

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Fuzzy rozšíření Saatyho AHP



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Bc. Jana Krejčí
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 21. 3. 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za spolupráci i čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále bych zde chtěla poděkovat Mgr. Markétě Vitoslavské za spolupráci při zpracovávání podkladů pro hodnocení uchazečů ve výběrovém řízení. Na závěr bych chtěla poděkovat především mé rodině za podporu během doby celého mého studia a mému příteli za jeho trpělivost.

Obsah

Úvod	5
1 Saatyho analytický hierarchický proces	7
1.1 Úvod do analytického hierarchického procesu	7
1.2 Saatyho matice párových porovnávání	8
1.3 Kritéria a stanovení jejich vah	10
1.4 Dílčí hodnocení variant	11
1.5 Celkové hodnocení variant a výběr nejlepší varianty	12
2 Teorie fuzzy množin	14
2.1 Fuzzy množiny	14
2.2 Fuzzy čísla	15
2.3 Uspořádání fuzzy čísel	17
2.4 Princip rozšíření a operace s trojúhelníkovými fuzzy čísly	19
2.5 Fuzzy škála	21
2.6 Vážený průměr a fuzzy vážený průměr	22
3 Fuzzy analytický hierarchický proces	25
3.1 Stupnice fuzzy hodnot a fuzzy matice párových porovnávání	25
3.2 Ověření konzistence fuzzy matice párových porovnávání	29
3.2.1 Ověření konzistence pomocí defuzzifikace fuzzy matice párových porovnávání	30
3.2.2 Výpočet fuzzy indexu konzistence a fuzzy poměru konzistence	31
3.2.3 Výpočet maximálního vlastního fuzzy čísla fuzzy matice párových porovnávání	32
3.2.4 Rozšířená stupnice fuzzy hodnot	40
3.2.5 Oslabení podmínky konzistence	44
3.3 Určení preferencí prvků z fuzzy matice párových porovnávání	47
3.3.1 Základní přístupy k výpočtu fuzzy vah	48
3.3.2 Zachování reciprocity při výpočtu fuzzy vah	50
3.3.3 Fuzzy váhy a oslabená podmínka konzistence	71
3.4 Hodnocení variant vzhledem k celkovému cíli a výběr nejlepší varianty	79

4	Výběr nejvhodnějšího pracovníka za použití fuzzy analytického hierarchického procesu	90
4.1	Popis výběrového řízení a stanovení kritérií	90
4.2	Stanovení fuzzy vah kritérií	92
4.3	Uchazeči ve výběrovém řízení	94
4.4	Fuzzy hodnocení uchazečů podle jednotlivých kritérií	97
4.5	Celkové fuzzy hodnocení uchazečů a výběr zaměstnance	104
	Závěr	111
	Literatura	113

Úvod

Téma *Fuzzy rozšíření Saatyho AHP* jsem si pro svou diplomovou práci vybrala, aniž bych před tím pořádně věděla, co pojmy *fuzzy* a *Saatyho AHP* znamenají. S pojmem *fuzzy* jsem se poprvé setkala jen několik dní před výběrem tohoto tématu na přednáškách paní docentky Jany Talašové s názvem Fuzzy množiny 1. Už první přednáška mě velmi zaujala. S pojmem *Saatyho AHP* jsem se poprvé setkala dokonce až několik týdnů po výběru tématu mé diplomové práce, opět na přednáškách paní docentky Jany Talašové s názvem Matematická teorie rozhodování 1. Už tehdy jsem byla přesvědčená, že jsem si téma zvolila správně. Spojení teorie fuzzy množin a modelu Saatyho analytického hierarchického procesu totiž vypadalo velmi zajímavě.

Cílem této diplomové práce je popsat fuzzy rozšíření Saatyho analytického hierarchického procesu a metodu ilustrovat na reálném příkladě. Analytický hierarchický proces je jednou z metod vícekriteriálního rozhodování, která se používá k řešení složitějších rozhodovacích úloh s větším počtem variant a kritérií. Tuto metodu vytvořil v 70. letech 20. století profesor Thomas L. Saaty. Fuzzifikace této metody se začala používat zejména proto, že dokáže postihnout neurčitost, která je často s rozhodováním spojená a kterou klasický Saatyho analytický hierarchický proces postihnout nedokáže.

Celá práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je stručně popsán princip Saatyho analytického hierarchického procesu, ve druhé kapitole jsou uvedeny základní potřebné pojmy z teorie fuzzy množin. Stěžejní částí diplomové práce je třetí a čtvrtá kapitola. Ve třetí kapitole je popsána fuzzifikace Saatyho analytického hierarchického procesu. Tato část práce je nejobsáhlejší, doplněná menšími ilustračními příklady a také algoritmy, pomocí kterých jsou prováděny náročnější výpočty. Ve čtvrté kapitole je teorie fuzzy analytického hierarchického procesu aplikována na reálném příkladě, kterým je výběr zaměstnance na nově otevřenou pozici ekonoma v softwarové firmě Tesco SW a.s. sídlící v Olomouci, kde momentálně pracuji na částečný úvazek.

Práce je vysázena v typografickém systému L^AT_EX a všechny výpočty jsou

prováděny v matematickém softwaru MATLAB. Výsledky jsou zaokrouhlovány na čtyři desetinná místa.

Konce důkazů, příkladů a algoritmů jsou v této práci značeny \square , \triangle , respektive ∇ .

1 Saatyho analytický hierarchický proces

V této kapitole se seznámíme se Saatyho analytickým hierarchickým procesem (dále jen AHP). AHP zde nebudeme rozebírat podrobně, neboť toto není předmětem této diplomové práce. Popíšeme zde pouze stručně postup, kterým pomocí AHP vyřešíme rozhodovací problém. V dalších kapitolách pak budeme tento postup fuzzifikovat. Zájemci o podrobnější studium teorie AHP mohou nahlédnout například do knihy [16].

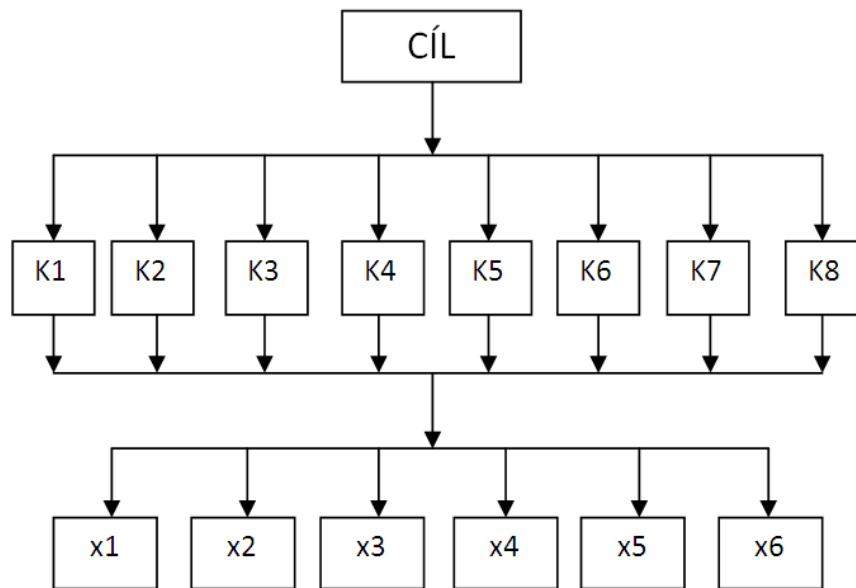
1.1 Úvod do analytického hierarchického procesu

AHP je jednou z metod vícekritériálního rozhodování, která se používá pro řešení složitějších vícekritériálních rozhodovacích problémů, kdy z konečné množiny variant, ozn. x_1, x_2, \dots, x_m , vybíráme tu nejlepší vzhledem ke zvolenému cíli. Přitom se rozhodujeme podle více kritérií, ozn. $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$.

AHP rozkládá složitý problém do tzv. hierarchického systému. Zde se budeme dále zabývat 3-úrovňovou hierarchií. V této hierarchii se na 1. úrovni nachází cíl rozhodování, který je popsán množinou kritérií v 2. úrovni. Varianty, ze kterých vybíráme nejlepší vzhledem k danému cíli, se nachází ve 3. úrovni hierarchie. Tato hierarchie je znázorněna na obrázku 1. Příklady složitějších hierarchií naleznete například v [16].

AHP nám dává kardinální hodnocení relativního typu, tj. dostáváme hodnocení variant v kardinální stupnici a jsme schopni říct kolikrát je jedna varianta lepší než druhá vzhledem k danému kritériu nebo vzhledem k celkovému cíli. Na základě tohoto hodnocení pak můžeme vybrat nejlepší variantu vzhledem k danému cíli.

Metoda je založena na sestavování Saatyho matic párových porovnávání prvků z nižší úrovně hierarchie vzhledem k prvku z nadřazené úrovně hierarchie. Z těchto matic pak počítáme významnosti jednotlivých prvků vzhledem k prvku z nadřazené úrovně hierarchie. Konstrukce Saatyho matic párových porovnávání je popsána v následující podkapitole.



Obrázek 1: 3-úrovňová hierarchie

1.2 Saatyho matice párových porovnávání

Saatyho matici párových porovnávání prvků p_1, \dots, p_k z jedné úrovně hierarchie vzhledem k prvku P z nadřazené úrovně hierarchie značíme $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^k$. Matici S sestavujeme tak, že mezi sebou porovnáváme každé dva prvky z množiny p_1, \dots, p_k vzhledem k prvku P . Pro hodnocení přitom používáme prvky ze základní nebo rozšířené škály, tj. 1, 3, 5, 7, 9, respektive 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Prvky těchto škál mají různé interpretace v závislosti na tom, zda porovnáváme kritéria vzhledem k celkovému cíli nebo varianty vzhledem ke kritériu. Interpretace prvků těchto škál budou uvedeny v podkapitolách 1.3 a 1.4.

Prvek s_{ij} matice S bude nabývat některé hodnoty ze základní nebo rozšířené škály, pokud je prvek p_i preferovaný před prvkem p_j , v opačném případě bude platit $s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}$. Je tedy zřejmé, že výsledná matice S je reciproká a samozřejmě také kladná.

Z matice párových porovnávání se poté určují hodnocení jednotlivých prvků p_1, \dots, p_k vzhledem k prvku P . Před tím je ale potřeba ověřit, zda je matice

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.4	1.45	1.49

Tab. 1: Náhodný index RI

párových porovnávání sestavena správně, tj. zda si rozhodovatel při určování preferencí mezi prvky příliš neodporoval ve svých tvrzeních. To se většinou ověřuje pomocí indexu konzistence CI (z anglického *consistency index*), který je definován předpisem

$$CI = \frac{\lambda - k}{k - 1}, \quad (1.1)$$

kde k je počet prvků p_1, \dots, p_k a λ je maximální vlastní číslo matice párových porovnávání S , které určíme jako maximum z řešení rovnice

$$|S - \lambda I| = 0,$$

kde I je jednotková matice. Index konzistence CI je zřejmě vždy nezáporný, přičemž čím menší hodnoty nabývá, tím větší je konzistence mezi jednotlivými párovými porovnáváními. Požadujeme tedy, aby index konzistence CI matice párových porovnávání S byl co nejbližší nule. Obecně ale nelze určit hodnotu CI , při které by ještě matice S byla považována za konzistentní a za kterou bychom už matici označili za nekonzistentní. Proto se používá spíše tzv. poměr konzistence CR (z anglického *consistency ratio*), který se počítá podle vzorce

$$CR = \frac{CI}{RI}, \quad (1.2)$$

kde RI je tzv. náhodný index (z anglického *random index*), který je určen vždy pro daný řád matice a počítá se jako průměrná hodnota indexu konzistence CI matic náhodně generovaných z prvků hodnotící škály. Hodnoty náhodného indexu se často v literaturách liší, většinou se ale pohybují okolo hodnot uvedených v tabulce 1, která je převzata z [17]. Za konzistentní se potom považuje matice, pro kterou platí $CR < 0,1$.

Pokud je tedy sestavená matice párových porovnávání S konzistentní, můžeme

číslo	deskriptor
1	kritéria stejně významná
3	první kritérium slabě významnější než druhé
5	první kritérium dosti významnější než druhé
7	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
9	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 2: Základní škála

přejít k výpočtu hodnocení jednotlivých prvků. Pokud matice S konzistentní není, je potřeba ji sestavit znovu.

V následující kapitole uvedeme výpočet vah kritérií vzhledem k celkovému cíli.

1.3 Kritéria a stanovení jejich vah

Při sestavování množiny kritérií je důležité, aby kritéria mezi sebou nebyla závislá a aby plně popisovala daný cíl rozhodování. Přitom kritérií nesmí být zbytečně mnoho, neboť by proces byl příliš složitý. Významnosti kritérií vzhledem k celkovému cíli jsou určeny normovanými váhami $v_j, j = 1, \dots, n$, tj. platí $\sum_{j=1}^n v_j = 1$. Váha v_j vyjadřuje, v jaké míře je celkový cíl popsán kritériem \mathcal{K}_j .

Pro určení vah kritérií je nejprve potřeba sestavit Saatyho matici párových porovnávání kritérií $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n$. To provedeme podle postupu uvedeného v předchozí podkapitole. Pro ohodnocení přitom používáme prvky ze základní škály nebo z rozšířené škály uvedených v tabulce 2, respektive 3, kde mezihodnoty 2, 4, 6 a 8 slouží k jemnějšímu rozlišení preferencí mezi kritérii.

Pomocí vzorce (1.2) pro výpočet poměru konzistence CR ověříme, zda je Saatyho matice párových porovnávání kritérií sestavena správně. Pokud tomu tak není, musíme se k matici vrátit a sestavit ji znovu.

Pokud je matice párových porovnávání S konzistentní, můžeme určit relativní významnosti jednotlivých kritérií a především pak váhy jednotlivých kritérií vzhledem k celkovému cíli. Ty lze získat pomocí různých postupů. Například je můžeme určit pomocí vlastního vektoru odpovídajícího maximálnímu vlastnímu číslu matice S , kde složky tohoto vektoru vyjadřují relativní významnosti jednot-

číslo	deskriptor
1	kritéria stejně významná
2	
3	první kritérium slabě významnější než druhé
4	
5	první kritérium dosti významnější než druhé
6	
7	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
8	
9	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 3: Rozšířená škála

livých kritérií. Po znormování tohoto vektoru získáme váhy jednotlivých kritérií. V této práci budeme relativní významnosti a váhy počítat pomocí geometrických průměrů významností jednotlivých kritérií vzhledem k ostatním. Relativní významnost i -tého kritéria tedy vypočítáme jako geometrický průměr prvků i -tého řádku matice S . Váhu i -tého kritéria pak získáme znormováním tohoto geometrického průměru. Pro každé kritérium \mathcal{K}_i tedy počítáme relativní významnost w_i a váhu v_i podle vzorců

$$w_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}}, \quad v_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^m w_j}. \quad (1.3)$$

Obdobně budeme počítat dílčí hodnocení variant.

1.4 Dílčí hodnocení variant

Pro výpočet dílčích hodnocení variant nejprve potřebujeme stejně jako pro kritéria sestavit matice párových porovnávání variant x_1, \dots, x_m vzhledem k jednotlivým kritériím $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$. Celkem tedy budeme mít n matic párových porovnávání S^k ve tvaru $S^k = \{s_{ij}^k\}_{i,j=1}^m$, $k = 1, 2, \dots, n$. Prvky s_{ij}^k opět budeme volit ze základní nebo z rozšířené škály uvedených v tabulkách 4 a 5, pokud je varianta x_i preferovaná před variantou x_j podle kritéria \mathcal{K}_k . V opačném případě budeme volit převrácené hodnoty příslušných prvků ze základní nebo rozšířené škály. I u těchto matic musíme ověřit konzistenci pomocí poměru konzistence

číslo	deskriptor
1	varianty stejně hodnocené
3	první varianta slabě preferovanější než druhá
5	první varianta dosti preferovanější než druhá
7	první varianta prokazatelně preferovanější než druhá
9	první varianta absolutně preferovanější než druhá

Tab. 4: Základní škála

číslo	deskriptor
1	varianty stejně hodnocené
2	
3	první varianta slabě preferovanější než druhá
4	
5	první varianta dosti preferovanější než druhá
6	
7	první varianta prokazatelně preferovanější než druhá
8	
9	první varianta absolutně preferovanější než druhá

Tab. 5: Rozšířená škála

CR a v případě, že pro některou z matic párových porovnávání není splněna nerovnost $CR < 0,1$, je potřeba se k dané matici vrátit a opravit ji.

Hodnocení variant podle jednotlivých kritérií pak budeme počítat stejně jako v případě výpočtu normovaných fuzzy vah kritérií, tj. hodnocení i -té varianty podle k -tého kritéria počítáme podle vzorce

$$h_i^k = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^m m_j}, \text{ kde } m_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}^k}. \quad (1.4)$$

Takto vypočtená hodnocení variant jsou tedy normovaná, tj. platí $\sum_{i=1}^m h_i^k = 1$, pro každé $k = 1, \dots, n$.

1.5 Celkové hodnocení variant a výběr nejlepší varianty

V dalším kroku již můžeme přejít k celkovému hodnocení jednotlivých variant vzhledem k cíli rozhodování. To počítáme jako vážený průměr dílčích hodnocení

variant vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami jsou váhy kritérií vzhledem k cíli rozhodování. Výsledné hodnocení h_i i -té varianty vzhledem k cíli rozhodování se tedy počítá podle vzorce

$$h_i = \sum_{j=1}^n v_j h_i^j, \quad (1.5)$$

kde v_j je váha kritéria \mathcal{K}_j a h_i^j je dílčí hodnocení varianty x_i podle kritéria \mathcal{K}_j . Nejlepší varianta je pak ta s nejvyšším celkovým hodnocením h_i .

2 Teorie fuzzy množin

Rozvoj teorie fuzzy množin byl zahájen profesorem californské univerzity Lotfi A. Zadehem, který v roce 1965 publikoval článek s názvem Fuzzy sets. Slovo "fuzzy" pocházející z angličtiny v přehladu znamená "neurčitý, neostrý, mlhavý". Fuzzy množiny (neostré, mlhavé množiny) jsou nástrojem pro matematický popis nepřesných vágních pojmů. Fuzzy množina je zobecněním klasické množiny v tom smyslu, že u klasické množiny jsme schopni přesně určit, zda daný prvek do této množiny patří nebo nepatří, zatímco do fuzzy množiny může prvek patřit jen částečně, v určité míře.

V následující podkapitole si zavedeme definici fuzzy množiny a některé další pojmy s fuzzy množinami spojené.

2.1 Fuzzy množiny

Definice 2.1. Nechť je dána množina U , kterou nazýváme univerzum. *Fuzzy množinou* A na univerzu U (značíme $A \in \mathcal{F}(U)$) rozumíme množinu A , která je definovaná zobrazením

$$\mu_A : U \rightarrow \langle 0, 1 \rangle.$$

Funkci μ_A nazýváme *funkce příslušnosti fuzzy množiny* A . Hodnotu $\mu_A(x)$, $x \in U$, nazýváme *stupeň příslušnosti prvku* x *k fuzzy množině* A .

Poznámka 2.1. Pro zjednodušení budeme v celé práci značit funkci příslušnosti fuzzy množiny A symbolem $A(\cdot)$.

Definice 2.2. Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$. Pak

- a) ostrou množinu $Supp A = \{x \in U; A(x) > 0\}$ nazýváme *nosič fuzzy množiny* A ,
- b) ostrou množinu $Ker A = \{x \in U; A(x) = 1\}$ nazýváme *jádro fuzzy množiny* A ,
- c) ostrou množinu $A_\alpha = \{x \in U; A(x) \geq \alpha\}$ nazýváme α -*řez fuzzy množiny* A .

Speciálním případem fuzzy množin na množině reálných čísel jsou fuzzy čísla, která intuitivně reprezentují nepřesné hodnoty. S fuzzy čísly se seznámíme v následující podkapitole.

2.2 Fuzzy čísla

Definice 2.3. Fuzzy množinu C na množině reálných čísel \mathbb{R} nazýváme fuzzy číslo, jestliže splňuje následující podmínky:

- a) $\exists x_0 \in \mathbb{R} : C(x_0) = 1$, tj. $\text{Ker } C$ je neprázdná množina,
- b) $C_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1)$, jsou uzavřené intervaly,
- c) nosič $\text{Supp } C$ je omezený.

Definice 2.4. Fuzzy číslo C nazýváme *fuzzy číslo na intervalu* $\langle a, b \rangle$, jestliže platí $\text{Cl}(\text{Supp } C) \subseteq \langle a, b \rangle$, kde $\text{Cl}(\text{Supp } C)$ značí uzávěr nosiče fuzzy čísla C .

Poznámka 2.2. a) Množinu všech fuzzy čísel na množině reálných čísel \mathbb{R} budeme značit $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.

b) Množinu všech fuzzy čísel na intervalu $\langle a, b \rangle$ budeme značit $\mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$.

Věta 2.1. Nechť $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Fuzzy množina C je fuzzy číslo právě tehdy, když existují čísla $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, taková, že pro funkci příslušnosti $C(\cdot)$ platí

$$C(x) = \begin{cases} L(x) & \text{pro } x \in (-\infty, x_2) \\ 1 & \text{pro } x \in \langle x_2, x_3 \rangle \\ P(x) & \text{pro } x \in (x_3, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

kde funkce $L : (-\infty, x_2) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je neklesající, zprava spojitá a $L(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, x_1)$, funkce $P : (x_3, \infty) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je nerostoucí, zleva spojitá a $P(x) = 0$ pro $x \in (x_4, \infty)$.

Důkaz: Viz [9].

Poznámka 2.3. Čísla x_1, x_2, x_3, x_4 z věty 2.1 nazýváme význačné hodnoty fuzzy čísla C a platí pro ně následující vztahy

$$a) \langle x_1, x_4 \rangle = Cl(Supp C),$$

$$b) \langle x_2, x_3 \rangle = Ker C.$$

Dále si ukážeme, že lze fuzzy číslo $C \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ zapsat pomocí dvojice funkcí $\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha), \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, které popisují krajní hodnoty jednotlivých α -řezů.

Věta 2.2. Nechť je dáno fuzzy číslo C a nechť funkce $\underline{c} : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \bar{c} : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou definované takto

$$\begin{aligned} \langle \underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \rangle &= C_\alpha \text{ pro } \alpha \in (0, 1) \\ \langle \underline{c}(0), \bar{c}(0) \rangle &= Cl(Supp C). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pak jsou funkce \underline{c} a \bar{c} zleva spojité na intervalu $(0, 1)$ a zprava spojité v bodě 0 a pro všechna $\alpha, \beta : 0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ je splněna nerovnost

$$\underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \bar{c}(\beta) \leq \bar{c}(\alpha). \tag{2.3}$$

Důkaz: Viz [15].

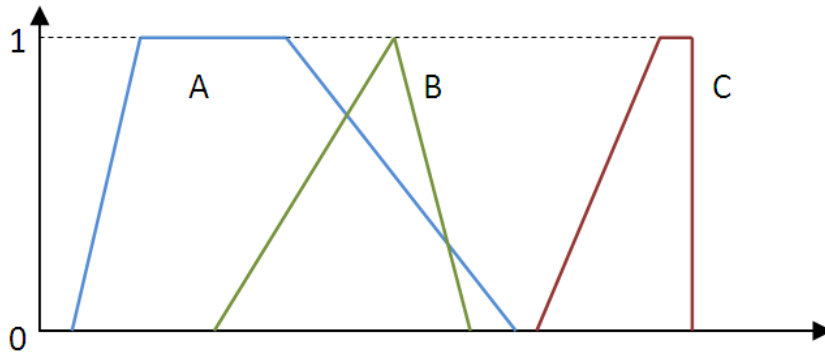
Věta 2.3. Nechť funkce $\underline{c} : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \bar{c} : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zleva spojité na $(0, 1)$ a zprava spojité v bodě 0. Nechť dále pro všechna $\alpha, \beta : 0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ je splněna nerovnost (2.3). Pak existuje $C \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ takové, že $\langle \underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \rangle$ jsou jeho α -řezy, $\alpha \in (0, 1)$, a $\langle \underline{c}(0), \bar{c}(0) \rangle$ je uzávěr jeho nosiče.

Důkaz: Viz [15].

Poznámka 2.4. Fuzzy číslo $C \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ určené dvojicí funkcí \underline{c}, \bar{c} splňujících podmínky věty 2.3 budeme dále zapisovat ve tvaru $C = \{ \langle \underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \}$.

Reálné číslo a uzavřený interval také splňují definici fuzzy čísla. Tyto speciální případy fuzzy čísel se používají ve fuzzy modelech, kde nám umožňují pracovat s přesnými a nebo naopak s chybějícími informacemi.

Nejjednodušším typem fuzzy čísel jsou lineární fuzzy čísla, která jsou jednoznačně určena čtveřicí svých význačných hodnot.



Obrázek 2: Lichoběžníková a trojúhelníková fuzzy čísla

Definice 2.5. *Lineárním fuzzy číslem určeným čtveřicí význačných hodnot $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ nazýváme fuzzy číslo $C = \{\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)\}, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že pro funkce \underline{c}, \bar{c} platí*

$$\underline{c}(\alpha) = x_1 + \alpha(x_2 - x_1), \quad \bar{c}(\alpha) = x_4 - \alpha(x_4 - x_3). \quad (2.4)$$

Lineární fuzzy čísla lze rozdělit na lichoběžníková fuzzy čísla a trojúhelníková fuzzy čísla. Trojúhelníkové fuzzy číslo lze chápat jako speciální případ lichoběžníkového fuzzy čísla, kdy $x_2 = x_3$. Příklad lichoběžníkového a trojúhelníkového fuzzy čísla je uveden na obrázku 2 - fuzzy čísla A a C jsou lichoběžníková fuzzy čísla, B je trojúhelníkové fuzzy číslo.

