Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

PŘIROZENÁ ČÍSLA PRO STUDENTY UČITELSTVÍ 1. STUPNĚ ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hana JURAŠOVÁ

České Budějovice, duben 2008

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „ Přirozená čísla pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ“ vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu literatury. Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 25. dubna 2008 ……………………………..

Hana Jurašová

Chtěla bych poděkovat své vedoucí práce Ing. Evě Zmeškalové, CSc. za vedení práce, za věcné připomínky a důležité rady.

Anotace

Název práce:	**Přirozená čísla pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ**
Klíčová slova:	přirozená čísla, 1. stupeň ZŠ, číselné soustavy, poziční soustavy, vývoj číselných představ
Pracoviště:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, katedra matematiky
Autor:	Hana Jurašová
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň ZŠ + Základy speciální pedagogiky
Vedoucí diplomové práce:	Ing. Eva Zmeškalová, CSc.

Hlavním cílem diplomové práce je vytvoření studijního materiálu shrnujícího problematiku přirozených čísel pro potřeby studentů učitelství 1. stupně ZŠ. První část diplomové práce se věnuje zpracování historického vývoje čísel a číselných soustav, a psychologickému procesu osvojování si číselných představ u dětí na počátku školní docházky. Druhou částí diplomové práce je sestavení sbírky úloh postihující dané učivo ze zábavného pohledu, které bude sloužit k rozšíření dovedností v daném učivu a k rozvoji logického myšlení studentů. Tato sbírka bude též upotřebitelná v budoucí praxi učitelů jako zásobník netradičních úloh využitelný v zájmové matematice. Součástí práce je sestavení a vyhodnocení testů pro studenty, a to sice na začátku a na konci studia, jakožto srovnání stavu dovedností v oboru přirozených čísel před a po probírání daného učiva.

Annotation

Name of diploma thesis:	**Natural numbers for the future teachers on primary schoul**
Key words:	natural numbers, primary school, numerical systems, positional representation systems, evolution of numerical images
Department:	University of South Bohemia in České Budějovice, Pedagogical faculty, department of mathematics
Author:	Hana Jurašová
Course:	Teaching for the primary school + Basics of special pedagogics
Tutor of diploma thesis:	Ing. Eva Zmeškalová, CSc.

The main target of the diploma work is to create study material , which summarizes problems of natural numbers for the needs of students, who are studying teaching profession for primary schools. The first part of the thesis deals with historical development of numbers and numerical systems and with psychological process of acquisition of numerical images among pupils at the beginning of the school attendance. The second part of the diploma work is composition of tasks collection containing given subjects matter from the entertaining view, which will serve for extension of skills in given subject matter and for development of students logical thought. This collection will be also usable in future teaching praxis as a container full of unconventional tasks utilizable in hobby mathematics. Part of the work is composition and assessment of tests for students, namely at the beginning and at the end of studium, as comparation of skills state in natural numbers subject before and after going through the given subject matter.

Obsah

1. Úvod

Cílem této diplomové práce je sestavení studijního materiálu pro potřeby studentů učitelství 1. stupně ZŠ. Chceme se zaměřit na historii vzniku číselných soustav, které jsou základem pro pochopení systému současné desítkové soustavy, a tím i přirozených čísel. V neposlední řadě se chceme zmínit o psychologickém procesu, ke kterému dochází při osvojování pojmů týkajících se přirozených čísel, při jejich objevování v počátcích školní docházky a jak docházelo k jeho vývoji v průběhu dějin.

Sestavení této diplomové práce je motivováno nedostatkem odborné literatury spojující historický vývoj přirozených čísel s didaktickou praxí současného vyvozování přirozených čísel na počátku školní docházky. Ta bude uváděna především na konkrétních příkladech, při jejichž řešení bude kladen důraz na odstranění formalismu a které by měly žáka přitahovat svou zajímavostí, vést k zamýšlení se nad problémem a hledání různých řešení.

Zpracovaný materiál by měl sloužit studentům jako metodická podpora, která bude založena na množství konkrétních námětů, zajímavých příkladů a jejich rozborů. Pokusíme se učiteli ukázat, jak uchopit učivo o přirozených číslech tak, aby bylo žákům srozumitelné a aby bylo jak pro žáky tak i pro učitele zajímavé. Součástí této práce bude vytvoření sbírky úloh s takovýmito příklady.

Tato práce si klade za cíl zjištění úrovně dovedností budoucích učitelů v oboru přirozených čísel. Pro tyto účely chceme sestavit a zadat testy, zjišťující výše uvedené schopnosti, a to ve dvou variantách – před absolvováním kurzu o přirozených číslech a po něm, čímž získáme informace o zlepšení těchto dovedností.

Vybudování matematického modelu přirozených čísel je velmi abstraktní a vyžaduje poměrně značné matematické znalosti a zkušenosti. Existují dva základní modely přirozených čísel, a to kardinální a ordinální čísla. Tato problematika je pro potřeby studentů učitelství 1. stupně ZŠ nadstandardní, přesto ji alespoň v úvodu zmíníme, abychom se k těmto dvou pojmům v průběhu práce vrátili.

Při modelování přirozených čísel kardinálním způsobem množinu charakterizujeme počtem prvků, který zjistíme např. u malých množin jedním pohledem. Při budování ordinálního modelu přirozených čísel nás zajímá spíše uspořádání množin a pracujeme s daným typem uspořádání dané množiny. Kardinální číslo označuje celkový počet v nějakém souboru či množině věcí, např. jedna, dvě, atd. Ordinální číslo se vztahuje k pořadí, např. první, druhý, atd.

Pro samostatné studium této diplomové práce předpokládáme základní znalosti z teorie množin.

2. Historický pohled na přirozená čísla

V rámci historického přehledu přirozených čísel se zaměříme na rozsáhlé období zahrnující vznik matematických pojmů, budeme si všímat jazykového vývoje těchto pojmů a vývoje početních postupů. Tato dílčí témata vývoje přirozených čísel budou uvedena v logické návaznosti na matematiku 1. stupně a na aktuální problémy v oboru přirozených čísel.

V historii můžeme nalézt jen několik center, která lze označit jako nejprogresivnější v pokroku vývoje pojmu čísla a počítání. Nelze však říci, že by se takový vývoj omezil jen na tato centra, ale právě z nich máme nejvíce zpráv a v nich vývoj probíhal kontinuálně. Oproti tomu v menších centrech vývoj počítání nebyl tak rychlý a byl izolovaný.

Vrátíme-li se k problematice ordinálního a kardinálního čísla, uvedeme rozdíl na následujícím elementárním příkladu ze života. Koupíme-li si krabičku pastelek s označením 12, je nám jasné, že v krabičce je dvanáct pastelek. Koupíme-li si lístek do divadla s označením 12, pak toto číslo náleží jen jednomu sedadlu v jedné řadě sedadel. Nebudeme vyžadovat přidělení 12 různých sedadel.(Barrow J.D.,2000, s. 43)

Uvědomění si tohoto rozdílu znamenalo významný zlom ve vývoji člověka a názoru na počítání. Jedná se o první krok k abstraktnímu pohledu na počítání a nalézání jeho podstaty, kterou je vztah mezi počty namísto orientace na výčet množství.

V následující tabulce uvádíme několik důkazů toho, že člověk nebyl dříve schopen chápat čísla v kardinálním a ordinálním smyslu současně. Důkazem je jazyková odlišnost tvoření číslovek základních a řadových.

číslovky	anglicky		francouzsky		německy		česky	
	základní	řadové	základní	řadové	základní	řadové	základní	řadové
1	one	first	un	premier	ein	erste	jedna	první
2	two	second	deux	second	zwei	zweite	dva	druhý
3	three	third	trois	troisiéme	drei	dritte	tři	třetí
4	four	fourth	quatre	quatriéme	vier	vierte	čtyři	čtvrtý

Obr. 1 – Odlišnost tvoření číslovek základních a řadových

Nejpatrnější rozdíly jsou v evropských jazycích zaznamenány do čísla 4 a u vyšších čísel se rozdíl stírá. Jedním z vysvětlení je analogie čísla 4 s prsty na jedné ruce bez palce, který vzhledem k jinému postavení nebyl uvažován. Dokladem, který podporuje toto tvrzení je jednotka míry odpovídající šířce dlaně, tedy pěst. Další podporou tohoto tvrzení je, že některé kultury nepočítali s prsty na ruce, nýbrž s mezerami mezi prsty.

2.1 Postupné rozšiřování číselného oboru

Pozůstatkem toho, že lidé postupně poznávali bez počítání množství 1 a 2, která postupně rozšiřovali dalšími čísly do pěti a dále, je i naše dnešní schopnost rozlišit jedním pohledem soubor předmětů, který obsahuje obvykle nejvýše pět objektů. U větších čísel lze tuto schopnost použít tehdy, je-li soubor symetricky uspořádán. Tento smysl pro počet můžeme najít i u malých zvířat, která pouhým pohledem rozeznají, zda-li jsou všechna jejich mláďata pohromadě, nebo některá chybí.

Proces mentálního porovnávání se upravoval, zjednodušoval, až se stával uplatnitelným na různé situace. Lidé si této analogie všimli, čímž došli k tomu, že číslo začali chápat jako abstraktní pojem bez příslušnosti ke konkrétním předmětům.

Počítání jako porovnávání souboru kamenů uplatňovali pastevci, kteří ráno při vypouštění ovcí z ohrady dali za každou ovci kámen do pytlíku. Večer opačným postupem, kdy z pytlíku vyndávali kameny za každou ovci, která se vrátila do ohrady, zjišťovali, jestli se některá z ovcí nezaběhla. Stalo-li se tak, zůstal jim příslušný počet kamenů v pytlíku.

Zajímavostí je, že slovo přiřazovat (angl. tally) je odvozené od francouzského slova taille, ve významu zářez či vrub. Další takovou zajímavostí je, že porovnávání pomocí kamenů jako počítání se anglicky řekne calculate, které je odvozeno z latinského slova calculus – oblázek. (Barrow J.D., 2000)

2.2 Počítání na prstech

Podíváme-li se na jednotlivá slovní označení číslovek, najdeme souvislost mezi částmi lidského těla např. pět – ruka – pěst. Někde však došlo k takovému posunu, že spojitost takových výrazů není tak patrná. Došlo k tomu převážně v důsledku vývoje slov, od kterých byla číslovka odvozena. Slova označující číslovku zůstala nepozměněna kvůli významnosti a častému používání v každodenním životě.

Počítání na prstech bylo univerzální – soubor prstů měl člověk vždy při sobě a nemusel s sebou nosit zástupné soubory jako klacíky a kameny. Existují i takové způsoby počítání, při kterých jsou využívány jiné části těla. Zajímavý způsob byl zaznamenán u obyvatelů Toressova průlivu ještě v 19. století, kteří se dotýkali postupně celé řady částí těla až došli k číslu 33.

V evropské kulturní společnosti, ale nejen zde, je počítání na prstech uskutečňováno tak, že se začíná s dlaní sevřenou v pěst a postupně se otevírá palec jako první a malíček jako poslední. Stejný postup se opakuje na ruce druhé. Opačný postup užívají v Japonsku, kde začínají s dlaní otevřenou a ohýbají jeden prst po druhém. Stejný postup byl zaznamenán u amerických indiánů kmene Navaho, kteří mají pro označení číslovek výrazy, které odpovídají popisu ohýbání prstů. (Barrow J.D., 2000, s.57)

1 – konec je ohnutý (malíček)

2 - ještě jeden je ohnutý (prsteníček)

3 – prostřední je ohnutý

4 – pouze jeden zbývá

5– má ruka je vyčerpaná

Počítání na prstech bylo v Evropě hojně rozšířené ještě v 16. století, v jehož průběhu se do Evropy rozšířily psané číslice indoarabského původu. Před jejich rozšířením bylo užíváno řeckého a římského záznamu čísel, které umožňovaly zapsání poměrně velkého čísla.

2.3 Početní a poziční soustavy

Pro zapisování čísel byly vyvinuty různé způsoby. Používané znaky spolu se způsobem jejich zápisu se nazývají numerační soustavy. Na celém světě se takových systémů vyvinula celá řada, některé primitivní, založené na opakování jednoho znaku, např. vrypu do skály nebo zářezu do dřeva, jiné složitější, které měly velmi rozsáhlý soubor znaků.

Podíváme-li se do současnosti na dnešní způsob zápisu čísel a na operace s nimi, nacházíme analogii u jejich dlouhého vývoje a u způsobu vyvozování čísel na začátku školní docházky dětí. Člověk v pravěku rozeznával pojmy týkající se množství méně – stejně – více. Stejně tak dítě předškolního věku dokáže nejdříve porovnávat bez rozlišování počtu. Postupně docházelo k rozeznávání počtu jako celku, bez rozlišování jeho prvků, přičemž se rozsah takto rozeznávaných čísel postupně rozšiřoval. Pravěký člověk rozlišoval množství představované jediným objektem, co bylo více než jedna, bylo mnoho. Dále se postupně přidávaly číslovky 2, 3, 4 atd. Se stejnou strategií osvojování počtu jsou žáci konfrontováni na počátku 1. třídy.

Čísla byla zpočátku vyjadřována přiřazováním ekvivalentních množin stejnorodých předmětů, jako byly prsty na rukou, kamínky nebo hůlky. Prsty na ruce měl každý při sobě a byl podle nich schopný porovnávat množství. Ještě v 19. století byly objeveny kmeny, které ovládaly jen několik prvních číslovek a pro vyšší čísla využívaly prstů rukou ve smyslu přiřazování. Mezi takové kmeny patřili Andamani v Oceánii, kteří ovládali číslovky 1 (úbatú) a 2 (íkpór). Počítání vyšších hodnot probíhalo přiřazováním s výrazem „a tento“ (anká). Když se dostali k číslu deset, pronesli „všechno“ (ardúm) a spojily ruce. Papuánci na Nové Guiney počítali do čtyř na prstech jedné ruky se zvuky be, be, be, be pro pět prstů, tedy celou ruku měli výraz ibon be, pro deset ibon ali, pokračovali prsty na nohou samba be = 15, samba ali = 20. Pro další počítání využívali prstů rukou i nohou dalších osob. (Kolman A.,1969)

Přiřazování různých množství prstům ruky dalo vzniknout pětkové, desítkové nebo dvacítkové numerační soustavě. Z dvacítkového systému tedy vyplývá počítání s prsty na rukou a na nohou. Tento systém zanechal stopy v evropských jazycích, tedy i v češtině, kde je první dvacítka číslovek tvořena jiným způsobem než následující číslice. Shody a rozdíly vytváření číslovek v různých evropských jazycích jsou uvedeny v následujících tabulkách č. 3 a 4.

U některých evropských jazyků např. u německého jazyka si můžeme všimnout odlišného utváření prvních dvou číslovek druhé desítky, které je ovlivněno historickým vývojem odvozeným od počítání po tuctech.

Další výjimku v pravidelnosti tvoření číslovek představuje francouzský jazyk, ve kterém je odlišnost tvoření číslovek v druhé desítce uplatněna až do čísla 16 a ve kterém se některé další číslovky tvoří pomocí násobku dvacítek (francouzské označení čísla 20 je vingt). Jako ukázku jsme zvolili následující příklad:

	francouzky	český překlad
80	quatré vingts	4 dvacítky
90	quatré-vingts-dix	4 dvacítky deset

Obr. 2 – Ukázka francouzského tvoření číslovek

	česky	anglicky		česky	anglicky		česky	anglicky
1	jedna	one	11	jedenáct	eleven	21	dvacet jedna	twenty-one
2	dva	two	12	dvanáct	twelve	22	dvacet dva	twenty-two
3	tři	three	13	třináct	thirteen	23	dvacet tři	twenty-three
4	čtyři	four	14	čtrnáct	fourteen	24	dvacet čtyři	twenty-four
5	pět	five	15	patnáct	fifteen	25	dvacet pět	twenty-five
6	šest	six	16	šestnáct	sixteen	26	dvacet šest	twenty-six
7	sedm	seven	17	sedmnáct	seventeen	27	dvacet sedm	twenty-seven
8	osm	eight	18	osmnáct	eighteen	28	dvacet osm	twenty-eight
9	devět	nine	19	devatenáct	nineteen	29	dvacet devět	twenty-nine
10	deset	ten	20	dvacet	twenty	30	třicet	thirty

Obr.3 – Konfrontace tvoření číslovek podle užívaného číselného systému v českém a anglickém jazyce

	německy	francouzsky		německy	francouzsky		německy	francouzsky
1	ein	un	11	elf	onze	21	einundzwanzig	vingt et un
2	zwei	deux	12	zwölf	douze	22	zweiundzwanzig	vingt-deux
3	drei	trois	13	dreizehn	treize	23	dreiundzwanzig	vingt-trois
4	vier	quatre	14	vierzehn	quatorze	24	vierundzwanzig	vingt-quatre
5	fünf	cinq	15	fünfzehn	quinze	25	fünfundzwanzig	vingt-cinq
6	sechs	six	16	sechzehn	seize	26	sechsundzwanzig	vingt-six
7	sieben	sept	17	siebzehn	dix-sept	27	seibenundzwanzig	vingt-sept
8	acht	huit	18	achtzehn	dix-huit	28	achtundzwanzig	vingt-huit
9	neun	neuf	19	neunzehn	dix-neuf	29	neunundzwanzig	vingt-neuf
10	zehn	dix	20	zwanzig	vingt	30	dreissig	trente

Obr. 4 – Konfrontace tvoření číslovek podle užívaného číselného systému v německém a francouzském jazyce

2.4 Historie zápisu přirozených čísel v jednotlivých oblastech

Pro znázornění většího počtu bylo zapotřebí zvolit vhodný způsob pojmenování a zapsání. V různých kulturních oblastech se užívalo různých číselných znaků v různém počtu, tzn. vytvořili se různé numerační soustavy.

