

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING

## VEKTOROVÉ ŘÍZENÍ SYNCHRONNÍHO STROJE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

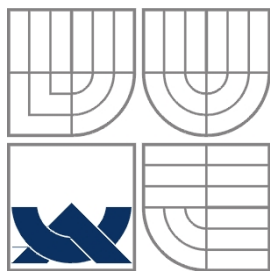
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

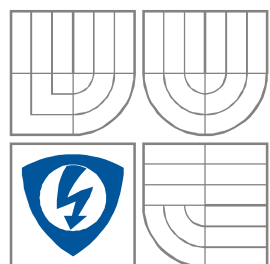
ZBYNĚK RAJCHMAN

BRNO 2009



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLÓGIÍ**

**ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY  
A ELEKTRONIKY**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC  
ENGINEERING

## **VEKTOROVÉ ŘÍZENÍ SYNCHRONNÍHO STROJE**

**VECTOR CONTROL OF SYNCHRONOUS MACHINE**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

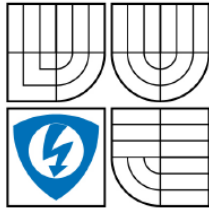
**ZBYNĚK RAJCHMAN**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. MUSTAFA OSMAN ELRAYAH  
ABOELHASSAN**

BRNO, 2009



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor  
Silnoproudá elektrotechnika a výkonová elektronika

**Student:** Zbyněk Rajchman

**Ročník:** 3

**ID:** 83306

**Akademický rok:** 2008/09

**NÁZEV TÉMATU:**

## Vektorové řízení synchronního stroje

**POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:**

1. Prozkoumejte matematické modely synchronního stroje.
2. Identifikujte parametry matematického modelu.
3. Sestavte model synchronního motoru s permanentními magnety v programu Matlab-Simulink.
4. Prostudujte vektorové řízení synchronního stroje

**DOPORUČENÁ LITERATURA:**

Dle doporučení vedoucího

**Termín zadání:** 1.10.2008

**Termín odevzdání:** 29.05.2009

**Vedoucí projektu:** Ing. Mustafa Osman Elrayah Aboelhassan

**doc. Ing. Čestmír Ondrůšek, CSc.**  
*předseda oborové rady*

**UPOZORNĚNÍ:**

Autor semestrální práce nesmí při vytváření semestrální práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## **Abstrakt**

Cíl této práce je popsat matematický model synchronního motoru s permanentními magnety (PMSM) použitím (d-q osy). D-q model PMSM byl vytvořen na souřadnicové soustavě spojené s rotorem, to je provedeno převedením trojfázových napětí a proudů do proměnných d-q použitím Parkové transformace. Matematický model PMSM byl ověřený a navržený v MATLAB-SIMULINK.

## **Abstract**

The aim of this thesis is to describe the mathematical model of a permanent magnet synchronous motor (PMSM) using (d-q axis). The d-q model of the PMSM has been developed on rotor reference frame, it is done by converting the three phase voltages and currents to dq variables by using Parks transformation. The mathematical model of PMSM has been verified and designed in MATLAB-SIMULINK.

## **Klíčová slova**

Synchronní stroj; synchronní motor s permanentními magnety PMSM; matematický model PMSM; vektorové řízení.

## **Keywords**

Synchronous machines; Permanent magnet synchronous motor PMSM; mathematical model of PMSM; vector control.

## **Bibliografická citace**

RAJCHMAN, Z. Vektorové řízení synchronního stroje. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 57 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Mustafa Osman Elrayah Aboelhassan.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Vektorové řízení synchronního stroje jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne .....

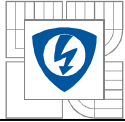
Podpis autora .....

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Mustafa Osman Elrayah Aboelhassan za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne .....

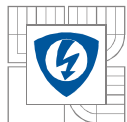
Podpis autora .....



## OBSAH

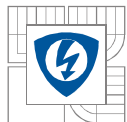
<b>1 SYNCHRONNÍ STROJE .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 SYNCHRONNÍ MOTOR BUZENÝ PERMANENTNÍMI MAGNETY NA ROTORU .....</b>	<b>11</b>
1.1.1 MAGNETY .....	13
1.1.1.1 Magneticky tvrdé ferity. ....	13
1.1.1.2 Permanentní magnety ze vzácných zemin. ....	13
<b>2 MATEMATICKÝ MODEL SYNCHRONNÍHO MOTORU .....</b>	<b>14</b>
<b>2.1 SYNCHRONNÍ STROJ S BUDICÍM VINUTÍM V PŘÍČNÉ A PODÉLNÉ OSE .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 SYNCHRONNÍ STROJ BEZ BUDICÍHO VINUTÍ V PŘÍČNÉ OSE .....</b>	<b>19</b>
2.2.1 INDUKČNOSTI SYNCHRONNÍHO STROJE S VYNIKLÝMI PÓLY .....	23
<b>2.3 LINEÁRNÍ TRANSFORMACE ZÁKLADNÍCH ROVNIC SYNCHRONNÍHO STROJE .....</b>	<b>28</b>
2.3.1 TRANSFORMACE V PROGRAMU MATLAB SIMULINK .....	29
2.3.2 LINEÁRNÍ TRANSFORMACE .....	31
2.3.3 LINEÁRNÍ TRANSFORMACE NAPĚŤOVÝCH ROVNIC .....	36
2.3.4 LINEÁRNÍ TRANSFORMACE ROVNIC PRO SPŘAŽENÉ MAGNETICKÉ TOKY .....	38
2.3.5 VÝKON A MOMENT SYNCHRONNÍHO STROJE .....	41
<b>2.4 MATEMATICKÝ MODEL SYNCHRONNÍHO MOTORU S PM .....</b>	<b>43</b>
<b>3 NÁVRH REGULAČNÍCH STRUKTUR.....</b>	<b>45</b>
<b>3.1 REGULACE PROUDU .....</b>	<b>45</b>
<b>3.2 REGULACE OTÁČEK.....</b>	<b>48</b>
<b>4 VEKTOROVÉ ŘÍZENÍ.....</b>	<b>51</b>
<b>5 ZÁVĚR.....</b>	<b>53</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>54</b>
<b>PŘÍLOHA A .....</b>	<b>55</b>
<b>PŘÍLOHA B.....</b>	<b>56</b>
<b>PŘÍLOHA C .....</b>	<b>57</b>





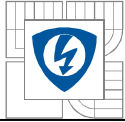
## SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obrázek 1.1 Způsoby provedení permanentních magnetů na rotoru.....</i>	<i>12</i>
<i>Obrázek 2.1 Schéma synchronního stroje s vyniklými póly.....</i>	<i>15</i>
<i>Obrázek 2.2 Schéma synchronního stroje s vyniklými póly.....</i>	<i>19</i>
<i>Obrázek 2.3 Vysvětlení vztahu pro vzájemnou indukčnost fáze a a budicího vinutí f.....</i>	<i>23</i>
<i>Obrázek 2.4 Vysvětlení vztahu pro vlastní indukčnost fáze a.....</i>	<i>25</i>
<i>Obrázek 2.5 Vysvětlení vztahu pro vzájemnou indukčnost <math>L_{bc}</math>.....</i>	<i>26</i>
<i>Obrázek 2.6 Soustavy os pro matematický popis synchronního stroje.....</i>	<i>28</i>
<i>Obrázek 2.7 Blokové schéma transformace.....</i>	<i>30</i>
<i>Obrázek 2.8 Průběhy napětí.....</i>	<i>30</i>
<i>Obrázek 2.9 Náhradní elektrické schéma synchronního.....</i>	<i>43</i>
<i>Obrázek 2.10 Blokové schéma SMPM v Matlab Simulink.....</i>	<i>44</i>
<i>Obrázek 2.11 Průběh proudů a otáček PMSM.....</i>	<i>44</i>
<i>Obrázek 3.1 Blokové schéma regulační smyčky.....</i>	<i>46</i>
<i>Obrázek 3.2 Blokové schéma regulace proudu.....</i>	<i>47</i>
<i>Obrázek 3.3 Blokové schéma regulátoru.....</i>	<i>47</i>
<i>Obrázek 3.4 Odezva regulátoru I na jednotkový skok.....</i>	<i>48</i>
<i>Obrázek 3.5 Blokové schéma regulace otáček.....</i>	<i>49</i>
<i>Obrázek 3.6 Blokové schéma regulačních smyček.....</i>	<i>50</i>
<i>Obrázek 3.7 Odezva regulatoru na jednotkový skok.....</i>	<i>50</i>
<i>Obrázek 4.1 Polohy fázorů při vektorovém řízení PMSM.....</i>	<i>51</i>
<i>Obrázek 4.2 Blokové schéma vektorového řízení PMSM.....</i>	<i>52</i>
<i>Obrázek 4.3 Průběhy hodnot proudů a otáček vektorového řízení.....</i>	<i>52</i>



## SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK

$L_{xx}$	vzájemné a vlastní indukčnosti vinutí
$L_S$	indukčnost statoru
$U_d$	napětí v podélné ose d
$U_q$	napětí v příčné ose q
$U_f$	podélné napětí buzení
$U_g$	příčné napětí buzení
$U_a$	napětí statoru
$U_b$	napětí statoru
$U_c$	napětí statoru
$U_D$	napětí tlumícího vnutí statoru v podélné ose
$U_Q$	napětí tlumícího vnutí statoru v příčné ose
$I_d$	proud statoru v podélné ose
$I_q$	proud statoru v příčné ose
$I_f$	proud v podélném buzení
$I_g$	proud v příčném buzení
$I_D$	proud v tlumícím vinutí v podélné ose d
$I_Q$	proud v tlumícím vinutí v příčné ose q
$I_S$	proud statoru
$R_S$	odpor fáze statoru
$R_Q$	odpor v podélné ose
$R_D$	odpor tlumícího vinutí v podélné ose d
$R_g$	odpor tlumícího vinutí v příčné ose q
$R_f$	odpor buzení
$\psi_a$	spřažený mag. tok statorového vinutí v ose a
$\psi_b$	spřažený mag. tok statorového vinutí v ose b
$\psi_c$	spřažený mag. tok statorového vinutí v ose c
$\psi_d$	spřažený mag. tok v podélné ose d
$\psi_q$	spřažený mag. tok v příčné ose q
$\psi_D$	spřažený mag. tok tlumícího vinutí v podélné ose d
$\psi_Q$	spřažený mag. tok tlumícího vinutí v příčné ose q
$\psi_f$	spřažený mag. tok podélného buzení



$\psi_g$	spřažený mag. tok příčného buzení
$\psi_m$	spřažený mag. tok permanentních magnetů
$k_d$	transformační činitel
$k_q$	transformační činitel
$k_0$	transformační činitel
$\vartheta$	úhel natočení rotoru
$\Delta$	zatěžovací úhel
$\omega$	elektrická úhlová rychlost
$\omega_{\text{mech}}$	mechanická rychlost rotoru
$\omega_k$	rychlost otáčení vektorového prostoru
$p_p$	počet pólových dvojic
$m_i$	vnitřní moment motoru
$W_m$	Magnetická energie
$\Delta p_j$	Joulovy ztráty
$m_m$	zátěžný moment
$P$	výkon motoru
$J$	moment setrvačnosti motoru
$\tau_S$	časová konstanta statoru
$\tau_M$	časová konstanta měniče
$\tau_\sigma$	součtová časová konstanta
$\tau_\Sigma$	součtová časová konstanta
$\tau_f$	časová konstanta vzorkovače



# 1 SYNCHRONNÍ STROJE

Z teorie elektrických strojů je známo, že synchronní stroj, připojený na síť, může pracovat ve všech čtyřech kvadrantech PQ diagramu. Historicky byly synchronní stroje nejprve používány jako generátory pro výrobu střídavé elektrické energie. S rozvojem elektrizační soustavy narůstal instalovaný výkon připojených generátorů – alternátorů, a tím i zkratový výkon v místě připojení spotřebičů. Současně se ukazovala nutnost kompenzovat jalový výkon v soustavě, a tím snižovat ztráty při přenosu energie ve vedeních. Díky těmto dvěma skutečnostem (nárůst zkratového výkonu a potřeba kompenzace) se začaly ve 40-tých letech používat synchronní stroje jako motory. Používají se většinou u velkoodběratelů k pohonu takových mechanismů, které nevyžadují časté spouštění a pracují s konstantní rychlostí a s málo proměnným činným zatížením. Jsou to pohony velkých čerpadel, ventilátorů a kompresorů. Řízením jejich budicího proudu se potom udržuje energetikem velkoodběratele požadovaný účinník nebo jalový výkon. Na rozdíl od generátoru se musí synchronní motor rozeběhnout na synchronní otáčky, a proto problematice rozběhu SM je věnována mimořádná pozornost.

Synchronní motor je elektrický stroj, jehož rotor se otáčí synchronně s otáčením točivého magnetického pole statoru. Stator je shodný se statorem asynchronního motoru, tj. je lištěný, s drážkami pro uložení statorového vinutí. Vinutí je zpravidla třífázové, rozložené do statorových drážek a podle konstrukce může být dvoupólové nebo vícepólové. Rotor může být hladký nebo s vyjádřenými póly, které mohou být opatřeny budicím vinutím, napájeným stejnosměrným proudem. Budicí proud se do rotorového vinutí přivádí buď pomocí kluzných kontaktů (kartáčů a kroužků), nebo bezkontaktně rotačním transformátorem a následným usměrněním diodami na rotoru. Synchronní motory určené k připojení ke střídavé napájecí síti mají na rotoru tzv. tlumicí vinutí, které může sloužit pro asynchronní rozběh motoru.