Zobecněním lineárních fuzzy čísel jsou po částech lineární fuzzy čísla. Těmi se ale v této práci dále zabývat nebudeme. Zájemci mohou definici po částech lineárního fuzzy čísla najít například v [18].

2.3 Uspořádání fuzzy čísel

V této podkapitole si uvedeme některé stěžejní metody uspořádání fuzzy čísel, které pak následně využijeme v kapitole 3, kdy budeme chtít mezi sebou porovnat jednotlivé varianty rozhodování, které budou charakterizovány hodnocením ve formě fuzzy čísel. Nejpresnější je porovnání fuzzy čísel podle jejich α -řezů.

Definice 2.6. Necht' jsou dány intervaly $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že

- a) $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$, jestliže platí $a \leq c$ a $b \leq d$,
- b) $\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle$, jestliže platí $a < c$ a $b < d$,
- c) $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, jestliže platí $a = c$ a $b = d$.

Definice 2.7. Necht' $C, D \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$. Pak řekneme, že

- a) fuzzy číslo C je podle α -řezů menší nebo rovno fuzzy číslu D ($C \leq D$), jestliže platí $C_\alpha \leq D_\alpha, \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$,
- b) fuzzy číslo C je podle α -řezů menší než fuzzy číslo D ($C < D$), jestliže platí $C_\alpha < D_\alpha, \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$,
- c) fuzzy číslo C je podle α -řezů rovno fuzzy číslu D ($C = D$), jestliže platí $C_\alpha = D_\alpha, \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Uspořádání fuzzy čísel na základě porovnání jejich α -řezů je jen částečné, některá fuzzy čísla takto nelze vůbec porovnat. Proto se velmi často používá porovnávání fuzzy čísel podle jejich těžišť.

Definice 2.8. Necht' $C \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$ a necht' C není reprezentací reálného čísla. Pak *těžiště fuzzy čísla* C je definováno takto

$$t_C = \frac{\int_a^b xC(x) dx}{\int_a^b C(x) dx}. \quad (2.5)$$

Pokud je fuzzy číslo C reálné číslo, je $t_C = C$.

Věta 2.4. Necht' C je lichoběžníkové fuzzy číslo reprezentované čtveřicí svých význačných hodnot (c_1, c_2, c_3, c_4) . Pak pro těžiště t_C fuzzy čísla C platí

$$t_C = \frac{1}{3} \frac{c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_4c_3 - c_2c_1}{c_4 + c_3 - c_2 - c_1}. \quad (2.6)$$

Důkaz: Viz [12].

Věta 2.5. *Nechť R je trojúhelníkové fuzzy číslo reprezentované trojicí svých významných hodnot (r_1, r_2, r_3) . Pak pro těžiště t_R tohoto fuzzy čísla R platí*

$$t_R = \frac{1}{3} \frac{r_3^2 - r_1^2 + r_2 r_3 - r_1 r_2}{r_3 - r_1}. \quad (2.7)$$

Důkaz: Tvrzení plyne ze vzorce (2.6). Trojúhelníkové fuzzy číslo je speciálním typem lichoběžníkového fuzzy čísla, kde $c_2 = c_3$. Trojúhelníkové fuzzy číslo R můžeme tedy zapsat takto: $R = (r_1, r_2, r_2, r_3)$. Ze vzorce (2.6) pak dostáváme

$$t_R = \frac{1}{3} \frac{r_3^2 + r_2^2 - r_2^2 - r_1^2 + r_3 r_2 - r_2 r_1}{r_3 + r_2 - r_2 - c_1} = \frac{1}{3} \frac{r_3^2 - r_1^2 + r_3 r_2 - r_2 r_1}{r_3 - c_1},$$

čímž je důkaz hotov. □

Definice 2.9. Nechť $C, D \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$. Pak řekneme, že

- a) fuzzy číslo C je větší nebo rovno fuzzy číslu D podle težiště t ($C \geq_t D$), jestliže platí $t_C \geq t_D$,
- b) fuzzy číslo C je větší než fuzzy číslo D podle težiště t ($C >_t D$), jestliže platí $t_C > t_D$,
- c) fuzzy číslo C je rovno fuzzy číslu D podle težiště t ($C =_t D$), jestliže platí $t_C = t_D$.

2.4 Princip rozšíření a operace s trojúhelníkovými fuzzy čísly

Abychom mohli provádět operace s fuzzy čísly, je potřeba nejprve rozšířit zobrazení definované pro prvky různých univerz na zobrazení definované pro fuzzy množiny na těchto univerzech.

Definice 2.10. Nechť $f : U \rightarrow V, A \in \mathcal{F}(U)$. Pak zobrazení $f_F : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, pro které platí $B := f_F(A) \in \mathcal{F}(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé

$y \in V$ vztahem

$$B(y) = \begin{cases} \sup \{A(x) \mid f(x) = y, x \in U\}, & \text{pokud } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{pokud } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases} \quad (2.8)$$

se nazývá *fuzzy rozšíření zobrazení* $f : U \rightarrow V$.

Pro zobecnění n -árních operací na U na n -ární operace na $\mathcal{F}(U)$ je potřeba zavést obecnější definici principu rozšíření.

Definice 2.11. *Fuzziifikací zobrazení* $f : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \rightarrow V$ rozumíme zobrazení

$$f_F : \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) \times \dots \times \mathcal{F}(U_k) \rightarrow \mathcal{F}(V),$$

které každé n -tici fuzzy množin $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, přiřadí fuzzy množinu $B = f_F(A_1, A_2, \dots, A_k) \in \mathcal{F}(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in V$ vztahem

$$B(y) = \begin{cases} \sup \{ \min \{A_1(x_1), \dots, A_k(x_k)\} \mid f(x_1, \dots, x_k) = y, \\ \quad x_i \in U_i, i = 1, \dots, k \}, & \text{pokud } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{pokud } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.9)$$

Nyní si uvedeme základní operace s fuzzy čísly jako jsou součet, součin a podíl, které z principu rozšíření vycházejí. Tyto operace následně využijeme v dalších kapitolách, například při výpočtu fuzzy vah jednotlivých kritérií nebo při výpočtu celkového fuzzy hodnocení variant vzhledem ke zvolenému kritériu.

Součet trojúhelníkových fuzzy čísel je velice jednoduchý - je to opět trojúhelníkové fuzzy číslo. Se součinem či podílem trojúhelníkových fuzzy čísel je to již složitější. Výsledek těchto operací už není trojúhelníkové fuzzy číslo. Pro jednoduchost se ale výsledná fuzzy čísla trojúhelníkovým fuzzy číslem často aproximují. V tom případě se nám výpočet velmi zjednoduší a může jej provádět, podobně jako u součtu trojúhelníkových fuzzy čísel, jen pro význačné hodnoty fuzzy čísel. Definice pak vypadají následovně:

Definice 2.12. Necht' jsou dána dvě trojúhelníková fuzzy čísla $C = (c_1, c_2, c_3)$ a $D = (d_1, d_2, d_3)$. Pak *součet* $C + D$ fuzzy čísel C, D je opět trojúhelníkové fuzzy číslo a je definován takto

$$C + D = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, c_3 + d_3).$$

Definice 2.13. Necht' jsou dána dvě trojúhelníková fuzzy čísla $C = (c_1, c_2, c_3)$ a $D = (d_1, d_2, d_3)$. Pak *součin* $C \cdot D$ fuzzy čísel C, D je definován takto

$$C \cdot D = (c_1 \cdot d_1, c_2 \cdot d_2, c_3 \cdot d_3).$$

Definice 2.14. Necht' jsou dána dvě trojúhelníková fuzzy čísla $C = (c_1, c_2, c_3)$ a $D = (d_1, d_2, d_3)$. Pak *podíl* C/D fuzzy čísel C, D je definován takto

$$C/D = (c_1/d_3, c_2/d_2, c_3/d_1).$$

2.5 Fuzzy škála

V této podkapitole definujeme pojem *fuzzy škála*, který následně využijeme v kapitole 3, kde budeme chtít fuzzifikovat základní i rozšířenou škálu, používané pro ohodnocení párových porovnávání v teorii AHP.

Definice 2.15. Necht' $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$. Řekneme, že *fuzzy čísla* A_1, A_2, \dots, A_n tvoří *rozklad na intervalu* $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$\sum_{i=1}^n A_i(x) = 1, \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Věta 2.6. Necht' fuzzy čísla A_1, A_2, \dots, A_n tvoří rozklad na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. $\sum_{i=1}^n A_i(x) = 1, \forall x \in \langle a, b \rangle$. Pak platí

- a) fuzzy čísla lze lineárně uspořádat ve smyslu definice (2.7),
- b) $\forall x \in \langle a, b \rangle$ buď plně náleží jednomu z fuzzy čísel nebo dvěma sousedním fuzzy číslům,
- c) funkce příslušnosti všech fuzzy čísel jsou spojité.

Důkaz: Viz [18].

Definice 2.16. Necht fuzzy čísla A_1, A_2, \dots, A_n tvoří rozklad na $\langle a, b \rangle$ a necht jsou očíslována ve shodě s jejich lineárním uspořádáním, tj. $A_1 < A_2 < \dots < A_n$. Pak říkáme, že *fuzzy čísla A_1, A_2, \dots, A_n tvoří fuzzy škálu na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

2.6 Vážený průměr a fuzzy vážený průměr

V podkapitole 1.5 jsme pro výpočet celkového hodnocení variant použili vážený průměr. Abychom v následující kapitole zabývající se fuzzifikací analytického hierarchického procesu mohli výpočet celkového hodnocení variant fuzzifikovat, je potřeba zadefinovat vážený průměr fuzzy čísel.

Definice 2.17. *Normovanými váhami nazýváme n -tici $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ takovou, že $v_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n v_j = 1$.*

Definice 2.18. Necht $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$ a necht $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ jsou normované váhy. Pak *váženým průměrem fuzzy čísel C_1, C_2, \dots, C_n s normovanými váhami v_1, v_2, \dots, v_n rozumíme fuzzy číslo $C = \sum_{i=1}^n C_i v_i$.*

Věta 2.7. *Necht C_1, C_2, \dots, C_n jsou lineární fuzzy čísla na intervalu $\langle a, b \rangle$ určená pomocí význačných hodnot, tj. $C_j = (c_j^1, c_j^2, c_j^3, c_j^4), j = 1, \dots, n$, a necht $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ jsou normované váhy. Pak váženým průměrem lineárních fuzzy čísel C_1, C_2, \dots, C_n s normovanými váhami v_1, v_2, \dots, v_n je opět lineární fuzzy číslo na $\langle a, b \rangle$, pro které platí*

$$C = \sum_{j=1}^n C_j v_j = \left(\sum_{j=1}^n c_j^1 v_j, \sum_{j=1}^n c_j^2 v_j, \sum_{j=1}^n c_j^3 v_j, \sum_{j=1}^n c_j^4 v_j \right)$$

Důkaz: Viz [18].

Definice 2.19. Necht jsou dána fuzzy čísla $V_j \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1 \rangle), j = 1, \dots, n$, a necht pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a pro každé $\alpha \in (0, 1)$ platí

$$\forall v_i \in V_{i\alpha} \exists v_j \in V_{j\alpha}, j = 1, \dots, n, j \neq i : v_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n v_j = 1. \quad (2.10)$$

Pak V_1, \dots, V_n nazýváme *normované fuzzy váhy*.

Věta 2.8. *Nechť jsou dána fuzzy čísla $V_j \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1 \rangle)$, $V_j = (v_j^1, v_j^2, v_j^3, v_j^4)$, $j = 1, \dots, n$. Tato fuzzy čísla tvoří normované fuzzy váhy právě tehdy, když pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$v_j^3 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^2 \leq 1, \quad v_j^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^3 \geq 1, \quad (2.11)$$

$$v_j^4 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^1 \leq 1, \quad v_j^1 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^4 \geq 1. \quad (2.12)$$

Důkaz: Viz [14]

Věta 2.9. *Nechť jsou dána trojúhelníková fuzzy čísla $V_j \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1 \rangle)$, $V_j = (v_j^1, v_j^2, v_j^3)$, $j = 1, \dots, n$. Tato fuzzy čísla tvoří normované fuzzy váhy právě tehdy, když pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1, \quad v_j^3 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^1 \leq 1, \quad v_j^1 + \sum_{i=1, i \neq j}^n v_i^3 \geq 1. \quad (2.13)$$

Důkaz: Tvrzení plyne přímo ze vzorců (2.11) a (2.12). Trojúhelníkové fuzzy číslo je speciálním případem lineárního fuzzy čísla, kdy druhá a třetí význačná hodnota jsou si rovny. Stačí tedy do vzorců (2.11) a (2.12) dosadit za význačnou hodnotu v_3 hodnotu v_2 a dále přeznačit význačnou hodnotu v_4 na v_3 . Touto úpravou přímo dostáváme vzorce (2.13). □

Definice 2.20. *Nechť $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$ a nechť V_1, \dots, V_n jsou normované fuzzy váhy. Pak *fuzzy váženým průměrem fuzzy čísel C_1, \dots, C_n s normovanými fuzzy váhami V_1, \dots, V_n rozumíme fuzzy číslo C s funkcí příslušnosti**

$$\forall c \in \langle a, b \rangle \quad C(c) = \max \{ \min \{ C_1(c_1), \dots, C_n(c_n), V_1(v_1), \dots, V_n(v_n) \}, \\ c = \sum_{j=1}^n c_j v_j, \sum_{j=1}^n v_j = 1, c_j \in \langle a, b \rangle, v_j \in \langle 0, 1 \rangle \}. \quad (2.14)$$

Fuzzy vážený průměr se značí

$$C = (F) \sum_{j=1}^n V_j C_j.$$

Poznámka 2.5. Fuzzy vážený průměr lineárních fuzzy čísel s lineárními normovanými fuzzy váhami není obecně lineární fuzzy číslo.

Poznámka 2.6 (Postup praktického výpočtu fuzzy váženého průměru). Mějme dána fuzzy čísla $C_i = \{\underline{c}_i(\alpha), \bar{c}_i(\alpha)\}$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, $C_i \in \mathcal{F}_N(\langle a, b \rangle)$, $i = 1, \dots, n$, a normované fuzzy váhy $V_i = \{\underline{v}_i(\alpha), \bar{v}_i(\alpha)\}$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Pak fuzzy vážený průměr $C = (F) \sum_{j=1}^n V_j C_j$, kde $C = \{\underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha)\}$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, můžeme podle [15] určit pomocí následujícího algoritmu:

Pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ uvažujme na množině $\{1, 2, \dots, n\}$ permutaci $\{(i)\}_{i=1}^n$ takovou, že platí $\underline{c}_{(1)}(\alpha) \leq \underline{c}_{(2)}(\alpha) \leq \dots \leq \underline{c}_{(n)}(\alpha)$. Pak pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme

$$v_{(k)}(\alpha) := 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{v}_{(i)}(\alpha) - \sum_{i=k+1}^n \underline{v}_{(i)}(\alpha). \quad (2.15)$$

Nechť $k^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ je takové, že platí $\underline{v}_{(k^*)}(\alpha) \leq v_{(k^*)}(\alpha) \leq \bar{v}_{(k^*)}(\alpha)$. Pak

$$\underline{c}(\alpha) = \sum_{i=1}^{k^*-1} \bar{v}_{(i)} \underline{c}_{(i)} + v_{(k^*)} \underline{c}_{(k^*)} + \sum_{i=k^*+1}^n \underline{v}_{(i)} \underline{c}_{(i)}. \quad (2.16)$$

Podobně nechť pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ je $\{(i)\}_{i=1}^n$ permutace taková, že platí $\bar{c}_{(1)}(\alpha) \geq \bar{c}_{(2)}(\alpha) \geq \dots \geq \bar{c}_{(n)}(\alpha)$. Pak pro $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme

$$v_{(l)}(\alpha) := 1 - \sum_{i=1}^{l-1} \bar{v}_{(i)}(\alpha) - \sum_{i=l+1}^n \underline{v}_{(i)}(\alpha). \quad (2.17)$$

Nechť $l^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ je takové, že platí $\underline{v}_{(l^*)}(\alpha) \leq v_{(l^*)}(\alpha) \leq \bar{v}_{(l^*)}(\alpha)$. Pak

$$\bar{c}(\alpha) = \sum_{i=1}^{l^*-1} \bar{v}_{(i)} \bar{c}_{(i)} + v_{(l^*)} \bar{c}_{(l^*)} + \sum_{i=l^*+1}^n \underline{v}_{(i)} \bar{c}_{(i)}. \quad (2.18)$$

3 Fuzzy analytický hierarchický proces

Fuzzy analytický hierarchický proces se stejně jako klasický Saatyho analytický hierarchický proces používá k řešení nejrůznějších rozhodovacích problémů jako je například nalezení nejvhodnějšího místa pro stavbu nemocnice [1], výběr nejlepšího pracovníka [4], zvolení nejvhodnější metody na čištění odpadních vod [5], identifikace klíčových faktorů ovlivňujících úspěšnost internetového obchodu [10], nebo výběr nejvhodnější metody na stavbu mostu [13].

V této kapitole se nyní pokusíme Saatyho analytický hierarchický proces fuzzičkovat. Fuzzičkování se používá zejména proto, že stupeň preference mezi dvěma kritérii nebo mezi dvěma variantami vzhledem ke zvolenému kritériu nelze zpravidla určit zcela přesně. Nahrazení ostré preference fuzzy preferencí tento problém vyřeší, protože fuzzy číslo dokáže tuto neurčitost postihnout.

V následující podkapitole zavedeme vhodnou stupnici fuzzy hodnot pro porovnávání prvků a ukážeme si, jak sestavit fuzzy matici párových porovnávání.

3.1 Stupnice fuzzy hodnot a fuzzy matice párových porovnávání

Místo klasické základní škály tvořené hodnotami 1, 3, 5, 7, 9 či rozšířené škály tvořené hodnotami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jak je tomu v případě klasického AHP, zde budeme pracovat se stupnicemi tvořenými fuzzy hodnotami $\tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{5}, \tilde{7}, \tilde{9}$, respektive $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}, \tilde{6}, \tilde{7}, \tilde{8}, \tilde{9}$. Pro fuzzičkování analytického hierarchického procesu se používají trojúhelníková fuzzy čísla, protože se s nimi snadno pracuje. Pro jednoduchost budeme všechna tato trojúhelníková fuzzy čísla zapisovat pomocí trojice význačných hodnot, tj. $\tilde{C} = (c_1, c_2, c_3)$.

Z prvků základní či rozšířené stupnice fuzzy hodnot pak sestavujeme fuzzy matice párových porovnávání kritérií nebo párových porovnávání variant vzhledem k jednotlivým kritériím.

Definice 3.1. *Fuzzy maticí* $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ rozumíme matici, jejíž prvky \tilde{s}_{ij} jsou fuzzy čísla.

fuzzy číslo	význačné hodnoty	deskriptor
$\tilde{1}$	(1, 1, 3)	kritéria stejně významná
$\tilde{3}$	(1, 3, 5)	první kritérium slabě významnější než druhé
$\tilde{5}$	(3, 5, 7)	první kritérium dosti významnější než druhé
$\tilde{7}$	(5, 7, 9)	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
$\tilde{9}$	(7, 9, 9)	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 6: Základní stupnice fuzzy hodnot

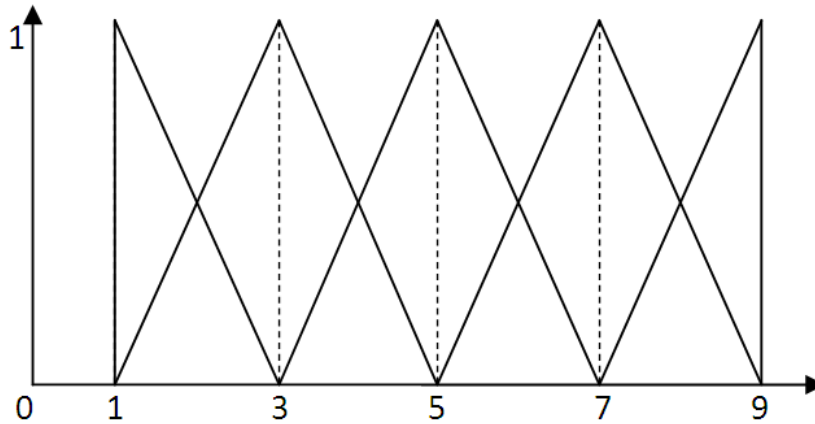
Definice 3.2. Necht jsou dány prvky x_1, x_2, \dots, x_n . *Fuzzy maticí párových porovnávání* prvků x_1, x_2, \dots, x_n rozumíme čtvercovou fuzzy matici $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$, jejíž prvky \tilde{s}_{ij} vyjadřují poměr významnosti prvku x_i k významnosti prvku x_j . Přitom \tilde{s}_{ij} jsou prvky základní nebo rozšířené stupnice fuzzy hodnot, pokud je prvek x_i významnější než prvek x_j , v opačném případě platí

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{1}{\tilde{s}_{ji}}.$$

Nyní se budeme zabývat vhodným nadefinováním trojúhelníkových fuzzy čísel $\tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{5}, \tilde{7}, \tilde{9}$ základní stupnice fuzzy hodnot. Většina autorů ve svých člancích (např. [2], [4] a [7]) definuje stupnici fuzzy hodnot způsobem, který je uveden v tabulce 6. Takto definovaná fuzzy čísla tvoří fuzzy škálu na intervalu $\langle 1, 9 \rangle$, viz obrázek 3. Ukážeme si ale, že tato stupnice fuzzy hodnot není pro sestavování fuzzy matic párových porovnávání vhodná.

Poznámka 3.1. *Stupnice fuzzy hodnot v tabulce 6 je uvedena speciálně pro porovnávání kritérií. V následujícím textu budou i všechny ostatní stupnice fuzzy hodnot uvedeny speciálně jen pro kritéria. Stupnice fuzzy hodnot pro porovnávání variant by vypadaly úplně analogicky, proto je zde uvádět nebudeme.*

Uvažujme nyní množinu kritérií $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$ a zvolme z této množiny dvě kritéria \mathcal{K}_i a $\mathcal{K}_j, i < j$. Jejich párovým porovnáním dostaneme fuzzy číslo \tilde{s}_{ij} na pozici (i, j) fuzzy matice párových porovnávání $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ a fuzzy číslo $\tilde{s}_{ji} = \frac{1}{\tilde{s}_{ij}}$ na pozici (j, i) této fuzzy matice. Necht kritérium \mathcal{K}_i je stejně významné



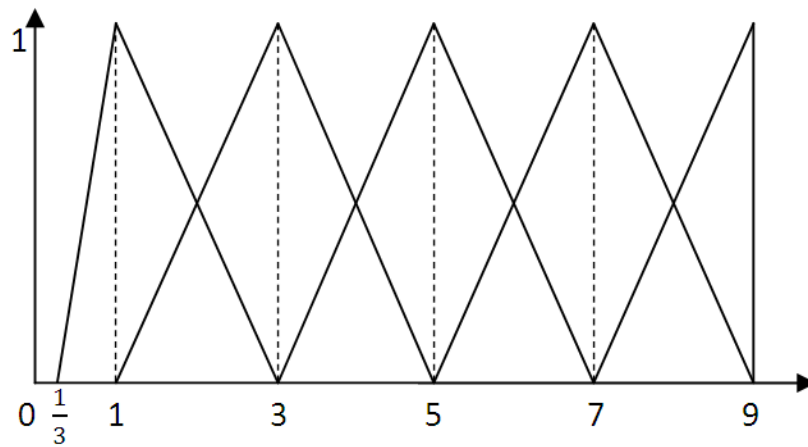
Obrázek 3: Základní stupnice fuzzy hodnot

jako kritérium \mathcal{K}_j . Pak podle stupnice fuzzy hodnot uvedené v tabulce 6 bude na pozici (i, j) fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} fuzzy číslo $\tilde{1} = (1, 1, 3)$ a na pozici (j, i) bude fuzzy číslo $\frac{1}{\tilde{1}} = (\frac{1}{3}, 1, 1)$. Protože předpokládáme, že kritérium \mathcal{K}_i je stejně významné jako kritérium \mathcal{K}_j , pak logicky také kritérium \mathcal{K}_j musí být stejně významné jako kritérium \mathcal{K}_i . To znamená, že by mělo platit $\tilde{s}_{ij} = \tilde{s}_{ji}$. V našem případě tato rovnost ale neplatí, neboť $(1, 1, 3) \neq (\frac{1}{3}, 1, 1)$. Stupnice fuzzy hodnot uvedená v tabulce 6 tedy není vhodně definovaná. Je potřeba definovat trojúhelníkové fuzzy číslo $\tilde{1}$ tak, aby platila rovnost $\tilde{1} = \frac{1}{\tilde{1}}$. Pokud tedy zapíšeme fuzzy číslo $\tilde{1}$ pomocí trojice jeho význačných hodnot (c_1, c_2, c_3) , musí platit $(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{(c_1, c_2, c_3)}$ a podle definice 2.14 dostáváme $c_1 = \frac{1}{c_3}$, $c_2 = \frac{1}{c_2}$ a $c_3 = \frac{1}{c_1}$. Z tohoto přímo dostáváme $c_2 = 1$. Protože stupnice fuzzy hodnot uvedená v tabulce 6 tvoří fuzzy škálu na intervalu $\langle 1, 9 \rangle$, pokusíme se tuto strukturu aspoň částečně zachovat. Proto zvolíme $c_3 = 3$. Dále protože musí platit $c_1 = \frac{1}{c_3}$, položíme $c_1 = \frac{1}{3}$. Celkem tedy dostáváme trojúhelníkové fuzzy číslo $(\frac{1}{3}, 1, 3)$. Nově definovaná stupnice fuzzy hodnot je pak uvedena v tabulce 7 a graficky znázorněna na obrázku 4.

