



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

APLIKACE GRADIENTNÍ PRUŽNOSTI V PROBLÉMECH LOMOVÉ MECHANIKY

APPLICATION OF THE GRADIENT ELASTICITY IN FRACTURE MECHANICS PROBLEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. JAROMÍR KLEPÁČ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. MICHAL KOTOUL, DrSc.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2013/14

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Jaromír Klepáč

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Aplikace gradientní pružnosti v problémech lomové mechaniky

v anglickém jazyce:

Application of the gradient elasticity in fracture mechanics problems

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Klasické lokální modely kontinua, např. lineární pružnost, mají jeden významný nedostatek, totiž nepřítomnost charakteristického rozměru materiálu. V případě velkých gradientů napěťově-deformačního pole např. v okolí vrcholu trhliny, kdy délky, na kterých se toto pole řádově mění, jsou srovnatelné s typickým rozměrem mikrostruktury materiálu, jsou výsledky získané pomocí klasických lokálních modelů často odlišné od fyzikální reality. Gradientní teorie pružnosti patří do skupiny tzv. nelokálních modelů kontinua, které obsahují charakteristický rozměr a umožňují tak nedostatek klasických modelů odstranit. V současné době je tato problematika vysoce aktuální především v souvislosti s novými materiály a rozvojem nanotechnologií.

Cíle diplomové práce:

Diplomant se seznámí se základy gradientní teorie pružnosti a provede jejich rešerši. Dále se seznámí s principy lineární lomové mechaniky, odvozením singulárního řešení a to nejprve v oblasti klasické pružnosti a posléze v oblasti gradientní pružnosti. Poznatky budou dále aplikovány na tzv. keramické pěny, pro jejichž konstitutivní popis je právě gradientní teorie velmi vhodná. Vytvoří v programu MAPLE nebo MATEMATICA algoritmus řešení integrálních rovnic pro modelování vzorku z keramické pěny s centrální trhlinou. Výsledky budou porovnávány s výsledky získanými pomocí MKP se zabudovaným modelem gradientní pružnosti.

Seznam odborné literatury:

C.T. Sun, Z.H. Jin, Fracture Mechanics, Elsevier, Amsterdam 2012.

P.A. Gourgiotis, H.G. Georgiadis, Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by Dipolar gradient elasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 57(2009)1898–1920

N. Aravas, A.E. Giannakopoulos, Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity, International Journal of Solids and Structures 46 (2009) 4478–4503

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/14.

V Brně, dne 22.11.2013



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá aplikací gradientní pružnosti na problémy lomové mechaniky. Konkrétně jde o analytické vyjádření pole posuvů a následně pole napětí v okolí kořene trhliny. Uvažuje se přitom vliv mikrostruktury materiálu. Úvodní kapitoly jsou věnovány stručnému historickému přehledu gradientních modelů a definici základních rovnic gradientní dipolární pružnosti odvozené z II. varianty Mindlinovy gradientní teorie. Pro srovnání jsou uvedeny také vztahy z klasické pružnosti. Následuje odvození asymptotického pole posuvů užitím Williamsovy asymptotické techniky. Pro případ gradientní pružnosti je uveden také výpočet J-integrálu. Vzhledem k singulárnímu charakteru problému jsou zmíněny metody řešení singulárních integrálních rovnic, ke kterým vede matematická formulace problému ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty a Hadamardovy konečné části. Pro výpočet složitěho regulárního jádra, je zde uvedena rovněž Gauss-Čebyševova kvadratura. V práci jsou uvedeny také metody přibližného řešení systémů integrálních rovnic. Jedná se o metody vážených reziduí, zejména o pak metodu nejmenších čtverců v kolokačních bodech. V hlavní části práce je odvozen s využitím Fourierovy transformace systém integrálních rovnic pro nekonečnou desku s přímou vnitřní trhlinou zatíženou v nekonečnu tahovým napětím. Tento systém je následně numericky řešen v softwaru Mathematica a výsledky jsou porovnány s konečně prvkovým modelem keramické pěny.

Summary

The presented master's thesis deals with the application of the gradient elasticity in fracture mechanics problems. Specifically, the displacement and stress field around the crack tip is a matter of interest. The influence of a material microstructure is considered. Introductory chapters are devoted to a brief historical overview of gradient models and definition of basic equations of dipolar gradient elasticity derived from Mindlin gradient theory form II. For comparison, relations of classical elasticity are introduced. Then a derivation of asymptotic displacement field using the Williams asymptotic technique follows. In the case of gradient elasticity, also the calculation of the J-integral is included. The mathematical formulation is reduced due to the singular nature of the problem to singular integral equations. The methods for solving integral equations in Cauchy principal value and Hadamard finite part sense are briefly introduced. For the evaluation of regular kernel, a Gauss-Chebyshev quadrature is used. There also mentioned approximate methods for solving systems of integral equations such as the weighted residual method, especially the least square method with collocation points. In the main part of the thesis the system of integral equations is derived using the Fourier transform for straight crack in an infinite body. This system is then solved numerically in the software Mathematica and the results are compared with the finite element model of ceramic foam.

Klíčová slova

Dipolární gradientní pružnost, asymptotické pole posuvů, singulární a hypersingulární integrální rovnice, metoda vážených reziduí, kolokační metoda.

Keywords

Dipolar gradient elasticity, asymptotic displacement field, singular and hypersingular integral equations, weight residuum method, collocation method.

Bibliografická citace

KLEPÁČ, J. *Aplikace gradientní pružnosti v problémech lomové mechaniky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 42 s. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc..

Tímto prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedení prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc., s použitím odborné literatury uvedené v seznamu.

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce prof. RNDr. Michalu Kotoulovi, DrSc., za odborné konzultace, poskytnuté rady a připomínky k vlastnímu obsahu práce. Stejně tak bych chtěl poděkovat Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D. za konzultace k tvorbě výpočetního programu a Ing. Petru Skalkovi, Ph.D. za poskytnutí numerických výsledků k řešenému příkladu. V neposlední řadě děkuji za poskytnutí přístupu k výpočetním a úložným kapacitám sdružených skrze virtuální organizaci MetaCentrum VO.

Bc. Jaromír Klepáč

Obsah

1. Úvod	2
2. Historický přehled gradientních modelů	3
2.1. Mindlinova teorie.....	4
2.2. Teorie založené na Laplaceově operátoru	6
2.2.1 Eringen 1983.....	6
2.2.2. Aifantis 1992.....	7
3. Asymptotické pole posuvů	9
3.1. Základní rovnice klasické pružnosti.....	9
3.1.1. Odvození pole posuvů.....	10
3.2. Dipolární gradientní pružnost.....	12
3.2.1. Základní rovnice dipolární gradientní pružnosti.....	14
3.2.2. Asymptotické pole posuvů a napětí.....	15
4. Výpočet J-integrálu	18
5. Řešení integrálních rovnic.....	21
5.1. Metoda integrálních rovnic.....	21
5.2. Gauss-Čebyševova kvadratura	23
5.3. Metody vážených reziduí.....	24
5.3.1. Metoda kolokací.....	25
5.3.2. Metoda nejmenších čtverců v kolokačních bodech	25
6. Vlastní řešení integrálních rovnic	27
7. Numerické výsledky a porovnání s MKP	35
7.1. Popis programu a vlastní výpočet.....	35
7.2. Numerický výpočet.....	37
7.3. Porovnání výsledků	39
8. Diskuze a závěr	40
Literatura	41
Příloha č.1	

1. Úvod

Klasické teorie mechaniky, jako jsou lineární a nelineární pružnost a plasticita, jsou uplatňovány v širokém spektru základních problémů z oblastí civilního, chemického, mechanického, materiálového či fyzikálního inženýrství. Tyto teorie byly vyvinuty pro postížení změn a procesů rozeznatelných pouhým okem. V současné době se však stále častěji setkáváme s problémy na mikroskopické či atomové úrovni, kde klasické teorie ve srovnání s experimentem přestávají plně vyhovovat, neboť neuvažují vliv mikrostruktury materiálu.

Materiálem, u kterého velmi záleží na velikosti vnitřní struktury, jsou například keramické pěny (buněčné materiály obecně). Díky své nízké hustotě, resp. hmotnosti, a své tepelné vodivosti mají své uplatnění v řadě aplikací. Vzhledem k tomu, že jsou zároveň velmi náchylné na křehký lom, je v našem zájmu jejich lomové vlastnosti zkoumat. Jednou z teorií, která dobře postihuje chování těchto materiálů, je gradientní teorie pružnosti s definovanou charakteristickou velikostí buňky. V diplomové práci se obecně zaměřím na materiál s významným vlivem mikrostruktury, kterou definujeme charakteristickým rozměrem l .

V úvodní části jsou uvedeny různé typy gradientních teorií, z nichž pro popis lomového chování je vybrána 2. varianta Mindlinovy gradientní teorie. Z ní jsou odvozeny základní rovnice a užitím Williamsovy asymptotické techniky vyjádřeny pole posuvů v okolí kořene trhliny. S využitím Fourierovy transformace je sestaven systém sdružených integrálních rovnic. Zavedením tzv. „hustot“ v analogii s hustotami používanými v metodě spojitě rozdělených dislokací a jejich vyjádřením pomocí Čebyševových polynomů, lze singulární integrální rovnice řešit ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty, resp. Hadamardovy konečné části. Obdržená soustava funkcionálních rovnic se řeší metodou nejmenších čtverců v kolokačních bodech. Implementací problému v softwaru Mathematica získáme výsledné průběhy posuvů a smykového napětí podél líců trhliny. Tyto výsledky jsou v závěrečné kapitole porovnány s výsledky numerického řešení MKP modelu keramické pěny.

2. Historický přehled gradientních modelů

Snahy o zachycení vlivu mikrostruktury materiálu v rámci mechaniky kontinua pomocí gradientních členů vyššího řádu se objevily již v polovině 19. století. Cauchy (1850) tehdy v rovnicích kontinua použil vyšší parciální derivace pro lepší aproximaci chování diskrétního síťového modelu. Velikost základního elementárního objemu se v rovnicích objevuje jako přidaný konstitutivní parametr.

Tyto počáteční snahy nebyly matematicky zcela korektní, fyzikální podstatu však dokázaly dobře postihnout. O něco později vypracoval Voight (1887) rozsáhlý popis kinematiky deformace, zákonů zachování a konstitutivních vztahů diskrétního modelu pro materiál s krystalickou strukturou. Obsahoval molekulární rotace, posuvy a příslušné sdružené síly¹. Výsledné diferenciální rovnice však byly složité a k řešení daného okrajového problému bylo potřeba několika předpokladů omezujících obecnost.

Počátkem 20. století tuto tematiku rozšířili svou prací bratři Cosseratovi (1909). Doplnili kinematiku deformace materiálu o trojrozměrné rovnice kontinua obsahující 3 složky posunutí a 3 mikrorotace, a zahrnující také momentová napětí (*couple stresses*), které jsou sdružená s mikrorotacemi, v pohybových rovnicích.

Výrazněji se k tomuto tématu výzkum vrací pak až v 60. letech 20. století. Současně vycházejí publikace autorů jak východní (Aero a Kuvschinskii 1961, Palmov 1964, Kunin 1966), tak západní školy (Toupin 1962, 1964, Mindlin a Tiersen 1962, Mindlin 1964, 1965, ad.). Jedná se převážně o práce rozvíjející Cosseratovu teorii, případně teorie zavádějící momentová napětí.

Druhého znovuzrození dosahuje gradientní pružnost v 80. letech. Eringen tehdy odvodil jednoduchou teorii gradientní napjatosti ze své integrální nelokální teorie (Eringen 1983). Vedle něj inspirován svou teorií plasticity (Aifantis 1984) formuloval Aifantis a kol. teorii gradientní pružnosti pro konečné deformace (Triantafyllidis a Aifantis, 1986) a infinitesimální deformace (Aifantis 1992, Altan a Aifantis 1992, Ru a Aifantis 1993).

Ve srovnání s teoriemi z 60. let jsou tyto modely jednodušší a obsahují méně členů vyšších řádů. To se projevilo menším počtem konstitutivních parametrů, které je nutné pro užití dané teorie experimentálně určit. Zásadním principem při jejich formulaci tedy bylo zahrnout pouze ty členy vyšších derivací, které jsou skutečně potřebné pro postihnutí fyzikálního charakteru materiálu/úlohy.

S nástupem výkonné výpočetní techniky se téma gradientní pružnosti opět stává velmi aktuální. Jedná se jak o implementaci složitějších teorií z 60. let (Shu a kol. 1999, Amanatidou a Aravas 2002, Papanicopulos a kol. 2009), tak o rozpracování

¹ Sdružené síly konají virtuální práci na příslušných virtuálních změnách kinematických veličin

jednodušší Aifantiho teorie do konečných prvků (Tenek a Aifantis 2002, Askes a kol. 2008, Askes a Gitman 2009).

2.1. Mindlinova teorie

V roce 1964 prezentoval Mindlin svou teorii pružnosti s uvažováním mikrostruktury materiálu. Rozlišuje při tom veličiny na makroskopické a mikroskopické úrovni. Hustota kinetické energie (*kinetic energy density*) T , stejně jako hustota deformační energie (*deformation energy density*) U jsou pak zavedeny užitím obou druhů veličin jako [6]

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} \rho l_1^2 \dot{\psi}_{ij} \dot{\psi}_{ij}, \quad (1.1)$$

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} B_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + D_{ijklm} \gamma_{ij} \kappa_{klm} + F_{ijklm} \kappa_{ijk} \varepsilon_{lm} + G_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (1.2)$$

kde $u_i, \varepsilon_{ij}, \psi_{ij}, \gamma_{ij}$ a κ_{ijk} jsou makroskopické posuvy a přetvoření, mikroskopické deformace, relativní deformace a gradient mikroskopické deformace (*macroscopic displacement and strain, microscopic deformation, relative deformation, gradient of the microscopic deformation*).

Makroskopické přetvoření je definováno standardně jako $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$, relativní deformace jako $\gamma_{ij} = u_{j,i} - \psi_{ij}$ a gradient mikroskopické deformace jako $\kappa_{ijk} = \psi_{jk,i}$. Symbolem ρ označujeme hustotu materiálu a l_1 představuje charakteristický rozměr mikrostruktury materiálu. Konstitutivní tenzory $C_{ijkl}, B_{ijkl}, A_{ijklmn}, D_{ijklm}, F_{ijklm}$ a G_{ijkl} obsahují celkem 1764 konstant, z nichž 903 je vzájemně nezávislých. Pro izotropní materiál je počet nezávislých elastických koeficientů redukován na 18. S jejich pomocí lze pak hustotu deformační energie napsat ve tvaru [6]

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji} + g_1 \gamma_{ii} \varepsilon_{jj} + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \varepsilon_{ij} \\ & + a_1 \kappa_{iik} \kappa_{kjj} + a_2 \kappa_{iik} \kappa_{jkj} + \frac{1}{2} a_3 \kappa_{iik} \kappa_{jjk} + \frac{1}{2} a_4 \kappa_{ijj} \kappa_{ikk} + a_5 \kappa_{ijj} \kappa_{kik} + \frac{1}{2} a_8 \kappa_{iji} \kappa_{kjk} \\ & + \frac{1}{2} a_{10} \kappa_{ijk} \kappa_{ijk} + a_{11} \kappa_{ijk} \kappa_{jki} + \frac{1}{2} a_{13} \kappa_{ijk} \kappa_{ijk} + \frac{1}{2} a_{14} \kappa_{ijk} \kappa_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} \kappa_{ijk} \kappa_{kji} \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde λ a μ jsou Lamého konstanty.

Abychom mohli uvedený vztah využít v praxi, je nejprve potřeba tyto konstanty přesně určit (např. pomocí experimentu), což není jednoduché. Mindlin proto formuloval také jednodušší verzi své teorie, kdy vyjádřil hustotu deformační energie pouze pomocí makroskopických posuvů. Rozlišuje tři varianty, které se liší vzájemným vztahem mezi makroskopickým posuvem u_i a gradientem mikroskopické deformace κ_{ijk} .

Varianta I $\kappa_{ijk} = u_{k,ij}$

Varianta II $\kappa_{ijk} = \varepsilon_{jk,i} = \frac{1}{2}(u_{k,ij} + u_{j,ik})$

Varianta III makroskopická deformace je rozdělena do dvou částí, a to gradientní makroskopické rotace $\chi_{ij} = \frac{1}{2}e_{jlm}u_{m,il}$ (kde e_{jlm} je Levi-Civitův permutační tenzor) a symetrické části 2. gradientu makroskopických posuvů $\kappa_{ijk} = 1/3(u_{ij,k} + u_{ji,k} + u_{ki,j})$.

Bez ohledu na teoretickou odlišnost těchto variant je pohybová rovnice pro všechny tři případy identická, a to i v případě vyjádření pomocí napětí.

