UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Splajny v R^2

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedúci diplomovej práce: **RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**
Vypracovala: **Bc. Lenka Holúbková**
Študijný program: N1103 Aplikovaná matematika
Študijný obor: Aplikace matematiky v ekonomii
Forma štúdia: prezenčná
Rok odovzdania: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

Autor: Bc. Lenka Holúbková

Názov práce: Splajny v R^2

Typ práce: Diplomová práca

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúci práce: RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: Splajn predstavuje špeciálny typ funkcie, kedy lepíme dokopy polynómy nižšich stupňov, pričom sa snažíme dosiahnúť určitú hladkosť. Práca sa zaoberá B-splajnami, ich základnou teóriou a úlohou interpolácie v R^1, ktorú zovšeobecňuje aj do R^2. Teória je obohatená aj o príkazy z Matlabu, kde sa využíva predovšetkým Spline Toolbox. Práca sa zaoberá aj využitím B-splajnov v R^2 v metóde najmenších štvorcov.

Klúčové slová: splajn, B-splajn, bázový splajn, postupnosť uzlov, rozšírená sieť uzlov, interpolácia, body interpolácie, B-splajnové koeficienty, kronekerov súčin, tensorový súčin, metóda najmenších štvorcov.

Počet strán: 50

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Lenka Holúbková

Title: Splines in R^2

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

The year of presentation: 2018

Abstract: Spline is a special type of a function, when we bond together lower degree polynomials to reach certain smoothness. Thesis consists of B-spline and their basic theory in R^1, which is generalized also to R^2. Analysis is enriched with Matlab commands based mostly on Spline Toolbox. Thesis also deals with the B-spline in R^2 in least square splines method.

Key words: spline, B-spline, basis spline, sequence of knots, additional sequence of knots, interpolation, points of interpolaction, B-spline coefficients, kronecker product, tensor product, the least-squares method.

Number of pages: 50

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že som vypracovala diplomovú prácu samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Olomouci dňa ....

podpis

Obsah

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať všetkým, ktorí mi pomohli k úspešnemu dokončeniu diplomovej práce. Osobitne sa chcem poďakovať RNDr. Jitke Machálovej, Ph.D., ktorá ma viedla počas celej doby vypracovávania za jej ochotu, čas, trpezlivosť, usmerňovanie a priateľský prístup.

Použité symboly

Vo svojej prácu budem používať nasledujúce symboly a označenia:

$P_n(x)$........Polynóm stupňa n.

Π_k.............Množina polynómov stupňa k.

Π_l.............Množina polynómov stupňa l.

$s_k(x)$..........Splajn stupňa k.

$s_{k,l}(x, y)$.....Dvojrozmerný splajn.

$(\Delta\lambda)$..........Sieť uzlov.

t$(\Delta\mu)$.........Sieť uzlov.

$(\Delta\lambda+)$........Rozšírená sieť uzlov.

$(\Delta\mu+)$........Rozšírená sieť uzlov.

$S_{kd}(\Delta\lambda)$......Lineárny priestor splajnov na sieti uzlov.

dim............Dimenzia priestoru.

$B_{i,k+1}(x)$.....B-splajn stupňa k.

$M_{i,k+1}(x)$.....B-splajn stupňa k.

$N_{j,l+1}(y)$......B-splajn stupňa k.

$C^{k-1}[a, b]$.....Spojité derivácie až do rádu $k - 1$.

$C_{k+1}(\vec{x})$.......Kolokačná matica.

$D_{l+1}(\vec{y})$........Kolokačná matica.

$\otimes$................Kronekerov súčin.

$cs(A)$...........Matica A vo vektorovom tvare.

$w_{p,q}$.............Váhy v MNČ.

Úvod

„Každý problém v sebe skrýva príležitosť niečo dokázať”

(Albert Einstein)

Tento citát absolútne vystihuje moje myšlienky, keď som si vybrala tému svojej diplomovej práce. Dokázať pre mňa niečo nemožné. B-splajny v R^2. Pojem, z ktorého mi hovorí niečo len druhá časť názvu. Dostala som príležitosť vysvetliť problematiku, o ktorej som v školských laviciach počula len okrajovo.

Cieľom diplomovej práce je zoznámiť sa so základnou teóriou B-splajnov v R^2 a ukázať ich využitie v softvérovom programe Matlab. V prvej kapitole sa venujem B-splajnom v R^1, aby som čitateľa zoznámila zo základnými pojmami teórie ako sú splajn, B-splajn, sieť uzlov, rozšírená sieť uzlov, interpolácia, či body interpolácie. Na konci kapitoly sa zaoberám matematickým softvérom Matlab, v ktorom využívam Spline Toolbox a naprogramované funkcie na spracovávanie B-splajnov.

V druhej kapitole zovšeobecňujem teóriu, ktorú spracúvam v prvej kapitole a vysvetlím ju v R^2. Opäť sa budem zaoberať úlohou interpolácie, ktorú však teraz rozoberiem v dvojrozmernom priestore a navyše ukážem aj využitie metódy najmenších štvorcov. Zoznámim čitateľa s funkciami v programe Matlab, vysvetlím ako ich správne používať a aké sú ich výstupy.

Čitateľovi sa budem snažiť vysvetliť problematiku B-splajnov v R^2 čo najschodnejším spôsobom. Teória B-splajnov v R^2 nemá dodnes žiadne spracovanie v slovenskom, či českom jazyku. Preto chcem ako študent, ktorý má svoje vysokoškolské štúdium takmer za sebou, vytvoriť príručku pre budúce generácie študentov, ktoré by mali o danú problematiku záujem.

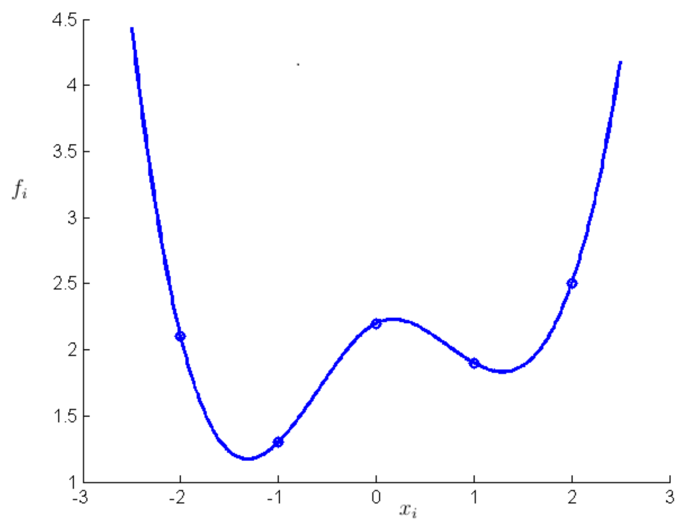
1. B-splajny v R^1

Vzhľadom na to, že niektoré funkcie majú komplikované explicitné vyjadrenie alebo poznáme hodnoty len v niektorých diskrétnych bodoch, je veľmi obtiažné s danými funkciami pracovať. Preto je vhodné nájsť jednoduchšiu funkciu a komplikovanú funkciu nahradiť jednoduchším tvarom. Poznáme mnoho spôsobov ako môžeme danú funkciu aproximovať. Záleží na podmienkach, ktoré potrebujeme, aby naša funkcia spĺňala. Jednou z možností je použitie **interpolácie**.

Nech je daných $n+1$ vzájomne rôznych bodov $x_0, x_1, ..., x_n$. Nazývame ich body interpolácie. Majme tiež daných $n+1$ funkčných hodnôt v týchto bodoch, čiže $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$. Pri interpolácií hľadáme takú funkciu $P_n(x)$, aby spĺňala **interpolačné podmienky:**

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, ..., n. \tag{1}$$

Pre zjednodušenie si môžeme funkčné hodnoty $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ označovať $f_0, f_1, ..., f_n$.



Obr.č. 1: Interpolácia polynómom $P_4(x)$.

Na obrázku číslo 1 vidíme polynóm štvrtého stupňa $P_4(x)$, ktorý interpoluje funkčné hodnoty v bodoch x_0, x_1, x_2, x_3 a x_4.

Využitie interpolácie polynómom je však vhodné iba v tom prípade, že máme menší počet dát. Akonáhle máme dát viac, môže sa stať, že nám naša funkcia bude nepríjemne oscilovať. V tomto prípade je vhodné použit tzv. **splajnovú interpoláciu** alebo **interpoláciu splajnom**, čiže lepíme dokopy aspoň dva polynómy, pričom pomocou zlepenia chceme dosiahnúť určitú hladkosť.

Nasledujúcu definíciu budeme čerpať z [2].

Definícia 1.1 Funkcia $s_k(x)$, ktorá je definovaná na konečnom intervale $[a, b]$ sa nazýva splajnová funkcia stupňa k (rádu $k+1$) s rastúcou postupnosťou uzlov $\lambda_j, j = 0, 1, ..., g+1; (\lambda_0 = a, \lambda_{g+1} = b)$, pokiaľ sú splnené nasledujúce podmienky:

- Na každom intervale uzlov $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ je $s_k(x)$ daný polynóm stupňa k, t.j.

$$s_k| \ [\lambda_j, \lambda_{j+1}] \in \Pi_k, j = 0, 1, ..., g, \tag{2}$$

  kde Π_k je množina polynómov stupňa k.

- Funkcia $s_k(x)$ a všetky jej derivácie až do rádu $k-1$ sú spojité na $[a, b]$, t.j.

$$s_k(x) \in C^{k-1}[a, b]. \tag{3}$$

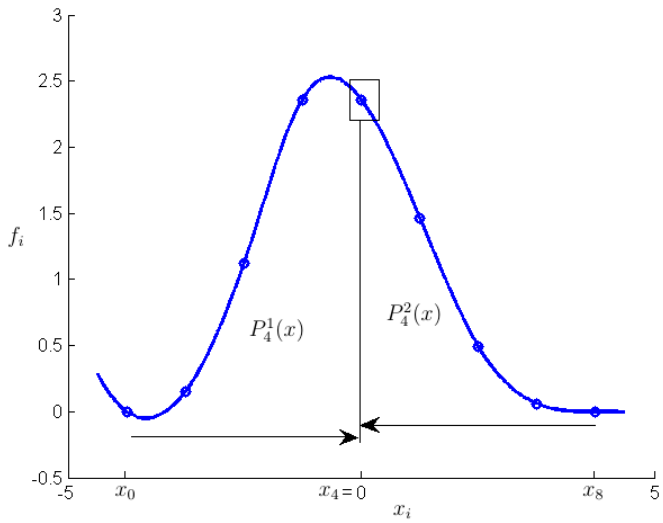
Vysvetlíme si to na nasledujúcej úlohe.

Úloha 1.1 Majme zadané body $x_0, x_1, ..., x_8$ a k nim ich funkčné hodnoty $f_0, f_1, ..., f_8$. V prípade interpolácie polynómom by nám vznikol polynóm až ôsmeho stupňa $P_8(x)$ a preto je lepšie použiť splajnovú interpoláciu a zlepiť dokopy napr. dva polynómy štvrtého stupňa $P_4^1(x)$ a $P_4^2(x)$ ako vidíme na obrázku číslo 2.

Polynómy $P_4^1(x)$ a $P_4^2(x)$ si vyjadríme pomocou vzťahov:

$$P_4^1(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$P_4^2(x) = fx^4 + gx^3 + hx^2 + ix + j,$$

pričom polynóm $P_4^1(x)$ je definovaný na intervale $\langle x_0, x_4 \rangle$ a polynóm $P_4^2(x)$ je definovaný na intervale $\langle x_4, x_8 \rangle$.



Obr.č. 2: Splajnová interpolácia

Musia platiť interpolačné podmienky (prvé dve nasledujúce podmienky) a taktiež podmienky, pomocou ktorých dosiahneme určitú hladkosť polynómu (chceme spojité derivácie až do rádu 3):

$$
\begin{aligned}
P_4^1(x_i) &= f_i \quad i = 0, 1, ..., 4, \\
P_4^2(x_i) &= f_i \quad i = 4, 5, ..., 8, \\
[P_4^1(x_4)]' &= [P_4^2(x_4)]', \\
[P_4^1(x_4)]'' &= [P_4^2(x_4)]'', \\
[P_4^1(x_4)]''' &= [P_4^2(x_4)]'''.
\end{aligned}
$$

Čiže môžeme napísať:

$$
s_k(x) = s_4(x) = \begin{cases} P_4^1(x) \; x \in \langle x_0, x_4 \rangle \\ P_4^2(x) \; x \in \langle x_4, x_8 \rangle \end{cases}
$$

Pri hľadaní takýchto splajnov je však veľmi nepraktické, že si musíme pamätať veľký počet koeficientov (v našej úlohe 1.1 sú to koeficienty $a, b, ..., h, i$) a potom riešiť príslušný počet rovníc. V prípade väčšieho počtu uzlov, či vyššieho stupňa splajnov dostávame veľmi rozsiahle sústavy lineárnych rovníc. Z tohoto dôvodu si zavedieme **B-splajnovú reprezentáciu**, ktorá bude pre nás vhodnejšia, pretože dané polynomické splajny budeme hľadať pomocou bázových splajnov. B-splajny nám umožňujú iný a zároveň jednoduchší spôsob zostrojenia polynomických splajnov.