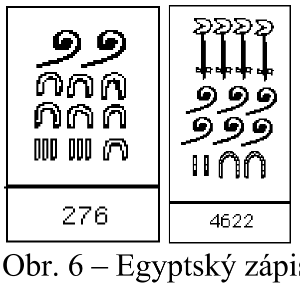
Člověk usiloval o trvalý záznam zápisu čísla. Nejstarším takovým zápisem byly vruby do dřeva nebo jiných materiálů. V roce 1937 byla ve Věstonicích na Moravě Karlem Absolónem nalezena vrubovka v podobě vlčí kosti s 57 zářezy jejíž stáří bylo odhadováno na 30 000 let. Prvních 25 zářezů je uspořádáno ve skupinách po pěti a je zakončeno prodlouženým vrubem. Stejným prodlouženým vrubem je započato dalších 30 vrubů se stejným uspořádáním.

2.4.1 Egypt

Jiným způsobem záznamu čísel je obrázkové písmo, které využívali Egypťané. První způsob číselného záznamu byly čárky sdružované do skupin po deseti, čímž byl položen základ desítkové soustavy. Pro skupinu deseti shodných znaků byl vytvořen vždy nový symbol (viz. tabulka). Pomocí těchto znaků mohli zapsat libovolně velká čísla, i když jejich záznam byl poměrně zdlouhavý. Z tohoto důvodu docházelo ke zjednodušování a krácení znaků, které dalo vzniknout písmu hieratickému.

𓏺	1	dřívko
𓎆	10	svitek
𓍢	100	provaz
𓆼	1 000	lotosový květ
𓂭	10 000	prst
𓆐	100 000	pulec
𓁨	1 000 000	žasnoucí muž

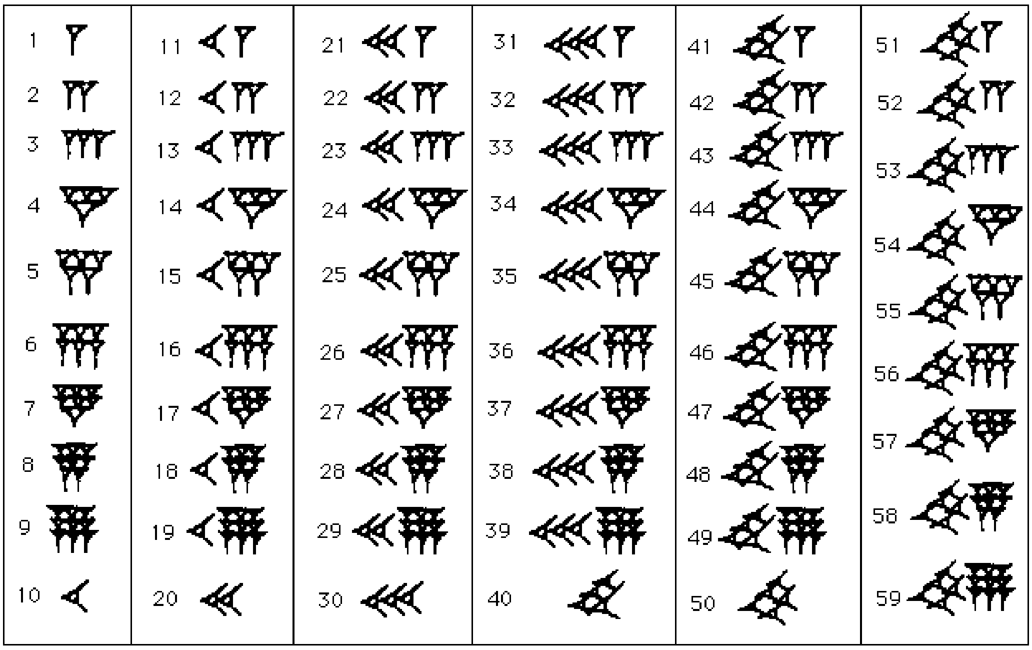
Obr. 5 – Egyptské číselné symboly



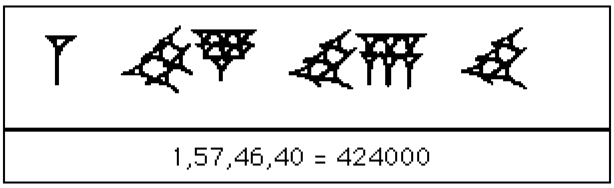
Obr. 6 – Egyptský zápis čísel

2.4.2 Mezopotámie

Klínové písmo v Mezopotámii bylo poměrně složité a obsahovalo několik stovek znaků. Čísla do 60 byla zapisována jako součet čísel 1 (šekel) a 10 (mina). Čísla nad 60 byla odlišována podle pozice. Klín vyrytý o 1 místo vlevo značil 60 (talant). Do potíží se tento systém dostává u vyšších čísel což vyvolalo zavedení nuly, která označovala, že jednotky jednotlivého řádu chybí. Šedesátková soustava se nám v některých podobách zachovala dodnes. Kruh se dělí na 360°, hodina na 60 minut. Jedna kopa obsahuje 60 kusů, tucet 12 kusů.



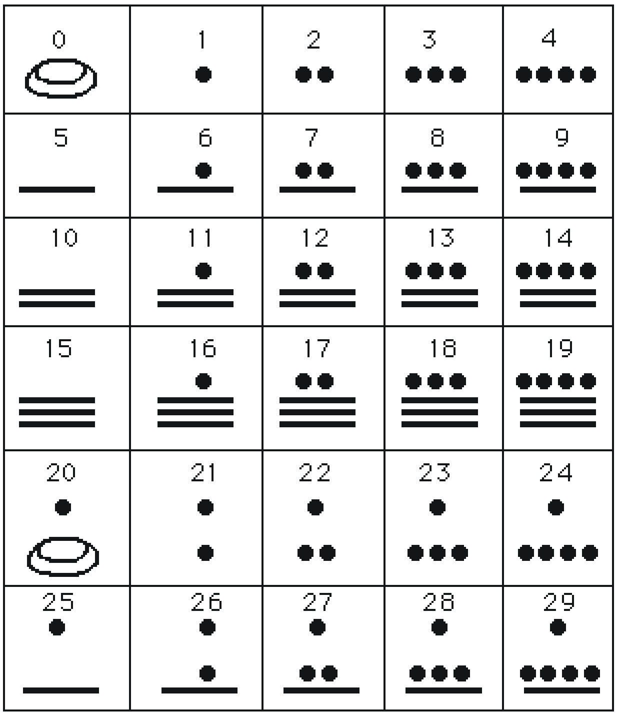
Obr. 7 – Zápis čísel v mezopotámském číselném systému



Obr. 8 – Mezopotámský zápis čísla

2.4.3 Mayové

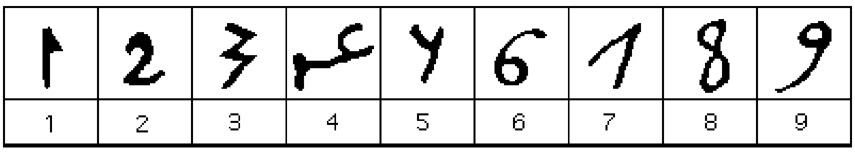
Symbolický systém Mayů byl velmi vyspělý. Byl založen na systému místních hodnot o základu 20 a 5 a tvořil poziční soustavu. Pro zapsání jakéhokoliv vysokého čísla bylo zapotřebí pouze tří různých symbolů, což bylo praktické. Čísla se zapisovala do sloupce zespodu směrem nahoru.



Obr. 9 – Mayský číselný systém

2.4.4 Indie

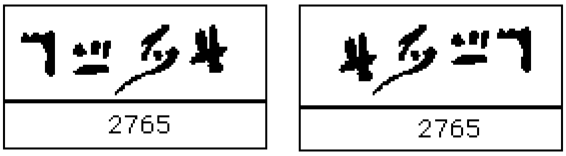
Číselný systém užívaný v současnosti téměř po celém světě pochází od Indů, jejichž písmo sice nebylo rozluštěno, ale jejichž číselný systém nám je důvěrně známý. Indové vytvořily desítkou poziční soustavu, kterou od nich převzali Arabové, kteří ji rozšířili po celém světě.



Obr. 10 – Symboly indického číselného systému

2.4.5 Čína

Dalším odlišným číselným systémem byl čínský číselný systém, který se vyvinul z obrázkového písma do podoby znaků vyjadřujících vždy celé slovo.



Obr. 11 – Zápis čísel čínským systémem znaků

2.4.6 Řecko

Odlišný systém užívali Řekové, kteří vycházeli ze své abecedy obsahující 27 písmen. Pod jejich vlivem došlo kolem roku 738 n.l. k prvnímu zápisu nuly v dnešní podobě jako symbol „0“. Aby se čísla odlišila od písmen byl používán symbol apostrofu (čáry).

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Obr. 12 – Symboly zápisu řeckého číselného systému pro desítky

͵Α	͵Β	͵Γ	͵Δ	͵Ε	͵Ϛ	͵Ζ	͵Η	͵Θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Obr. 13 – Symboly zápisu řeckého číselného systému pro tisíce

2.4.7 Římský číselný systém

Z historie nám nejvíce známým numeračním systémem je římský číselný systém. Římané vytvořili číselný zápis pomocí 7 písmen v poziční soustavě. Pro tento systém je charakteristické, že žádná čtyři stejná písmena nesmí být zapsána za sebou z důvodu zkrácení zápisu. Pro takový zápis se využívá znaku vyššího řádu, před který se přidají znaky nižšího řádu v hodnotě, kterou je potřeba odečíst pro vyjádření příslušného čísla. Dnes se s těmito znaky můžeme setkat na cifernících hodin, na význačných stavbách, kde značí letopočet vzniku stavby, nebo také pro označování kapitol knih, měsíců v roce a městských čtvrtí. Hlavním důvodem přechodu na arabský způsob číslování byla složitost zápisu při matematických výpočtech.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Obr. 14 – Symboly římského číselného systému

3. Psychologický pohled na budování představ přirozených čísel

Na tématiku přirozených čísel můžeme nahlížet z několika pohledů. Vycházet budeme z historie, a to z hlediska vzniku a vývoje matematických pojmů. Zde nacházíme analogii mezi osvojováním si nových poznatků jednotlivce a vývoje, ke kterému se lidstvo postupem času propracovávalo.

Představy o matematických pojmech vznikají v kontaktu dětí s reálnými situacemi v jejich světě. Vznikají tak představy o prvních číslech a o operacích s nimi. Dítě řeší takové problémy, které jsou pro něj aktuální, jsou mu blízké a jsou součástí jeho duševního světa.

Důležitý je proces přeměny množství zkušeností na zobecněný pojem. Tento proces se nazývá abstrakční zdvih a měl by být spojen s vlastní objevitelskou činností dětí. Čísla jsou abstraktní pojmy, chceme-li je dítěti přiblížit, učiníme tak pomocí reprezentantů, které můžeme vnímat smysly. Máme mnoho prostoru pro různé vyjádření reprezentantů. Chceme-li reprezentovat číslo 3, můžeme tak učinit třemi shodnými předměty, slovem tři nebo číslicí 3. Reprezentovat číslo 3 předměty je vhodné z hlediska možnosti manipulace s předměty. Různost předmětů dítě motivuje.

3.1 Etapy procesu uchopení čísla

První etapou jsou *separované modely* čísla, kde dítě z předmětů utváří skupiny prvků, přiřazuje jim příslušné slovní doprovody a pomocí porovnávání zjišťuje, že nezáleží na druhu předmětů, které určité číslo reprezentují. K tomuto zjištění by mělo dítě dojít samo, není potřeba mu tato poučení sdělovat.

Po období separačních modelů následuje první abstrakční zdvih, který vede k etapě *univerzálních modelů*. V podstatě jde o přesun jednoho, ale i více zástupných separačních modelů, k modelům, které dítě uplatňuje při zjišťování počtu jiných předmětů. Může jít o prsty na rukou, kuličky počitadla atd. Takový model se stane univerzálním.

I po této etapě následuje abstrakční zdvih, který umožňuje přechod od univerzálních modelů k *abstraktním pojmům* – v našem případě jde o čísla. Urychlení poznávacího procesu prozrazením abstrakčního zdvihu nevede k plnohodnotnému poznání. Takové poznání je formální. Jestliže není znalost opřena o žádný separovaný model, je také taková znalost formální. Je paradoxem, že někteří učitelé žákům brání v užívání univerzálních modelů jako strategii pro výpočet, např. v podobě počítání na prstech. Není zde oprávněné tvrdit, že na tomto způsobu počítání žák ustrne, protože při dostatečném upevnění spoje tato strategie odezní. Je nutné uvědomit si, že nelze budovat abstraktní poznatky bez vytvoření separovaných a univerzálních modelů. (Kuřina F., 2001)

Z historického hlediska je přechod od separovaných k univerzálním modelům a od univerzálních k abstraktním vždy dlouhodobý proces, ke kterému došlo díky situacím z každodenního života tehdejších lidí, jako byla směna zboží, rozdělování potravy apod. Stejně tak dnes by si žáci měli osvojovat nové poznatky konkrétními činnostmi, které mají blízko jejich duševnímu světu.

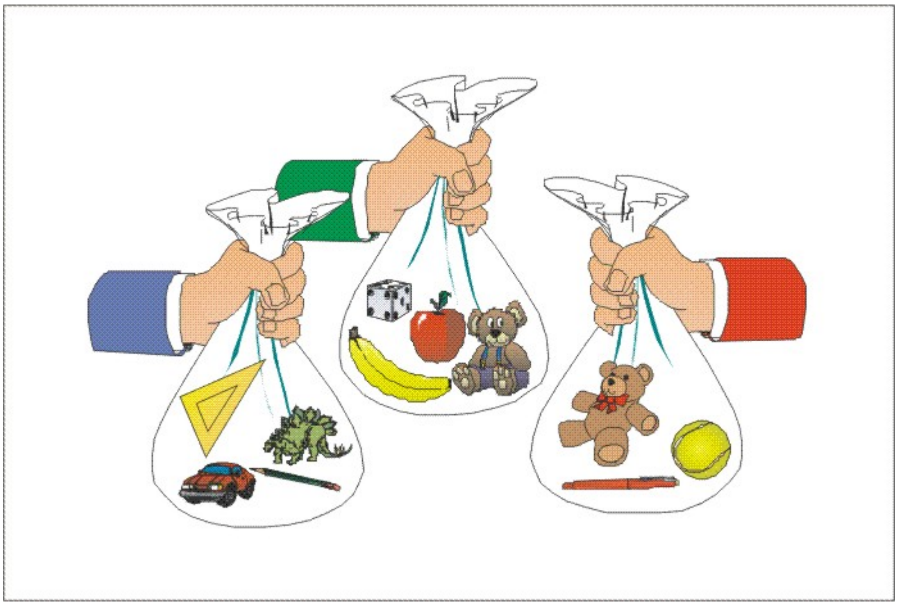
4. Přirozená čísla na základních školách

Na 1. stupni se žáci setkávají s přirozenými čísly ve dvou etapách. První etapou je numerace, kde žáka vedeme k pochopení podstaty čísel a je náplní celého 1. ročníku. Druhou etapou jsou operace s přirozenými čísly.