V diplomové práci se však zaměříme na druhou variantu Mindlinovy teorie. Po drobných úpravách lze hustotu deformační a kinetické energie psát ve tvaru

$$U = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 \varepsilon_{ik,i} \varepsilon_{jj,k} + a_2 \varepsilon_{jj,i} \varepsilon_{kk,i} + a_3 \varepsilon_{ik,i} \varepsilon_{jk,j} + a_4 \varepsilon_{jk,i} \varepsilon_{jk,i} + a_5 \varepsilon_{jk,i} \varepsilon_{ij,k} \quad (1.4)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} \rho l_1^2 \dot{u}_{i,j} \dot{u}_{i,j} \quad (1.5)$$

a pohybovou rovnici pak odvodit jako [6]

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \frac{4a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + 3a_5}{2} u_{j,ijkk} - \frac{a_3 + 2a_4 + a_5}{2} u_{j,jkkk} + b_i \\ & = \rho (\ddot{u}_i - l_1^2 \ddot{u}_{i,jj}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

kde b_i je hustota objemových sil.

Předchozí vztah pak obsahuje jen 6 parametrů (1 hmotnostní, 5 elastických). Vhodnou úpravou lze počet parametrů dále redukovat na 3 (l_1, l_2, l_3) a pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$(\lambda + \mu) \left(1 - l_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) u_{j,ij} + \mu \left(1 - l_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) u_{i,jj} + b_i = \rho \left(1 - l_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \ddot{u}_i \quad (1.7)$$

kde

$$l_2 = \sqrt{\frac{4a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + 3a_5}{2(\lambda + \mu)}}, \quad l_3 = \sqrt{\frac{a_3 + 2a_4 + a_5}{2\mu}} \quad (1.8)$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, že parametry (l_1, l_2, l_3) mají rozměr délky a že všechny členy vyššího řádu jsou definovány jako Laplaceův veličin nižšího řádu. Toto platí jak pro členy související s tuhostí materiálu, tak pro členy související se setrvačností materiálu.

Poznamenejme, že gradienty Laplaceova typu se při aplikaci gradientní teorie objevují zcela přirozeně. Laplaceův operátor totiž popisuje difúzní procesy a gradienty Laplaceova typu tak reprezentují jevy nelokální redistribuce příslušné fyzikální veličiny.

2.2. Teorie založené na Laplaceově operátoru

Primární motivace pro použití gradientní pružnosti ve staticce je odstranění singularit objevujících se v okolí kořene trhliny a dislokačních jader. Výsledky mnohých prací dokazují (Eringen 1983, Altan and Aifantis 1992, Ru and Aifantis, ad.), že právě užitím vhodného gradientního modelu se můžeme těchto singularit vyvarovat.

Jednou z nejpopulárnějších teorií gradientní pružnosti je práce Aifantise a kolektivu z 90. let. Přestože byla jeho formulace inspirována dřívějšími studii gradientní plasticity, a nikoli elasticity s ohledem na mikrostrukturu, bylo později ukázáno (Altan a Aifantis 1997), že Aifantiho teorie je formálně speciálním případem Mindlinovy teorie. Jedná se konkrétně o variantu, kdy jsou si parametry l_2 a l_3 rovny.

Aifantiho teorii je možné zapisovat v různých tvarech, přičemž jedním z nich je např. formulace svazující složky tenzoru napětí a jejich vyšší gradienty. Ty se objevují také ve starší teorii gradientní pružnosti, kterou formuloval v roce 1983 Eringen. V následujících odstavcích tyto dvě teorie uvedeme v chronologickém sledu a všimneme si jejich odlišností.

2.2.1 Eringen 1983

Eringenova práce je pravděpodobně nejvíce známa užitím integrálního typu nelokality. Nelokální tenzor napětí σ_{ij}^g je počítán z lokálního tenzoru napětí σ_{ij}^c následujícím vzorcem [6]

$$\sigma_{ij}^g(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(s) \sigma_{ij}^c(\mathbf{x} + \mathbf{s}) dV \quad (1.9)$$

kde lokální napětí je vyjádřeno běžným způsobem jako $\sigma_{ij}^c = C_{ijkl} u_{k,l}$. Funkce $\alpha(s)$ představuje váhovou funkci, která je nezáporná a s rostoucí hodnotou s klesá. Nelokální napětí v bodě \mathbf{x} tedy v podstatě představuje vážený průměr lokálních napětí všech bodů v jeho okolí.

Eringen však formuloval také druhý tvar své teorie, ve které integrály nahradil gradienty. Matematické operace a aproximace chyb při transformaci integrální nelokality na gradientní závisí na volbě váhové funkce α . Výsledný vztah pro vyjádření nelokálního napětí lze vyjádřit v tomto tvaru [6]

$$\sigma_{ij}^g - l^2 \sigma_{ij,kk}^g = \sigma_{ij}^c = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (1.10)$$

kde l představuje parametr délky.

2.2.2. Aifantis 1992

V 90. letech Aifantis rozšířil vztahy lineární pružnosti o Laplaceův přetvoření (tj. o gradientní členy) následujícím způsobem [6]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm} \right) \quad (1.11)$$

Silové rovnice rovnováhy mají pak tvar

$$C_{ijkl} \left(u_{k,jl} - l^2 u_{k,lm} \right) + b_i = 0 \quad (1.12)$$

Pro izotropní lineárně pružný materiál $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}$. Odtud je zřejmé, že (1.12) je speciálním případem (1.7), přesněji pro $l_2 = l_3 = l$, jak bylo již dříve uvedeno.

V navazující práci zavedli Ru a Aifantis (1993) operátorovou dekompozici (*operator split*), prostřednictvím které rovnice 4. řádu (1.12) můžeme řešit postupně jako dvě nsvázané soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu, tj.

$$C_{ijkl} u_{k,jl}^c + b_i = 0 \quad (1.13)$$

doplněnou o

$$u_k^s - l^2 u_{k,mm}^s = u_k^c. \quad (1.14)$$

Je patrné, že dosazením (1.14) do (1.13) obdržíme původní rovnici (1.12). Díky užití této operátorové dekompozice jsme schopni nejprve určit u_i^c a následně pak u_i^s . Tento postup velmi usnadňuje analytické a numerické řešení.

Pro porovnání obou teorií je vhodné rovnici (1.14) vyjádřit pomocí přetvoření a následně vynásobit konstitutivním tenzorem C_{ijkl} , tj.

$$C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^s - l^2 \varepsilon_{kl,mm}^s \right) = C_{ijkl} u_{k,l}^c, \quad (1.15)$$

kde $\varepsilon_{kl}^s = 1/2 (u_{k,l}^s + u_{l,k}^s)$. Levou stranu rovnice pak tedy můžeme vyjádřit pomocí nelokálních napětí jako

$$\sigma_{ij}^s - l^2 \sigma_{ij,mm}^s = C_{ijkl} u_{k,l}^c. \quad (1.16)$$

Poslední uvedený vztah se do jisté míry shoduje s výsledným vztahem Eringenovy teorie (1.10). Rozdíl je patrný až ze silových rovnic rovnováhy (Askas a Gitman, 2010). Z Eringenovy teorie obdržíme divergenci σ_{ij}^s , zatímco z Aifantovy teorie divergenci σ_{ij}^c .

V podstatě to znamená, že pomocí Aifantiho teorie obdržíme σ_{ij}^c přímo z derivovaných posuvů u_i^c , které lze použít v (1.16). Řešíme pak nezávislý systém rovnic (1.13) a (1.16). Oproti tomu vztah mezi posuvy a tenzorem napětí σ_{ij}^s v případě Eringenovy teorie je definován diferenciální rovnicí (1.10). Spolu se zmíněnou divergencí pak tvoří systém sdružených rovnic, které musí být řešeny simultánně.

3. Asymptotické pole posuvů

V následujícím textu připomeneme základní rovnice klasické lineární pružnosti a pomocí Williamsovy asymptotické techniky s využitím vlastností Airyho funkce napětí odvodíme asymptotické pole posuvů v okolí kořene trhliny. Totéž provedeme také pro případ dipolární gradientní pružnosti vycházející z II. varianty Mindlinovy gradientní teorie.

3.1. Základní rovnice klasické pružnosti

Základní rovnice klasické pružnosti sestávají z napětových rovnic rovnováhy, konstitutivních vztahů pro posuvy a přetvoření a z Hookova zákona. V případě rovinné deformace a s uvažováním absence vnitřních sil mají napětové rovnice rovnováhy následující tvar

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Složky tenzoru přetvoření ε_{pq} lze pomocí posuvů u_q vyjádřit standardním způsobem jako

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

a vztahy mezi napětím a přetvořením jsou definovány inverzním Hookovým zákonem ve tvaru

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde λ a μ jsou Lamého konstanty a ν je Poissonovo číslo. S využitím předchozích vztahů lze rovnice kompatibility získané z (2.2) eliminací posuvů jako

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

přepsat do tvaru

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad (2.5)$$

kde $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ je Laplaceův operátor. Airyho funkce napětí ϕ je definována pomocí následujících vztahů

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

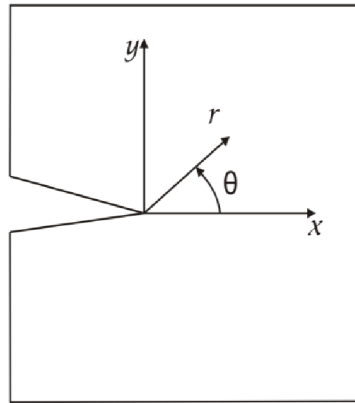
Rovnice rovnováhy jsou tak automaticky splněny a rovnice kompatibility má tvar

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad (2.7)$$

kde $\nabla^4 = \partial^4 / \partial x^4 + 2\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$ je biharmonický operátor².

3.1.1. Odvození pole posuvů

Pole posuvů tedy vyjádříme z Airyho funkce napětí pomocí předchozích vztahů. Její tvar určíme užitím Williamsovy asymptotické techniky. Tato metoda spočívá v rozvinutí pole posuvů v asymptotickou řadu funkcí separovaných proměnných. Vzhledem k charakteru úlohy je vhodné zavést polární systém souřadnic s počátkem v kořeni trhliny, jak je uvedeno na Obr.1. Laplaceův operátor v polárních souřadnicích má tvar $\nabla^2(\cdot) = \partial_r^2(\cdot) + r^{-1}\partial_r(\cdot) + r^{-2}\partial_\theta^2(\cdot)$ a transformované vztahy pro napětí, přetvoření a posuvy jsou uvedeny např. v [3].



Obr.1. Zavedení polárního systému souřadnic

V blízkosti kořene trhliny lze Airyho funkci vyjádřit pomocí následující sumy jako

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n+1} F_n(\theta), \quad (2.8)$$

kde p_n je vlastní číslo a $F_n(\theta)$ odpovídající vlastní funkce. Dosazením (2.8) do (2.7) v polárních souřadnicích dostaneme

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta^4} + 2(p_n^2 + 1) \frac{d^2 F_n(\theta)}{d\theta^2} + (p_n^2 - 1)^2 F_n(\theta) = 0. \quad (2.9)$$

² Funkci ϕ vyhovující rovnici (2.7) nazýváme biharmonická. Obdobně funkce f , která vyhovuje harmonické funkci $\nabla^2 f = 0$ je harmonická, přičemž platí, že harmonická funkce je zároveň i biharmonická.

Řešení předchozí rovnice má tvar

$$F_n(\theta) = A_n \sin(p_n + 1)\theta + B_n \cos(p_n + 1)\theta + C_n \sin(p_n - 1)\theta + D_n \cos(p_n - 1)\theta, \quad (2.10)$$

kde A_n, B_n, C_n, D_n jsou neznámé konstanty. Podél líců trhliny vyžadujeme splnění těchto okrajových podmínek

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \quad \text{pro } \theta = \pm \pi. \quad (2.11)$$

Pro případ zatěžování v módu I je Airyho funkce pouze funkcí proměnné θ a konstanty A_n, C_n jsou nulové. Odtud vyplývá

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n+1} [B_n \cos(p_n + 1)\theta + D_n \cos(p_n - 1)\theta]. \quad (2.12)$$

Aplikací na definici Airyho funkce s využitím vztahů pro posuvy a přetvoření a následnou integrací dostaneme výsledné řešení pro posuvy

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n} \{-(p_n + 1)F_n(\theta) + (4 - 4\nu)D_n \cos(p_n - 1)\theta\}, \\ u_\theta &= \frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n} \{-F_n'(\theta) + (4 - 4\nu)D_n \sin(p_n - 1)\theta\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hodnotu vlastního čísla p_n určíme z okrajových podmínek (2.11) odkud vyplývá

$$\begin{aligned} B_n \cos(p_n + 1)\pi + D_n \cos(p_n - 1)\pi &= 0, \\ B_n (p_n + 1) \sin(p_n + 1)\pi + D_n (p_n - 1) \sin(p_n - 1)\pi &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Netriviální řešení této soustavy rovnic vede k charakteristické rovnici

$$p_n = \frac{n}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

Záporné hodnoty můžeme vyloučit, neboť vedou k nekonečným posuvům v kořeni trhliny. Stejně tak není přípustná hodnota $n = 0$, která způsobuje neomezenou hustotu deformační energie. Dostáváme tak

$$p_n = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Dosazením vlastních hodnot do (2.14) dostaneme vzájemnou závislost mezi konstantami B_n a D_n . Napětí pak můžeme v polárních souřadnicích vyjádřit pro $n = 1, 2$ vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= D_1 r^{-1/2} \left[-\frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} \right] + 2D_2 \cos 2\theta + 2D_2 + O(r^{1/2}), \\
\sigma_{\theta\theta} &= D_1 r^{-1/2} \left[\frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} \right] - 2D_2 \cos 2\theta + 2D_2 + O(r^{1/2}), \\
\sigma_{r\theta} &= D_1 r^{-1/2} \left[\frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right] - 2D_2 \sin 2\theta + O(r^{1/2}).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pouze první členy vykazují v okolí kořene trhliny singularitu. Vzhledem k definici součinitele intenzity napětí módu I [3]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sigma_{\theta\theta}(r, 0) \tag{2.18}$$

dostáváme

$$D_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.19}$$

Konstantní pole napětí vyjádřené pomocí konstanty D_2 je označováno jako tzv. T-napětí a souvisí s tvarem a velikostí plastické oblasti.

3.2. Dipolární gradientní pružnost

Definice druhé varianty Mindlinovy teorie dipolární gradientní pružnosti vychází z prvního zákona termodynamiky ve tvaru [1]

$$\rho \dot{E} = \tau_{pq} \dot{\varepsilon}_{pq} + m_{rpq} \partial_r \dot{\varepsilon}_{pq} \tag{2.20}$$

kde $\partial_p(\cdot) \equiv \partial(\cdot) / \partial x_p$, $(\cdot) = \partial(\cdot) / \partial t$, ρ označuje hustotu materiálu, E je vnitřní energie vztažená na jednotku hmotnosti, $\varepsilon_{pq} = 1/2(\partial_q u_p + \partial_p u_q) = \varepsilon_{qp}$ je lineární tenzor přetvoření, u_q je vektor posunutí, τ_{pq} je tenzor silového napětí (*monopolar stress tensor*) [Nm^{-2}] a m_{rpq} je tenzor momentového napětí (*dipolar stress tensor*) [Nm^{-1}]. Protože hustotu deformační energie uvažujeme jako funkci přetvoření a jeho derivace, tj. $W = W(\varepsilon_{pq}, \varepsilon_{pq,r})$, můžeme τ_{pq} a m_{rpq} vyjádřit standardním variačním způsobem jako

$$\tau_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}}, \quad m_{rpq} \equiv \frac{\partial W}{\partial (\partial_r \varepsilon_{pq})}. \tag{2.21}$$

Rovnice rovnováhy, stejně jako silové (přirozené) okrajové podmínky, obdržíme využitím principu virtuální práce. Uvážíme-li absenci vnitřních (objemových) sil, dostaneme [1]

$$\int_V [\tau_{pq} \delta \varepsilon_{pq} + m_{rpq} \delta (\partial_r \varepsilon_{pq})] dV = \int_S t_q^{(n)} \delta u_q dS + \int_S T_{qr}^{(n)} \partial_q (\delta u_r) dS, \tag{2.22}$$

kde V je objem a S je povrch tělesa, $t_q^{(n)}$ je skutečné silové napětí (*true monopolar traction*), $T_{pq}^{(n)}$ je skutečné momentové napětí (*true dipolar traction*) a n_p je vektor normály. Z výše uvedeného vztahu dostaneme následující rovnice rovnováhy

$$\partial_p(\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) = 0 \text{ na } V, \quad (2.23)$$

a přirozené okrajové podmínky

$$P_q^{(n)} = n_p(\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) - D_p(n_r m_{rpq}) + (D_j n_j) n_r n_p m_{rpq} \text{ na } S, \quad (2.24)$$

$$R_q^{(n)} = n_r n_p m_{rpq} \text{ na } S, \quad (2.25)$$

kde $D_p(\cdot) \equiv \partial_p(\cdot) - n_p D(\cdot)$ je plošný diferenciální operátor, $D(\cdot) \equiv n_r \partial_r(\cdot)$ je normálový diferenciální operátor, $P_q^{(n)} \equiv t_q^{(n)} + (D_r n_r) n_p T_{pq}^{(n)} - D_p T_{pq}^{(n)}$ je pomocné silové napětí (*auxiliary force traction*) a $R_q^{(n)} \equiv n_p T_{pq}^{(n)}$ je pomocné momentové napětí³ (*auxiliary double force traction*).