Poznámka 1.1 Poďme si ešte ukázať ako vypočítame dimenziu lineáneho priestoru splajnov. Označme si symbolom $\mathrm{S}_{kd}(\Delta\lambda)$ lineárny priestor splajnov na sieti uzlov $(\Delta\lambda) = \{\lambda_i; i = 0, ..., g+1\}$. Číslo k predstavuje stupeň splajnu a číslo d defekt splajnu (násobnosť vnútorných uzlov). Prvky priestoru $\mathrm{S}_{kd}(\Delta\lambda)$, čiže splajny stupňa k s defektom d značíme $s_k(x)$. Dimenziu priestoru $\mathrm{S}_{kd}(\Delta\lambda)$ určíme pomocou vzťahu:

$$\dim \mathrm{S}_{kd}(\Delta\lambda) = (k+1)(g+1) - g(k-d+1) = k + gd + 1, \tag{4}$$

pričom $(k+1)(g+1)$ predstavuje počet neznámych koeficientov polynómu - máme $(k+1)$ koeficientov na $(g+1)$ intervaloch, ktoré nám určujú náš splajn $s_k(x)$. Ďalej číslo $g(k-d+1)$ nám vyjadruje, že v g vnútorných uzloch splajnu má byť splnených $(k-d+1)$ podmienok spojitosti (aby sme dosiahli požadovanú hladkosť v uzloch), čím dosiahneme to, že počet neznámych sa nám zmenší.

1.1. Vlastnosti B-splajnov v R^1

Vzhľadom na to, že v práci sa budeme zaoberať B-splajnami v R^2, je dobré uviesť si základné vlastnosti B-splajnov v R^1. V tejto časti budeme čerpať z [1].

Definícia 1.2 Nech $\Delta\lambda = \{\lambda_i; i = 0, ..., g+1\}$ je neklesajúca postupnosť uzlov splajnu. Ku každému uzlu λ_i, ktorý má na sieti vpravo $k+1$ susedných uzlov takých, že $\lambda_i < \lambda_{i+k+1}$, definujeme B-splajn $(k+1)$-ého rádu alebo stupňa k vzťahom

$$B_{i,k+1}(x) = (\lambda_{i+k+1} - \lambda_i)[\lambda_i, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_{i+k+1}](t-x)_+^k, \quad x \in R. \tag{5}$$

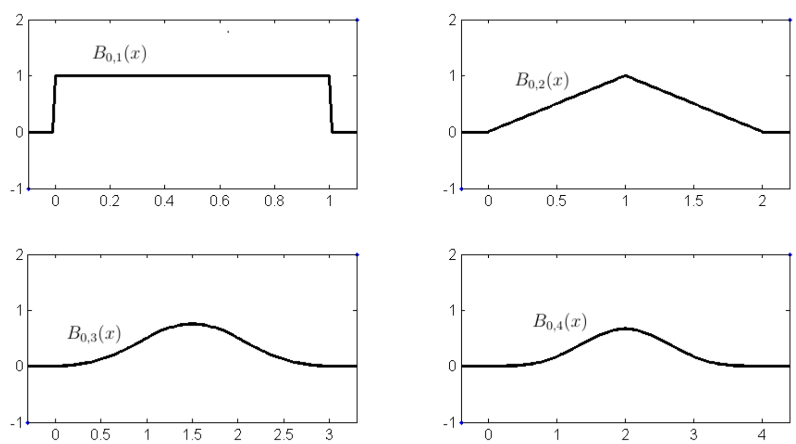
Poznámka 1.2 Vo vzťahu (5) sú použité pomerné diferencie funkcie (podrobnejšie v [1]). Funkcia $(t-x)_+^k$ je tiež známa ako kladná časť mocniny alebo tiež ako useknutá mocnica. Ide o funkciu argumentu t v závislosti na parametri x. Definujeme ju predpisom

$$(t-x)_+^k = \begin{cases} (t-x)^k & \text{pre} \quad t > x, \\ 0 & \text{pre} \quad t \leq x. \end{cases}$$

Dimenziu priestoru B-splajnov si odvodíme pomocou vzťahu (4), pričom defekt budeme uvažovať rovný jednej ($d = 1$). V B-splajnovej reprezentácií budeme označovať lineárny priestor splajnov na sieti uzlov $\Delta\lambda$ symbolom $\mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$. Čiže dimenzia priestoru B-splajnov bude:

$$\dim \mathrm{S}_k(\Delta\lambda) = g + k + 1. \tag{6}$$

Názvy B-splajnov sa zväčša odvodzujú od stupňa polynómu, pretože B-splajn je po častiach polynóm. Takže pojem konštantný B-splajn reprezentuje B-splajn $B_{i,1}(x)$, čiže B-splajn 0−tého stupňa. Pojem lineárny B-splajn reprezentuje B-splajn prvého stupňa $B_{i,2}(x)$, ďalej kvadratický B-splajn značí B-splajn druhého stupňa $B_{i,3}(x)$ a napríklad kubický B-splajn značí B-splajn tretieho stupňa $B_{i,4}(x)$. Rovnakým spôsobom môžeme odvodiť aj ostatné názvy B-splajnov vyšších stupňov. Na nasledujúcom obrázku číslo 3 vidíme príklady B-splajnov.



Obr.č. 3: B-splajny $B_{0,1}(x), B_{0,2}(x), B_{0,3}(x)$ a $B_{0,4}(x)$

Vzhľadom na to, že sme si vysvetlili definíciu B-splajnov, môžeme prejsť k ich vlastnostiam.

Pre označenie vlastnosti B-splajnov budeme používať mimoriadne označenie **V1 - V8**.

V1: $B_{i,k+1}(x)$ je na každom intervale $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ polynómom stupňa najviac k. Pre jednoduché uzly $\lambda_i < \lambda_{i+1} < ... < \lambda_{i+k+1}$ platí

$$B_{i,k+1}(x) \in C^{k-1}[\lambda_0, \lambda_{g+1}] \quad \text{t.j.} \quad B_{i,k+1}(x) \in \mathrm{S}_k(\Delta\lambda).$$

Poznámka 1.3 $B_{i,k+1}(x) \in C^{k-1}[\lambda_0, \lambda_{g+1}]$ znamená, že daný B-splajn má spojité derivácie až do rádu $k-1$ vzhľadom k premennej x. V druhej časti spomíname $B_{i,k+1}(x) \in \mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$, čo nám hovorí, že $B_{i,k+1}$ je splajn stupňa k (rádu $k+1$) s defektom 1, čo plynie z toho, že máme jednoduché uzly.

V2: Nosičom $B_{i,k+1}(x)$ je interval $[\lambda_i, \lambda_{i+k+1}]$, t.j.

$$B_{i,k+1}(x) = 0 \quad \text{pre} \quad x \notin [\lambda_i, \lambda_{i+k+1}]. \tag{7}$$

Poznámka 1.4 Pokiaľ platí, že $x > \lambda_{i+k+1}$ tak je $B_{i,k+1}(x)$ diferenciou nulovej funkcie. Ak platí $x < \lambda_i$, tak ide o $(k+1)-$vú diferenciu polynómu stupňa k. V oboch prípadoch však vzhľadom na definíciu 1.2 dostaneme nulu.

V3: Pre $x \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}], j \in \{k+1, ..., n+1-k\}$ platí

$$\sum_i B_{i,k+1}(x) = 1.$$

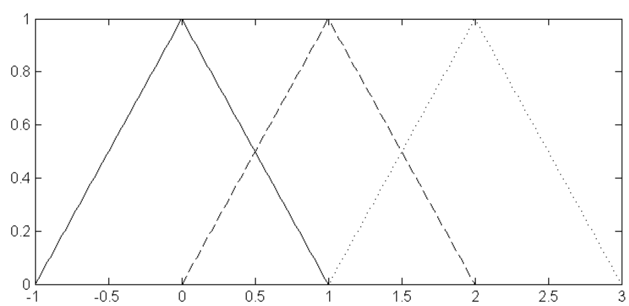
Poznámka 1.5 Na danom intervale $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ sú teda nenulové len B-splajny $B_{i,k+1}(x), i = j-k-1, j-k, ..., j$. Celkom teda k B-splajnov stupňa k. B-splajny tvoria rozklad jednotky.

Naším cieľom je pomocou B-splajnovej reprezentácie skonštruovať celú bázu priestoru $\mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$ a teda $g+k+1$ B-splajnov, ktoré sú lineárne nezávisle. Ako na to si popíšeme v nasledujúcej úlohe 1.2.

Úloha 1.2 Majme zadanú sieť uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 1, 2\}$, čiže máme jeden vnútorný uzol $(g = 1)$ a stupeň B-splajnu $k = 1$. Dimenzia priestoru $\mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$ je podľa vzťahu (6) rovná 3, keďže

$$\dim \mathrm{S}_k(\Delta\lambda) = g + k + 1 = 3.$$

Naším cieľom je teda zostaviť a zostrojiť funkcie, ktoré zodpovedajú B-splajnom $B_{0,2}(x), B_{1,2}(x)$ a $B_{2,2}(x)$. Avšak na danej sieti uzlov sme schopní skonštruovať len jeden B-splajn $B_{0,2}(x)$. Môžeme si to pozrieť na obrázku čislo 3, kde máme vykreslený aj B-splajn $B_{0,2}(x)$. Preto je potrebné prejsť k novej - rozšírenej sieti uzlov $(\Delta\lambda+)$, na ktorej už budeme schopní zostrojiť potrebný počet B-splajnov. Z pôvodnej siete vytvoríme novú sieť, napríklad $(\Delta\lambda+) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Na tejto sieti sme už schopní definovať celú bázu priestoru splajnov (teda tri B-splajny prvého stupňa) ako môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku č. 4.



Obr.č. 4: Grafy bázových funkcií $B_{-1,2}(\lambda), B_{0,2}(\lambda)$ a $B_{1,2}(\lambda)$

Poznámka 1.6 V úlohe 1.2 bolo potrebné rozšíriť pôvodnú sieť uzlov $(\Delta\lambda)$ o 1 uzol naľavo a aj o 1 napravo a vytvorili sme tak rozširenú sieť uzlov $(\Delta\lambda+)$. Čiže vo všeobecnosti je potrebné pôvodnú sieť uzlov

$$(\Delta\lambda) : a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_g < \lambda_{g+1} = b \tag{8}$$

rozšíriť o k uzlov napravo a aj naľavo na rozšírenú sieť uzlov $(\Delta\lambda+)$, t.j.

$$(\Delta\lambda+) : \lambda_{-k} \leq ... \leq \lambda_{-1} \leq a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_g < \lambda_{g+1} = b \leq ... \leq \lambda_{g+k+1}. \tag{9}$$

Bázu priestoru $\mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$ tvorí postupnosť B-splajnov $\{B_{i,k+1}(x), i = -k, ..., g\}$ a preto môžeme splajn $s_k(x) \in \mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu bázových splajnov:

$$s_k(x) = \sum_{i=-k}^{g} b_i B_{i,k+1}(x); \quad x \in R, \tag{10}$$

kde b_i sú B-splajnové koeficienty splajnu $s_k(x)$.

Môžeme teda povedať, že každý splajn $s_k(x) \in \mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$ je jednoznačne určený vektorom B-splajnových koeficientov

$$b = (b_{-k}, ..., b_g)^T.$$

Praktické rozšírenie použitia B-splajnov sa dosiahlo po nájdení jednoduchých rekurentných vzťahov, ktoré umožňujú počítať funkčné hodnoty stabilným spôsobom.

V4: Pre hodnoty bázových splajnov platia nasledujúce rekurentné vzťahy:

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ ak} \quad x \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}], \\ 0 \text{ inak} \end{cases}$$

$$B_{i,k+1}(x) = \frac{x - \lambda_i}{\lambda_{i+k} - \lambda_i} B_{i,k}(x) + \frac{\lambda_{i+k+1} - x}{\lambda_{i+k+1} - \lambda_{i+1}} B_{i+1,k}(x). \tag{11}$$

Poznámka 1.7 Vlastnosť **V4** nám ukazuje ako vhodnou lineárnou kombináciou dvoch splajnov rádu k vznikne splajn rádu $k+1$ a teda funkcia s väčšou hladkosťou.

V5: Všetky hodnoty $B_{i,k+1}(x)$ sú nezáporné pre všetky x:

$$B_{i,k+1}(x) \geq 0.$$

V6: Z derivácie B-splajnov vyplýva:

$$\frac{d^j}{dx^j} s_k(x) = \sum_i b_i^j B_{i,k+1-j}(x),$$

s koeficientami $b_i^0 = b_i$,

$$b_i^j = \frac{b_i^{j-1} - b_{i-1}^{j-1}}{\lambda_{i+k-j} - \lambda_i}$$

pre $1 \leq j < k$.

Poznámka 1.8 Deriváciou splajnu rádu $k+1$ je teda splajn rádu k, čiže deriváciou znižujeme rád splajnu.