S určitými poznatky přicházejí děti již do první třídy. Takové znalosti označujeme jako předčíselné představy:

- umí vyjmenovat řadu čísel, a to většinou do pěti
- umí porovnat množství, převážně tam, kde je velký rozdíl mezi prvky jednotlivých skupin
- dokáží třídit předměty podle jednoho i více znaků
- zvládají párové přiřazování, které představuje spojování např. hrnečků a talířků, velkého tvaru s malým apod.
- seriace – uspořádání objektů podle velikosti
- rozlišování celku a částí, které je charakterizováno jako doplňování nebo dokreslování částí do celků (Zelinková O., 2001)

Z těchto elementárních znalostí vycházíme při matematické etudě, kdy si děti do průhledného sáčku dají libovolný počet předmětů a porovnáním vytvoří skupinky dětí o stejném počtu předmětů. Tuto hru můžeme provádět s žáky před samotnou znalostí čísel, ale i k vyvozování rovnosti a nerovnosti čísel. (Coufalová J., 2000)



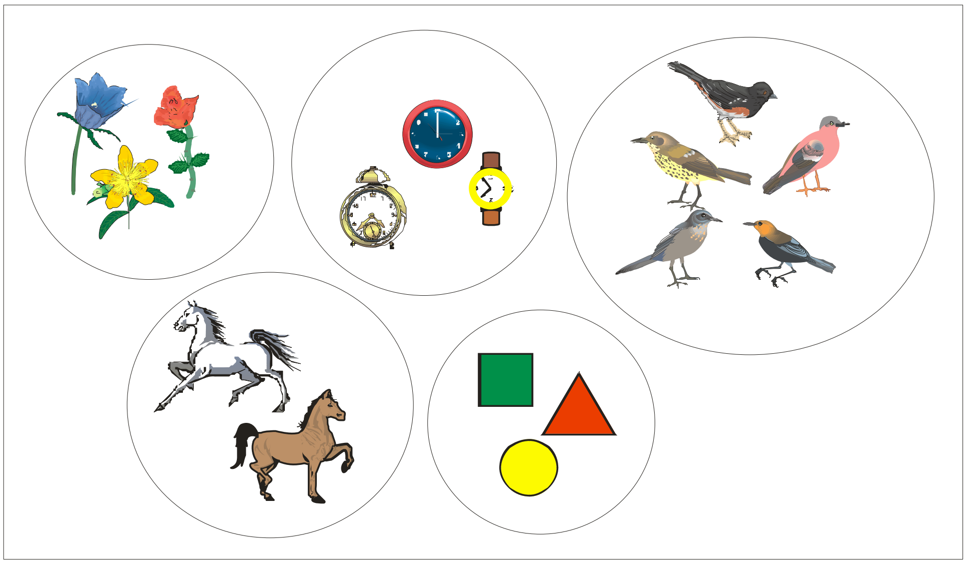
Obr. 15 – Ilustrace matematické etudy

4.1 Modelace

Má-li žák určit, kolik prvků je ve víceprvkové skupině, postupuje takovým způsobem, že vyslovuje číselnou řadu a každý prvek označí číslovkou. Poslední jmenovaná číslovka je počtem objektů v souboru, jehož množství zjišťujeme – ordinální číslo. Pro potřeby 1.stupně ZŠ se rozdíl mezi kardinálním a ordinálním číslem stírá. A přechází jen na způsob zjišťování počtu.

Modelace přirozených čísel je hlavní náplní 1. ročníku ZŠ a jde o předkládání takových modelů, jejichž opakování a pestrost vyvolávají u dětí spojení mezi množstvím konkrétních předmětů a číslem jako abstraktním pojmem.

Konkrétním námětem pro modelaci nižších počtů může být hledání předmětů v okolí se společnou vlastností. Do skupin zahrnujeme objekty podle funkce (hračka, školní potřeby, květiny), barvy (červená, modrá), velikosti (velké, malé), materiálu (dřevěné, kovové) a mnohých dalších vlastností, z nichž některé ilustrujeme na obrázku č. 16. To znamená, že do stejné skupiny zahrneme např. všechny obrázky, které jsou podle kritéria třídění zastoupeny třemi objekty (květiny, hodiny, geometrické rovinné útvary).



Obr.16 – Ilustrace k námětu pro modelaci

V 1. ročníku nedělá nacházení vhodných reprezentantů obtíže. Do obtíží se však můžeme dostat při modelaci ve vyšších ročnících, kde jsou předmětem zkoumání přirozená čísla vyšších řádů. Nebylo by správné domnívat se, že žákům stačí analogie z nižších řádů přirozených čísel. Právě již zmiňovaná objevitelská či konkrétní činnost s předměty představujícími vyšší řády čísel je podstatná pro pochopení zákonitostí desítkové soustavy a značně přispívá k schopnostem odhadování vyšších počtů. Vhodnými pomůckami pro vyvozování vyšších řádů přirozených čísel mohou být stovková tabulka, tisícová knížka, milimetrový papír nebo drobné předměty jako jsou kancelářské spínky, knoflíky, korálky a přírodní materiály jako jsou žaludy, kaštany, šípky apod. Jednu z metod práce se stovkovou tabulkou uvádíme v příloze. První dvě uvedené pomůcky bývají přílohou nově vydávaných učebnic.

4.2 Číselné představy

Od nástupu do 1. ročníku ZŠ budujeme u žáků číselné představy, které se postupně rozvíjejí podle osvojovaných číselných oborů. Jestliže chceme zjistit, jestli žáci mají správně osvojené číselné představy, můžeme žáky podrobit následujícím zkouškám:

- určování množství více – stejně – méně takovým způsobem, kdy žáci tvoří uspořádané skupiny předmětů či obrázků
- určení množství bez počítání po jedné, např. s použitím hracích kostek, tzv. globální zjišťování množství jedním pohledem
- ústní označování počtu prvků
- demonstrovat zadané číslo množstvím a naopak, přiřadit danému množství příslušné číslo
- orientace na číselné ose – označit číslo, které je hned před zadaným číslem, hned za zadaným číslem, označit číslo o dvě menší, větší než je zadané číslo
- čtení a následně jmenování číslovek v řadě vzestupné i sestupné
- řazení karet s čísly podle velikosti
- porovnávání čísel – děti mohou zaměňovat velikost čísla či předmětů vůči jejich počtu
- rozklad čísel v jednotlivých číselných oborech (Zelinková, O., 2001)

4.3 Číselné obory přirozených čísel

Učivo o přirozených číslech je hlavní náplní matematiky na 1. stupni ZŠ. Rozděluje se do několika oborů, které jsou zařazeny do příslušného ročníku 1. stupně ZŠ.

V 1. ročníku je učivo přirozených čísel rozděleno do několika oborů. Oboru čísel 1 až 5 se věnujeme zpravidla první tři měsíce školní docházky. Dochází k vyrovnávání znalostí mezi jednotlivými žáky, ty jsou doplňovány a zpřesňovány. Dalším úkolem je osvojení si psaní číslic. To vše se uskutečňuje hravou formou, kde by žáci měli používat pestré pomůcky.

Získávání dovedností v oboru 6 až 10 s 0 je náplní učiva 1. ročníku zasahující zhruba do konce prvního pololetí. Pořadí osvojování nových číslic je 6, 0, 7, 8, 9, 10 a je obvykle novým učivem, které postupně rozšiřuje obor osvojených čísel.

Posledním probíraným číselným oborem v 1. ročníku je obor do 20, kde se využívá analogie z první desítky, což většině žáků nečiní problémy. Větší obtíže se mohou vyskytnout při přechodu přes desítku.

Ve 2. třídě se žáci věnují oboru do 100 a v dalších třídách se postupně obor osvojených čísel zvyšuje o další řády. V 5. třídě by žáci měli zvládnout přečíst a zapsat libovolně velké číslo.

Chceme-li diagnostikovat, jestli žáci mají dostatečně osvojené operace v oboru přirozených čísel, můžeme tak učinit zadáním nestandardních úloh, které můžeme rozdělit do několika kategorií:

- úlohy s antisignálem
- vytváření slovních úloh na zadané příklady
- neúplný zápis příkladů, do kterého žáci doplní příslušné číslice
- algebrogramy a magické obrazce
- konstrukce čísel daných vlastností

Některými z těchto kategorií se budeme zabývat v části Sbírka úloh.

4.4 Přirozená čísla podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání

Učivo o přirozených číslech je začleněno ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, která je založena na praktických činnostech, sleduje využití matematických dovedností v běžném životě a posiluje schopnost logického myšlení. Žáci si osvojují základní matematické pojmy a symboly, matematické postupy a způsoby jejich využití, učí se uplatňovat matematická pravidla. Učivo o přirozených číslech prolíná celým základním vzděláváním, postupně pomáhá žákům získávat matematickou gramotnost a učí je dovednostem využitelným v praktickém životě.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je rozdělen do následujících tématických okruhů:

- Čísla a početní operace
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a prostoru
- Aplikační úlohy

Tematický okruh Čísla a početní operace, do kterého spadá učivo o přirozených číslech je zařazen na 1. stupeň a dále se rozvíjí na 2. stupni. Žáci se postupně seznamují s čísly, vytváří si konkrétní představu o číslech a číselné ose, osvojují si postupy matematických operací, jejich důležitost a užití. Jedná se především o sčítání, odčítání, násobení a dělení, odhadování a zaokrouhlování.

Cílové zaměření tématického okruhu Čísla a početní operace je pro potřeby 1. stupně rozdělen do očekávaných výstupů pro 1. období (1. až 3. ročník) a 2. období (4. a 5. ročník), které uvádíme v příloze. (Rámcový vzdělávací plán pro základní vzdělávání, 2007)

5. Testování

Pro zjištění úrovně matematických dovedností studentů oboru učitelství 1. stupně ZŠ byly vypracovány dva testy. První z nich – varianta A - je určen pro studenty na počátku studia, tedy před kurzem zabývajícím se přirozenými čísly. Druhý test – varianta B - je určený pro studenty na konci studia. Předpokládaným výsledkem těchto testů je alespoň 75 % úspěšnost studentů při řešení obou variant testů. Od srovnání těchto dvou testů očekáváme větší úspěšnost v řešení druhého z nich, tedy té varianty po absolvování učiva o přirozených číslech. Dalším faktorem, na který bychom se chtěli zaměřit, je způsob řešení zadaných úloh a rozbor případných chyb častěji zastoupených.

Testované skupiny představují vzorek studentů oboru učitelství a výsledky jsou s omezenou platností rozšiřitelné na širší okruh těchto studentů. Závěry z tohoto testu však nejsou zobecnitelné, neboť by bylo potřeba provést rozsáhlejší testování, které by mohlo být předmětem zkoumání navazujících prací na téma přirozených čísel.

Při vyhodnocování výsledků jsme se zaměřili na bodové ohodnocení, kde jsme pro každý z příkladů stanovili maximální hodnotu získaných bodů na 20, tedy při správném řešení celého testu může každý obdržet 100 bodů. Ze všech získaných bodů jsme poté sestavili průměr pro celou skupinu. Z těchto hodnot budeme vycházet při porovnávání úrovně znalostí před probíráním tématu přirozených čísel a po jeho probírání.

5.1 Test – varianta A

Požadavkem zadání testové varianty A bylo testování studentů, kteří během svého studia neprošli matematickým kurzem s tématem přirozených čísel. Pro tyto podmínky byl první z testů zadán studentům 1. ročníku oboru učitelství 1. stupně ZŠ. Skupina se skládala z 16 studentů, kteří měli na vypracování testu 45 minut. Test je složen z pěti elementárních úloh, kde každá představuje jeden z okruhů příkladů, které pomáhají pochopení systému desítkové soustavy a rozvíjení logického myšlení. Cílem je zjištění úrovně dovedností při řešení úloh o přirozených číslech, které si studenti přinášejí ze základních a středních škol.

Studenti při řešení varianty A dosahovali výsledků, které jsme pro přehlednost upravili do následující tabulky č. 17. Dále budeme hodnotit počet získaných bodů v jednotlivých úlohách, strategie řešení příkladů a individuální rozdíly v řešení.

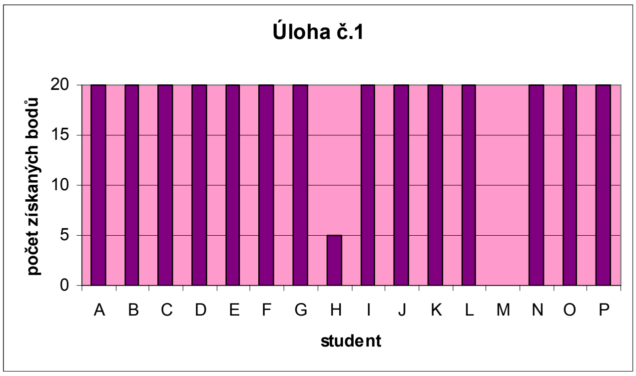
student		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	skupina průměrně
úloha	1.	20	20	20	20	20	20	20	5	20	20	20	20	0	20	20	20	17,81
	2.	20	20	20	20	0	0	0	0	0	20	20	20	10	20	20	10	12,50
	3.	20	20	0	20	20	20	20	20	20	0	0	20	20	20	0	20	15,00
	4.	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20,00
	5.	20	20	10	20	10	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	18,75
celkem bodů		100	100	70	100	70	80	80	65	80	80	80	100	70	100	80	90	84,06

Obr. 17 – Tabulka úspěšnosti studentů v řešení testové varianty A podle bodového hodnocení

5.1.1 Úloha č. 1

Rozložte číslo 1 648 na tři sčítance tak, aby první byl o 170 větší než třetí a druhý o 54 větší než první.

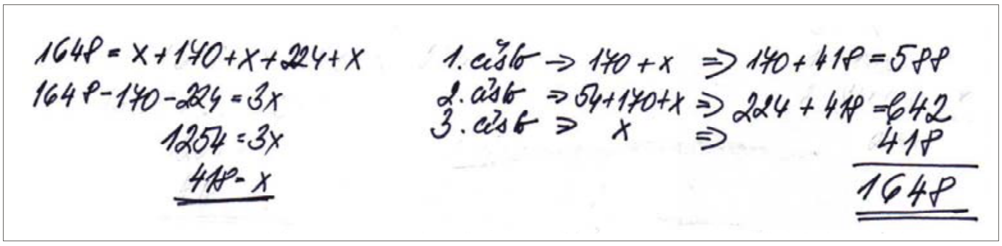
Různé způsoby řešení prvního příkladu jsou zaznamenány v následující tabulce. Studenti řešili tuto úlohu s 89,06 % úspěšností. Většina z nich volila řešení pomocí rovnice, které uvádíme v následujícím obrázku. Ti, kteří se pokoušeli vyřešit příklad pomocí jiné strategie, se nedostali ke správnému výsledku.



Obr. 18 – Graf úspěšnosti řešení 1. úlohy

úloha č.1	způsob řešení	
student	rovnice	chybné řešení
A	●	
B	●	
C	●	
D	●	
E	●	
F	●	
G	●	
H		●
I	●	
J	●	
K	●	
L	●	
M		●
N	●	
O	●	
P	●	

Obr. 19 – Přehled způsobů řešení 1. úlohy

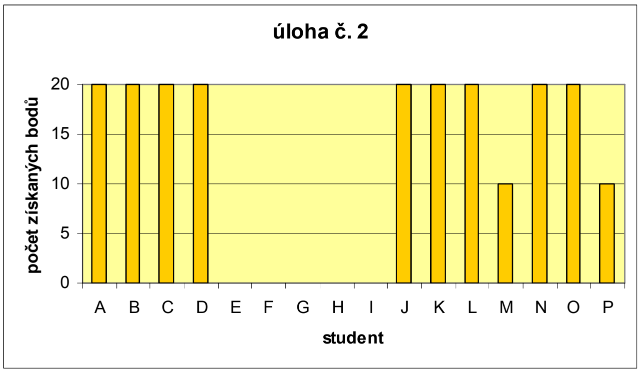


Obr. 20 - Řešení studenta A

5.1.2 Úloha č.2

Součet tří čísel je 456 789. Jedno z čísel je složeno ze 3 sedmiček a 2 šestek, druhé ze 4 osmiček a pětky, třetí z nuly, jedničky, 3 trojek a čtyřky.
Která jsou to čísla?

