iw$ do $f(z)$, čímž dostaneme:

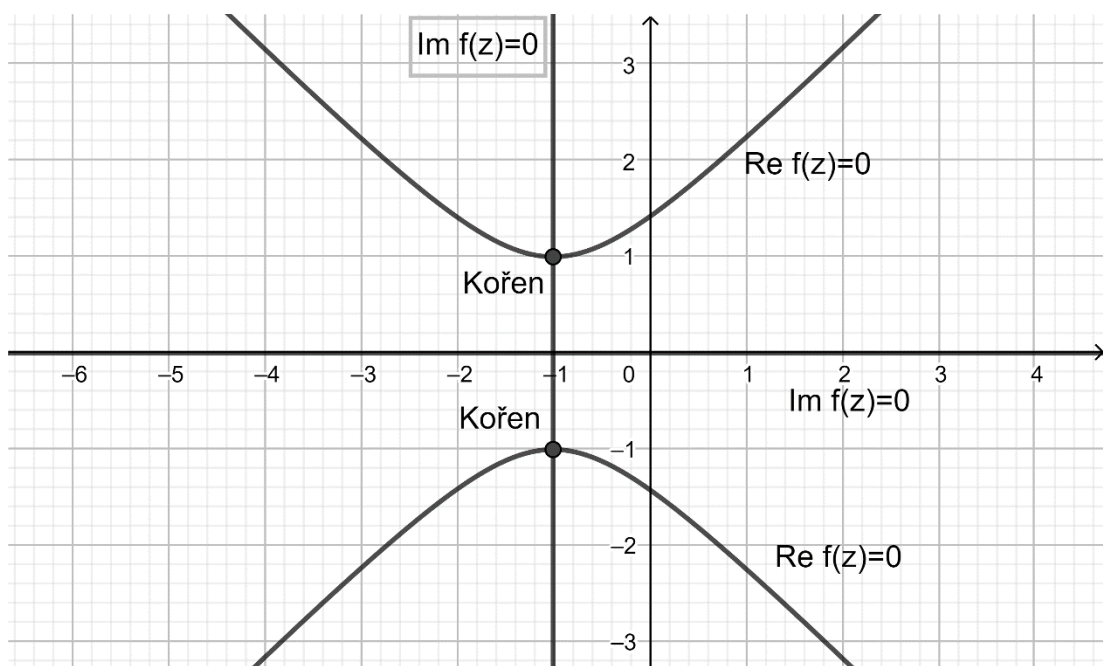
$$f(z) = (Ax^2 - Aw^2 + Bx + C) + i(2Axw + Bw).$$

Aby $f(z)$ ležela v komplexní rovině musí platit $Ax^2 - Aw^2 + Bx + C = 0$. Tato rovnost nám definuje hyperbolickou křivku v komplexní rovině, na níž leží definiční obor funkce $f(x)$,

ktera nám vrací pouze jeho komplexní hodnoty. Analogicky pak řešíme pro reálnou část. Položíme si imaginární složku $f(z)$ rovnu nule $Im f(z) = 0$, což platí v případě, že $(2Axw + Bw) = 0 \rightarrow w(2Ax + B) = 0$. Ze získané rovnice pak víme, že rovnice platí v případě $w = 0$, nebo $x = -\frac{B}{2A}$. Kořeny funkce $f(x)$ poté leží na průsečících těchto dvou sad křivek definičních hodnot. Tyto kořeny jsou ve tvaru $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, kde α je abscisa a β je ordináta těchto bodů, neboť víme, že $y = 0$ a průsečíky těchto doménových křivek udávají hodnotu, pro kterou se jak reálná, tak imaginární část komplexního řešení rovná nule.

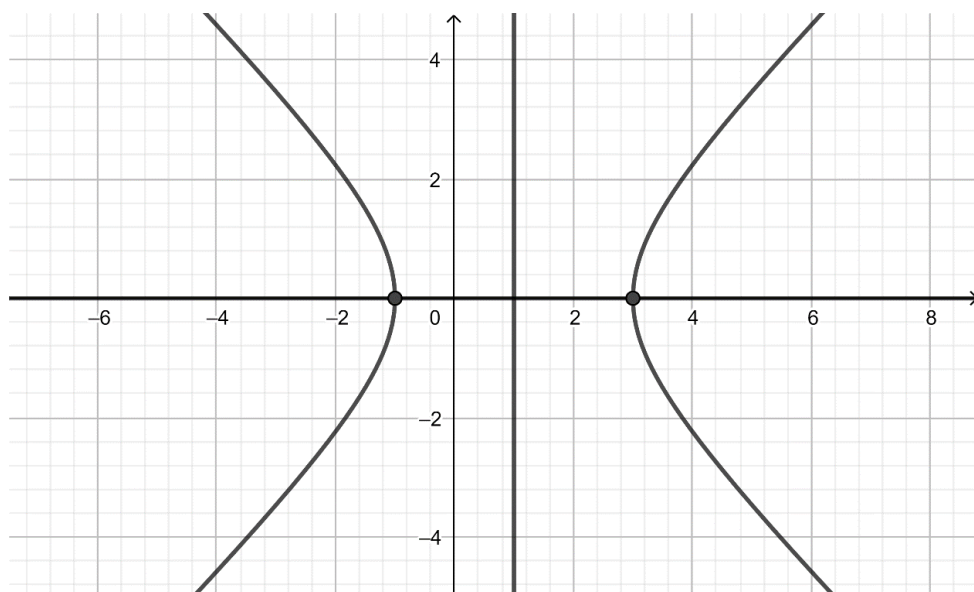
Takovéto řešení pro příklad z předchozí kapitoly $f(z) = z^2 + 2z + 2$ je následující: hyperbola, která je určena $Im f(z) = 0$, má rovnici $x^2 - w^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow w^2 - (x + 1)^2 = 1$. Tímto si na tuto rovinu vyneseme imaginární část našeho kořenu. Nicméně je třeba ještě vynést reálnou část a tu získáme z imaginární části předpisu funkce. Víme, že $Re f(z) = 0$, když $w = 0$ nebo $x = -1$. Na průsečíku reálných a imaginárních definičních křivek pak leží naše kořeny. Na *obrázku 15* vidíme, že se sady definičních křivek protínají v bodech $(-1,1)$, $(-1,-1)$, tím pádem jsou komplexně sdružené kořeny:

$$x_1 = -1 - i, \quad x_2 = -1 + i.$$



Obrázek 15: definiční křivky souzručených křivek funkce $f(z) = z^2 + 2z + 2$

V případě, že by kořeny byly reálné například funkce $f(z) = z^2 - 2z - 3$ má hyperbola tvar $x^2 - w^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 - w^2 = 4$. Pokud položíme reálnou složku rovnu nule $w(2x - 2) = 0$ dostaneme $w = 0$, nebo $x = 1$. Pokud takto sestrojíme tuto funkci, zjistíme, že tato hyperbola má průsečíky s osou x (též definiční křivkou $w = 0$) v bodech $(-1,0)$ a $(3,0)$ a vidíme, že kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ jsou stále reálné, tím pádem se tato metoda dá použít i pro polynomy s reálnými kořeny. Nicméně tato metoda je velice neefektivní, pro nalezení reálných kořenů kvadratických polynomů a klasické algebraické a grafické metody pro nalezení reálných kořenů polynomu jsou vhodnější.



Obrázek 16: zobrazení reálných kořenů pomocí imaginárních sourozeneckých křivek

8. Grafické řešení kubické funkce

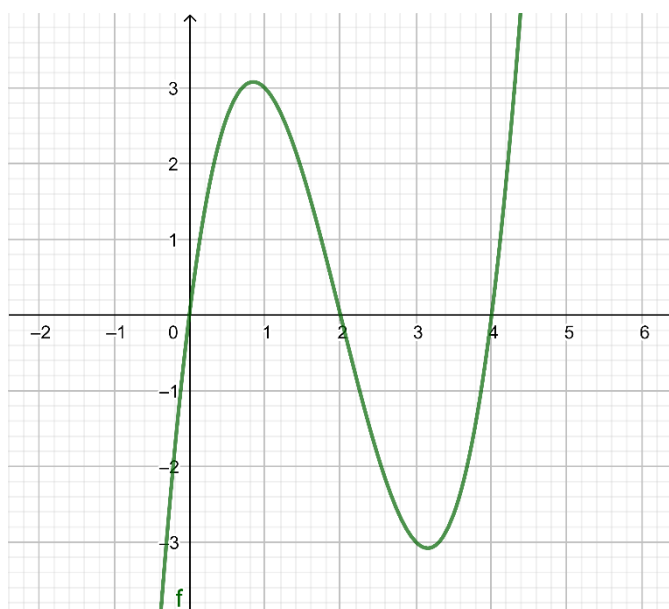
8.1 Kubická funkce – reálné kořeny

Pokud má kubická funkce tři reálné kořeny, je jejich grafické řešení opět triviální, stejně jako u kubické funkce opět stačí najít průsečíky funkce $f(x)$ s osou x .

Pro funkci $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, pak na grafu funkce na *obrázku 17* jasně vidíme, že průsečíky s osou x jsou body $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,0)$ což odpovídá kořenům $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Toto můžeme potvrdit pomocí výpočtu kubické rovnice bez absolutního členu.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$$

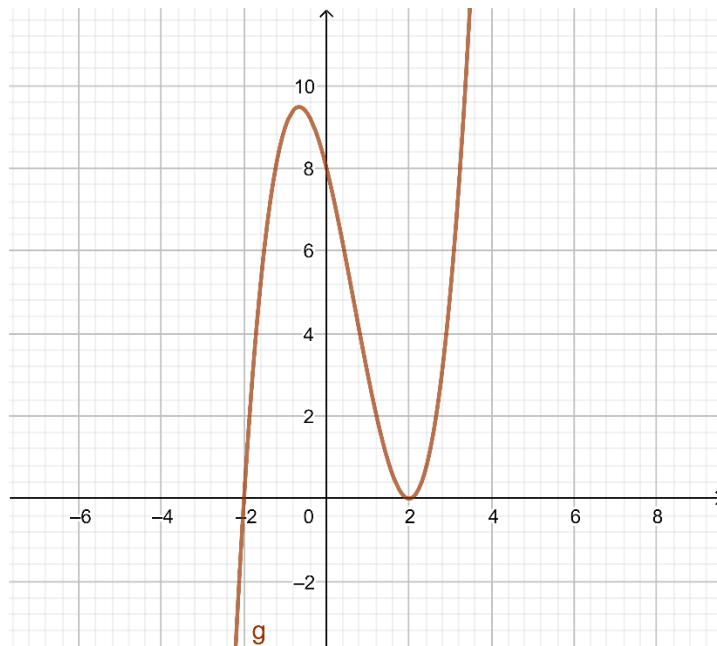
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$



Obrázek 17: Graf funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ se třemi reálnými kořeny

Další možností je, že má funkce dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojitý. Tato funkce má lokální minimum/maximum, které leží na ose x . Na *obrázku 17* vidíme funkci $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, která má kořeny $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 2$, kořen $x_{2,3} = 2$ je lokálním minimumem této funkce a osa x je tečnou této funkce v tomto bodě. Tyto kořeny si můžeme ověřit například podle Hornerova schéma:

	1	-2	-4	8
-2	1	-4	4	0
2	1	-2	0	
2	1	0		

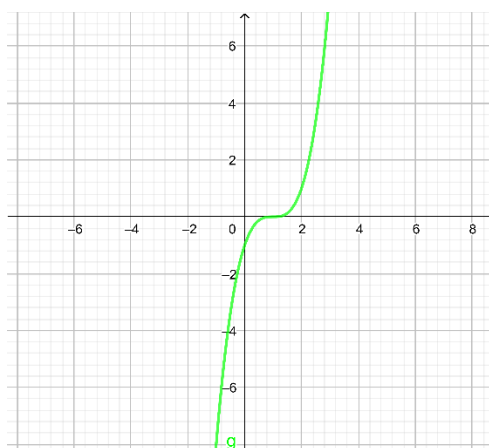


Obrázek 18: graf funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Třetí možností je, že má funkce kořen trojitý, což mimo jiné znamená, že v místě tohoto kořenu bude mít tato funkce inflexní bod, kterému taky jinak říkáme sedlo. Na *obrázku 17* máme graf funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ a jasně vidíme, že tato funkce protíná osu x v bodě 1, což znamená, že má trojný kořen $x_{1,2,3} = 1$. Jelikož je funkce v recipročném tvaru 2. druhu sudého stupně a koeficienty polynomu odpovídají třetímu řádku Pascalova trojúhelníku, můžeme tuto funkci upravit do tvaru:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

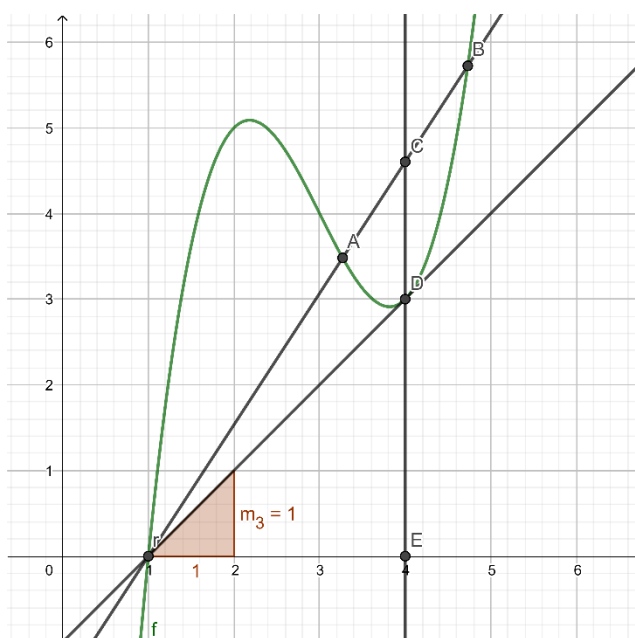
$$x_{1,2,3} = 1$$



Obrázek 19: Graf funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

8.2 Kubická funkce – jeden reálný a dva komplexní kořeny v kartézském souřadnicovém systému

Stejně jako pro kvadratickou rovnici i zde můžeme najít jednoduše sestavitelné řešení v kartézském souřadnicovém systému. Jako první sestojíme graf funkce $f(x)$. Poté označíme průsečík funkce s osou x jako bod r . Bodem r vedeme sečnu funkce $f(x)$. Průsečíky této sečny s funkcí $f(x)$ označíme A, B . Sestojíme střed C úsečky AB . Vedeme kolmici k k ose x bodem C . Sestojíme bod D na průsečíku kolmice k a funkce $f(x)$. Komplexní kořeny této funkce poté mají tvar $x_{2,3} = a \pm i\sqrt{m}$, kde a je abscisa bodu T a m je směrnice tečny t . I když by se z obrázku mohlo jevit, že tečna t se dotýká funkce v extrému, není tomu tak a je pouze v jeho okolí.



Obrázek 20: Grafická metoda nalezení kořenů pro funkci $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 17$

Důkaz pro tuto metodu je následující. Mějme kubickou funkci s reálným kořenem r a sdruženými komplexními kořeny $a \pm ib$, kde r, a, b leží v \mathbb{R} . Můžeme ji tedy zapsat ve tvaru:

$$f(x) = (x - r)(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) = 0$$

Jakákoliv sečna procházející bodem r má tvar $y = m(x - r)$. Jestliže má být tato přímka tečnou funkce $f(x)$ musí mít dvojný kořen určený rovnicí:

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - m = 0$$

Pokud má diskriminant této rovnice rovný 0, musí také platit $m = b^2$ nebo $b = \sqrt{m}$. Po dosazení do předchozí rovnice dostáváme hodnotu a , což je abscisa tečného bodu D . A b je potom odmocnina ze sklonu přímky $y = m(x - r)$, $b = \sqrt{m}$.

Pro funkci $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 17$ máme grafické řešení na *obrázku 20*, na kterém vidíme, že má funkce průsečík s osou x v bodě 1 a souřadnice bodu T jsou (4,3), přičemž směrnice tečny t je 1. Tato funkce má tedy kořeny:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4 + i, \quad x_3 = 4 - i$$

8.3 Kubická funkce pomocí sourozeneckých křivek

Stejně jako kvadratická i kubická rovnice může být řešena za pomoci sourozeneckých křivek a postup pro její řešení je velice podobný. První je třeba upravit kubickou rovnici $f(z) = x^3 + ax^2 + cx + d$ pomocí lineární transformace upravit do tvaru $y = z^3 + pz + q$. Do tohoto tvaru převedeme rovnici pomocí substituce $x = z - \frac{a}{3}$, čímž odstraníme kvadratický člen a dostaneme požadovanou rovnici, kde $p = b - \frac{a^2}{3}$ a $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$. Nyní tedy máme rovnici ve tvaru $f(z) = z^3 + pz + q$ a jestliže $z = x + iw$, pak:

$$y = x^3 - 3xw^2 + px + q + iw(3x^2 - w^2 + p)$$

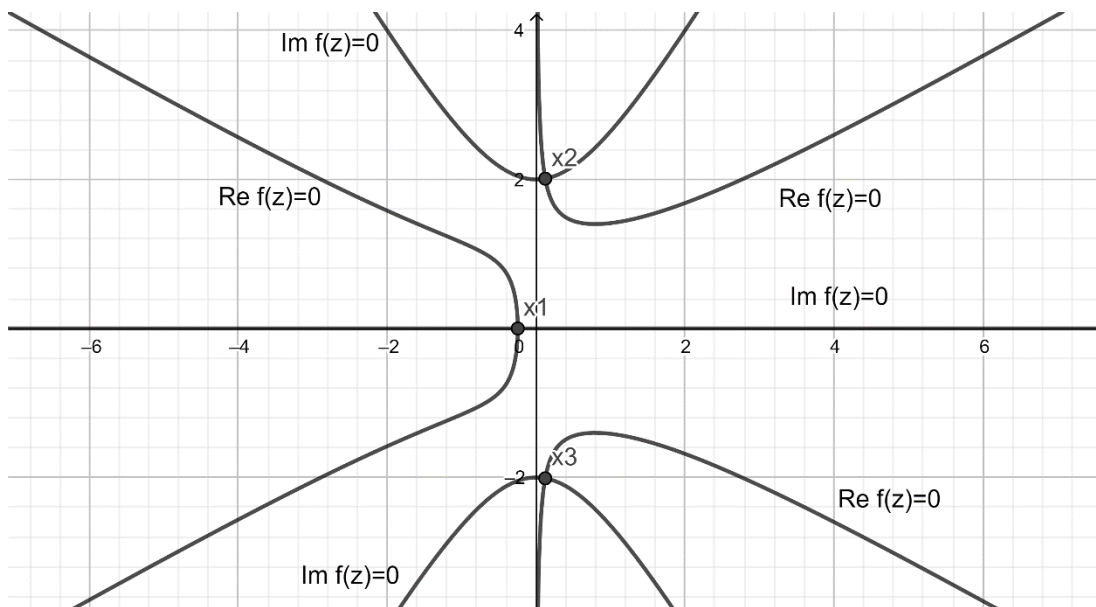
Jelikož hledáme reálné kořeny této funkce, pak musí platit $w = 0$, nebo $3x^2 - w^2 - p = 0$. První z těchto podmínek nám dá naši kubickou křivku $y = x^3 + px + q$ a další podmínka nám říká, že existují dvě další sourozenecké křivky, každá jako jedna z křivek hyperboly $3x^2 - w^2 - p = 0$ v rovině xw . Tyto dvě podmínky nám slouží pro vykreslení reálných definičních křivek. Poté je třeba ještě nalézt imaginární část kořenů zavedením definiční křivky $x^3 - 3xw^2 + px + q = 0$, která nám určuje definiční obor pro křivku, která vrací pouze imaginární část komplexního čísla, kořeny této funkce, potom leží na průsečících těchto imaginárních a reálných doménových křivek. Tyto kořeny jsou ve tvaru $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, kde α je abscisa a β je ordináta těchto bodů.

Mějme funkci $y = z^3 + 4z + 1$. Jestliže $z = x + iw$ pak:

$$y = x^3 - 3xw^2 + 4x + 1 + iw(3x^2 - w^2 + 4)$$

První si vyřešíme pro imaginární část rovnou nule, pro kterou platí, že $Im = 0$ pokud $w = 0$, které nám vrátí naši křivku $y = x^3 + 4x + 1$, a pokud $3x^2 - w^2 + 4 = 0 \rightarrow w^2 = 3x^2 + 4$ toto nám definuje hyperbolu, na níž leží naše reálná řešení. Poté si vyřešíme pro

reálnou část rovnou nule $Re f(z) = 0$, pokud $x^3 - 3xw^2 + 4x + 1 = 0$, která nám vrátí křivky, na kterých leží naše komplexní řešení. Po vykreslení těchto křivek najdeme průsečíky imaginárních a reálných definičních křivek, které nám označují kořeny této funkce. Tato funkce má jeden reálný kořen $x_1 = -\frac{1}{4}$ a dva komplexní kořeny $x_2 = 0.12 + i2.01$ a $x_3 = 0.12 - i2.01$.



Obrázek 21: Grafické nalezení kořenů funkce $f(z) = z^3 + 4z + 1$ pomocí souřezeneckých křivek

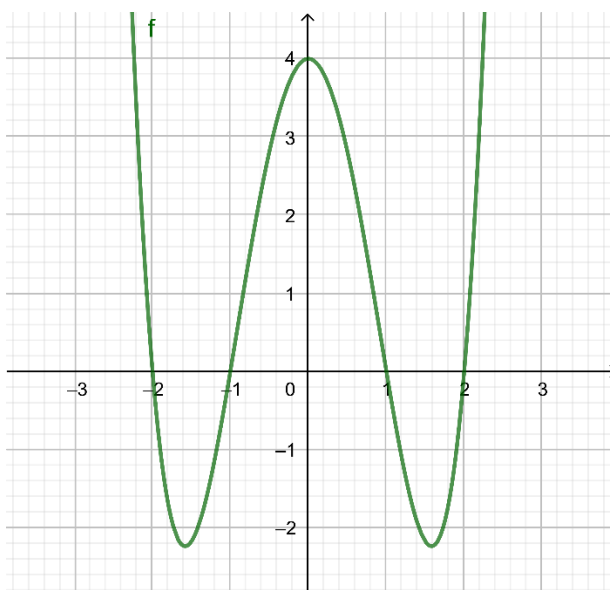
9. Grafické řešení kvartické funkce

9.1 Kvartické funkce s pouze reálnými kořeny

Kvartická funkce s reálnými kořeny má stejné grafické řešení jako u předchozích případů, a to, že reálné kořeny leží na průsečících funkce $f(x)$ s osou x , nicméně u kvartické funkce existuje větší množství typů funkcí.