V7: Splajn $\sum_i b_i B_{i,k}(x)$ je deriváciou splajnu $\sum_i c_i B_{i,k+1}(x)$, ak medzi koeficientami b_i, c_i platia vzťahy:

$$\frac{k(c_i - c_{i-1})}{\lambda_{i+k} - \lambda_i} = b_i, \text{t.j.} \quad c_i = c_{i-1} + \frac{b_i(\lambda_{i+k} - \lambda_i)}{k}. \tag{12}$$

Poznámka 1.9 Jeden z parametrov c_i je voliteľný, ostatné sa musia dopočítať z (12).

1.2. Interpolácia B-splajnov v R^1

Aby sme mohli hovoriť o úlohe interpolácie splajnov, je potrebné mať danú sieť uzlov popísanú vo vzťahu (8), ktorú vhodným spôsobom rozšírime na rozšírenú sieť uzlov (9) pre ktorú platí $\lambda_i < \lambda_{i+k+1}$. Ďalej nech je daná rastúca postupnosť bodov interpolácie $x_j, j = 1, ..., n; x_j \in [a, b]$ pričom $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$, ku ktorým sú známe zodpovedajúce funkčné hodnoty $f_j, j = 1, ..., n$.

Našou úlohou bude nájsť na intervale $[a, b]$ splajn $s_k(x) \in \mathrm{S}_k(\Delta\lambda)$, ktorý spĺňa v bodoch $x_j, j = 1, ..., n$ podmienky interpolácie

$$s_k(x_j) = f_j; \quad j = 1, ..., n,$$

a teda môžeme povedať, že $s_k(x)$ je interpolačný splajn.

Vzhľadom na to, že v predchádzajúcej časti sme si povedali, že splajn $s_k(x)$ je jednoznačne určený vektorom B-splajnových koeficientov b, tak je potrebné zistiť ako dané koeficienty vypočítame. Pri vyjadrení splajnu maticovo dostávame

$$s_k(\vec{x}) = C_{k+1}(\vec{x})\vec{b}, \quad \vec{x} \in R^n, \tag{13}$$

kde

$$s_k(\vec{x}) = \begin{pmatrix} s_k(x_1) \\ s_k(x_2) \\ \vdots \\ s_k(x_n) \end{pmatrix}, \vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$$

a matica

$$C_{k+1}(\vec{x}) = (B_{i,k+1}(x_j))_{j=1,i=-k}^{n \quad g},$$

predstavuje kolokačnú maticu funkčných hodnôt jednotlivých B-splajnov v bodoch interpolácie $x_j, j = 1, ..., n$.

Z interpolačných podmienok dostaneme pre hľadané koeficienty b_i sústavu n lineárnych rovníc o $g + k + 1$ neznámych $b_{-k}, ..., b_g$, ktoré zapíšeme v tvare

$$C_{k+1}(\vec{x})\vec{b} = \vec{f}, \tag{14}$$

kde $\vec{b} = (b_{-k}, ..., b_g)^T$ a $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)^T$, pričom rozpísaná sústava lineárnych rovníc má tvar

$$\begin{pmatrix} B_{-k,k+1}(x_1) & B_{-k+1,k+1}(x_1) & ... & B_{g,k+1}(x_1) \\ B_{-k,k+1}(x_2) & B_{-k+1,k+1}(x_2) & ... & B_{g,k+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-k,k+1}(x_n) & B_{-k+1,k+1}(x_n) & ... & B_{g,k+1}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-k} \\ b_{-k+1} \\ \vdots \\ b_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Jednoznačnosť riešenia tejto sústavy rovníc, a teda tiež jednoznačné určenie hľadaného interpolačného splajnu, je závisle na tom, či je matica $C_{k+1}(x)$ štvorcová a regulárna. V takom prípade existuje práve jedno riešenie

$$\vec{b^*} = (C_{k+1}(\vec{x}))^{-1}\vec{f}; \quad \vec{b^*} = (b^*_{-k}, ..., b^*_g)^T$$

a existuje práve jeden interpolačný splajn

$$s_k(x) = \sum_{i=-k}^{g} B_{i,k+1}(x)b^*_i, \quad x \in R.$$

Nasledujúca veta nám udáva kedy a za akých podmienok je kolokačná matica regulárna. Vetu budeme čerpať z [1].

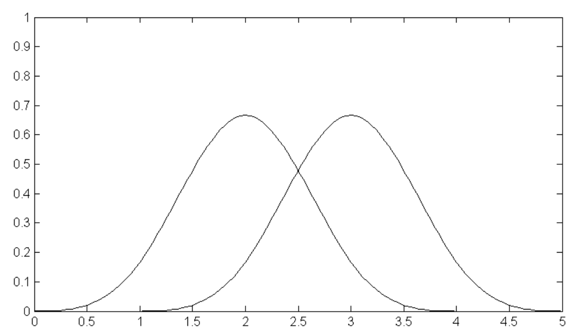
Veta 1.1 *Za predpokladov, že* $(\Delta\lambda+)$ *je neklesajúca postupnosť uzlov, pre ktorú platí* $\lambda_i < \lambda_{i+k+1}, i = -k, ..., g$; *a že* $(\Delta x) = \{x_1, ..., x_n\}$ *je rastúca postupnosť bodov interpolácie, tak matica* $C_{k+1}(\vec{x})$ *je regulárna práve vtedy, ak*

$$B_{i,k+1}(x_i) \neq 0, \tag{15}$$

a teda pre $\lambda_i < x_i < \lambda_{i+k+1}; \quad i = 1, ..., n.$

Vetu si podrobnejšie vysvetlíme na nasledujúcej úlohe.

Úloha 1.3 Majme sieť uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, pričom $\lambda_0 = 0 = a$ a $\lambda_{g+1} = 5 = b, (g = 4)$ a stupeň splajnu $k = 3$.



Obr.č. 5: Kubické B-splajny

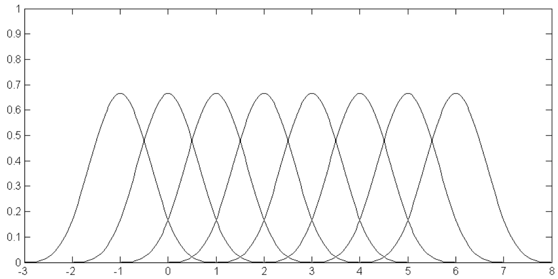
Dimenzia priestoru je

$$\dim \mathrm{S}_k(\Delta\lambda) = k + g + 1 = 3 + 4 + 1 = 8,$$

avšak na obrázku číslo 5 vidíme, že na danej sieti uzlov sme schopní vykresliť len dve B-splajnové funkcie stupňa $k = 3$. Preto je potrebné rozšíriť sieť uzlov o tri uzly napravo aj naľavo, a to nasledujúcim spôsobom

$$\lambda_{-3} < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 = a \quad \text{a} \quad b = \lambda_5 < \lambda_6 < \lambda_7 < \lambda_8.$$

Tento prípad rozšírenia na nenásobné krajné uzly môžeme vidieť na obrázku číslo 6.

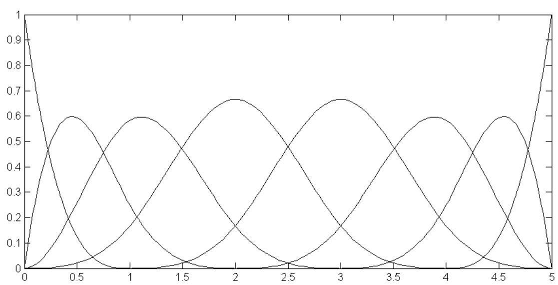


Obr.č. 6: Kubické B-splajny

Danú sieť uzlov môžeme rozšíriť tiež tak, že budeme uvažovať krajné uzly ako násobné, čiže

$$\lambda_{-3} = \lambda_{-2} = \lambda_{-1} = \lambda_0 = a \quad \text{a} \quad b = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8,$$

pričom na obrázku číslo 7 vidíme bázové funkcie, ktoré sú na tejto sieti zostrojené.

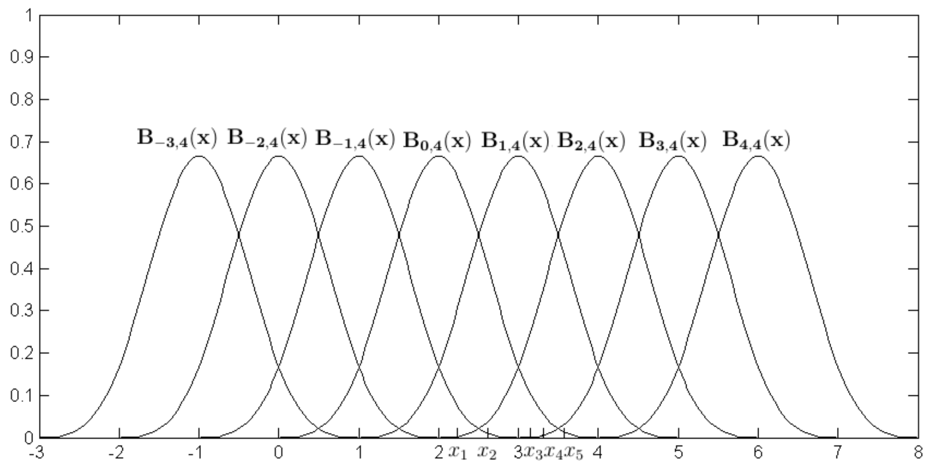


Obr.č. 7: Kubické B-splajny

Vráťme sa však späť k prvej možnosti rozšírenia uzlov.

Veta 1.1 nám popisuje, kedy je daná matica $C_{k+1}(\vec{x})$ regulárna. Môžeme si pomôcť obrázkom číslo 8.

Predpokladajme, že sú dané body interpolácie x_1, x_2, x_3 a x_4 také, že ležia medzi uzlami λ_2 a λ_4, tj. $[x_1, x_4] \in [\lambda_2, \lambda_4)$. Každému z týchto bodov interpolácie by sme vedeli priradiť práve jednu bázovú funkciu (každému bodu interpolácie vieme priradiť práve jeden B-splajn - nie je možné dvom bodom interpolácie priradiť ten istý B-splajn), čiže pre bod interpolácie x_1 by to bola bázová funkcia $B_{-1,4}(x)$, pre bod x_2 to potom bude $B_{0,4}(x)$, bodu x_3 priradíme bázovú funkciu



Obr.č. 8: Kubické B-splajny

$B_{1,4}(x)$, pre bod x_4 to bude bázová funkcia $B_{2,4}(x)$ a nakoniec pre bod x_5 to bude bázová funkcia $B_{3,4}(x)$. Nasledujúcu situáciu môžeme vidieť na obrázku číslo 8, keďže dané body, o ktorých sme hovorili sme priradili k vykresleným B-splajnov a ležia aj v ich nosičoch.

Avšak ak by medzi uzlami $[\lambda_2, \lambda_4)$ ležal ďalší bod interpolácie x_6, tak by sme tomuto bodu interpolácie už nevedeli priradiť zodpovedajúcu bázovú funkciu podľa vety 1.1 (keďže je potrebné, aby daný bod interpolácie ležal v nosiči danej bázovej funkcie) a regularita matice $C_{k+1}(\vec{x})$ by v takom prípade nebola dodržaná. Preto ak chceme, aby podmienka regularity matice $C_{k+1}(\vec{x})$ bola dodržaná, je potrebné, aby bod x_6 ležal v nosiči $B_{4,4}(x)$, a v tom prípade by sme mu mohli priradiť bázovú funkciu $B_{4,4}(x)$. Bod x_6 sa teda musí nachádzať v intervale $[\lambda_4, \lambda_8]$.

Vzhľadom to, že sme si zopakovali základné poznatky z B-splajnov, môžeme prejsť k vykresľovaniu splajnov pomocou B-splajnov v programe Matlab. Predtým je však potrebné podotknúť niekoľko dôležitých poznámok.

Poznámka 1.10 V programe Matlab budeme pracovať s tzv. Spline Toolboxom, ktorý bolo vo verzií Matlabu R2008a potrebné dodatočne pridať. Nájdeme ho v časti Help $->$ Product Help alebo pod klávesovou skratkou F1 pri spustenom programe Matlab.

Poznámka 1.11 Matlab dokáže riešiť úlohy len v prípade, ak je matica $C_{i,k+1}(\vec{x})$ regulárna. V opačnom prípade vyhodí nasledovnú chybu, ktorú môžete vidieť v konzolovom výstupe číslo 1. Regularita je overovaná ako podmienka priamo v používaných príkazoch v softvéri Matlab a jeho Spline Toolbox-e, a preto sa ďalej ňou v príkladoch nebudeme zaoberať.

Konzolový výstup: 1: Regularita $C_{k+1}(\vec{x})$

```
??? Error using ==> slvblk at 54
The coefficient matrix has a nontrivial nullspace.

Error in ==> spapi>spapi1 at 193
sp = spmak(knots,slvblk(spcol(knots,k,x,'slvblk'),y).');

Error in ==> spapi at 151
      sp = spapi1(knots,x,y);

Error in ==> PrikladBSplajn at 4
%PrikladBSplajn je nazov mojho M-file prikladu
spline = spapi(lambda,x,y)
```

Vidíme, že Matlab nám v tom prípade vyhodí error v príkaze spmak, ktorý sa využíva vo funkcií spapi. Tento príkaz nám vracia splajn v B-forme. Príkazy, ktoré sme použili v danom príkazovom riadku si vysvetlíme v nasledujúcom príklade.