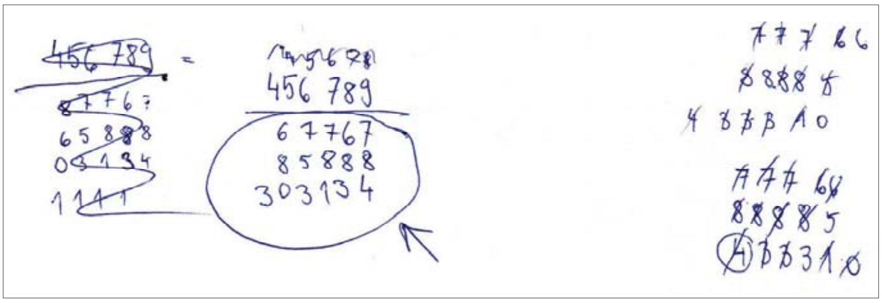
Pro druhou úlohu existují dvě různá řešení. V tabulce č. 22 uvádíme, ke kterému výsledku se studenti dopočítali. U naprosté většiny nevyřešených úloh nemůžeme určit chybu, protože se studenti nepustili do vyřešení úlohy.



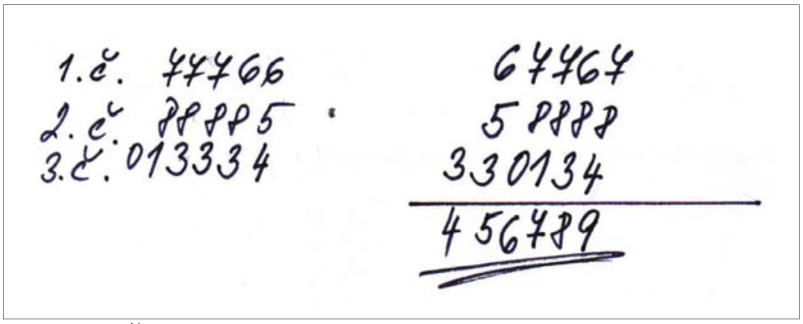
Obr. 21 – Graf úspěšnosti řešení 2. úlohy

úloha č.2	způsob řešení		
student	1. řešení	2. řešení	chybné řešení
A		●	
B	●		
C		●	
D	●		
E			●
F			●
G			●
H			●
I			●
J	●		
K	●		
L	●		
M			●
N	●		
O	●		
P		●	
celkem	7	3	6

Obr. 22 – Tabulka způsobů řešení 2. úlohy



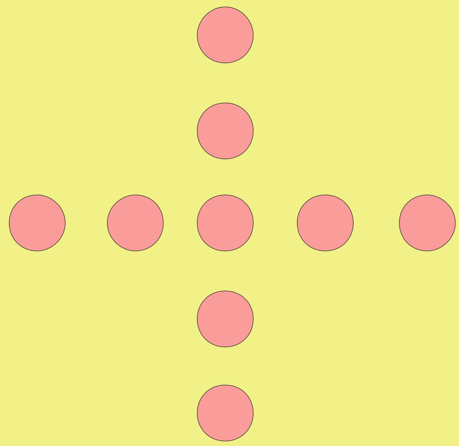
Obr. 23 - Řešení studenta O, 1. řešení



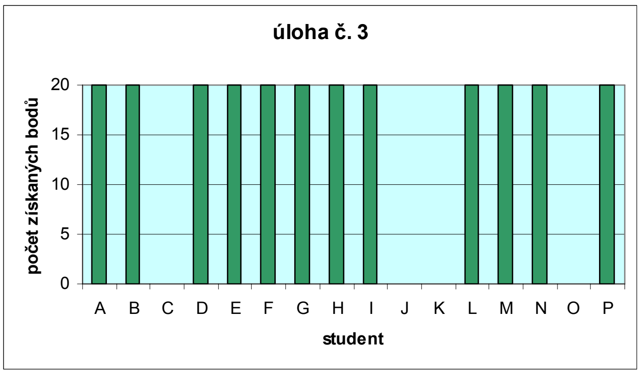
Obr. 24 - Řešení studenta A, 2. řešení

5.1.3 Úloha č.3

Doplň všechna z čísel od 1 do 9 do následujícího obrazce. Součet v každém jeho rameni (tento obrazec má 2 ramena) je 23.



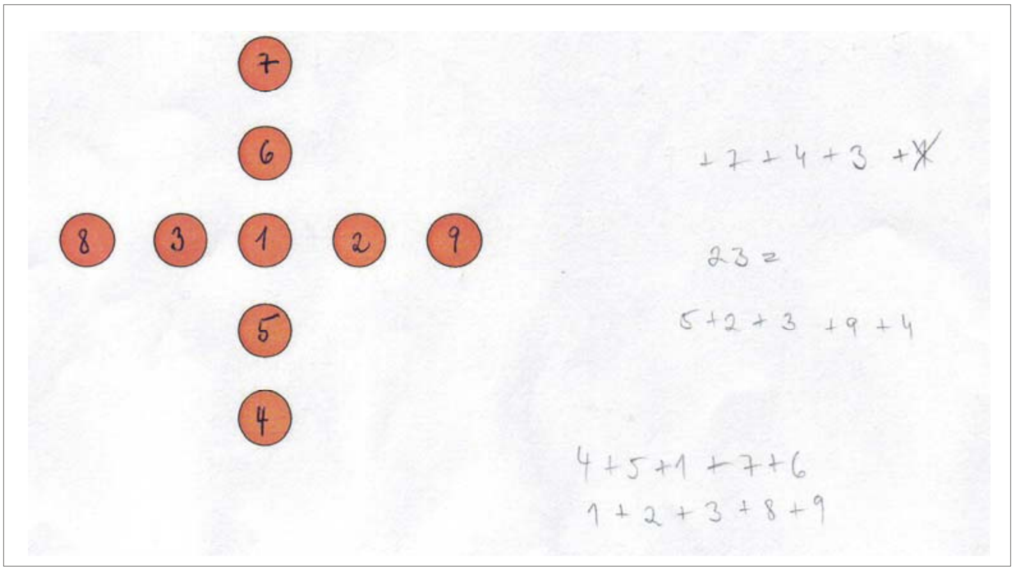
Tato úloha představuje čtyři různá řešení, která uvedeme v ukázkách z vlastních testů studentů. S vyřešením neměli studenti větší problémy. Čtyři chybná řešení tohoto příkladu vyplývají z nepochopení zadání úkolu, tedy že mají do obrazce vepsat všechna z čísel od 1 do 9, nikoli čísla v tomto intervalu podle svého výběru.



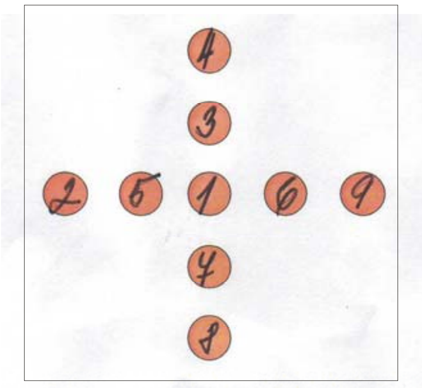
Obr. 25 – Graf úspěšnosti řešení 3. úlohy

úloha č.3	způsob řešení				
student	1. řešení	2. řešení	3. řešení	4. řešení	chybné řešení
A		●			
B	●				
C					●
D				●	
E	●				
F	●				
G	●				
H				●	
I	●				
J					●
K					●
L	●				
M				●	
N			●		
O					●
P	●				
celkem	7	1	1	3	4

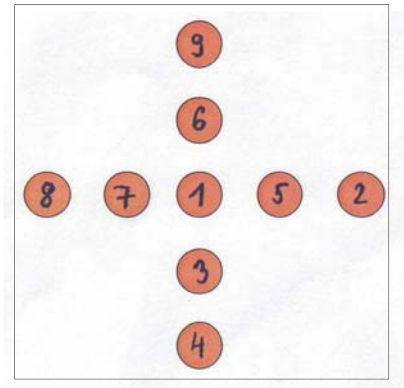
Obr. 26 – Tabulka způsobů řešení 3. úlohy



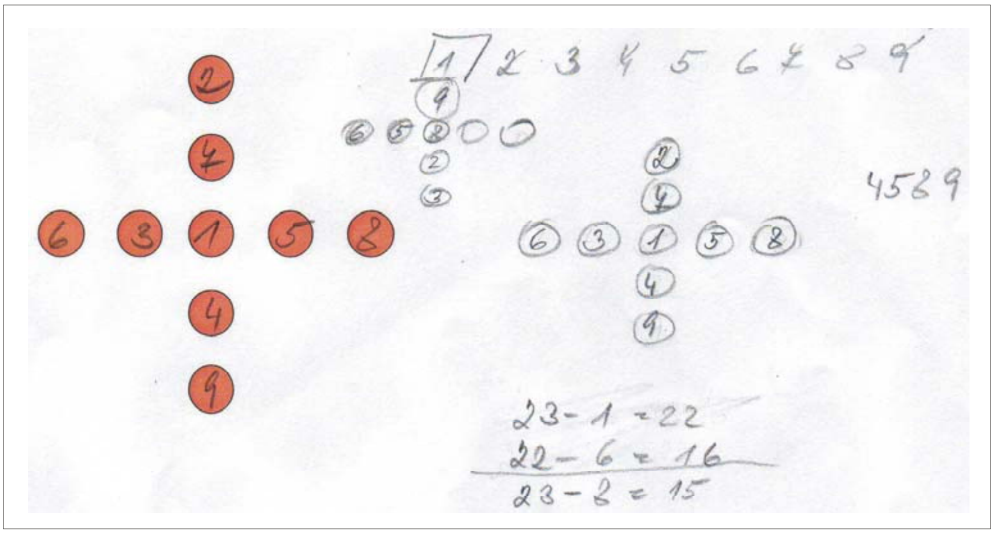
Obr 27 - Řešení studenta G, 1. řešení



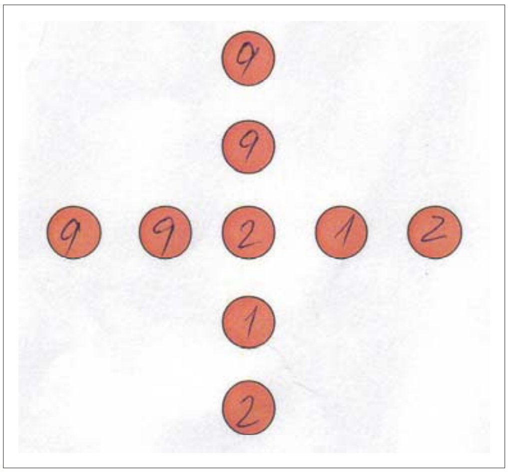
Obr. 28 - Řešení studenta A , 2. řešení



Obr. 29 - Řešení studenta N, 3. řešení



Obr. 30 – Řešení studenta M, 4. řešení



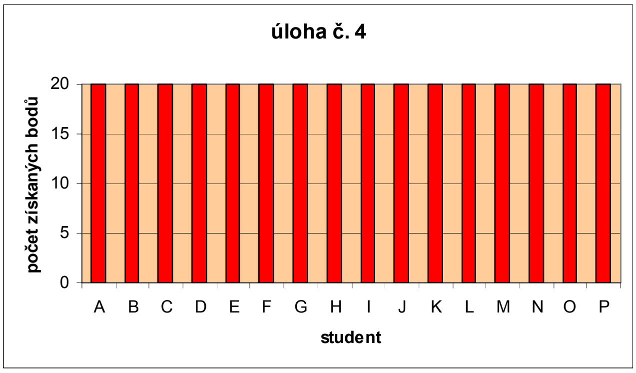
Obr. 31 - Chybné řešení studenta K

5.1.4 Úloha č. 4

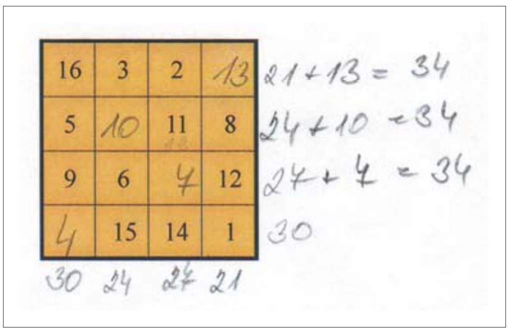
Do prázdných políček vepište čísla 4, 7, 10, 13 tak, aby byl daný čtverec magický.

16	3	2	
5		11	8
9	6		12
	15	14	1

Řešení tohoto příkladu nebylo pro studenty obtížné, což také dokazuje sto procentní úspěšnost vyřešení úkolu. Při dalším průzkumu by bylo vhodné zvolit příklad vyšší obtížnosti.



Obr. 32 – Graf úspěšnosti řešení 4. úlohy



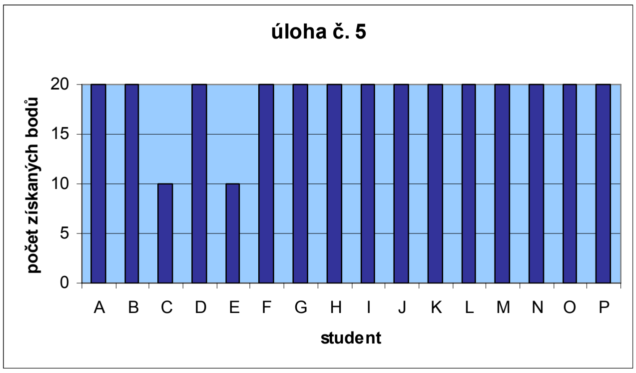
Obr. 33 - Řešení studenta M

5.1.5 Úloha č. 5

Nahraďtě tečky číslicemi tak, aby byla matematická operace správně.

$$\begin{array}{r} 5\,.\,0\,. \\ +\,.\,2\,.\,5 \\ \hline 7\,0\,7\,0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7\,.\,.\,0 \\ -\,.\,4\,9\,. \\ \hline 4\,0\,0\,4 \end{array}$$

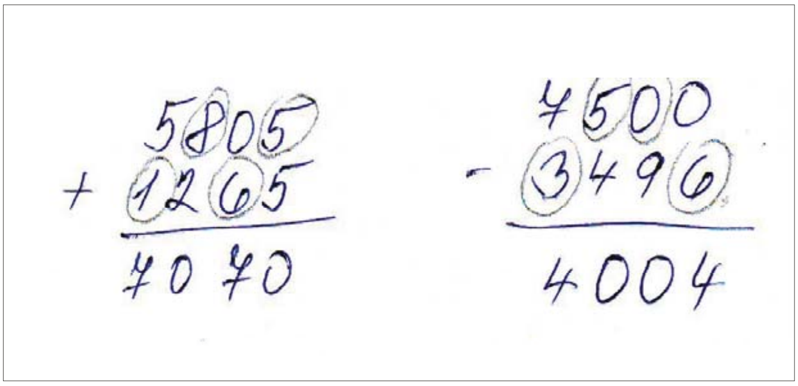
Opět i řešení dvou alegebrogramů nepředstavovalo pro studenty větší překážku. Přesto se objevilo v každém z nich chybné řešení, které bylo způsobeno neuvědoměním si zákonitostí systému desítkové soustavy při přechodu mezi řády jednotek.