## 1.1 Synchronní motor buzený permanentními magnety na rotoru

Synchronní servomotory s permanentními magnety nemají na rotoru žádné tlumicí vinutí, neboť tyto motory pracují stále v synchronním režimu. Jsou nejrozšířenějším typem motorů pro polohové servomechanizmy výrobních strojů, robotů a v automatizační technice. Oproti asynchronním motorům jsou menší a lehčí při stejném výkonu, lépe se chladí (na rotoru nevznikají ztráty a není tedy potřeba odvádět teplo z rotoru), ve srovnání s elektronicky komutovanými motory se vyznačují vyšší rovnoměrností chodu bez momentových pulzací

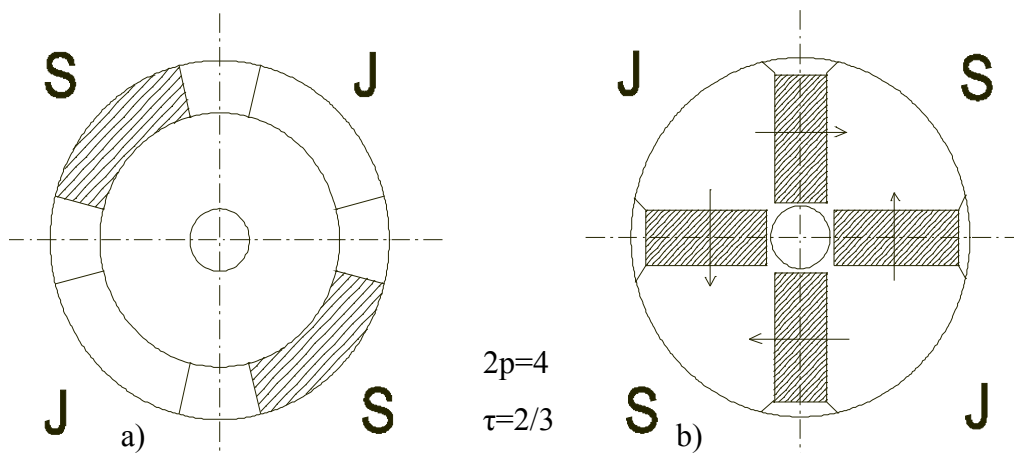
V porovnání se stejnosměrnými mají bezkartáčové servomotory tyto výhody:

- malé rozměry a moment setrvačnosti
- velké, až 6-ti násobné proudové a momentové přetížení v dynamických stavech
- vysoká životnost a provozní spolehlivost
- minimální nároky na údržbu

**Konstrukční provedení:**

Magnety mohou být umístěny na povrchu rotoru buď jako zapaštěné (u tohoto způsobu se projevuje reakce statorového vinutí na tvar pole ve vzduchové mezeře) nebo přímo ve vzduchové mezeře na povrchu rotoru. Synchronní motor vyžaduje sinusový průběh magnetické indukce ve vzduchové mezeře, čehož se dosahuje přibližně 2/3 pólovým krytím. Pólové krytí je poměr obvodu pólových nástavců, nebo obvodu povrchu permanentních magnetů ve vzduchové mezeře, k celkovému obvodu vzduchové mezery. Způsob uložení magnetů ukazuje *Obrázek 1.1.a)*.

Jiným konstrukčním principem je uložení permanentních magnetů uvnitř rotoru. Tento princip se používá zejména při použití tvrdých feritů jako materiálu pro permanentní magnety, neboť umožňuje koncentraci magnetického toku do vzduchové mezery. Navíc vhodným tvarem pólových nástavců snadno dosáhneme sinusového průběhu magnetické indukce. Nevýhodou tohoto způsobu je větší vliv reakce statorového vinutí na toto magnetické pole při zatížení motoru. Způsob uložení magnetů ukazuje *Obrázek 1.1.b)*.



*Obrázek 1.1 Způsoby provedení permanentních magnetů na rotoru*

*a) na povrch rotoru*

*b) uvnitř rotoru*



### 1.1.1 Magnety

Jako materiál pro výrobu permanentních magnetů se používá vzácných zemin, jako jsou např. samarium - kobalt, nebo neodým - železo - bor, případně i tvrdých feritů, které jsou levnější, avšak s horšími magnetickými vlastnostmi.

#### 1.1.1.1 Magneticky tvrdé ferity.

Tvrdé ferity jsou cenově nejpříznivější a celosvětově zatím ještě nejvíce používané permanentní magnety. Kromě rozšířených barnatých feritů se stále více používají vysoce koercitivní strontnaté ferity. Hodnoty jednotlivých magnetických veličin jsou uvedeny v příslušných materiálových listech výrobce či normách. Pracovní teplota se pohybuje v rozmezí 40°C až +250°C. Teplotní závislost koercitivní intenzity magnetického pole probíhá u magneticky tvrdých feritů a permanentních magnetů ze vzácných zemin opačně. Při vzrůstající teplotě klesá remanence  $B_r$  a koercitivní intenzity magnetického  $H_{cJ}$  pole současně vzrůstá. Při klesající teplotě stoupá remanence a klesá koercitivní síla pole stejnou měrou. Feritové permanentní magnety mají stechiometrii  $BaFe_{12}O_{19}$  nebo  $SrFe_{12}O_{19}$  a jsou keramickými oxidy. Skládají se z cca 86%  $Fe_2O_3$  a cca 14%  $BaO_2$  nebo  $SrO$ . Suroviny jsou dobře dosažitelné a cenově výhodné. Feritové permanentní magnety jsou odolné vůči mnohým chemikáliím jako jsou ředidla, louhy a slabé kyseliny.

#### 1.1.1.2 Permanentní magnety ze vzácných zemin.

Trvalé magnety na bázi  $SmCo$  a  $NdFeB$  jsou vysoce výkonné a kvalitativně velmi hodnotné komponenty, které se používají v pohonech a regulaci. Permanentní magnety ze vzácných zemin se kvůli jejich tvrdosti opracovávají diamantovým nářadím. Při nárazech dochází lehce k odštípnutím resp. odprýsknutím povrchové vrstvy. Magnety pojených plastem je možné mechanické opracování tvrdokovovým nářadím. Pracovní teploty jsou variabilní podle materiálu: u  $NdFeB$  od cca 110°C do 220°C, u  $SmCo$  až do 350°C. Neodymové magnety přesněji  $NdFeB$  jsou směsí Neodymu, Železa a Boru. Tyto magnety nabízí nejlepší poměr ve srovnání výkonu a ceny. Ještě do nedávné doby byly nejsilnějšími známými permanentní magnety materiály na bázi samaria a kobaltu. V současné době byly však překonány materiálem jehož chemické složení je  $Nd_2Fe_{14}B$ . Tento materiál je v současnosti nejnovějším a nejsilnějším typem magnetu s vynikajícími magnetickými vlastnostmi a vůbec nejvyšší vnitřní energií. Zajímavé je, že i výrobní cena těchto magnetů je nižší než u Samarium-kobaltových magnetů. Vzhledem ke své síle jsou poměrně levné a malé. Velice snadno korodují, proto je potřeba u nich provést povrchovou úpravu. Slitina  $NdFeB$  nepřijme pokovení tak jako ostatní slitiny kovů a to má za následek, že začne korodovat zevnitř směrem na povrch magnetu. Jejich další nevýhodou je malá tepelná odolnost oproti magnetům  $SmCo$ . Přestože v současné době jsou nejsilnějšími permanentní magnety na bázi neodýmu o složení  $Nd_2Fe_{14}B$ , jsou magnety složené z  $SmCo$  stále prakticky nejvíce vyráběnými extrémně silnými permanentními magnety. Složení těchto magnetů je obvykle uváděno jako  $SmCo_5$ , nebo  $Sm_2Co_{17}$ .



## 2 MATEMATICKÝ MODEL SYNCHRONNÍHO MOTORU

Při sestavování matematického modelu synchronního motoru se vychází z podobných zjednodušujících předpokladů.

Předpokládá se:

- a) Průběh magnetické indukce ve vzduchové mezeře a tedy i indukovaného napětí je sinusový, přičemž je obecně uvažován rotor s vyniklými póly, tj. s různou magnetickou vodivostí v podélném a příčném směru
- b) Zavedení jednoho náhradního obvodu tlumiče v každé ose (D a Q)
- c) Ztráty v železe jsou zanedbány
- d) Odporů a indukčností jsou stejné ve všech statorových fázích a jsou konstantní, tj. zanedbávají se:
  - změny odporů statoru a rotoru na teplotě
  - nasycení magnetického obvodu
  - hystereze magnetického obvodu
  - změny odporů a indukčností na kmitočtu (skinefekt)
- e) Vliv drážkování se neuvažuje

Rovněž činný odpor a indukčnost napájecího zařízení (napájecí síť, měnič, přívody atd.) se při řešení přechodných dějů obvykle zanedbávají.







Rozepíšeme-li (2.1.1) obdržíme rovnice:

$$u_a = R \cdot i_a + \frac{d\psi_a}{dt} \quad (2.1.3)$$

$$u_b = R \cdot i_b + \frac{d\psi_b}{dt} \quad (2.1.4)$$

$$u_c = R \cdot i_c + \frac{d\psi_c}{dt} \quad (2.1.5)$$

$$u_f = R_f \cdot i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (2.1.6)$$

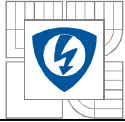
$$u_g = R_g \cdot i_g + \frac{d\psi_g}{dt} \quad (2.1.7)$$

$$u_D = R_D \cdot i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \quad (2.1.8)$$

$$u_Q = R_Q \cdot i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \quad (2.1.9)$$

Rovnice (2.1.3) až (2.1.9) lze také psát v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_f \\ u_g \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_a \\ i_b & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_b \\ i_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_c \\ 0 & i_f & 0 & 0 & 0 & \psi_f \\ 0 & 0 & i_g & 0 & 0 & \psi_g \\ 0 & 0 & 0 & i_D & 0 & \psi_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i_Q & \psi_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ R \\ R \\ R_f \\ R_g \\ R_D \\ R_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \quad (2.1.10)$$



Rovnice pro spřažené magnetické toky můžeme pomocí vlastních a vzájemných indukčností psát ve tvaru

$$\psi_a = L_{aa} \cdot i_a + L_{ab} \cdot i_b + L_{ac} \cdot i_c + L_{af} \cdot i_f + L_{ag} \cdot i_g + L_{aD} \cdot i_D + L_{aQ} \cdot i_Q \quad (2.1.11)$$

$$\psi_b = L_{ba} \cdot i_a + L_{bb} \cdot i_b + L_{bc} \cdot i_c + L_{bf} \cdot i_f + L_{bg} \cdot i_g + L_{bD} \cdot i_D + L_{bQ} \cdot i_Q \quad (2.1.12)$$

$$\psi_c = L_{ca} \cdot i_a + L_{cb} \cdot i_b + L_{cc} \cdot i_c + L_{cf} \cdot i_f + L_{cg} \cdot i_g + L_{cD} \cdot i_D + L_{cQ} \cdot i_Q \quad (2.1.13)$$

$$\psi_f = L_{fa} \cdot i_a + L_{fb} \cdot i_b + L_{fc} \cdot i_c + L_{ff} \cdot i_f + L_{fg} \cdot i_g + L_{fD} \cdot i_D + L_{fQ} \cdot i_Q \quad (2.1.14)$$

$$\psi_g = L_{ga} \cdot i_a + L_{gb} \cdot i_b + L_{gc} \cdot i_c + L_{gf} \cdot i_f + L_{gg} \cdot i_g + L_{gD} \cdot i_D + L_{gQ} \cdot i_Q \quad (2.1.15)$$

$$\psi_D = L_{Da} \cdot i_a + L_{Db} \cdot i_b + L_{Dc} \cdot i_c + L_{Df} \cdot i_f + L_{Dg} \cdot i_g + L_{DD} \cdot i_D + L_{DQ} \cdot i_Q \quad (2.1.16)$$

$$\psi_Q = L_{Qa} \cdot i_a + L_{Qb} \cdot i_b + L_{Qc} \cdot i_c + L_{Qf} \cdot i_f + L_{Qg} \cdot i_g + L_{QD} \cdot i_D + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.1.17)$$

Rovnice (2.1.11) až (2.1.17) lze také psát v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{ag} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bg} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cg} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fg} & L_{fD} & L_{fQ} \\ L_{ga} & L_{gb} & L_{gc} & L_{gf} & L_{gg} & L_{gD} & L_{gQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{Dg} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{Qf} & L_{Qg} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_g \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.1.18)$$

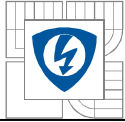
V těchto rovnicích jsou nulové vzájemné indukčnosti vinutí, jejichž osy jsou kolmé

$$L_{gf} = L_{fg} = 0 \quad (2.1.19)$$

$$L_{Qf} = L_{fQ} = 0 \quad (2.1.20)$$

$$L_{gD} = L_{Dg} = 0 \quad (2.1.21)$$

$$L_{QD} = L_{DQ} = 0 \quad (2.1.22)$$



Upravíme rovnice (2.1.11) až (2.1.17) pomocí rovnic (2.1.19) až (2.1.22)

$$\psi_a = L_{aa} \cdot i_a + L_{ab} \cdot i_b + L_{ac} \cdot i_c + L_{af} \cdot i_f + L_{ag} \cdot i_g + L_{aD} \cdot i_D + L_{aQ} \cdot i_Q \quad (2.1.23)$$

$$\psi_b = L_{ba} \cdot i_a + L_{bb} \cdot i_b + L_{bc} \cdot i_c + L_{bf} \cdot i_f + L_{bg} \cdot i_g + L_{bD} \cdot i_D + L_{bQ} \cdot i_Q \quad (2.1.24)$$

$$\psi_c = L_{ca} \cdot i_a + L_{cb} \cdot i_b + L_{cc} \cdot i_c + L_{cf} \cdot i_f + L_{cg} \cdot i_g + L_{cD} \cdot i_D + L_{cQ} \cdot i_Q \quad (2.1.25)$$

$$\psi_f = L_{fa} \cdot i_a + L_{fb} \cdot i_b + L_{fc} \cdot i_c + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D \quad (2.1.26)$$

$$\psi_g = L_{ga} \cdot i_a + L_{gb} \cdot i_b + L_{gc} \cdot i_c + L_{gg} \cdot i_g + L_{gQ} \cdot i_Q \quad (2.1.27)$$

$$\psi_D = L_{Da} \cdot i_a + L_{Db} \cdot i_b + L_{Dc} \cdot i_c + L_{Df} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D \quad (2.1.28)$$

$$\psi_Q = L_{Qa} \cdot i_a + L_{Qb} \cdot i_b + L_{Qc} \cdot i_c + L_{Qg} \cdot i_g + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.1.29)$$

Resp.