Takto definovaná stupnice fuzzy hodnot pokrývá interval $\langle \frac{1}{3}, 9 \rangle$, ale už netvoří fuzzy škálu, neboť netvoří rozklad na tomto intervalu. Tato fuzzy čísla lze ale stále

fuzzy číslo	význačné hodnoty	deskriptor
$\tilde{1}$	$(\frac{1}{3}, 1, 3)$	kritéria stejně významná
$\tilde{3}$	$(1, 3, 5)$	první kritérium slabě významnější než druhé
$\tilde{5}$	$(3, 5, 7)$	první kritérium dosti významnější než druhé
$\tilde{7}$	$(5, 7, 9)$	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
$\tilde{9}$	$(7, 9, 9)$	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 7: Modifikovaná stupnice fuzzy hodnot



Obrázek 4: Modifikovaná stupnice fuzzy hodnot

lineárně uspořádat a jejich funkce příslušnosti jsou spojité. Navíc stupnice tvoří fuzzy škálu na původním intervalu $\langle 1, 9 \rangle$. Nově definovaná stupnice fuzzy hodnot má tedy stále dobrou strukturu.

Při tvorbě fuzzy matice párových porovnávání $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ stejně jako v klasickém Saatyho analytickém hierarchickém procesu stačí, aby rozhodovatel určil jen prvky \tilde{s}_{ij} , kde kritérium \mathcal{K}_i je významnější než kritérium \mathcal{K}_j . Zbývající prvky matice pak dopočítáme obdobně jako tomu bylo u klasického AHP, tj. podle pravidla $\tilde{s}_{ji} = \frac{1}{\tilde{s}_{ij}}$. Rozdíl je jen v tom, že nyní už nepracujeme s ostrými čísly, ale s fuzzy čísly. Jelikož kritérium \mathcal{K}_i musí být nutně stejně významné jako kritérium \mathcal{K}_i , na hlavní diagonálu matice $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ doplníme hodnoty $\tilde{s}_{ii} = (1, 1, 1)$, $i = 1, \dots, n$, což je ostrá hodnota 1. Prvky \tilde{s}_{ji} , kde prvek x_j

je méně významný jak prvek x_i , doplňujeme podle definice (2.14) následovně: Jestliže prvek \tilde{s}_{ij} je ve tvaru $(s_{ij1}, s_{ij2}, s_{ij3})$, pak prvek $\tilde{s}_{ji} = \frac{1}{\tilde{s}_{ij}}$ bude tvaru

$$\tilde{s}_{ji} = \left(\frac{1}{s_{ij3}}, \frac{1}{s_{ij2}}, \frac{1}{s_{ij1}} \right). \quad (3.1)$$

Tímto způsobem doplníme celou fuzzy matici párových porovnávání.

Poznámka 3.2. *Z předchozí kapitoly již víme, že výsledek dělení lineárních fuzzy čísel není lineární fuzzy číslo. Pro jednoduchost ale budeme výsledek dělení lineárním fuzzy číslem aproximovat, což nám umožní počítat podíl jen pro význačné hodnoty lineárních fuzzy čísel, jak jsme to provedli ve výrazu (3.1).*

Poté, co je fuzzy matice párových porovnávání sestavena, je potřeba ověřit, zda je sestavena správně, tj. zda si rozhodovatel při určování významnosti jednotlivých prvků příliš neodporoval. Tímto problémem se budeme zabývat v následující podkapitole.

3.2 Ověření konzistence fuzzy matice párových porovnávání

V kapitole 1 jsme si uvedli, že konzistence matice párových porovnávání je většinou ověřována za použití vzorců (1.1) a (1.2). Tyto vzorce nyní budeme chtít použít i při ověřování konzistence fuzzy matice párových porovnávání.

Ve většině článků uvedených v seznamu použité literatury autoři konzistenci fuzzy matic párových porovnávání vůbec neověřovali, viz například [2], [4], [8]. V článcích [1], [3] a [17] autoři ověřovali konzistenci jen u klasické matice tvořené prostředními význačnými hodnotami jednotlivých fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání. V žádném článku jsem se ale nesešla s výpočtem fuzzy indexu konzistence.

V následující části se tedy podíváme na ověření konzistence fuzzy matice párových porovnávání pomocí klasického indexu konzistence a poměru konzistence daných vzorcí (1.1) a (1.2) a poté se zaměříme především na výpočet fuzzy indexu konzistence a fuzzy poměru konzistence.

V celé této podkapitole se budeme zabývat fuzzy maticí párových porovnávání kritérií. Pro fuzzy matici párových porovnávání variant bude vše analogické.

3.2.1 Ověření konzistence pomocí defuzzifikace fuzzy matice párových porovnávání

Defuzzifikací fuzzy matice párových porovnávání získáme matici reálných čísel, pro kterou již umíme ověřit konzistenci pomocí vzorců (1.1) a (1.2). Defuzzifikaci můžeme provést metodou těžiště nebo přiřazením prostřední význačné hodnoty.

Podívejme se nyní na defuzzifikaci metodou těžiště. Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání ve tvaru

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{3} & \tilde{9} \\ \frac{1}{3} & 1 & \tilde{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (1, 3, 5) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (1, 1, 1) & (5, 7, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Pokud pro každé fuzzy číslo této fuzzy matice párových porovnávání vypočítáme jeho těžiště, bude příslušná matice S vypadat takto:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{25}{3} \\ \frac{23}{45} & 1 & 7 \\ \frac{69}{567} & \frac{143}{945} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8.3333 \\ 0.5111 & 1 & 7 \\ 0.1217 & 0.1513 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jak ale vidíme, matice S není reciproká. Tento způsob přiřazení matice reálných čísel fuzzy matici \tilde{S} tedy není vhodný.

Podívejme se nyní na defuzzifikaci přiřazením prostřední význačné hodnoty, tj. jedná se o metodu, která byla použita v článcích [1], [3] a [17]. Budeme-li tedy opět uvažovat fuzzy matici párových porovnávání (3.2), bude přiřazená matice S vypadat takto:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 7 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0.3333 & 1 & 7 \\ 0.1111 & 0.1429 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Úplně stejně jako matice (3.3) by vypadala matice párových porovnávání, kdybychom neuvažovali žádnou neurčitost. Tímto přístupem tedy přecházíme zpět ke klasickému AHP.

Výpočtem indexu konzistence jakožto reálného čísla ale zanedbáváme neurčitost, která byla ve fuzzy matici párových porovnávání obsažena. Proto by bylo korektnější počítat fuzzy index konzistence.

3.2.2 Výpočet fuzzy indexu konzistence a fuzzy poměru konzistence

K tomu, abychom mohli index konzistence CI a poměr konzistence CR fuzzyfikovat, potřebujeme nejprve určit maximální vlastní fuzzy číslo fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} . Jelikož pracujeme s trojúhelníkovými fuzzy čísly, budeme i maximální vlastní fuzzy číslo aproximovat trojúhelníkovým fuzzy číslem, tj. bude tvaru $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Výpočtem maximálního vlastního fuzzy čísla se budeme zabývat až v následující podkapitole. Nyní nám bude stačit informace, že maximální vlastní fuzzy číslo je tvaru $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Dosazením maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda}$ do vzorce (1.1) dostáváme fuzzy index konzistence \widetilde{CI} ve tvaru

$$\widetilde{CI} := \frac{\tilde{\lambda} - n}{n - 1} = \left(\frac{\lambda_1 - n}{n - 1}, \frac{\lambda_2 - n}{n - 1}, \frac{\lambda_3 - n}{n - 1} \right)$$

a fuzzy poměr konzistence \widetilde{CR} pak definujeme takto:

$$\widetilde{CR} := \frac{\widetilde{CI}}{\widetilde{RI}}.$$

Jak už jsme si uváděli v kapitole 1, za konzistentní se obecně považují matice, pro které platí $CR < 0, 1$. V našem případě jsme ale dostali fuzzy číslo \widetilde{CR} , nikoli reálné číslo. I toto fuzzy číslo je potřeba porovnat s hranicí 0, 1 a rozhodnout, zda je nebo není menší jak tato hranice. Metody porovnání fuzzy čísel jsme si uváděli v kapitole 2.3. Nejjednodušší a hlavně vždy fungující metodou porovnání fuzzy čísel je metoda defuzzifikace. V této metodě výslednému fuzzy číslu \widetilde{CR} přiřadíme nějaké reálné číslo a to pak porovnáme s hranicí 0, 1. Defuzzifikaci

můžeme provést například metodou těžiště, přičemž použijeme vzorec (2.7). Kdybychom fuzzy číslo \widetilde{CR} defuzzifikovali přiřazením prostřední význačné hodnoty (tedy prvkem se stupněm příslušnosti 1), je jistě všem zřejmé, že bychom dostali stejný výsledek jako v případě, kdy jsme fuzzy matici párových porovnávání \widetilde{S} rovnou přiřadili matici S reálných čísel, kterou jsme sestavili z prostředních význačných hodnot příslušných fuzzy čísel.

Zatím ale nevíme, jak určit maximální vlastní fuzzy číslo $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, které je pro výpočet fuzzy indexu konzistence \widetilde{CI} a fuzzy poměru konzistence \widetilde{CR} nezbytné. Tímto se budeme zabývat v následující podkapitole.

3.2.3 Výpočet maximálního vlastního fuzzy čísla fuzzy matice párových porovnávání

Obdobně jako tomu je u reálného maximálního vlastního čísla, je maximální vlastní fuzzy číslo maximálním řešením rovnice

$$|\widetilde{S} - \widetilde{\lambda}I| = 0, \quad (3.4)$$

kde \widetilde{S} je fuzzy matice typu $n \times n$, I je jednotková matice typu $n \times n$ a $\widetilde{\lambda}$ je neznámé fuzzy číslo, které chceme určit.

Hledané maximální vlastní fuzzy číslo $\widetilde{\lambda}$ je fuzzy číslo dané sjednocením všech svých α -řezů, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž α -řezy jsou jednoznačně určeny svými krajními hodnotami. Tyto krajní hodnoty by se určovaly tak, že se nejprve z původní fuzzy matice párových porovnávání $\widetilde{S} = \{\widetilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ sestaví matice \widetilde{S}_α , ve které jsou na pozicích (i, j) α -řezy fuzzy čísel \widetilde{s}_{ij} , tj. $\widetilde{S}_\alpha = \{(\widetilde{s}_{ij})_\alpha\}_{i,j=1}^n$. V matici \widetilde{S}_α se pak berou všechny možné kombinace prvků z jednotlivých α -řezů a sestavují se z nich matice, přičemž samozřejmě musí být zachována recipročnost. U takto vzniklých matic se pak vypočtou maximální vlastní čísla, přičemž nejmenší a největší z nich tvoří krajní body α -řezu výsledného maximálního vlastního fuzzy čísla $\widetilde{\lambda}$ fuzzy matice párových porovnávání \widetilde{S} . Jelikož matic vytvořených ze všech možných kombinací prvků α -řezů jednotlivých fuzzy čísel je nekonečně mnoho, musely by být pro výpočet krajních bodů jednotlivých α -řezů výsledného maximálního

vlastního fuzzy čísla použity optimalizační metody. Navíc nelze ani určit krajní body všech α -řezů výsledného maximálního vlastního fuzzy čísla, neboť těchto α -řezů je nekonečně mnoho. Museli bychom se tedy omezit jen na konečný počet těchto α -řezů a výsledné maximální vlastní fuzzy číslo by bylo opět jen aproximací skutečného maximálního vlastního fuzzy čísla.

Jelikož se v celé této práci omezujeme jen na práci s trojúhelníkovými fuzzy čísly, budeme i zde aproximovat hledané maximální vlastní fuzzy číslo $\tilde{\lambda}$ fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} trojúhelníkovým fuzzy číslem. Stačí tedy určit pouze tři význačné hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, kterými je trojúhelníkové fuzzy číslo $\tilde{\lambda}$ jednoznačně určeno. Prostřední význačnou hodnotu λ_2 určíme jako maximální řešení rovnice $|S_2 - \lambda_2 I| = 0$, kde matici S_2 získáme z fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} tak, že na každé pozici v této fuzzy matici vezmeme prostřední význačnou hodnotu příslušného fuzzy čísla. Pokud se tedy vrátíme k fuzzy matici párových porovnávání (3.2), bude příslušná matice S_2 ve tvaru (3.3).

Při výpočtu krajních význačných hodnot maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda}$ budeme postupovat tak, že z fuzzy matice \tilde{S} nejprve sestavíme všechny možné matice reálných čísel, které vzniknou různými kombinacemi význačných hodnot příslušných fuzzy čísel. Pro každou takto vytvořenou matici pak určíme maximální vlastní číslo a ze všech těchto vlastních čísel pak vybereme největší a nejmenší, což budou krajní význačné hodnoty hledaného maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Při sestavování těchto matic musíme samozřejmě zachovat reciprokost. To znamená, že budeme vytvářet různé kombinace pouze hodnot na těch pozicích (i, j) matice \tilde{S} , kde kritérium \mathcal{K}_i je významnější než kritérium \mathcal{K}_j , a na zbylých pozicích doplníme převrácené hodnoty příslušných čísel.

Uvažujeme-li tedy fuzzy matici párových porovnávání \tilde{S} kritérií $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$, máme celkem n^2 párových porovnávání, z toho na hlavní diagonále jsou vždy jedničky. Zbývá nám tedy $n^2 - n = n(n - 1)$ párových porovnávání, z nichž ale určujeme pouze polovinu a druhou polovinu dopočítáme jako převrácené hodnoty. To znamená, že na $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ pozicích volíme jednu ze tří význačných hodnot

příslušného fuzzy čísla. Pro fuzzy matici typu $n \times n$ tedy dostaneme celkem $3^{\binom{n}{2}}$ matic reálných čísel. U všech takto sestavených matic vypočteme maximální vlastní číslo a z nich vybereme nejmenší a největší. Nejmenší vlastní číslo pak bude první význačná hodnota λ_1 výsledného maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda}$ a největší vlastní číslo bude jeho třetí význačná hodnota λ_3 .

Z maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda}$ pak určíme fuzzy index konzistence a fuzzy poměr konzistence. Pro fuzzy poměr konzistence určíme těžiště, které následně porovnáme s hranicí 0, 1 a rozhodneme, zda fuzzy matice párových porovnávání je či není konzistentní.

Pro 3 kritéria bychom měli celkem $3^{\binom{3}{2}} = 27$ různých matic, pro které je potřeba vypočítat maximální vlastní čísla. S rostoucím počtem kritérií se pak počet matic rychle zvyšuje. Pro usnadnění práce jsem vytvořila algoritmus, který ze zadané fuzzy matice párových porovnávání vytvoří všechny možné matice a pro ně určí maximální vlastní čísla. Z těchto maximálních vlastních čísel pak určí výsledné maximální vlastní fuzzy číslo, vypočte fuzzy index konzistence, fuzzy poměr konzistence a nakonec rozhodne, zda zadaná fuzzy matice párových porovnávání je či není konzistentní.

Algoritmus 3.1 (Algoritmus pro ověření konzistence fuzzy matice párových porovnávání). *Pomocí tohoto algoritmu ověříme splnění podmínky konzistence fuzzy matice párových porovnávání. Vstupem do algoritmu je fuzzy matice M typu $n \times n$, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla zadaná svými třemi význačnými hodnotami. Matice může být zadaná například takto:*

$$M(:, :, 1) = [1 \ 1 \ 7; 1/5 \ 1 \ 5; 1/9 \ 1/9 \ 1]$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1]$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 5 \ 9; 1 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/5 \ 1],$$

přičemž matice $M(:, :, 1)$ je tvořena prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel, matice $M(:, :, 2)$ je tvořena druhými význačnými hodnotami a matice $M(:, :, 3)$ je tvořena třetími význačnými hodnotami. Pokud je vstupní fuzzy matice rozměrů větších jak 10×10 , bude do algoritmu požadován další vstup, a to

náhodný index RI pro matice stejného rozměru jako je vstupní matice. Výstupem algoritmu je fuzzy index konzistence, fuzzy poměr konzistence, těžiště fuzzy poměru konzistence a závěr, že daná fuzzy matice párových porovnávání je nebo není konzistentní.

Algoritmus je tvořen funkcemi $Fkonzist$, $KonstrM$ a $VlastniCislo$. Funkce $Fkonzist$ nejprve ověří správnost vstupu a poté volá funkci $KonstrM$. Nakonec pak tato funkce určí maximální vlastní fuzzy číslo zadané fuzzy matice párových porovnávání, vypočte fuzzy index konzistence a fuzzy poměr konzistence. Poté vypočte těžiště fuzzy poměru konzistence, porovná jej s hranicí 0,1 a vypíše informaci o tom, zda zadaná fuzzy matice párových porovnávání je či není konzistentní.

```
function []=Fkonzist(M)
S=size(M);
%Ověření, zda je vstup správně
if size(S,2)~=3 | size(M,1)~=size(M,2) |size(M,3)~=3
    disp('Vstupní matice má špatné rozměry. Zadejte ji znovu.')
else
    n=size(M,1);
    global MINIMUM;
    global MAXIMUM;
    MINIMUM=2*n;
    MAXIMUM=0;
    pole1=ones(n,n,1);
    KonstrM(pole1,1,2,M)

    %Určení maximálního vlastního fuzzy čísla
    lambda(1)=MINIMUM;
    lambda(3)=MAXIMUM;
    lambda(2)=max(eig(M(:,:,2)));
    max_vl_cislo=lambda
```

```

%Výpočet fuzzy indexu konzistence, fuzzy poměru konzistence
%a defuzzifikace metodou težiště:
ri=[0 0 0.52 0.89 1.11 1.25 1.35 1.4 1.45 1.49];
RI=ri(n);
CI=[(lambda(1)-n)/(n-1),(lambda(2)-n)/(n-1),(lambda(3)-n)/(n-1)]
CR=[CI(1)/RI,CI(2)/RI,CI(3)/RI]
t=1/3*(CR(3)^2-CR(1)^2+CR(2)*CR(3)-CR(1)*CR(2))/(CR(3)-CR(1))

if t<0.1
    disp('Fuzzy matice párových porovnávání je konzistentní.')
else
    disp('Fuzzy matice párových porovnávání není konzistentní.
    Je potřeba ji sestavit znovu.')
end
end
end

```

Funkce KonstrM generuje z původní fuzzy matice párových porovnávání všechny možné matice kombinováním všech význačných hodnot jednotlivých fuzzy čísel.

```

function[]=KonstrM(pracMat,radek,sloupec,M)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
n=size(pracMat);
jeList = 0;
if radek<=n-1 & sloupec<=n
    novyradek=radek;
    novysloupec=sloupec;
    if sloupec+1>n
        if radek+1>n-1
            %konec a počítáme max. vlastní čísla
            %zavoláme 3 výpočty (3 význačné hodnoty)

```

```

        pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
        pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);
        VlastniCislo(pracMat)
        pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,2);
        pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,2);
        VlastniCislo(pracMat)
        pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,3);
        pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,3);
        VlastniCislo(pracMat)
        jeList = 1;
    else
        novyradek=radek+1;
        novysloupec=novyradek+1;
    end
else
    novysloupec=sloupec+1;
end
if jeList == 0 %nemáme všechny matice, generujeme další
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);
    KonstrM(pracMat,novyradek,novysloupec,M)
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,2);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,2);
    KonstrM(pracMat,novyradek,novysloupec,M)
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,3);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,3);
    KonstrM(pracMat,novyradek,novysloupec,M)
end %if jeList
end%if

```

Pro každou vygenerovanou matici pak funkce KonstrM volá funkci Vlastni-

Cislo, která vypočítá maximální vlatní číslo zadané matice a hledá nejmenší a největší z těchto maximálních vlastních čísel.

```
function []=VlastniCislo(pracMat)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
m=eig(pracMat);%Výpočet max. vlastního čísla matice
if m(1)<MINIMUM
    if m(1)>-0.00001 & m(1)<0.00001
        MINIMUM=size(pracMat,1);
    else
        MINIMUM=m(1);
    end
end
if m(1)>MAXIMUM
    MAXIMUM=m(1);
end
```

▽

Pro porovnání metody na výpočet indexu konzistence a poměru konzistence a metody na výpočet fuzzy indexu konzistence a fuzzy poměru konzistence si uvedeme následující příklad.

Příklad 3.1. *Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání \tilde{S} danou předpisem (3.2). Nyní postupně určíme index konzistence a poměr konzistence pomocí obou metod, které jsme si výše uvedli.*

a) *Výpočet indexu konzistence a poměru konzistence pomocí nahrazení fuzzy čísel prostřední z jejich význačných hodnot:*

Vezmeme prostřední význačné hodnoty fuzzy čísel matice \tilde{S} a sestrojíme matici S . Ta bude mít tvar (3.3).

Maximální vlastní číslo této matice je $\lambda = 3.0803$, index konzistence je

$$CI_a = \frac{3.0803 - 3}{3 - 1} = 0.04015$$

a poměr konzistence nám vyjde

$$CR_a = \frac{0.04015}{0.52} = 0.0772 < 0.1.$$

Matice \tilde{S} je tedy podle tohoto postupu konzistentní.

b) Výpočet fuzzy indexu konzistence a fuzzy poměru konzistence:

Pro výpočet použijeme algoritmus 3.1. Vstupem budou matice zadané takto:

$$M(:, :, 1) = [1 \ 1 \ 7; 1/5 \ 1 \ 5; 1/9 \ 1/9 \ 1];$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1];$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 5 \ 9; 1 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/5 \ 1];$$

Algoritmus pak spustíme příkazem

`Fkonzist(M)`.

Výstupem algoritmu jsou následující hodnoty:

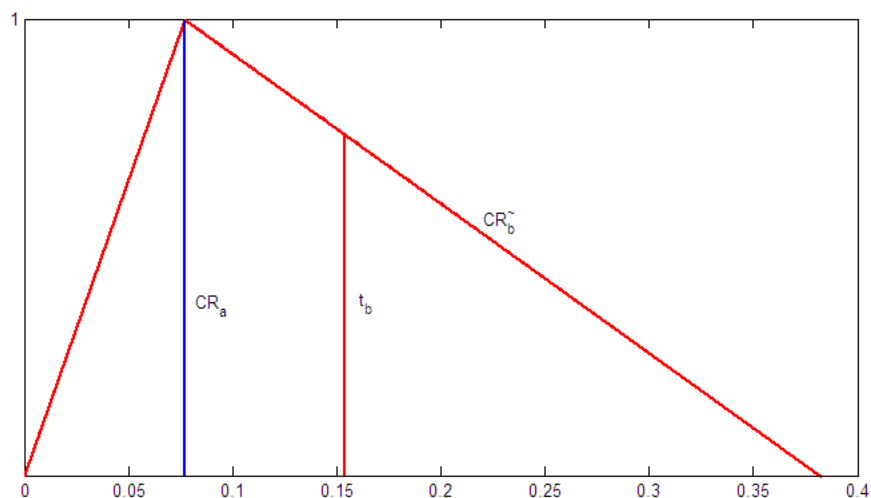
$$\tilde{\lambda} = (3, 3.0803, 3.3972), \quad \widetilde{CI}_b = (0, 0.0401, 0.1986),$$

$$\widetilde{CR}_b = (0, 0.0772, 0.3819) \quad a \quad t_b = 0.1530 > 0.1$$

Fuzzy matice párových porovnávání tedy podle tohoto postupu není konzistentní.

Poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence včetně těžiště jsou znázorněny na obrázku 5.

△



Obrázek 5: Poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence včetně těžiště

V případě *a)* předchozího příkladu jsme počítali jen s prostředními význačnými hodnotami fuzzy čísel, při výpočtu fuzzy poměru konzistence jsme brali v úvahu i krajní hodnoty fuzzy čísel. Přitom fuzzy čísla ze stupnice fuzzy hodnot definované v tabulce 7 jsou poměrně dosti neurčitá. To může způsobovat velkou neurčitost maximálního vlastního fuzzy čísla a tím pádem i fuzzy poměru konzistence.

Zkusme se nyní podívat, jestli se konzistence nezlepší, pokud použijeme jemnější stupnici fuzzy hodnot, tj. rozšířenou stupnici fuzzy hodnot.

3.2.4 Rozšířená stupnice fuzzy hodnot

Někteří autoři ve svých člancích používají rozšířenou stupnici fuzzy hodnot ve tvaru uvedeném v tabulce 8. Jak už ale víme, tento tvar není vhodný a proto budeme používat modifikaci uvedenou v tabulce 9. Grafické znázornění modifikované rozšířené fuzzy škály je uvedeno na obrázku 6.