Príklad 1.1 Našou úlohou je nájsť interpolačný kvadratický splajn $s_2(x)$ so sieťou uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 2, 8, 10\}$; $g = 2$, kde body interpolácie sú $(\Delta x) = \{1, 2, 5, 8, 9\}$ a funkčné hodnoty v bodoch interpolácie sú $f = \{0.5, 0.9, 1.3, 2, 1.7\}$.

Riešenie 1.1 Na začiatku je potrebné určiť si dimenziu daného priestoru, čiže

$$\dim \mathrm{S}_k(\Delta\lambda) = k + g + 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

Je potrebné rozšíriť danú sieť uzlov na $(\Delta\lambda+) = \{-4, -2, 0, 2, 8, 10, 12, 14\}$ alebo na $(\Delta\lambda+) = \{0, 0, 0, 2, 8, 10, 10, 10\}$. Najprv sa budeme zaoberať prvou možnosťou.

Treba si dať pozor, že Matlab rozumie B-splajny v tvare $B_{i,k}(x)$, čiže stupeň bude tentokrát určený ako $k-1$ a nie ako k, ktoré sme používali v doterajšej teórií.

Do Matlabu si zadáme príkazy, ktoré môžeme vidieť v konzolovom výstupe číslo 2.

Konzolový výstup: 2: Interpolačný splajn $s(x)$

```
lambda = [-4 -2 0 2 8 10 12 14]; %siet uzlov
x=[1 2 5 8 9]; %body interpolacie
f=[0.5 0.9 1.3 2 1.7]; %funkcne hodnoty bodov interpolacie
spline = spapi(lambda,x,f) %prikaz na splajnovu interpolaciu
fnplt(spline); %prikaz vykresli funkciu
hold on
plot(x,f,'o') %zvyraznenie bodov interpolacie
hold off
```

Vzhľadom na to, že celá B-splajnová interpolácia v Matlabe stojí na príkaze **spapi** poďme si ho detailnejšie rozobrať. Príkaz v Matlabe vyzerá nasledovne

$$spline = spapi(knots, x, y),$$

pričom výraz $knots$ nám reprezentuje našu rozšírenú sieť uzlov, x prezentuje body interpolácie a y sú funkčné hodnoty (naše f). Pokiaľ by sme chceli vypisovať všetko priamo v jednom príkaze (nie tak ako sme to spravili my - čiže určíme si hodnoty všetkých našich neznámych a v príkaze ich len zavoláme), tak by mal príkaz **spapi** v Matlabe tvar

$$spline = spapi([\lambda_{-k}, ..., \lambda_{g+k+1}], [x_1, ..., x_n], [f_1, ..., f_n]).$$

Príkaz **spapi** nám navyše napríklad vypíše typ interpolácie, uzly, a tiež aj určí B-splajnové koeficienty b_i. Výstup z Matlabu môžeme vidieť v konzolovom výstupe číslo 3.

Konzolový výstup: 3: Príkaz **spapi**

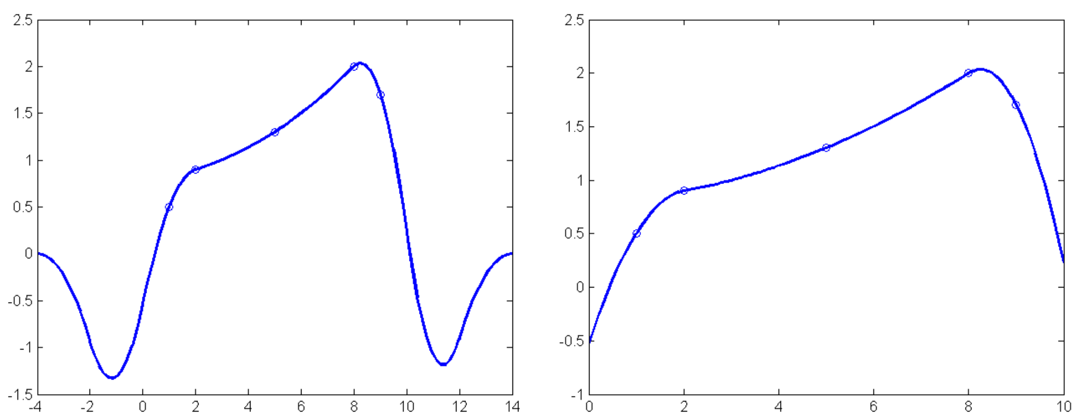
```
spline =

     form: 'B-'
    knots: [-4 -2 0 2 8 10 12 14]
```

```
coefs: [-1.8833  0.8167  1.1500  2.2833  -1.8167]
number: 5
order: 3
dim: 1
```

Ako už bolo spomenuté, Matlab určuje B-splajny v tvare $B_{i,k}(x)$, pričom my sme doteraz uvažovali tvar B-splajnu $B_{i,k+1}(x)$. Preto je veľmi dôležité si uvedomiť, že rád splajnu je tentokrát označený ako k, pričom my sme doteraz ako k uvažovali stupeň splajnu. V skutočnosti však nejde o nič iné ako len o to, že v Matlabe budeme uvažovať rád a stupeň znížený o jednu jednotku od našej teórie, čiže rád budeme označovať v Matlabe ako k a stupeň ako $k-1$.

Výsledný graf interpolačného splajnu vidíme na obrázku číslo 9 naľavo.



Obr.č. 9: Interpolačný splajn $s(x)$

Vrátime sa ešte k druhému prípadu a to, že naša rozšírená sieť uzlov bude mať tvar $(\Delta\lambda+) = \{0, 0, 0, 2, 8, 10, 10, 10\}$.

Do Matlabu si aj tentokrát zadáme rovnaké príkazy ako to bolo aj v prvom prípade a môžeme ich vidieť v konzolovom výstupe číslo 4.

Konzolový výstup: 4: Interpolačné splajny $s(x)$

```
lambda = [0 0 0 2 8 10 10 10]; %siet uzlov
x=[1 2 5 8 9]; %body interpolacie
y=[0.5 0.9 1.3 2 1.7]; %funkcne hodnoty bodov interpolacie
spline = spapi(lambda,x,y) %prikaz na splajnovu
%interpolaciu
fnplt(spline,2); %prikaz vykresli fukciu
hold on
```

```
plot(x,y,'o') %zvyraznenie bodov interpolacie
hold off
```

V zdrojovom kóde sa vlastne nezmenilo nič, len sa upravila sieť uzlov, na ktorej budeme zostrojovať naše bázové funkcie.

Príkaz **spapi** konzolového výstupu číslo 5 nám preto vypísal rovnaké informácie ako to bolo v prvom prípade, keď sme nemali násobné krajné uzly, avšak jediné, čo sa zmenilo, sú B-splajnové koeficienty b_i, ktoré nám jednoznačne určujú splajn $s_k(x)$. Tieto koeficienty sa však zmenili len v prvom a poslednom čísle a to preto, lebo v prvom prípade sme pridavávali uzly tak, že sme sieť rozšírili na oboch koncoch postupne a v druhom prípade sme uvažovali násobne krajné uzly.

Konzolový výstup: 5: Príkaz **spapi**

```
spline =

      form:  'B-'
     knots:  [0  0  0  2  8  10  10  10]
     coefs:  [-0.5333  0.8167  1.1500  2.2833  0.2333]
    number:  5
     order:  3
       dim:  1
```

Výsledný graf takto vytvoreného interpolačného splajnu vidíme na obrázku číslo 9 napravo.

Ak by sme si chceli porovnať grafy na obrázku číslo 9, všimneme si, že ide vlastne o podobné grafy, pričom v druhom prípade sme sa obmedzili len na interval $[0, 10]$, a ak by sme takto skrátili na rovnaký interval aj prvý obrázok, tak by sme dostali to isté:

$$[0, 10] = [\lambda_0, \lambda_{g+1}] = [a, b].$$

2. B-splajny v R^2

Vzhľadom na to, že sme si zopakovali teóriu B-splajnov v R^1, môžeme ju viac zovšeobecniť a prejsť na B-splajny v R^2. V nasledujúcej časti budeme čerpať z [2].

Definícia 2.1 Nech sú dané rastúce postupnosti uzlov

$$(\Delta\lambda) : a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_g < \lambda_{g+1} = b \tag{16}$$

a

$$(\Delta\mu) : c = \mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_h < \mu_{h+1} = d. \tag{17}$$

Funkcia $s_{k,l}(x, y)$ sa nazýva dvojrozmerný splajn (tensorový splajn) na definičnom obore $D = [a, b] \times [c, d]$ stupňa $k > 0$ v premennej x a stupňa $l > 0$ v premennej y s uzlami $\lambda_i, i = 0, 1, ..., g+1$ v smere x a s uzlami $\mu_j, j = 0, 1, ...h+1$ v smere y pokiaľ sú splnené nasledujúce podmienky:

- Na každom podobdĺžniku $D_{i,j} = [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}]$ je $s_{k,l}(x, y)$ daný polynóm stupňa k v premennej x a l v premennej y, tj.:

  $$s_{k,l} \mid D_{i,j} \in \Pi_k \otimes \Pi_l, \quad i = 0, 1, ..., g; j = 0, 1, ..., h. \tag{18}$$

  Symbol $\otimes$ predstavuje tensorov súčin, ktorý si podrobnejšie popíšeme v podkapitole metóda najmenších štvorcov.

- Funkcia $s_{k,l}(x, y)$ a všetky jej parciálne derivácie

  $$\frac{\partial^{i+j} s_{k,l}(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i < k; 0 \leq j < l$$

  sú spojité na D, tj.

  $$\frac{\partial^{i+j} s_{k,l}(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \in C(D), i = 0, 1, ..., k-1; j = 0, 1, ..., l-1. \tag{19}$$

Všetky funkcie, ktoré spĺňajú vzťahy (18) a (19) tvoria vektorový priestor, ktorý si označíme $\mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)$. Dimenziu dvojrozmerných splajnov si odvodíme pomocou vzťahu (6).

Máme dve rastúce postupnosti uzlov $(\Delta\lambda)$ a $(\Delta\mu)$, pričom prvá má g vnútorných uzlov a druhá má h vnútorných uzlov. Tiež vieme, že na sieti uzlov $(\Delta\lambda)$, ktorá je definovaná na intervale $[a, b]$ vytvárame B-splajny stupňa k a na sieti uzlov $(\Delta\mu)$, ktorá je definovaná na intervale $[c, d]$ vytvárame B-splajny stupňa l. Dimenzia priestoru potom bude

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)) &= \dim(\mathrm{S}_k(\Delta\lambda))\dim(\mathrm{S}_l(\Delta\mu)) = \\ &= (g+k+1)(h+l+1). \end{aligned} \tag{20}$$

Ďalej je potrebné zadefinovať si B-splajny v R^2 podobne ako sme to robili v definícií 1.2 v R^1. Princíp zostáva rovnaký, tentokrát si však budeme definovať dva B-splajny.

Definícia 2.2 Majme neklesajúce postupnosti uzlov $(\Delta\lambda) = \{\lambda_i, i = 0, ..., g+1\}$ a $(\Delta\mu) = \{\mu_j, j = 0, ..., h+1\}$. Ku každému uzlu λ_i, ktorý má na sieti vpravo $k+1$ susedných uzlov takých, že $\lambda_i < \lambda_{i+k+1}$ definujeme B-splajn $(k+1)-$ého rádu alebo stupňa k vzťahom

$$M_{i,k+1}(x) = (\lambda_{i+k+1} - \lambda_i)[\lambda_i, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_{i+k+1}](t-x)_+^k$$

a podobne, ku každému uzlu μ_j, ktorý má na sieti vpravo $l+1$ susedných uzlov takých, že $\mu_j < \mu_{j+l+1}$ definujeme B-splajn $(l+1)-$ého rádu alebo stupňa l vzťahom

$$N_{j,l+1}(y) = (\mu_{j+l+1} - \mu_j)[\mu_j, \mu_{j+1}, ..., \mu_{j+l+1}](t-y)_+^l.$$

Prvky z priestoru $\mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)$ sú splajny $s_{k,l}(x, y)$, a budeme ich uvažovať v tvare

$$s_{k,l}(x, y) = \sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} b_{i,j} M_{i,k+1}(x) N_{j,l+1}(y).$$

2.1. Vlastnosti B-splajnov v R^2

Prevažnú väčšinu vlastnosti dvojrozmerných tensorových splajnov si môžeme odvodiť z vlastnosti B-splajnov v R^1. My si však pre budúcu náväznosť spomenieme vlastnosti, ktoré si označíme špeciálnym symbolom **(W1) - (W4)**.

Budeme používať označenie, ktoré sme si zaviedli v definícií 2.1.