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{ag} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bg} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cg} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & 0 & L_{fD} & 0 \\ L_{ga} & L_{gb} & L_{gc} & 0 & L_{gg} & 0 & L_{gQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & 0 & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & L_{Qg} & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_g \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.1.30)$$





Rozepíšeme-li ( 2.31 ) obdržíme rovnice:

$$u_a = R \cdot i_a + \frac{d\psi_a}{dt} \quad (2.2.3)$$

$$u_b = R \cdot i_b + \frac{d\psi_b}{dt} \quad (2.2.4)$$

$$u_c = R \cdot i_c + \frac{d\psi_c}{dt} \quad (2.2.5)$$

$$u_f = R_f \cdot i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (2.2.6)$$

$$u_D = R_D \cdot i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \quad (2.2.7)$$

$$u_Q = R_Q \cdot i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \quad (2.2.8)$$

Rovnice (2.2.3) až (2.2.8) lze také psát v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a & 0 & 0 & 0 & \psi_a \\ i_b & 0 & 0 & 0 & \psi_b \\ i_c & 0 & 0 & 0 & \psi_c \\ 0 & i_f & 0 & 0 & \psi_f \\ 0 & 0 & i_D & 0 & \psi_D \\ 0 & 0 & 0 & i_Q & \psi_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ R \\ R \\ R_f \\ R_D \\ R_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \quad (2.2.9)$$



Rovnice pro spřažené magnetické toky můžeme pomocí vlastních a vzájemných indukčností psát ve tvaru

$$\psi_a = L_{aa} \cdot i_a + L_{ab} \cdot i_b + L_{ac} \cdot i_c + L_{af} \cdot i_f + L_{aD} \cdot i_D + L_{aQ} \cdot i_Q \quad (2.2.10)$$

$$\psi_b = L_{ba} \cdot i_a + L_{bb} \cdot i_b + L_{bc} \cdot i_c + L_{bf} \cdot i_f + L_{bD} \cdot i_D + L_{bQ} \cdot i_Q \quad (2.2.11)$$

$$\psi_c = L_{ca} \cdot i_a + L_{cb} \cdot i_b + L_{cc} \cdot i_c + L_{cf} \cdot i_f + L_{cD} \cdot i_D + L_{cQ} \cdot i_Q \quad (2.2.12)$$

$$\psi_f = L_{fa} \cdot i_a + L_{fb} \cdot i_b + L_{fc} \cdot i_c + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D + L_{fQ} \cdot i_Q \quad (2.2.13)$$

$$\psi_D = L_{Da} \cdot i_a + L_{Db} \cdot i_b + L_{Dc} \cdot i_c + L_{Df} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D + L_{DQ} \cdot i_Q \quad (2.2.14)$$

$$\psi_Q = L_{Qa} \cdot i_a + L_{Qb} \cdot i_b + L_{Qc} \cdot i_c + L_{Qf} \cdot i_f + L_{QD} \cdot i_D + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.2.15)$$

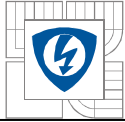
Rovnice (2.2.10) až (2.2.15) lze také psát v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & L_{fQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{Qf} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

V těchto rovnicích jsou nulové vzájemné indukčnosti vinutí, jejíž osy jsou kolmé

$$L_{Qf} = L_{fQ} = 0 \quad (2.2.17)$$

$$L_{DQ} = L_{QD} = 0 \quad (2.2.18)$$



Upravíme rovnice (2.2.10) až (2.2.15) pomocí rovnic (2.2.17) a (2.2.18) :

$$\psi_a = L_{aa} \cdot i_a + L_{ab} \cdot i_b + L_{ac} \cdot i_c + L_{af} \cdot i_f + L_{aD} \cdot i_D + L_{aQ} \cdot i_Q \quad (2.2.19)$$

$$\psi_b = L_{ba} \cdot i_a + L_{bb} \cdot i_b + L_{bc} \cdot i_c + L_{bf} \cdot i_f + L_{bD} \cdot i_D + L_{bQ} \cdot i_Q \quad (2.2.20)$$

$$\psi_c = L_{ca} \cdot i_a + L_{cb} \cdot i_b + L_{cc} \cdot i_c + L_{cf} \cdot i_f + L_{cD} \cdot i_D + L_{cQ} \cdot i_Q \quad (2.2.21)$$

$$\psi_f = L_{fa} \cdot i_a + L_{fb} \cdot i_b + L_{fc} \cdot i_c + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D \quad (2.2.22)$$

$$\psi_D = L_{Da} \cdot i_a + L_{Db} \cdot i_b + L_{Dc} \cdot i_c + L_{Df} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D \quad (2.2.23)$$

$$\psi_Q = L_{Qa} \cdot i_a + L_{Qb} \cdot i_b + L_{Qc} \cdot i_c + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.2.24)$$

Resp.

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

## 2.2.1 Indukčnosti synchronního stroje s vyniklými póly

Analytické vyjádření vlastních a vzájemných indukčností je jedním ze základů teorie synchronního stroje. Vztahy pro indukčnosti se zjednodušují za předpokladu, že vinutí tří fází statoru jsou rozložena sinusově. Pro vlastní a vzájemné indukčnosti uvedeme stejné vztahy pomocí jednoduché fyzikální představy, vycházející ze statické definice indukčností, podle které je vlastní indukčnost dána magnetickým tokem při jednotkovém proudu samotného vinutí a vzájemná indukčnost magnetickým tokem při jednotkovém proudu vinutí, které do uvažovaného vinutí magnetický tok vysílá.

### a) Indukčnosti vinutí rotoru a statoru

U běžných typů synchronních strojů chybí obvykle příčné buzení ( $g$ ).

- **Vlastní indukčnosti vinutí rotoru**

Vlastní indukčnosti vinutí rotoru  $L_{ff}$ ,  $L_{DD}$ ,  $L_{QQ}$ , nezávisí na poloze rotoru, protože stator synchronního stroje má válcový tvar (při zanedbání drážkování).

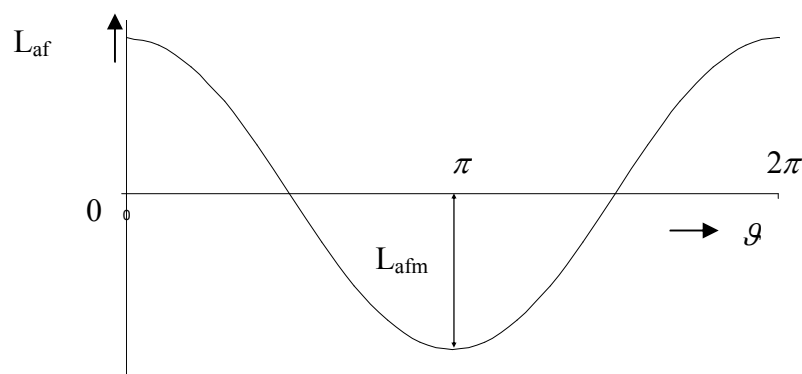
- **Vzájemné indukčnosti mezi budicími vinutími a statorovými vinutími**

Vzájemné indukčnosti vinutí budicího a statorového závisí na relativní poloze rotoru a uvažované fáze statoru. Vzájemná indukčnost budicího vinutí  $f$  a vinutí fáze  $a$  je pro nulový úhel  $\vartheta$  mezi osou budicího vinutí a osou fáze  $a$  maximální ( $L_{afm}$ ), nulová pro  $\vartheta = \pi/2$ , minimální pro  $\vartheta = \pi$  atd. (viz Obrázek 2.3). Tuto závislost můžeme přibližně vyjádřit kosinusovou funkcí

$$L_{af} = L_{fa} = L_{afm} \cdot \cos \vartheta \quad (2.2.26)$$

$$L_{bf} = L_{fb} = L_{afm} \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.27)$$

$$L_{cf} = L_{fc} = L_{afm} \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.28)$$



Obrázek 2.3 Vysvětlení vztahu pro vzájemnou indukčnost fáze  $a$  a budicího vinutí  $f$





- **Vzájemné indukčnosti mezi tlumicími a statorovými vinutí**

Podobné vztahy jako pro vzájemné indukčnosti budícího a statorového vinutí platí i pro vzájemné indukčnosti vinutí tlumícího v ose  $D$  a vinutí statoru

$$L_{aD} = L_{Da} = L_{aDm} \cdot \cos \vartheta \quad (2.2.29)$$

$$L_{aD} = L_{Da} = L_{aDm} \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.30)$$

$$L_{aD} = L_{Da} = L_{aDm} \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.31)$$

Vzájemná indukčnost fáze  $a$  a tlumícího vinutí v příčné ose  $Q$  je nulová pro  $\vartheta = 0$  a maximální pro  $\vartheta = -\pi/2$  (příčná osa předbíhá o  $\pi/2$  podélnou osu). Platí proto

$$L_{aQ} = L_{Qa} = L_{aQm} \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{1}{2}\pi\right) = -L_{aQm} \cdot \sin \vartheta \quad (2.2.32)$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = L_{aQm} \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.33)$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = L_{aQm} \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (2.2.34)$$

**b) Indukčnosti sinusově rozloženého vinutí statoru****• Pro vlastní indukčnosti statorových vinutí platí**

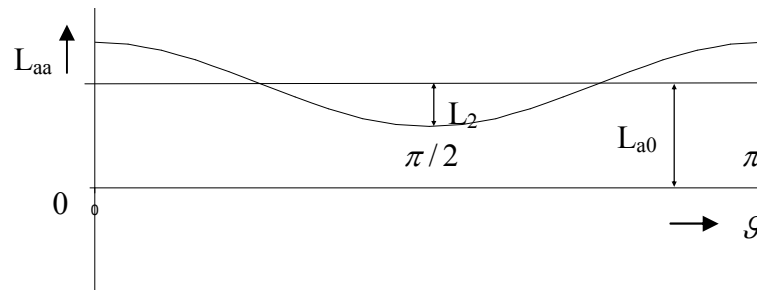
Vlastní indukčnosti vinutí statoru závisí na poloze rotoru, pokud má rotor vyniklé póly. Vlastní indukčnost fáze statoru bude největší ( $L_{aa\max}$ ), bude-li osa vinutí fáze splývat s osou pólu (poloha největší magnetické vodivosti), a nejmenší ( $L_{aa\min}$ ) při úhlu osy vinutí fáze  $a$  osy pólu rovném  $\pi/2$ . Protože magnetická vodivost se periodicky mění pro každý pól, bude perioda vzájemné indukčnosti rovna jedné pólové rozteči ( $\tau_p = \pi$ ). Taková periodická závislost vlastní indukčnosti se může přibližně vyjádřit podle vztahu (viz Obrázek 2.4):

$$L_{aa} = L_{a0} + L_2 \cdot \cos 2\vartheta \quad (2.2.35)$$

Kde

$$L_{aa\max} = L_{a0} + L_2 \quad (2.2.36)$$

$$L_{aa\min} = L_{a0} - L_2 \quad (2.2.37)$$

Obrázek 2.4 Vysvětlení vztahu pro vlastní indukčnost fáze  $a$ 

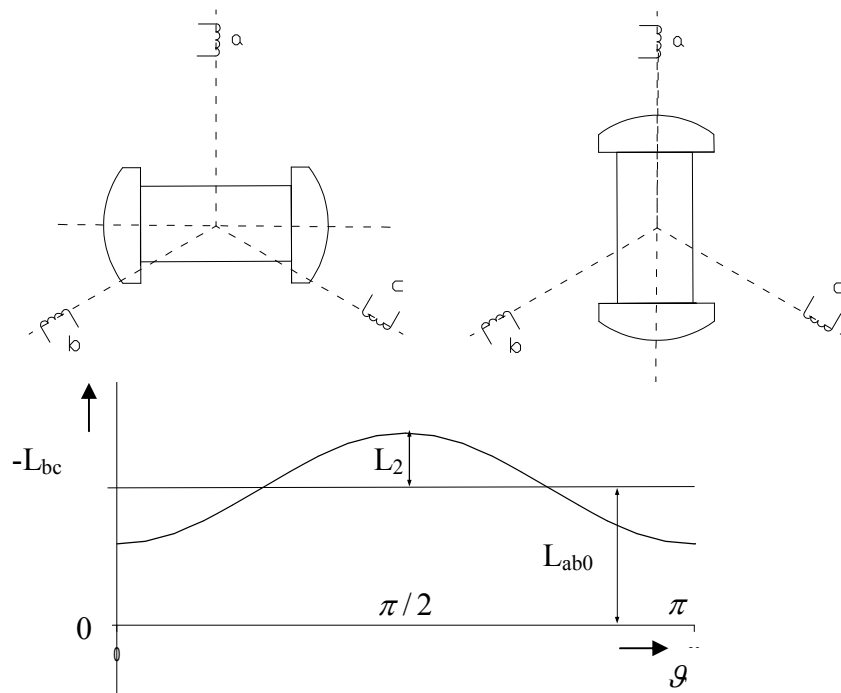
Pro další fáze statoru, natočené proti fázi  $a$  o úhel  $\pm 3/2\pi$ , platí obdobné vztahy

$$L_{bb} = L_{a0} + L_2 \cdot \cos 2\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad (2.2.38)$$

$$L_{cc} = L_{a0} + L_2 \cdot \cos 2\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad (2.2.39)$$

• **Vzájemné indukčnosti statorových vinutí**

Vzájemné indukčnosti fází statoru závisí také periodicky na úhlu  $\vartheta$ , protože při otáčení rotoru s vyjádřenými póly se periodicky mění magnetická vodivost společného magnetického obvodu dvou fází statoru. Na *Obrázek 2.5* jsou naznačeny polohy rotoru pro maximální a minimální indukčnosti fází  $b, c$ . Vzájemná indukčnost  $|L_{bc}|$  je maximální pro  $\pi/2$ ,  $\pm 3/2\pi$  atd. a minimální pro  $\vartheta = 0, \pi$  atd. Z *Obrázek 2.5* dále plyne, že při kladném proudu  $i_b$  bude magnetický tok fáze  $c$  záporný, protože osy obou fází svírají úhel větší než  $\pi/2$  a menší než  $3/2\pi$ .