V následujícím příkladu vypočítáme poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence fuzzy matice párových porovnávání sestavené z prvků modifikované rozšířené stupnice fuzzy hodnot definované v tabulce 9. Abychom mohli výsledky

fuzzy číslo	význačné hodnoty	deskriptor
$\tilde{1}$	(1, 1, 2)	kritéria stejně významná
$\tilde{2}$	(1, 2, 3)	první kritérium slabě významnější než druhé
$\tilde{3}$	(2, 3, 4)	
$\tilde{4}$	(3, 4, 5)	
$\tilde{5}$	(4, 5, 6)	první kritérium dosti významnější než druhé
$\tilde{6}$	(5, 6, 7)	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
$\tilde{7}$	(6, 7, 8)	
$\tilde{8}$	(7, 8, 9)	
$\tilde{9}$	(8, 9, 9)	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 8: Rozšířená stupnice fuzzy hodnot

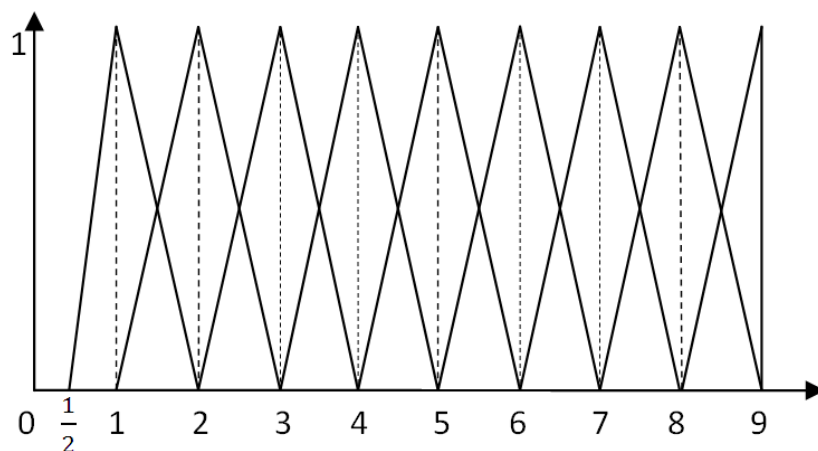
fuzzy číslo	význačné hodnoty	deskriptor
$\tilde{1}$	$(\frac{1}{2}, 1, 2)$	kritéria stejně významná
$\tilde{2}$	(1, 2, 3)	první kritérium slabě významnější než druhé
$\tilde{3}$	(2, 3, 4)	
$\tilde{4}$	(3, 4, 5)	
$\tilde{5}$	(4, 5, 6)	první kritérium dosti významnější než druhé
$\tilde{6}$	(5, 6, 7)	první kritérium prokazatelně významnější než druhé
$\tilde{7}$	(6, 7, 8)	
$\tilde{8}$	(7, 8, 9)	
$\tilde{9}$	(8, 9, 9)	první kritérium absolutně významnější než druhé

Tab. 9: Modifikovaná rozšířená stupnice fuzzy hodnot

porovnat s výsledky z příkladu 3.1, budeme uvažovat obdobnou fuzzy matici párových porovnávání ve tvaru

$$\tilde{S}^x = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (2, 3, 4) & (8, 9, 9) \\ (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) & (1, 1, 1) & (6, 7, 8) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}) & (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Příklad 3.2. Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání tvaru (3.5) a nyní určíme poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence pomocí metod, které jsme si uvedli v předchozí podkapitole.



Obrázek 6: Modifikovaná rozšířená stupnice fuzzy hodnot

- a) Výpočet indexu konzistence CI a poměru konzistence CR pomocí nahrazení fuzzy čísel prostřední z jejich význačných hodnot:

V tomto případě bude výsledek stejný jako v příkladu 3.1 a), neboť prostřední význačné hodnoty všech fuzzy čísel v matici (3.5) zůstaly stejné jako v matici (3.2), tj. $CR_a = 0.0772$.

- b) Výpočet fuzzy indexu konzistence \widetilde{CI} a fuzzy poměru konzistence \widetilde{CR} :

Pro výpočet opět použijeme algoritmus 3.1. Vstupem budou matice zadané ve tvaru

$$M(:, :, 1) = [1 \ 2 \ 8; 1/4 \ 1 \ 6; 1/9 \ 1/8 \ 1];$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1];$$

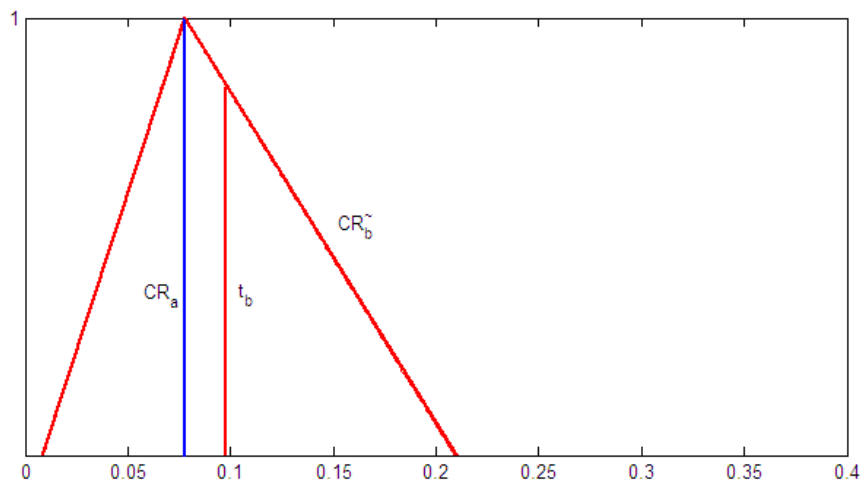
$$M(:, :, 3) = [1 \ 4 \ 9; 1/2 \ 1 \ 8; 1/8 \ 1/6 \ 1];$$

Výstupy algoritmu budou následující:

$$\widetilde{\lambda} = (3.0092, 3.0803, 3.2174), \quad \widetilde{CI}_b = (0.0046, 0.0401, 0.1087),$$

$$\widetilde{CR}_b = (0.0088, 0.0772, 0.2090) \quad a \quad t_b = 0.0984 < 0, 1.$$

Fuzzy matice párových porovnávání \widetilde{S}^x je tedy konzistentní.



Obrázek 7: Poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence včetně těžiště

Poměr konzistence a fuzzy poměr konzistence včetně těžiště jsou znázorněny na obrázku 7.

△

V příkladě 3.1 jsme v části b) došli k závěru, že fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} není konzistentní. V příkladě 3.2 jsme v části b) naopak došli k závěru, že fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S}^x konzistentní je. Přitom jednotlivé prvky obou matic vyjadřují stejné preference mezi jednotlivými kritérii nebo mezi variantami vzhledem k danému kritériu. Liší se pouze neurčitostí informace. Rozpor v závěrech je způsoben právě faktem, že v příkladě 3.1 jsme použili stupnici fuzzy čísel s větší neurčitostí než v příkladě 3.2. Když pak z fuzzy matice párových porovnávání sestavujeme jednotlivé matice kombinováním význačných hodnot jednotlivých fuzzy čísel, dostáváme matice, které se při použití modifikované základní stupnice fuzzy hodnot svým maximálním vlastním číslem liší od matice sestavené z prostředních význačných hodnot příslušných fuzzy čísel mnohem více než při použití modifikované rozšířené stupnice fuzzy hodnot. Tímto pak dostáváme neurčitější maximální vlastní fuzzy číslo $\tilde{\lambda}$, což následně zvyšuje neurčitost výsledného fuzzy poměru konzistence \widetilde{CR} . Těžiště fuzzy poměru kon-

zistence pak může překročit i hranici 0, 1, což se v příkladě 3.1 stalo. Fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} pak není konzistentní.

Toto by ale znamenalo, že bychom místo modifikované základní stupnice dané tabulkou 7 měli raději dávat přednost modifikované rozšířené stupnici dané tabulkou 9, neboť s touto stupnicí dosáhneme splnění podmínky konzistence mnohem snáz. To je pro rozhodovatele určitě výhodné. Navíc rozšířená stupnice rozhodovateli díky mezihodnotám a méně neurčitým fuzzy číslům umožňuje mnohem přesnější porovnávání. Toto ale může být pro rozhodovatele problém v případě, kdy není schopen přesnější hodnocení párového porovnávání kritérií nebo variant vzhledem k nějakému kritériu provést. Při větších rozměrech fuzzy matice párových porovnávání je navíc téměř nemožné dosáhnout konzistence i v případě použití modifikované rozšířené stupnice. Dokonce i matice sestavená z prostředních význačných hodnot fuzzy čísel takové matice je při větších rozměrech nekonzistentní.

3.2.5 Oslabení podmínky konzistence

Jelikož, jak jsme uvedli výše, je splnění podmínky $\widetilde{CR} < 0, 1$ pro fuzzy matice párových porovnávání obtížné a při větších rozměrech dokonce nemožné, pro výpočet se spokojíme s fuzzy maticí párových porovnávání $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$, ve které bude platit podmínka

$$\tilde{s}_{ik} \geq \max \{ \tilde{s}_{ij}, \tilde{s}_{jk} \}, \quad \text{pro každé } i, j, k : \mathcal{K}_i \text{ je významnější než } \mathcal{K}_j \\ \text{a } \mathcal{K}_j \text{ je významnější než } \mathcal{K}_k \quad (3.6)$$

Tato podmínka je mnohem slabší než podmínka $\widetilde{CR} < 0, 1$.

Protože modifikovaná základní i rozšířená stupnice fuzzy hodnot tvoří fuzzy škálu na intervalu $\langle 1, 9 \rangle$, jsou všechna fuzzy čísla z těchto stupnic porovnatelná a stačí, když budeme porovnávat jen jejich prostřední význačné hodnoty. Pro ověření oslabené podmínky konzistence podle vzorce (3.6) jsem vytvořila následující algoritmus.

Algoritmus 3.2 (Algoritmus pro ověření konzistence fuzzy matice párových porovnávání podle podmínky (3.6)). *Vstup do algoritmu může být zadán dvěma*

způsoby. První možností je zadat matici M typu $n \times n$, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla zadaná svými třemi význačnými hodnotami. Tato matice může být zadaná například takto:

```
M(:, :, 1)=[1 1 7;1/5 1 5;1/9 1/9 1]
M(:, :, 2)=[1 3 9;1/3 1 7;1/9 1/7 1]
M(:, :, 3)=[1 5 9;1 1 9;1/7 1/5 1],
```

přičemž matice $M(:, :, 1)$ je tvořena prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel, matice $M(:, :, 2)$ je tvořena druhými význačnými hodnotami a matice $M(:, :, 3)$ je tvořena třetími význačnými hodnotami. Druhou možností zadání vstupu do algoritmu je zadat pouze matici prostředních význačných hodnot příslušných fuzzy čísel.

V algoritmu je pak ověřena podmínka (3.6) a výstupem je informace o tom, zda fuzzy matice párových porovnávání podle této podmínky je nebo není konzistentní. V případě, že fuzzy matice oslabenou podmínku konzistence nespĺňuje, jsou výstupem algoritmu i všechny trojice indexů i, j, k , pro které je podmínka (3.6) porušena, což by mělo rozhodovateli ulehčit práci při následném opravování této fuzzy matice.

```
function[]=oslabeni(M)
S=size(M);
ind=0;
%Ověření, zda je vstup správně
if size(S,2)==2 & S(1,1)==S(1,2)
    A=M;
elseif size(S,2)==3 & S(3)==3 & S(1,1)==S(1,2)
    A=M(:, :, 2);
else
    disp('Vstupní matice má špatné rozměry. Zadejte znovu.')
    ind=1;
end
```

```

if ind==0
    n=size(A,1);
    recipr=0;

    for p=1:n
        for q=1:n
            if A(p,q)~=1/A(q,p)
                recipr=1;
            end
        end
    end
end
if recipr==1
    disp('Zadaná matice není reciproká. Zadejte znovu.')
end
if ind==0 & recipr==0
    index=0;
    p=1;
    for i=1:n
        for j=1:n
            for k=1:n
                if A(i,j)>1 & A(j,k)>1
                    if A(i,k)<max(A(i,j),A(j,k))
                        index=1;
                        poruseni(p,:)=[i,j,k];
                        p=p+1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

    if index==1
        disp('Matice párových porovnávání nesplňuje
            podmínku konzistence. Konzistence je porušena
            pro následující indexy:')
        poruseni
    else
        disp('Matice párových porovnávání je konzistentní.')
    end
end
end

```

▽

Nyní, když jsme ověřili konzistenci fuzzy matice párových porovnávání, můžeme přejít k výpočtu fuzzy vah kritérií vzhledem k celkovému cíli respektive dílčích fuzzy hodnocení variant podle jednotlivých kritérií. To bude náplní následující podkapitoly.

3.3 Určení preferencí prvků z fuzzy matice párových porovnávání

Z předchozí kapitoly již víme, jak sestavit fuzzy matici párových porovnávání kritérií vzhledem k celkovému cíli i fuzzy matici párových porovnávání variant vzhledem k jednotlivým kritériím. Už umíme ověřit i konzistenci takto sestavených fuzzy matic. Nyní z těchto fuzzy matic párových porovnávání potřebujeme získat fuzzy váhy kritérií vzhledem k celkovému cíli a fuzzy hodnocení variant vzhledem k jednotlivým kritériím. Postup výpočtu fuzzy vah kritérií i fuzzy hodnocení variant z fuzzy matic párových porovnávání je stejný. V této kapitole tedy opět popíšeme problematiku jen pro fuzzy váhy kritérií, u fuzzy hodnocení variant to bude zcela analogické.

Na začátku této kapitoly uvedeme dva nejběžnější postupy pro výpočet fuzzy vah používané v literaturách a ukážeme, proč tyto postupy výpočtu nejsou vhodné. Poté navrhneme vhodnější postupy výpočtu fuzzy vah.

3.3.1 Základní přístupy k výpočtu fuzzy vah

Jak už jsme uváděli v kapitole 1, budeme preference jednotlivých kritérií vzhledem k ostatním počítat jako řádkový geometrický průměr \tilde{m}_i významností kritéria \mathcal{K}_i vzhledem k ostatním kritériím, tj. podle vzorce

$$\tilde{m}_i = \left(\prod_{j=1}^n \tilde{s}_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.7)$$

Jelikož významnosti kritéria \mathcal{K}_i vzhledem k ostatním kritériím jsou fuzzy čísla, bude i výsledný geometrický průměr \tilde{m}_i fuzzy číslo. Geometrický průměr už ale nebude lineárním fuzzy číslem, protože, jak už víme z kapitoly 2.4, násobení fuzzy čísel není lineární operace. Protože se ale s lineárními fuzzy čísly lépe pracuje, budeme opět výsledné fuzzy číslo lineárním fuzzy číslem aproximovat. Řádkový geometrický průměr můžeme tedy počítat jen pro význačné hodnoty trojúhelníkových fuzzy čísel:

$$\left. \begin{aligned} m_{i1} &= \left(\prod_{j=1}^n s_{ij1} \right)^{\frac{1}{n}} \\ m_{i2} &= \left(\prod_{j=1}^n s_{ij2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ m_{i3} &= \left(\prod_{j=1}^n s_{ij3} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

kde $\tilde{s}_{ij} = (s_{ij1}, s_{ij2}, s_{ij3})$, $\tilde{m}_i = (m_{i1}, m_{i2}, m_{i3})$. Z řádkových geometrických průměrů poté budeme počítat fuzzy váhy, které opět aproximujeme trojúhelníkovými fuzzy čísly.

V článkách [4], [6], [7], [8], [11] a [17] autoři fuzzy váhy $\tilde{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ počítají podle vzorce

$$\left. \begin{aligned} v_{i1} &= \frac{m_{i1}}{\sum_{j=1}^n m_{j3}} \\ v_{i2} &= \frac{m_{i2}}{\sum_{j=1}^n m_{j2}} \\ v_{i3} &= \frac{m_{i3}}{\sum_{j=1}^n m_{j1}} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Ukážeme si ale, že tento postup je špatný. Zkusme podle těchto vzorců vypočítat fuzzy váhy kritérií $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a \mathcal{K}_3 , jejichž fuzzy matice párových porovnávání je tvaru

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (1, 1, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

tj. při sestavování této fuzzy matice párových porovnávání kritérií jsme použili fuzzy čísla ze stupnice fuzzy hodnot definované v tabulce 7.

Podle vzorce (3.8) dostáváme řádkové geometrické průměry

$$\tilde{m}_1 = (3.6593, 4.3267, 4.3267),$$

$$\tilde{m}_2 = (0.3333, 0.4807, 0.7539),$$

$$\tilde{m}_3 = (0.3333, 0.4807, 0.7539)$$

a fuzzy váhy vypočtené podle vzorce (3.9) budou tvaru

$$\tilde{v}_1 = (0.6272, 0.8182, 1.0002),$$

$$\tilde{v}_2 = (0.0571, 0.0909, 0.1743),$$

$$\tilde{v}_3 = (0.0571, 0.0909, 0.1743).$$

U fuzzy váhy \tilde{v}_1 ale vidíme, že třetí význačná hodnota je větší jak 1. Tyto fuzzy váhy tedy určitě nejsou normované. To je způsobeno tím, že při výpočtu první, respektive třetí význačné hodnoty fuzzy váhy \tilde{v}_i používáme zároveň první i třetí význačnou hodnotu řádkového geometrického průměru významností \tilde{m}_i kritéria \mathcal{K}_i vzhledem k ostatním kritériím. Toto je však nepřipustné.

Protože při výpočtu první význačné hodnoty v_{i1} fuzzy váhy \tilde{v}_i normujeme první význačnou hodnotu m_{i1} řádkového geometrického průměru \tilde{m}_i , nemůžeme ve vzorci zároveň použít i třetí význačnou hodnotu m_{i3} řádkového geometrického průměru \tilde{m}_i . V děliteli musíme tedy třetí význačnou hodnotu m_{i3} nahradit první význačnou hodnotou m_{i1} . Toto provedeme i při výpočtu třetí význačné hodnoty v_{i3} fuzzy váhy \tilde{v}_i - v děliteli analogicky nahradíme první význačnou hodnotu m_{i1} řádkového geometrického průměru \tilde{m}_i třetí význačnou hodnotou m_{i3} .

Popsaný problém lze tedy vyřešit drobnou, avšak zásadní úpravou ve vzorcích

(3.9), která je popsána v [14]. Vzorce pro výpočet pak vypadají takto:

$$\left. \begin{aligned} v_{i1} &= \frac{m_{i1}}{m_{i1} + \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{j3}} \\ v_{i2} &= \frac{m_{i2}}{m_{i2} + \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{j2}} \\ v_{i3} &= \frac{m_{i3}}{m_{i3} + \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{j1}} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

kde $\tilde{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}), i = 1, \dots, n$.

Fuzzy váhy kritérií, jejichž fuzzy matice párových porovnávání je dána předpisem (3.10), pak podle vzorce (3.11) vyjdou ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (0.7082, 0.8182, 0.8665), \\ \tilde{v}_2 &= (0.0616, 0.0909, 0.1588), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0616, 0.0909, 0.1588). \end{aligned}$$

Fuzzy váhy počítané podle vzorce (3.11) mají mnohem menší neurčitost než fuzzy váhy počítané podle původního vzorce (3.9), a jelikož ve vzorcích (3.11) je dělenec vždy menší jak dělitel, pro všechny fuzzy váhy platí $\tilde{v}_i \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1 \rangle)$. Navíc, jak je dokázáno v [14] a [15], fuzzy váhy vypočtené podle vzorců (3.11) jsou normované.

3.3.2 Zachování reciprocity při výpočtu fuzzy vah

Jak už jsme ale zjistili v podkapitole 3.2.3 při výpočtu maximálního vlastního fuzzy čísla, jsou vztahy mezi jednotlivými význačnými hodnotami fuzzy čísel ve fuzzy matici párových porovnávání mnohem komplikovanější. Tyto vztahy ale nejsou ve vzorci (3.11) vůbec zohledněny. Proto tento vzorec ještě jednou modifikujeme.

Situaci si nejprve rozebereme na konkrétním případu, kdy budeme uvažovat fuzzy matici párových porovnávání kritérií ve tvaru (3.5). První význačná hodnota řádkového geometrického průměru $\tilde{m}_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13})$ je $m_{11} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 8}$, tj. na pozicích (1, 1), (1, 2) a (1, 3) matice (3.5) jsme pevně zvolili první význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel. To znamená, že pod hlavní diagonálou musí být na příslušných pozicích jejich převrácené hodnoty. Tímto tedy dostaneme matici

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdot \\ \frac{1}{8} & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

přičemž na hodnoty na pozicích (2, 3) a (3, 2) této matice nemáme žádná omezení. Na tyto pozice můžeme tedy dosadit libovolnou význačnou hodnotu příslušného fuzzy čísla, přitom ale samozřejmě musí být zachována recipročnost matice. Celkem můžeme tedy sestavit tři různé matice:

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 7 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Pro výpočet první význačné hodnoty v_{11} fuzzy váhy \tilde{v}_1 máme tedy k dispozici celkem tři matice. U každé z těchto matic vypočteme podíl geometrického průměru prvního řádku dané matice a součtu geometrických průměrů jednotlivých řádků této matice. Za první význačnou hodnotu v_{11} fuzzy váhy \tilde{v}_1 pak volíme minimální z takto vypočtených hodnot.

Analogicky budeme provádět i výpočet třetí význačné hodnoty v_{13} fuzzy váhy \tilde{v}_1 . Nejprve tedy vypočteme třetí význačnou hodnotu m_{13} řádkového geometrického průměru \tilde{m}_1 , což je $m_{13} = \sqrt[3]{1 \cdot 4 \cdot 9}$. Analogicky jako v předchozím případě dostáváme tři různé matice

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{4} & 1 & 6 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{4} & 1 & 7 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{4} & 1 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

ze kterých vypočteme třetí význačné hodnoty v_{13} fuzzy váhy \tilde{v}_1 a poté vybereme největší z těchto hodnot.

Matematicky lze výpočet význačných hodnot v_{i1} a v_{i3} fuzzy váhy \tilde{v}_i pomocí výše uvedeného postupu zapsat takto:

$$v_{i1} = \min \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij1}}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij1} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \sqrt[n]{\frac{1}{s_{ik1}} \prod_{l=1, l \neq i}^n s_{kl}^*}}} ; s_{kl}^* \in \{s_{kl1}, s_{kl2}, s_{kl3}\}, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, k \neq i, l = 1, \dots, n, l \neq i, s_{kl}^* = \frac{1}{s_{lk}^*} \right\}, \quad (3.15)$$

$$v_{i3} = \max \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij3}}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij3} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \sqrt[n]{\frac{1}{s_{ik3}} \prod_{l=1, l \neq i}^n s_{kl}^*}}} ; s_{kl}^* \in \{s_{kl1}, s_{kl2}, s_{kl3}\}, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, k \neq i, l = 1, \dots, n, l \neq i, s_{kl}^* = \frac{1}{s_{lk}^*} \right\}. \quad (3.16)$$

Prostřední význačná hodnota v_{i2} fuzzy váhy \tilde{v}_i se bude počítat úplně stejně jako u předchozích postupů výpočtu fuzzy vah, tj. podle vzorce

$$v_{i2} = \frac{m_{i2}}{\sum_{j=1}^n m_{j2}}. \quad (3.17)$$

Při výpočtu krajních význačných hodnot fuzzy vah pomocí vzorců (3.15) a (3.16) však pracujeme jen s význačnými hodnotami fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií. Jelikož funkce pro výpočet krajních význačných

hodnot fuzzy vah je poměrně komplikovaná, nemůžeme s jistotou říct, že pomocí vzorců (3.15) a (3.16) jsme našli opravdu minimální respektive maximální hodnotu. Je možné že tyto hodnoty bychom získali pro jinou kombinaci prvků z nosičů fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií. Abychom tedy byli přesní, měli bychom krajní význačné hodnoty fuzzy vah počítat takto:

$$v_{i1} = \min \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^*}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{kj}^*}} ; s_{kj}^* \in \langle s_{kj1}, s_{kj3} \rangle, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, s_{kj}^* = \frac{1}{s_{jk}^*} \right\}, \quad (3.18)$$

$$v_{i3} = \max \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^*}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{kj}^*}} ; s_{kj}^* \in \langle s_{kj1}, s_{kj3} \rangle, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, s_{kj}^* = \frac{1}{s_{jk}^*} \right\}. \quad (3.19)$$

Ani tento postup výpočtu fuzzy vah však není zcela přesný. Výsledné fuzzy váhy jsme pouze aproximovali trojúhelníkovým fuzzy číslem. Určované fuzzy váhy $\tilde{v}_i, i = 1, \dots, n$, jsou ve skutečnosti fuzzy čísla daná sjednocením všech svých α -řezů, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž α -řezy jsou jednoznačně určeny svými krajními hodnotami. Fuzzy váhu \tilde{v}_i můžeme tedy psát ve tvaru $\tilde{v}_i = \{ \langle \underline{v}_i(\alpha), \bar{v}_i(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \}$, přitom pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ se hodnoty $\underline{v}_i(\alpha), \bar{v}_i(\alpha)$ funkcí $\underline{v}_i, \bar{v}_i$ počítají podle vzorců

$$\underline{v}_i(\alpha) = \min \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^*}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{kj}^*}} ; s_{kj}^* \in \langle \underline{s}_{kj}(\alpha), \bar{s}_{kj}(\alpha) \rangle, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, s_{kj}^* = \frac{1}{s_{jk}^*} \right\}, \quad (3.20)$$

$$\bar{v}_i(\alpha) = \max \left\{ \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^*}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{kj}^*}} ; s_{kj}^* \in \langle \underline{s}_{kj}(\alpha), \bar{s}_{kj}(\alpha) \rangle, \right. \\ \left. k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, s_{kj}^* = \frac{1}{s_{jk}^*} \right\}, \quad (3.21)$$

kde $\tilde{s}_{kj} = \{ \langle \underline{s}_{kj}(\alpha), \bar{s}_{kj}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \}$, $k, j = 1, \dots, n$.

Při použití tohoto postupu pro výpočet fuzzy vah bychom ale opět narazili na stejný problém jako při výpočtu maximálního vlastního fuzzy čísla $\tilde{\lambda}$. I zde bychom se tedy museli omezit jen na konečný počet α -řezů a výsledné váhy by byly tedy opět jen aproximací skutečných fuzzy vah. Proto v této práci tento postup výpočtu fuzzy vah používat nebudeme a spokojíme se pouze se zjednodušeným výpočtem fuzzy vah pomocí vzorců (3.15), (3.16) a (3.17) respektive (3.17), (3.20) a (3.21).