(W1:)

$$M_{i,k+1}(x)N_{j,l+1}(y) \geq 0 \quad \forall x, y \in D. \tag{21}$$

(W2:) Nosičom $M_{i,k+1}(x)N_{j,l+1}(y)$ je $D_{i,j} = [\lambda_i, \lambda_{i+k+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+l+1}]$, tj.

$$M_{i,k+1}(x)N_{j,l+1}(y) = 0 \quad \forall [x, y] \notin [\lambda_i, \lambda_{i+k+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+l+1}]. \tag{22}$$

(W3:) Pre $x, y \in D$ platí

$$\sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} M_{i,k+1}(x)N_{j,l+1}(y) = 1$$

(W4:) Pre $k > 0$ a $l > 0$ má funkcia $M_{i,k+1}(x)N_{j,l+1}(y)$ jediné maximum.

Podobne ako tomu bolo v predchádzajúcej kapitole, aj teraz bude potrebné vytvárať rozšírené siete uzlov. Máme pôvodné siete uzlov $(\Delta\lambda)$ a $(\Delta\mu)$. Rozšírené siete uzlov $(\Delta\lambda+)$ a $(\Delta\mu+)$ vytvoríme tak, že pridáme príslušný počet uzlov na obe strany:

- V prípade siete uzlov $(\Delta\lambda)$ pridáme na obe strany k uzlov a to nasledujúcim spôsobom

$$(\Delta\lambda+) : \lambda_{-k} < ... < \lambda_0 = a < \lambda_1 < ... < \lambda_{g+1} = b < \lambda_{g+2} < ... < \lambda_{g+k+1}, \tag{23}$$

- a v prípade siete uzlov $(\Delta\mu)$ pridáme na obe strany l uzlov a to nasledujúcim spôsobom

$$(\Delta\mu+) : \mu_{-l} < ... < \mu_0 = c < \mu_1 < ... < \mu_{h+1} = d < \mu_{h+2} < ... < \mu_{h+l+1}. \tag{24}$$

2.2. Interpolácia B-splajnov v R^2

Majme zadané pôvodné siete uzlov $(\Delta\lambda)$ a $(\Delta\mu)$, ktoré vhodnými spôsobmi rozšírime na rozšírené siete uzlov $(\Delta\lambda+)$ a $(\Delta\mu+)$, pre ktoré platí $\lambda_i < \lambda_{i+k+1}, \mu_j < \mu_{j+l+1}$. Ďalej nech sú dané rastúce postupnosti bodov interpolácie $\{x_p\}, p = 1, ..., m; x_p \in [a, b]$ a $\{y_q\}, q = 1, ..., n; y_q \in [c, d]$, kde pre $[x_p, y_q]$ je známa matica zodpovedajúcich funkčných hodnôt $f_{p,q}$ typu $m \times n$, tzn.:

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Našou úlohou je nájsť na $[a, b] \times [c, d]$ taký splajn $s_{k,l}(x, y) \in \mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)$,t.j.

$$s_{k,l}(x, y) = \sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} b_{i,j} M_{i,k+1}(x) N_{j,l+1}(y), \quad x \in R, y \in R, \tag{25}$$

ktorý spĺňa v bodoch $[x_p, y_q]$ podmienky interpolácie

$$s_{k,l}(x_p, y_q) = \sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} b_{i,j} M_{i,k+1}(x_p) N_{j,l+1}(y_q) = f_{p,q},$$

kde $p = 1, ..., m$ a $q = 1, ..., n$.

Splajn $s_{k,l}(x, y)$ je jednoznačne určený maticou B-splajnových koeficientov B s rozmermi $(g + k + 1)(h + l + 1)$, ktorá má tvar

$$B = \begin{pmatrix} b_{-k,-l} & \dots & b_{-k,h} \\ b_{-k+1,-l} & \dots & b_{-k+1,h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{g,-l} & \dots & b_{g,h} \end{pmatrix}.$$

Našou úlohou je nájsť maticu koeficientov B pre interpolačný splajn. Pri maticovom vyjadrení splajnu dostávame

$$s_{k,l}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{k+1}(\vec{x}) B D_{l+1}(\vec{y})^T; \quad \vec{x} = (x_1, ..., x_m)^T, \vec{y} = (y_1, ..., y_n)^T,$$

kde v rozpísanom tvare dostávame

$$s_{k,l}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} s_{k,l}(x_1,y_1) & ... & s_{k,l}(x_1,y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k,l}(x_m,y_1) & ... & s_{k,l}(x_m,y_n) \end{pmatrix},$$

pričom matica

$$C_{k+1}(\vec{x}) = (M_{i,k+1}(x_p))_{p=1,i=-k}^{m \quad g},$$

ktorá v rozpísanom tvare vyzerá

$$C_{k+1}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} M_{-k,k+1}(x_1) & M_{-k+1,k+1}(x_1) & ... & M_{g,k+1}(x_1) \\ M_{-k,k+1}(x_2) & M_{-k+1,k+1}(x_2) & ... & M_{g,k+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{-k,k+1}(x_m) & M_{-k+1,k+1}(x_m) & ... & M_{g,k+1}(x_m) \end{pmatrix},$$

a predstavuje kolokačnú maticu funkčných hodnôt jednotlivých B-splajnov $M_{i,k+1}(x)$ v bodoch interpolácie $x_p, p = 1, ..., m$ a

$$D_{l+1}(\vec{y}) = (N_{j,l+1}(y_q))_{q=1,j=-l,}^{n \quad h},$$

v rozpísanom tvare

$$D_{l+1}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} N_{-l,l+1}(y_1) & N_{-l+1,l+1}(y_1) & ... & N_{h,l+1}(y_1) \\ N_{-l,l+1}(y_2) & N_{-l+1,l+1}(y_2) & ... & N_{h,l+1}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{-l,l+1}(y_n) & N_{-l+1,l+1}(y_n) & ... & N_{h,l+1}(y_n) \end{pmatrix},$$

a predstavuje kolokačnú maticu funkčných hodnôt jednotlivých B-splajnov $N_{j,l+1}(y)$ v bodoch interpolácie $y_q, q = 1, ..., n$ a B je matica B-splajnových koeficientov.

Z interpolačných podmienok dostaneme pre hľadané koeficienty $b_{i,j}$ vzťah, ktorý zapíšeme v tvare

$$C_{k+1}(\vec{x}) B D_{l+1}(\vec{y})^T = F. \tag{26}$$

Jednoznačnosť riešenia tohto vzťahu, a teda tiež jednoznačné určenie hľadaného interpolačného splajnu $s_{k,l}(x,y)$, je závisle na tom, či sú matice $C_{k+1}(\vec{x})$ a $D_{l+1}(\vec{y})$

štvorcové a regulárne - podľa vety 1.1. V prípade zaistenia regularity oboch matíc $C_{k+1}(\vec{x}), D_{l+1}(\vec{y})$ existuje práve jedno riešenie

$$B = (C_{k+1}(\vec{x}))^{-1} F[(D_{l+1}(\vec{y}))^T]^{-1},$$

kde

$$B = (b_{i,j})_{i=-k,j=-l}^{g \quad h},$$

a taktiež existuje práve jeden interpolačný splajn

$$s_{k,l}(x,y) = \sum_{i=-k}^{m} \sum_{j=-l}^{n} M_{i,k+1}(x) N_{j,l+1}(y) b_{i,j}.$$

Vzhľadom na to, že sme sa zoznámili so základnými poznatkami z B-splajnov v R^2, môžeme prejsť k vykresľovaniu splajnov pomocou B-splajnov v programe Matlab. Predtým však ako prejdeme k príkladom riešeným v programe Matlab si pripomenieme poznámku 1.11, o ktorej sme hovorili v predchádzajúcej kapitole. Pri riešení príkladov sa opäť nebudeme zaoberať regularitou matíc $C_{k+1}(\vec{x})$ a $D_{l+1}(\vec{y})$, pretože ak by nebola dodržaná, tak by nám Matlab vyhodil rovnakú chybu, o ktorej sme si už hovorili v poznámke 1.11. Čiže úlohy v Matlabe je možné riešiť iba v tom prípade, ak je podmienka regularity matíc zachovaná a dodržaná.

Príklad 2.1 Našou úlohou je nájsť kvadratický interpolačný splajn $s_{2,2}(x,y)$ so sieťou uzlov $(\Delta\lambda) = \{2, 4, 6\}$ a $(\Delta\mu) = \{1, 3, 7\}$, kde body interpolácie sú $(\Delta x) = \{2.5, 4.2, 5.0, 5.9\}$ a $(\Delta y) = \{1.2, 4.4, 5.0, 6.0\}$ s maticou funkčných hodnôt

$$F = \begin{pmatrix} 0.9 & 2.1 & 3.3 & 1.7 \\ 1.1 & 2.2 & 3.4 & 1.9 \\ 1.3 & 2.6 & 3.6 & 2.0 \\ 1.2 & 2.5 & 3.0 & 1.6 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 2.1 V celej teorií B-splajnov v R^2 budeme stavať na tom, čo sme sa naučili o B-splajnoch v R^1. Teda podobne ako tomu bolo v predchádzajúcej kapitole, aj tentokrát si najprv určíme dimenziu daného priestoru, a teda dostávame

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)) &= \dim(\mathrm{S}_k(\Delta\lambda))\dim(\mathrm{S}_l(\Delta\mu)) = \\
&= (g+k+1)(h+l+1) = (1+2+1)(1+2+1) = \\
&= 4 \cdot 4 = 16.
\end{aligned}
$$

Preto je potrebné rozšíriť dané siete uzlov. Netreba zabúdať, že Matlab pracuje v B-splajnami v tvare $B_{i,k}(x)$. Keďže my chceme zostrojiť B-splajn v R^2 pomocou kvadratických B-splajnov, musíme rozšíriť každú sieť uzlov o ďalšie 4 uzly, aby sme boli schopní zostrojiť na danej sieti všetky B-splajnové funkcie. Ako sme si povedali v úlohe 1.3, uzly môžeme rozširovať dvoma spôsobmi - na násobné a nenásobné. V našom prípade môžeme teda vytvoriť viacero kombinácií, pričom jediný rozdiel bude v b-splajnových koeficientoch, ktoré nám jednoznačne určujú naš B-splajn v R^2.

Poďme sa preto zaoberať prípadom, keď budú uzly násobné a teda vytvoríme rozšírené siete uzlov $(\Delta\lambda_1+) = \{2, 2, 2, 4, 6, 8, 10\}$ a $(\Delta\mu_1+) = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Do Matlabu si zadáme príkazy, ktoré môžeme vidieť v konzolovom výstupe číslo 6.

Konzolový výstup: 6: Interpolačný splajn

```
% zadanie prikladu - vstupne hodnoty
lambda = [2 2 2 4 6 6 6];
ni = [1 1 1 3 7 7 7];
x = [2.5 4.2 5 5.9];
y = [1.2 4.4 5 6];
F = [0.9 2.1 3.3 1.7; 1.1 2.2 3.4 1.9; ...
        1.3 2.6 3.6 2; 1.2 2.5 3 1.6];
% vypocitame si spline a vypiseme si koeficienty
spline = spapi({lambda,ni},{x,y},F)
spline.coefs
% vykreslime spline
fnplt (spline)
% podrzime si zobrazenie vykresleneho grafu splinu
hold on
% vykreslime body do grafu splinu
sx = reshape(repmat(x,4,1), 1, 16);
```

```
sy = repmat(y,1,4);
sF = reshape(transpose(F), 1, 16);
scatter3(sx, sy, sF,'o','black', 'filled')
% uvolnime zobrazenie pre dalsie vykreslenia
hold off
```

Príkaz **spapi** používame podobne aj v R^2. Zadané parametre (uzly a body interpolácie) rozšírime do R^2 pomocou zátvoriek {} priamo v príkaze - tak ako vidíte v konzolovom výstupe číslo 6.

Vykreslenie bodov interpolácie v programe Matlab nemá žiadnu jednoduchú funkciu. Aby sme si mohli vykresliť body interpolácie pomocou príkazu **scatter**, potrebovali sme využiť aj príkazy **reshape** a **repmat**. Poďme si ich preto podrobnejšie vysvetliť.

Príkaz **repmat** nám vracia príslušný počet opakovaní určeného vektora. V Matlabe sa zapisuje v základnom tvare, ktorý vidime v konzolovom výstupe 7.

Konzolový výstup: 7: Príkaz **repmat**

```
B = repmat(A,n)
```

Ako správne používať príkaz **repmat** a zároveň jeho praktické využitie spolu s jeho výstupom vidíme v konzolovom výstupe 8.

Konzolový výstup: 8: Využitie príkazu **repmat**

```
A = [1      2      3];

repmat(A, 1, 3)
ans =
     1      2      3      1      2      3      1      2      3

repmat(A, 3, 1)
ans =
     1      2      3
     1      2      3
     1      2      3
```

Pomocou príkazu **repmat** dostaneme novú maticu B (prípadne vektor - záleží od vstupných parametrov), ktorá vznikne z vektora A tak, ako si my samy určíme parametrami. Pre podrobnejšie informácie o príkaze **repmat** viď online zdroj [7].

Ďalej sme pre vykreslenie bodov použili príkaz **reshape**. Ten v Matlabe zapisujeme v tvare, ktorý môžeme vidieť v konzolovom výstupe 10.