Část plochy tělesa, na které je předepsáno vnější silové zatížení, označíme S_σ a část, na které jsou předepsány posuvy u_q a jejich derivace $D(u_q)$ označíme S_u , přičemž platí $S_\sigma \cup S_u = S$, $S_\sigma \cap S_u = 0$. Předepsané posuvy a jejich derivace tvoří kinematické (hlavní, geometrické) okrajové podmínky.

Tenzory monopolárního a dipolárního napětí určíme z následující podoby hustoty deformační energie [1]

$$W = (1/2)\lambda \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq} + \mu \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} + l^2 (1/2)\lambda (\partial_r \varepsilon_{pp})(\partial_r \varepsilon_{qq}) + l^2 \mu (\partial_r \varepsilon_{pq})(\partial_r \varepsilon_{pq}) \quad (2.26)$$

kde l^2 je gradientní koeficient o rozměru [m^2] a λ a μ jsou standardní Lamého konstanty o rozměru [Nm^{-2}].

Aplikací vztahů (2.21) dostaneme

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{pq}, \quad m_{rpq} = l^2 \partial_r (\lambda \delta_{pq} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{pq}) \quad (2.27)$$

kde δ_{pq} je Kroneckerovo delta.

³ Virtuální práci vnějšího zatížení na pravé straně rovnice (2.22) je možné vyjádřit také prostřednictvím tzv. pomocných momentových napětí, která pracují na normálových derivacích virtuálních posuvů, následně je nutné také doplnit členy ke skutečným silovým napětím, vznikne tak pomocné silové napětí. Ve výsledku je virtuální práce na pravé straně rov. (2.22) stejná

Rovnice rovnováhy (2.23) spolu s přirozenými a hlavními okrajovými podmínkami spolu s definicí silového a momentového napětí tvoří hlavní rovnice lineární gradientní pružnosti pro izotropní materiál.

Dosažením vztahů pro napětí do rovnic rovnováhy pak dostaneme systém rovnic pro pole posuvů. Jednoznačnost řešení tohoto systému je dána pozitivní definitností hustoty deformační energie (dokázáno v [5]), která je podmíněna následujícími omezeními na materiálové konstanty

$$(3\lambda + 2\mu) > 0, \mu > 0. \quad (2.28)$$

3.2.1. Základní rovnice dipolarání gradientní pružnosti

V následujícím oddíle budou uvedeny základní rovnice pro vyjádření pole napětí a posuvů v okolí kořene trhliny. Pro stav rovinné deformace se těleso deformuje pouze v rovině xy . Platí tedy $u_x = u_x(x, y) \neq 0, u_y = u_y(x, y) \neq 0, u_z \equiv 0$. Předpokládáme, že zatížení působí pouze v rovině xy , máme tak 3 nezávislé složky tenzoru silového napětí

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)\partial_x u_x + \lambda\partial_y u_y, \quad \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu)\partial_y u_y + \lambda\partial_x u_x, \quad \tau_{xy} = \mu(\partial_y u_x + \partial_x u_y), \quad (2.29)$$

a 6 nezávislých složek tenzoru momentového napětí

$$\begin{aligned} m_{xxx} &= l^2 \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu)\partial_x u_x + \lambda\partial_y u_y], & m_{xxy} &= l^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} (\partial_y u_x + \partial_x u_y), \\ m_{xyy} &= l^2 \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu)\partial_y u_y + \lambda\partial_x u_x], & m_{yyx} &= l^2 \frac{\partial}{\partial y} [(\lambda + 2\mu)\partial_x u_x + \lambda\partial_y u_y], \\ m_{yyy} &= l^2 \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu)\partial_y u_y + \lambda\partial_x u_x], & m_{yxy} &= l^2 \mu \frac{\partial}{\partial y} (\partial_y u_x + \partial_x u_y), \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dosažením uvedených vztahů do rovnic rovnováhy dostáváme systém sdružených parciálních diferenciálních rovnic 4. řádu pro neznámé posuvy

$$\begin{aligned} (1 - l^2 \nabla^2)[2(1 - \nu)\partial_x (\partial_x u_x + \partial_y u_y) - (1 - 2\nu)\partial_y (\partial_x u_y - \partial_y u_x)] &= 0, \\ (1 - l^2 \nabla^2)[2(1 - \nu)\partial_y (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + (1 - 2\nu)\partial_x (\partial_x u_y - \partial_y u_x)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

kde $\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$ je Poissonovo číslo a $\nabla^2 \equiv \partial_x^2(\cdot) + \partial_y^2(\cdot)$ je 2D Laplaceův operátor.

Dále zavádíme pojem tzv. totálního napětí. K jeho definici v kartézském souřadnicovém systému uvažujeme rovinu $xy = \text{konst.}$ s vektorem normály $n = (0, \pm 1)$. Totální napětí má pak podél této roviny tvar

$$\begin{aligned}
t_{yx} &\equiv P_x^{(n)} = \tau_{yx} - \frac{\partial m_{xyx}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yyx}}{\partial y} - \frac{\partial m_{yxx}}{\partial x}, \\
t_{yy} &\equiv P_y^{(n)} = \tau_{yy} - \frac{\partial m_{xyy}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yyy}}{\partial y} - \frac{\partial m_{jxy}}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

Totální napětí tak představují kombinaci vnitřních silových napětí a derivací vnitřních momentových napětí, které jsou na hranici S_σ rovny předepsaným pomocným silovým napětím (viz. pravá strana rovnice (2.24)).

3.2.2. Asymptotické pole posuvů a napětí

Charakter pole posuvů a napětí v okolí kořene trhliny opět vyjádříme v polárních souřadnicích užitím Williamsovy asymptotické techniky. Tenzor silového, momentového a totálního napětí mají v polárních souřadnicích následující tvar [1]

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\partial_r u_r + \lambda r^{-1}(u_r + \partial_\theta u_\theta), \\
\tau_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu)r^{-1}(u_r + \partial_\theta u_\theta) + \lambda\partial_r u_r, \\
\tau_{r\theta} &= \mu[r^{-1}(\partial_\theta u_r - u_\theta) + \partial_r u_\theta],
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
m_{rrr} &= l^2\partial_r\tau_{rr}, \quad m_{\theta rr} = l^2r^{-1}(\partial_\theta\tau_{rr} - 2\tau_{r\theta}), \\
m_{rr\theta} &= l^2\partial_r\tau_{r\theta}, \quad m_{\theta r\theta} = l^2r^{-1}(\partial_\theta\tau_{\theta r} + \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}), \\
m_{r\theta\theta} &= l^2\partial_r\tau_{\theta\theta}, \quad m_{\theta\theta\theta} = l^2r^{-1}(\partial_\theta\tau_{\theta\theta} + 2\tau_{r\theta}),
\end{aligned}
\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
t_{\theta r} &\equiv P_r^{(n)} = \tau_{\theta r} - \frac{\partial m_{\theta rr}}{\partial r} - \frac{\partial m_{r\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial m_{\theta r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r}m_{\theta rr} - \frac{1}{r}m_{r\theta r} + \frac{1}{r}m_{\theta\theta\theta}, \\
t_{\theta\theta} &\equiv P_\theta^{(n)} = \tau_{\theta\theta} - \frac{\partial m_{\theta r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r}m_{r\theta\theta} - \frac{2}{r}m_{\theta r\theta}
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

Dosazením předchozích vztahů do rovnic rovnováhy (2.23) dostáváme systém sdružených parciálních diferenciálních rovnic 4. řádu pro (u_r, u_θ)

$$\begin{aligned}
s_r - l^2[\nabla^2 s_r - r^{-2}s_r - 2r^{-2}\partial_\theta s_\theta] &= 0, \\
s_\theta - l^2[\nabla^2 s_\theta - r^{-2}s_\theta + 2r^{-2}\partial_\theta s_r] &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

kde (s_r, s_θ) jsou dány jako

$$\begin{aligned}
s_r &= 2(1-\nu)\partial_r(\partial_r u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta + r^{-1}u_r) - (1-2\nu)r^{-1}\partial_\theta(\partial_r u_\theta - r^{-1}\partial_\theta u_r + r^{-1}u_\theta), \\
s_\theta &= 2(1-\nu)r^{-1}\partial_\theta(\partial_r u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta + r^{-1}u_r) + (1-2\nu)\partial_r(\partial_r u_\theta - r^{-1}\partial_\theta u_r + r^{-1}u_\theta).
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

Všimněme si, že pokud $l^2 \rightarrow 0$, dostaneme z (2.36) rovnice klasické lineární pružnosti pro izotropní materiál v polárních souřadnicích.

V okolí kořene trhliny, kde $r \rightarrow 0$, tedy můžeme dle Williamsovy techniky posuvy vyjádřit jako [1]

$$u_r(r, \theta) = r^p U_r(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^p U_\theta(\theta), \quad (2.38)$$

kde p je (obecně) komplexní číslo. Posuvy (u_r, u_θ) vyhovují rovnicím rovnováhy (2.36), resp. (pokud ponecháme pouze dominantní singulární členy) rovnicím

$$\begin{aligned} [\nabla^2 s_r - r^{-2} s_r - 2r^{-2} \partial_\theta s_\theta] &= 0, \\ [\nabla^2 s_\theta - r^{-2} s_\theta + 2r^{-2} \partial_\theta s_r] &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Obecné řešení předchozího systému má pak následující tvar [1]

$$\begin{aligned} u_r &= r^p [A_1 \cos((p-1)\theta) + A_2 \cos((p+1)\theta) + A_3 \cos((p-3)\theta)] \\ &\quad + r^p [B_1 \sin((p-1)\theta) + B_2 \sin((p+1)\theta) + B_3 \sin((p-3)\theta)], \\ u_\theta &= r^p \left[A_4 \sin((p-1)\theta) - A_2 \sin((p+1)\theta) - A_3 \frac{(p+5-8\nu)}{(p-7+8\nu)} \sin((p-3)\theta) \right] \\ &\quad + r^p \left[B_4 \cos((p-1)\theta) + B_2 \cos((p+1)\theta) + B_3 \frac{(p+5-8\nu)}{(p-7+8\nu)} \cos((p-3)\theta) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

kde A_b, B_b ($b=1,2,3,4$) jsou neznámé konstanty korespondující s charakterem zatížení. Hodnotu p vyjádříme z okrajových podmínek nezátížených líců trhliny pro $\theta = \pm \pi$, kdy platí

$$t_{\theta\theta}(r, \pm \pi) = 0, \quad t_{\theta r}(r, \pm \pi) = 0, \quad m_{\theta\theta r}(r, \pm \pi) = 0, \quad m_{\theta\theta\theta}(r, \pm \pi) = 0. \quad (2.41)$$

Tyto okrajové podmínky spolu s obecným vyjádřením posuvů tvoří problém vlastních hodnot. Pro existenci netriviálního řešení pak musí být determinant matice soustavy pro neznámé koeficienty A_b, B_b roven nule. Dostaneme tak následující charakteristickou rovnici pro p

$$(p-1)^4 (p-2)^2 [1 - \cos(4\pi p)] = 0 \Rightarrow p = \frac{n}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.42)$$

Vzhledem k tzv. energetickému kritériu není možné všechny uvedené hodnoty p použít. Potenciální energie v malé oblasti kolem kořene trhliny je dána jako [2]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r_0} W r dr d\theta. \quad (2.43)$$

Z definice II. varianty Mindlinovy teorie vyplývá, že hustota deformační teorie závisí na kvadrátu derivace přetvoření, tj. $W \approx (\partial \varepsilon_{pq} / \partial r)^2 \approx (\partial^2 u_p / \partial r^2)^2 \approx r^{2p-4}$. Odtud vyplývá, že předchozí výraz konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $p > 1$.

Poznamenejme, že pro $p=1$ platí $\partial \varepsilon_{pq} / \partial r = 0$ a W se tak chová jako v klasické pružnosti. Příklad $p < 1$ vede k nekonečné potenciální energii, což je z fyzikálního hlediska nemožné.

Vzhledem k symetrii zatěžování při módu I má pole posuvů následující tvar [2]

$$\begin{aligned}
 u_r &= r [C_1 + C_3 \cos 2\theta] + A_1 r^{3/2} \left[(3-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \frac{(11-16\nu)}{(41-32\nu)} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 &\quad - A_2 r^{3/2} \left[3 \frac{(11-16\nu)}{(41-32\nu)} \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right], \\
 u_\theta &= -C_3 r \sin 2\theta + A_1 r^{3/2} \left[(9-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \frac{(13-16\nu)}{(41-32\nu)} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 &\quad + A_2 r^{3/2} \left[3 \frac{(13-16\nu)}{(41-32\nu)} \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

kde (C_1, C_3) jsou součinitelé intenzity pro pole nižšího řádu singularity v okolí kořene trhliny (*amplitude factors*) a (A_1, A_2) jsou součinitelé intenzity dominantního členu řádu 3/2. První (lineární) člen uvedených rozvojevů vytváří konstantní pole napětí, které je běžně označováno jako tzv. T-napětí. Toto napětí ovlivňuje tvar a velikost plastické oblasti v okolí kořene trhliny.

Dosazením uvedených rozvojevů do definovaných vztahů pro τ_{pq} , m_{rpq} a t_{pq} dospějeme k závěru, že tenzor momentového napětí a totální napětí vyjádřené teorií gradientní pružnosti vykazují větší singularitu ($r^{-1/2}$, resp. $r^{-3/2}$) než v případě standardní lineární lomové mechaniky. Vzhledem k tomu, že totální napětí nabývá záporných hodnot před vrcholem trhliny, uzavírání líců trhliny v porovnání s klasickou pružností má charakter bodu vratu.

4. Výpočet J-integrálu

Pojem J-integrál zavedl v roce 1968 Rice pro analýzu stability trhlin. S jeho pomocí můžeme modelovat elastoplastické chování materiálu jako nelineárně elastické. Rozšířil tak metodologii lineární elastické lomové mechaniky za hranice její použitelnosti.

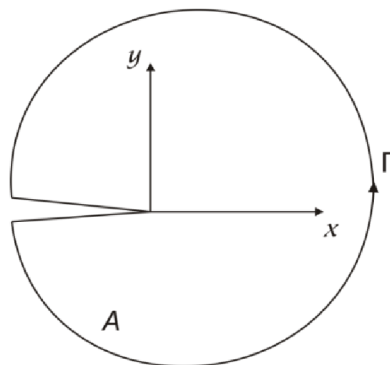
Rice ukázal, že potřebná energie k vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti (J / m^2) je dodávána prací vnějších sil nebo částí energie napjatosti, uvolňované při růstu trhliny, tj.

$$J = -\frac{d\Pi}{dS} \quad (3.1)$$

Pracujeme-li s dipolární gradientní teorií obsahující nelineární konstitutivní vztahy a uvažujeme-li kvazi-statické podmínky a absenci objemových sil, můžeme potenciální energii vyjádřit ve tvaru

$$\Pi = \int_A W(\varepsilon_{pq}, \kappa_{rpq}) dA - \int_{\Gamma_\sigma} [P_q u_q + R_q D(u_q)] d\Gamma, \quad (3.2)$$

kde A představuje plochu, kterou ohraničuje křivka Γ dle obrázku (Fig. 4). Γ_σ značí část křivky, na níž je předepsáno silové zatížení.



Obr.2. Lomová plocha A ohraničená křivkou Γ

Virtuální přírůstek délky trhliny v její rovině vede k následující změně potenciální energie

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma} \left[P_q \frac{du_q}{da} + R_q D\left(\frac{du_q}{da}\right) \right] d\Gamma, \quad (3.3)$$

kde vzhledem k předepsaným homogenním kinematickým okrajovým podmínkám ($du_q / da = 0$, $D(du_q / da) = 0$) můžeme křivkový integrál rozšířit na celou křivku Γ .

V případě, že trhlina roste, pohybuje se spolu s kořenem trhliny také systém souřadnic, tzn.