Jako první je funkce $f(x)$ se čtyřmi různými kořeny. Tato funkce protne osu x ve čtyřech bodech. Na *obrázku 22* můžeme vidět, že graf funkce $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ má kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Jelikož se polynom nachází v trinomickém tvaru, můžeme použít substituci $y = x^2$, čímž převedeme funkci do kvadratického tvaru $f(y) = y^2 - 5y + 4$ a pomocí Vietových vzorců dostaneme řešení $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, což dosadíme do substituce a obdržíme kořeny:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$$



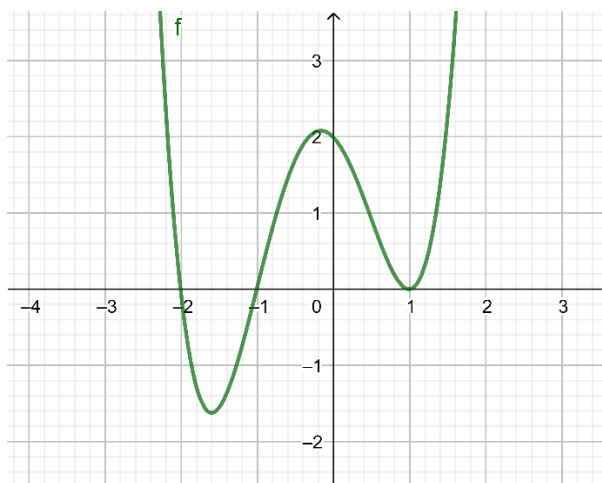
Obrázek 22: Graf kvartické funkce polynomu $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ se 4 reálnými kořeny

Dalším případem je, že má funkce tři reálné kořeny, z nichž jeden je dvojitý. v případě dvojitého kořene pak už víme, že tento kořen leží v lokálním minimu/maximu dané funkce a osa x je tečnou k funkci $f(x)$ v tomto bodě.

V případě funkce $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$, vidíme na *obrázku 23*, že tato funkce protíná osu x v bodech $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Tyto kořeny můžeme ověřit pomocí Hornerova schéma, čímž dostaneme kořeny:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_{3,4} = 1$$

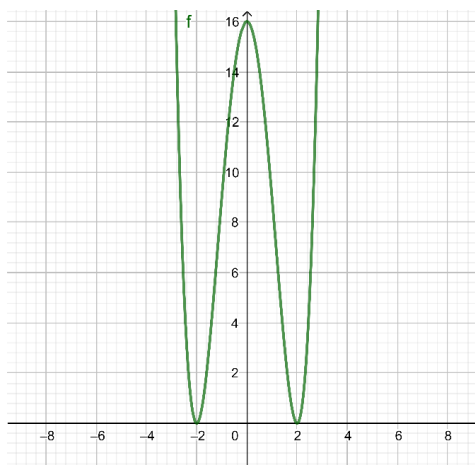
	1	1	-3	-1	2
-2	1	-1	-1	1	0
-1	1	-2	1	0	
1	1	-1	0		
1	1	0			



Obrázek 23: Graf funkce $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ se třemi reálnými kořeny

Pokud má kvartická funkce pouze 2 reálné kořeny, může nabývat dvou tvarů. Prvním z nich je tvar, v němž má funkce 2 lokální minima/maxima, která obě leží na ose x , která je v obou těchto bodech tečnou k funkci $f(x)$. Pokud je funkce v tomto tvaru jedná se vždy o funkci trinomicickou. V případě funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ zavedeme substituci $y = x^2$, čímž dostaneme funkci $f(y) = y^2 - 8y + 16$. Pomocí Vietových vzorců pak snadno spočítáme $y_{1,2} = 4$, a po dosazení do původní substituce dostaneme kořeny:

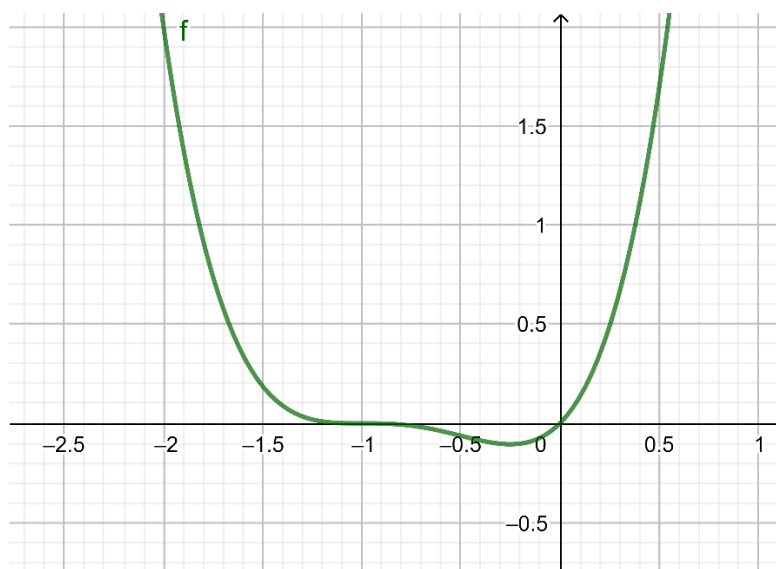
$$x_{1,2} = -2, \quad x_{3,4} = 2$$



Obrázek 24: Graf funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

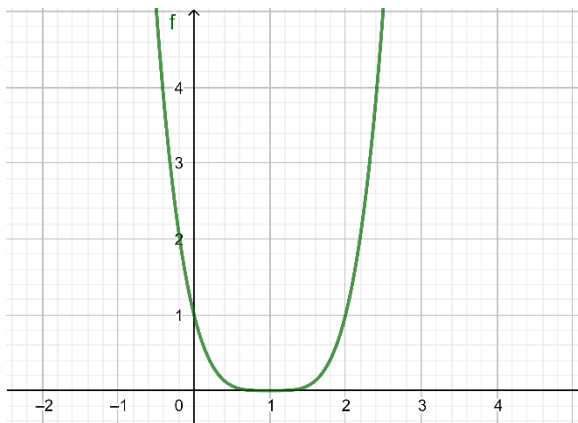
Druhým typem kvadratické rovnice s dvěma reálnými kořeny je rovnice s jedním klasickým reálným kořenem a jedním trojitým reálným kořenem, který je inflexním bodem, ležícím na ose x . V případě funkce $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ vidíme na *obrázku 25*, že funkce má průsečíky v počátku $(0,0)$ a v inflexním bodě $(-1,0)$ pro ověření kořenů můžeme využít toho, že funkce nemá absolutní člen a zapsat ji ve tvaru $f(x) = x(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$, kde vidíme, že funkce v závorce je reciproká funkce 1. tvaru lichého stupně, jejíž koeficienty odpovídají čtvrtému řádku Pascalova trojúhelníku, a tím pádem víme, že funkce má následující rozklad na kořenové činitele $x(x + 1)(x + 1)(x + 1)$, odkud vidíme, že funkce má kořeny:

$$x_{1,2,3} = -1, \quad x_4 = 0$$



Obrázek 25: Graf funkce $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ s dvěma reálnými kořeny

Posledním případem kvartických funkcí s reálnými kořeny je funkce s jedním čtyřnásobným kořenem. Tato funkce se dotýká osy x pouze v jejím vrcholu a osa x je v tomto bodě její tečnou. Pro funkci $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ pak na obrázku vidíme, že se dotýká tečny v bodě $(1,0)$, a existenci tohoto kořenu můžeme potvrdit díky reciprokému tvaru rovnice. Stejně jako v předchozím případě i zde se koeficienty rovnice rovnají čtvrtému řádku Pascalova trojúhelníka. A ze střídavých znamének před těmito koeficienty můžeme usoudit, že tato rovnice má vskutku čtyřnásobný kořen $x_{1,2,3,4} = 1$.