*Obrázek 2.5* Vysvětlení vztahu pro vzájemnou indukčnost  $L_{bc}$

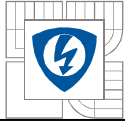
Vzájemné indukčnosti jsou proto záporné a můžeme je přibližně vyjádřit vztahy

$$-L_{bc} = L_{ab0} - L_2 \cdot \cos 2\vartheta \quad (2.2.40)$$

$$-L_{ca} = L_{ab0} - L_2 \cdot \cos 2\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) = L_{ab0} - L_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad (2.2.41)$$

$$-L_{ab} = L_{ab0} - L_2 \cdot \cos 2\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) = L_{ab0} - L_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad (2.2.42)$$

Je dokázáno, že vztahy (2.2.26) až (2.2.42) platí přesně pro sinusově rozložené vinutí. Je také dokázáno, že periodické složky vlastních a vzájemných indukčností mají stejnou amplitudu  $L_2$ .



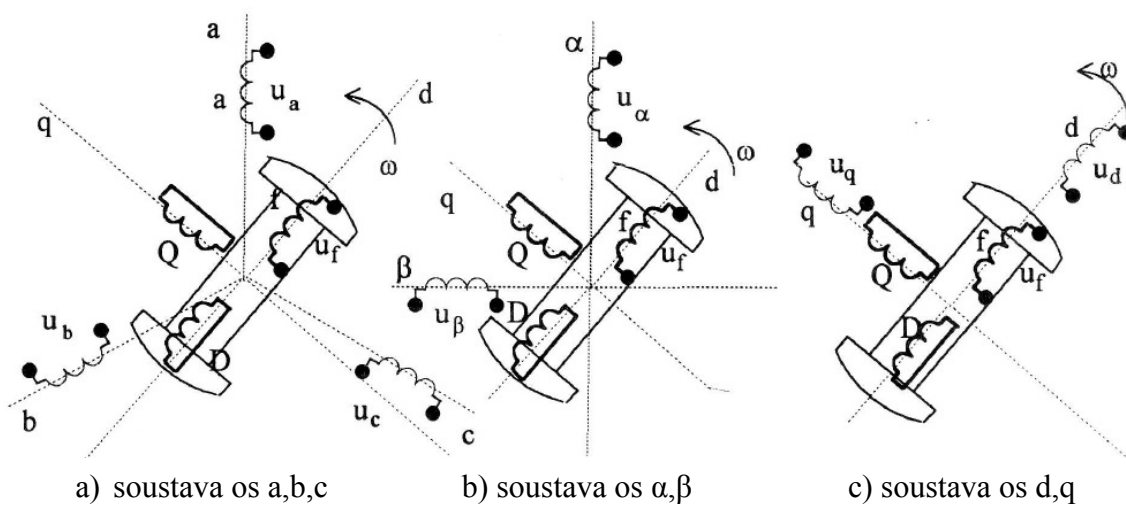
Dosadíme-li odvozené vztahy pro vlastní a vzájemné indukčnosti do rovnic spřažených magnetických toků, dostaneme soustavu rovnic s periodickými časově proměnnými koeficienty, kterou můžeme přehledněji psát v maticové formě rovnice (2.2.43). Tuto soustavu a její řešení lze zjednodušit lineární transformací proměnných, kterou se periodické koeficienty odstraní.

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{a0} + L_2 \cos 2\vartheta & -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{a0} + L_2 \cos 2(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos 2\vartheta \\ -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos 2\vartheta & L_{a0} + L_2 \cos 2(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ L_{afm} \cos \vartheta & L_{afm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{afm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ L_{aDm} \cos \vartheta & L_{aDm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ -L_{aQm} \sin \vartheta & -L_{aQm} \sin(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad (2.2.43)$$
$$\begin{bmatrix} L_{afm} \cos \vartheta & L_{aDm} \cos \vartheta & -L_{aQm} \sin \vartheta \\ L_{afm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) \\ L_{afm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Soustava rovnic je přehledně zobrazena v *Příloha A*.

## 2.3 Lineární transformace základních rovnic synchronního stroje

Nahradíme tři statorová vinutí  $a, b, c$  dvěma fiktivními na sebe kolnými vinutími  $\alpha, \beta$ . Výsledek této transformace jen na *Obrázek 2.6.b*) Při otáčejícím se rotoru se mění vzájemná poloha jednotlivých vinutí statoru vůči jednotlivým vinutím rotoru a proto se i periodicky mění jejich vzájemné indukčnosti. Proto nahradíme vůči statoru stojící vinutí  $\alpha, \beta$  jinými dvěma fiktivními vinutími  $d, q$ , která se otáčejí synchronně s točivým magnetickým polem stroje. Při synchronním chodu synchronního motoru se jeho rotor otáčí synchronně s magnetickým polem. Vzhledem k proměnnému magnetickému odporu podél vzduchové mezery položíme fiktivní cívky statoru do podélné osy  $d$  a příčné osy  $q$  rotoru na *Obrázek 2.6.c*). V podélné ose jsou vzájemně magneticky vázány tři vinutí  $d, f, D$  a v příčné ose dvě vinutí  $q, Q$ . Základní rovnice synchronního stroje a jejich řešení se podstatně zjednoduší odstraněním periodických koeficientů lineární transformací proudů, napětí a spřažených magnetických toků statoru. V teorii elektrických strojů se používá reálných i komplexních transformací proměnných.



Obrázek 2.6 Soustavy os pro matematický popis synchronního stroje

Nejprve bude uveden příklad transformaci os  $a, b, c$  do  $\alpha, \beta$  a následně pak do  $d, q$  v programu Matlab Simulink při použití konstant podle Parka  $k_d = k_q = 2/3$ . Dále se budeme podrobněji zabývat lineární transformací os  $a, b, c$  přímo do os  $d, q$ .



### 2.3.1 Transformace v programu Matlab Simulink

Jedná se o transformaci os  $a, b, c$  nejprve do os  $\alpha, \beta$  a následně pak do  $d, q$ .

Prostorový vektor okamžitých statorových proudů  $i_a, i_b, i_c$  je definován následovně:

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \left( i_a \bar{a}^0 + i_b \bar{a}^1 + i_c \bar{a}^2 \right) = \left| \bar{I} \right| e^{j\vartheta} \quad (2.3.1)$$

Velikost konstanty  $k=2/3$  je volena záměrně aby absolutní hodnota prostorového vektoru byla rovna amplitudě skutečného fázového proudu.

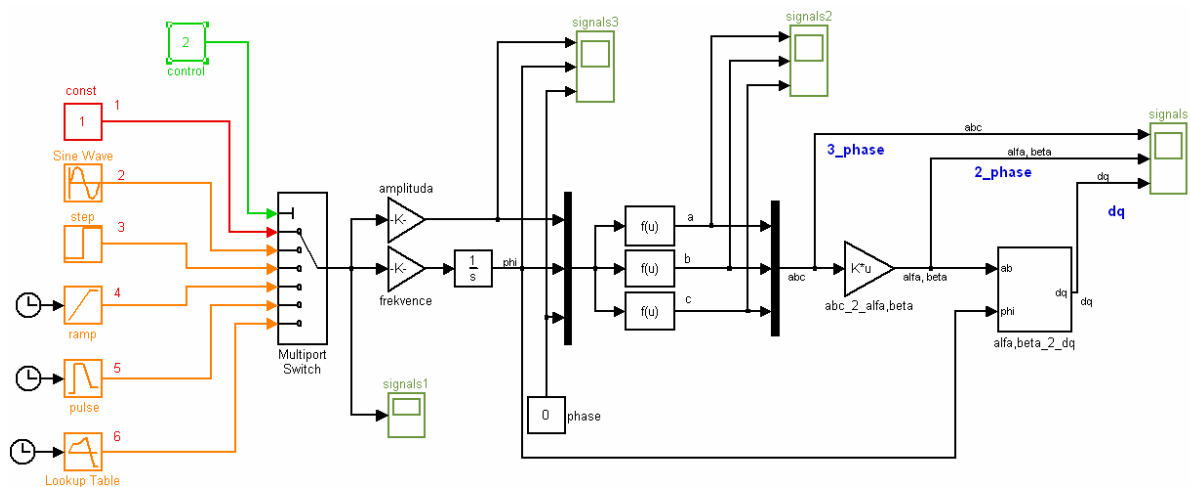
Souřadné osy komplexní roviny fixované se statorem budou označovány reálná  $\alpha$  a imaginární  $\beta$ . Pro vyjádření vztahů mezi fázovými hodnotami a složkami vektoru ve stacionární komplexní rovině, kde nebude uvažována tzv. nulová složka při splnění podmínky symetrie za předpokladu nepřipojení nulového vodiče motoru, lze použít Clarkova transformace:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

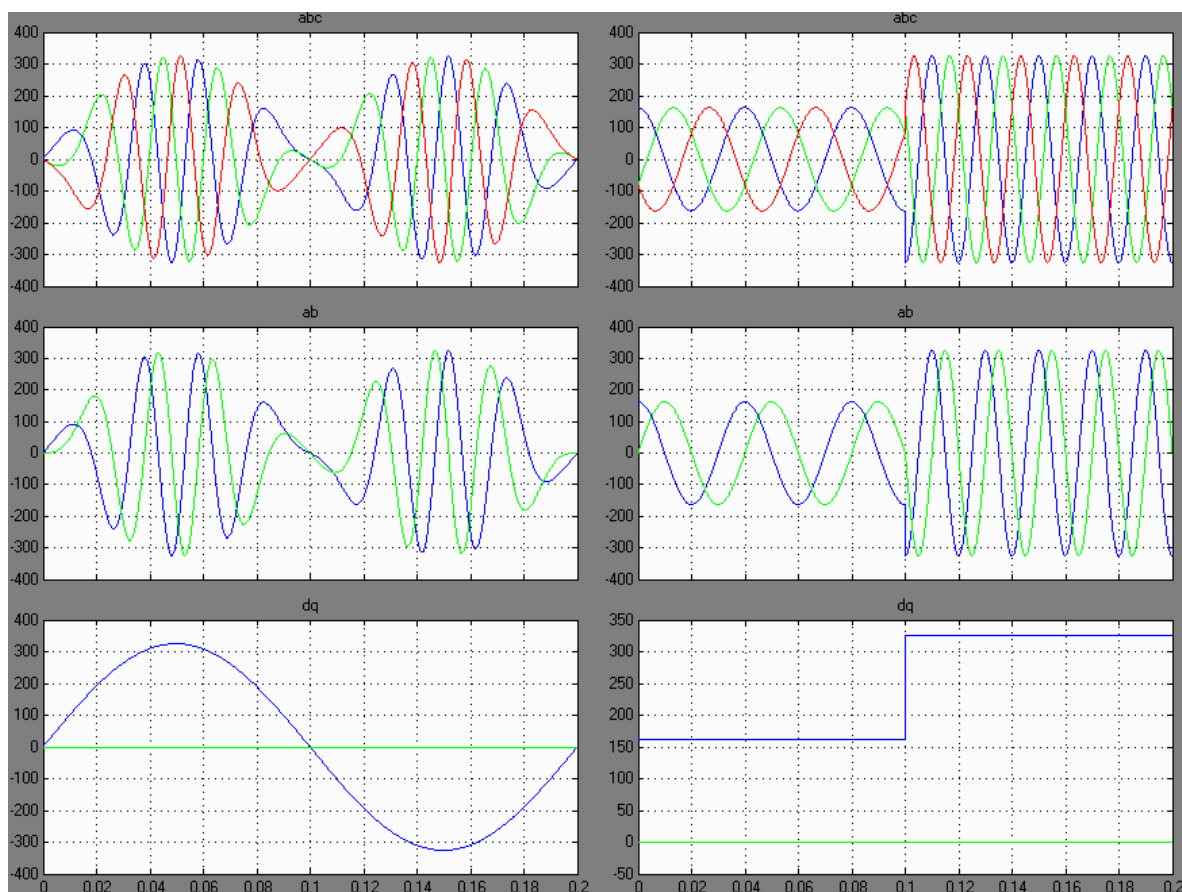
Při definování prostorového vektoru v dalších souřadnicích, které mají společný začátek a jsou svázané s rotorem stroje, jsou pak osy pojmenovány  $d, q$ . Pro tuto transformaci se používá název Parkova transformace.

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Následně jsou zobrazeny dva možné průběhy jednotlivých napětí.

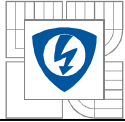


Obrázek 2.7 Blokové schéma transformace



Obrázek 2.8 Průběhy napětí

V Příloha B je uvedena transformace a zpětné transformace do všech souřadnic.



### 2.3.2 Lineární transformace

Základní rovnice synchronního stroje a jejich řešení se podstatně zjednoduší odstraněním periodických koeficientů lineární transformací proudů, napětí a spřažených magnetických toků statoru. V teorii elektrických strojů se používá reálných i komplexních transformací proměnných. Nejčastěji se používá lineární transformace  $d$ ,  $q$ ,  $0$  podle Parka. Označíme-li původní proměnné veličiny fází  $a$ ,  $b$ ,  $c$  statoru obecně  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  a nové transformované veličiny statoru  $x_d$ ,  $x_q$ ,  $x_0$  platí

$$x_d = k_d \cdot \left[ x_a \cdot \cos \vartheta + x_b \cdot \cos \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + x_c \cdot \cos \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] \quad (2.3.4)$$

$$x_q = -k_q \cdot \left[ x_a \cdot \sin \vartheta + x_b \cdot \sin \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + x_c \cdot \sin \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] \quad (2.3.5)$$

$$x_0 = +k_0 \cdot [x_a + x_b + x_c] \quad (2.3.6)$$

Resp.