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.4)$$

dokud $\partial x / \partial a = -1$. Rovnice (3.3) tak změní svůj tvar na

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) dA - \int_{\Gamma} P_q \left(\frac{\partial u_q}{\partial a} - \frac{\partial u_q}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} R_q \left[D \left(\frac{\partial u_q}{\partial a} \right) - D \left(\frac{\partial u_q}{\partial x} \right) \right] d\Gamma. \quad (3.5)$$

Vzhledem k definici hustoty deformační energie dostaneme

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial \kappa_{rpq}} \frac{\partial \kappa_{rpq}}{\partial a} = \tau_{pq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial a} + m_{rpq} \frac{\partial \kappa_{rpq}}{\partial a} \quad (3.6)$$

kde s ohledem na princip virtuální práce platí

$$\int_A \tau_{pq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial a} dA + \int_A m_{rpq} \frac{\partial \kappa_{rpq}}{\partial a} dA = \int_{\Gamma} P_q \frac{\partial u_q}{\partial a} d\Gamma + \int_{\Gamma} R_q D \left(\frac{\partial u_q}{\partial a} \right) d\Gamma. \quad (3.7)$$

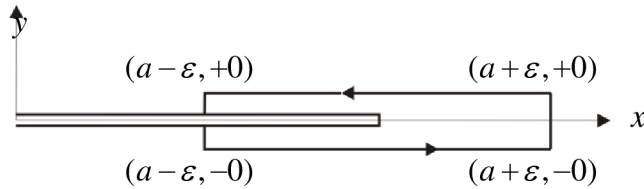
Z předchozího vyplývá

$$\frac{d\Pi}{da} = - \int_A \frac{\partial W}{\partial x} dA + \int_{\Gamma} \left[P_q \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q D \left(\frac{\partial u_q}{\partial x} \right) \right] d\Gamma \quad (3.8)$$

Jsou-li splněny předpoklady pro užití Greenovy věty, můžeme J-integrál pro případ nelineární gradientní pružnosti vyjádřit v následujícím tvaru

$$J \equiv - \frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} \left[W n_x - P_q \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q D \left(\frac{\partial u_q}{\partial x} \right) \right] d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(W dy - \left[P_q \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q D \left(\frac{\partial u_q}{\partial x} \right) \right] dx \right) \quad (3.9)$$

Pro výpočet J-integrálu je vhodné zvolit křivku Γ obdélníkového tvaru okolo kořene trhliny s nulovou „výškou“ ve směru y a $\varepsilon \rightarrow 0^+$, jak je zobrazeno na Obr.3.



Obr.3. Obdélníkový tvar křivky Γ okolo kořene trhliny

Díky této volbě křivky je integrál $\int_{\Gamma} W dy$ roven nule a dostáváme tak

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(P_q^{(n)} \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q^{(n)} D \left(\frac{\partial u_q}{\partial x} \right) \right) dx \right\}. \quad (3.10)$$

V případě rovinné deformace pro mód I jsou podél líců trhliny napětí t_{yx} a m_{yyy} nulová a J-integrál pak nabývá hodnoty

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(t_{yy}(x, y=0^+) \frac{\partial u_y(x, y=0^+)}{\partial x} + m_{yyy}(x, y=0^+) \frac{\partial^2 u_x(x, y=0^+)}{\partial x \partial y} \right) dx \right\}. \quad (3.11)$$

Díky singulárnímu charakteru totálního a momentového napětí má také integrand v J-integrálu singulární charakter. Úplné vyjádření J-integrálu dosazením vztahů podle definice je uvedeno např. v [5]. Nalezneme zde také grafické porovnání J integrálu klasické pružnosti s J-integrálem dipolární gradientní pružnosti v závislosti na poměru charakteristického rozměru struktury materiálu a délky trhliny. Z grafu je patrné, že pro $l/a \rightarrow 0$ jsou si hodnoty J-integrálů rovny, zatímco s rostoucí hodnotou l/a poměr J/J^{clas} klesá. Gradientní teorie tak ukazuje zpevňující charakter materiálu zohledňujícího mikrostrukturu materiálu, resp. s rostoucím významem mikrostruktury se zmenšuje velikost hnací síly trhliny.

5. Řešení integrálních rovnic

Různé okrajové problémy z oblasti fyzikálních, statických a pevnostních výpočtů velmi často vedou na řešení silně singulárních integrálních rovnic. Této problematice se poprvé věnoval Hadamard (1923), který vyvinul koncepci řešení silně singulárního integrálu ve smyslu jeho konečné části. Tato metoda se ukázala být velmi efektivní a v současné době je hojně využívána. Vedle toho je možné singulární integrály řešit pomocí kvadratur Gaussova typu vyvinutých Kuttem. Tyto formule však vyžadují fixované integrační body, což je do jisté míry omezení obecnosti. V následujícím textu si tyto postupy řešení singulárních rovnic přiblížíme

5.1. Metoda integrálních rovnic

Pro vyjádření základní myšlenky Hadamardovy koncepce uvažujme tento integrál [7]

$$s_0(x) = \int_x^b \frac{dt}{(x-t)^{1/2}} = 2(b-x)^{1/2} \quad \text{pro } x < b \quad (4.1)$$

Derivací obou stran rovnice dostaneme

$$\frac{d}{dx} s_0(x) = \frac{1}{2} \int_x^b \frac{dt}{(t-x)^{3/2}} - \frac{1}{(t-x)^{1/2}} \Big|_{t=x} = -\frac{1}{(b-x)^{1/2}} \quad \text{pro } x < b \quad (4.2)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že s_0 (které je omezené) je rovno rozdílu divergentního integrálu a neomezeného zintegrovaného členu, který nezávisí na b . Derivaci s_0 tak můžeme uvažovat jako konečnou část divergentního integrálu, kterou definujeme jako

$$F.P. \int \frac{dt}{(t-x)^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow x} \left[\int_c^b \frac{dt}{(t-x)^{3/2}} - \frac{2}{(c-x)^{1/2}} \right] = -\frac{2}{(b-x)^{1/2}} \quad \text{pro } x < c < b \quad (4.3)$$

V následujícím odstavci popíšeme jednoduchou techniku výpočtu integrálu ve smyslu konečné části.

Integrální rovnice vznikající ve statických úlohách lomové mechaniky mají většinou tvar tzv. Fredholmovy integrální rovnice

$$\int_c^d k(t,x) f(t) dt = g(x), \quad c < x < d, \quad (4.4)$$

kde $g(x)$ je známá, předepsaná funkce korespondující se zatížením líců trhliny, $f(t)$ je hledaná fundamentální funkce daného problému, kterou obvykle nazýváme hustota, a $k(t,x)$ je singulární jádro ve tvaru $(t-x)^{-m}$. Exponent m je kladné celé číslo a značí stupeň singularity. Je-li $m=1$, nazýváme rovnici (4.4) Cauchyho integrální rovnicí a singulární člen vyjádříme ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty. V případě $m > 1$ hovoříme o hypersingulární rovnici a singulární člen určíme ve

smyslu Hadamardovy konečné části. Interval (c, d) odpovídá délce trhliny ($2a = d - c$) a vhodnou normalizací ho lze převést na $(-1, 1)$.

Dle [9] lze singulární část jádra pomocí asymptotické analýzy oddělit od regulární části a Fredholmova rovnice (5.4) tak změni svůj tvar na

$$\int_c^d [k_s(t, x) + k_r(t, x)] f(t) dt = g(x) \quad \text{pro } c < x < d, \quad (4.5)$$

kde k_s má hypersingulární charakter a k_r je funkce integrovatelná s kvadrátem (tj. integrál je konečný). Hledanou hustotu $f(t)$ uvažujeme ve tvaru

$$f(t) = F(t)w(t), \quad (4.6)$$

kde F je neznámá omezená funkce a $w(t)$ fundamentální (váhová) funkce. Při řešení hypersingulárních rovnic se ukázalo jako velmi efektivní aproximovat neznámou $F(t)$ částečnou řadou jako

$$F(t) \cong \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(t) \quad (4.7)$$

a koeficienty a_n vyjádřit pomocí metody vážených reziduí.

Aplikací (4.6) a (4.7) na (4.5) obdržíme

$$\sum_{n=0}^N a_n G_n(x) \cong g(x) \quad \text{pro } a < x < b, \quad (4.8)$$

kde

$$G_n(x) = F.P. \int_c^d k_s(t, x) \phi_n(t) w(t) dt + \int_c^d k_r(t, x) \phi_n(t) w(t) dt. \quad (4.9)$$

Koeficienty a_n vyjádříme z následujícího systému algebraických rovnic

$$\sum_{n=0}^N a_n \int_c^d G_n(x) \psi_j(x) w_j(x) dx = \int_c^d g(x) \psi_j(x) w_j(x) dx \quad \text{pro } j = 0, 1, \dots, N \quad (4.10)$$

kde ψ_j jsou testovací funkce (množina ortonormálních polynomů) a w_j je příslušná váha. Funkce $\phi_n(t)$ a $\psi_j(x)$ volíme obvykle tak, abychom využili jejich ortonormální charakter. Běžně užíváme trigonometrické funkce, Legendrovy nebo Čebyševovy polynomy.

Volbou $w_j(x) = 1$ a $\psi_j(x) = \delta(x - x_j)$, a užitím jednoduché kolokační metody, se systém (4.8) podstatně zjednoduší a můžeme jej zapsat ve tvaru

$$\sum_{n=0}^N a_n G_n(x_j) = g(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.11)$$

Kolokační body můžeme volit libovolně, často však uvažujeme právě kořeny Legendrových nebo Čebyševových polynomů. V diplomové práci se ve výpočtech vyskytují Čebyševovy polynomy prvního a druhého druhu, které jsou definovány vztahy

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)], \quad U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \cos^{-1}(x)]}{\sin[\cos^{-1}(x)]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jejich kořeny pak jsou

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right), \quad \text{resp} \quad x_k = \cos\left(\pi \frac{k}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Obsahuje-li integrální rovnice pouze dominantní jádro Cauchyho nebo Hadamardova typu, lze řešení získat rozvojem $g(x)$ a $F(t)$ do vhodné řady a užitím tabulkových hodnot. V diplomové práci jsou užity následující vztahy [7]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2) \ln|x-t| dt &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{n+2}(x)}{n+2} - \frac{T_n(x)}{n} \right), \quad n \geq 0, \\ C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{x-t} dt &= \pi T_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \\ F.P. \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^2} dt &= -\pi(n+1)U_n(x), \quad n \geq 0, \\ F.P. \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^3} dt &= -\frac{\pi}{4(1-x^2)} \left[(n^2+n)U_{n+1}(x) - (n^2+3n+2)U_{n-1}(x) \right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nutno podotknout, že v případě špatně podmíněného systému volíme $M+1$ ($M > N$) testovacích funkcí ψ_j . Pomocí metody nejmenších čtverců určíme $N+1$ neznámých a_n ze systému $M+1$ rovnic.

5.2. Gauss-Čebyševova kvadratura

Existuje mnoho efektivních numerických procedur pro řešení singulárních integrálních rovnic obsahujících Cauchyho integrální jádra. Nejvíce rozšířenou a snadno implementovatelnou metodou je Gauss-Čebyševova kvadratura, kterou v roce 1972 vyvinuli Erdogan a Gupta.

Princip užití této metody si ukážeme na singulární integrální rovnici ve tvaru [8]

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 B_y(s) \frac{1}{t-s} ds, \quad |t| < 1, \quad (4.14)$$

kde $F(t)$ je známá funkce a B_y neznámá hustota. Hustota se na hranicích intervalu chová buďto jako omezená funkce nebo může mít singulární charakter. Podle charakteru úlohy vyjádříme hustotu jako

$$B(s) = \omega(s)\phi(s) \quad (4.15)$$

kde $\phi(s)$ je omezená funkce a $\omega(s)$ je fundamentální funkce korespondující s konkrétním typem chování v koncových bodech (viz Tab.1. [8]). V případě I se uvažuje singulární chování v koncových bodech intervalu, v případě II jsou funkční hodnoty hustoty omezené. Vztahy zbývajících dvou variant využijeme tehdy, je-li funkce hustoty na levém, resp. pravém konci singulární a na opačném omezená.

Případ	$\omega(s)$	s_i	t_k	n	W_i
I	$(1-s^2)^{-1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{k}{N}\right)$	1	$\frac{1}{N}$
II	$(1-s)^{+1/2}(1+s)^{-1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right)$	0	$\frac{2(1-s_i)}{2N+1}$
III	$(1-s)^{-1/2}(1+s)^{+1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right)$	0	$\frac{2(1+s_i)}{2N+1}$
IV	$(1-s^2)^{+1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(N+1)}\right)$	-1	$\frac{(1-s_i^2)}{N+1}$

Tab.1. Gauss-Čebyševovy formule pro Cuachyho jádra

Podstatou užití Gauss-Čebyševovy kvadratury je převedení rovnic typu (4.14) na systém $N-n$ algebraických rovnic ve tvaru

$$F(t_k) = \sum_{i=1}^N W_i \frac{\phi(s_i)}{t_k - s_i} \quad k=1, \dots, N-n \quad (4.16)$$

kde n je celé číslo, W_i jsou váhové funkce, s_i jsou integrační body a t_k jsou kolokační body, a jejich tvar je uvedený v Tabulce 5.1.

5.3. Metody vážených reziduí

Pro řešení okrajových problémů mechaniky typu $Au = f$ často využíváme metody vážených reziduí. Hledáme přibližné řešení \tilde{u} ve tvaru

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i N_{ui}(x) \quad (4.17)$$

kde \hat{u}_i jsou neznámé hodnoty (funkce) a N_{ui} jsou bázové funkce, tak, aby tzv. residuum

$$R_v = A\tilde{u} - f \quad (4.18)$$

nabývalo ve vybraných bodech nulové hodnoty nebo bylo alespoň minimalizováno.

Pro stanovení hodnot \hat{u}_i existuje mnoho technik. V případě, kdy je reziduum skalární veličina a uvažujeme použití vnitřních metod⁴, se výpočet provádí pomocí podmínek

$$\int_{\Omega} W_i h(R_v) dV = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.19)$$

kde h je předepsaná funkce a W_i jsou váhové funkce. Dostáváme tak systém n rovnic pro n neznámých koeficientů \hat{u}_i .

5.3.1. Metoda kolokací

Nejjednodušší metodou vážených reziduí je metoda kolokací. V oblasti Ω volíme n kolokačních bodů, $h(R_v) = R_v$ a $W_i = \delta(x - x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dostáváme tak

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_v dV = 0. \quad (4.20)$$

S využitím vlastnosti Diracovy delta funkce δ je rovnice splněna tehdy a jen tehdy, je-li

$$R_v(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.21)$$

Speciální volbou uzlů kolokace lze tuto metodu ještě více zefektivnit. Použijeme-li jako uzly kolokace kořeny ortogonálních polynomů (např. Legendery či Čebyševovy polynomy) usnadníme tak některé výpočty a dosáhneme přesnějších výsledků.

Jistého zjednodušení se dá dosáhnout nahrazením parametrů \hat{u}_i hodnotami přibližného řešení v uzlových bodech kolokace $\tilde{u}(x_i)$. Tyto hodnoty se pak stávají parametry, které je potřeba určit.

5.3.2. Metoda nejmenších čtverců v kolokačních bodech

Ukázalo se být výhodné spojit metodu nejmenších čtverců s kolokační metodou. Oproti předchozí metodě nevyžadujeme $R_v = 0$ a počet kolokačních bodů nemusí být roven počtu neznámých parametrů. Hodnoty \hat{u}_i hledáme tak, aby byl součet kvadrátů (čtverců) reziduí minimální, tj.

$$\sum_{j=1}^m R_v^2(x_j) = \min \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.22)$$

⁴ V případě vnitřní metody volíme bázové funkce tak, aby splňovaly okrajové podmínky, tj. přibližné řešení \tilde{u} splňuje okrajové podmínky pro všechny \hat{u}_i . Parametry určíme tak, abychom co nejlépe aproximovali řešení rovnice $Au = f$ uvnitř oblasti Ω .

Předpokládáme-li přibližné řešení ve tvaru (4.17), pak

$$R_v(x_j) = A\tilde{u}(x_j) - f(x_j). \quad (4.23)$$

Jestliže je A lineární operátor, pak $R_v(x_j)$ je lineární funkcí parametru $\hat{u}_i, i=1,2,\dots,n$.
Nechť má tato závislost tvar

$$R_v(x_j) = \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{u}} - b_j. \quad (4.24)$$

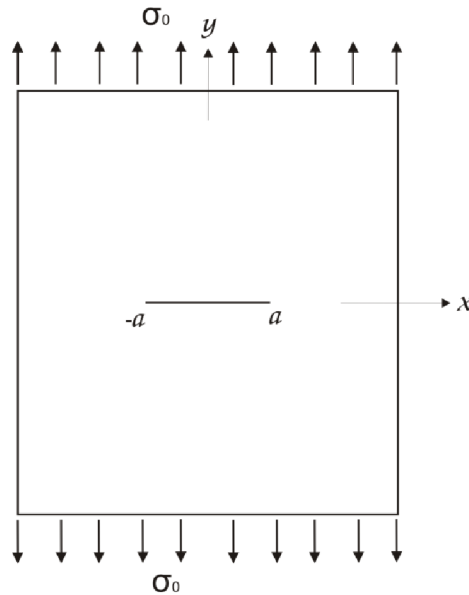
Nutnou podmínkou pro dosažení minima kvadrátu rezidua je

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \left(\sum_{j=1}^m R^2(x_j) \right) \Rightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^T \mathbf{b}, \quad (4.25)$$

kde $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \dots, \mathbf{p}_m^T]^T$ a $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$. Dostáváme tak systém m lineárních rovnic pro stanovení n neznámých parametrů \hat{u}_i .