Nyní se zaměříme na praktický postup výpočtu fuzzy vah pomocí obou uvedených metod a uvedeme jejich výhody a nevýhody. Prostřední význačná hodnota

fuzzy váhy se počítá stejně u obou přístupů a výpočet není nikterak složitý. Změříme se tedy jen na krajní význačné hodnoty fuzzy vah.

Při výpočtu význačných hodnot pomocí vzorců (3.15) a (3.16) procházíme různé kombinace význačných hodnot fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání. Konkrétně pro fuzzy matici párových porovnávání kritérií $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ máme celkem n^2 párových porovnávání. Protože na hlavní diagonále jsou vždy jedničky, hodnoty pod hlavní diagonálou jsou vždy převrácené hodnoty příslušných hodnot nad hlavní diagonálou, a protože při hledání krajní význačné hodnoty fuzzy váhy \tilde{v}_i fixujeme příslušné význačné hodnoty u fuzzy čísel v i -tém řádku i v i -tém sloupci fuzzy matice \tilde{S} , zbývá nám $\binom{n-1}{2}$ fuzzy čísel, ze kterých bereme všechny možné kombinace význačných hodnot. Z matice $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ tedy vygenerujeme celkem $3^{\binom{n-1}{2}}$ různých matic reálných čísel, ze kterých pak určíme hledanou význačnou hodnotu fuzzy váhy \tilde{v}_i . Pro výpočet fuzzy vah tímto postupem jsem vytvořila následující algoritmus.

Algoritmus 3.3 (Algoritmus pro výpočet fuzzy vah pomocí vzorců (3.17), (3.15) a (3.16)). *Vstupem do algoritmu je fuzzy matice M typu $n \times n$, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla zadaná svými třemi význačnými hodnotami. Matice může být zadaná například takto:*

$$M(:, :, 1) = [1 \ 1 \ 7; 1/5 \ 1 \ 5; 1/9 \ 1/9 \ 1]$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1]$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 5 \ 9; 1 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/5 \ 1],$$

přičemž matice $M(:, :, 1)$ je tvořena prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel, matice $M(:, :, 2)$ je tvořena druhými význačnými hodnotami a matice $M(:, :, 3)$ je tvořena třetími význačnými hodnotami. Výstupem algoritmu je matice V typu $n \times 3$, kde v j -tém řádku je fuzzy váha v_j určená svými třemi význačnými hodnotami.

Algoritmus je tvořen funkcemi FuzzyVahy, KonstrMat a VlastniVypocet. Funkce FuzzyVahy pro výpočet jednotlivých krajních význačných hodnot každé fuzzy

váhy ve fuzzy matici párových porovnávání M fixuje význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel a poté volá funkci *KonstrMat*. Nakonec jsou v této funkci vypočteny prostřední význačné hodnoty všech fuzzy vah a výstupem je matice fuzzy vah kritérií.

```
function []=FuzzyVahy(M)
S=size(M);
%Ověření, zda je vstup správně
if size(S,2)~=3 | size(M,1)~=size(M,2) |size(M,3)~=3
    disp('Vstupní matice má špatné rozměry. Zadejte ji znovu.')
else
n=size(M,1);
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
for pevnyRadek=1:n
    pevnyRadek;
    MINIMUM=1;
    MAXIMUM=0;
    for index=1:3
        if index~=2%vynechat index 2
            pole=ones(n,n,1);
            for sloupec=1:n
                pole(pevnyRadek,sloupec,1)=M(pevnyRadek,sloupec,index);
                pole(sloupec,pevnyRadek,1)=1/M(pevnyRadek,sloupec,index);
            end
            KonstrMat(pole,1,1,2,index,M,pevnyRadek)
        end%if index~=2
    end
    vysledne_vahy(pevnyRadek,1)=MINIMUM;
    vysledne_vahy(pevnyRadek,3)=MAXIMUM;
delitel=0;
```

```

    for u=1:n
        delitel=delitel+(prod(M(u,:,2)))^(1/n);
    end
    vysledne_vahy(pevnyRadek,2)=
        =(prod(M(pevnyRadek,:,2)))^(1/n)/delitel;
end%for pevnyRadek=1:n
vysledne_vahy
end%if

```

Funkce KonstrMat z předpřipravené matice vytvoří kombinováním význačných hodnot fuzzy čísel na zbylých pozicích všechny možné matice a pro tyto matice pak volá funkci VlastniVypocet.

```

function []=KonstrMat(pracMat, radek, sloupec, index, M, pevnyRadek)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
n=size(pracMat);
jeList = 0;
if radek==pevnyRadek & radek ~= n-1
    radek=radek+1;
    sloupec=radek+1;
end
if sloupec==pevnyRadek
    if sloupec==n
        radek=radek+1;
        sloupec=radek+1;
    else
        sloupec=sloupec+1;
    end
end
end
if radek<=n-1 & sloupec<=n

```

```

novyradek=radek;
novysloupec=sloupec;
if sloupec+1>n
    if radek+1>n-1
        %konec a z počítáme váhy
        %zavoláme 3 výpočty (3 význačné hodnoty)
        if (radek ~= pevnyRadek & sloupec ~= pevnyRadek)
            pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
            pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);
            VlastniVypocet(pracMat,index,pevnyRadek)
            pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,2);
            pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,2);
            VlastniVypocet(pracMat,index,pevnyRadek)
            pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,3);
            pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,3);
            VlastniVypocet(pracMat,index,pevnyRadek)
        else
            VlastniVypocet(pracMat,index,pevnyRadek);
        end
        jeList = 1;
    else
        novyradek=radek+1;
        novysloupec=novyradek+1;
    end
else
    novysloupec=sloupec+1;
end
if jeList == 0 %nemáme všechny matice, generujeme další
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);

```

```

KonstrMat(pracMat, novyradek, novysloupec, index, M, pevnyRadek);
pracMat(radek, sloupec)=M(radek, sloupec, 2);
pracMat(sloupec, radek)=1/M(radek, sloupec, 2);
KonstrMat(pracMat, novyradek, novysloupec, index, M, pevnyRadek);
pracMat(radek, sloupec)=M(radek, sloupec, 3);
pracMat(sloupec, radek)=1/M(radek, sloupec, 3);
KonstrMat(pracMat, novyradek, novysloupec, index, M, pevnyRadek);
end %if jeList
end%if

```

Funkce VlastniVypocet pro zadanou matici vypočítá geometrické průměry všech řádků a znormuje geometrický průměr řádku, který odpovídá určované fuzzy váze.

```

function []=VlastniVypocet(list, index, radek)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
n=size(list,1);
delitel=0;
for u=1:n
    delitel=delitel+(prod(list(u,:)))^(1/n);
end
vaha=(prod(list(radek,:)))^(1/n)/delitel;%vypočtená váha
if index==1
    if vaha<MINIMUM
        MINIMUM=vaha;
    end
end%index==1
if index==3
    if vaha>MAXIMUM
        MAXIMUM=vaha;
    end
end%index==3

```

▽

Pro výpočet význačných hodnot fuzzy vah pomocí vzorců (3.20) a (3.21) můžeme v Matlabu použít funkci *fmincon*. Tato funkce se používá pro nalezení řešení minimalizační úlohy s podmínkami ve tvaru rovností i nerovností. V naší funkci, kterou chceme minimalizovat, ale platí komplikované vztahy, které nelze pomocí podmínek ve tvaru rovností či nerovností zapsat. Jedná se o podmínku reciprocity matice, ze které výpočet provádíme. Zadání funkce pro výpočet první či třetí význačné hodnoty fuzzy váhy je tedy poměrně komplikované. Pro matici fuzzy párových porovnávání $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ bude mít zadaná optimalizovaná funkce celkem $\binom{n}{2}$ proměnných, neboť na hlavní diagonále matice jsou vždy jedničky a hodnoty pod hlavní diagonálou musí být převrácené hodnoty příslušných hodnot nad hlavní diagonálou. Proměnné jsou v optimalizované funkci tedy jen hodnoty nad hlavní diagonálou.

Třetí význačné hodnoty fuzzy vah jednotlivých kritérií hledáme pomocí maximalizace určité funkce. Abychom mohli pro výpočet těchto třetích význačných hodnot použít v Matlabu opět funkci *fmincon*, musíme maximalizaci převést na minimalizaci. Jelikož úloha

$$\max_x f(x)$$

je ekvivalentní s úlohou

$$-\min_x -f(x),$$

budeme třetí význačnou hodnotu fuzzy váhy \tilde{v}_i hledat takto:

$$v_{i3} = - \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^*}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{kj}^*}} ; s_{kj}^* \in \langle s_{kj1}, s_{kj3} \rangle, \\ k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, s_{kj}^* = \frac{1}{s_{jk}^*} \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

Do funkce *fmincon* je dále potřebné zadat vektor dolních hranic *lb* a vektor horních hranic *ub*, kterých mohou proměnné v minimalizované funkci nabývat. Vektor *lb* je tedy tvořen prvními význačnými hodnotami fuzzy čísel nad hlavní diagonálou fuzzy matice párových porovnávání a vektor *ub* je tvořen třetími význačnými hodnotami těchto fuzzy čísel.

Dále je nutné stanovit počáteční odhad řešení *w0*. Jelikož optimalizovaná funkce je poměrně dosti komplikovaná, dává funkce *fmincon* velmi rozdílné výsledky v závislosti na volbě počátečního odhadu *w0*. Použití prostředních význačných hodnot fuzzy čísel pro počáteční odhad *w0* se ukázalo nevhodné. Daleko lepší výsledky dostaneme, pokud při hledání první význačné hodnoty fuzzy váhy použijeme jako počáteční odhad *w0* třetí význačné hodnoty fuzzy vah a při hledání třetí význačné hodnoty fuzzy váhy použijeme jako odhad *w0* naopak první význačné hodnoty fuzzy vah.

Pro ulehčení práce jsem v Matlabu vytvořila následující algoritmus, který ze zadané fuzzy matice párových porovnávání vypočítá fuzzy váhy všech kritérií.

Algoritmus 3.4 (Algoritmus pro výpočet fuzzy vah pomocí funkce *fmincon*).
Vstupem do algoritmu je fuzzy matice párových porovnávání M typu n x n, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla zadaná svými třemi význačnými hodnotami. Matice může být zadána například ve tvaru

$$M(:, :, 1) = [1 \ 1 \ 7; 1/5 \ 1 \ 5; 1/9 \ 1/9 \ 1]$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1]$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 5 \ 9; 1 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/5 \ 1],$$

příčemž matice $M(:, :, 1)$ je tvořena prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel, matice $M(:, :, 2)$ je tvořena druhými význačnými hodnotami a matice $M(:, :, 3)$ je tvořena třetími význačnými hodnotami. Výstupem je matice V typu $n \times 3$, kde v j -tém řádku je fuzzy váha v_j určená svými třemi význačnými hodnotami.

Algoritmus je tvořen funkcemi $algNFV$, $algL$ a $algP$. Funkce $algNFV$ ze zadané fuzzy matice párových porovnávání sestaví vektory lb a ub , což jsou vektory dolních resp. horních hranic, kterých mohou proměnné z minimalizované funkce nabývat. Vektor lb je tedy tvořen prvními význačnými hodnotami fuzzy čísel nad hlavní diagonálou fuzzy matice párových porovnávání a vektor ub je tvořen třetími význačnými hodnotami těchto fuzzy čísel. Dále je v tomto algoritmu určen počáteční vektor w_0 . Pro výpočet prvních význačných hodnot fuzzy vah je počáteční vektor w_0 roven vektoru horních hranic ub . Pro výpočet třetích význačných hodnot fuzzy vah je počáteční vektor w_0 roven vektoru dolních hranic lb .

```
function []=algNFV(M)
global n
global ind
n=size(M,1);
k=1;
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        lb(k)=M(i,j,1);
        ub(k)=M(i,j,3);
        k=k+1;
    end
end
end
for i=1:n
```

```

        m(i)=(prod(M(i, :, 2)))^(1/6)
    end
    for ind=1:n
        w0=ub;
        [x,fval]=fmincon(@algL,w0,[],[],[],[],lb,ub);
        fuzzy_vahy(ind,1)=fval;
        w0=lb;
        [x,fval]=fmincon(@algP,w0,[],[],[],[],lb,ub);
        fuzzy_vahy(ind,3)=-fval;
        fuzzy_vahy(ind,2)=m(ind)/sum(m);
    end
    fuzzy_vahy

```

Funkce algNFV poté volá funkci algL pro výpočet první význačné hodnoty příslušné fuzzy váhy a funkci algP pro výpočet třetí význačné hodnoty příslušné fuzzy váhy.

Ve funkcích algL a algP je vygenerována a poté minimalizována funkce pro nalezení první respektive třetí význačné hodnoty příslušné fuzzy váhy.

```

function algL = myfun(w)
    global n
    global ind
    D=ones(1,n);
    H=ones(1,n);
    l=1;
    m=1;
    D(2)=1/w(1);
    for i=3:n
        s=i-1;
        D(i)=1/w(s);
        for k=2:i-1
            s=s+n-k;

```



```

        D(i)=D(i)/w(s);
    end
end
for i=1:n
    for k=i+1:n
        H(i)=H(i)*w(m);
        m=m+1;
    end
end
for i=1:n
    gpr(i)=(D(i)*H(i))^(1/n);
end
fce=gpr(ind)/sum(gpr);
algL=fce;

function algP = myfun(w)
global n
global ind
D=ones(1,n);
H=ones(1,n);
l=1;
m=1;
D(2)=1/w(1);
for i=3:n
    s=i-1;
    D(i)=1/w(s);
    for k=2:i-1
        s=s+n-k;
        D(i)=D(i)/w(s);
    end
end
end

```

```

for i=1:n
    for k=i+1:n
        H(i)=H(i)*w(m);
        m=m+1;
    end
end
for i=1:n
    gpr(i)=(D(i)*H(i))^(1/n);
end
fce=gpr(ind)/sum(gpr);
algP=-fce;

```

▽

V následujícím příkladu si ukážeme výpočet fuzzy vah pomocí všech výše uvedených metod.

Příklad 3.3. *Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání kritérií ve tvaru*

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (2, 3, 4) & (8, 9, 9) \\ (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) & (1, 1, 1) & (6, 7, 8) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}) & (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Nyní postupně vypočteme fuzzy váhy pomocí všech výše uvedených metod a výsledky vzájemně porovnáme.

a) *Výpočet fuzzy vah pomocí vzorce (3.9):*

Nejprve vypočítáme řádkové geometrické průměry podle vzorce (3.8):

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= (2.5198, 3.0000, 3.3019), \\ \tilde{m}_2 &= (1.1447, 1.3264, 1.5874), \\ \tilde{m}_3 &= (0.2404, 0.2513, 0.2752). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Fuzzy váhy vypočtené podle vzorce (3.9) pak vyjdou

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= (0.4879, 0.6554, 0.8456), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2217, 0.2897, 0.4065), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0465, 0.0549, 0.0705).\end{aligned}\tag{3.25}$$

V tomto případě vidíme, že pro výsledné váhy platí $\tilde{v}_i \in \mathcal{F}_n(\langle 0, 1 \rangle)$. Jak jsme si ale ukázali výše, nemusí tomu tak být vždy.

b) Výpočet fuzzy vah pomocí vzorce (3.11):

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= (0.5750, 0.6554, 0.7045), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2424, 0.2897, 0.3651), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0469, 0.0549, 0.0698).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Tyto fuzzy váhy mají menší neurčitost než fuzzy váhy (3.25).

c) Výpočet fuzzy vah pomocí algoritmu 3.3:

Vstupem do algoritmu bude matice M zadaná ve tvaru

$$\begin{aligned}M(:, :, 1) &= [1 \ 2 \ 8; 1/4 \ 1 \ 6; 1/9 \ 1/8 \ 1]; \\ M(:, :, 2) &= [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1]; \\ M(:, :, 3) &= [1 \ 4 \ 9; 1/2 \ 1 \ 8; 1/8 \ 1/6 \ 1];\end{aligned}$$

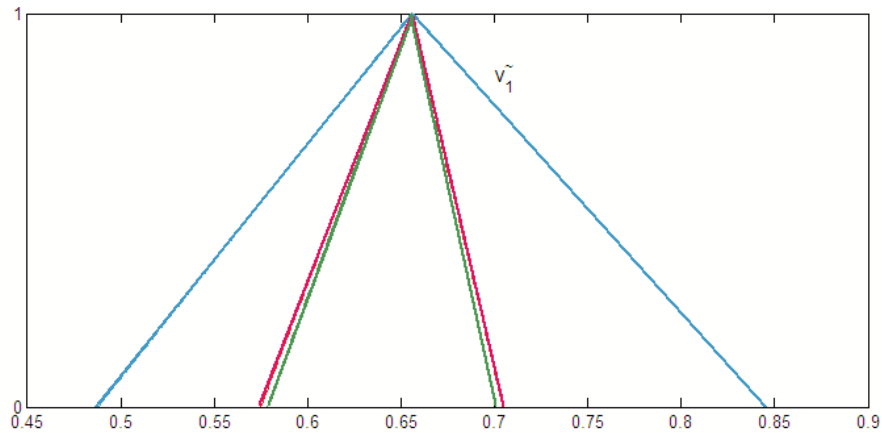
algoritmus pak spustíme příkazem

FuzzyVahy(M).

Výstupem budou fuzzy váhy ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= (0.5783, 0.6554, 0.7009), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2430, 0.2897, 0.3643), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0501, 0.0549, 0.0649).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Tyto fuzzy váhy mají ještě menší neurčitost než fuzzy váhy (3.26).



Obrázek 8: Fuzzy váhy vypočtené podle čtyř různých postupů

d) Výpočet fuzzy vah pomocí algoritmu 3.4:

Vstupem do algoritmu bude matice M zadaná ve tvaru

$$M(:, :, 1) = [1 \ 2 \ 8; 1/4 \ 1 \ 6; 1/9 \ 1/8 \ 1];$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1];$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 4 \ 9; 1/2 \ 1 \ 8; 1/8 \ 1/6 \ 1];$$

algoritmus pak spustíme příkazem

`algNFV(M)`.

Výstupem budou fuzzy váhy opět ve tvaru (3.27).

Fuzzy váha prvního kritéria vypočtená podle všech čtyř postupů je pro lepší ilustraci znázorněna na obrázku 8. Modře je zde zakreslena fuzzy váha vypočtená podle vzorce (3.9), červeně fuzzy váha vypočtená podle vzorce (3.11) a zeleně fuzzy váha vypočtená pomocí algoritmů 3.3 a 3.4.

△

Poznámka 3.3. Z výsledků předchozího příkladu vidíme, že fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmů 3.3 a 3.4 mají nejmenší neurčitost. Tento výsledek jsme očekávali, neboť jak bylo uvedeno už v úvodu této podkapitoly, vzorce (3.9) a (3.11)

vůbec nezohledňují vztahy, které ve fuzzy matici párového porovnávání platí. Tudiž výsledné fuzzy váhy pak musí být nutně více neurčité než skutečné fuzzy váhy.

V následujícím příkladu už se zaměříme jen na výpočty fuzzy vah pomocí algoritmů 3.3 a 3.4. Bude nás zajímat, jestli i pro jiné fuzzy matice párových porovnávání dostaneme pomocí obou algoritmů stejné výsledky, nebo jestli shoda výsledků v předchozím příkladě byla jen náhodná.

Příklad 3.4. *Pro různé fuzzy matice párových porovnávání kritérií vypočteme fuzzy váhy pomocí algoritmů 3.3 a 3.4 a výsledky mezi sebou porovnáme. Podíváme se také, jak změna počátečního odhadu w_0 v algoritmu 3.4 ovlivní výsledek.*

a) Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání ve tvaru

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (2, 3, 4) & (8, 9, 9) & (8, 9, 9) \\ (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) & (1, 1, 1) & (6, 7, 8) & (6, 7, 8) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}) & (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}) & (1, 1, 1) & (\frac{1}{2}, 1, 2) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}) & (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}) & (\frac{1}{2}, 1, 2) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmu 3.3 jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (0.5207, 0.5921, 0.6321), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2576, 0.3015, 0.3688), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0416, 0.0532, 0.0729), \\ \tilde{v}_4 &= (0.0416, 0.0532, 0.0729). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmu 3.4, kdy počáteční odhad w_0 je roven horní hranici ub při výpočtu prvních význačných hodnot fuzzy vah a dolní hranici lb při výpočtu třetích význačných hodnot, je tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (0.5207, 0.5921, 0.6320), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2576, 0.3015, 0.3688), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0416, 0.0532, 0.0729), \\ \tilde{v}_4 &= (0.0416, 0.0532, 0.0729). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pokud počáteční odhad w_0 zvolíme jako prostřední význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel, dostaneme použitím algoritmu 3.4 fuzzy váhy ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= (0.5216, 0.5921, 0.6321), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2580, 0.3015, 0.3688), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0423, 0.0532, 0.0729), \\ \tilde{v}_4 &= (0.0423, 0.0532, 0.0729).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Fuzzy váhy (3.30) se od fuzzy vah (3.29) liší jen minimálně, a to v třetí význačné hodnotě fuzzy váhy \tilde{v}_1 . Hodnota vypočtená pomocí funkce f_{\mincon} je o jednu tisícinu menší než hodnota vypočtená z nějaké konkrétní kombinace význačných hodnot fuzzy čísel. Fuzzy váhy (3.31) se už od fuzzy vah (3.29) liší podstatně více. První význačné hodnoty vypočtené pomocí algoritmu 3.4 jsou u všech fuzzy vah větší než první význačné hodnoty fuzzy vah (3.29).

b) Nyní uvažujme fuzzy matici párových porovnávání ve tvaru

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (1, 3, 5) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (1, 1, 1) & (3, 5, 7) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (1, 1, 1) & (1, 3, 5) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (1, 1, 1) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (1, 1, 1) & (3, 5, 7) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}.\tag{3.32}$$

Fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmu 3.3 jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= (0.3327, 0.4601, 0.5371), \\ \tilde{v}_2 &= (0.2220, 0.3016, 0.4145), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0807, 0.1223, 0.1806), \\ \tilde{v}_4 &= (0.0509, 0.0669, 0.1110), \\ \tilde{v}_5 &= (0.0254, 0.0321, 0.0496), \\ \tilde{v}_6 &= (0.0146, 0.0170, 0.0260).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmu 3.4, kdy počáteční odhad w_0 je roven horní hranici ub při výpočtu prvních význačných hodnot fuzzy vah a dolní hranici lb při výpočtu třetích význačných hodnot, je tvaru

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_1 &= (0.3327, 0.4601, 0.5371), \\
 \tilde{v}_2 &= (0.2220, 0.3016, 0.4145), \\
 \tilde{v}_3 &= (0.0807, 0.1223, 0.1806), \\
 \tilde{v}_4 &= (0.0509, 0.0669, 0.1110), \\
 \tilde{v}_5 &= (0.0292, 0.0321, 0.0496), \\
 \tilde{v}_6 &= (0.0146, 0.0170, 0.0260).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Pokud počáteční odhad w_0 zvolíme jako prostřední význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel, dostaneme použitím algoritmu 3.4 fuzzy váhy ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_1 &= (0.3341, 0.4601, 0.5367), \\
 \tilde{v}_2 &= (0.2244, 0.3016, 0.4141), \\
 \tilde{v}_3 &= (0.0818, 0.1223, 0.1796), \\
 \tilde{v}_4 &= (0.0525, 0.0669, 0.1100), \\
 \tilde{v}_5 &= (0.0265, 0.0321, 0.0453), \\
 \tilde{v}_6 &= (0.0170, 0.0170, 0.0170).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Z výsledků opět vidíme, že fuzzy váhy vypočtené pomocí algoritmu 3.3 jsou nejvíce neurčité. Fuzzy váhy (3.34) se od fuzzy vah (3.33) liší jen v první význačné hodnotě fuzzy váhy \tilde{v}_5 . Fuzzy váhy (3.35) se už od fuzzy vah (3.33) liší podstatně více. Tyto fuzzy váhy jsou mnohem méně neurčité a u fuzzy váhy \tilde{v}_6 se dokonce všechny její význačné hodnoty rovnají.

△

Na základě předchozího příkladu se algoritmus 3.3 jeví jako přesnější, v obou případech totiž určil fuzzy váhy více neurčité než algoritmus 3.4. Vypadá to tedy, že význačné hodnoty fuzzy vah bychom opravdu vždy mohli dostat nějakou kombinací význačných hodnot fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání

kritérií. Nepřesnost výsledků algoritmu 3.4 je způsobena tím, že optimalizovaná funkce je poměrně dosti složitá a s rostoucím počtem kritérií rychle narůstá počet proměnných, přes které minimalizujeme. Z toho důvodu bychom tedy k výpočtům fuzzy vah měli raději používat vzorce (3.15) a (3.16), tj. algoritmus 3.3. Jak už ale bylo uvedeno výše, při hledání řešení pomocí tohoto algoritmu musíme pro fuzzy matici $n \times n$ prohledat celkem $\binom{n-1}{2}$ matic, což je při větších rozměrech fuzzy matice časově velmi náročné. Na notebooku HP ProBook 4510s s procesorem Pentium Dual-Core T4400 2.2 GHz a s operační pamětí 2 GB, na kterém byly všechny výpočty prováděny, trval výpočet fuzzy vah pro 6 kritérií necelých 43 vteřin, pro 7 kritérií už to byly více jak 3 hodiny. Pro více kritérií bychom se už výsledku nedočkali. Proto je tento algoritmus použitelný pro maximálně 7 kritérií. Pro více kritérií pak dáme přednost algoritmu 3.4, který sice nebude tak přesný, ale výsledek dostaneme okamžitě (pro 6 kritérií trvá výpočet přibližně 1,7 vteřin, pro 7 kritérií je to přibližně 2,4 vteřin).