Obrázek 26: Graf funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

9.2 Kvartická funkce – řešení pomocí sourozeneckých křivek

Stejně jako u předchozích stupňů polynomů i kořeny kvartické funkce můžeme najít pomocí sourozeneckých křivek. Postup bude podobný předchozím případům. Jako první si funkci $f(z)$ převedeme z obecného tvaru $f(z) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ pomocí lineární transformace zavedením substituce $z = x - \frac{b}{4}$ do tvaru $f(z) = z^4 + pz^2 + qz + r$. Koeficienty tohoto nového polynomu pak budou odpovídat předpisu $p = \frac{-3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A}$, $q = \frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A}$, $r = \frac{-3B^4}{256A^4} + \frac{CB^2}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A}$. Pro jednoduchost budeme pracovat s funkcemi, které se už nacházejí ve tvaru $f(z) = z^4 + pz^2 + qz + r$. Nyní opět dosadíme obecnou podobu komplexního čísla $z = x + iw$ do funkce $f(z)$, čímž obdržíme tvar:

$$f(z) = x^4 - 6x^2w^2 + w^4 + px^2 - pw^2 + qx + r + iw(4x^3 - 4xw^2 + 2px + q)$$

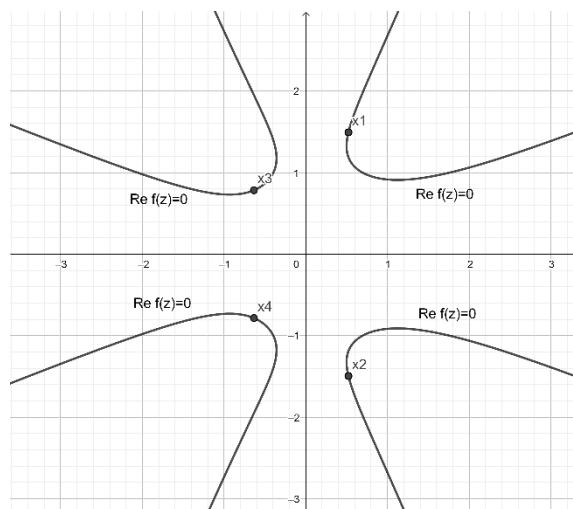
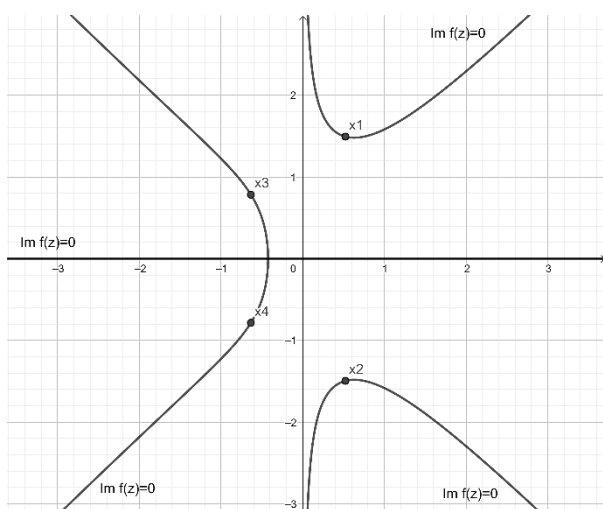
Pokud se má $Im f(z) = 0$, musí platit buď $w = 0$ nebo $4x^3 - 4xw^2 + 2px + q = 0$ (z tohoto předpisu vidíme, že $x \neq 0$ pokud $q \neq 0$). Poté řešíme pro $Re f(z) = 0$ což nám dá sourozenecké křivky definovány vztahem $x^4 - 6x^2w^2 + w^4 + px^2 - pw^2 + qx + r = 0$. Pokud tyto Doménové křivky zakreslíme do komplexní roviny na průsečících těchto dvou sad definičních křivek pak leží kořeny rovnice $f(z)$.

Pojďme si nyní touto metodou najít kořeny funkce $f(z) = z^4 + 2z^2 + z + 2$. Jako první dosadíme obecný tvar komplexního čísla $z = x + iw$, čímž rovnici převedeme do tvaru:

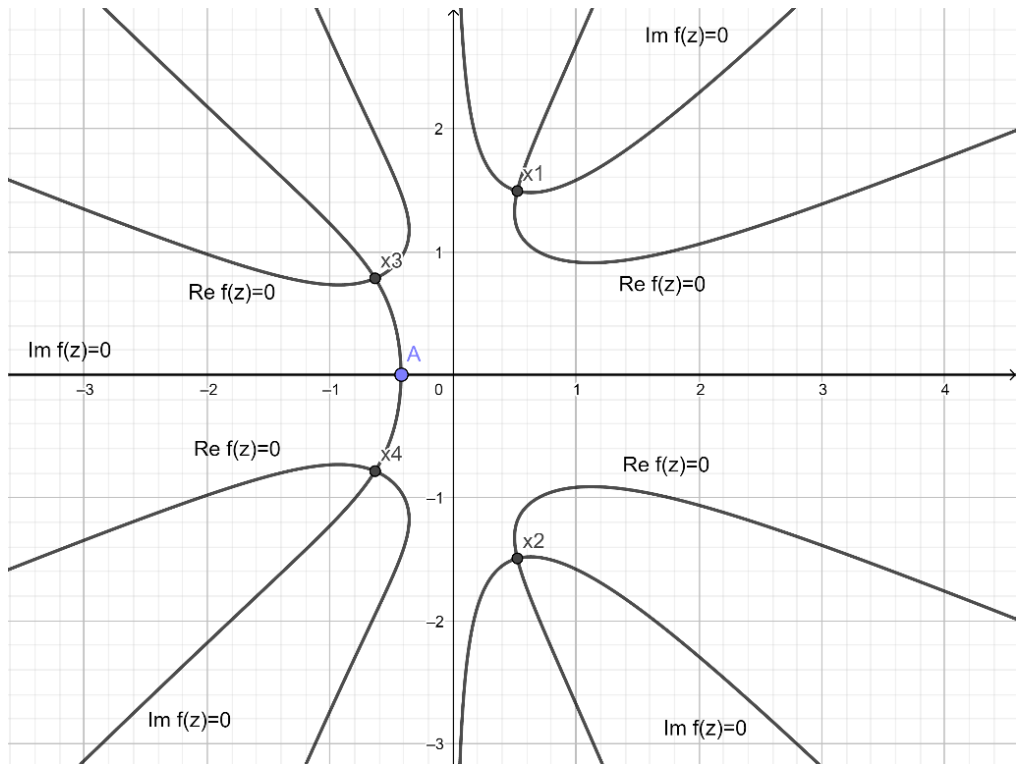
$$f(z) = x^4 - 6x^2w^2 + w^4 + 2x^2 - 2w^2 + x + 2 + iw(4x^3 - 4xw^2 + 4x + 2)$$

První sadu definičních sourozeneckých křivek pro $Im f(z) = 0$ získáme pomocí $w = 0$ a $4x^3 - 4xw^2 + 4x + 2 = 0$. Druhou sadu definičních sourozeneckých křivek obdržíme pomocí $Re f(z) = 0$: $x^4 - 6x^2w^2 + w^4 + 2x^2 - 2w^2 + x + 2 = 0$. Kořeny této funkce potom leží na průsečících těchto dvou sad definičních sourozeneckých křivek. Pro přehlednost máme na *obrázcích 27 a 28* zvlášť vyznačené sady definičních křivek. Mohlo by se zdát, že existuje kořen v bodě $A(-0.42, 0)$ avšak v tomto místě se protínají křivky ze sady definičních křivek pro $Im f(z) = 0$, a tak zde kořen není. Na *obrázku 29* potom můžeme vidět kořeny funkce $f(z) = z^4 + 2z^2 + z + 2$, které jsou následující:

$$x_1 = 0.52 + i1.49, x_2 = 0.52 - i1.49, x_3 = -0.63 + i0.78, x_4 = -0.63 - i0.78$$



Obrázek 27: Definiční křivky $f(z)$ pro $Im f(z) = 0$ Obrázek 28: Definiční křivky $f(z)$ pro $Re f(z) = 0$



Obrázek 29: Grafická metoda nalezení kořenů kvartické funkce $f(z)$ pomocí sourozeneckých křivek

Závěr

Téma hledání kořenů polynomů je jedním z nejstarších problémů matematiky. Proto jsem v mé bakalářské práci zpracoval většinu metod a pravidel k nalezení kořenů polynomů. V první části práce jsem zpracoval algebraické metody pro nalezení kořenů, které se používají na středních školách, matematických seminářích a při zjišťování průběhu funkce. Mezi tyto metody patří, výpočet pomocí diskriminantu, polynomů bez absolutního členu, reciprokových rovnic, Hornerova schéma, Vietových vzorců a binomických a trinomických rovnic, a v druhé části práce jsem poskytl grafickou metodu nalezení kořenů polynomů, ve které jsem věnoval speciální pozornost kvadratickému polynomu, jakožto polynomu, se kterým se setkáváme nejčastěji. Při grafickém řešení rovnic jsem vyjmenoval všechny případy, které mohou nastat, a uvedl metodu, která se používá pro zjištění kořenů daného typu. Nejzajímavější část těchto grafických řešení je výpočet komplexních kořenů pomocí sourozeneckých křivek, který nám poskytuje nevšední vhled do tohoto téma.

Ke všem uvedeným metodám jsem poskytl vypočítaný příklad, který slouží jako snadno pochopitelný návod pro řešení, a také graf funkce vypracovaný v programu Geogebra, pro lepší vizualizaci řešení.

Toto téma je jedno ze základních problémů matematiky, a i přesto, že řešení nižších polynomů je poměrně přímočaré, se zvyšujícím se stupněm polynomu se markantně zvětšuje obtížnost nalezení jeho kořenů. Mým cílem tak bylo nabídnout příručku, která pomůže jak studentům základních, středních a vysokých škol, tak i budoucím učitelům k hlubšímu pochopení tohoto tématu.

Literatura a jiné zdroje

- [1] HARDING, Ansie a ENGELBRECHT, Johann. Sibling curves and complex roots 1: looking back. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2007, 38(7), 963-973. ISSN 0020-739X. Dostupné z: doi:10.1080/00207390701564680
- [2] HARDING, Ansie a ENGELBRECHT, Johann. Sibling curves and complex roots 2: looking ahead. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2007, 38(7), 975-985. ISSN 0020-739X. Dostupné z: doi:10.1080/00207390701564698
- [3] HARDING, Ansie a ENGELBRECHT, Johann. Sibling curves 3: imaginary siblings and tracing complex roots. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2009, 40(7), 989-996. ISSN 0020-739X. Dostupné z: doi:10.1080/00207390903200992
- [4] KLENOVČAN, Pavel. *Basic algebra for future teachers*. 1. Košice: Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici, 2015. ISBN 9788055710358.
- [5] KNAPP, Anthony W. *Basic algebra*. 1.vyd. Boston: Birkhauser: Cornerstones, 2006. ISBN 0817632484.
- [6] KNAPP, Anthony W. *Advanced algebra*. 1. vyd. Boston: Birkhäuser: Cornerstones, 2007. Cornerstones. ISBN 978-081-7645-229
- [7] MOTL, Luboš a ZAHRADNÍK, Miloš. *Pěstujeme lineární algebru*. 3. vyd. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 8024604213.
- [8] NORTON, A., LOTTO, B. *Complex roots made visible*. The College Mathematics Journal 15:3 (1984), pp. 248-249.
- [9] O'CONNOR, JJ., ROBERTSON, EF. *The fundamental theorem of algebra*. The MacTutor History of Mathematics archive (2006) - Retrieved March 2007 from www-groups.dcs.st-nd.ac.uk/history/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html.
- [10] REES, EL *Graphical discussion of the roots of a quartic equation*. American Mathematical Monthly 29:2 (1992), pp 51-55