6. Vlastní řešení integrálních rovnic

V podmínkách rovinné deformace uvažujeme přímou trhlinu délky $2a$ uvnitř nekonečné desky zatížené dle obrázku, a nezatížené líce trhliny



Obr.4. Nekonečná zatížená deska s přímou trhlinou

Pro analytické řešení pole posuvů v okolí kořene trhliny zformulujeme systém integrálních rovnic. K formulaci využíváme Fourierovy transformace, která v našem případě vede k hypersingulárním integrálním rovnicím.

Díky symetrii módu I vzhledem k rovině $y=0$ uvažujeme pouze horní polovinu prostoru ($-\infty < x < \infty, y \geq 0$). Tím je FT redukována pouze k závislosti na proměnné x a má následující přímý a inverzní tvar [1]

$$\begin{aligned} f^*(\xi, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{ix\xi} dx, \\ f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y) e^{-ix\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde i představuje komplexní konstantu ($i \equiv (-1)^{1/2}$). Aplikací FT na systém sdružených PDR, dostaneme systém obyčejných diferenciálních rovnic pro (u_x^*, u_y^*) , který lze zapsat v následujícím kompaktním tvaru $[K](u_x^*, u_y^*)^T = (0, 0)^T$, resp. [1]

$$\begin{bmatrix} -[1+l^2(\xi^2-d^2)][d^2+2(1-\nu)(\xi^2-d^2)] & -i\xi d[1+l^2(\xi^2-d^2)] \\ -i\xi d[1+l^2(\xi^2-d^2)] & [1+l^2(\xi^2-d^2)][\xi^2-2(1-\nu)(\xi^2-d^2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

kde $d(\cdot) \equiv d(\cdot)/dy, d^2(\cdot) \equiv d^2(\cdot)/dy^2, \dots$

Systém homogenních diferenciálních rovnic má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li $\det K = 0$, tj. $(\xi^2 - d^2)^2 [1 + l^2 (\xi^2 - d^2)]^2 = 0$. Uvedená rovnice má dva dvojnásobné kořeny $d = \pm |\xi|$ a $d = \pm [(1/l^2) + \xi^2]^{1/2}$. První pár je stejný jako v klasické pružnosti, druhý pár už však odráží charakter gradientní pružnosti.

Obecné řešení systému ODR má tvar [1]

$$\begin{aligned} u_x^*(\xi, y) &= i\xi^{-1} |\xi| C_1(\xi) e^{-|\xi|y} + i\xi^{-1} C_2(\xi) [y|\xi| - (3-4\nu)] e^{-|\xi|y} + C_4(\xi) e^{-y\beta}, \\ u_y^*(\xi, y) &= C_1(\xi) e^{-|\xi|y} + C_2(\xi) y e^{-|\xi|y} + C_3(\xi) e^{-y\beta}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pozn. v Matematice nám vyšel trošku jiný výsledek, ale uvažovali jsme (pro možnost dalšího porovnávání výsledků) tvar obecného řešení podle článku.

kde $\beta \equiv \beta(\xi) = [(1/l^2) + \xi^2]^{1/2}$ a $C_b(\xi)$ pro $b=1,2,3,4$ jsou zatím neznámé funkce, které vyjádříme pomocí okrajových podmínek zadaných ke každému konkrétnímu případu.

Kombinací transformovaného obecného řešení, Fourierovy transformace a definice totálního a momentového napětí můžeme tato napětí vyjádřit jako

$$\begin{aligned} t_{yx} = \frac{\mu}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2il^2 \beta^2 [-\xi C_1(\xi) + (2(1-\nu) \operatorname{sgn}(\xi) - y\xi) C_2(\xi)] e^{-y|\xi|} \right. \\ \left. + \frac{2l^2 \xi \beta}{(1-2\nu)} [i\nu\beta C_3(\xi) - \xi(1-\nu) C_4(\xi)] e^{-y\beta} \right\} e^{-ix\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} t_{yy} = \frac{\mu}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2l^2 \beta^2 [-|\xi| C_1(\xi) + (1-2\nu - y|\xi|) C_2(\xi)] e^{-y|\xi|} \right. \\ \left. + \xi l^2 \beta [i\beta C_4(\xi) - \xi C_3(\xi)] e^{-y\beta} \right\} e^{-ix\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} m_{yyy} = \frac{\mu}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2l^2 [\xi^2 C_1(\xi) - (2(1-\nu)|\xi| - y\xi^2) C_2(\xi)] e^{-y|\xi|} \right. \\ \left. + \frac{2l^2 \beta}{(1-2\nu)} [\beta(1-\nu) C_3(\xi) + i\nu\xi C_4(\xi)] e^{-y\beta} \right\} e^{-ix\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} m_{yyx} = \frac{\mu}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2il^2 \xi [|\xi| C_1(\xi) - (3-2\nu - y|\xi|) C_2(\xi)] e^{-y|\xi|} \right. \\ \left. + \beta l^2 [i\xi C_3(\xi) + \beta C_4(\xi)] e^{-y\beta} \right\} e^{-ix\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde $\operatorname{sgn}()$ je funkce signum.

Vzhledem k charakteru úlohy dostáváme následující smíšené okrajové podmínky pro horní polorovinu ($y \geq 0$)

$$t_{yy}(x,0) = 0, \quad m_{yyx}(x,0) = 0 \quad \text{pro } |x| < a, \quad (5.8)$$

$$t_{yx}(x,0) = 0, \quad m_{yyy}(x,0) = 0 \quad \text{pro } -\infty < a < \infty, \quad (5.9)$$

$$u_y(x,0) = 0, \quad Du_x(x,0) \equiv \partial_y u_x(x,0) = 0 \quad \text{pro } |x| > a, \quad (5.10)$$

zatímco podmínky regulárnosti řešení v nekonečnu jsou definovány jako

$$t_{yy}^\infty \rightarrow \sigma_0, \quad t_{xx}^\infty = t_{yx}^\infty = t_{xy}^\infty = 0, \quad m_{ppq} \rightarrow 0 \quad (r, p, q = x, y) \quad \text{pro } R \rightarrow \infty, \quad (5.11)$$

kde $R = \sqrt{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ je vzdálenost od počátku systému souřadnic a σ_0 vyjadřuje konstantní normálové zatížení.

Zadanou úlohu lze řešit superpozicí dvou oddělených úloh, kdy v první části uvažujeme těleso bez trhliny s okrajovými podmínkami v nekonečnu (5.11), zatímco v druhé části řešíme těleso s trhlinou bez zatížení v nekonečnu. Podél líců trhliny však uvažujeme reakci na zatížení z první části úlohy. První okrajová podmínka má pak následující tvar:

$$t_{yy}(x,0) = -\sigma_0, \quad m_{yyx}(x,0) = 0 \quad \text{pro } |x| < a. \quad (5.12)$$

Naším úkolem je tedy vyřešit druhou část úlohy popsanou okrajovými podmínkami (5.9), (5.10) a (5.12).

Pro řešení integrálních rovnic definujeme dvě tzv. hustoty - funkce zohledňující kompatibilitu tělesa a okrajovou podmínku (5.10), jako [1]

$$\varphi(x) = \partial_y u_y(x,0^+) / \partial x, \quad \psi(x) = \partial_x u_x(x,0^+) / \partial y. \quad (5.13)$$

Poznamenejme, že z okrajové podmínky vyplývá také $\varphi(x) = 0, \quad \psi(0) = 0$ pro $|x| \geq a$. Dále, vzhledem ke kompatibilitě a vzhledem k symetrii problému, vyhovují hustoty také těmto vztahům

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a \psi(x) dy = 0, \quad (5.14)$$

Fourierova transformace hustot zapsána pomocí transformovaných posuvů má pak tento tvar

$$\varphi^*(\xi) = -i\xi u_y^*(\xi,0), \quad \psi^*(\xi) = du_x^*(\xi,0) / dy, \quad (5.15)$$

kde $\varphi^*(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a \varphi(t) e^{i\xi t} dt$ a $\psi^*(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a \psi(t) e^{i\xi t} dt$.

Dále, využitím transformovaných posuvů (5.3), okrajových podmínek (5.9) a definice transformovaných hustot (5.15), vyjádříme funkce $C_b(\xi)$ pomocí hustot $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jako

$$\begin{aligned}
C_1(\xi) &= -\frac{il^2\xi(\nu+l^2\xi^2)}{(2\pi)^{1/2}(1-\nu)} \int_{-a}^a [\varphi(t)+\psi(t)] e^{it\xi} dt + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}\xi} \int_{-a}^a \varphi(t) e^{it\xi} dt, \\
C_2(\xi) &= \frac{il^2 \operatorname{sgn}(\xi)}{2(2\pi)^{1/2}(1-\nu)} \int_{-a}^a [\beta^2\varphi(t)+\xi^2\psi(t)] e^{it\xi} dt, \\
C_3(\xi) &= \frac{il^2\xi(\nu+l^2\xi^2)}{(2\pi)^{1/2}(1-\nu)} \int_{-a}^a [\varphi(t)+\psi(t)] e^{it\xi} dt, \\
C_4(\xi) &= \frac{l^2\beta(l^2\beta^2-\nu)}{(2\pi)^{1/2}(1-\nu)} \int_{-a}^a [\varphi(t)+\psi(t)] e^{it\xi} dt.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do definice totálního a momentového napětí za předpokladu platnosti okrajových podmínek (5.12), dostaneme záměnou pořadí integrace následující systém sdružených integrálních rovnic pro funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{2\pi} \left[\int_{-a}^a \varphi(t) L_1((x-t), y) dt + \int_{-a}^a \psi(t) L_2((x-t), y) dt \right] &= -\sigma_0 \quad \text{pro } |x| < a, \\
\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{2\pi} \left[\int_{-a}^a \varphi(t) L_3((x-t), y) dt + \int_{-a}^a \psi(t) L_4((x-t), y) dt \right] &= 0 \quad \text{pro } |x| < a.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Jádra $L_b((x-t), y)$ jsou definována jako

$$L_b((x-t), y) = \int_{-\infty}^{\infty} k_b(\xi, y) e^{-i\xi(x-t)} d\xi, \tag{5.18}$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1(\xi, y) &= \frac{il^4\beta^4 \operatorname{sgn}(\xi)(2l^2\xi^2 - 1 - y|\xi|)}{1-\nu} e^{-|\xi|y} - il^2\beta\xi \left[1 + \frac{2(l^2\beta\xi)^2}{1-\nu} \right] e^{-y\beta}, \\
k_2(\xi, y) &= \frac{il^4\beta^2(1+2l^2\xi^2 - y|\xi|)\xi|\xi|}{1-\nu} e^{-|\xi|y} - il^2\beta\xi \left[1 + \frac{2(l^2\beta\xi)^2}{1-\nu} \right] e^{-y\beta}, \\
k_3(\xi, y) &= \frac{l^4\beta^2|\xi|(1+2l^2\xi^2 - y|\xi|)}{1-\nu} e^{-|\xi|y} - l^2\beta \left[1 + \frac{2(l^2\beta\xi)^2}{1-\nu} \right] e^{-y\beta}, \\
k_4(\xi, y) &= \frac{l^4\xi^2|\xi|(3+2l^2\xi^2 - y|\xi|)}{1-\nu} e^{-|\xi|y} - l^2\beta \left[1 + \frac{2(l^2\beta\xi)^2}{1-\nu} \right] e^{-y\beta}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Poznamenejme, že pokud $l^2 \rightarrow 0$, zjednoduší se systém (5.17) na integrální rovnice totožné s klasickou pružností.

Pomocí asymptotické analýzy lze jádra rozdělit na singulární a regulární část [1]

$$\begin{aligned}
L_1((x-t), y=0^+) &= \frac{l^2 \gamma_1}{(x-t)^3} - \frac{\gamma_2}{4(x-t)} + N_1(x-t), \\
L_2((x-t), y=0^+) &= \frac{l^2 \gamma_3}{(x-t)^3} - \frac{\gamma_3}{4(x-t)} + N_1(x-t), \\
L_3((x-t), y=0^+) &= \frac{l^2 \gamma_3}{2(x-t)^2} + \frac{\gamma_3}{4} \ln \frac{|x-t|}{l} + N_2(x-t), \\
L_4((x-t), y=0^+) &= \frac{l^2 \gamma_1}{2(x-t)^2} + \frac{\gamma_3}{4} \ln \frac{|x-t|}{l} + N_2(x-t),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

kde konstanty $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ jsou definovány vztahy

$$\gamma_1 = \frac{7-4\nu}{1-\nu}, \quad \gamma_2 = \frac{11-4\nu}{1-\nu}, \quad \gamma_3 = \frac{3-4\nu}{1-\nu}. \tag{5.21}$$

Regulární jádra obsahují modifikované Besselovy funkce II. druhu a jsou definovány jako [1]

$$\begin{aligned}
N_1(x-t) &= -\frac{2}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1440l^6}{(x-t)^7} - \frac{72l^4}{(x-t)^5} + \frac{(7-4\nu)l^2}{2(x-t)^3} - \frac{3-4\nu}{8(x-t)} - \frac{(1-\nu)K_2(|x-t|/l)}{x-t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{x-t} \left[K_4(|x-t|/l) \left(1 + \frac{30l}{(x-t)^2} \right) - K_2(|x-t|/l) \right] \right\}, \\
N_2(x-t) &= -\frac{2}{(1-\nu)} \left\{ \frac{240l^6}{(x-t)^6} - \frac{18l^4}{(x-t)^4} + \frac{(7-4\nu)l^2}{4(x-t)^2} + \frac{3-4\nu}{8} \ln(|x-t|/l) \right. \\
&\quad - \frac{1}{16} \left[2K_0(|x-t|/l) - K_2(|x-t|/l) - 2K_4(|x-t|/l) + K_6(|x-t|/l) \right] \\
&\quad \left. - \frac{(1-\nu)}{2} \left[K_2(|x-t|/l) - K_0(|x-t|/l) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Dostáváme tak následující systém hypersingulárních integrálních rovnic

$$\begin{aligned}
F.P. \int_{-1}^1 \frac{\hat{l}^2 [\gamma_1 \hat{\phi}(\hat{t}) + \gamma_3 \hat{\psi}(\hat{t})]}{(\hat{x} - \hat{t})^3} d\hat{t} - C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{[\gamma_2 \hat{\phi}(\hat{t}) + \gamma_3 \hat{\psi}(\hat{t})]}{4(\hat{x} - \hat{t})} d\hat{t} \\
+ \int_{-1}^1 [\hat{\phi}(\hat{t}) + \hat{\psi}(\hat{t})] \cdot \hat{N}_1(a\hat{x} - a\hat{t}) d\hat{t} = -\frac{2\pi\sigma_0}{\mu} \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1, \\
F.P. \int_{-1}^1 \frac{\hat{l}^2 [\gamma_3 \hat{\phi}(\hat{t}) + \gamma_1 \hat{\psi}(\hat{t})]}{2(\hat{x} - \hat{t})^2} d\hat{t} - \int_{-1}^1 \frac{\gamma_3 [\hat{\phi}(\hat{t}) + \hat{\psi}(\hat{t})]}{4} \ln \frac{|\hat{x} - \hat{t}|}{\hat{l}} d\hat{t} \\
+ \int_{-1}^1 [\hat{\phi}(\hat{t}) + \hat{\psi}(\hat{t})] \cdot \hat{N}_2(a\hat{x} - a\hat{t}) d\hat{t} = 0 \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

kde $\hat{\varphi}(\hat{t}) = \varphi(a\hat{t})$, $\hat{\psi}(\hat{t}) = \psi(a\hat{t})$, $\hat{x} = x/a$, $\hat{t} = t/a$ a $\hat{l} = l/a$ jsou bezrozměrné veličiny, které používáme pro normalizaci nad intervalem $\langle -1, 1 \rangle$.