3.3.3 Fuzzy váhy a oslabená podmínka konzistence

Nyní se ještě vrátíme k oslabené podmínce konzistence (3.6). Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání kritérií ve tvaru

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{3} & \tilde{9} \\ \frac{1}{3} & 1 & \tilde{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (1, 3, 5) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (1, 1, 1) & (5, 7, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (1, 1, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Tato matice podmínku (3.6) splňuje. Rozhodovatel podle matice tvrdí, že kritérium \mathcal{K}_1 je slabě významnější než kritérium \mathcal{K}_2 a kritérium \mathcal{K}_2 je prokazatelně významnější než kritérium \mathcal{K}_3 . Pokud ale například z fuzzy čísla \tilde{s}_{12} zvolíme pevně třetí význačnou hodnotu 5 a z fuzzy čísla \tilde{s}_{23} třetí význačnou hodnotu 9, rozhodovatel pak nejspíš stupeň významnosti kritéria \mathcal{K}_1 před kritériem \mathcal{K}_2 nevyjádří například hodnotou 7, což je první význačná hodnota fuzzy čísla \tilde{s}_{13} . Dalo by se čekat, že by tento stupeň významnosti podle svého předchozího tvrzení ohodnotil číslem 9.

To tedy znamená, že při dalším výpočtu fuzzy vah kritérií nemá smysl uvažovat matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n$ vzniklé takovou kombinací hodnot z nosičů jednotlivých fuzzy čísel fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} , pro kterou není splněna podmínka

$$s_{ik} \geq \max \{s_{ij}, s_{jk}\}, \quad \text{pro každé } i, j, k : \mathcal{K}_i \text{ je významnější než } \mathcal{K}_j \\ \text{a } \mathcal{K}_j \text{ je významnější než } \mathcal{K}_k. \quad (3.37)$$

Pokud tedy nějaká fuzzy matice párových porovnávání kritérií \tilde{S} splňuje podmínku konzistence (3.6), budeme dále pro výpočet výsledných fuzzy vah kritérií uvažovat jen takové kombinace prvků z nosičů fuzzy čísel této fuzzy matice párových porovnávání, pro které je splněna podmínka (3.37). Zakomponovat tuto podmínku do algoritmu 3.4 bylo velmi komplikované, budeme se muset tedy omezit jen na modifikaci algoritmu 3.3. To tedy znamená, že při výpočtu fuzzy vah z fuzzy matice párových porovnávání budeme používat jen ty matice sestavené z různých kombinací význačných hodnot jednotlivých fuzzy čísel této fuzzy matice párových porovnávání, které splňují podmínku (3.37).

Pro výpočet fuzzy vah tímto postupem jsem vytvořila následující algoritmus.

Algoritmus 3.5 (Algoritmus pro výpočet fuzzy vah při zachování konzistence).

Vstupem do algoritmu je fuzzy matice M typu $n \times n$, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla zadaná svými třemi význačnými hodnotami. Matice může být zadaná například takto:

$$M(:, :, 1) = [1 \ 1 \ 7; 1/5 \ 1 \ 5; 1/9 \ 1/9 \ 1] \\ M(:, :, 2) = [1 \ 3 \ 9; 1/3 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/7 \ 1] \\ M(:, :, 3) = [1 \ 5 \ 9; 1 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/5 \ 1],$$

přičemž matice $M(:, :, 1)$ je tvořena prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel, matice $M(:, :, 2)$ je tvořena druhými význačnými hodnotami a matice $M(:, :, 3)$ je tvořena třetími význačnými hodnotami. Výstupem je matice v typu

$n \times 3$, kde v j -tém řádku je fuzzy váha v_j určená svými třemi význačnými hodnotami.

Algoritmus je tvořen funkcemi *Fvoslab*, *KonstrMatice* a *VlastniVyp*. Funkce *Fvoslab* stejně jako u algoritmu 3.3 pro výpočet jednotlivých krajních význačných hodnot každé fuzzy váhy ve fuzzy matici párových porovnávání M fixuje význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel a poté volá funkci *KonstrMatice*. Poté jsou zde vypočteny prostřední význačné hodnoty fuzzy vah kritérií a výstupem je matice fuzzy vah kritérií.

```
function []=Fvoslab(M)
S=size(M);
%Ověření, zda je vstup správně
if size(S,2)~=3 | size(M,1)~=size(M,2) |size(M,3)~=3
    disp('Vstupní matice má špatné rozměry. Zadejte ji znovu.')
else
n=size(M,1);
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
for pevnyRadek=1:n
    pevnyRadek;
    MINIMUM=1;
    MAXIMUM=0;
    for index=1:3
        if index~=2%vynechat index 2
            pole=ones(n,n,1);
            for sloupec=1:n
                pole(pevnyRadek,sloupec,1)=M(pevnyRadek,sloupec,index);
                pole(sloupec,pevnyRadek,1)=1/M(pevnyRadek,sloupec,index);
            end
            KonstrMatice(pole,1,1,2,index,M,pevnyRadek)
        end%if index~=2
    end
end
```

```

end
vysledne_vahy(pevnyRadek,1)=MINIMUM;
vysledne_vahy(pevnyRadek,3)=MAXIMUM;
delitel=0;
for u=1:n
    delitel=delitel+(prod(M(u,:,2)))^(1/n);
end
vysledne_vahy(pevnyRadek,2)=
=(prod(M(pevnyRadek,:,2)))^(1/n)/delitel;
end%for pevnyRadek=1:n
vysledne_vahy
end%if

```

Funkce KonstrMatice z předpřipravené matice vytvoří kombinováním význačných hodnot fuzzy čísel na zbylých pozicích všechny možné matice a pro tyto matice pak volá funkci VlastniVyp.

```

function []=KonstrMatice(pracMat,radek,sloupec,index,M,pevnyRadek)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
n=size(pracMat);
jeList = 0;
if radek==pevnyRadek & radek ~= n-1
    radek=radek+1;
    sloupec=radek+1;
end
if sloupec==pevnyRadek
    if sloupec==n
        radek=radek+1;
        sloupec=radek+1;
    else

```

```

        sloupec=sloupec+1;
    end
end
if radek<=n-1 & sloupec<=n
    novyradek=radek;
    novysloupec=sloupec;
    if sloupec+1>n
        if radek+1>n-1
            %konec a počítáme váhy
            %zavoláme 3 výpočty (3 význačné hodnoty)
            if (radek ~= pevnyRadek & sloupec ~= pevnyRadek)
                pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
                pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);
                VlastniVyp(pracMat,index,pevnyRadek)
                pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,2);
                pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,2);
                VlastniVyp(pracMat,index,pevnyRadek)
                pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,3);
                pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,3);
                VlastniVyp(pracMat,index,pevnyRadek)
            else
                VlastniVyp(pracMat,index,pevnyRadek);
            end
            jeList = 1;
        else
            novyradek=radek+1;
            novysloupec=novyradek+1;
        end
    else
        novysloupec=sloupec+1;
    end
end

```

```

end

if jeList == 0 %nemáme všechny matice, generujeme další
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,1);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,1);
    KonstrMat(pracMat,novyradek,novysloupec,index,M,pevnyRadek);
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,2);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,2);
    KonstrMat(pracMat,novyradek,novysloupec,index,M,pevnyRadek);
    pracMat(radek,sloupec)=M(radek,sloupec,3);
    pracMat(sloupec,radek)=1/M(radek,sloupec,3);
    KonstrMat(pracMat,novyradek,novysloupec,index,M,pevnyRadek);
end %if jeList
end%if

```

Funkce VlastniVyp pro zadanou matici nejpve ověří splnění podmínky (3.37). Pokud tuto podmínku matice nesplňuje, je z dalšího výpočtu vyřazena. Pokud matice podmínku splňuje, jsou vypočteny geometrické průměry všech řádků a poté se znormuje geometrický průměr řádku, který odpovídá určované fuzzy váze.

```

function []=VlastniVyp(list,index,radek)
global MINIMUM;
global MAXIMUM;
n=size(list,1);
%hledám matice, pro které není splněna podmínka s maximem
ind=0;
p=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        for k=1:n
            if list(i,j)>1 & list(j,k)>1

```

```

        if list(i,k)<max(list(i,j),list(j,k))
            ind=1;
            p=p+1;
        end
    end
end
end
end
end
if ind==0 %beru jen matice, které splňují podmínku s maximem
    delitel=0;
    for u=1:n
        delitel=delitel+(prod(list(u,:)))^(1/n);
    end
    vaha=(prod(list(radek,:)))^(1/n)/delitel;%vypočtená váha
    if index==1
        if vaha<MINIMUM
            MINIMUM=vaha;
        end
    end%index==1
    if index==3
        if vaha>MAXIMUM
            MAXIMUM=vaha;
        end
    end%index==3
end%ind==0

```

▽

Fuzzy váhy vypočtené pomocí tohoto algoritmu pak musí být jistě méně (případně stejně) neurčité než fuzzy váhy vypočtené podle algoritmu 3.3, což si ukážeme v následujícím příkladu. Problém ale je, že tento algoritmus je použitelný nejvýše pro 7 kritérií či variant, protože jeho časová náročnost je ještě o něco větší

jak u algoritmu 3.3. Pro 6 kritérií trvá výpočet přibližně 49 vteřin, pro 7 kritérií jsou to téměř 4 hodiny. Pro větší počty kritérií či variant tedy budeme muset použít algoritmus 3.4, který oslabenou podmínku konzistence nezohledňuje.

Příklad 3.5. *Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání kritérií \tilde{S} ve tvaru*

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & 1 & (7, 9, 9) \\ (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Nyní vypočítáme fuzzy váhy kritérií pomocí algoritmů 3.3 a 3.5. Vstupem do obou algoritmů bude matice M zadaná ve tvaru

$$M(:, :, 1) = [1 \ 7 \ 7; 1/9 \ 1 \ 7; 1/9 \ 1/9 \ 1];$$

$$M(:, :, 2) = [1 \ 9 \ 9; 1/9 \ 1 \ 9; 1/9 \ 1/9 \ 1];$$

$$M(:, :, 3) = [1 \ 9 \ 9; 1/7 \ 1 \ 9; 1/7 \ 1/7 \ 1];$$

Algoritmy pak spustíme příkazem

`FuzzyVahy(M)`

respektive

`Fvoslab(M)`.

Výstupem algoritmu 3.3 budou fuzzy váhy ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (0.7322, 0.7785, 0.7870), \\ \tilde{v}_2 &= (0.1673, 0.1799, 0.2176), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0416, 0.0416, 0.0554). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Výstupem algoritmu 3.5 budou fuzzy váhy ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (0.7419, 0.7785, 0.7870), \\ \tilde{v}_2 &= (0.1673, 0.1799, 0.2053), \\ \tilde{v}_3 &= (0.0416, 0.0416, 0.0554). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Z těchto výsledků vidíme, že opravdu fuzzy váhy vypočtené podle algoritmu 3.5 jsou méně nebo případně stejně neurčité jako fuzzy váhy vypočtené podle algoritmu 3.3.

△

Nyní už tedy máme nástroje pro to, abychom mohli určit fuzzy váhy jednotlivých kritérií vzhledem k celkovému cíli rozhodování i fuzzy hodnocení variant vzhledem k jednotlivým kritériím. Z konstrukce fuzzy vah respektive dílčích fuzzy hodnocení variant je navíc zřejmé, že budou splňovat nerovnosti (2.13) a tedy tvoří normované fuzzy váhy.

Cílem rozhodovacího problému je ale zvolit jednu optimální variantu. K tomu je potřeba určit fuzzy hodnocení každé varianty vzhledem k celkovému cíli rozhodování. To provedeme obdobně jako u klasického analytického hierarchického procesu, jen s tím rozdílem, že už nepracujeme s reálnými čísly, ale s fuzzy čísly.

3.4 Hodnocení variant vzhledem k celkovému cíli a výběr nejlepších varianty

V této kapitole zagregujeme dílčí fuzzy hodnocení varianty vzhledem k jednotlivým kritériím do celkového fuzzy hodnocení varianty vzhledem k cíli rozhodování.

V kapitole 1 se agregace prováděla váženým průměrem dílčích hodnocení varianty vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami byly normované váhy kritérií vzhledem k cíli rozhodování. Zde tento vzorec fuzzifikujeme.

Na začátku kapitoly opět uvedeme vzorec běžně používaný v literaturách. Ukážeme, že výpočet celkového fuzzy hodnocení variant pomocí tohoto vzorce není správný, a navrhneme vhodnější postupy výpočtu.

Uvažujme nyní m variant, které hodnotíme podle n kritérií. Fuzzy váhy kritérií vzhledem k celkovému cíli označme $\tilde{v}_j, j = 1, \dots, n$, a fuzzy hodnocení i -té varianty vzhledem k j -tému kritériu $\tilde{h}_i^j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Celkové fuzzy hodnocení i -té varianty vzhledem k celkovému cíli budeme značit \tilde{h}_i . Analogicky jako v kapitole 1 budeme chtít celkové fuzzy hodnocení i -té varianty počítat jako

vážený průměr fuzzy hodnocení varianty vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami jsou normované fuzzy váhy těchto kritérií vzhledem k cíli rozhodování, tj.

$$\tilde{h}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j \tilde{h}_i^j. \quad (3.41)$$

Nyní se podíváme na možnosti, jak celkové fuzzy hodnocení i -té varianty vypočítat. Celkové fuzzy hodnocení varianty budeme opět aproximovat trojúhelníkovým fuzzy číslem. Stačí tedy určit jen jeho tři význačné hodnoty. V článkách [4] a [7] autoři celkové fuzzy hodnocení varianty počítají podle vzorců

$$\begin{aligned} h_{i1} &= \sum_{j=1}^n v_{j1} h_{i1}^j, \\ h_{i2} &= \sum_{j=1}^n v_{j2} h_{i2}^j, \\ h_{i3} &= \sum_{j=1}^n v_{j3} h_{i3}^j, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kde $\tilde{v}_j = (v_{j1}, v_{j2}, v_{j3})$, $\tilde{h}_i^j = (h_{i1}^j, h_{i2}^j, h_{i3}^j)$, $\tilde{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$. Tento postup výpočtu celkového fuzzy hodnocení varianty ale není správný. Především se nejedná o vážený průměr, neboť obecně součet prvních význačných hodnot fuzzy vah \tilde{v}_i , $i = 1, \dots, n$, ani součet jejich třetích význačných hodnot není roven jedné.

Výpočet celkového fuzzy hodnocení varianty je potřeba počítat podle definice fuzzy váženého průměru, tj. podle definice 2.20. Pro výpočet můžeme použít postup uvedený v poznámce 2.6. Jelikož počítáme pouze význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty, postup výpočtu se nám ještě zjednoduší. Celkové fuzzy hodnocení můžeme pro i -tou variantu počítat takto:

- Pro výpočet první význačné hodnoty h_{i1} uvažujme permutaci $\{(j)\}_{i=1}^n$ takovou, že $h_{i1}^{(1)} \leq h_{i1}^{(2)} \leq \dots \leq h_{i1}^{(n)}$. Pak pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme

$$v_{(k)} := 1 - \sum_{j=1}^{k-1} v_{(j)3} - \sum_{j=k+1}^n v_{(j)1}. \quad (3.43)$$

Nechť $k^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ je takové, že platí $v_{(k^*)1} \leq v_{(k^*)} \leq v_{(k^*)3}$. Pak

$$h_{i1} = \sum_{j=1}^{k^*-1} v_{(j)3} h_{i1}^{(j)} + v_{(k^*)} h_{i1}^{(k^*)} + \sum_{j=k^*+1}^n v_{(j)1} h_{i1}^{(j)}. \quad (3.44)$$

- Pro výpočet třetí význačné hodnoty h_{i3} uvažujme permutaci $\{(j)\}_{i=1}^n$ takovou, že $h_{i3}^{(1)} \geq h_{i3}^{(2)} \geq \dots \geq h_{i3}^{(n)}$. Pak pro $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme

$$v_{(l)} := 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_{(j)3} - \sum_{j=l+1}^n v_{(j)1}. \quad (3.45)$$

Nechť $l^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ je takové, že platí $v_{(l^*)1} \leq v_{(l^*)} \leq v_{(l^*)3}$. Pak

$$h_{i3} = \sum_{j=1}^{l^*-1} v_{(j)3} h_{i3}^{(j)} + v_{(l^*)} h_{i3}^{(l^*)} + \sum_{j=l^*+1}^n v_{(j)1} h_{i3}^{(j)}. \quad (3.46)$$

- Druhou význačnou hodnotu h_{i2} budeme počítat podle vzorce

$$h_{i2} = \sum_{j=1}^n v_{j2} h_{i2}^j. \quad (3.47)$$

Pro usnadnění výpočtu celkového fuzzy hodnocení varianty fuzzy váženým průměrem za použití vzorců (3.43) až (3.47) jsem vytvořila následující algoritmus.

Algoritmus 3.6 (Algoritmus pro výpočet celkového fuzzy hodnocení varianty pomocí fuzzy váženého průměru). *Algoritmus má dva vstupy. Prvním je matice V typu $n \times 3$, druhým je matice H typu $n \times 3$. Matice V je matice fuzzy vah kritérií, kde v i -tém řádku této matice je fuzzy váha i -tého kritéria. Matice H je matice důležitých fuzzy hodnocení varianty podle kritérií, kde v i -tém řádku této matice je fuzzy hodnocení varianty podle i -tého kritéria. Výstupem algoritmu je vektor tří význačných hodnot celkového fuzzy hodnocení varianty.*

```
function []=FVazenyPrum(v,h)
n=size(v,1);
%Ověření, zda je vstup správně
if size(v,2)~=size(h,2) | size(v,1)~=size(h,1) | size(v,2)~=3
    disp('Vstup je špatne. Zadejte jej znovu.')
else
```

```

% výpočet první význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty
% 1) uspořádání dílčích fuzzy hodnocení varianty od nejmenší po
% největší podle 1. význ. hodnot a uspořádání příslušných fuzzy vah
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        if h(i,1)>h(j,1)
            W=h(i,:);
            WW=v(i,:);
            h(i,:)=h(j,:);
            v(i,:)=v(j,:);
            h(j,:)=W;
            v(j,:)=WW;
        end
    end
end
% 2) výpočet hodnot V(k)...Q(k)
for k=1:n
    P=0; L=0;
    for j=1:k-1
        P=P+v(j,3);
    end
    for j=k+1:n
        L=L+v(j,1);
    end
    Q(k)=1-P-L;
end
% c) nalezení k*...kk
for k=1:n
    if v(k,1)<Q(k) & Q(k)<v(k,3)
        kk=k;
    end
end

```

```

        end
    end
    % d) výpočet první význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení
    H1L=0; H1P=0;
    for i=1:kk-1
        H1P=H1P+v(i,3)*h(i,1);
    end
    for i=kk+1:n
        H1L=H1L+v(i,1)*h(i,1);
    end
    vysledne_fuzzy_hodnoceni_varianty(1,1)=Q(kk)*h(kk,1)+H1L+H1P;

    % výpočet třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty
    % 1)uspořádání dílčích fuzzy hodnocení varianty od největší po
    % nejmenší podle 3.význ. hodnot a uspořádání příslušných fuzzy vah
    for i=1:n-1
        for j=i+1:n
            if h(i,3)<h(j,3)
                W=h(i,:);
                WW=v(i,:);
                h(i,:)=h(j,:);
                v(i,:)=v(j,:);
                h(j,:)=W;
                v(j,:)=WW;
            end
        end
    end
    end
    % 2) výpočet hodnot v(k)...Q(k)
    for k=1:n
        P=0; L=0;

```

```

    for j=1:k-1
        P=P+v(j,3);
    end
    for j=k+1:n
        L=L+v(j,1);
    end
    Q(k)=1-P-L;
end
% c) nalezení k*...kk
for k=1:n
    if v(k,1)<Q(k) & Q(k)<v(k,3)
        kk=k;
    end
end
% d) výpočet třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení
H3L=0; H3P=0;
for i=1:kk-1
    H3L=H3L+v(i,3)*h(i,3);
end
for i=kk+1:n
    H3P=H3P+v(i,1)*h(i,3);
end
vysledne_fuzzy_hodnoceni_varianty(1,3)=Q(kk)*h(kk,3)+H3L+H3P;
vysledne_fuzzy_hodnoceni_varianty(1,2)=v(:,2)'\*h(:,2)
end

```

▽

Jak si ale ukážeme dále, ani výpočet celkového fuzzy hodnocení variant podle vzorců (3.43) až (3.46) není úplně ideální. Při výpočtu krajních význačných hodnot fuzzy hodnocení varianty pomocí vzorců (3.43) až (3.46) jsme vůbec nezohlednili vztahy, které ve fuzzy analytickém hierarchickém procesu platí. Jedná

se především o vztahy mezi jednotlivými fuzzy čísly z fuzzy matice párových porovnávání kritérií - víme, že musí být zachována reciprocita.

Vraťme se nyní ke kapitole, ve které jsme se zabývali výpočtem fuzzy vah kritérií. Uvažujme fuzzy matici párových porovnávání kritérií $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ a libovolná dvě kritéria \mathcal{K}_i a \mathcal{K}_j . Pro lepší názornost uvažujme výpočet význačných hodnot fuzzy vah pomocí vzorců (3.15) a (3.16).

Jednotlivé význačné hodnoty výsledných fuzzy vah kritérií jsme určovali jen z reciprokových matic. Při hledání první význačné hodnoty v_{i1} fuzzy váhy \tilde{v}_i jsme zafixovali první význačné hodnoty fuzzy čísel v i -tém řádku fuzzy matice párových porovnávání \tilde{S} , a protože musí být zachována reciprokost, zafixovali jsme i třetí význačné hodnoty fuzzy čísel v i -tém sloupci fuzzy matice \tilde{S} . Stejně tak při hledání první význačné hodnoty v_{j1} fuzzy váhy \tilde{v}_j jsme zafixovali první význačné hodnoty fuzzy čísel v j -tém řádku fuzzy matice \tilde{S} a třetí význačné hodnoty fuzzy čísel v j -tém sloupci matice \tilde{S} . Při výpočtu první význačné hodnoty fuzzy váhy \tilde{v}_i tedy volíme na pozici (i, j) první význačnou hodnotu fuzzy čísla \tilde{s}_{ij} a na pozici (j, i) třetí význačnou hodnotu fuzzy čísla \tilde{s}_{ji} . Při výpočtu první význačné hodnoty fuzzy váhy \tilde{v}_j volíme na pozici (j, i) první význačnou hodnotu fuzzy čísla \tilde{s}_{ji} a na pozici (i, j) třetí význačnou hodnotu fuzzy čísla \tilde{s}_{ij} .

Pokud tedy ve výpočtu první či třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty budou použity první význačné hodnoty aspoň dvou fuzzy vah, nastává výše popsáný problém. Obdobný problém nastává i při použití třetích význačných hodnot fuzzy vah.

Tento problém se dá vyřešit tak, že při výpočtu význačných hodnot celkového fuzzy hodnocení varianty \tilde{h}_i nebudeme používat normované fuzzy váhy jednotlivých kritérií, ale budeme pracovat s geometrickými průměry významností kritérií vzhledem k ostatním. První význačnou hodnotu celkového fuzzy hodnocení varianty budeme hledat jako minimum z váženého průměru prvních význačných hodnot dílčích fuzzy hodnocení varianty vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami budou geometrické průměry významností jednotlivých kritérií vzhledem k ostatním kritériím. Tyto geometrické průměry významností však nebudou ve

váženém průměru zadány přímo, budou to geometrické průměry prvků z nosičů příslušných fuzzy čísel, přitom přes tyto prvky budeme za podmínky zachování recipacity vážený průměr minimalizovat. Analogicky budeme postupovat i při výpočtu třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty. První a třetí význačnou hodnotu celkového fuzzy hodnocení varianty \tilde{h}_i budeme tedy počítat pomocí vzorců

$$h_{i1} = \min \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^* h_{i1}^j} \right)}{\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^*}} ; s_{jk}^* \in \langle s_{jk1}, s_{jk3} \rangle, \right. \\ \left. j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, s_{jk}^* = \frac{1}{s_{kj}^*} \right\}, \quad (3.48)$$

$$h_{i3} = \max \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^* h_{i3}^j} \right)}{\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^*}} ; s_{jk}^* \in \langle s_{jk1}, s_{jk3} \rangle, \right. \\ \left. j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, s_{jk}^* = \frac{1}{s_{kj}^*} \right\}, \quad (3.49)$$

kde $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{jk}\}_{j,k=1}^n$ je fuzzy matice párových porovnávání kritérií vzhledem k celkovému cíli hodnocení, $\tilde{s}_{jk} = (s_{jk1}, s_{jk2}, s_{jk3})$.

Výpočet krajních význačných hodnot celkového fuzzy hodnocení varianty tedy provádíme pomocí optimalizace. Jelikož funkce pro vážený průměr je už velmi komplikovaná, bylo by procházení všech možných kombinací význačných hodnot

fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií nemožné. Proto jsem zde tento přístup zavrhl a zůstala jsem u optimalizační úlohy.