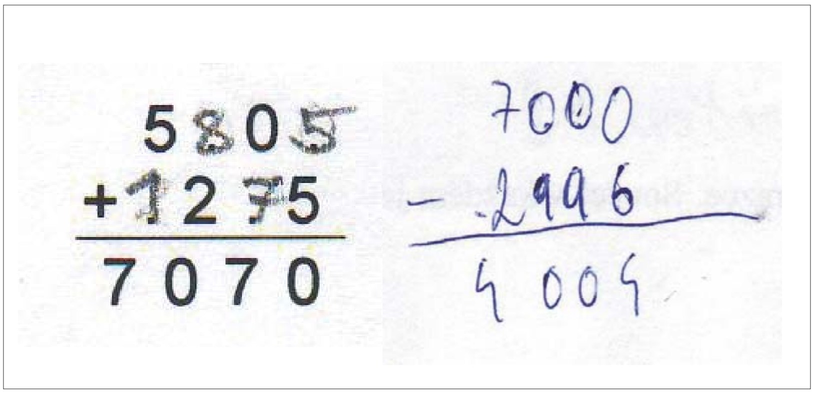
Obr. 34 – Graf úspěšnosti řešení 5. úlohy

úloha č.5	příklad a)		příklad b)	
student	správné řešení	chybné řešení	správné řešení	chybné řešení
A	●		●	
B	●		●	
C	●			●
D	●		●	
E		●	●	
F	●		●	
G	●		●	
H	●		●	
I	●		●	
J	●		●	
K	●		●	
L	●		●	
M	●		●	
N	●		●	
O	●		●	
P	●		●	
celkem	15	1	15	1

Obr. 35 – Tabulka úspěšnosti řešení 5. úlohy



Obr. 36 - Řešení studenta K



Obr. 37 - Chybná řešení studentů E a C

5.2 Testu - varianta B

Druhý test je určený pro studenty na konci studia, proto jsme ho zadali studentům 2. ročníku oboru učitelství 1. stupně ZŠ, kteří již absolvovali předměty zabývající se učivem o přirozených číslech. Opět se skládá z pěti úloh z jednotlivých kategorií příkladů rozšiřujících okruh přirozených čísel o příklady hodící se do zájmové či zábavné matematiky. Tyto úlohy jsou voleny tak, aby jejich obtížnost odpovídala znalostem studentů po absolvování kurzu o přirozených čísel, tedy jejich obtížnost je vyšší.

Výsledky jednotlivých studentů z testované skupiny se zadáním varianty B jsme pro přehledné porovnání zaznamenali do níže uvedené tabulky č. 38. Rozbor jednotlivých příkladů je téměř vždy doplněn tabulkou, grafem a příklady jednotlivých způsobů řešení.

student		R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	skupina průměrně
úloha	1.	20	20	20	20	15	20	20	5	20	20	20	20	18,33
	2.	15	15	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	19,17
	3.	20	20	20	20	20	20	20	0	20	20	20	20	18,33
	4.	20	20	20	20	20	20	20	0	20	20	20	20	18,33
	5.	20	20	20	20	20	20	20	0	20	20	20	20	18,33
celkem bodů		95	95	100	100	95	100	100	25	100	100	100	100	92,50

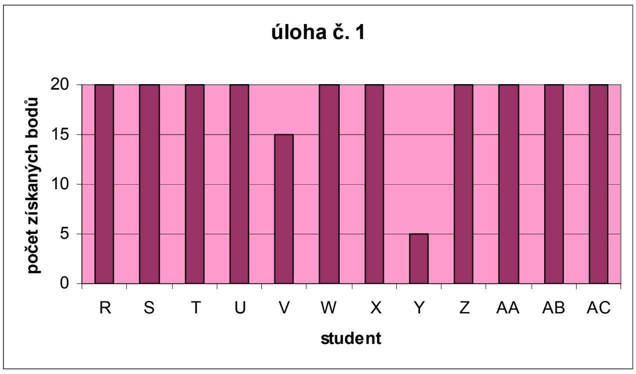
Obr. 38 - Tabulka úspěšnosti studentů v řešení testové varianty B podle bodového hodnocení

5.2.1 Úloha č. 1

Doplňte mezi číslice znaky aritmetických úkonů tak, aby byl výsledek roven jedné. Můžete použít závorky a vytvářet dvojciferná čísla spojením dvou sousedních čísel, nesmíte však měnit jejich pořadí.

a) 1 2 3 = 1
b) 1 2 3 4 = 1
c) 1 2 3 4 5 = 1
d) 1 2 3 4 5 6 = 1

Řešení této úlohy přináší pochopení vztahů mezi aritmetickými operacemi. Nejvíce chybných řešení bylo zapříčiněno neřešením úloh, takže k chybnému řešení z důvodu nesprávného užití vztahů aritmetických operací došlo pouze v jediném případě. Různé způsoby řešení jednotlivých úloh uvádíme v přiložené tabulce č. 40.



Obr. 39 – Graf úspěšnosti řešení 1. úlohy

	student	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
řešení a)	(1+2):3	●	●			●	●			●		●	●
	(-1).2+3			●	●			●			●		
	(-1).(2-3)								●				
řešení b)	12:(3.4)	●	●			●							
	12:3:4			●	●							●	●
	(-1)+2.3-4						●	●					
	1.2+3-4									●	●		
	chybné řešení								●				
řešení c)	(12-3):(4+5)			●									
	(1+23):4-5				●								●
	[(1+2).3]:(4+5)							●					
	(1.2-3).(4-5)						●						
	1+2-3-4+5									●			
	(-1)-2+3-4+5	●	●								●		
	(12-3-4):5											●	
	chybné řešení					●			●				
řešení d)	12-3.4-5+6	●	●					●		●			
	(-1)+2+3-4-5+6			●							●		
	(-1+2+34):5-6				●								
	(-1)-2+34-5.6					●							
	(-1)-2-3-4+5+6						●						●
	(1+2.3+4-5):6											●	
	chybné řešení								●				

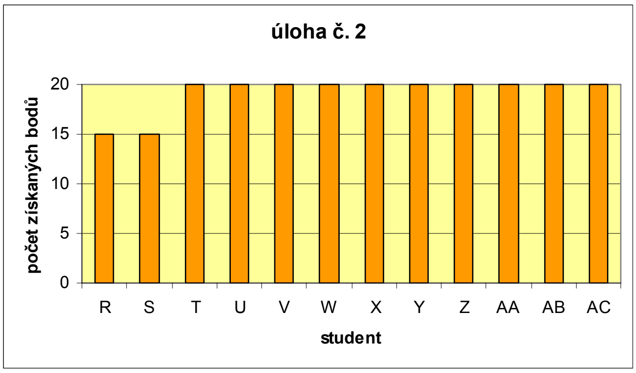
Obr. 40 – Tabulka způsobů řešení 1. úlohy

5.2.2 Úloha č. 2

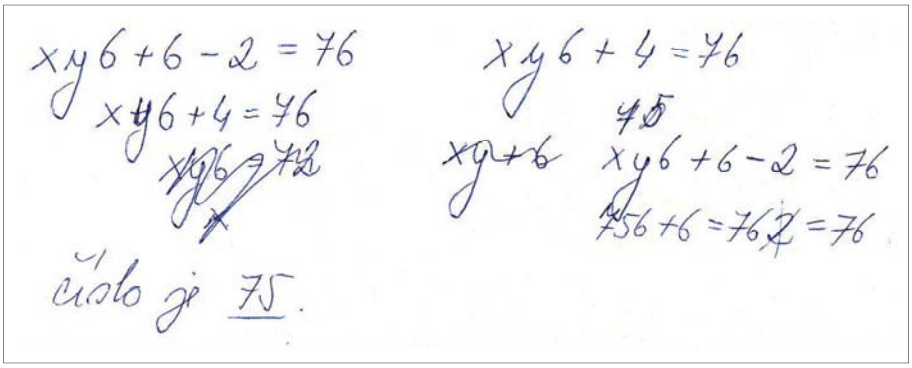
Jestliže k dvojcifernému číslu připíšete 6, k tomu získanému trojcifernému číslu připočtete 6 a od součtu odepíšete číslici označující jednotky, pak dostanete číslo 76. Jaké je původní číslo?

Pro řešení této úlohy užili všichni studenti stejného postupu, a to sice poměrně složité úvahy, kterou schématicky uvádíme níže.

$$\square\square 6 + 6 = \square\square 2$$
$$\square\square 6 + 6 = \boxed{7}\boxed{6} 2$$
$$\boxed{7}\boxed{5} 6 + 6 = \boxed{7}\boxed{6} 2$$
$$\boxed{7}\boxed{6} 2 - 6 = 756$$
$$75 | 6$$
$$\underline{\underline{75}}$$



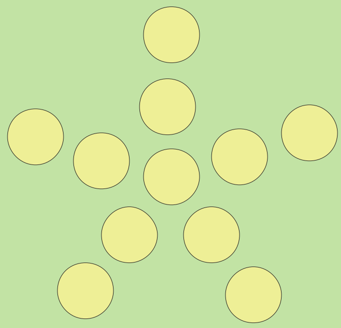
Obr. 41 – Graf úspěšnosti řešení 2. úlohy



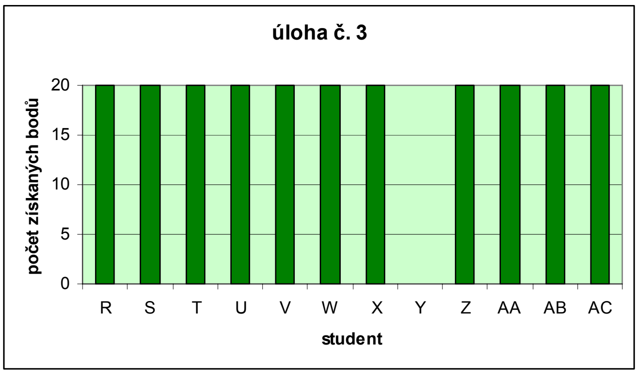
Obr. 42 - Řešení studenta V

5.2.3 Úloha č. 3

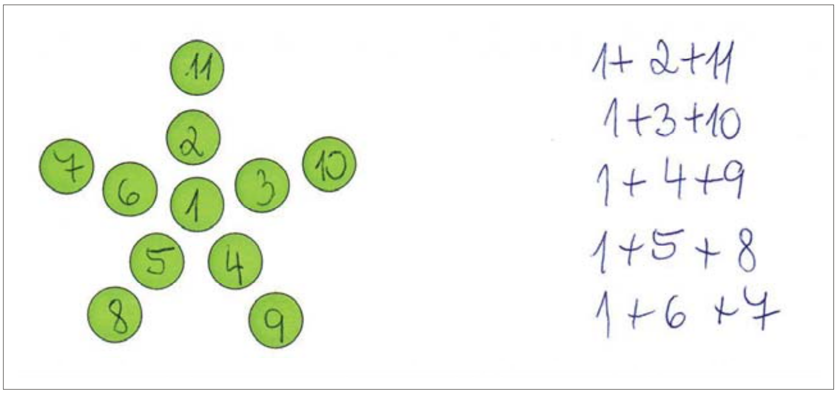
V následujícím obrazci vepište čísla od 1 do 11 do koleček tak, aby byl součet čísel 14 v každém rameni skládajícím se ze 3 koleček.



Pro řešení této úlohy volili studenti nejčastěji metodu pokus - omyl. Vzhledem k úspěšnosti řešení úlohy je pravděpodobné, že by byla vhodnější volba obtížnější úlohy. Jediný nevyřešený příklad byl opět způsoben situací, kdy se z neznámého důvodu řešitel nepokusil o vyřešení úlohy. Ostatní řešili úlohu bez vedlejších výpočtů dosazováním čísel do obrazce, v několika případech si studenti utvořili přehled trojic čísel ve zvoleném intervalu mající stejný součet.



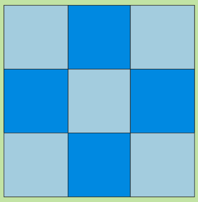
Obr. 43 – Graf úspěšnosti řešení 3. úlohy



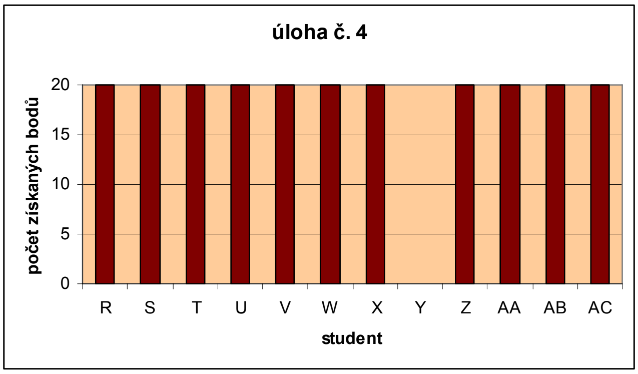
Obr. 44 - Řešení studenta T

5.2.4 Úloha č. 4

Rozmístěte čísla 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 v devíti čtverečcích velkého čtverce tak, aby součet v každé řádce byl 27.



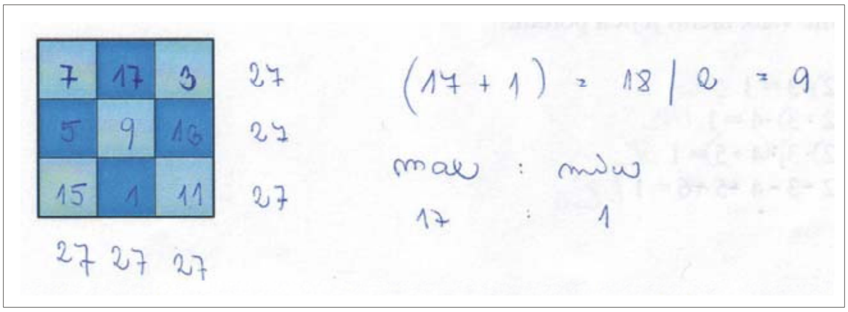
Tento příklad představuje typ úlohy, kterou studenti znají z kurzu o přirozených číslech, proto se někteří z nich uchýlili k řešení podle toho, jak jsou zvyklí podobné úlohy řešit. Přestože byl v zadání požadován shodný součet pouze na řádcích čtverce, někteří studenti vytvořili řešení, ve kterém byl požadovaný součet i ve sloupcích obrazce a ve dvou případech studenti vytvořili magický čtverec, tedy čísla rozmístili tak, že stejný součet byl na řádcích, ve sloupcích i na úhlopříčkách čtverce. I v tomto případě bylo zaznamenáno jediné chybné řešení, které se opakuje u stále jednoho studenta, proto předpokládáme, že mu nestačil časový limit na vyřešení celého testu.



Obr. 45 – Graf úspěšnosti řešení 4. úlohy

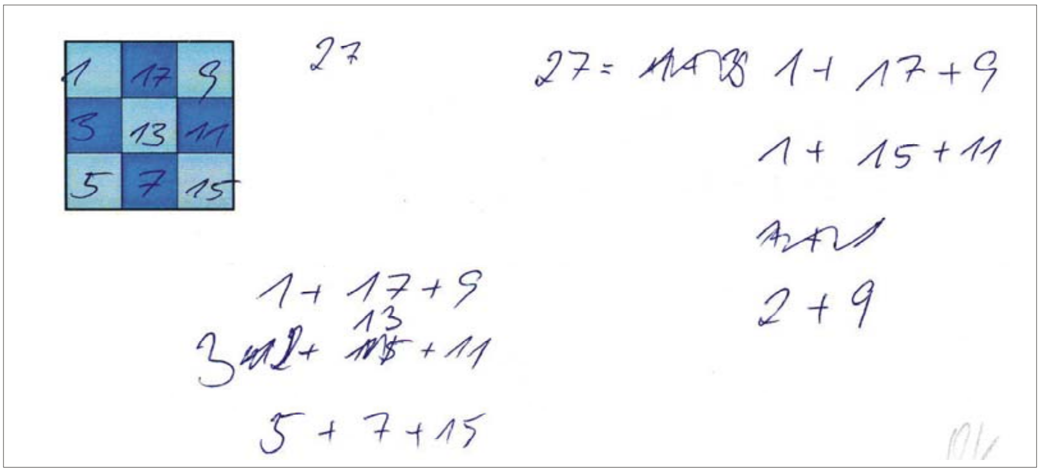
student	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
shodný součet na řádcích			●	●					●	●	●	
shodný součet na řádcích a ve sloupcích	●	●			●		●					
magický čtverec						●						●
chybné řešení								●				

Obr. 46 – Tabulka způsobů řešení 4. úlohy



Obr. 47 - Řešení studenta W, magický čtverec

Obr. 48 - Řešení studenta R, daný součet i ve sloupcích



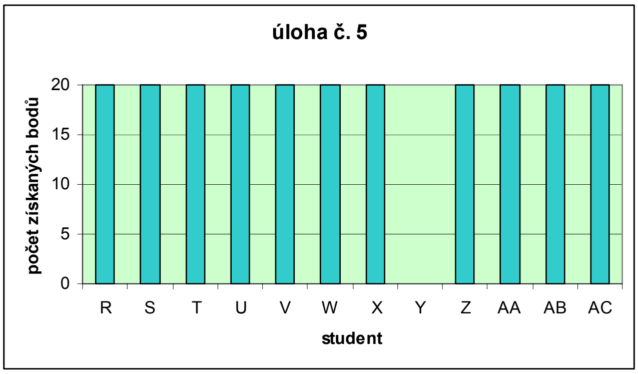
Obr. 49 - Řešení studenta AB, dle zadání

5.2.5 Úloha č. 5

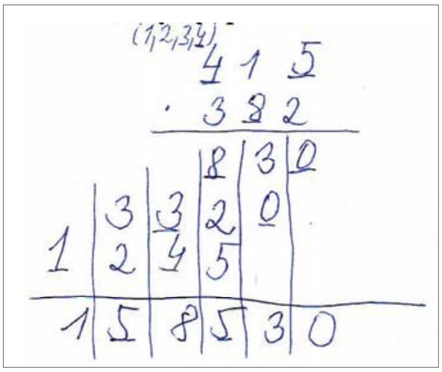
Doplň místo hvězdiček čísla tak, aby byl příklad na násobení správně.

```
        * 1 *
 .      3 * 2
 -------------
        * 3 *
    3 * 2 *
  * 2 * 5
 -------------
  1 * 8 * 3 0
```

Poslední z příkladů nepředstavoval pro studenty poučené v tématu přirozených čísel žádný problém. Všichni volili stejnou strategii, a to sice postupné dosazování do zadání úlohy a žádný z nich se nedopustil chyby při přechodu přes řád. Jediné chybné řešení bylo z důvodu neřešení této úlohy.