Vzhledem k asymptotické analýze víme, že pole posuvů má charakter $r^{3/2}$, kde r je vzdálenost od kořene trhliny. Hustoty pak můžeme vyjádřit pomocí Čebyševových polynomů druhého druhu jako [1]

$$\hat{\varphi}(\hat{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2}, \quad \hat{\psi}(\hat{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2}, \quad |\hat{t}| < 1. \quad (5.24)$$

Vzhledem k této aproximaci lze systém (5.23) napsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} & \hat{l}^2 \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_1 F_n + \gamma_3 G_n] F.P. \int_{-1}^1 \frac{U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2}}{(\hat{x}-\hat{t})^3} d\hat{t} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_2 F_n + \gamma_3 G_n] C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2}}{(\hat{x}-\hat{t})} d\hat{t} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [F_n + G_n] Q_n^{(1)}(\hat{x}) = -\frac{2\pi\sigma_0}{\mu} \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1, \\ & \frac{\hat{l}^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_3 F_n + \gamma_1 G_n] F.P. \int_{-1}^1 \frac{U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2}}{(\hat{x}-\hat{t})^2} d\hat{t} + \frac{\gamma_3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [F_n + G_n] \int_{-1}^1 U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2} \ln \frac{|\hat{x}-\hat{t}|}{\hat{l}} d\hat{t} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [F_n + G_n] Q_n^{(2)}(\hat{x}) = 0 \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1, \end{aligned} \quad (5.25)$$

kde $Q_n^{(b)}(x)$, ($b=1,2$) jsou regulární integrály definovány jako

$$Q_n^{(b)}(\hat{x}) \equiv \int_{-1}^1 U_n(\hat{t})(1-\hat{t}^2)^{1/2} \cdot \hat{N}_b(a\hat{x}-a\hat{t}) d\hat{t}, \quad b=1,2. \quad (5.26)$$

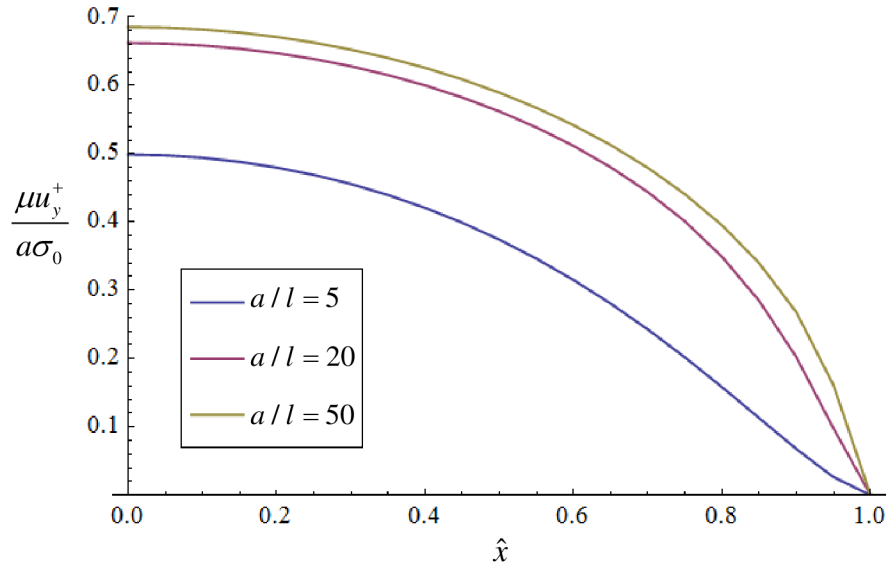
Pro jejich vyjádření použijeme Gauss-Čebyševovu kvadraturu, o které se zmiňujeme v předchozí kapitole.

Singulární integrály počítáme ve smyslu konečných hodnot pomocí tabulkových hodnot. Poznamenejme také, že vzhledem k podmínce nulového rozevření trhliny v jejích vrcholech, kterou musejí hustoty splňovat, jsou koeficienty F_0 a G_0 nulové.

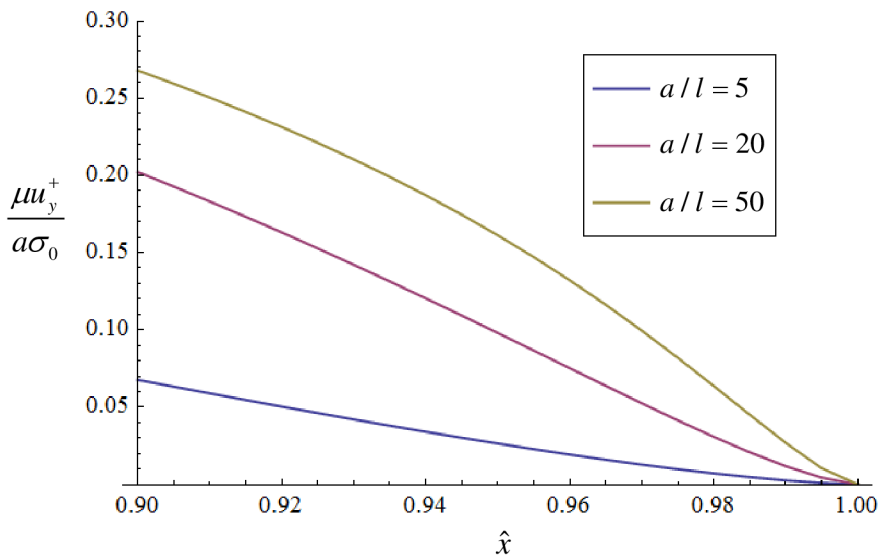
Dostáváme tak konečnou podobu řešeného systému

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi\hat{l}^2}{4(1-\hat{x})} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_1 F_n + \gamma_3 G_n] \left[(n^2+n)U_{n+1}(\hat{x}) - (n^2+3n+2)U_{n-1}(\hat{x}) \right] - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_2 F_n + \gamma_3 G_n] T_{n+1}(\hat{x}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n + G_n] Q_n^{(1)}(\hat{x}) = -\frac{2\pi\sigma_0}{\mu} \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1, \\ & -\frac{\pi\hat{l}^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_3 F_n + \gamma_1 G_n] (n+1)U_n(\hat{x}) + \frac{\pi\gamma_3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} [F_n + G_n] \left[\frac{T_{n+2}(\hat{x})}{n+2} - \frac{T_n(\hat{x})}{n} \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n + G_n] Q_n^{(2)}(\hat{x}) = 0 \quad \text{pro } |\hat{x}| < 1, \end{aligned} \quad (5.27)$$

Tento systém funkcionálních rovnic řešíme metodou kolokačních bodů. Jako kolokační body volíme kořeny Čebyševových polynomů $T_{N+1}(\hat{x})$ (viz. (4.12)). Dostáváme tak $2N+2$ rovnic pro $2N$ neznámých (F_n, G_n) , který vyřešíme metodou nejmenších čtverců. Dosazením výsledných hodnot do definice pak dostaneme podobu hustot $\hat{\varphi}(\hat{x})$ a $\hat{\psi}(\hat{x})$. Následně pak integrací vyjádříme průběhy posuvů.



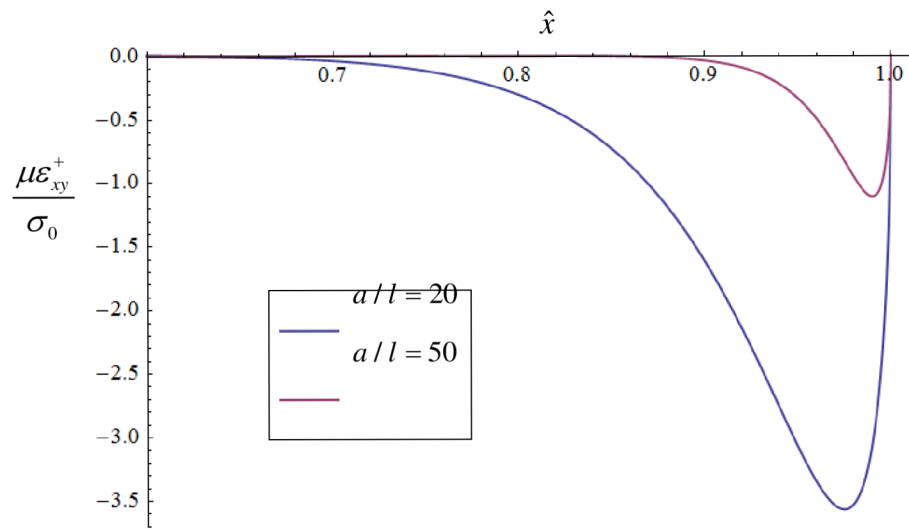
Obr.5. Profil normalizovaného rozevření trhliny podél líců trhliny



Obr.6. Profil normalizovaného rozevření trhliny v okolí kořene trhliny

Vynesení normovaných průběhů do grafu vidíme, že hodnoty rozevření trhliny s rostoucím poměrem a/l rostou. Docházíme tak ke stejnému závěru jako v případě analýzy asymptotického pole posuvů, příp. J-integrálu. S rostoucím vlivem mikrostruktury materiálu se více projevuje zpevňující charakter.

Pomocí definice (2.29) lze následně vyjádřit také průběh smykového napětí.



Obr. Průběh normovaného smykového napětí

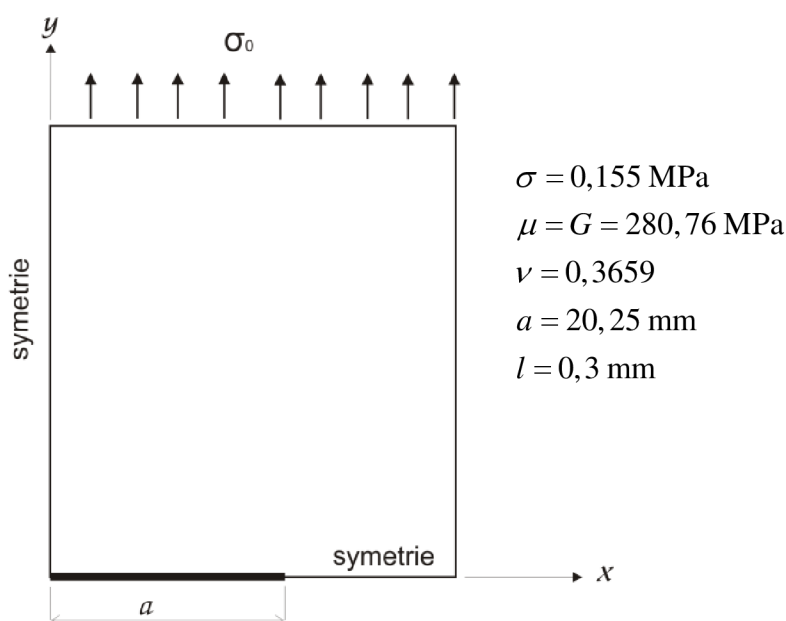
7. Numerické výsledky a porovnání s MKP

Pro řešení systému integrálních rovnic (5.25) a grafické vyjádření obdržených výsledků jsme zvolili výpočetní systém Mathematica 9, který je v akademické sféře i v oblasti výzkumu hojně využíván. Vzhledem k náročnosti některých dílčích výpočtů na výpočetní zdroje (zejména při ověřování vztahů vyplývajících z Fourierovy transformace) jsme využili také možnost počítat skrze virtuální organizaci MetaCentrum VO, která sdružuje výpočetní a úložné kapacity hostované v různých institucích po celé České republice.

V následující části stručně uvedeme implementaci výpočtu pole posuvů a smykového napětí v okolí kořene trhliny a výsledky vyneseme do grafů. Ty pak porovnáváme s numerickým modelem homogenizované keramické pěny, která je typickým příkladem materiálu s výrazným vlivem mikrostruktury.

7.1. Popis programu a vlastní výpočet

Připomeňme, že hledáme pole posuvů a napětí v okolí kořene přímé trhliny o délce $2a$ uvnitř nekonečné desky, která je na obou koncích symetricky zatížena normálovým napětím σ . Uvažujeme podmínky rovinné deformace, nezátžené líce trhliny a materiál s charakteristickým rozměrem mikrostruktury l^2 . Kartézský systém souřadnic je umístěn uprostřed trhliny, jak je naznačeno na obrázku (123).

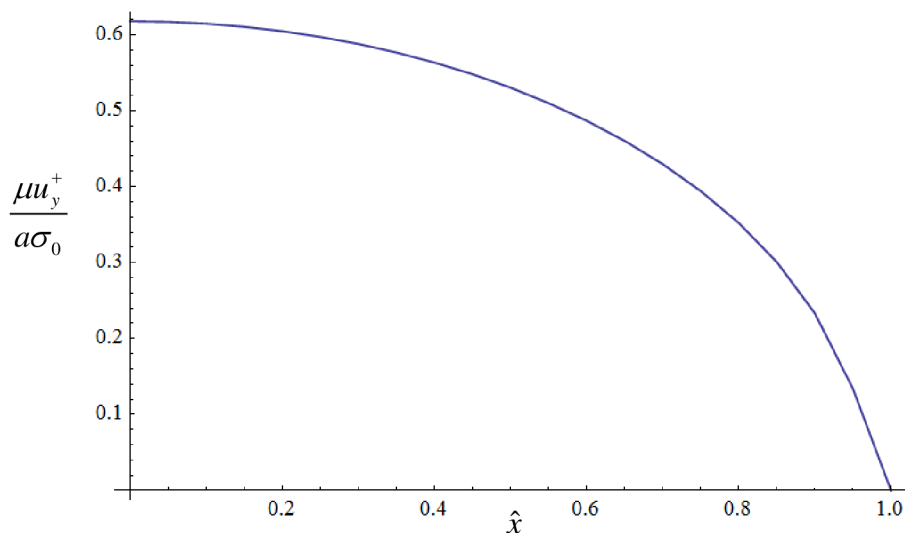


Obr.7. Geometrie analytického modelu

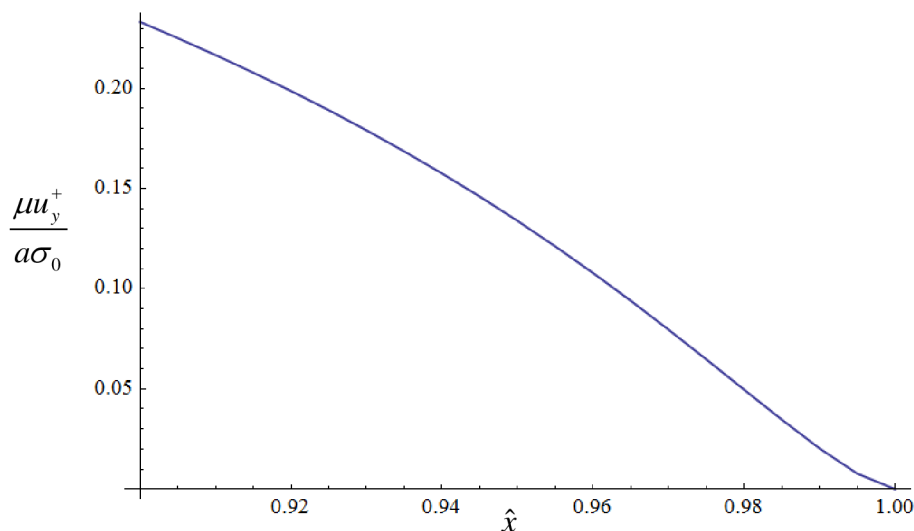
V úvodní části programu je nutno zadat velikost normálového zatížení σ [MPa], smykový modul pružnosti μ [MPa], Poissonovo číslo ν [-], velikost trhliny a [mm] a charakteristický rozměr mikrostruktury l [mm]. V rámci programu počítáme s normalizovanými proměnnými $\hat{x} = x/a$, $\hat{c} = l^2/a^2$, $\hat{\phi} = \phi(a\hat{x})$, $\hat{\psi} = \psi(a\hat{x})$.

Pro výpočet systému integrálních rovnic (5.27) musíme nejprve definovat Gauss-Čebyševovu kvadraturu pro výpočet regulárních jader N_1, N_2 . Vzhledem k tomu, že Mathematica neobsahuje algoritmus pro výpočet integrálů ve smyslu Hadamardovy konečné části, jsme nuceni pro výpočet singulárních integrálů použít tabulkových hodnot (4.13). Výpočet Cauchyho integrálu v jádru softwaru naprogramovaný sice je, z důvodu zachování kompatibility s ostatními výrazy použijeme i v těchto případech hodnot tabulkových. Po definici základního systému integrálních rovnic následuje transformace do maticového tvaru, který je vyžadován při řešení problému pomocí metody nejmenších čtverců.

Po získání koeficientů F_i, G_i můžeme vyjádřit hustoty $\hat{\phi}(\hat{x})$ a $\hat{\psi}(\hat{x})$, a z druhé jmenované podle definice vyjádřit normalizované pole posuvů po celé délce trhliny integrací a následným normování pomocí napětí σ_0 .