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +k_d \cdot \cos \vartheta & +k_d \cdot \cos \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) & +k_d \cdot \cos \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \\ -k_q \cdot \sin \vartheta & -k_q \cdot \sin \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) & -k_q \cdot \sin \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \\ k_0 & k_0 & k_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$





Tato lineární transformace je jednoznačná, protože je nenulový determinant soustavy

(při  $k_d, k_q, k_0 \neq 0$ )

$$\det \begin{bmatrix} +k_d \cdot \cos \vartheta & +k_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & +k_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \\ -k_q \cdot \sin \vartheta & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \\ k_0 & k_0 & k_0 \end{bmatrix} = \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} &= + \left\{ [k_d \cdot \cos \vartheta] \cdot \left[ -k_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot k_0 \right\} + \left\{ [-k_q \cdot \sin \vartheta] \cdot k_0 \cdot \left[ k_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \right\} + \\ &+ \left\{ k_0 \cdot \left[ k_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot \left[ -k_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \right\} - \left\{ \left[ k_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot \left[ -k_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot k_0 \right\} - \\ &- \left\{ \left[ -k_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot k_0 \cdot \left[ +k_d \cdot \cos \vartheta \right] \right\} - \left\{ k_0 \cdot \left[ +k_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right] \cdot \left[ -k_q \cdot \sin \vartheta \right] \right\} = \\ &= k_d \cdot k_q \cdot k_0 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Transformační činitele  $k_d, k_q, k_0$  se mohou volit libovolně (kromě nulové hodnoty),

$$k_d = k_q = k_0 = 0 \quad (2.3.9)$$

dokonce různě pro transformaci napětí, proudů a magnetických toků. Takové rozdílné volby nepřinášejí žádné výhody, a proto budeme v dále uvažovat stejné transformační činitele pro napětí, proudy a magnetické toky, tj.

$$k_{du} = k_{di} = k_{d\phi} = k_d \neq 0 \quad (2.3.10)$$

$$k_{qu} = k_{qi} = k_{q\phi} = k_q \neq 0 \quad (2.3.11)$$

$$k_{0u} = k_{0i} = k_{0\phi} = k_0 \neq 0 \quad (2.3.12)$$

Fyzikálně je možno si veličinu  $x_d$  představit jako průmět velikostí okamžitých veličin  $x_a, x_b, x_c$  do osy  $d$ , která je osou rotoru (budícího vinutí  $f$ ) a která se otáčí rychlostí rotoru. Veličinu  $x_q$  můžeme představit jako průmět velikostí okamžitých veličin  $x_a, x_b, x_c$  do osy  $q$ , která je natočena ve smyslu točení o  $\pi/2$  před osu  $d$  a která se otáčí rychlostí rotoru. Znaménko minus v druhém řádku transformační matice odpovídá ose  $q$ , předbíhající ve smyslu točení o  $\pi/2$  osu  $d$ .



Inverzní transformace se může určit tak, že rovnici (2.3.4) násobíme  $\cos(\vartheta)/k_d$ , a sečteme ji s rovnici (2.3.5) násobenou  $-\sin(\vartheta)/k_q$ . Takto dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_d} \cdot x_d \cdot \cos \vartheta - \frac{1}{k_q} \cdot x_q \cdot \sin \vartheta = x_a \cdot \cos^2 \vartheta + x_b \cdot \cos \vartheta \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + x_c \cdot \cos \vartheta \cdot \\ \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + x_a \cdot \sin^2 \vartheta + x_b \cdot \sin \vartheta \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + x_c \cdot \sin \vartheta \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Odtud po úpravě při použití vztahu (2.3.6) plyne

$$x_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot x_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot x_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot x_0 \quad (2.3.14)$$

Podobně platí

$$x_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot x_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot x_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot x_0 \quad (2.3.15)$$

a

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot x_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot x_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot x_0 \quad (2.3.16)$$

Resp.

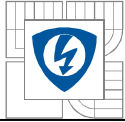
$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{k_d} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \vartheta & -\frac{1}{k_d} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin \vartheta & +\frac{1}{k_0} \cdot \frac{1}{3} \\ +\frac{1}{k_d} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -\frac{1}{k_q} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & +\frac{1}{k_0} \cdot \frac{1}{3} \\ +\frac{1}{k_d} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -\frac{1}{k_q} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & +\frac{1}{k_0} \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

Činitele  $k_d, k_q, k_0$  volí různí autoři různě.

Např. Park zvolil

$$k_d = k_q = \frac{2}{3} \quad (2.3.18)$$

$$k_0 = \frac{1}{3} \quad (2.3.19)$$



čímž se zjednoduší vztahy(2.3.14) až (2.3.16):

$$x_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_d \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot x_0 = x_d \cdot \cos \vartheta - x_q \cdot \sin \vartheta + x_0 \quad (2.3.20)$$

$$x_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot x_0 = x_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - x_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + x_0 \quad (2.3.21)$$

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot x_0 = x_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) - x_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + x_0 \quad (2.3.22)$$

Resp.

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 1 \\ \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & 1 \\ \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -\sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (2.3.23)$$

Pro splnění podmínky tzv. invariantnosti výkonů musí platit rovnost

$$\begin{bmatrix} +\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \cos \vartheta & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \sin \vartheta & \frac{1}{3 \cdot k_0} \\ +\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & \frac{1}{3 \cdot k_0} \\ +\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & \frac{1}{3 \cdot k_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +k_d \cdot \cos \vartheta & -k_q \cdot \sin \vartheta & k_0 \\ +k_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & k_0 \\ +k_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & k_0 \end{bmatrix} \quad (2.3.24)$$



Tato rovnost bude splněna pro

$$k_d^2 = k_q^2 = \frac{2}{3} \quad (2.3.25)$$

$$k_0^2 = \frac{1}{3} \quad (2.3.26)$$

tedy např. pro

$$k_d = k_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.3.27)$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (2.3.28)$$

Tato volba transformačních činitelů má výhodu v tom, že vzájemné indukčnosti vinutí jsou pro transformované veličiny oboplně stejné.

$$M_{jk} = M_{kj} \quad (2.3.29)$$

Použitím transformace  $d, q, 0$  definované rovnicemi (2.3.4) až (2.3.6), resp. (2.3.14) až (2.3.16), odvodíme nyní transformované rovnice synchronního stroje.



### 2.3.3 Lineární transformace napěťových rovnic

Lineární transformace napěťových rovnic statoru se jednoduše odvodí tímto postupem:

Vyjdeme z rovnice spřaženého magnetického toku fáze  $a$ , který je dán vztahem obdobným rovnici (2.3.14)

$$\psi_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \psi_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \psi_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot \psi_0 \quad (2.3.30)$$

Tento vztah zderivujeme podle času

$$\vartheta = \omega \cdot t + \vartheta_0 \quad (2.3.31)$$

a dostaneme

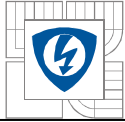
$$\begin{aligned} \frac{d\psi_a}{dt} = & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \cos \vartheta \frac{d\psi_d}{dt} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \omega \cdot \psi_d \cdot \sin \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \sin \vartheta \frac{d\psi_q}{dt} - \\ & - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \omega \cdot \psi_q \cdot \cos \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \frac{d\psi_0}{dt} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Z první rovnice soustavy (2.2.3) vyjádříme  $d\psi_a$  a  $dt$

$$\frac{d\psi_a}{dt} = u_a - R \cdot i_a \quad (2.3.33)$$

A dosadíme za  $u_a, i_a$  transformované veličiny podle (2.3.14)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_a}{dt} = & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot u_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot u_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot u_0 - \\ & - R \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot i_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot i_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot i_0 \right) \end{aligned} \quad (2.3.34)$$



Rovnice (2.3.32) a (2.3.34) se sobě rovnají, jsou-li koeficienty u stejných trigonometrických funkcí stejné, tj.

$$\left[ \begin{aligned} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot \cos \vartheta \frac{d\psi_d}{dt} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \omega \cdot \psi_q \cdot \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} - \\ & - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot \sin \vartheta \frac{d\psi_q}{dt} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \omega \cdot \psi_q \cdot \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \frac{d\psi_0}{dt} \end{aligned} \right] = \quad (2.3.35)$$
$$= \left[ \begin{aligned} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot u_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot u_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot u_0 - \\ & - R \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d} \cdot i_d \cdot \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q} \cdot i_q \cdot \sin \vartheta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot i_0 \right) \end{aligned} \right]$$

Porovnáním koeficientů při  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  a členů bez trigonometrické funkce dostaneme při  $k_d = k_q$ :

$$u_d = R \cdot i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega \cdot \psi_q \quad (2.3.36)$$

$$u_q = R \cdot i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega \cdot \psi_d \quad (2.3.37)$$

$$u_0 = R \cdot i_0 + \frac{d\psi_0}{dt} \quad (2.3.38)$$

Připojíme-li podle rovnic (2.2.6) až (2.2.8) napět'ové rovnice rotorových vinutí

$$u_f = R_f \cdot i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (2.3.39)$$

$$u_D = R_D \cdot i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \quad (2.3.40)$$

$$u_Q = R_Q \cdot i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \quad (2.3.41)$$

dostaneme soustavu rovnic pro napětí pro nové (transformované) statorové veličiny  $d$ ,  $q$ ,  $0$ .



### 2.3.4 Lineární transformace rovnic pro spřažené magnetické toky

Lineární transformace rovnic pro spřažené magnetické toky je obtížnější.

Pro spřažený magnetický tok budicího vinutí plyne z rovnice (2.2.43)

$$\psi_f = L_{afm} \cdot \left[ i_a \cdot \cos \vartheta + i_b \cdot \cos \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + i_c \cdot \cos \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D \quad (2.3.42)$$

Použitím transformačního vztahu (2.3.4) se tato rovnice zjednoduší na tvar

$$\psi_f = \frac{1}{k_d} L_{afm} \cdot i_d + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D \quad (2.3.43)$$

Obdobně se odvodí rovnice pro spřažený magnetický tok

$$\psi_D = \frac{1}{k_d} L_{aDm} \cdot i_d + L_{Df} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D \quad (2.3.44)$$

Pro spřažený magnetický tok vinutí  $Q$  plyne z rovnice (2.2.8)

$$\psi_Q = -L_{aQm} \cdot \left[ i_a \cdot \sin \vartheta + i_b \cdot \sin \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + i_c \cdot \sin \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.3.45)$$

Použitím transformačního vztahu (2.3.5) se tato rovnice zjednoduší na tvar

$$\psi_Q = \frac{1}{k_q} \cdot L_{aQm} \cdot i_q + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.3.46)$$

Rovnice pro spřažené magnetické toky statoru transformujeme tak, že do vztahu (2.3.4) dosadíme za  $\psi_a, \psi_b, \psi_c$  podle rovnic (2.2.19) až (2.2.21) a odvozené vlastní a vzájemné indukčnosti.

$$\psi_d = +k_d \cdot \left[ \psi_a \cdot \cos \vartheta + \psi_b \cdot \cos \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + \psi_c \cdot \cos \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] \quad (2.3.47)$$

$$\psi_q = -k_q \cdot \left[ \psi_a \cdot \sin \vartheta + \psi_b \cdot \sin \left( \vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) + \psi_c \cdot \cos \left( \vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right] \quad (2.3.48)$$

$$\psi_0 = +k_0 \cdot [\psi_a + \psi_b + \psi_c] \quad (2.3.49)$$



Resp.

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +k_d \cdot \cos \vartheta & +k_d \cdot \cos\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & +k_d \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \\ -k_q \cdot \sin \vartheta & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) & -k_q \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \\ k_0 & k_0 & k_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.3.50)$$

Po algebraických úpravách nakonec dostaneme

$$\psi_d = L_d \cdot i_d + \frac{3}{2} k_d \cdot L_{afm} \cdot i_f + \frac{3}{2} \cdot k_d \cdot L_{aDm} \cdot i_D \quad (2.3.51)$$

kde

$$L_d = L_{a0} + L_{ab0} + \frac{3}{2} \cdot L_2 \quad (2.3.52)$$

je podélná synchronní indukčnost.

Obdobně se odvodí rovnice

$$\psi_q = L_q \cdot i_q + \frac{3}{2} \cdot k_q \cdot L_{aQm} \cdot i_Q \quad (2.3.53)$$

kde

$$L_q = L_{a0} + L_{ab0} - \frac{3}{2} \cdot L_2 \quad (2.3.54)$$

je příčná synchronní indukčnost

$$\psi_0 = L_0 \cdot i_0 \quad (2.3.55)$$

kde

$$L_0 = L_{a0} = 2 \cdot L_{ab0} \quad (2.3.56)$$

je netočivá indukčnost.





Odvozené rovnice pro spřažené magnetické toky se zjednoduší, budou-li odpovídající vzájemné indukčnosti v rovnicích (2.3.43), (2.3.44) a (2.3.51) stejné, tedy

$$\frac{1}{k_d} \cdot L_{afm} = \frac{3}{2} \cdot k_d \cdot L_{afm} \quad (2.3.57)$$

$$\frac{1}{k_d} \cdot L_{aDm} = \frac{3}{2} \cdot k_d \cdot L_{aDm} \quad (2.3.58)$$

Podobně mají být stejné vzájemné indukčnosti v rovnicích (2.3.46) a (2.3.53)

$$\frac{1}{k_q} \cdot L_{aQm} = \frac{3}{2} \cdot k_q \cdot L_{aQm} \quad (2.3.59)$$

Z těchto rovnic plyne podmínka pro volbu transformačních činitelů

$$k_d = k_q = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.3.60)$$

Zavedeme-li nové značení

$$L_{df} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L_{afm} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{afm} = L_{fd} \quad (2.3.61)$$

$$L_{dD} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{aDm} = L_{Dd} \quad (2.3.62)$$

$$L_{qQ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{aQm} = L_{Qq} \quad (2.3.63)$$



budou mít rovnice pro sprážené magnetické toky (2.3.43), (2.3.44), (2.3.51)(2.3.46), (2.3.51), (2.3.53), (2.3.55) tvar

$$\psi_d = L_d \cdot i_d + L_{df} \cdot i_f + L_{dD} \cdot i_D \quad (2.3.64)$$

$$\psi_q = L_q \cdot i_q + L_{qQ} \cdot i_Q \quad (2.3.65)$$

$$\psi_0 = L_0 \cdot i_0 \quad (2.3.66)$$

$$\psi_f = L_{fd} \cdot i_d + L_{ff} \cdot i_f + L_{fD} \cdot i_D \quad (2.3.67)$$

$$\psi_D = L_{Dd} \cdot i_d + L_{Df} \cdot i_f + L_{DD} \cdot i_D \quad (2.3.68)$$

$$\psi_Q = L_{Qd} \cdot i_q + L_{QQ} \cdot i_Q \quad (2.3.69)$$

V tomto oddíle jsme odvodili šest napěťových rovnic, (2.2.3) až (2.2.8), a šest rovnic pro sprážené magnetické toky, (2.3.64) až (2.3.69) V těchto dvanácti rovnicích je při šesti zadaných svorkových napětích celkem třináct neznámých proměnných, a to šest proudů, šest sprážených magnetických toků a úhlová rychlost.