Konzolový výstup: 9: Príkaz **reshape**

```
B = reshape(A,sz)
```

Príkaz **reshape** nám mení tvar našej pôvodnej matice na požadované nové rozmery. Pre podrobnejšie informácie o príkaze **reshape** viď online zdroj [8]. Jeho využitie môžeme vidieť v konzolovom výstupe 10.

Konzolový výstup: 10: Využitie príkazu **reshape**

```
A = [1 2 3;4 5 6; 7 8 9];

reshape(A, 1, 9)
ans =

     1     4     7     2     5     8     3     6     9
```

Nakoniec sme pre vykreslenie použili príkaz **scatter3**, ktorý nám naše body interpolácie vykreslí priamo do grafu - príkaz **scatter3** obsahuje aj číslo 3, pretože ho vykresľujeme v 3D.

Konečme teda môžeme prejsť k príkazu **spapi**. Pomocou neho dostávame výstup, ktorý vidíme v konzolovom výstupe číslo 11.

Konzolový výstup: 11: Príkaz **spapi**

```
spline =
      form: 'B-'
      knots: {[2 2 2 4 6 6 6]  [1 1 1 3 7 7 7]}
      coefs: [1x4x4 double]
      number: [4 4]
      order: [3 3]
      dim: 1
```

Pozornejší čitateľ si ihneď všimne nezrovnalosť vo výstupe pri **dim: 1**. Nejde o dimenziu ako ju poznáme v matematickom ohľade, ale o programátorské ošetrenie - číslo 1 pri výstupe dim je to isté ako aj 1 pri výstupe **coefs:**[1x4x4-*double*].

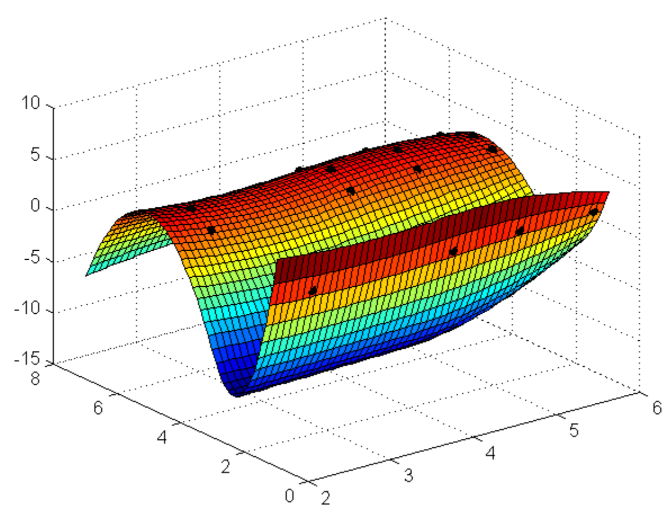
Vidíme, že nastáva problém v tom, že nevieme ihneď priamo z výstupu povedať, aké sú naše B-splajnové koeficienty, ktoré splajn určujú. Vieme zatiaľ povedať len to, aký tvar bude matica koeficientov $B : [1x4x4double]$ - z konzolového výstupu 11. Preto sme predchádzajúci kód obohatili o príkaz **spline.coefs**. Vďaka nemu vieme k týmto koeficientom pristupovať a teda koeficienty dostávame v tvare, ktorý môžeme vidieť v konzolovom výstupe číslo 12.

Konzolový výstup: 12: B-splajnové koeficienty

```
ans(:,:,1) =
          5.3020      4.2847      5.5839      3.0831
ans(:,:,2) =
        -17.0756    -16.0823    -16.3701     -7.2670
ans(:,:,3) =
         13.7415     10.2068     13.5654      8.0498
ans(:,:,4) =
         -4.9077     -3.7138     -4.1824     -2.4205
```

Opäť je veľmi dôležité uvedomiť si rozdiel v našej doterajšej teórií a v ponímaní Matlabu. My pracujeme v diplomovej práci s B-splajnom v tvare $B_{i,k+1}$, pričom Matlab pracuje s B-splajnom v tvare $B_{i,k}(x)$!

Výsledný graf tohoto interpolačného splajnu je znázornený na obrázku číslo 10.

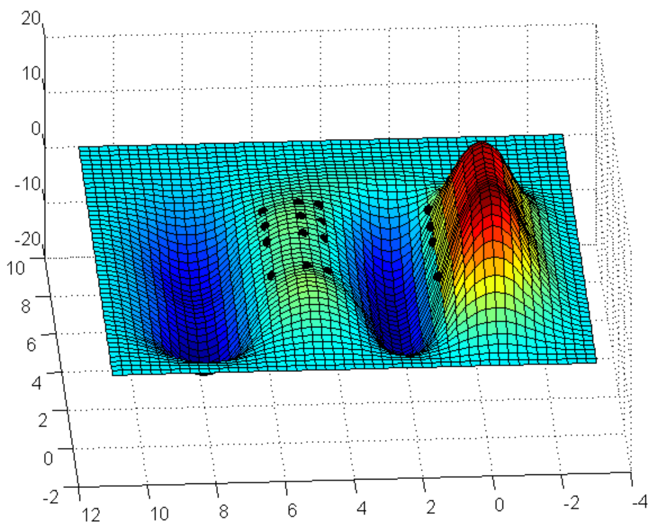


Obr.č. 10: Interpolačný splajn $s(x, y)$

Pri zmene uzlov z násobných na nenásobné, kedy máme rozšírenú sieť uzlov $(\Delta\lambda+) = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ a $(\Delta\mu+) = \{-3, -1, 1, 3, 7, 9, 11\}$ sa nám menia koeficienty (konzolový výstup číslo 13) a aj obrázok (graf číslo 11).

Konzolový výstup: 13: B-splajnové koeficienty

```
ans(:,:,1) =
           30.7073    24.6517    27.5379    -0.6715
ans(:,:,2) =
          -18.0688   -16.0823   -16.3701     1.8361
ans(:,:,3) =
           17.2762    10.2068    13.5654     2.5341
ans(:,:,4) =
         -17.7903   -10.6741   -13.0563    -2.2549
```



Obr.č. 11: Interpolačný splajn $s(x, y)$

Obrázok číslo 11 bolo potrebné otočiť, aby sme mohli vidieť, že výsledný splajn skutočne prechádza bodmi x a y.

Ak by sme si splajn na obrázku číslo 11 vykreslili len v obdĺžniku $D = [a, b] \times [c, d]$ v našom prípade je to $D = [2, 6] \times [1, 7]$, tak by sme dostali totožný obrázok s obrázkom číslo 10. Je to tým, že sú splnené podmienky regularity, (ktoré sú už ošetrené priamo v príkazoch Spline Toolbox-u), a teda náš príklad má práve jedno riešenie. Čiže existuje práve jeden interpolačný splajn $s_{2,2}(x, y)$.

Príklad 2.2 Našou úlohou je nájsť interpolačný splajn $s_{k,l}(x, y) = s_{3,2}(x, y)$ so sieťou uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 3, 6\}$ a $(\Delta\mu) = \{0, 2, 4\}$, kde body interpolácie sú $(\Delta x) =$

$\{0, 1.5, 3.5, 5.5, 6\}$ a $(\Delta y) = \{0, 1, 2.5, 4\}$ s maticou funkčných hodnôt

$$F = \begin{pmatrix} 1.80 & 2.25 & 2.40 & 1.68 \\ 1.90 & 3.38 & 3.70 & 1.93 \\ 2.50 & 5.12 & 5.90 & 2.33 \\ 2.40 & 3.50 & 3.23 & 2.33 \\ 1.00 & 1.50 & 1.75 & 1.40 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 2.2 Na začiatku si opäť určíme dimenziu

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{S}_{k,l}(\Delta\lambda, \Delta\mu)) &= \dim(\mathrm{S}_k(\Delta\lambda))\dim(\mathrm{S}_l(\Delta\mu)) = \\ &= (g + k + 1)(h + l + 1) = (1 + 3 + 1)(1 + 2 + 1) = \\ &= 5 \cdot 4 = 20. \end{aligned}$$

Sieť uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 3, 6\}$ je preto potrebné rozšíriť na rozšírené siete uzlov $(\Delta\lambda{+}_1) = \{0, 0, 0, 0, 3, 6, 6, 6, 6\}$ alebo $(\Delta\lambda{+}_2) = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ a sieť uzlov $(\Delta\mu) = \{0, 2, 4\}$ rozšírime na rozšírenú sieť uzlov $(\Delta\mu{+}_1) = \{0, 0, 0, 2, 4, 4, 4\}$ alebo na $(\Delta\mu{+}_2) = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

Najprv budeme pracovať s násobnými uzlami $(\Delta\lambda{+}_1) =$ a $(\Delta\mu{+}_1)$. Do Matlabu si zadáme príkazy z konzolového výstupu číslo 14.

Konzolový výstup: 14: Interpolačný splajn

```
lambda = [0 0 0 0 3 6 6 6 6];
ni = [0 0 0 2 4 4 4];
x = [0 1.5 3.5 5.5 6];
y = [0 1 2.5 4];
F = [1.8 2.25 2.4 1.68; 1.9 3.38 3.7 1.93; 2.5 5.12 5.9 2.33; ...
    2.4 3.5 3.23 2.33; 1 1.5 1.75 1.4];

spline = spapi({lambda ni},{x,y},F)
spline.coefs
fnplt (spline)
hold on

% pre zobrazenie bodov na grafe si potrebujeme zistit
% dimenzie vektorov x, y a ich spolocnu buducu dimenziu
dimx = size(x, 2);
dimy = size(y, 2);
dimf = dimx * dimy;
```

```
sx = reshape(repmat(x, dimy, 1), 1, dimf);
sy = repmat(y, 1, dimx);
sf = reshape(transpose(F), 1, dimf);
scatter3(sx, sy, sf, 'o', 'black', 'filled')
hold off
```

Príkaz **spapi** nám v Matlabe vypíše výstup, ktorý vidíme v konzolovom výstupe číslo 15.

Konzolový výstup: 15: Príkaz **spapi**

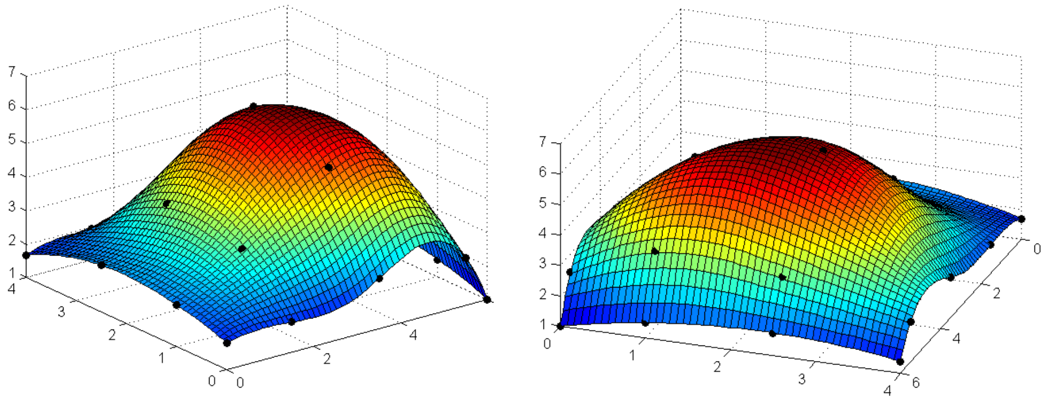
```
spline =
        form: 'B-'
        knots: {[0 0 0 0 3 6 6 6 6]  [0 0 0 2 4 4 4]}
        coefs: [1x5x4 double]
        number: [5 4]
        order: [4 3]
        dim: 1
```

Príkaz **spline.coefs** nám v Matlabe vypíše výstup B-splajnových koeficientov, ktorý vidíme v konzolovom výstupe číslo 16.

Konzolový výstup: 16: B-splajnové koeficienty

```
ans(:,:,1) =
        1.8000    2.2493    0.7739    4.6725    1.0000
ans(:,:,2) =
        2.3850    3.3572    5.4519    7.5590    1.6333
ans(:,:,3) =
        2.4750    1.6378    9.5144    4.0469    1.8333
ans(:,:,4) =
        1.6800    2.2341    1.0923    3.8548    1.4000
```

Nakoniec si náš výsledný splajn $s_{3,2}(x, y)$ vykreslíme. Výsledný graf vidíme na obrázku číslo 12. Náš splajn si opäť vykreslíme z oboch strán, aby sme videli jeho tvar, a že vykreslený splajn skutočne prechádza cez všetky interpolačné body $[x_i, y_i]$.