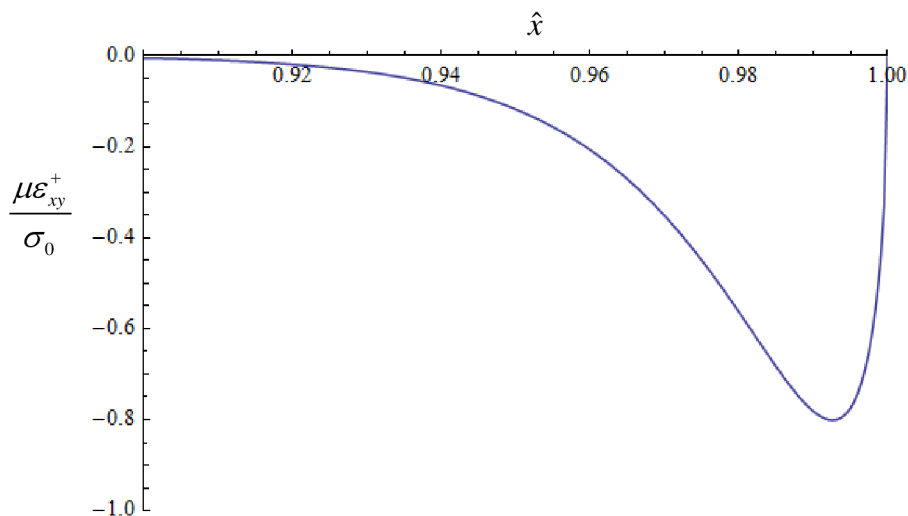


Obr.8. Průběh normovaného rozevření podél horního líce trhliny



Obr.9. Průběh normovaného rozevření v okolí kořene

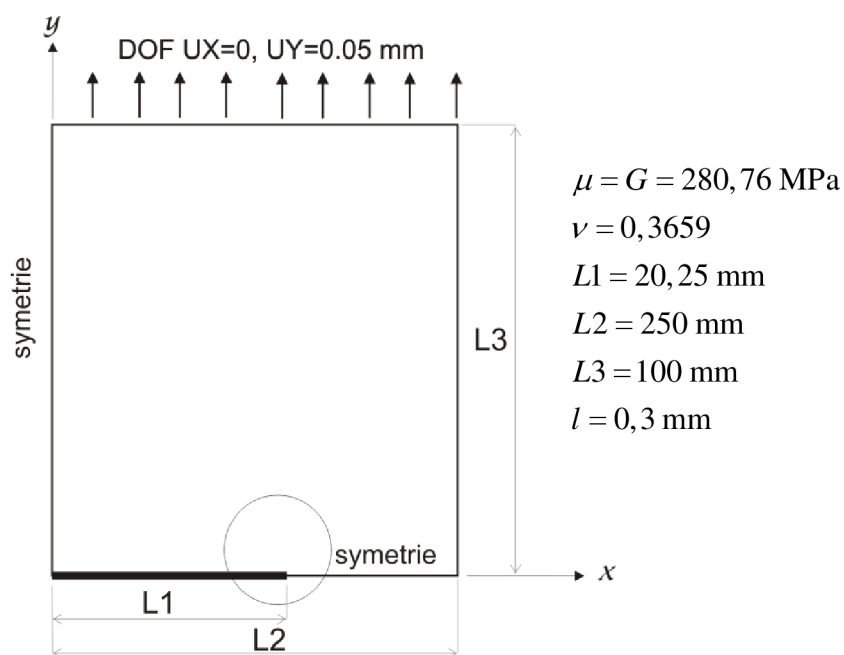
Průběh smykového napětí získáme z definice (2.29) a následným normováním normálovým napětím jako



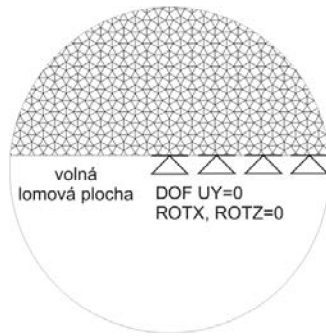
Obr.10. Průběh normovaného smykového napětí

7.2. Numerický výpočet

Pro porovnání použijeme numerický model keramické pěny vytvořený na ÚMTMB. Materiálové konstanty jsou shodné s konstantami zadanými pro analytický výpočet. Rozdílná je však geometrie a charakter okrajových podmínek. Zatímco v analytickém výpočtu uvažujeme nekonečnou desku, v případě numerického výpočtu pracujeme s deskou konečných rozměrů na koncích vetknutou a oproti analytickému řešení zatíženou deformačně.

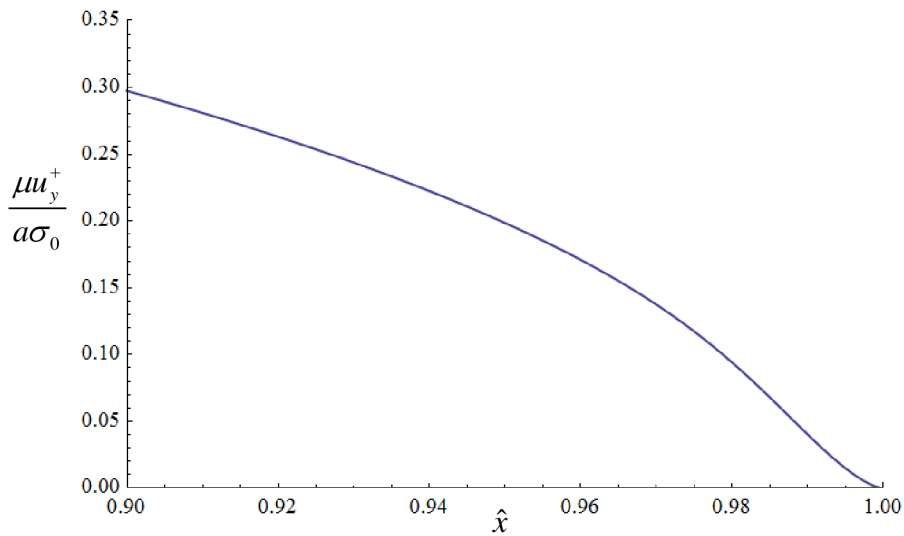


Obr.11. Geometrie numerického modelu

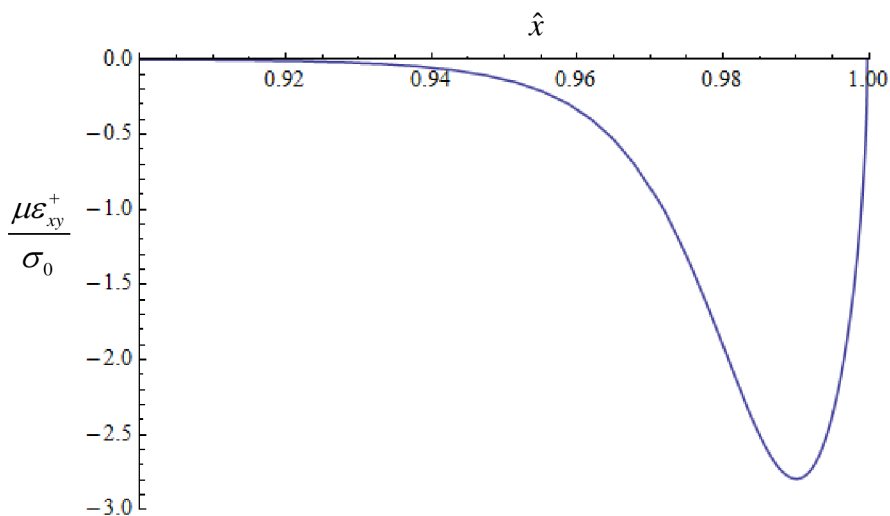


Obr.12. Detail okrajových podmínek v kořeni trhliny

Hodnota zatížení, se kterým v analytickém výpočtu pracujeme, odpovídá normálovému zatížení odečtenému v dostatečné vzdálenosti od trhliny i od místa vetknutí numerického modelu. Vynesením hodnot posuvů a smykového napětí v těsné blízkosti trhliny a následnou normalizací dostáváme tyto průběhy

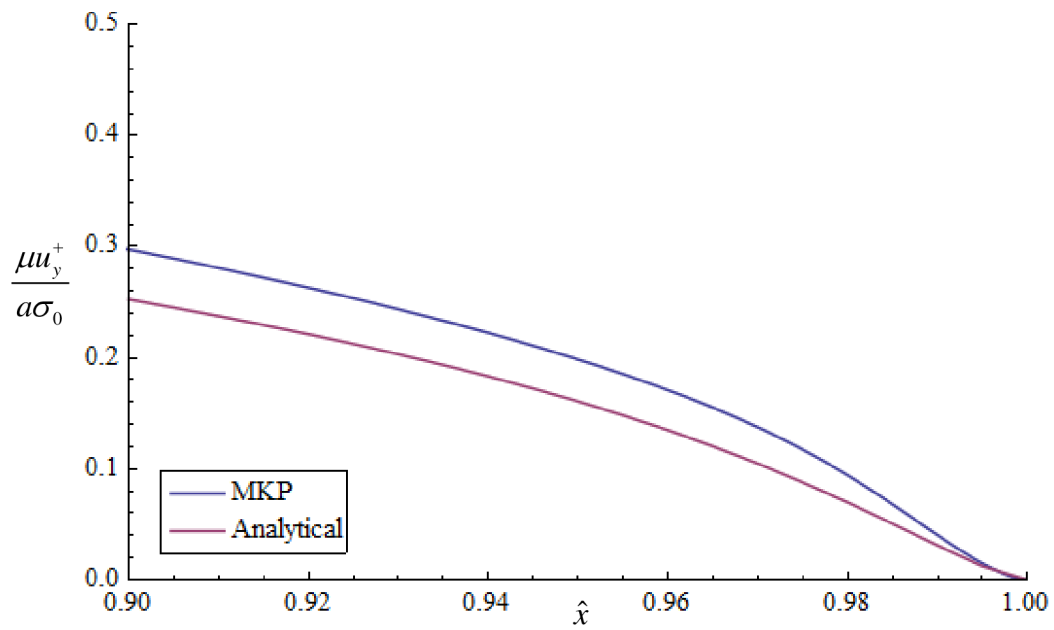


Obr.13. Průběh normovaného rozevření v okolí kořene

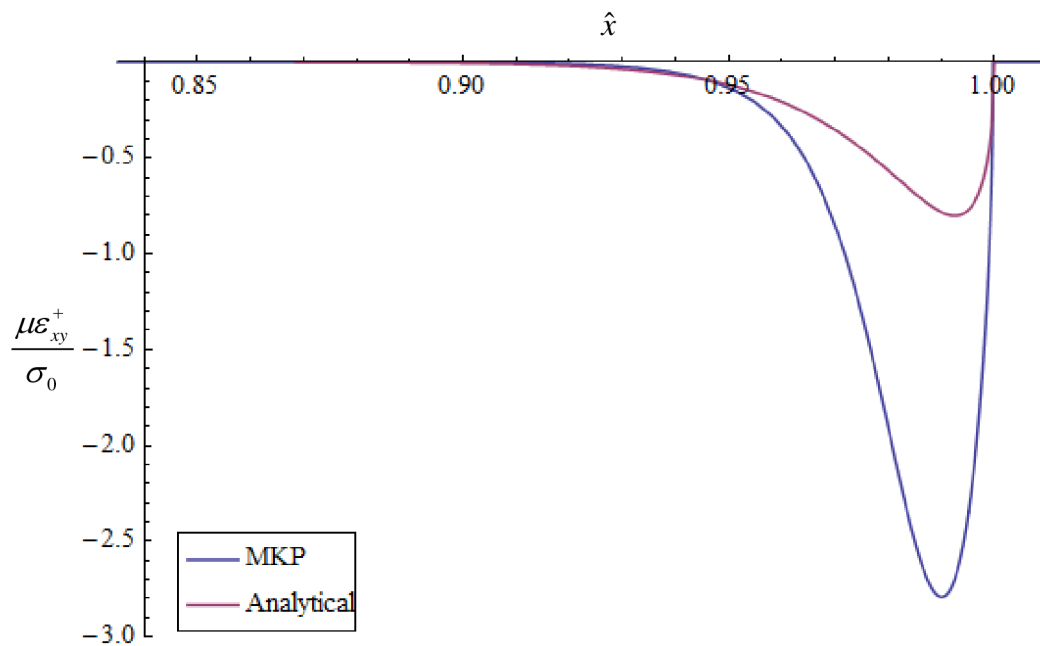


Obr.14. Průběh normovaného rozevření

7.3. Porovnání výsledků



Obr.15. Detail normovaného rozevření v okolí kořene trhliny



Obr.16. Detail normovaného smykového napětí v okolí kořene trhliny

8. Diskuze a závěr

V rešeršní části jsou uvedeny základní druhy gradientní teorie pružnosti a pro II. variantu Mindlinovy dipolární gradientní pružnosti byly odvozeny základní rovnice pro posuvy, přetvoření a silové a momentové napětí. Následně byl definován systém singulárních integrálních rovnic, jehož řešením bylo možné vyjádřit pole posuvů a následně smykového napětí v okolí kořene trhliny.

V případě vyjádření profilu rozevření trhliny se výsledky prakticky shodují s výsledky uvedenými v [1], odkud byl systém singulárních integrálních rovnic odvozen a odpovídá také teoretickým předpokladům plynoucích z analýzy asymptotického pole posuvů a formulace J-integrálu. Totéž však nelze říci o získaném průběhu smykového napětí, kdy si neodpovídá amplituda. Na druhé straně, pro rozměr mikrostruktury l jdoucí k nule by predikce gradientní pružnosti měly odpovídat predikcím klasické pružnosti, tj. smykové napětí podél osy x je v případě klasické pružnosti nulové. Z tohoto hlediska výsledky uvedené v přeložené diplomové práci splňují tento požadavek.

Nesrovnalosti jsou zřejmé také z porovnání analytického modelu s numerickým, kdy není dosaženo požadované přesnosti. Nicméně je nutné zdůraznit tři okolnosti: 1) MKP řešení bylo získáno na relativně malém vzorku, 2) při MKP modelování vzorek byl zatěžován deformačně a ne silově, 3) MKP řešení bylo získáno pomocí speciální iterační procedury, viz [11], která explicitně neobsahuje mikrostrukturní parametr l , nýbrž přírůstek tohoto parametru, který vstupuje do iterační procedury a počet kroků se nastavuje na základě dosažení polohy inflexního bodu profilu líců otevřené trhliny. Předložené semianalytické řešení tak může poskytnout užitečný nástroj pro nastavení počtu kroků procedury při výpočtovém modelování trhliny v homogenizovaných pěnových strukturách.