Prostřední význačnou hodnotu celkového fuzzy hodnocení varianty vypočteme jako vážený průměr prostředních význačných hodnot dílčích fuzzy hodnocení varianty vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami budou řádkové geometrické průměry prostředních význačných hodnot jednotlivých fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií. Vzorec pak vypadá takto:

$$h_{i2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk2} h_{i2}^j} \right)}{\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk2}}}. \quad (3.50)$$

Kdybychom chtěli počítat celkové fuzzy hodnocení i -té varianty co nejpřesněji, určili bychom jej jako sjednocení α -řezů, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Přitom krajní hodnoty jednotlivých α -řezů bychom počítali jako minimum, respektive maximum z vážených průměrů levých, respektive pravých krajních hodnot α -řezů fuzzy hodnocení \tilde{h}_i^j i -té varianty vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami by byly geometrické průměry prvků z α -řezů příslušných fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií. Celkové fuzzy hodnocení \tilde{h}_i i -té varianty bychom pak tedy mohli psát ve tvaru $\tilde{h}_i = \{ \langle \underline{h}_i(\alpha), \bar{h}_i(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \}$, kde hodnoty $\underline{h}_i(\alpha)$, $\bar{h}_i(\alpha)$ funkcí \underline{h}_i , \bar{h}_i by se pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ počítaly podle vzorců

$$\left. \begin{aligned}
\bar{h}_i(\alpha) = \min & \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^* h_i^j(\alpha)} \right)}{\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^*}}, s_{jk}^* \in \langle \underline{s}_{jk}(\alpha), \bar{s}_{jk}(\alpha) \rangle, \right. \\
& \left. j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, s_{jk}^* = \frac{1}{s_{kj}^*} \right\},
\end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{h}_i(\alpha) = \max & \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^* \bar{h}_i^j(\alpha)} \right)}{\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n s_{jk}^*}}, s_{jk}^* \in \langle \underline{s}_{jk}(\alpha), \bar{s}_{jk}(\alpha) \rangle, \right. \\
& \left. j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, s_{jk}^* = \frac{1}{s_{kj}^*} \right\},
\end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

kde $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{jk}\}_{j,k=1}^n$, $\tilde{s}_{jk} = \{\langle \underline{s}_{jk}(\alpha), \bar{s}_{jk}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $j, k = 1, \dots, n$ a

$\tilde{h}_i^j = \{\langle \underline{h}_i^j(\alpha), \bar{h}_i^j(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Jak už bylo ale v práci několikrát zmíněno, nelze určit krajní hodnoty všech α -řezů výsledného fuzzy čísla \tilde{h}_i . Museli bychom se tedy opět omezit jen na konečný počet těchto α -řezů a výsledné fuzzy hodnocení \tilde{h}_i i -té varianty by tedy bylo opět jen aproximací skutečného fuzzy hodnocení.

Protože se ale v celé této práci omezujeme jen na trojúhelníková fuzzy čísla, budeme celkové fuzzy hodnocení varianty počítat pomocí vzorců (3.48), (3.49) a (3.50). Výpočet celkového fuzzy hodnocení varianty za použití těchto vzorců

je potřeba provést pomocí výpočetního softwaru. V Matlabu můžeme k výpočtu použít opět funkci *fmincon*. Při výpočtu by však mohl činit problém počet proměnných, přes které minimalizaci provádíme. Při n kritériích máme fuzzy matici párových porovnávání $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{jk}\}_{j,k=1}^n$, kde na hlavní diagonále jsou samé jedničky a pod hlavní diagonálou budou vždy převrácené hodnoty příslušných hodnot nad hlavní diagonálou. Zbývá nám tedy celkem $\binom{n}{2}$ proměnných, přes které minimalizujeme. S narůstajícím počtem kritérií se tedy počet proměnných, přes které se minimalizace provádí, velmi rychle zvyšuje a pro větší úlohy už tento postup výpočtu celkového fuzzy hodnocení pravděpodobně nebude možné použít. V tomto případě bychom mohli použít méně přesný výpočet pomocí vzorců (3.43) až (3.47), které lze použít pro libovolně velký počet kritérií.

Příklad na výpočet celkového fuzzy hodnocení varianty si v této kapitole ukazovat nebudeme. Přesný postup výpočtu i srovnání obou výše uvedených metod výpočtu budou uvedeny v následující kapitole věnované praktické aplikaci fuzzy analytického hierarchického procesu.

Nyní, když umíme určit celková fuzzy hodnocení variant, je potřeba mezi sebou jednotlivé varianty porovnat a zvolit nejlepší vzhledem k cíli hodnocení. Je tedy potřeba mezi sebou porovnat fuzzy hodnocení jednotlivých variant. To můžeme provést metodou porovnání fuzzy čísel pomocí α -řezů. Jak už jsme ale uváděli v kapitole 2, uspořádání fuzzy čísel na základě porovnání α -řezů je jen částečné a některá fuzzy čísla pomocí této metody nelze porovnat. Další možností porovnání výsledných fuzzy hodnocení jednotlivých variant je porovnání jejich těžišť. Tato metoda funguje vždy.

4 Výběr nejvhodnějšího pracovníka za použití fuzzy analytického hierarchického procesu

V této kapitole aplikujeme fuzzy analytický hierarchický proces na problém výběru vhodného zaměstnance na pozici ekonom ze skupiny uchazečů. Konkrétně se jedná o výběrové řízení ve firmě Tesco SW a.s., kde momentálně pracuji na částečný úvazek.

Při sestavování tohoto modelu jsem spolupracovala s personalistkou Mgr. Markétou Vitoslavskou, která výběrové řízení organizovala a vedla pohovory se všemi uchazeči.

4.1 Popis výběrového řízení a stanovení kritérií

Výběrové řízení se konalo v únoru 2011, životopis zaslalo přibližně 60 uchazečů. Z těchto uchazečů bylo na základě životopisu vybráno 12 kandidátů, kteří byli pozváni na osobní pohovor. V tomto kole výběru byli uchazeči vybíráni především podle uvedeného vzdělání a bydliště. Přitom bylo požadováno vysokoškolské vzdělání ekonomického směru a bydliště blízko Olomouce, protože u zaměstnanců s bydlištěm vzdáleným od místa zaměstnání je větší pravděpodobnost odchodu ze zaměstnání.

Na pohovoru psalo 12 vybraných kandidátů test, který měl ověřit jejich znalosti z oblasti ekonomie. Dále si personalistka všímala především osobnostních vlastností, jako jsou aktivita, samostatnost, diskrétnost, pečlivost, jak člověk působí, jestli je společenský, příjemný. Důležitým kritériem byl také věk uchazeče v kombinaci s pohlavím a bydlištěm. Do dalšího kola bylo následně vybráno 7 uchazečů, kteří z testu získali minimálně 28 bodů a zároveň vyhovovali i na základě uvedených kritérií.

Z těchto sedmi uchazečů byla potřeba vybrat toho nejlepšího. Ve spolupráci s personalistkou jsme určily nejdůležitější kritéria výběru. Tato kritéria seřazená od nejdůležitějšího po nejméně důležité vypadají následovně:

- 1) \mathcal{K}_1 : **osobnost** - toto kritérium zahrnuje vystupování jedince, příjemnost

při rozhovoru, jak na nás uchazeč působí.

- 2) \mathcal{K}_2 : **demografie** - toto kritérium zahrnuje kombinaci věku, pohlaví, rodinného stavu a bydliště uchazeče. Přitom jsou preferováni uchazeči s místem bydliště blízko Olomouce, čerství absolventi, ženy, které v nejbližší době neplánují odejít na mateřskou. Pokud se například rozhodujeme mezi ženou z Hranic, ročník 1984, vdanou, u které se očekává, že v nejbližší době nastoupí na mateřskou, a mužem z Hranic, ročník 1984, dáme přednost muži.

Toto kritérium je podle mého názoru velice diskriminační, nicméně je to druhé nejdůležitější kritérium, podle kterého se při výběru zaměstnanců ve firmě Tesco SW a.s. rozhodují.

- 3) \mathcal{K}_3 : **aktivita a samostatnost** - ideální zaměstnanec by měl být aktivní a samostatný. To je posuzováno podle předchozích brigád a zaměstnání uvedených v životopise a také podle zájmů a koníčků. Při výběru dáváme přednost aktivnímu a samostatnému uchazeči. Na druhou stranu pro příliš aktivního zaměstnance by mohlo být toto zaměstnání stereotypní a mohl by si za nějaký čas najít zajímavější práci. Ideální zaměstnanec by tedy neměl být ani příliš aktivní.
- 4) \mathcal{K}_4 : **diskrétnost** - firma požaduje diskrétního zaměstnance, který nebude vynášet citlivé informace. Diskrétnost posuzuje personalistka při pohovoru. Přitom sleduje, jestli například uchazeč nesdělí příliš osobní informace nebo nemá tendenci pomlouvat svého předchozího zaměstnavatele.
- 5) \mathcal{K}_5 : **pečlivost** - firma hledá pečlivého zaměstnance, který bude svědomitě odvádět svou práci. Pečlivost je posuzována z rozhovoru a personalistka také posuzuje formu, jakou byl napsán test. Dále si personalistka může vyžádat k nahlédnutí diplomovou či bakalářskou práci.
- 6) \mathcal{K}_6 : **vzdělání** - všech 7 uchazečů má vysokoškolské vzdělání ekonomického směru. Pomocí tohoto kritéria bude posuzována kvalita jednotlivých

škol. Například u uchazeče, který vystudoval Vysokou školu ekonomickou v Praze, se předpokládá lepší vzdělání než u uchazeče, který vystudoval Slezskou univerzitu v Opavě.

Výše uvedeným kritériím nyní přiřadíme fuzzy váhy.

4.2 Stanovení fuzzy vah kritérií

Abychom mohli stanovit fuzzy váhy kritérií, musíme nejprve určit fuzzy preference mezi jednotlivými kritérii. K tomu jsem vytvořila tabulku, ve které následně personalistka určila fuzzy preference mezi jednotlivými kritérii podle modifikované stupnice fuzzy hodnot uvedené v tabulce 7. Tuto stupnici fuzzy hodnot si personalistka pro ohodnocení vybrala z toho důvodu, že nebyla schopna určit přesnější fuzzy preference mezi kritérii, což je vyžadováno při použití rozšířené modifikované stupnice fuzzy hodnot uvedené v tabulce 9. Tabulka je sestavena tak, že v levém sloupci jsou uvedena postupně kritéria od nejvýznamnějšího po nejméně významné a tato kritéria postupně porovnáváme se všemi méně významnými kritérii uvedenými v pravém sloupci tabulky. V prostředním sloupci jsou pak uvedeny fuzzy preference mezi jednotlivými kritérii, viz tabulka 10.

Fuzzy matice párových porovnávání kritérií sestavená podle preferencí mezi kritérii stanovených v tabulce 10 je pak ve tvaru

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_1 \quad \mathcal{K}_2 \quad \mathcal{K}_3 \quad \mathcal{K}_4 \quad \mathcal{K}_5 \quad \mathcal{K}_6 \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (3, 5, 7) \\
 (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) \\
 (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) \\
 (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1
 \end{array} \right). \tag{4.1}
 \end{array}$$

Ověřením oslabené podmínky konzistence pomocí algoritmu 3.2 zjistíme, že matice je konzistentní. Personalistka tedy preference mezi jednotlivými kritérii

osobnost	3	demografie
osobnost	5	aktivita a samostatnost
osobnost	5	diskrétnost
osobnost	5	pečlivost
osobnost	7	vzdělání
demografie	5	aktivita a samostatnost
demografie	5	diskrétnost
demografie	5	pečlivost
demografie	7	vzdělání
aktivita a samostatnost	1	diskrétnost
aktivita a samostatnost	1	pečlivost
aktivita a samostatnost	5	vzdělání
diskrétnost	1	pečlivost
diskrétnost	3	vzdělání
pečlivost	3	vzdělání

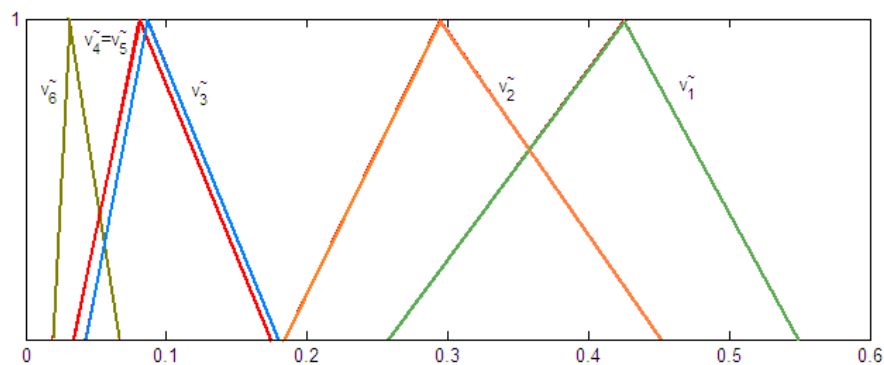
Tab. 10: Preference mezi jednotlivými kritérii

určila správně hned napoprvé. Z tohoto lze usoudit, že preference mezi kritérii pouze nenatypovala, ale že se v dané problematice velmi dobře orientuje.

Nyní už tedy můžeme přejít rovnou k výpočtu fuzzy vah jednotlivých kritérií. Pro výpočet použijeme algoritmus 3.5. Vstupem do algoritmu bude matice M zadaná ve tvaru

$$\begin{aligned}
M(:, :, 1) &= [1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 5; 1/5 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 5; 1/7 \ 1/7 \ 1 \ 1/3 \ 1/3 \ 3; \\
& 1/7 \ 1/7 \ 1/3 \ 1 \ 1/3 \ 1; 1/7 \ 1/7 \ 1/3 \ 1/3 \ 1 \ 1; 1/9 \ 1/9 \ 1/7 \ 1/5 \ 1/5 \ 1]; \\
M(:, :, 2) &= [1 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 7; 1/3 \ 1 \ 5 \ 5 \ 5 \ 7; 1/5 \ 1/5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5; \\
& 1/5 \ 1/5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3; 1/5 \ 1/5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3; 1/7 \ 1/7 \ 1/5 \ 1/3 \ 1/3 \ 1]; \\
M(:, :, 3) &= [1 \ 5 \ 7 \ 7 \ 7 \ 9; 1/1 \ 1 \ 7 \ 7 \ 7 \ 9; 1/3 \ 1/3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 7; \\
& 1/3 \ 1/3 \ 3 \ 1 \ 3 \ 5; 1/3 \ 1/3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 5; 1/5 \ 1/5 \ 1/3 \ 1 \ 1 \ 1];
\end{aligned}$$

Výstupem algoritmu jsou pak fuzzy váhy ve tvaru



Obrázek 9: Fuzzy váhy kritérií

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_1 &= (0.2578, 0.4252, 0.5489) , \\
 \tilde{v}_2 &= (0.1837, 0.2948, 0.4516) , \\
 \tilde{v}_3 &= (0.0425, 0.0875, 0.1795) , \\
 \tilde{v}_4 &= (0.0353, 0.0804, 0.1748) , \\
 \tilde{v}_5 &= (0.0353, 0.0804, 0.1748) , \\
 \tilde{v}_6 &= (0.0197, 0.0317, 0.0673) .
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Graficky jsou tyto fuzzy váhy znázorněny na obrázku 9. Dosazením do vzorců (2.13) čtenář může ověřit, že tyto fuzzy váhy jsou normované.

Z obrázku 9 vidíme, že kritéria \tilde{v}_1 a \tilde{v}_2 jsou velmi významná vzhledem k celkovému cíli hodnocení. Zbylá kritéria jsou oproti těmto dvěma kritériím jen velmi málo významná.

4.3 Uchazeči ve výběrovém řízení

Jak už bylo zmíněno výše, do užšího kola výběru postoupilo 7 uchazečů. Z důvodu zachování anonymity je budeme značit písmeny A až G . Tyto uchazeče personalistka na základě životopisu a osobního pohovoru charakterizovala následně.

Uchazeč A

- žena, ročník 1973
- bydliště: Olomouc
- rodinný stav: asi po mateřské
- vzdělání: Vysoká škola Báňská v Ostravě
- hodnocení testu: 35 bodů
- osobnost: příjemná
- aktivita a samostatnost: dokončila školu při zaměstnání, vaří, jezdí na koni

Uchazeč B

- žena, ročník 1982
- bydliště: Šumperk
- rodinný stav: svobodná, má přítele
- vzdělání: Slezská univerzita v Opavě, zná ekonomiku dotačních projektů
- hodnocení testu: 32 bodů
- osobnost: příjemná, ředitelce ekonomického úseku se líbila ze všech uchazečů nejvíce, personalistce až tak moc ne
- aktivita a samostatnost: lyže, plavání, předchozí zaměstnání

Uchazeč C

- žena, ročník 1987
- bydliště: Cholina
- rodinný stav: svobodná
- vzdělání: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
- hodnocení testu: 35 bodů
- osobnost: příjemná, pro ředitelku ekonomického úseku druhá nejlepší
- aktivita a samostatnost: drobné brigády při škole

Uchazeč D

- muž, ročník 1987

- bydliště: Olomouc
- rodinný stav: svobodný
- vzdělání: Vysoká škola Báňská v Ostravě
- hodnocení testu: 31 bodů
- osobnost: příjemný, personalistce se líbil nejvíce
- aktivita a samostatnost: brigády a práce při škole, 3. fotbalová liga

Uchazeč E

- žena, ročník 1987
- bydliště: Uničov
- rodinný stav: svobodná, má přítele
- vzdělání: Vysoká škola ekonomická v Praze
- hodnocení testu: 36 bodů
- osobnost: sympatická, velmi příjemná
- aktivita a samostatnost: studovala 2 obory a zároveň pracovala v účetní kanceláři, plavání, pilates, četba

Uchazeč F

- žena, ročník 1983
- bydliště: Olomouc
- rodinný stav: čerstvě vdaná
- vzdělání: Slezská univerzita v Opavě
- hodnocení testu: 29 bodů
- osobnost: příjemná, pohodová
- aktivita a samostatnost: pracuje na univerzitě jako účetní

Uchazeč G

- muž, ročník 1986
- bydliště: Olomouc
- rodinný stav: svobodný

- vzdělání: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
- hodnocení testu: 36 bodů
- osobnost: nijak výrazně nezapůsobil
- aktivita a samostatnost: lyže

V charakteristikách jednotlivých uchazečů nejsou popsány osobnostní vlastnosti jako jsou například pečlivost nebo diskrétnost, které jsou zároveň i kritérii hodnocení. Tyto vlastnosti personalistka odhadovala z chování a prezentace uchazečů při pohovoru a neuměla je u jednotlivých uchazečů přímo popsat. Nicméně uchazeče podle těchto dvou kritérií byla schopna porovnat, jak uvidíme dále.

4.4 Fuzzy hodnocení uchazečů podle jednotlivých kritérií

Stejně jako při stanovování fuzzy vah kritérií, musíme i před stanovením fuzzy hodnocení uchazečů vzhledem k jednotlivým kritériím určit fuzzy preference mezi uchazeči vzhledem k těmto kritériím. K tomuto jsem nejprve potřebovala, aby personalistka určila pořadí uchazečů podle jednotlivých kritérií od nejlepšího po nejhoršího. Na základě této informace jsem poté připravila tabulky pro párová porovnání uchazečů vzhledem k jednotlivým kritériím, do kterých personalistka následně doplnila fuzzy preference mezi jednotlivými uchazeči obdobně jako tomu bylo při určování fuzzy preferencí mezi kritérii. Informace, které mi personalistka poskytla, jsou uvedeny v tabulkách 11 a 12. Na základě těchto tabulek jsem poté vytvořila fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem k jednotlivým kritériím.

\mathcal{K}_1	\mathcal{K}_2	\mathcal{K}_3
D	$\tilde{3}$	E
D	$\tilde{3}$	B
D	$\tilde{3}$	F
D	$\tilde{5}$	C
D	$\tilde{5}$	A
D	$\tilde{7}$	G
E	$\tilde{3}$	B
E	$\tilde{3}$	F
E	$\tilde{5}$	C
E	$\tilde{5}$	A
E	$\tilde{7}$	G
B	$\tilde{3}$	F
B	$\tilde{5}$	C
B	$\tilde{5}$	A
B	$\tilde{7}$	G
F	$\tilde{3}$	C
F	$\tilde{5}$	A
F	$\tilde{7}$	G
C	$\tilde{3}$	A
C	$\tilde{5}$	G
A	$\tilde{3}$	G
D	$\tilde{1}$	G
D	$\tilde{3}$	A
D	$\tilde{5}$	E
D	$\tilde{5}$	C
D	$\tilde{7}$	B
D	$\tilde{9}$	F
G	$\tilde{3}$	A
G	$\tilde{5}$	E
G	$\tilde{5}$	C
G	$\tilde{7}$	B
G	$\tilde{9}$	F
A	$\tilde{3}$	E
A	$\tilde{5}$	C
A	$\tilde{7}$	B
A	$\tilde{5}$	F
E	$\tilde{3}$	C
E	$\tilde{7}$	B
E	$\tilde{9}$	F
C	$\tilde{5}$	B
C	$\tilde{9}$	F
B	$\tilde{3}$	F
A	$\tilde{3}$	E
A	$\tilde{3}$	D
A	$\tilde{5}$	B
A	$\tilde{5}$	F
A	$\tilde{7}$	C
A	$\tilde{7}$	G
E	$\tilde{1}$	D
E	$\tilde{3}$	B
E	$\tilde{3}$	F
E	$\tilde{5}$	C
E	$\tilde{5}$	G
D	$\tilde{3}$	B
D	$\tilde{3}$	F
D	$\tilde{5}$	C
D	$\tilde{5}$	G
B	$\tilde{1}$	F
B	$\tilde{3}$	C
B	$\tilde{3}$	G
F	$\tilde{3}$	C
F	$\tilde{3}$	G
C	$\tilde{1}$	G

Tab. 11: Fuzzy preference mezi jednotlivými uchazeči vzhledem ke kritériím $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a \mathcal{K}_3

\mathcal{K}_4			\mathcal{K}_5			\mathcal{K}_6		
B	$\tilde{3}$	F	E	$\tilde{1}$	G	E	$\tilde{5}$	A
B	$\tilde{3}$	E	E	$\tilde{1}$	B	E	$\tilde{5}$	D
B	$\tilde{5}$	A	E	$\tilde{3}$	F	E	$\tilde{7}$	B
B	$\tilde{5}$	D	E	$\tilde{5}$	A	E	$\tilde{7}$	F
B	$\tilde{5}$	G	E	$\tilde{5}$	D	E	$\tilde{9}$	G
B	$\tilde{7}$	C	E	$\tilde{5}$	C	E	$\tilde{9}$	C
F	$\tilde{3}$	E	G	$\tilde{1}$	B	A	$\tilde{1}$	D
F	$\tilde{3}$	A	G	$\tilde{3}$	F	A	$\tilde{3}$	B
F	$\tilde{5}$	D	G	$\tilde{5}$	A	A	$\tilde{3}$	F
F	$\tilde{5}$	G	G	$\tilde{5}$	D	A	$\tilde{5}$	G
F	$\tilde{7}$	C	G	$\tilde{5}$	C	A	$\tilde{5}$	C
E	$\tilde{3}$	A	B	$\tilde{3}$	F	D	$\tilde{3}$	B
E	$\tilde{3}$	D	B	$\tilde{5}$	A	D	$\tilde{3}$	F
E	$\tilde{3}$	G	B	$\tilde{5}$	D	D	$\tilde{5}$	G
E	$\tilde{7}$	C	B	$\tilde{5}$	C	D	$\tilde{5}$	C
A	$\tilde{1}$	D	F	$\tilde{3}$	A	B	$\tilde{1}$	F
A	$\tilde{3}$	G	F	$\tilde{3}$	D	B	$\tilde{3}$	G
A	$\tilde{5}$	C	F	$\tilde{5}$	C	B	$\tilde{3}$	C
D	$\tilde{1}$	G	A	$\tilde{1}$	D	F	$\tilde{3}$	G
D	$\tilde{5}$	G	A	$\tilde{3}$	C	F	$\tilde{3}$	C
G	$\tilde{5}$	C	D	$\tilde{3}$	C	G	$\tilde{1}$	C

Tab. 12: Fuzzy preference mezi jednotlivými uchazeči vzhledem ke kritériím \mathcal{K}_4 , \mathcal{K}_5 a \mathcal{K}_6

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_1 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_1 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & D & E & B & F & C & A & G \\
 D & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 E & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 B & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 F & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 C & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) \\
 A & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) \\
 G & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.3)$$

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_2 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_2 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & D & G & A & E & C & E & F \\
 D & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) \\
 G & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) \\
 A & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) \\
 E & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) \\
 C & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (3, 5, 7) & (7, 9, 9) \\
 B & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & 1 & (1, 3, 5) \\
 F & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.4)$$

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_3 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_3 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & A & E & D & B & F & C & G \\
 A & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) & (5, 7, 9) \\
 E & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 D & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 B & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) \\
 F & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) \\
 C & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) \\
 G & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.5)$$

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_4 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_4 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & B & F & E & A & D & G & C \\
 B & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 F & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) \\
 E & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (5, 7, 9) \\
 A & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) \\
 D & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (3, 5, 7) \\
 G & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (3, 5, 7) \\
 C & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.6)$$

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_5 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_5 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & E & G & B & F & A & D & C \\
 E & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 G & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 B & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 F & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) \\
 A & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) \\
 D & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) \\
 C & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.7)$$

Fuzzy matice párových porovnávání uchazečů vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_6 :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K}_6 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 & E & A & D & B & F & G & C \\
 E & 1 & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) & (5, 7, 9) & (5, 7, 9) & (7, 9, 9) & (7, 9, 9) \\
 A & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 D & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) & (3, 5, 7) & (3, 5, 7) \\
 B & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) \\
 F & (\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1 & (1, 3, 5) & (1, 3, 5) \\
 G & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & 1 & (\frac{1}{3}, 1, 3) \\
 C & (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1) & (\frac{1}{3}, 1, 3) & 1
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.8)$$

Z těchto fuzzy matic párových porovnávání jsem pomocí algoritmu 3.5 určila fuzzy hodnocení variant vzhledem k jednotlivým kritériím.