Obr. 50 – Graf úspěšnosti řešení 5. úlohy



Obr. 51 - Řešení studenta V

5.3 Výsledky testování

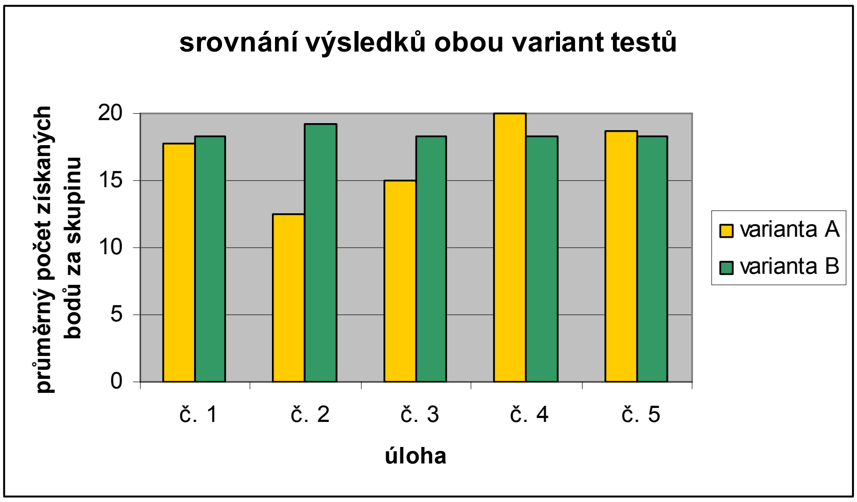
Máme-li shrnout, co ze zadání testů vyplynulo, pak je to náš správný předpoklad, že lepších výsledků bude dosahovat skupina, které absolvovala kurz zabývající se tématikou přirozených čísel. Výsledky jednotlivých skupin v každé úloze můžete pozorovat v následujícím grafu č. 53 a tabulce č. 52.

Do výsledků se promítl také výběr úloh, zejména pro variantu A a úlohy číslo 4 a 5, které mohly být zvoleny obtížnější. Důvod proč nejsou velké rozdíly mezi jednotlivými variantami je, že úlohy byly voleny vzhledem k úrovni zvládání učiva o přirozených číslech.

Dalo by se konstatovat, že úroveň dovedností studentů v oblasti přirozených čísel je optimální, poměrně vyrovnaná, pouze ojediněle se vyskytují studenti, kteří ze subjektivních příčin nezvládli vypočítat zadané úlohy.

srovnání	varianta A	varianta B
úloha č. 1	17,81	18,33
úloha č. 2	12,50	19,17
úloha č. 3	15,00	18,33
úloha č. 4	20,00	18,33
úloha č. 5	18,75	18,33
průměrný počet získaných bodů	84,06	92,50

Obr. 52 – Tabulka srovnání úspěšnosti v jednotlivých variantách testů



Obr. 53 – Graf srovnání úspěšnosti v jednotlivých variantách testů

6. Sbírka úloh

6.1 Konstrukce čísel daných vlastností

Řešením těchto druhů příkladů dochází k hlubšímu pochopení principu desítkové soustavy . Mezi tyto úlohy patří také tzv. kouzla, kde zadáme interval, ze kterého si např. žák vybere číslo, s nímž provádí početní úkony a my podle výsledku uhodneme myšlené původní číslo. Kouzlo spočívá v učitelově znalosti zvláštní vlastnosti zvolených čísel, která se žákům zpočátku nesděluje. Druhým krokem může být odhalování těchto vlastností.

6.1.1 Vzorové příklady

Příklad 1

Rozložte číslo 1 648 na tři sčítance tak, aby první byl o 170 větší než třetí a druhý o 54 větší než první

první sčítanec .... o 170 větší než .... x + 170
druhý sčítanec .... o 54 větší než .... x + 170 + 54
třetí sčítanec x

Řešení:

$$1\,648 = x + 170 + x + 170 + 54 + x$$
$$1\,648 = 3x + 394$$
$$1\,648 - 394 = 3x$$
$$1\,254 = 3x \quad / : 3$$
$$x = 418$$

první sčítanec…… x + 170
…….418 + 170 = 588
druhý sčítanec …... x + 170 + 54
…….. 418 + 170 + 54 = 642
třetí sčítanec …….. x
………418

588 + 642 + 418 = 1 648

Hledaná čísla jsou 588, 642 a 418.

Příklad 2

Násobíme-li dvojciferné číslo součtem jeho číslic, dostaneme součin 1666. Počet desítek daného čísla je o jedna větší než počet jednotek. Určete toto číslo.

Řešení:

Dvojciferná čísla, jejichž počet desítek je o 1 větší než počet jednotek	Ciferný součet	Hledaný násobek
10	1 + 0 = 1	10 . 1 = 10
21	2 + 1 = 3	21 . 3 = 63
32	3 + 2 = 5	32 . 5 = 160
43	4 + 3 = 7	43 . 7 = 301
54	5 + 4 = 9	54 . 9 = 486
65	6 + 5 = 11	65 . 11 = 715
76	7 + 6 = 13	76 . 13 = 988
87	8 + 7 = 15	87 . 15 = 1305
98	9 + 8 = 17	98 . 17 = 1666

Hledané číslo je 98.

Příklad 3

Doplňte mezi číslice znaky aritmetických úkonů tak, aby byl výsledek roven jedné. Můžete použít závorky a vytvářet dvojciferná čísla spojením dvou sousedních čísel, nesmíte však měnit jejich pořadí.

a) 1 2 3 = 1
b) 1 2 3 4 = 1
c) 1 2 3 4 5 = 1
d) 1 2 3 4 5 6 = 1
e) 1 2 3 4 5 6 7 = 1
f) 1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
g) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Řešení:

a) (1 + 2) : 3 = 1
b) 12 : 3 : 4 = 1
c) [(1 + 2) : 3 + 4] : 5 = 1
[(1 + 2) . 3 - 4] : 5 = 1
d) (1 . 2 + 3 - 4 +5) : 6 = 1
e) { [(1 + 2) . 3 - 4] : 5 + 6 } : 7 = 1
f) { [(1 + 2) : 3] . 4 + 5 + 6 - 7 } : 8 = 1
g) (1 . 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1

Příklad 4

Dejte svému příteli napsat dvě libovolná čísla o stejném počtu číslic. Připište stejný počet čísel, poodejděte a požádejte přítele, ať škrtne jednu z číslic v jednom ze čtyř čísel kromě 0 a zbylá čísla sečte. Podle oznámeného výsledku můžete odečíst přeškrtnutou číslici.

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 605 \\ 218 \end{array}\right\} \text{čísla napsaná vašim přítelem} \\ \left.\begin{array}{r} 394 \\ 781 \end{array}\right\} \text{čísla napsaná vámi} \\ \hline 1298 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \end{array}$$

Ciferný součet výsledku je 1 + 2 + 9 + 8 = 20. Z tohoto příkladu odečteme, že přeškrtnutou číslicí je číslice 7. Jakým pravidlem se řídí volba vámi připsaných čísel?

Řešení:

Ke každému číslu, které napsal váš přítel připíšete takové číslo, jehož každá z číslic příslušného řádu bude doplňkem do 9. Součet takto zvolených čísel bude násobkem devíti.

$$\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Škrtne-li váš přítel libovolnou číslici mohou nastat dva případy. Dostaneme-li ciferný součet, který je násobkem devíti, pak bude škrtnutou číslicí 9. Nebude-li ciferný součet násobkem devíti, pak je škrtnutou číslicí číslo, jehož přičtením dostaneme nejbližší násobek devíti.

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 5 \\ & 2 & 1 & 8 \\ & 3 & \cancel{9} & 4 \\ & 7 & 8 & 1 \\ \hline 1 & 9 & 0 & 8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 5 \\ & 2 & 1 & 8 \\ & 3 & 9 & 4 \\ & \cancel{7} & 8 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 9 & 8 \end{array}$$

$1 + 9 + 0 + 8 = 18$ $\qquad$ $1 + 2 + 9 + 8 = 20$

$18 : 9 = 2$ $\qquad$ $20 + 7 = 27 \quad 27 : 9 = 3$

6.1.2 Úlohy

1. a) Je dáno pět po sobě jdoucích přirozených čísel. Jestliže prostřední z nich odečteme od součtu čtyř ostatních, získáme výsledek 21. Určete tato čísla.

   b) Utvořte a zapište všechna trojciferná čísla, která mají ciferný součet 5.

2. a) U dvojciferného čísla je číslice na místě desítek o 2 větší než číslice na místě jednotek. Násobíme-li toto číslo jeho ciferným součtem, dostaneme výsledek 1 204. Určete příslušné dvojciferné číslo.

   b) Libovolné dvojciferné číslo se stejnými číslicemi násobte číslem 99. Součin je čtyřmístné číslo. Výsledkem je číslo, jehož třetí číslice je 5. Jaký je celý výsledek?

3. Utvořte všechna dvojciferná čísla, v nichž jsou na místě desítek některé z číslic 1, 8, 9 a na místě jednotek některé z číslic 2, 4, 6.

4. Určete dvě čísla, jejichž součet je 80, jestliže platí následující:

   a) jejich rozdíl je 8

   b) jestliže od jednoho odečtete 16 a přičtete tuto hodnotu k druhému číslu, dostanete shodná čísla

5. Najděte čísla, která jdou bezprostředně za sebou a mají následující vlastnosti:

   a) součet dvou po sobě následujících čísel je 75

   b) součet tří po sobě jdoucích čísel je 48

   c) součet čtyř po sobě jdoucích sudých čísel je 76

   d) čtyři přirozená po sobě jdou čísla mají následující vlastnosti. Jestliže vynásobíte první číslo čtvrtým a druhé číslo třetím bude součet součinu roven součtu hledaných čísel.

6. Najděte čísla následujících vlastností:

   a) součin je osmnáctkrát větší než násobenec. Čemu se rovná násobitel?

   b) součet dvou číslic je 6 237. Jedno z těchto čísel má na místě jednotek nulu. Jestliže ji škrtnete, dostanete číslo druhé.

   c) součet dvou čísel je 180. Podíl při dělení většího menším je pět.

d) součet dvou čísel je 12 524. Jedno z těchto čísel má na místě jednotek i desítek nulu. Jestliže nuly škrtnete, dostanete druhé číslo.

e) Součet tří čísel je 115. Součet prvního a druhého čísla je 40, součet prvního a třetího čísla je 90.

f) součin tří čísel je 240. Součin prvního a druhého čísla je 60, součin druhého a třetího čísla je 80.

7. Jestliže k dvojcifernému číslu připíšete 6, k tomuto získanému trojcifernému číslu připočtete 6 a od součtu odepíšete číslici označující jednotky, pak dostanete číslo 76. Jaké je původní číslo?

8. Napište libovolné trojciferné číslo, jehož krajní číslice nejsou stejné, a utvořte jiné číslo ze stejných číslic v obráceném pořadí. Odečtěte menší z těchto čísel od většího a oznamte poslední číslici rozdílu. Pomocí ní zjistíte celý rozdíl.

9. Číslo 100 je třeba rozdělit na čtyři různé díly. Získaná čtyři čísla musí mít tyto vlastnosti: jestliže od prvního čísla odečtete 4, k druhému číslu 4 přičtete, třetí násobíte 4, čtvrté dělíte 4, pak pro všechna čtyři čísla dostanete stejný výsledek.

10. Jsou dána čísla 280 a 40. Kolikrát je třeba od prvního odečíst 8 a k druhému přičíst 8, aby se rozdíl čísel rovnal nule?

11. Čísla 12 a 60 mají zajímavou vlastnost. Jejich vynásobením dostanete desetkrát větší číslo než jejich sečtením. Existují i další takové dvojice dvojciferných čísel. Pokuste se jich najít co nejvíce.

12. Asistentka píše na počítači přirozená čísla bez mezer 1234567891011121314… Kterou číslici napíše při stém úderu?

13. Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel s vlastností, kdy se jejich součin nemění při záměně pořadí číslic u obou činitelů, s výjimkou těch čísel, kde na místě jednotek a desítek je shodné číslice (11 . 33) a čísel, kde při výše uvedeném přehození číslic nedojde k změně hodnoty čísel (29 . 92).

14. Existují dvojice čísel, jejichž součet a součin se od sebe liší jen pořadím číslic. Pokuste se jich najít co nejvíce.

15. Kolik znamének + musíme vložit mezi následující řadu čísel, aby byl součet jednociferných a dvojciferných čísel

a) pro 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 roven 99

b) pro 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 roven 100

c) pro 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 roven 100

16. Doplňte znaménka +, -, . tak, aby příklady byly správně.

7 ○ 3 ○ 2 ○ 5 ○ 8 = 10

5 ○ 5 ○ 2 ○ 5 ○ 5 = 10

4 ○ 3 ○ 5 ○ 3 ○ 5 = 10

8 ○ 2 ○ 4 ○ 6 ○ 4 = 10

6 ○ 3 ○ 4 ○ 2 ○ 6 = 10

17. Zapište uvedená čísla zadanými číslicemi pomocí početních výkonů plus, mínus krát a děleno:

a) jakými třemi shodnými číslicemi můžete vyjádřit číslo 24

b) napište číslo 1 000 osmi stejnými číslicemi

c) číslo 30 zapište pomocí tří číslic

d) číslo 100 sestavte z pěti pětek

e) zapište čísla od 1 do 10 pomocí čtyř sedmiček

18. Myslete si číslo:

a) zvětšete ho čtyřikrát, přidejte 20. Výsledek vydělte 2, odečtěte 10. Řekněte výsledek. Vydělíte-li ho dvěma, dostanete původní číslo.

b) přidejte k němu 9. Číslo, které jste obdrželi, zvětšete dvakrát a od nového čísla odečtěte 8. Zbytek vydělte 2 a nakonec odečtěte 5.

c) trojciferné číslo. Připište k němu zprava totéž číslo. Číslo, které tímto úkonem získáte, dělte 7, podíl dělte 11 a nový podíl 13. Výsledek, který dostanete, je počáteční číslo. Dokážete zdůvodnit proč tomu tak je?

d) násobte ho 5, přičtěte 2, násobte 4, přičtěte 3 a násobte 5. Řekněte mi výsledek a uhádnu myšlené číslo.

19. Myslím si číslo. Násobím ho 3, k součtu přičtu 6 a součet dělím 2. Tímto úkonem dostanete číslo, jehož ciferný součet je roven 9. Číslice jednotek je o 5 větší než číslice desítek. Jaké číslo si myslím?

20. Požádejte známého, aby od čísla desetkrát většího, než je jeho věk, odečetl devítinásobek kteréhokoliv jednociferného čísla. Z výsledku odečtete jeho věk tak, že oddělíte číslici na místě jednotek a sečtete ji se zbývajícím číslem.

21. Při nedělním výletě se na tachometru objevilo zajímavé číslo: 24942. Po dvouhodinové jízdě se na tachometru objevilo nové takové číslo. Určete následující takové (symetrické) číslo.

22. Odhadněte, zda je větší součet prvního nebo druhého sloupce. Svůj odhad zapište a přesvědčte se o jeho správnosti jinak, než vypočítáním.