### 2.3.5 Výkon a moment synchronního stroje

Okamžitý elektrický výkon trojfázového systému  $a, b, c$  je

$$p = u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c \quad (2.3.70)$$

Dosadíme-li za okamžité hodnoty napětí a proudů  $a, b, c$  podle transformačních rovnic (2.3.14) až (2.3.16), dostaneme po úpravě

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d^2} \cdot u_d \cdot i_d + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q^2} \cdot u_q \cdot i_q + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0^2} \cdot u_0 \cdot i_0 \quad (2.3.71)$$

Použitím vztahu (2.3.27) a (2.3.28)

$$k_d = k_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad k_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$



dostaneme pro okamžitý výkon v systému  $d, q, 0$ .

$$p = u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q + u_0 \cdot i_0 \quad (2.3.72)$$

Uvedená volba transformačních činitelů a vztah pro výkon ve tvaru (2.3.72) bez činitelů odpovídá tzv. principu invariantnosti výkonů při lineární transformaci proměnných. Při jiné volbě transformačních činitelů, např. podle Parka, bychom dostali výkon v kterém uvedený princip invariantnosti výkonů není splněn.

Moment synchronního stroje můžeme odvodit z energetické bilance. Elektrický příkon (motoru) je při transformovaných veličinách statoru dán vztahem

$$p = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k_d^2} \cdot u_d \cdot i_d + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k_q^2} \cdot q u_q \cdot i_q + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0^2} \cdot u_0 \cdot i_0 + u_f \cdot i_f + u_D \cdot i_D + u_Q \cdot i_Q \quad (2.3.73)$$

Vnitřní výkon je dán rotačními napětími, která jsou jen v napěťových rovnicích vinutí  $d, q$ . Z rovnice (2.3.71) po dosazením za  $u_d, u_q, u_0$ , podle (2.3.36) až (2.3.38) dostaneme pro vnitřní moment

$$p = \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d^2} i_d \frac{d\Psi_d}{dt} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q^2} i_q \frac{d\Psi_q}{dt} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0^2} i_0 \frac{d\Psi_0}{dt} \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d^2} R i_d^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_q^2} R i_q^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k_0^2} R i_0^2 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d k_q} \omega (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{dW_m}{dt} + \Delta p_j + p_i \quad (2.3.74)$$

První člen je časová změna magnetické energie, druhý člen odpovídá okamžitým Joulovým ztrátám a třetí člen je vnitřní výkon, takže pro moment synchronního stroje platí vztah

$$m_i = \frac{p_i}{\omega_m} = p_p \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_d \cdot k_q} \cdot (\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d) \quad (2.3.75)$$

Při volbě transformačních činitelů podle rovnice (2.3.27) dostaneme

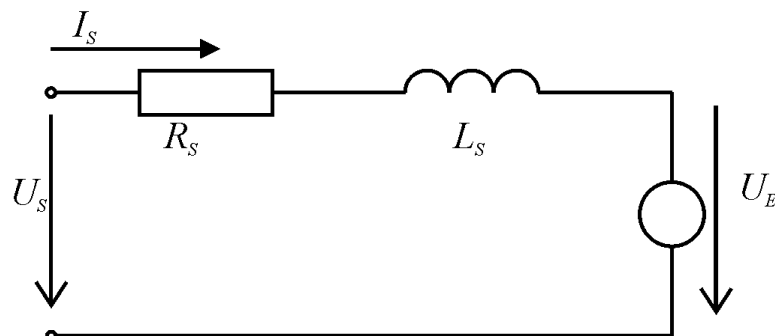
$$m_i = p_p \cdot (\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d) \quad (2.3.76)$$

Kde vnitřní moment je úměrný efektivní hodnotě resp. amplitudě fázových proudů.  $M_i$  je vnitřní moment,  $p_p$  je počet pólpárů stroje,  $\Psi_d$  a  $\Psi_q$  jsou složky prostorového vektoru magnetického toku.

Skutečné statorové veličiny  $a, b, c$  se pomocí lineární transformace nahradí veličinami  $d, q, 0$ . Řešení provozních stavů synchronního stroje při použití veličin  $d, q, 0$  je jednodušší (odpadají periodické činitele).

## 2.4 Matematický model synchronního motoru s PM

Na *Obrázek 2.9* je znázorněno náhradní elektrické schéma synchronního elektromotoru s permanentními magnety. Jedná se o schéma jedné fáze, kde  $R_s$  značí odpor jedné fáze statorového vinutí,  $L_s$  je indukčnost statorového vinutí. Otáčením rotoru, jehož permanentní magnety tvoří magnetické pole s magnetickým tokem  $\Psi_m$ , se ve statoru indukuje elektrické napětí  $U_E$ , opačného smyslu než napájecí napětí  $U_S$ .



*Obrázek 2.9* Náhradní elektrické schéma synchronního elektromotoru s permanentními magnety v rotoru

Za předpokladu, že stator je napájen třífázovým harmonickým napětím a že všechna tři statorová vinutí jsou symetrická a při sinusovém rozložení indukce podél vzduchové mezery a konstanty  $k_d=k_q=2/3$ , je matematický model synchronního motoru s permanentními magnety dán rovnicemi :

$$u_d = R_s i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \omega \Psi_q \quad (2.4.1)$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \omega \Psi_d \quad (2.4.2)$$

$$\Psi_d = L_d i_d + \Psi_m \quad (2.4.3)$$

$$\Psi_q = L_q i_q \quad (2.4.4)$$

Momentová rovnice

$$M = \frac{3}{2} p_p (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{3}{2} p_p (L_d i_d i_q + \Psi_m i_q - L_q i_q i_d) \quad (2.4.5)$$

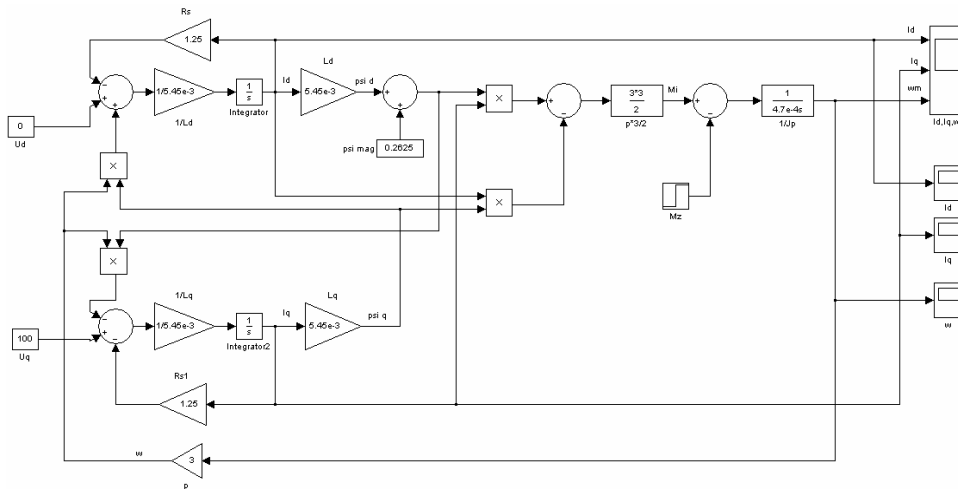
Protože je rotor hladký platí  $L_d=L_q=L_s$

$$M = \frac{3}{2} p_p \Psi_m i_q = \frac{3}{2} p_p \Psi_m |i_s| \sin \delta \quad (2.4.6)$$

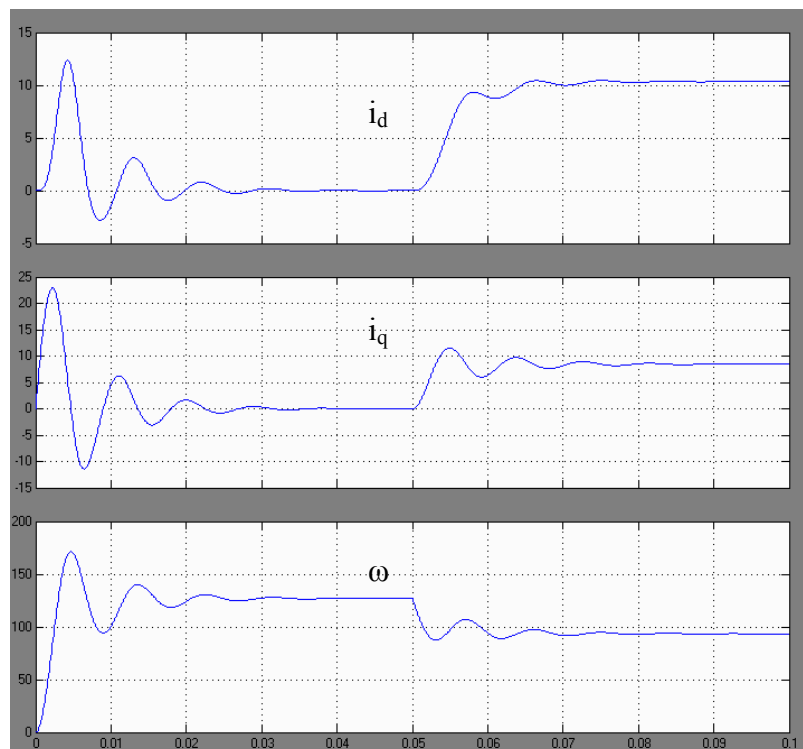
Pohybová rovnice

$$m_i = J \frac{d\omega_m}{dt} + m_m \quad (2.4.7)$$

Na základě rovnic můžeme sestavit model synchronního motoru s permanentními magnety v programu Matlab-Simulink. V Příloha C je vložen zvětšený obrázek model PMSM.



Obrázek 2.10 Blokové schéma SMPM v Matlab Simulink



Obrázek 2.11 Průběh proudů a otáček PMSM



### 3 NÁVRH REGULAČNÍCH STRUKTUR

Servopohon se synchronním motorem, buzeným permanentními magnety na rotoru, sestává z motoru, opatřeného snímačem polohy rotoru, jehož statorové třífázové vinutí je napájeno proměnným kmitočtem a napětím z napěťového měniče kmitočtu pomocí tří regulátorů statorových proudů  $R_{is}$ . Synchronní motor potřebuje trvalou informaci o poloze rotoru. Nejpoužívanějším snímačem polohy rotoru je resolver. Snímač polohy rotoru lze pochopitelně využít i pro polohovou zpětnou vazbu při polohovém řízení servopohonu.

Pro sestavování regulační struktury vyjdeme z předpokladu že motor řídíme na maximální moment, takže d-složka statorového proudu je regulována na nulu. Dalším předpokladem je že motor stojí, tedy  $\omega_m = 0$ .

#### 3.1 Regulace proudu

Pro proudovou smyčku použijeme napěťovou rovnici  $q$  osy.

$$u_q = R_S i_q + L_S \frac{di_q}{dt} + \omega(L_S i_d + \Psi_m) \quad (3.1.1)$$

$$i_d = 0; \omega_{\text{mech}} = 0;$$

$$u_q = R_S i_q + L_S \frac{di_q}{dt} \quad (3.1.2)$$

$$u_q = R_S i_q + p L_S i_q \quad (3.1.3)$$

$$u_q = R_S i_q \left( 1 + p \frac{L_S}{R_S} \right) \quad (3.1.4)$$

$$\tau_s = \frac{L_S}{R_S} = \frac{5,45 \cdot 10^{-3}}{1,25} = 0,00436s \quad (3.1.5)$$

$$u_q = R_S i_q (1 + p \tau_s) \quad (3.1.6)$$

$$F(p) = \frac{i_s}{u_s} = \frac{1/R_S}{1 + p \tau_s} \quad (3.1.7)$$



Frekvenční měnič má spínací frekvenci  $f = 4 \text{ kHz}$ . Jeho náhradní časová konstanta je:

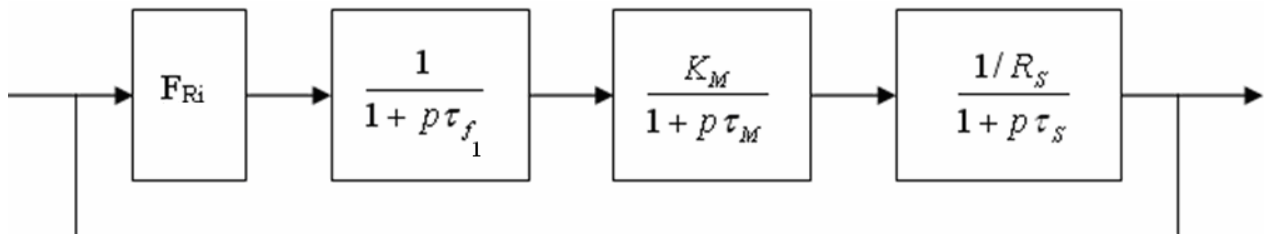
$$\tau_M = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2 \cdot 4000} = 0,000125s \quad (3.1.8)$$

$$F_{M(p)} = \frac{K_M}{1 + p\tau_M} \quad (3.1.9)$$

$$K_M = \frac{U_{VYST}}{U_{VST}} = \frac{600}{1} = 600 \quad (3.1.10)$$

Pro následnou realizaci řídicí struktury musíme brát v úvahu při návrhu i vzorkovač měniče 10kHz

$$\tau_{f1} = \frac{1}{f} = \frac{1}{10000} = 0,0001s \quad (3.1.11)$$



Obrázek 3.1 Blokové schéma regulační smyčky

Návrh regulátoru proudu metodou optimálního modulu:

Přenos soustavy

$$F_{S(p)} = \frac{K_M \cdot 1/R_S}{(1 + p\tau_s) \cdot (1 + p\tau_M) \cdot (1 + p\tau_f)}$$
$$\tau_\sigma = \tau_M + \tau_{f1} \quad (3.1.12)$$
$$F_{S(p)} = \frac{K_M \cdot 1/R_S}{(1 + p\tau_s) \cdot (1 + p\tau_\sigma)}$$

Na tento přenos budeme navrhovat proudový regulátor. Protože u proudové smyčky bychom neměli mít velký překmit z důvodu ochrany motoru, použijeme metodu optimálního modulu. Ten vykazuje překmit na jednotkový skok jen 4,3%. Pro regulátor metodou optimálního modulu platí:

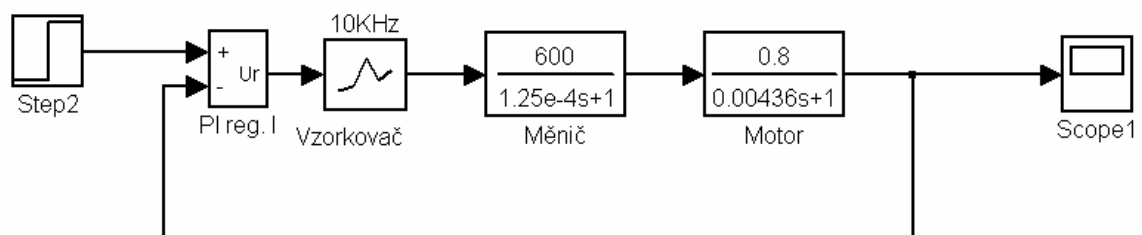
$$F_{Ri(p)} = \frac{1}{F_{s(p)}} \cdot \frac{1}{2p\tau_\sigma(1+p\tau_\sigma)} = \frac{(1+p\tau_s) \cdot (1+p\tau_\sigma)}{K_M \cdot 1/R_s} \cdot \frac{1}{2p\tau_\sigma(1+p\tau_\sigma)} = \frac{(1+p\tau_\sigma)}{2p\tau_\sigma K_M \cdot 1/R_s} =$$

$$= \frac{1+p0,00436}{2.1 \cdot 10^{-4} \cdot 1/1,25 \cdot 600p} = \frac{1+p0,00436}{p0,096} = \frac{1+p\tau_1}{p\tau_0} \quad (3.1.13)$$

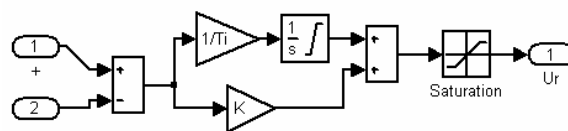
$$F_{oi(p)} = F_{Ri(p)} \cdot F_s(p) = \frac{1+p\tau_a}{K_u \cdot \frac{1}{R_a} \cdot K_i \cdot p2\tau_u} \cdot \frac{K_u \cdot 1/R_a \cdot K_i}{(1+p\tau_u) \cdot (1+p\tau_a)} = \frac{1}{2p\tau_\sigma(1+p\tau_\sigma)} \quad (3.1.14)$$

$$F_{wi} = \frac{F_{oi}}{1+F_{oi}} = \frac{\frac{1}{2p\tau_u(1+p\tau_u)}}{1+\frac{1}{2p\tau_u(1+p\tau_u)}} = \frac{\frac{1}{2p\tau_u(1+p\tau_u)}}{\frac{1+2p\tau_u(1+p\tau_u)}{2p\tau_u(1+p\tau_u)}} = \frac{1}{2p^2\tau_\sigma^2+2p\tau_\sigma+1} \quad (3.1.15)$$

Přenos uzavřené regulační smyčky podle optimálního modulu má standardní tvar

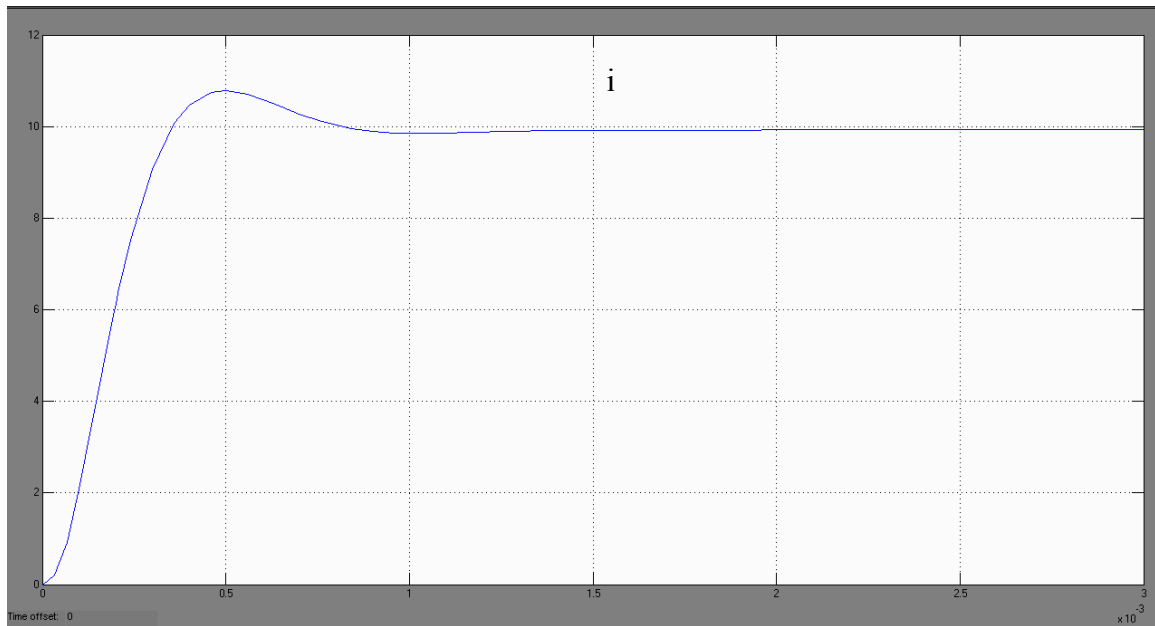


Obrázek 3.2 Blokové schéma regulace proudu



Obrázek 3.3 Blokové schéma regulátoru





Obrázek 3.4 Odezva regulátoru I na jednotkový skok

### 3.2 Regulace otáček

Nadřazenou smyčkou proudovým smyčkám je otáčková smyčka s regulátorem otáček typu PI, jehož návrh je shodný s návrhem regulátoru otáček stejnosměrného pohonu.

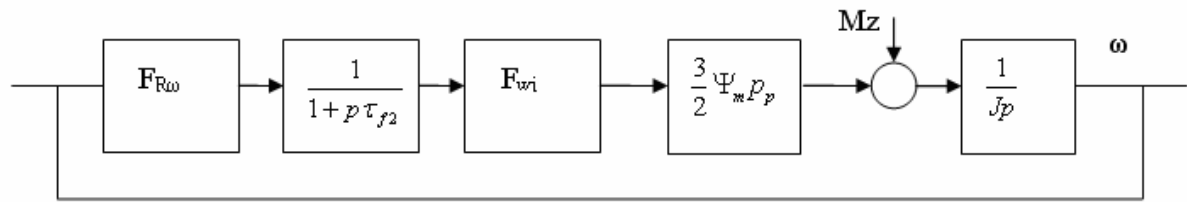
Vektorové řízení synchronního motoru je dáno podmínkou  $i_d = 0$ , za předpokladu, že nechceme odbuzovat podélnou složkou statorového proudu  $i_d$ . Pak je vektor statorového proudu kolmý na vektor magnetického toku, tj.  $\delta = 90^\circ$  a moment motoru je maximální.

$$\Psi_m = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M_N}{\frac{3}{2}\sqrt{2}I_N p_p \sin \delta} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6,8}{9\sqrt{2} \cdot 4,7 \cdot 3} = 0,2625 \text{ Wb} \quad (3.2.1)$$

Spřažený magnetický tok permanentních magnetů -  $\psi_m = 0,2625 \text{ Wb}$

Moment setrvačnosti rotoru -  $J = 4,7 \text{ kg.cm}^2 = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

Počet pólových dvojic -  $p_p = 3$



Obrázek 3.5 Blokové schéma regulace otáček

Dalším prvkem otáčkové smyčky je vzorkovač, které pracuje na vzorkovací frekvenci 1 kHz.

$$\tau_{f2} = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 0,001s \quad (3.2.2)$$

Přenos soustavy

$$F_{S(p)} = \frac{F_{wi(p)} \cdot \Psi_m \cdot 3/2 \cdot p_p \cdot 1/pJ}{(1 + p\tau_{f2})}$$

$$F_{wi(p)} = \frac{1}{2p^2\tau_\sigma^2 + 2p\tau_\sigma + 1} \cong \frac{1}{2p\tau_\sigma + 1}$$

$$F_{S(p)} = \frac{\Psi_m \cdot 3/2 \cdot p_p \cdot 1/pJ}{(1 + p\tau_{f2}) \cdot (1 + p\tau_\sigma)} \quad (3.2.3)$$

$$\tau_\Sigma = 2\tau_\sigma + \tau_{f2}$$

$$F_{S(p)} = \frac{\Psi_m \cdot 3/2 \cdot p_p \cdot 1/pJ}{(1 + p\tau_\Sigma)}$$

Regulátor navrhne metodou SO

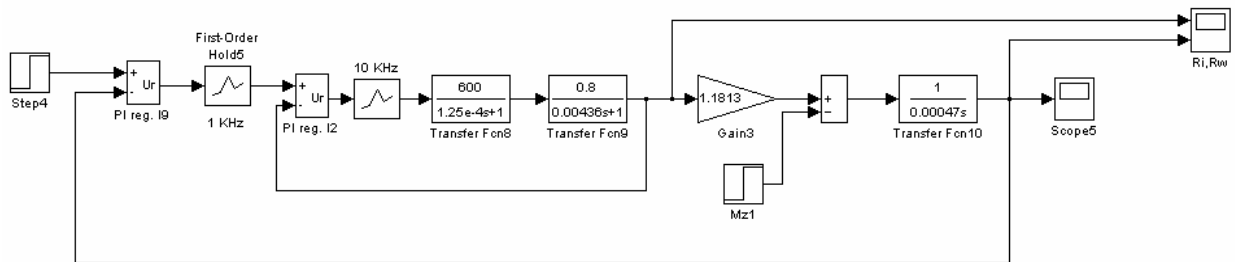
$$F_{R\omega}(p) = \frac{1}{F_S(p)} \cdot \frac{1 + 4p\tau_\sigma}{8p^2\tau_\sigma^2(1 + p\tau_\sigma)} = \frac{pJ \cdot (p\tau_\Sigma + 1)}{\Psi_m \cdot 3/2 \cdot p_p} \cdot \frac{1 + 4p\tau_\Sigma}{8p^2\tau_\Sigma^2(1 + p\tau_\Sigma)} =$$

$$= \frac{1 + p4 \cdot (2\tau_\sigma + \tau_{f2})}{p\Psi_m \cdot 3/2 \cdot p_p \cdot \frac{1}{J} \cdot 8 \cdot (2\tau_\sigma + \tau_{f2})^2} \quad (3.2.4)$$

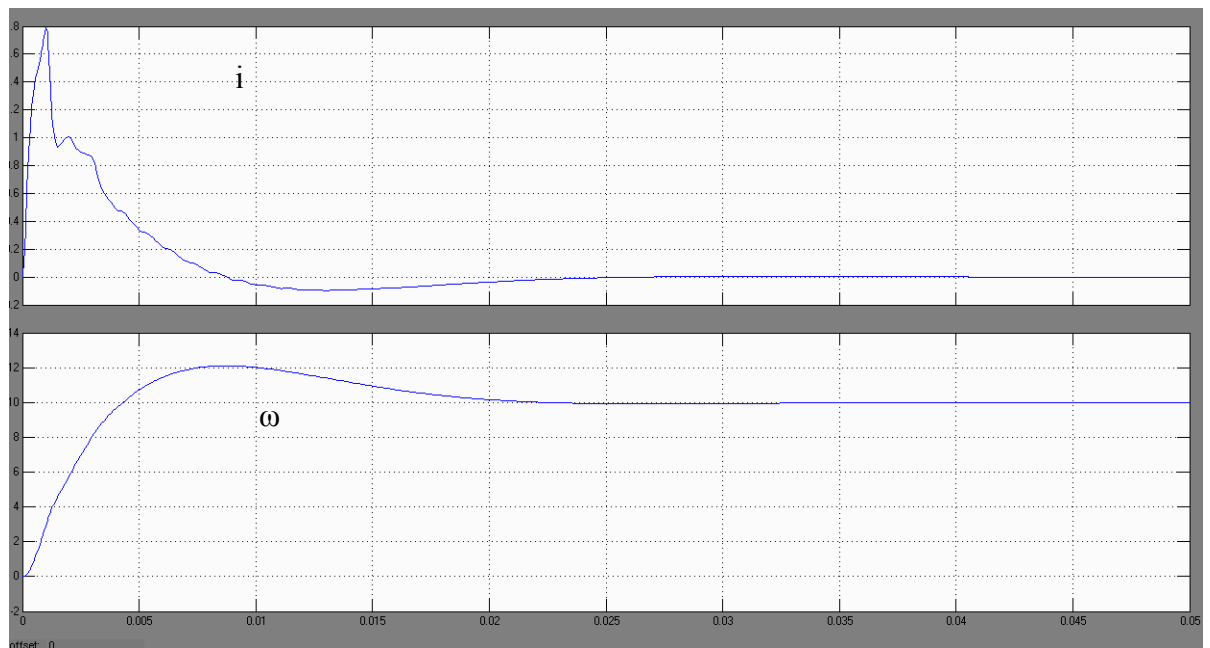
$$= \frac{1 + p4(2,2,25 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-3})}{p \cdot 0,2625 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{0,00047} \cdot 8 \cdot (2,2,25 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{1 + p5,8 \cdot 10^{-3}}{p0,02} = \frac{1 + p\tau_1}{p\tau_0}$$

$$F_{wi} = \frac{F_{oi}}{1 + F_{oi}} = \frac{1 + p4\tau_\sigma}{8p^3\tau_\sigma^3 + 8p^2\tau_\sigma^2 + 4p\tau_\sigma + 1} \quad (3.2.5)$$