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_1 :

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_D^1 &= (0.1642, 0.3332, 0.4711), \\
\tilde{h}_E^1 &= (0.1231, 0.2434, 0.3989), \\
\tilde{h}_B^1 &= (0.0950, 0.1779, 0.3318), \\
\tilde{h}_F^1 &= (0.0633, 0.1208, 0.2582), \\
\tilde{h}_C^1 &= (0.0342, 0.0628, 0.1160), \\
\tilde{h}_A^1 &= (0.0221, 0.0397, 0.0808), \\
\tilde{h}_G^1 &= (0.0144, 0.0222, 0.0413).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_D^2 &= (0.1699, 0.3043, 0.4460), \\
\tilde{h}_G^2 &= (0.1699, 0.3043, 0.4460), \\
\tilde{h}_A^2 &= (0.1020, 0.1767, 0.3102), \\
\tilde{h}_E^2 &= (0.0616, 0.1037, 0.1667), \\
\tilde{h}_C^2 &= (0.0431, 0.0671, 0.1142), \\
\tilde{h}_B^2 &= (0.0174, 0.0278, 0.0461), \\
\tilde{h}_F^2 &= (0.0133, 0.0162, 0.0269).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_3 :

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_A^3 &= (0.2152, 0.3867, 0.5210), \\
\tilde{h}_E^3 &= (0.0830, 0.1896, 0.3608), \\
\tilde{h}_D^3 &= (0.0830, 0.1896, 0.3608), \\
\tilde{h}_B^3 &= (0.0353, 0.0813, 0.1945), \\
\tilde{h}_F^3 &= (0.0353, 0.0813, 0.1945), \\
\tilde{h}_C^3 &= (0.0194, 0.0357, 0.0872), \\
\tilde{h}_G^3 &= (0.0194, 0.0357, 0.0872).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_4 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_B^4 &= (0.1971, 0.3629, 0.4967), \\
 \tilde{h}_F^4 &= (0.1246, 0.2465, 0.4024), \\
 \tilde{h}_E^4 &= (0.0696, 0.1556, 0.3063), \\
 \tilde{h}_A^4 &= (0.0411, 0.0861, 0.1945), \\
 \tilde{h}_D^4 &= (0.0331, 0.0684, 0.1550), \\
 \tilde{h}_G^4 &= (0.0307, 0.0585, 0.1361), \\
 \tilde{h}_C^4 &= (0.0143, 0.0220, 0.0391).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_5 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_E^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\
 \tilde{h}_G^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\
 \tilde{h}_B^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\
 \tilde{h}_F^5 &= (0.0538, 0.1148, 0.2501), \\
 \tilde{h}_A^5 &= (0.0266, 0.0536, 0.1131), \\
 \tilde{h}_D^5 &= (0.0266, 0.0536, 0.1131), \\
 \tilde{h}_C^5 &= (0.0187, 0.0311, 0.0688).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle kritéria \mathcal{K}_6 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_E^6 &= (0.3525, 0.4787, 0.5708), \\
 \tilde{h}_A^6 &= (0.0743, 0.1594, 0.2822), \\
 \tilde{h}_D^6 &= (0.0743, 0.1594, 0.2822), \\
 \tilde{h}_B^6 &= (0.0321, 0.0701, 0.1609), \\
 \tilde{h}_F^6 &= (0.0321, 0.0701, 0.1609), \\
 \tilde{h}_G^6 &= (0.0183, 0.0312, 0.0733), \\
 \tilde{h}_C^6 &= (0.0183, 0.0312, 0.0733).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.5 Celkové fuzzy hodnocení uchazečů a výběr zaměstnance

Nyní můžeme přejít k výpočtu celkového fuzzy hodnocení jednotlivých uchazečů. Tato fuzzy hodnocení určíme pomocí obou přístupů popsaných v podkapitole 3.4 a výsledky pak mezi sebou porovnáme.

Začneme výpočtem celkového fuzzy hodnocení pomocí fuzzy váženého průměru, který sice není tak přesný jako druhý způsob výpočtu, zato je ale použitelný vždy, i při větších počtech kritérií. K tomu budeme potřebovat normované fuzzy váhy kritérií (4.2) a dílčí fuzzy hodnocení uchazečů vzhledem k jednotlivým kritériím. Dílčí fuzzy hodnocení podle kritérií uspořádáme zvlášť pro každého uchazeče.

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče A podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_A^1 &= (0.0221, 0.0397, 0.0808), \\ \tilde{h}_A^2 &= (0.1020, 0.1767, 0.3102), \\ \tilde{h}_A^3 &= (0.2152, 0.3867, 0.5210), \\ \tilde{h}_A^4 &= (0.0411, 0.0861, 0.1945), \\ \tilde{h}_A^5 &= (0.0266, 0.0536, 0.1131), \\ \tilde{h}_A^6 &= (0.0743, 0.1594, 0.2822).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče B podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_B^1 &= (0.0950, 0.1779, 0.3318), \\ \tilde{h}_B^2 &= (0.0174, 0.0278, 0.0461), \\ \tilde{h}_B^3 &= (0.0353, 0.0813, 0.1645), \\ \tilde{h}_B^4 &= (0.1971, 0.3629, 0.4967), \\ \tilde{h}_B^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\ \tilde{h}_B^6 &= (0.0321, 0.0701, 0.1609).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče C podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_C^1 &= (0.0342, 0.0628, 0.1160), \\
 \tilde{h}_C^2 &= (0.0431, 0.0671, 0.1142), \\
 \tilde{h}_C^3 &= (0.0194, 0.0357, 0.0872), \\
 \tilde{h}_C^4 &= (0.0143, 0.0220, 0.0391), \\
 \tilde{h}_C^5 &= (0.0187, 0.0311, 0.0688), \\
 \tilde{h}_C^6 &= (0.0183, 0.0312, 0.0733).
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče D podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_D^1 &= (0.1642, 0.3332, 0.4711), \\
 \tilde{h}_D^2 &= (0.1699, 0.3043, 0.4460), \\
 \tilde{h}_D^3 &= (0.0830, 0.1896, 0.3608), \\
 \tilde{h}_D^4 &= (0.0331, 0.0684, 0.1550), \\
 \tilde{h}_D^5 &= (0.0266, 0.0536, 0.1131), \\
 \tilde{h}_D^6 &= (0.0743, 0.1594, 0.2822).
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče E podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_E^1 &= (0.1231, 0.2434, 0.3989), \\
 \tilde{h}_E^2 &= (0.0616, 0.1037, 0.1667), \\
 \tilde{h}_E^3 &= (0.0830, 0.1896, 0.3608), \\
 \tilde{h}_E^4 &= (0.0696, 0.1556, 0.3063), \\
 \tilde{h}_E^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\
 \tilde{h}_E^6 &= (0.3525, 0.4787, 0.5708).
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče F podle jednotlivých kritérií:

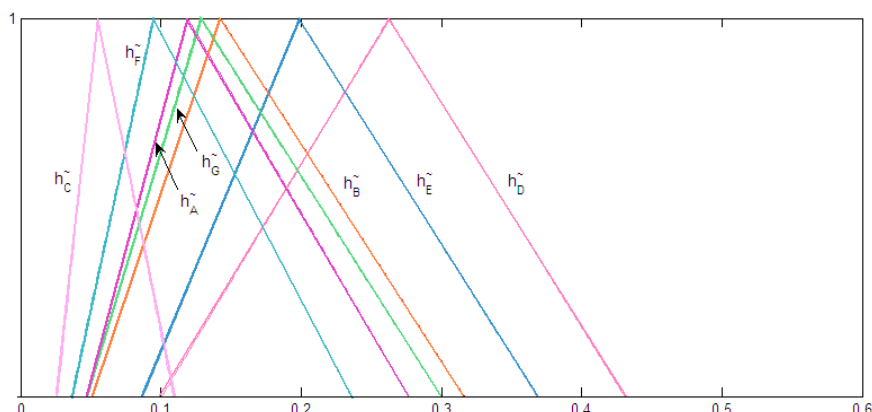
$$\begin{aligned}
\tilde{h}_F^1 &= (0.0633, 0.1208, 0.2582), \\
\tilde{h}_F^2 &= (0.0133, 0.0162, 0.0269), \\
\tilde{h}_F^3 &= (0.0353, 0.0813, 0.1945), \\
\tilde{h}_F^4 &= (0.1246, 0.2465, 0.4024), \\
\tilde{h}_F^5 &= (0.0538, 0.1148, 0.2501), \\
\tilde{h}_F^6 &= (0.0321, 0.0701, 0.1609).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dílčí fuzzy hodnocení uchazeče G podle jednotlivých kritérií:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_G^1 &= (0.0144, 0.0222, 0.0413), \\
\tilde{h}_G^2 &= (0.1699, 0.3043, 0.4460), \\
\tilde{h}_G^3 &= (0.0194, 0.0357, 0.0872), \\
\tilde{h}_G^4 &= (0.0307, 0.0585, 0.1361), \\
\tilde{h}_G^5 &= (0.1109, 0.2490, 0.4305), \\
\tilde{h}_G^6 &= (0.0183, 0.0312, 0.0733).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

K výpočtu celkových fuzzy hodnocení uchazečů nyní tedy použijeme algoritmus 3.6. Algoritmus je potřeba použít jednotlivě pro výpočet celkového fuzzy hodnocení každého z uchazečů. Vstupem do algoritmu budou fuzzy váhy kritérií (4.2), které budou zapsány do matice, a dílčí fuzzy hodnocení daného uchazeče (tj. postupně (4.15) až (4.21)), která budou opět zapsána do matice. Použitím algoritmu 3.6 pak celkem dostáváme fuzzy hodnocení uchazečů ve tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_A &= (0.0474, 0.1191, 0.2767), \\
\tilde{h}_B &= (0.0508, 0.1424, 0.3162), \\
\tilde{h}_C &= (0.0265, 0.0549, 0.1090), \\
\tilde{h}_D &= (0.1007, 0.2628, 0.4309), \\
\tilde{h}_E &= (0.0876, 0.1984, 0.3684), \\
\tilde{h}_F &= (0.0362, 0.0945, 0.2360), \\
\tilde{h}_G &= (0.0479, 0.1280, 0.2998).
\end{aligned} \tag{4.22}$$



Obrázek 10: Celkové fuzzy hodnocení uchazečů

Čtenář může opět dosazením do vzorců (2.13) ověřit, že takto vypočtená celková fuzzy hodnocení tvoří normované fuzzy váhy.

Graficky jsou fuzzy hodnocení všech uchazečů znázorněna na obrázku 10. Odtud vidíme, že fuzzy hodnocení jednotlivých uchazečů lze uspořádat pomocí metody porovnání α -řezů. Nemusí tomu tak ale být vždy. V takovém případě by bylo možné uspořádání fuzzy hodnocení uchazečů provést například podle těžišť. Uspořádání uchazečů podle α -řezů je následující:

$$D > E > B > G > A > F > C$$

Z obrázku 10 dále vidíme, že čím větší je fuzzy hodnocení uchazečů, tím jsou tato fuzzy hodnocení více neurčitá. Fuzzy hodnocení nejhůře hodnoceného uchazeče C má v porovnání s fuzzy hodnoceními ostatních uchazečů jen velmi malou neurčitost.

Nyní se podívejme na výpočet celkového fuzzy hodnocení uchazečů pomocí vzorců (3.48), (3.49) a (3.50). K tomu potřebujeme opět dílčí fuzzy hodnocení uchazečů podle jednotlivých kritérií a dále fuzzy matici párových porovnávání kritérií, která je ve tvaru (4.1). Význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení jednotlivých uchazečů budeme počítat v Matlabu pomocí funkce *fmincon*. Do této funkce je potřeba zadat funkci, kterou chceme minimalizovat, počáteční odhad

řešení w_0 , dolní hranici lb a horní hranici ub , mezi kterými se proměnné mohou pohybovat.

Minimalizovaná funkce pro výpočet první význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení uchazeče je ve tvaru

$$\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\sqrt[6]{\frac{\prod_{k=j+1}^6 s_{jk}^*}{j-1} h_{X1}^j} \right)}{\sum_{j=1}^6 \sqrt[6]{\frac{\prod_{k=j+1}^6 s_{jk}^*}{j-1}}}, \quad (4.23)$$

kde h_{X1}^j je první význačná hodnota fuzzy hodnocení uchazeče X vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_j , $X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Tato funkce má 15 proměnných

$$s_{12}^*, s_{13}^*, s_{14}^*, s_{15}^*, s_{16}^*, s_{23}^*, s_{24}^*, s_{25}^*, s_{26}^*, s_{34}^*, s_{35}^*, s_{36}^*, s_{45}^*, s_{46}^*, s_{56}^*.$$

Vektor dolních hranic, kterých mohou proměnné nabývat, je tvořen prvními význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií (4.1), tj. je ve tvaru

$$lb = \left[1, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 3, 5, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 1, 1 \right].$$

Stejně tak vektor horních hranic je tvořen třetími význačnými hodnotami příslušných fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií (4.1) a je tedy ve tvaru

$$ub = [5, 7, 7, 7, 9, 7, 7, 7, 9, 3, 3, 7, 3, 5, 5].$$

Počáteční odhad jsem zvolila jako prostřední význačné hodnoty příslušných fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií (4.1), tj. ve tvaru

$$w_0 = [3, 5, 5, 5, 7, 5, 5, 5, 7, 1, 1, 5, 1, 3, 3].$$

Pro výpočet třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení jednotlivých uchazečů je potřeba maximalizaci převést na minimalizaci. Minimalizovaná funkce pro nalezení třetí význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení varianty bude tedy ve tvaru

$$\sum_{j=1}^6 \left(\sqrt[6]{\frac{\prod_{k=j+1}^6 s_{jk}^*}{\prod_{k=1}^{j-1} s_{kj}^*}} h_{X3}^j \right) \quad (4.24)$$

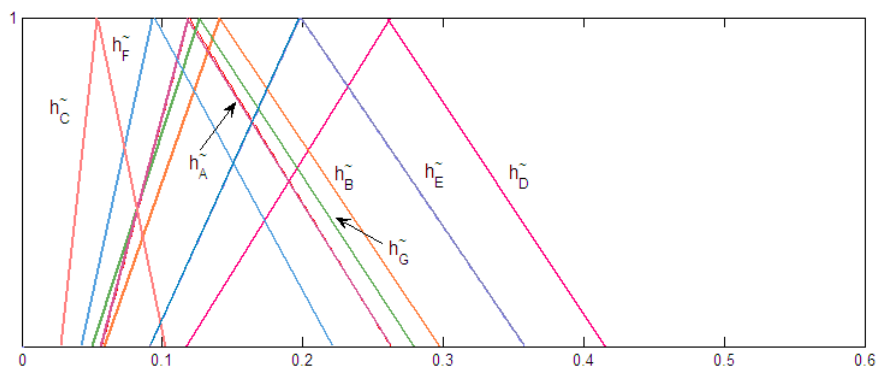
kde h_{X3}^j je třetí význačná hodnota fuzzy hodnocení uchazeče X vzhledem ke kritériu \mathcal{K}_j , $X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Dolní a horní hranice proměnných i počáteční odhady budou stejné jako při výpočtu první význačné hodnoty celkového fuzzy hodnocení variant.

Použitím funkce *fmincon* pak v Matlabu dostáváme celková fuzzy hodnocení uchazečů ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{h}_A &= (0.0570, 0.1191, 0.2629), \\ \tilde{h}_B &= (0.0577, 0.1424, 0.2951), \\ \tilde{h}_C &= (0.0322, 0.0549, 0.1016), \\ \tilde{h}_D &= (0.1172, 0.2628, 0.4155), \\ \tilde{h}_E &= (0.0913, 0.1984, 0.3579), \\ \tilde{h}_F &= (0.0424, 0.0945, 0.2254), \\ \tilde{h}_G &= (0.0504, 0.1280, 0.2799). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tato fuzzy hodnocení uchazečů jsou méně neurčitá než fuzzy hodnocení vypočtená podle algoritmu 3.6. Dosazením do vzorců (2.13) může čtenář opět ověřit, že tato fuzzy hodnocení tvoří normované fuzzy váhy.

Graficky jsou tato fuzzy hodnocení uchazečů znázorněna na obrázku 11. Od-



Obrázek 11: Celkové fuzzy hodnocení uchazečů

tud vidíme, že fuzzy hodnocení nelze pomocí metody porovnání α -řezů uspořádat. Problém při porovnávání nastává u fuzzy hodnocení uchazečů A a G . Musíme tedy použít metodu těžiště. Za použití vzorce (2.7) pro výpočet těžiště trojúhelníkového fuzzy čísla dostáváme těžiště jednotlivých fuzzy hodnocení uchazečů ve tvaru

$$\begin{aligned} t_A = 0.1463, \quad t_B = 0.1651, \quad t_C = 0.0629, \quad t_D = 0.2652, \\ t_E = 0.2158, \quad t_F = 0.1208, \quad t_G = 0.1527 \end{aligned} \quad (4.26)$$

a uspořádání uchazečů podle těžišť je pak následující:

$$D >_t E >_t B >_t G >_t A >_t F >_t C.$$

Dostali jsme tedy opět stejné pořadí uchazečů jako v předchozím případě. Z uchazečů je tedy podle modelu jednoznačně nejlepší uchazeč D . Poměrně dobré hodnocení oproti ostatním uchazečům má i uchazeč E . Naopak hodnocení uchazeče C je výrazně horší než hodnocení ostatních uchazečů.

Všech těchto sedm uchazečů se zúčastnilo pohovoru s generálním ředitelem společnosti Tesco SW a.s. RNDr. Josefem Tesaříkem a nakonec byli ve výběrovém řízení vybráni uchazeči E a D . Uchazeč E byl vybrán na otevřenou pozici ekonom a pro uchazeče D bylo vytvořeno nové pracovní místo v oddělení marketingu.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo popsat fuzzy rozšíření Saatyho analytického hierarchického procesu a použití této metody předvést na reálném příkladě. Jelikož v současnosti patrně neexistuje žádná česky psaná literatura, která by se komplexně fuzzy analytickým hierarchickým procesem zabývala, bylo mým neméně důležitým cílem zpracovat tuto diplomovou práci tak, aby mohla sloužit jako studijní materiál studentům, kteří mají zájem o tuto oblast vícekriteriálního rozhodování.

Ve skutečnosti jsem se při psaní této práce nesešla ani s anglicky psanou literaturou, která by fuzzy analytický hierarchický proces komplexně popisovala. Ve většině článků uvedených v seznamu použité literatury autoři kroky fuzzy analytického hierarchického procesu popisují jen velmi stroze a stěžejní částí těchto článků je aplikace fuzzy analytického hierarchického procesu na rozhodovacím problému. Navíc jsem většinu z těchto článků v práci uváděla jen jako příklady použití fuzzy analytického hierarchického procesu v praxi a především jako příklady nevhodně nadefinovaných stupnic fuzzy hodnot nebo příklady použití nevhodných vzorců pro výpočet fuzzy vah kritérií či fuzzy hodnocení variant. V práci jsem se pak snažila jednotlivé kroky fuzzy analytického hierarchického procesu vylepšit. Myslím, že toto se mi podařilo, neboť například dílčí fuzzy váhy kritérií, respektive dílčí fuzzy hodnocení variant i celkové fuzzy hodnocení variant měly při výpočtu mnou navrženým postupem mnohem menší neurčitost než při výpočtu postupy uváděnými v citovaných literaturách.

V navazujícím doktorském studiu bych na tuto práci ráda navázala. Jelikož jsem se v celé diplomové práci omezila jen na práci s trojúhelníkovými fuzzy čísly, v budoucnu bych se mohla zaměřit na zobecnění na fuzzy čísla po částech lineární, která by byla přesnější aproximací skutečných fuzzy čísel. Dále bych se také ráda zabývala zobecněním fuzzy analytického hierarchického procesu i na problém skupinového rozhodování.

V budoucnu bych chtěla také odstranit problémy s časovou náročností mnou navržených algoritmů. Postup výpočtu maximálního vlastního fuzzy čísla fuzzy

matice párových porovnávání i fuzzy vah kritérií či dílčích fuzzy hodnocení variant, kdy je potřeba určit všechny možné kombinace význačných hodnot daných fuzzy čísel, je časově velmi náročný. Výpočet dílčích fuzzy hodnocení uchazečů podle jednoho kritéria v praktické části diplomové práce trval při sedmi uchazečích téměř čtyři hodiny. Při šesti kritériích, která byla v rozhodovacím problému použita, tedy výpočet všech dílčích fuzzy hodnocení sedmi uchazečů trval téměř 24 hodin. Při větším počtu kritérií nebo variant bychom se výsledku v optimálním čase nedočkali. Proto bych v budoucnu chtěla postupy pro výpočet maximálního vlastního fuzzy čísla i fuzzy vah kritérií a dílčích fuzzy hodnocení variant vylepšit tak, aby je bylo možné použít i pro větší úlohy.

Při výpočtu normovaných fuzzy vah kritérií či fuzzy hodnocení variant bych se chtěla blíže zaměřit na oba způsoby výpočtu uvedené v práci, tj. optimalizační úloha a procházení kombinací význačných hodnot fuzzy čísel. Chtěla bych dokázat, že minimální i maximální hodnotu pro výpočet krajních význačných hodnot výsledné fuzzy váhy opravdu získáme pro určitou kombinaci krajních význačných hodnot fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání kritérií. Na základě toho bych pak chtěla sestavit algoritmus, který toto řešení najde bez toho, aniž bychom museli procházet všechny kombinace význačných hodnot fuzzy čísel. To by znamenalo velké urychlení výpočtu a fuzzy váhy kritérií či dílčí fuzzy hodnocení variant bychom tak mohli určit přesně i při větších počtech kritérií či variant.

Dále bych se také chtěla zaměřit na zakomponování oslabené podmínky konzistence (3.37) do algoritmů pro výpočet fuzzy vah. V této práci je tato podmínka zavedena jen v algoritmu 3.5, který pro výpočet fuzzy vah prohledává všechny možné kombinace význačných hodnot a ověřuje přitom splnění podmínky (3.37). Je zřejmé, že zavedením této podmínky do výpočtu význačných hodnot fuzzy vah již řešení obecně nedostaneme pro nějakou kombinaci krajních význačných hodnot fuzzy čísel z fuzzy matice párových porovnávání. Proto by v tomto případě bylo pro výpočet lepší použít funkci *fmincon* v kombinaci s podmínkou (3.37).

Literatura

- [1] Alesheikh A. A., Alimohammadi A., Vahidnia M. H. : Hospital site selection using fuzzy AHP and its derivatives, Elsevier, 2009
- [2] Bai H., Kwong C. K.: A fuzzy AHP approach to the determination of importance weights of customer requirements in quality function deployment, *Journal of Intelligent Manufacturing* 13, 2002, 367-377
- [3] Farahami R. Z., Rezapour S., Torfi F.: Fuzzy AHP to determine the relative weights of evaluation criteria and Fuzzy TOPSIS to rank the alternatives, *Applied Soft Computing* 10, 2010, 520-528
- [4] Güngör Z., Kesen S. E., Serhadlioglu G.: A fuzzy AHP approach to personnel selection problem, Elsevier, 2008
- [5] Hashemian S. J., Mehrdadi N., Nabi-Bidhendi R., Karimi A. R., Tavakkoli-Moghaddan R.: Using of the fuzzy TOPSIS and fuzzy AHP methods for wastewater treatment process selection, *International journal of academic research* Volume 3, 2011, Part III.
- [6] Chatterjee D., Mukherjee B.: Study of fuzzy-AHP model to search the criterion in the evaluation of the best technical institutions: A case study, *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 2(7), 2010, 2499-2510
- [7] Chen Y.-H., Wang T.-Ch.: Applying fuzzy linguistic preference relations to the improvement of consistency of fuzzy AHP, *Information Sciences* 178, 2008, 3755-3765
- [8] Cheng J.-H., Lee Ch.-M., Tang CH.-H.: An application of fuzzy delphi and fuzzy AHP on evaluating wafer supplier in semiconductor industry, *Department of Information Management, Wseas Transactions on Information Science and Applications*, Issue 5, Volume 6, 2009

- [9] Klir G. J., Yuan B.: Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey, 1996
- [10] Kong F., Liu H.: Applying fuzzy analytic hierarchy process to evaluate success factors of e-commerce, International journal of information and systems sciences, Volume 1, Number 3-4, 2005, 406-412
- [11] Meixner O.: Fuzzy AHP group decision analysis and its application for the evaluation of energy sources, Institute of Marketing and Innovation, University of Natural Resources and Applied Life Sciences, Vienna, Austria
- [12] Novosádová L.: Metody porovnávání fuzzy čísel, bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, 2010
- [13] Pan, N.-F.: Fuzzy AHP approach for selecting the suitable bridge construction method, Automation in Construction, Volume 17, Issue 8, 2008, 958-965
- [14] Pan Y., Yuan B.: Bayesian Inference of Fuzzy Probabilities, Int. J. General Systems 26, Volume 26, Issue 1-2, 1997, 73-90
- [15] Pavlačka O.: Fuzzy metody rozhodování, disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, 2007
- [16] Ramík J.: AHP a jeho využití v malém a středním podnikání, Karviná, 2000
- [17] Sadiq R., Tesfamariam S. : Risk-based environmental decision-making fuzzy analytic hierarchy process (F-AHP), Springer-Verlag, 2006
- [18] Talašová J.: Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování, Univerzita Palackého v Olomouci 2003, 1. vydání