1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 2 3 4 5 6 7 8 0	0 0 0 0 0 0 0 2 1
1 2 3 4 5 6 7 0 0	0 0 0 0 0 0 3 2 1
1 2 3 4 5 6 0 0 0	0 0 0 0 0 4 3 2 1
1 2 3 4 5 0 0 0 0	0 0 0 0 5 4 3 2 1
1 2 3 4 0 0 0 0 0	0 0 0 6 5 4 3 2 1
1 2 3 0 0 0 0 0 0	0 0 7 6 5 4 3 2 1
1 2 0 0 0 0 0 0 0	0 8 7 6 5 4 3 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0	9 8 7 6 5 4 3 2 1

23. Hra na sčítání libovolných přirozených čísel od 1 do 10 pro dva hráče. Každý z hráčů přičte výše vymezené číslo k předchozímu výsledku přičítání a oznámí výsledek. Vyhrává ten, kdo první dosáhne výsledku 100.

24. Počítání na kostce domina. Počet horních teček násob pěti a výsledek násob dvěma. K novému číslu přičtěte počet dolních teček. Kolik vám vyšlo? Pokud jste počítali správně, z výsledku odečtete počet horních i dolních teček. Proč je tomu tak?

25. Ke sčítání trojciferných čísel může učitel žáka motivovat následující matematickou etudou. Žák i učitel střídavě píší čtyři trojciferná čísla v uvedeném pořadí, přičemž učitel předpovídá, že součet čtyř vytvořených čísel bude 1998. Jaká čísla bude psát učitel?

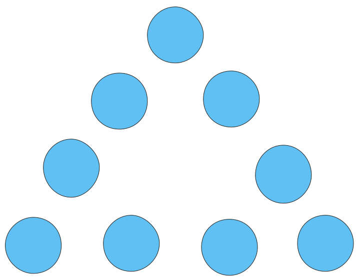
6.2 Algebrografy

Algebrografy a jiné číselné obrazce přinášejí úlohy založené na kombinatorických schopnostech žáků a studentů. Často bývá obtížné řešení metodou pokus - omyl, neboť úlohy tohoto typu mívají více řešení. Jeden ze způsobů, jak řešit tuto úlohu pokusem, je v přemisťování kartiček s příslušnými čísly po obrazci, čímž docílíme nejen řešení problémového úkolu, ale také procvičení většího počtu početních operací. Pokusíme se dát návod pro řešení základních typů úloh a přineseme i složitější úlohy jejichž řešení vyžaduje vytvoření vlastního systému.

6.2.1 Vzorové příklady

Příklad 5

Do koleček trojúhelníku doplňte čísla od 1 do 9 tak, aby součet na všech stranách trojúhelníku byl 19.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 9 spočítáme podle vzorce $(a_1 + a_n) . a_n/2$

$(1 + 9) . 9/2 = 45$

Přičteme-li k tomuto číslu tři nejmenší čísla, 45 + (1 + 2 + 3) = 51 a vydělíme-li toto číslo počtem stran obrazce 51 : 3, získáme nejmenší možný součet na stranách trojúhelníka, v našem případě je minimální součet 17.

Na druhou stranu, přičteme-li k součtu řady čísel největší čísla a výsledek vydělíme počtem stran, získáme maximální součet čísel na straně trojúhelníka.

45 + (7 + 8 + 9) = 69, 69 : 3 = 23.

Součet tří stran trojúhelníku je 3 . 19, tedy 57. Odečteme-li součet tří stran trojúhelníka od součtu řady čísel, získáme součet čísel v rozích trojúhelníku.

57 – 45 = 12

V tuto chvíli můžeme hledat vhodné trojice čísel dávající součet 12 a dále úlohu řešit metodou pokus - omyl.

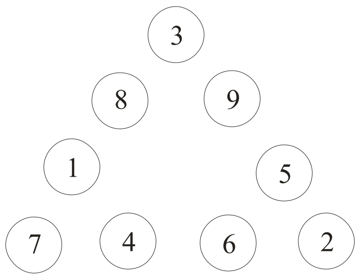
12 =	8 + 3 + 1	6 + 4 + 2
	7 + 3 + 2	6 + 5 + 1
	7 + 4 + 1	9 + 2 + 1

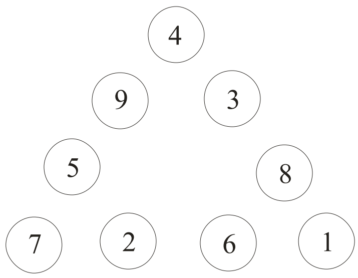
Můžeme si však ještě pomoci, vezmeme-li hledaný součet stran a odečteme-li od něj součet čísel v rozích, tedy 19 – 12 = 7.

Tímto úkonem jsme získali jednu z číslic, která je v rohu trojúhelníku, čímž se zmenšil okruh zkoušených čísel.

12 = 7 + 3 + 2
7 + 4 + 1

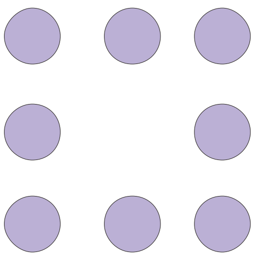
Úloha má následující dvě řešení.





Příklad 6

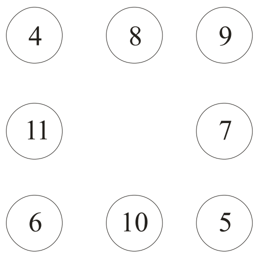
Do kroužků následujícího obrazce vepište čísla od 4 do 11 tak, aby jejich součet na každé straně čtverce byl 21.



Řešení:

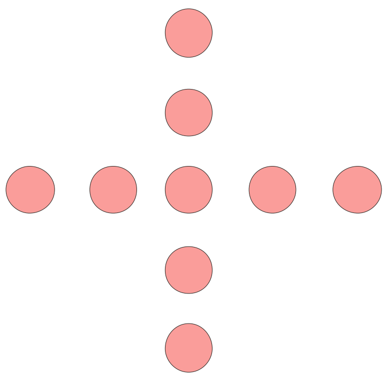
(4 + 11) . 8/2 = 60 ……. součet řady čísel od 4 do 11
4 . 21 = 84 …………….. součet všech stran čtverce
84 – 60 = 24 ………… .. součet čísel v rozích čtverce
24 = 4 + 5 + 7 + 8 …….. nevyhovuje
4 + 5 + 6 + 9

Úloha má pouze jedno řešení.



Příklad 7

Doplň všechna čísla od 1 do 9 do následujícího obrazce. Součet v každém jeho rameni (tento obrazec má 2 ramena) je 23.

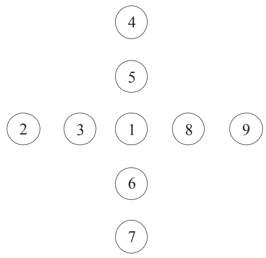


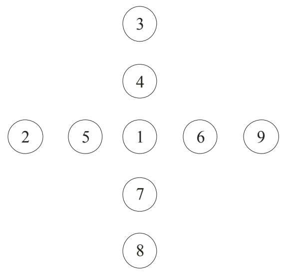
(1 + 9) . 9/2 = 45 ………… součet řady čísel od 1 do 9
2 . 23 = 46 ………………… součet čísel na obou ramenech
46 – 45 = 1 ………………... číslo uprostřed

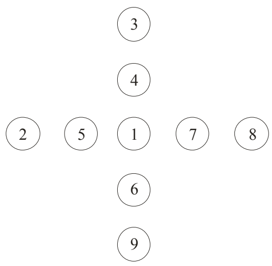
23 – 1 = 22 ……………….. hledaný součet čtyř čísel

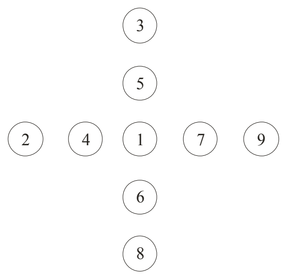
22 =	2 + 3 + 8 + 9	2 + 4 + 7 + 9
	4 + 5 + 6 + 7	3 + 5 + 6 + 8
	2 + 5 + 6 + 9	2 + 5 + 7 + 8
	3 + 4 + 7 + 8	3 + 4 + 6 + 9

Úloha má čtyři řešení.



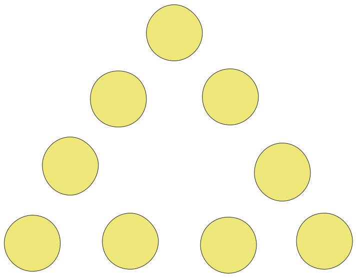




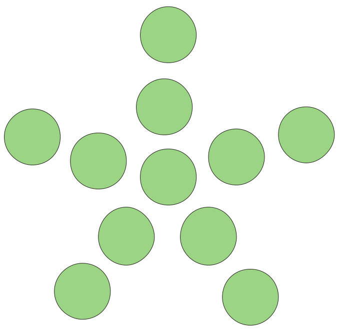


6.2.2 Úlohy

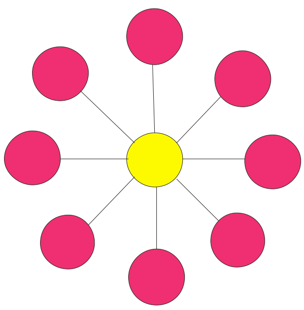
26. Do koleček vepište čísla od 4 do 12 tak, aby součet na každé straně trojúhelníku byl 32.



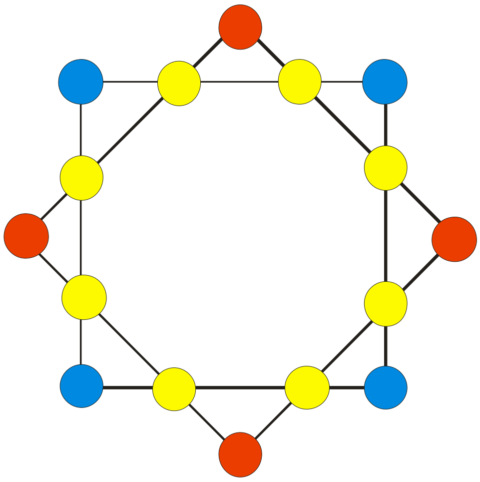
27. V následujícím obrazci vepište čísla od 1 do 11 do koleček tak, aby byl součet čísel 14 v každém rameni skládajícím se ze 3 koleček.



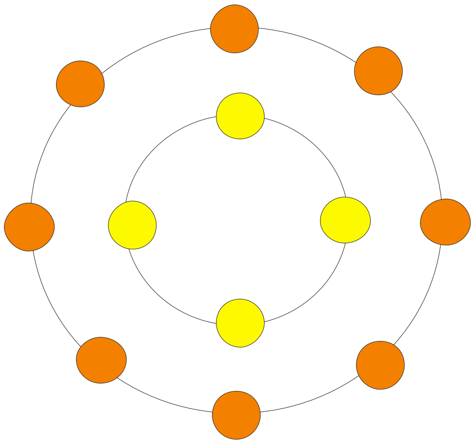
28. Vepište číslice od 1 do 9 do obrázku tak, aby součet tří čísel v řadě byl 15.



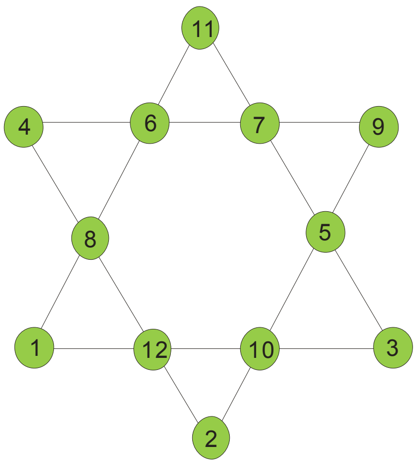
29. Čísla od 1 do 16 umístěte do obrazce tak, aby součet stran každého čtverce byl 34 a součet vrcholů čtverce byl 34.



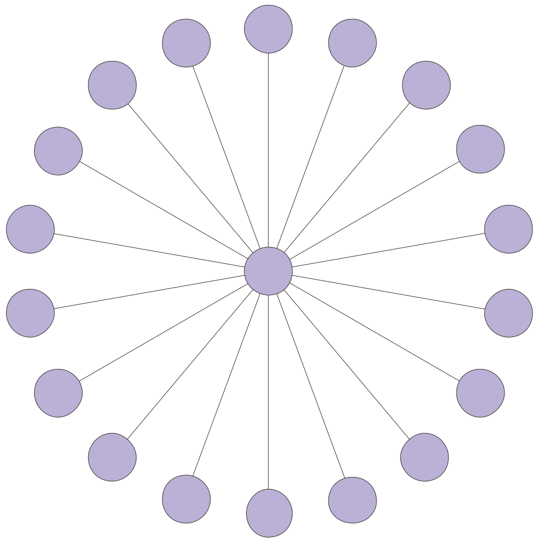
30. Umístěte čísla od 1 do 12 do políček tak, aby součet čísel většího kruhu byl dvakrát větší než součet čísel v malém kruhu.



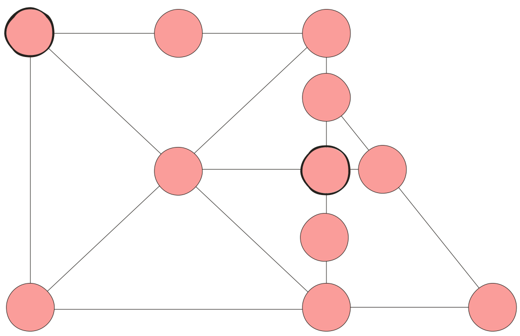
31. Hvězdice má magickou vlastnost. Součet všech stran je 26. Upravte rozložení čísel tak, aby byl stejný součet i na cípech hvězdy.



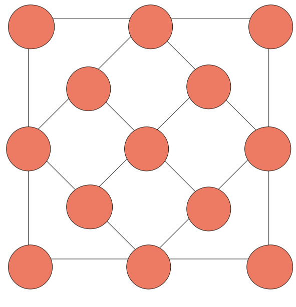
32. Vepište do 19 kroužků všechna čísla od 1 do 19 tak, aby součet čísel v libovolných třech kroužcích ležících na jedné přímce byl 30.



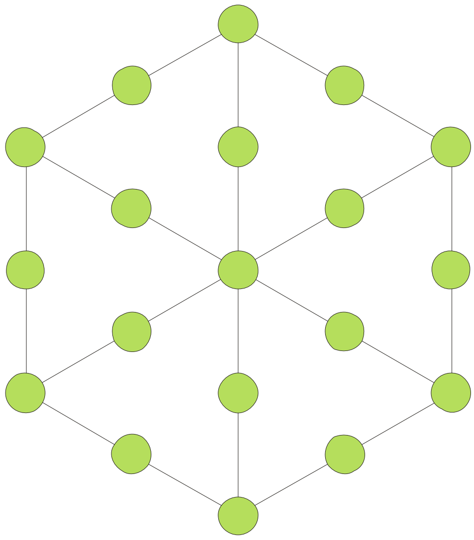
33. Do kroužků vepište čísla 3 až 13 tak, aby součty čísel v kroužcích spojených úsečkou byly vždy 25.



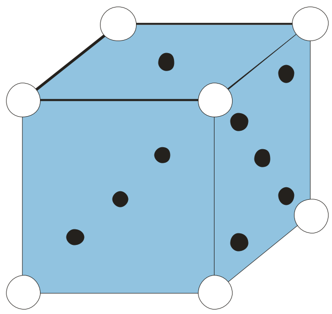
34. Do kroužků vepište čísla 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15 tak, aby součet v každé řadě (vždy po třech číslech) byl 20.



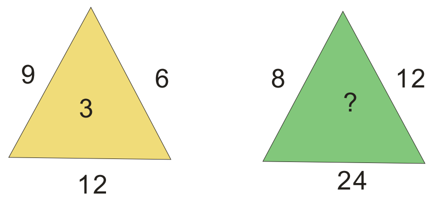
35. Vepište do kroužků čísla od 1 do 19 tak, aby součet podél každé strany šestiúhelníka i podél každého poloměru opsané kružnice byl vždy 23.



36. Do kroužků v jednotlivých rozích kostky vepište číslice 1 až 7 tak, aby součet na každé stěně spolu s nakreslenými tečkami byl vždy 16.