Přenos uzavřené smyčky otáček podle symetrického optima má standardní tvar



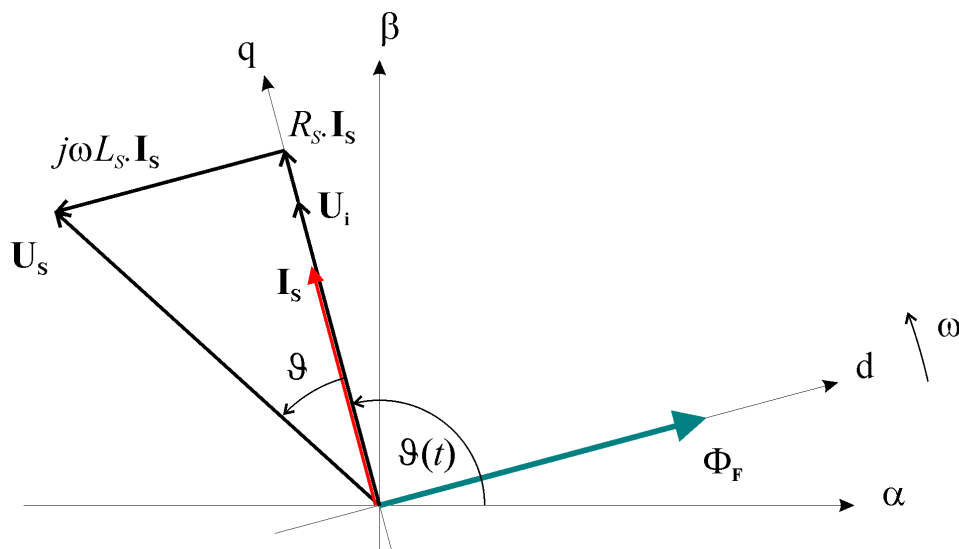
Obrázek 3.6 Blokové schéma regulačních smyček



Obrázek 3.7 Odezva regulatoru na jednotkový skok

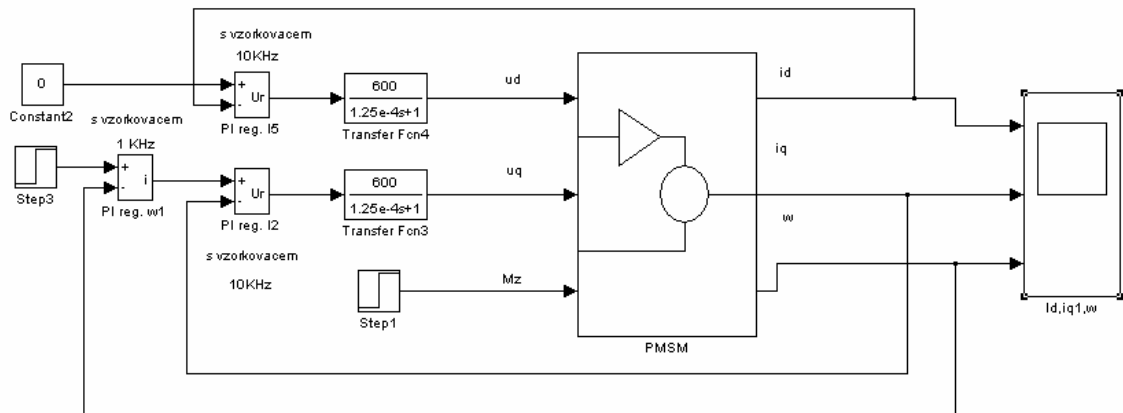
## 4 VEKTOROVÉ ŘÍZENÍ

Vektorové řízení synchronního motoru je dáno podmínkou  $i_d = 0$ , za předpokladu, že nechceme motor odbuzovat podélnou složkou statorového proudu  $i_d$ . Pak je vektor statorového proudu kolmý na vektor magnetického toku, t.j.  $\delta = 90^\circ$  a moment motoru je maximální. U motorů buzených permanentními magnety na rotoru je vektor magnetického toku totožný s polohou rotoru. Vektorové řízení synchronního motoru s permanentními magnety na rotoru je jednodušší, než vektorové řízení asynchronního motoru, neboť v tomto případě není nutno rekonstruovat polohu magnetického toku, která je shodná s polohou rotoru a stačí tedy měřit polohu rotoru. Tokotvorná (magnetizační) složka  $i_d$ , která budí ve stroji magnetický tok (ovlivňuje velikost magnetického toku) a momentotvorná  $i_q$ , vytváří spolu s magnetickým tokem moment.

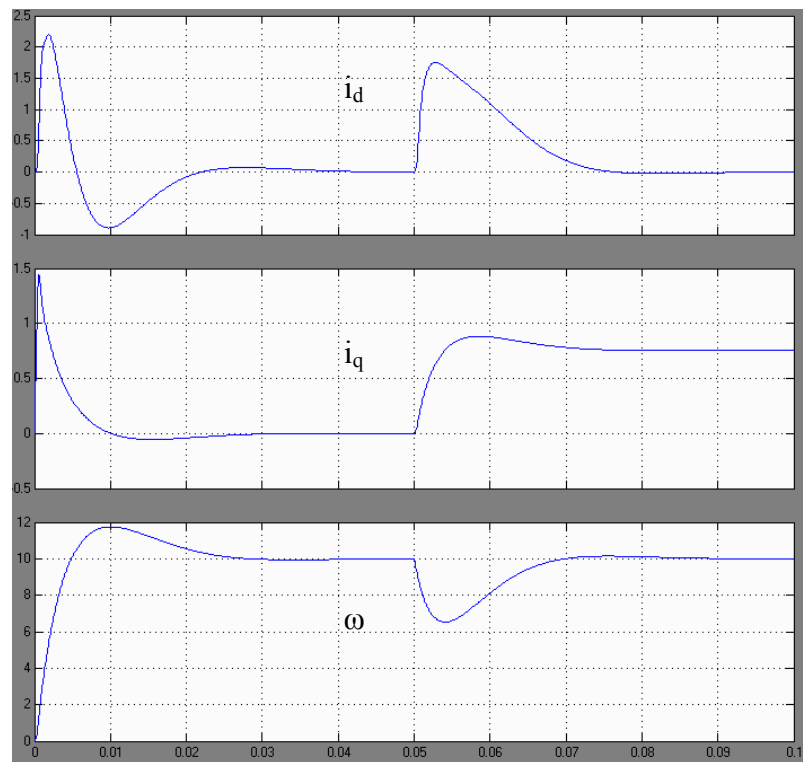


Obrázek 4.1 Polohy fázorů při vektorovém řízení PMSM

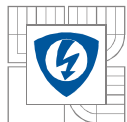
Jednotlivé regulátory mají konstanty nastaveny dle návrhu z předchozí kapitoly.



Obrázek 4.2 Blokové schéma vektorového řízení PMSM



Obrázek 4.3 Průběhy hodnot proudů a otáček vektorového řízení

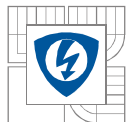


## 5 ZÁVĚR

V této práci byl odvozen matematický model synchronního motoru s permanentními magnety. Rovnice vyjádřené v rotorových souřadnicích jsou použity k simulaci. Matice indukčnosti, která popisuje vlastní i vzájemné indukčnosti statorového vinutí závisící na poloze rotoru. Proto byly rovnice motoru transformovány do nového souřadného systému synchronně rotujícího s rotorem. V tomto systému zůstává matice indukčnosti konstantní. Matematický model motoru vyjádřený v tomto novém souřadnicovém systému, nazývaném  $d, q, \theta$  - *souřadný systém*, který zjednoduší řešení matematického modelu. Avšak výsledné diferenciální rovnice jsou stále nelineární a vyžadují pro řešení použití počítače.

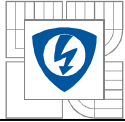
Pro servopohony se používá synchronních motorů buzených permanentními magnety na rotoru. Magnety mohou být umístěny na povrchu rotoru buď jako zapuštěné kdy je  $L_q$  větší než  $L_d$ . Nebo na povrchu rotoru, což představuje umístění ve vzduchové mezeře kdy  $L_q=L_d$ , výhodou je potlačení vlivu reakce statorového vinutí vlivem velké vzduchové mezery. Toto provedení je nejpoužívanější k dynamicky náročným aplikacím. Další možné provedení je uložení permanentních magnetů uvnitř rotoru. Tento konstrukční princip se používá zejména při použití feritových magnetů, neboť umožňuje koncentraci magnetického toku do vzduchové mezery. Synchronní motor vyžaduje sinusový tvar pole ve vzduchové mezeře, což je přibližně dosahováno dvoutřetinovým pólovým krytím

Při vektorovém řízení vytváří momentotvorná složka  $i_q$ , spolu s magnetickým tokem vnitřní moment motoru. K získání maximálního momentu, kdy je hlavní složka úměrná  $q$ -složce kotevního proudu, je výhodné řídit střídač pro napájení PMSM tak, že je podélná  $d$ -složka proudu udržována nulová ( $\delta=90^\circ$ ), dokud výstupní napětí střídače nedosáhne maximální hodnoty. V tomto bodě motor dosahuje maximální rychlosti. Nad touto hodnotou se moment motoru výrazně snižuje (odbuzování).



## LITERATURA

- [1] Skalický, J.: *Elektrické pohony*. VUT Brno, FEKT, Ústav výkonové elektroniky a elektroniky, 1996
- [2] Skalický, J.: *Elektrické regulované pohony*. VUT Brno, FEKT, Ústav výkonové elektroniky a elektroniky, 2007
- [3] Štěpánek, M.: *Diplomová práce. Elektrický servopohon se synchronním motorem*. VUT Brno, FEKT, Ústav výkonové elektroniky a elektroniky, 2003
- [4] Neborák, I.: *Modelování a simulace elektrických regulovaných pohonů*, Vysoká škola báňská, Technická univerzita Ostrava, 2002
- [5] Měřička, J., Zoubek, Z.: *Obecná teorie elektrického stroje*, Nakladatelství technické literatury, 1973
- [6] Pavelka, J., Čerovský, Z., Javůrek, J.: *Elektrické pohony*, ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, 1995
- [7] Neodymový magnet, Feritové magnety, Samarium. Dostupné z WWW:  
<http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Speci%C3%A1ln%C3%AD%3ASearch&search=magnety+ze+vz%C3%A1cn%C3%BDch+zemin>
- [8] Diblík, M.: *Elektrické pohony pro dynamicky náročné aplikace*, Technická univerzita v Liberci, Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií, 2006



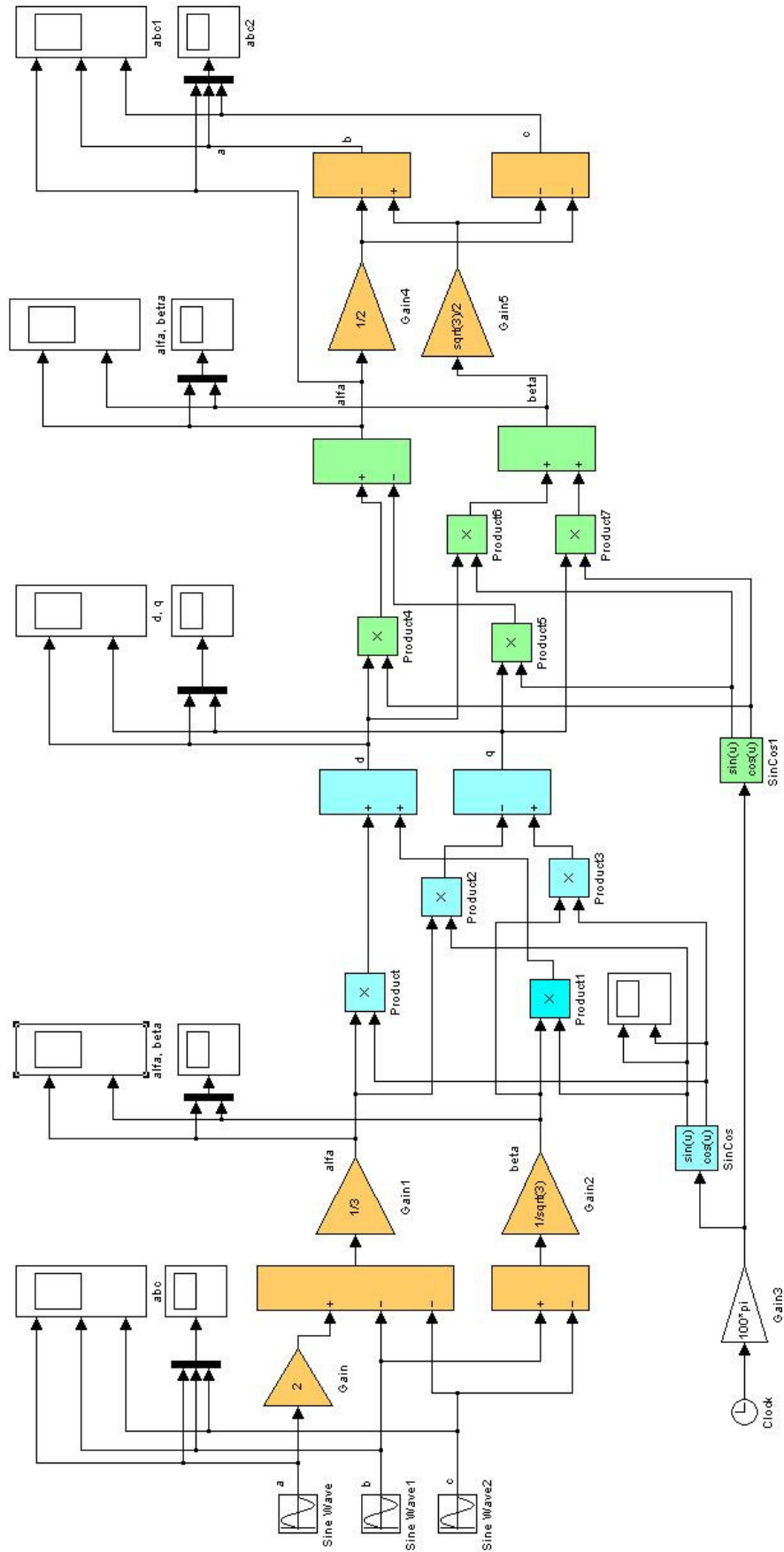
## PŘÍLOHA A

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{a0} + L_2 \cos 2\vartheta & -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{qfm} \cos \vartheta & L_{aDm} \cos \vartheta & -L_{aQm} \sin \vartheta \\ -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{a0} + L_2 \cos(2\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos 2\vartheta & L_{qfm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) \\ -L_{ab0} + L_2 \cos(2\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & -L_{ab0} + L_2 \cos 2\vartheta & L_{a0} + L_2 \cos(2\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{qfm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) \\ L_{qfm} \cos \vartheta & L_{qfm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{qfm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{aDm} \cos \vartheta & L_{aDm} \cos(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & L_{aDm} \cos(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ -L_{aQm} \sin \vartheta & -L_{aQm} \sin(\vartheta - \frac{2}{3}\pi) & -L_{aQm} \sin(\vartheta + \frac{2}{3}\pi) & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$





## PŘÍLOHA B





## PŘÍLOHA C