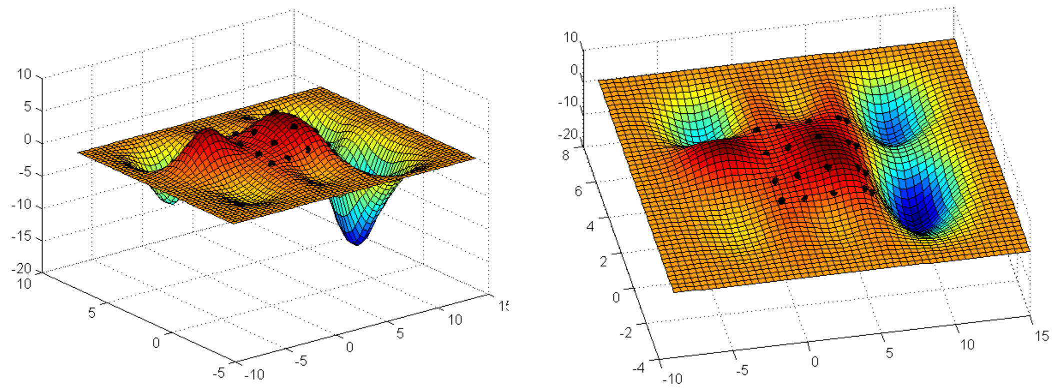
Obr.č. 12: Interpolačný splajn $s(x, y)$

Ostáva nám už len zmeniť rozšírené uzly z násobných na nenásobne a ukázať ako sa nám zmenia B-splajnové koeficienty splajnu $s_{3,2}(x, y)$. V prípade, že rozšírené siete uzlov budú mať tvar $(\Delta\lambda +_2)$ a $(\Delta\mu +_2)$, tak naše B-splajnové koeficienty budú nadobúdať hodnoty, ktoré vidíme v konzolovom výstupe číslo 17.

Konzolový výstup: 17: B-splajnové koeficienty

```
ans(:,:,1) =
          -3.4624      3.6641     -3.9040      4.6310    -12.4198
ans(:,:,2) =
          -0.3811      2.3098      5.4519      8.6125    -30.1019
ans(:,:,3) =
          14.5377     -2.3005      9.5144      1.3132     -3.7672
ans(:,:,4) =
          -19.0018      7.9104     -7.3298      9.1589    -23.5056
```

Výsledný graf môžeme vidieť vykreslený na obrázku číslo 13. Náš splajn si opäť vykreslíme aj zboku (aby sme videli jeho tvar) a následne si ho otočíme, aby sme sme sa presvedčili, že vykreslený splajn skutočne prechádza cez všetky interpolačné body (Δx) a (Δy).



Obr.č. 13: Interpolačný splajn $s(x, y)$

Na záver príkladov o interpolácií B-splajnov v R^2 by bolo dobre upozorniť na zopár drobností. Pri určovaní siete uzlov je potrebné brať ohľad na interpolačné body. V prípade, ak by napríklad sieť uzlov vyzerala $(\Delta\lambda+) = \{0, 0, 0, 0, 3, 6, 6, 6, 6\}$ a body interpolácie by boli $(\Delta x) = \{-1, 1.5, 3.5, 5.5, 6\}$, tak by sa náš výsledný graf správal veľmi nezvyčajne - neprechádzal by cez interpolačné body alebo by sa graf vôbec nevykreslil. Z toho dôvodu existuje podmienka, že $x_i \in [a, b], a = \lambda_0, b = \lambda_{g+1}$ a podobná podmienka je aj pre y_j - viď definícia 2.2.

Taktiež je veľmi dôležité dbať na to, aby sme pri rozšírenej sieti uzlov rozšírili pôvodnú sieť uzlov $(\Delta\lambda)$ o k uzlov napravo a aj naľavo. V prípade, žeby sme napríklad sieť uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 3, 6\}$ rozšírili na rozšírenú sieť uzlov tvaru $(\Delta\lambda+) = \{0, 0, 0, 0, 3, 6, 6, 6\}$ (pravú stranu sme rozšírili o jeden uzol menej ako ľavú), tak nám Matlab vyhodí chybu typu: **??? Error using ==¿ slvblk at 54 The coefficient matrix has a nontrivial nullspace.**

2.3. Metóda najmenších štvorcov

Metóda najmenších štvorcov (tiež známa ako MNŠ - zo slovenského metóda najmenších štvorcov príp. ako MNČ - z českého metoda nejmenších čtverců) je jedna z najznámejších aproximačných metód. Využívať ju budeme hlavne vtedy, keď počet bodov aproximácie $[x_p, y_q]; p = 1, ..., m, q = 1, ..., n$ je výrazne vyšší ako počet uzlov $(\Delta\lambda)$ a $(\Delta\mu)$.

Opäť máme zadané pôvodné rastúce siete uzlov $(\Delta\lambda)$ a $(\Delta\mu)$, ktoré vhodným spôsobom rozšírime na rozšírené siete uzlov $(\Delta\lambda+)$ a $(\Delta\mu+)$, tak ako sme si ich definovali vo vzťahu (23) a (24).

Ďalej nech sú dané rastúce postupnosti bodov interpolácie $x_p, p = 1, ..., m$; $x_p \in [a, b]$ a $y_q, q = 1, ..., n$; $y_q \in [c, d]$, ku ktorým je známa matica zodpovedajúcich funkčných hodnôt F, tzn.:

$$F = (f_{p,q})_{p=1,q=1}^{m\ \ \ n} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Cieľom metódy najmenších štvorcov je nájsť taký splajn $s_{k,l}(x, y)$,pre ktorý bude platiť, že súčet druhých mocnín chýb aproximácie v daných bodoch je minimálny (odchýlky sú čo najmenšie.) Tento splajn budeme hľadať na definičnom obore $D = [a, b] \times [c, d]$, ktorý sme si definovali v definícií 2.1.

Takže našou úlohou bude nájsť splajn $s_{k,l}(x, y)$, ktorý aproximuje dáta $(x_p, y_q, f_{p,q}), p = 1, ..., m; q = 1, ..., n$ v zmysle metódy najmenších štvorcov, teda taký splajn, ktorý minimalizuje funkciu

$$L(s_{k,l}(x, y)) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} w_{p,q}[f_{p,q} - s_{k,l}(x_p, y_q)]^2, \tag{27}$$

pričom symbolom $w_{p,q}$ budeme označovať váhy, pričom $w_{p,q} > 0$, pomocou ktorých určujeme dôležitosť funkčných hodnôt $f_{p,q}$. Pre ďalšie použitie budeme uvažovať, že váhy $w_{p,q} = 1; \forall p = 1, ..., m$ a $\forall q = 1, ..., n$.

Vráťme sa späť k vzťahu (25), kedy sme si splajn vyjadrili pomocou B-splajnových koeficientov $b_{i,j}$,tzn.:

$$s_{k,l}(x, y) = \sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} b_{i,j} M_{i,k+1}(x) N_{j,l+1}(y), x \in R, y \in R. \tag{28}$$

Pri maticovom vyjadrení splajnu sme používali kolokačné matice $C_{k+1}(\vec{x})$ a $D_{l+1}(\vec{y})$, pričom

$$C_{k+1}(\vec{x}) = (M_{i,k+1}(x_p))_{p=1,i=-k}^{m\ \ \ g}$$

predstavuje kolokačnú maticu funkčných hodnôt jednotlivých B-splajnov v bodoch interpolácie $x_p, p = 1, ..., m$ a

$$D_{l+1}(\vec{y}) = (N_{j,l+1}(y_q))_{q=1,j=-l}^{n \quad h}$$

predstavuje kolokačnú maticu funkčných hodnôt jednotlivých B-splajnov v bodoch interpolácie $y_q, q = 1, ..., n$.

Splajn zo vzťahu (28) (váhy $w_{p,q}$ budeme uvažovať rovné jednej), môžeme zapísať podľa [2] (strana 170) v tvare

$$s_{k,l}(\vec{x}, \vec{y}) = (C_{k+1}(\vec{x}) \otimes D_{l+1}(\vec{y}))cs(B) = cs(F). \tag{29}$$

Predtým ako budeme pokračovať ďalej je dôležité vysvetliť si symboly $\otimes$ a $cs(F)$, ktoré boli použité vo vzťahu (29) a predstavujú Kronekerov súčin, taktiež nazývaný tensorový, a maticu F prepísanú do vektorového tvaru. Oba tieto symboly budeme neskôr používať.

Definícia 2.3 Nech A je matica typu $p \times s$ a B je matica typu $t \times q$ s prvkami $a_{i,j}; i = 1, ..., p; j = 1, ..., s$ a $b_{i,j}; i = 1, ..., t; j = 1, ..., q$. Štruktúra matice $A \otimes B$ s rozmermi $pt \times sq$ je definovaná

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & ... & a_{1,s}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & ... & a_{2,s}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1}B & a_{p,2}B & ... & a_{p,s}B \end{pmatrix} \tag{30}$$

a nazývame ju Kronekerov súčin matíc A a B.

Ďalej budeme využívať aj vlastnosti Kronekerovho súčinu, ktoré sme prevzali z [2]:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$$

$$cs(A_{p \times s} X_{s \times t} B_{t \times q}) = (B^T \otimes A)cs(X),$$

pričom pre maticu X

$$X = (x_{i,j})_{i=1,j=1}^{p\ \ \ s},$$

budeme symbolom $cs(X)$ rozumieť vektor s rozmermi $ps \times 1$, čiže v tvare

$$cs(X) = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,s} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,s} \\ \vdots \\ x_{p,s} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Vráťme sa späť k funkcii (27), ktorú chceme minimalizovať. Tú si pomocou vzťahu (28) môžeme prepísať na vzťah

$$L(s_{k,l}(x,y)) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} w_{p,q}[f_{p,q} - \sum_{i=-k}^{g}\sum_{j=-l}^{h} b_{i,j}M_{i,k+1}(x_p)N_{j,l+1}(y_q)]^2, \tag{32}$$

ktorý minimalizujeme. Najprv nájdeme stacionárny bod tejto funkcie, teda vypočítame jej derivácie podľa premenných $b_{i,j}$ a položíme rovný 0. Dostaneme normálnu sústavu rovníc, ktorá má podľa [2] tvar

$$(C_{k+1}(\vec{x}) \otimes D_{l+1}(\vec{y}))^T (C_{k+1}(\vec{x}) \otimes D_{l+1}(\vec{y}))cs(B) = (C_{k+1}(\vec{x}) \otimes D_{l+1}(\vec{y}))^T cs(F). \tag{33}$$

Tento vzťah môžeme pomocou vlastností Kronekerovho súčinu podľa [2] postupne upraviť na tvar

$$(C_{k+1}(\vec{x})^T C_{k+1}(\vec{x}) \otimes D_{l+1}(\vec{y})^T D_{l+1}(\vec{y}))cs(B) = (C_{k+1}(\vec{x})^T \otimes D_{l+1}(\vec{y})^T)cs(F), \tag{34}$$

a odtiaľ upraviť na tvar

$$cs(D_{l+1}(\vec{y})^T D_{l+1}(\vec{y}) B C_{k+1}(\vec{x})^T C_{k+1}(\vec{x})) = cs(D_{l+1}(\vec{y})^T F C_{k+1}(\vec{x})). \tag{35}$$

Jednoznačnosť riešenia nášho vzťahu, a teda aj jednoznačné určenie hľadaného aproximačného splajnu, je závislé na tom, či je matica $[D_{l+1}(\vec{y})^T D_{l+1}(\vec{y})]$ spolu s maticou $[C_{k+1}(\vec{x})^T C_{k+1}(\vec{x})]$ regulárna. V prípade, ak je zachovaná regularita týchto matíc, sme schopní zostrojiť ich inverziu. Aby matice $[C_{k+1}(\vec{x})^T C_{k+1}(\vec{x})]$ a $[D_{l+1}(\vec{y})^T D_{l+1}(\vec{y})]$ boli regulárne, tak potom matice $C_{k+1}(\vec{x})$ a $D_{l+1}(\vec{y})$ musia byť plnej stĺpcovej hodnosti. Čiže musia existovať také postupnosti $\{u_{-k}, ..., u_g\} \subset \{x_1, ..., x_m\}$, pričom $u_i < u_{i+1}, i = -k, ..., g$ a $\{v_{-l}, ..., v_h\} \subset \{y_1, ..., y_n\}$, pričom $v_j < v_{j+1}, j = -l, ..., h$, a tiež, aby platilo

$$\lambda_i < u_i < \lambda_{i+k+1}, \quad i = -k, ..., g,$$
$$\mu_j < v_j < \mu_{j+l+1}, \quad j = -l, ..., h.$$

V takomto prípade môžeme povedať, že existuje riešenie lineárnej sústavy rovníc 35

$$B^* = [D_{l+1}(\vec{y})^T D_{l+1}(\vec{y})]^{-1} D_{l+1}(\vec{y})^T F C_{k+1}(\vec{x}) [C_{k+1}(\vec{x})^T C_{k+1}(\vec{x})]^{-1}, \tag{36}$$

kde B^* je matica B-splajnových koeficientov a existuje práve jeden splajn $s^*_{k,l}(x, y)$, ktorý je najlepšou aproximáciou hodnôt $\{x_p, y_q; f_{p,q}\}$ v zmysle metódy najmenších štvorcov.

Pre využitie metódy najmenších štvorcov budeme opäť využívať Spline Toolbox, ktorý sme si vo verzií Matlabu R2008a dodatočne doinštalovali. Spline Toolbox má na využitie metódy najmenších štvorcov v Matlabe funkciu **spap2**. Podrobnejšie si ju rozoberieme a ukážeme jej praktické využitie v nasledujúcom príklade.