Seznam obrázků

Obrázek 1: Graf lineárního polynomu $P(x)=x+3$	16
Obrázek 2: Graf kvadratické funkce polynomu $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$	17
Obrázek 3: Graf kubické funkce polynomu $Px = x^3 + x^2 - 3x + 2$	21
Obrázek 4: zobrazení kořenů funkce $fx = x^2 - 64$ v komplexní rovině.....	25
Obrázek 5: Graf kvartické funkce polynomu $Px = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4x - 1$	26
Obrázek 6: Parabola $fx = x^2 + 4x + 6$ s vrcholem $V(-2,2)$	33
Obrázek 7: Graf funkce $f(x) = x^2 + 5x + 4$	33
Obrázek 8: Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 4$	34
Obrázek 9: Zobrazení komplexních kořenů kvadratické rovnice v komplexní rovině.....	36
Obrázek 10: funkce s kořeny $\alpha + i\beta = a \pm ib/c$	36
Obrázek 11: funkce s kořeny $\alpha + \beta = a \pm b/c$	36
Obrázek 12: Znázornění vztahu mezi kořeny x_1 a x_2	37
Obrázek 13: Grafická metoda nalezení kořenů polynomu $P(x) = x^2 + 6x + 13$	37
Obrázek 14: vykreslení sourozeneckých křivek kvadratického polynomu.....	39
Obrázek 15: definiční křivky sourozeneckých křivek funkce $f(z) = z^2 + 2z + 2$	41
Obrázek 16: zobrazení reálných kořenů pomocí imaginárních sourozeneckých křivek.....	42
Obrázek 17: Graf funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ se třemi reálnými kořeny.....	43
Obrázek 18: graf funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$	44
Obrázek 19: Graf funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	44
Obrázek 20: Grafická metoda nalezení kořenů pro funkci $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 17$	45
Obrázek 21: Grafické nalezení kořenů funkce $f(z)= z^3 + 4z + 1$ pomocí sourozeneckých křivek.....	47
Obrázek 22: Graf kvartické funkce polynomu $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ se 4 reálnými kořeny.....	48
Obrázek 23: Graf funkce $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ se třemi reálnými kořeny.....	49
Obrázek 24: Graf funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$	49
Obrázek 25: Graf funkce $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ s dvěma reálnými kořeny.....	50
Obrázek 26: Graf funkce $fx = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$	51
Obrázek 27: Definiční křivky $f(z)$ pro $Im fz = 0$	52
Obrázek 28: Definiční křivky $f(z)$ pro $Re fz = 0$	52
Obrázek 29: Grafická metoda nalezení kořenů kvartické funkce $f(z)$ pomocí sourozeneckých křivek.....	53

Anotace

Jméno a Příjmení:	Radim Švajnoch
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Rok obhajoby:	2021

Název práce:	Grafické řešení algebraických rovnic 2., 3. a 4. stupně
Název v angličtině:	Graphical solution of algebraic equations of 2 nd , 3 rd and 4 th degree
Anotace práce:	<p>V mé bakalářské práci jsem shrnul metody a pravidla, které se používají k nalezení kořenů polynomů druhého třetího a čtvrtého stupně. V první části jsem poskytl a odvodil klasické vzorce pro výpočet kořenů polynomů, ke kterým jsem také vypočítal ukázkový případ. Ve druhé části jsem definoval souřadnicové systémy, a poté se věnoval grafickým metodám, které využíváme pro nalezení kořenů. První jsem vyjmenoval jednotlivé případy, které mohou nastat u jednotlivých polynomů a poté jsem poskytl příklad a graf. Poté jsem u kvadratických a kubických rovnic popsal a odvodil grafickou metodu pro nalezení kořenů polynomu v kartézském souřadnicovém systému. Následně jsem u všech probíraných typů ukázal metodu nalezení kořenů pomocí definičních křivek sourozeneckých křivek.</p>
Klíčová slova	Metody, polynomy, kořeny, binomická rovnice, trinomická rovnice, lineární polynomy, kvadratická rovnice, Diskriminant, Vietovy vzorce, Hornerovo schéma, kartézský souřadnicový systém, komplexní rovina, grafické řešení,

	kubická rovnice, kvartická rovnice, Geogebra, rovnice bez absolutního členu, sourozenecké křivky
Anotace v angličtině:	In my bachelor thesis, I summarized methods and rules, which are used for finding polynomial roots of second, third and fourth degree. In first part, I provided and deduced classical formulas for finding polynomial roots, for which I provided solved example. In second part, I defined coordinate systems, and then I provided graphical methods, which are used for finding polynomial roots. At first, I listed possible root cases, and then I provided solved example and graph for every one of them. Then I described and deduced graphical method in cartesian coordinate system for quadratic and cubic polynomials. Next, I provided method for finding polynomial roots of second-, third- and fourth-degree using sibling curves.
Klíčová slova v angličtině:	Methods, polynomials, binomial equation, trinomial equation, linear polynomials, quadratic polynomials, discriminant, Vieta's formulas, Horner's scheme, cartesian coordinate system, complex plane, graphical solution, cubic polynomial, quartic polynomial, Geogebra, equations without absolute constant, sibling curves
Rozsah práce:	58 stran
Jazyk práce:	Český