Literatura

- [1] P.A. GOURGIOTIS, H.G. GEORGIADIS
Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity
Journal of the Mechanics and Physics of Solids 57 (2009) 1898–1920
- [2] P.A.GOURGIOTIS, M.D.SIFNAIOU, H.G.GEORGIADIS
The problem of sharp notch in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity
International Journal of Fracture (2010) 166:179–201
- [3] C.T.SUN,Z.H.JIN
Fracture Mechanics
Elsevier, Amsterdam 2012
- [4] N. ARAVAS, A.E.GIANNAKOPOUOLOS
Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity
International Journal of Solids and Structures 46 (2009) 4478–4503
- [5] H.G.GEORGIADIS, C.G. GRENTZELOU
Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity
International Journal of Solids and Structures 43 (2006), 5690–5712.
- [6] HARM ASKES, ELIAS C. AIFANTIS
Gradient elasticity in statics and dynamics An overview of formulations,length scale identification procedures, finite element implementations and new results
International Journal of Solids and Structures 48 (2011) 1962–1990.
- [7] A.C.KAYA, F. ERDOGAN
On the solution of integral equations with strongly singular kernels
Quarterly of applied mathematics 45 (1987) 105-122
- [8] D.A.HILLS, P.A.KELLY, D.N.DAI, A.M.KORSUNSKY
Solution of crack problems - The distributed dislocation technique
Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1996
- [9] YOUN-SHA CHAN A, ALBERT C. FANNJIANG A, GLAUCIO H.
Integral equations with hypersingular kernels - theory and applications to fracture mechanics
International Journal of Engineering Science 41 (2003) 683–720
- [10] MILTON ABRAMOWITZ, IRENE A. STEGUN
Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematic tables
Courier Dover Publications, 1972

- [11] SKALKA P., NAVRÁTIL P., KOTOUL M.
Stress-strain analysis of cracked open cell ceramic foams
Computational mechanics, 2014 – submitted

Priloha c. 1

```
(*====DIPLOMOVY PROJEKT - Bc. Jaromir Klepac====*)
(*====Aplikace gradientni pruznosti v problemech lomove mechaniky====*)
(*====Ustav mechaniky teles, mechatroniky a biomechaniky====*)
(*====30.5.2014====*)

ClearAll["Global`*"];
basedirname = NotebookDirectory[];
SetDirectory[basedirname];
<< PlotLegends`

(*====Constants====*)
(*normal stress [MPa]*)
σ = 0.155;
(*Poisson's ratio [-]*)
ν = 0.3659;
(*Cellular length [mm]*)
l = 0.3;
(*Crack length [mm]*)
a = 20.25;
(*Shear modulus G [MPa]*)
μ = 280.76;

(*number of coll.points*)
n = 40;
(*number of integr. point for Gauss-Cheby*)
p = 40;

γ1 = (7 - 4 * ν) / (1 - ν);
γ2 = (11 - 4 * ν) / (1 - ν);
γ3 = (3 - 4 * ν) / (1 - ν);
c = (l^2) / a^2;

(*====Collocation points====*)
t = Table[N[Cos[(2 * i - 1) * π] / (2 * (n + 1))]], {i, 1, n + 1}];
(*====Integration points====*)
s = Table[N[Cos[π * j / (n + 1)]], {j, 1, p}];
(*====Weight functions====*)
w = Table[N[(1 - s[[j]]^2) / (n + 1)], {j, 1, p}];

(*====Regular parts====*)
N1[k_, t_] := -2 / (1 - ν) * ((1440 * c^3) / ((k - t)^7) -
  (72 * c^2) / ((k - t)^5) + ((7 - 4 * ν) * c) / (2 * (k - t)^3) - (3 - 4 * ν) / (8 * (k - t)) -
  ((1 - ν) * BesselK[2, Abs[k - t] / Sqrt[c]]) / (k - t) - 1 / (k - t) * (
    BesselK[4, Abs[k - t] / Sqrt[c]] * (1 + (30 * c) / ((k - t)^2)) -
    BesselK[2, Abs[k - t] / Sqrt[c]]))
N2[k_, t_] := -2 / (1 - ν) * a * (
  (240 * c^3) / ((k - t)^6) - (18 * c^2) / ((k - t)^4) +
  ((7 - 4 * ν) * c) / (4 * (k - t)^2) + ((3 - 4 * ν) * Log[Abs[k - t] / Sqrt[c]]) / 8 - (1 / 16) * (
    2 * BesselK[0, Abs[k - t] / Sqrt[c]] - BesselK[2, Abs[k - t] / Sqrt[c]] -
    2 * BesselK[4, Abs[k - t] / Sqrt[c]] + BesselK[6, Abs[k - t] / Sqrt[c]]) -
  (1 - ν) / 2 * (BesselK[2, Abs[k - t] / Sqrt[c]] - BesselK[0, Abs[k - t] / Sqrt[c]]))

(*====Gauss-Cheby Quadrature====*)
Q1[i_, k_] := Sum[ChebyshevU[i, k] * w[[j]] * N1[k, s[[j]]], {j, 1, p}]
Q2[i_, k_] := Sum[ChebyshevU[i, k] * w[[j]] * N2[k, s[[j]]], {j, 1, p}]
```

```

(*====Integral equations====*)
rce1[x_] := - (π * c) / (4 * (1 - x^2)) *
  Sum[(γ1 * F[j] + γ3 * G[j]) * ((j^2 + j) * ChebyshevU[j + 1, x] -
    (j^2 + 3 * j + 2) * ChebyshevU[j - 1, x]), {j, 1, n}] -
  (π / 4) * Sum[(γ2 * F[j] + γ3 * G[j]) * ChebyshevT[j + 1, x], {j, 1, n}] +
  Sum[(F[j] + G[j]) * Q1[j, x], {j, 1, n}];
rce2[x_] := - (π * c / 2) * Sum[(γ3 * F[j] + γ1 * G[j]) * (j + 1) * ChebyshevU[j, x],
  {j, 1, n}] + (π * γ3 / 8) *
  Sum[(F[j] + G[j]) * (ChebyshevT[j + 2, x] / (j + 2) - ChebyshevT[j, x] / j),
  {j, 1, n}] + Sum[(F[j] + G[j]) * Q2[j, x], {j, 1, n}];

(*====System of equations with collocation method====*)
EQsystem1 = Table[rce1[t[[i]]] == - (2 * π * σ) / μ, {i, 1, n + 1}];
EQsystem2 = Table[rce2[t[[i]]] == 0, {i, 1, n + 1}];

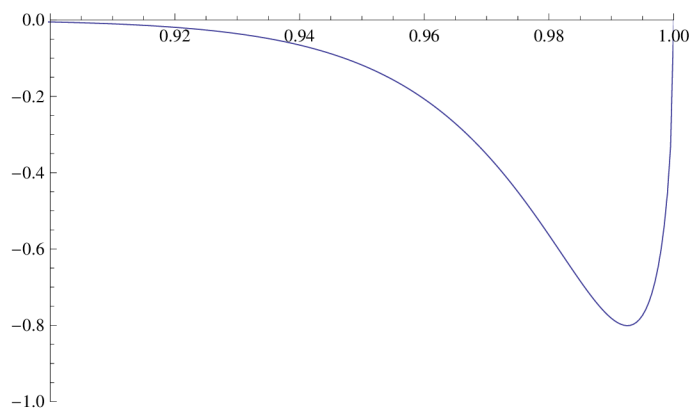
(*====Transformation to Matrix form====*)
m1 =
  Normal[CoefficientArrays[EQsystem1, Flatten[Table[{F[j], G[j]}, {j, 1, n}]]]][[2]];
b1 = Normal[CoefficientArrays[EQsystem1, Flatten[Table[{F[j], G[j]}, {j, 1, n}]]]][[
  1]];
m2 = Normal[CoefficientArrays[EQsystem2, Flatten[Table[{F[j], G[j]}, {j, 1, n}]]]][[
  2]];
b2 = Normal[CoefficientArrays[EQsystem2, Flatten[Table[{F[j], G[j]}, {j, 1, n}]]]][[
  1]];
b = Join[b1, b2];
m = Join[m1, m2];

(*====Evaluation with Least square method ====*)
xx = LeastSquares[m, b];
F = Table[xx[[i]], {i, 1, 2 * n, 2}];
G = Table[xx[[i]], {i, 2, 2 * n, 2}];

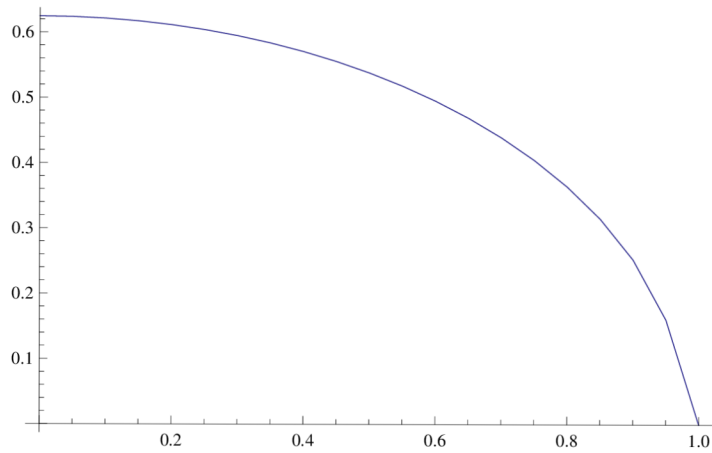
(*====Densities Plot====*)
Fi[x_] := Sum[F[[j]] * ChebyshevU[j, x] * Sqrt[1 - x^2], {j, 1, n}];
Plot[Fi[x], {x, -1, 1}];
Psi[x_] := Sum[G[[j]] * ChebyshevU[j, x] * Sqrt[1 - x^2], {j, 1, n}];
Plot[Psi[x], {x, -1, 1}];

(*====Monopolar stress - tenzor τ_xy normalized plot====*)
S12 = Table[{x, - (Psi[x] + Fi[x]) * μ^2 / σ}, {x, 0.6, 1, 0.0005}];
ListLinePlot[S12, PlotRange → {{0.9, 1}, {0.01, -1}}]

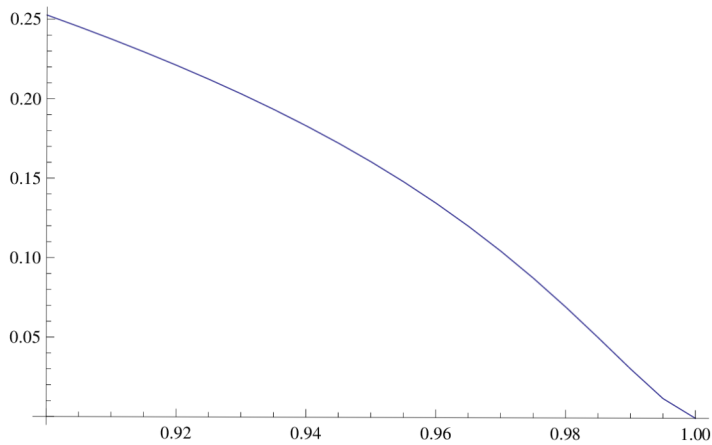
```



```
(*====Displacement - normalized plot====*)
UY = Table[{b, Integrate[Psi[x], {x, -1, b}] *  $\mu / \sigma$ }, {b, 0, 1, 0.05}];
ListLinePlot[UY]
```



```
(*====Detail====*)
UUY = Table[{b, Integrate[Psi[x], {x, -1, b}] *  $\mu / \sigma$ }, {b, 0.90, 1, 0.005}];
ListLinePlot[UUY]
```



```
(*====Export to file====*)
(*Export["S12-50.dat", S12, "Data"];
Export["U22-50.dat", UY, "Data"];
Export["UUY-50.dat", UUY, "Data"]; *)
```

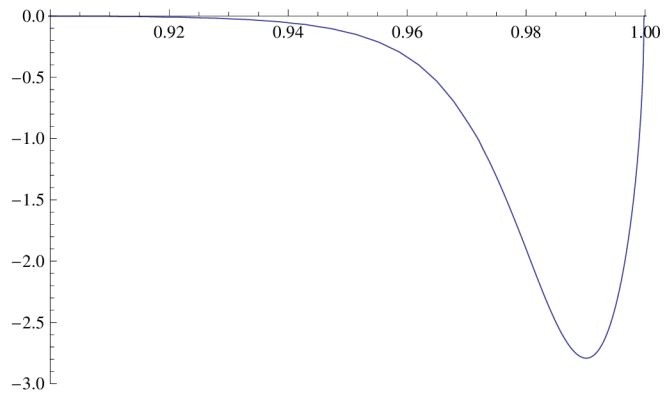
```

(*====Comparison with MKP results====*)
(*-----
   $\sigma=0.155$ ;
   $\nu=0.3659$ ;
   $\mu=280.76$ ;
   $a=20.25$ ;
   $l=0.3$ ;
  -----*)

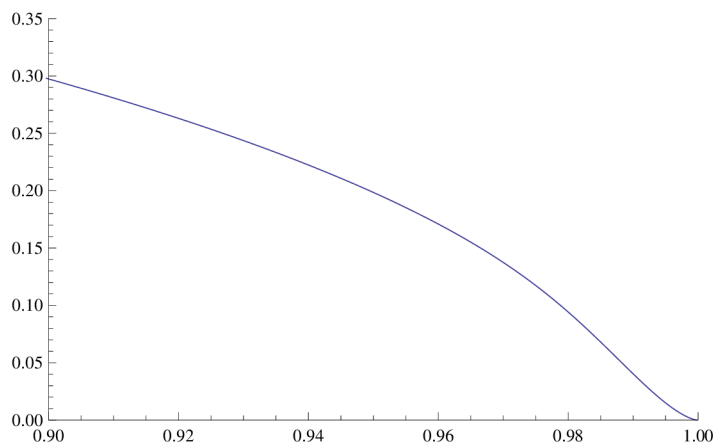
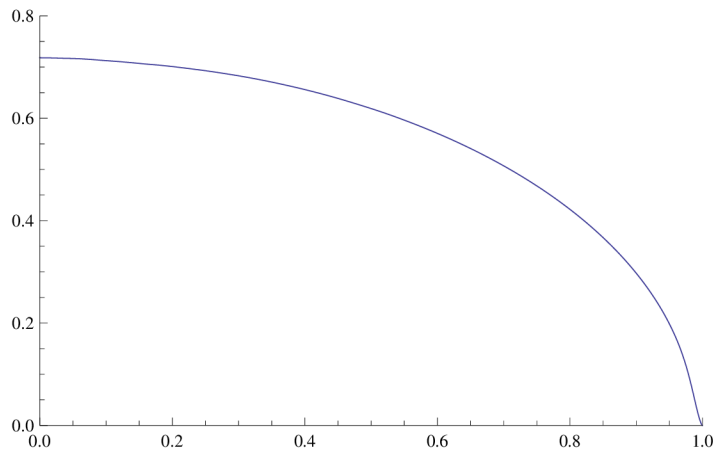
U22N = Import["U22-N.dat", "Data"];
S12N = Import["S12-N.dat", "Data"];

(*====MKP monopolar stress - tensor  $\tau_{xy}$  normalized plot====*)
S12NormX = Table[S12N[[i, 1]] / a, {i, 1, Length[S12N]}];
S12NormY = Table[S12N[[i, 2]] /  $\sigma$ , {i, 1, Length[S12N]}];
S12Norm = Table[{S12NormX[[i]], S12NormY[[i]]}, {i, 1, Length[S12N]}];
ListLinePlot[S12Norm, PlotRange -> {{0.90, 1}, {0, -3}}]

```



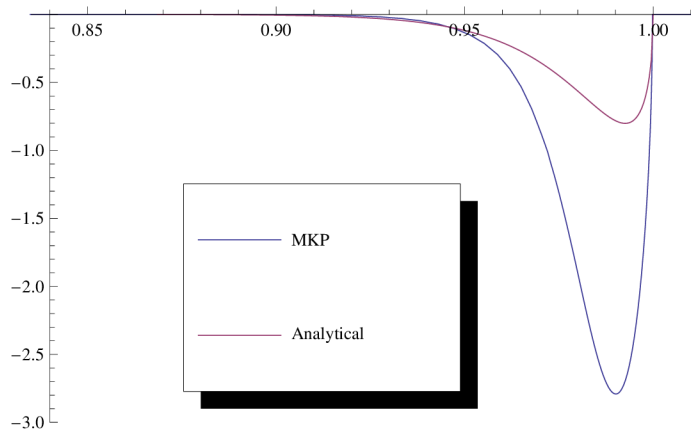
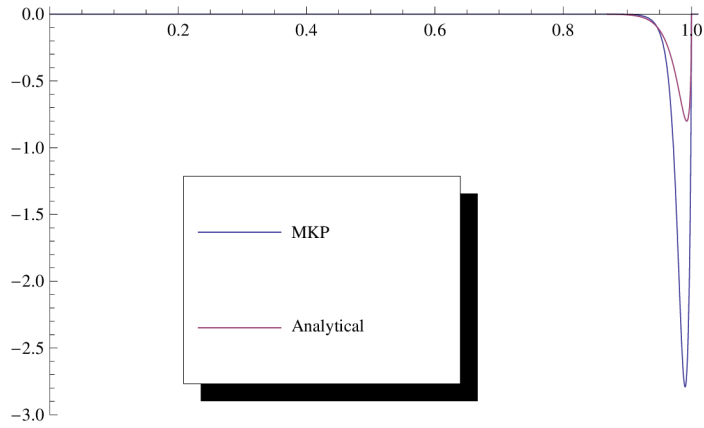

```
(*====MKP displacement - normalized plot====*)  
U22NormX = Table[U22N[[i, 1]] / a, {i, 1, Length[U22N]}];  
U22NormY = Table[U22N[[i, 2]] *  $\mu$  / ( $\sigma$  * a), {i, 1, Length[U22N]}];  
U22Norm = Table[{U22NormX[[i]], U22NormY[[i]]}, {i, 1, Length[U22N]}];  
ListLinePlot[U22Norm, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 0.8}}]  
ListLinePlot[U22Norm, PlotRange -> {{0.9, 1}, {0, 0.35}}]
```



```

(*====ComparePlots====*)
(*shear stress*)
ListLinePlot[{S12Norm, S12}, PlotLegend → {"MKP", "Analytical"},
  LegendPosition → {-0.5, -0.5}, PlotRange → {{0, 1.01}, {0, -3}}]
ListLinePlot[{S12Norm, S12}, PlotLegend → {"MKP", "Analytical"},
  LegendPosition → {-0.5, -0.5}, PlotRange → {{0.835, 1.01}, {0, -3}}]

```



```
(*displacement*)  
ListLinePlot[{U22Norm, UY}, PlotLegend -> {"MKP", "Analytical"},  
  LegendPosition -> {0.1, 0.1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}]  
ListLinePlot[{U22Norm, UUY}, PlotLegend -> {"MKP", "Analytical"},  
  LegendPosition -> {0.1, 0.1}, PlotRange -> {{0.90, 1}, {0, 0.5}}]
```