Príklad 2.3 Nájdite splajn $s_{3,4}(x, y)$ so sieťou uzlov $(\Delta\lambda) = \{0, 3, 4.5, 6, 7.5, 10.5\}$ a $(\Delta\mu) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, ktorý v zmysle metódy najmenších štvorcov aproximuje body $(\Delta x) = \{0, 1, 1.5, 2, 3.5, 4.5, 5.5, 6, 7, 8, 8.5, 9, 9.5, 10\}$ a $(\Delta y) = \{0, 1, 2.5, 3.5, 4, 5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8\}$. Matica funkčných hodnôt F v bodoch aproximácie

$[x_p, y_q], p = 1, ..., 1; q = 1, ...11$ nadobúda hodnoty a má tvar

$$F = \begin{pmatrix} 1.80 & 2.55 & 2.65 & 2.80 & 3.70 & 4.50 & 1.30 & 1.80 & 4.98 & 3.68 & 2.50 \\ 1.85 & 2.75 & 2.79 & 2.99 & 3.80 & 4.95 & 1.85 & 1.99 & 5.74 & 4.48 & 3.46 \\ 1.90 & 2.88 & 3.40 & 3.80 & 4.17 & 5.25 & 2.30 & 2.80 & 2.98 & 2.68 & 2.45 \\ 1.99 & 3.25 & 3.48 & 4.80 & 4.76 & 4.95 & 3.30 & 3.58 & 3.98 & 2.07 & 1.42 \\ 2.00 & 3.37 & 3.78 & 5.78 & 5.88 & 6.50 & 2.30 & 4.80 & 4.98 & 1.98 & 1.25 \\ 2.80 & 3.95 & 4.40 & 6.82 & 7.71 & 8.51 & 1.37 & 5.28 & 5.98 & 1.99 & 1.25 \\ 3.40 & 4.25 & 4.74 & 7.48 & 8.73 & 9.35 & 1.30 & 4.80 & 4.98 & 1.88 & 1.25 \\ 3.80 & 4.75 & 5.49 & 10.80 & 9.77 & 9.50 & 1.38 & 2.98 & 2.99 & 1.68 & 1.05 \\ 2.80 & 3.95 & 4.64 & 9.80 & 9.70 & 8.50 & 2.30 & 1.98 & 2.28 & 1.48 & 0.88 \\ 2.44 & 3.25 & 3.76 & 6.80 & 7.74 & 7.51 & 3.73 & 1.80 & 2.18 & 1.38 & 0.75 \\ 2.21 & 2.25 & 3.40 & 4.18 & 5.62 & 6.35 & 4.33 & 1.99 & 2.08 & 1.26 & 0.66 \\ 2.08 & 2.15 & 2.84 & 3.74 & 4.72 & 5.57 & 3.73 & 2.80 & 2.98 & 1.24 & 0.55 \\ 1.80 & 1.85 & 2.66 & 2.80 & 3.73 & 4.51 & 2.30 & 1.80 & 2.98 & 1.19 & 0.47 \\ 1.40 & 1.67 & 2.40 & 2.55 & 2.54 & 4.50 & 1.30 & 1.45 & 2.80 & 1.03 & 0.34 \end{pmatrix}.$$

Váhové koeficienty $w_{p,q}, p = 1, ..., 14; q = 1, ..., 11$ uvažujeme rovné jednej.

Riešenie 2.3 Pre výpočet nami hľadaného splajnu $s_{3,4}(x, y)$ v zmysle metódy najmenších štvorcov je potrebné najprv do Matlabu zadať vstupné hodnoty, ktoré vidíme v konzolovom výstupe 18.

Konzolový výstup: 18: MNČ - vstupné hodnoty

```
% zadanie prikladu - uvodne hodnoty
lambda = [0 3 4.5 6 7.5 10.5];
ni = [0 2 3 4 5 6 8];
x = [0 1 1.5 2 3.5 4.5 5.5 6 7 8 8.5 9 9.5 10];
y = [0 1 2.5 3.5 4 5 6 6.5 7 7.5 8];
F = [
1.80 2.55 2.65 2.80 3.70 4.50 1.30 1.80 4.98 3.68 2.50; ...
1.85 2.75 2.79 2.99 3.80 4.95 1.85 1.99 5.74 4.48 3.46; ...
1.90 2.88 3.40 3.80 4.17 5.25 2.30 2.80 2.98 2.68 2.45; ...
1.99 3.25 3.48 4.80 4.76 4.95 3.30 3.58 3.98 2.07 1.42; ...
2.00 3.37 3.78 5.78 5.88 6.50 2.30 4.80 4.98 1.98 1.25; ...
2.80 3.95 4.40 6.82 7.71 8.51 1.37 5.28 5.98 1.99 1.25; ...
3.40 4.25 4.74 7.48 8.73 9.35 1.30 4.80 4.98 1.88 1.25; ...
3.80 4.75 5.49 10.80 9.77 9.50 1.38 2.98 2.99 1.68 1.05; ...
2.80 3.95 4.64 9.80 9.70 8.50 2.30 1.98 2.28 1.48 0.88; ...
2.44 3.25 3.76 6.80 7.74 7.51 3.73 1.80 2.18 1.38 0.75; ...
2.21 2.25 3.40 4.18 5.62 6.35 4.33 1.99 2.08 1.26 0.66; ...
2.08 2.15 2.84 3.74 4.72 5.57 3.73 2.80 2.98 1.24 0.55; ...
```

```
1.80 1.85 2.66 2.80 3.73 4.51 2.30 1.80 2.98 1.19 0.47; ...
1.40 1.67 2.40 2.55 2.54 4.50 1.30 1.45 2.80 1.03 0.34];
```

Na výpočet splajnu v zmysle metódy najmenších štvorcov pozná Matlab príkaz **spap2** (ako sme už spomínali vyššie), ktorý zadávame v tvare

$$spap2(\lambda, \mu, [k, l], \{x, y\}, F).$$

Použitie príkazu **spap2**, a teda výpočet splajnu $s_{3,4}(x, y)$ v zmysle metódy najmenších štvorcov v Matlabe vidíme v konzolovom výstupe čislo 19.

Konzolový výstup: 19: MNČ - výpočet

```
% vypocitame si spline
spline = spap2({lambda, ni},[3,4],{x,y},F)
spline.coefs
% vykreslime spline
fnplt (spline)

% podrzime si zobrazenie vykresleneho grafu splinu
hold on

% pre zobrazenie bodov na grafe si potrebujeme zistit
% dimenzie vektorov x, y a ich spolocnu buducu dimenziu
dimx = size(x, 2);
dimy = size(y, 2);
dimf = dimx * dimy;

sx = reshape(repmat(x, dimy, 1), 1, dimf);
sy = repmat(y, 1, dimx);
sf = reshape(transpose(F), 1, dimf);
scatter3(sx, sy, sf, 'o', 'black', 'filled')

% uvolnime zobrazenie pre dalsie vykreslenia
hold off
```

Z príkazu **spap2** dostávame v Matlabe výstup, ktorý vidíme v konzolvom výstupe 20.

Konzolový výstup: 20: Príkaz **spap2**

```
spline =
        form: 'B-'
        knots: {[0 3 4.5000 6 7.5000 10.5000]
```

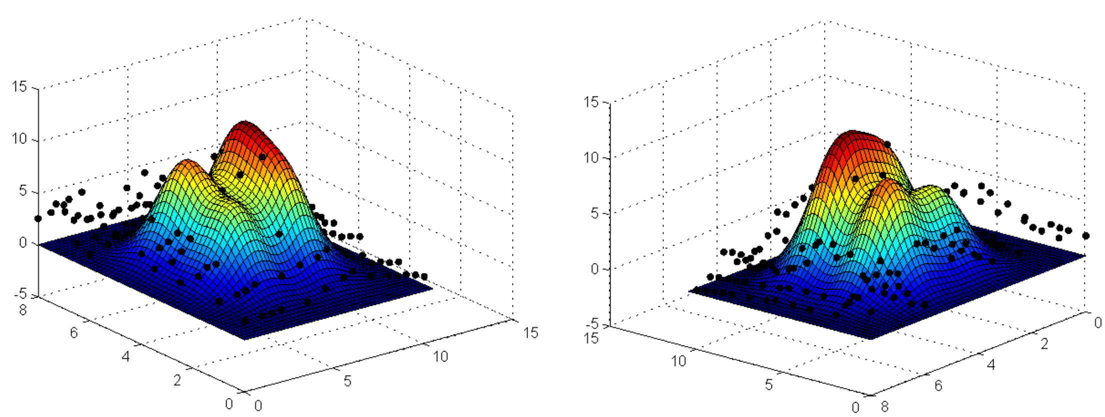
```
            [0  2  3  4  5  6  8]}
coefs:  [1x3x3  double]
number:  [3  3]
order:  [3  4]
dim:  1
```

Príkaz **spline.coefs** nám v Matlabe vypíše výstup B-splajnových koeficientov, ktorý vidíme v konzolovom výstupe číslo 21.

Konzolový výstup: 21: Príkaz **spline.coefs**

```
ans(:,:,1) =
   10.4455      5.5372     12.8791
ans(:,:,2) =
    6.7311      6.5607     14.0587
ans(:,:,3) =
   14.5682      6.8382     16.3728
```

Splajn si nakoniec vykreslíme. Pomocou funkcie otáčania v programe Matlab si vytvoríme dva rôzne pohľady, ktoré môžeme vidieť na obrázku číslo 14. Výsledkom je splajn, ktorý vznikol v zmysle metódy najmenších štvorcov.



Obr.č. 14: Interpolačný splajn $s(x,y)$

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo zoznámiť sa a vysvetliť problematiku B-splajnov a ukázať jej využitie v matematickom softvéri Matlab. Ten som preto rozobrala do menších bodov, s ktorými som zoznámila čitateľa v dvoch kapitolách.

V prvej kapitole som sa venovala B-splajnom v R^1, keďže B-splajny som nemala zahrnuté v osnovách žiadneho kurzu z numerickej matematiky. Vysvetlila som v nej základné pojmy, ktoré boli pre teóriu potrebné ako napríklad splajn, B-splajn, sieť uzlov, rozšírená sieť uzlov, interpolácia, body interpolácie. V Matlabe som demonštrovala využitie Spline Toolboxu a vysvetlila som základný príkaz spapi na interpoláciu B-splajnov v R^1. Vyriešila som príklad, v ktorom som poukázala, aký je (aj grafický) rozdiel použitia násobných a nenásobných rozšírených sietí uzlov.

V druhej kapitole som už prešla k hlavnej téme diplomovej práce B-splajnom v R^2. Základnú teóriu, ktorú som vysvetlila v prvej kapitole, som zovšeobecnila do dvoch premenných. Opäť som sa zaoberala základnými pojmami, ktoré som však teraz rozšírila na využitie v R^2. V Matlabe som vyriešila dva rôzne príklady, pričom v prvom prípade som hľadala interpolačný splajn so stupňami $s_{2,2}(x, y)$, a v druhom príklade som ukázala, že je možné riešiť aj splajn stupňa $s_{3,2}(x, y)$ - stupne k a l boli rozličné. V príkladoch som vysvetlila aj využitie príkazov repmat a reshape v softvéri Matlab, aby som mohla priamo do grafu vykresliť interpolačné body a grafický znáznorniť, že výsledný splajn skutočne tieto body interpoluje.

Druhú kapitolu som následne rozšírila o využitie metódy najmenších štvorcov a poukázala som na jej praktické využitie v prípade, ak by bol zadaný výrazne vyšší počet bodov aproximácie ako je počet uzlov. Teóriu som rozšírila o pojem Kronekerov súčin, prípadne tensorov súčin a vysvetlila som jeho využitie v prípade úlohy MNČ. V Matlabe som vysvetlila využitie príkazu spap2 a následne som vyriešila príklad s využitím daného príkazu.

Svoj cieľ diplomovej práce preto považujem za splnený. Na záver by som chcela už len poznamenať citát od Hermanna Weyla, nemeckého matematika:

„Matematika je veda o nekonečne, jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov.“

Vo svojej diplomovej práci som sa s týmto citátom absolútne stotožila - nič nie je nemožné. Treba len vedieť nájsť ten správny symbol na jeho označenie.

Literatúra

[1] Kobza, J.: *SPLAJNY* Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, Olomouc, 1993.

[2] Diercks, P.: *Curve and Surface Fitting with Splines.* Clarendon Press, 1993.

[3] Lyche, T., Morken, K.: *Spline Methods Draft* University of Oslo, 2008. Dostupné z: http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF-MAT5340/v10/undervisningsmateriale/book.pdf.

[4] Machalová, J.: *Optimal interpolating and optimal smoothing splines.* Journal of electric engineering, vol.53, no.12/s, 2009, 79 - 82

[5] Smělá, A.: *Interpolace splajny.* Bakalárská práca, KMAaAM, Olomouc, 2009.

[6] MathWorks Documentation: *How to Construct Splines* [online]. Dostupné z: http://www.mathworks.com/help/curvefit/examples/how-to-construct-splines.html.

[7] MathWorks Documentation: *repmat* [online]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/repmat.html.

[8] MathWorks Documentation: *reshape* [online]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/reshape.html.