37. Jaké číslo patří do trojúhelníku místo otazníku, aby platil stejný vztah mezi čísly jako v trojúhelníku prvním?



6.3 Magické čtverce

Magické čtverce spadají hluboko do historie lidstva. Až z doby starověkého Říma se nám dochoval čtverec magických vlastností o rozměru 9 x 9. Vynález těchto čtverců je připisován Číňanům, a to z doby 4 000 až 5 000 před naším letopočtem.

Základní vlastností magického čtverce je, že součty čísel v každém řádku, v každém sloupci i v obou úhlopříčkách jsou stejné. Přičemž poslední uvedené kritérium nemusí být podmínkou každého námi zadaného příkladu.

Další pravidlo, které můžeme u magického čtverce objevit, je ta skutečnost, že stejný součet pro řadu, sloupec a úhlopříčku najdeme i v rozích magického čtverce.

6.3.1 Vzorové příklady

Příklad 8

Doplňte následující čtverec tak, aby byl magický.

	8	7
	6	
5		

Řešení:

Součet čísel na úhlopříčce je 5 + 6 + 7 = 18. Dále hledáme taková čísla, aby na řádku, ve sloupci a na druhé úhlopříčce byl shodný součet.

3	8	7
10	6	2
5	4	9

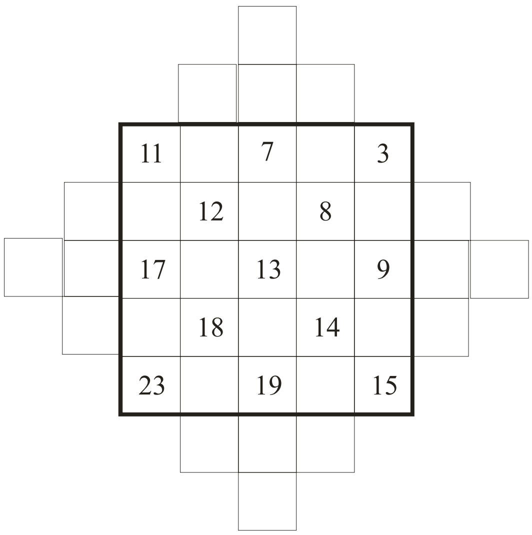
Příklad 9 Jak sestavit vlastní symetrický magický čtverec

U magického čtverce se určuje stupeň, který je odvozen z čísla, které odpovídá počtu řádků a sloupců. Má-li čtverec tři řádky a tři sloupce, pak se jedná o magický čtverec třetího stupně. Symetrický magický čtverec je takový, který obsahuje pouze po sobě jdoucí čísla.

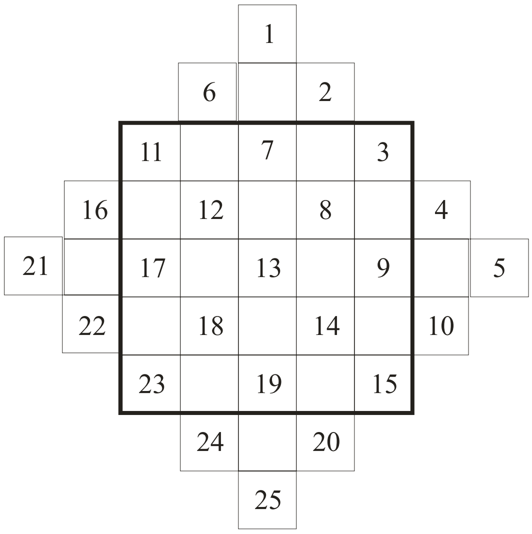
Sestavení magického čtverce lichého stupně

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	
23		19		15

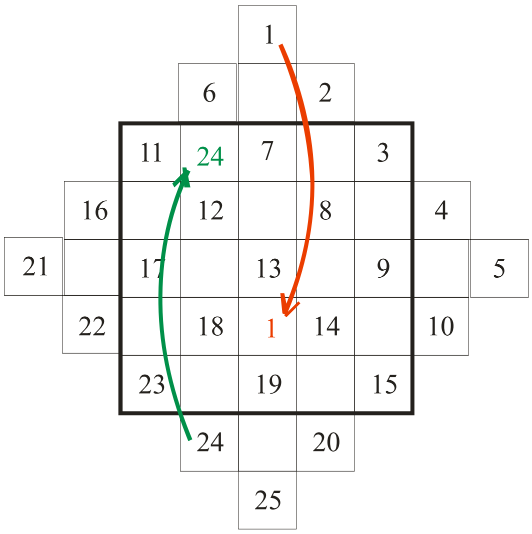
Takovýto čtverec doplníme dle obrázku na souměrný stupňovitý obrazec.



Do obrazce vepíšeme po pořádku do úhlopříčných řad shora dolů všechna přirozená čísla od 1 do 25.



Každé číslo ležící mimo čtverec posuneme po témže řádku nebo témže sloupci o tolik polí, jaký je stupeň čtverce. V našem případě tedy o pět polí.



Tímto úkolem dostaneme magický čtverec pátého stupně.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Příklad 10 Sestavení symetrického magického čtverce sudého stupně dělitelného čtyřmi

Rozmístíme čísla v polích podle vzrůstající hodnoty.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Oddělíme v rozích daného čtverce čtverečky o stranách n : 4, ve středu nám vznikne ohraničení o stranách n : 2.

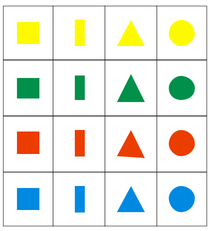
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Vyměníme navzájem čísla ležící symetricky ke středu daného čtverce 1 a 64, 10 a 55, 2 a 63, 9 a 56, 19 a 46, 28 a 37, 20 a 45, 27 a 38, 21 a 44 atd.

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

6.3.2 Úlohy

38. Uspořádejte obrazce tak, aby se ani v jednom řádku, sloupci a úhlopříčce neopakoval tentýž tvar ani barva.



39. Do obrázku se pokuste vepsat čísla 57, 87, 102, 132 a 147 tak, abyste vodorovně, svisle i v úhlopříčkách dostali stejný součet.

72		42
		117
	27	

40. Uspořádejte čísla ve čtverci tak, aby jejich součet v řádcích i sloupcích byl 12.

1	2	3
4	5	6
7	8	0

41. Čísla na obrázku uspořádejte tak, aby ve vodorovných i svislých řadách byl součet 111.

31	67	43
13	7	1
61	73	37

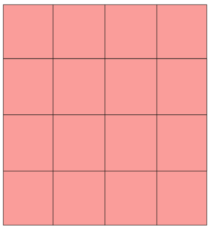
42. Do prázdných políček vepište čísla 4, 7, 10, 13 tak, aby byl daný čtverec magický.

16	3	2	
5		11	8
9	6		12
	15	14	1

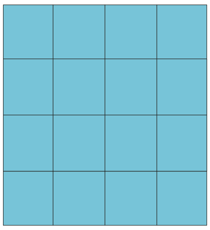
43. Vystřihněte jednotlivé čtverečky s čísly a pokuste se opět složit čtverec tak, aby se vodorovně ani svisle žádné číslo neopakovalo. Správnost řešení si ověříte tak, že vodorovně i svisle dostanete v každém sloupci stejný součet.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

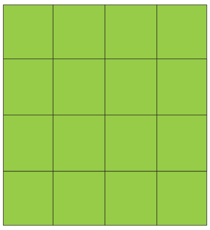
44. Použijte čísla od 1 do 8, a to vždy dvakrát, a vepište je do 16 čtverečků. Součet řádků i sloupců musí být 18.



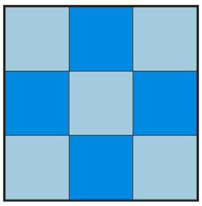
45. Vepište prvních šestnáct přirozených čísel do polí čtverce tak, aby součty v každém řádku, v každém sloupci i v obou úhlopříčkách byly stejné.



46. Do čtverce umístěte každé ze čtyř písmen a, b, c, d čtyřikrát, a to tak, aby v žádné vodorovné řadě, v žádném svislém sloupci ani v žádné z obou úhlopříček nebyla stejná písmena. Určete počet řešení.



47. Rozmístěte čísla 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 v devíti čtverečcích velkého čtverce tak, aby součet v každé řádce byl 27.



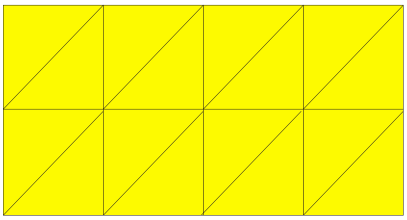
48. Doplňte čísla od 1 do 49 do obrázku tak, aby byl součet ve všech vodorovných řádcích a v úhlopříčkách vždy 175.

4						
					23	
		18				
				19		
	30					
						36
			1			

49. Vaší úlohou je seřadit čísla tak, aby jejich součet ve vodorovných i svislých řádcích byl 818. A aby to nebylo tak lehké, musí být tento součet i na obou úhlopříčkách.

5	115	225	335
19	129	239	349
60	170	280	390
74	184	294	404

50. V tomto obrazci složeném z 16 malých trojúhelníků, můžeme najít 6 větších trojúhelníků. Vepište čísla od 1 do 16 do malých trojúhelníků tak, aby součet ve velkých trojúhelnících byl vždy roven číslu 34.



6.4 Algebrogramy

Algebrogramy jsou číselné útvary, kde jsou čísla nahrazena obrazcem nebo písmenem. Platí zde pravidlo, které říká, že stejné obrazce a stejná písmena nahrazují stejné číslice. Můžeme se setkat i s takovými algebrogramy, kde jsou z písmen sestavena slova nebo celé věty. Úkolem je dosadit za obrazce nebo písmena číslice tak, aby při provedení zadané početní operace vyšel správný výsledek. Jednotný návod pro řešení takovýchto úloh nemáme. Řešíme je dosazováním číslic podle zadání, a to metodou pokus - omyl.

6.4.1 Vzorové příklady

Příklad 11

Součet tří čísel je 456 789. Jedno z čísel je složeno ze 3 sedmiček a 2 šestek, druhé ze 4 osmiček a pětky, třetí z nuly, jedničky, 3 trojek a čtyřky. Která jsou to čísla?

Řešení:

1. číslo……………….7, 7, 7, 6, 6
2. číslo……………….8, 8, 8, 8, 5
3. číslo……………0, 1, 3, 3, 3, 4
Součet……………456 789

$$\begin{array}{r} 67767 \\ 85888 \\ \underline{303134} \\ 456789 \end{array}$$

Příklad 12

Řešte následující algebrogram.

$$\begin{array}{r} J \\ JA \\ JAN \\ \underline{JANO} \\ 4321 \end{array}$$

Řešení:

Máme-li ve výsledku na místě jednotek číslici 1 a jsou-li písmena různá, můžeme předpokládat, že součet cifer na místě jednotek bude přesahovat řád jednotek. Můžeme tedy předpokládat, že se tak bude dít i u ostatních řádů. Pro hodnotu písmene J si tedy zvolíme číslo 3.

			3
		3	
	3		
3			
4	3	2	1

Stejnou úvahu o vyčerpání jednotek příslušných řádů a přechodu do jednotek řádu vyššího pak použijeme pro další písmena algebrogramu a dále dosazujeme vhodně volené cifry.

			3
		3	8
	3	8	9
3	8	9	1
4	3	2	1

6.4.1 Úlohy

51. Je to velmi jednoduchý součet velmi nenáročných čísel: 21?+4?9+??+?57=1652. Jakou číslici nahrazuje otazník?

52. Máte devět čísel : a, b, c, d, e, f, g, h, i, která máte zvolit tak, že a+b+c=15, d+e+f=15, g+h+i=15, a+d+g=15, b+e+h=15, c+f+i=15, a+e+i=15, c+e+g=15. Na první pohled to vypadá velmi komplikované, ale za chvíli přijdete na to, že něco podobného jste již často viděli. Úloha je poměrně lehká, jestliže ji začnete řešit správným způsobem.

53. Sčítání a odčítání patří mezi nejjednodušší početní výkony. Pokuste se vyřešit tyto dvě úlohy. Místo teček vepište číslice.

$$\begin{array}{r} 5\,.\,0\,. \\ +\,.\,2\,.\,5 \\ \hline 7\,0\,7\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,.\,.\,0 \\ -\,.\,4\,9\,. \\ \hline 4\,0\,0\,4 \end{array}$$

54. V uvedených součtech čísel chybějí některé číslice. Umíte je doplnit? Místo teček vepište číslice.

```
  2 5 1        . . 5 5
    8 .          5 5 5
  6 . 5          5 . 5
1 0 3 5        6 6 5 5
```

55. Doplň místo hvězdiček čísla tak, aby byl příklad na násobení správně.

```
          * 1 *
.         3 * 2
          * 3 *
    3 * 2 *
* 2 * 5
1 * 8 * 3 0
```

56. Úloha v překladu zní: 40+10+10=60. Na první pohled vidíte, že v úloze vystupuje deset různých písmen, takže budou vyčerpány všechny číslice i s nulou. Nahraďte je tak, aby vzniklý příklad byl správně.

```
FORTY
  TEN
  TEN
SIXTY
```

57. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby matematická operace byla správně vyřešena.

```
ABC x DE
DEC
 FEC
HGBC
```

58. Řešte následující algebrogramy na sčítání.

a)

```
        U
  L E S A
      S E
  P A S E
S R N E C
```

b)

```
      T E N
    V L A K
        D O
K L A T O V
N E J E D E
```

c)

```
  S U M E C
  S U M E C
  S U M E C
J E Z E R O
```

d)

```
  S U M C I
  S U M C I
  S U M C I
J E Z E R O
```

e)

S M R K
J A V O R
J A S A N
S T R O M

f)

L Í P A
S M R K
T O P O L
S T R O M

g)

M E R K U R
M A R S
U R A N
K O S M O S

h)

M Ě S T A
S T Á T Y
M A P Y
A T L A S

i)

T Y G R
R Y S
L E V
Š E L M Y

j)

V L K
L E V
L I Š K A
Š E L M Y

k)

M N O H O
O V O C E
M N O H O
D Ž E M U

l)

M N O H O
J A H O D
M N O H O
D Ž E M U

m)

E V A
D A N A
H A N A
J A N A
A N N A
A L E N A
J M É N A

n)

I V O
J A N
I V A N
MI L A N
MI CH A L
J M É N A

o)

Z A S E
J E
T A D Y
J A R O

6.5 Řešení úloh

6.5.1 Konstrukce čísel daných vlastností

1. a) 5, 6, 7, 8, 9

   b)

113	122	230	401	50
131	212	320	410	
311	221	302	104	
		203	140	

2. a) 86

   b) Vztah mezi jednotlivými výsledky: První číslice výsledku doplňuje třetí číslici do součtu 9. Druhá číslice je o 1 menší než první. Poslední číslice je vždy o 1 větší než čtvrtá. Postupujte podle následujícího schématu, přičemž si budete všímejte pravidla, že číslice na místě stovek ve výsledku je o jednu menší, než číslice ze kterých se skládá hledaný dvojciferný činitel.

   11 . 99 = 1 089
   22 . 99 = 2 178
   33 . 99 = 3 267
   44 . 99 = 4 356
   55 . 99 = 5 445
   66 . 99 = 6 534
   77 . 99 = 7 623
   88 . 99 = 8 712
   99 . 99 = 9 801

3. 12, 14, 16, 82, 84, 86, 92, 94, 96

4. a) 36, 44

   b) 56, 24

5. a) 37, 38

   b) 24, 26

   c) 16, 18, 20, 22

6. a) 18

   b) Druhé číslo je desetkrát větší. Číslo 6 237 vydělíme 11, to je 567 - druhé číslo. První číslo je 5 670.

   c) 30, 150

   d) 12 524 : 101 = 124, hledaná čísla jsou 124 a 12 400

   e) 15, 25, 75

   f) 3, 20, 4

7. 75

8. 865 - 568 = 297. Prostřední číslice je 9 a další dvě číslice jsou rozkladem čísla 9. Stejný postup platí pro všechna čísla. Mohu tedy zjistit rozdíl libovolných dvou čísel.

9. 20, 12, 4, 64

10. patnáctkrát

11. 14, 35
20, 20
30, 15

12. první číslici čísla 55

13. 12 . 42 = 21 . 24
13 . 62 = 31 . 26
23 . 96 = 32 . 69
12 . 63 = 21 . 36
12 . 84 = 21 . 48
13 . 93 = 31 . 39
14 . 82 = 41 . 28
23 . 64 = 32 . 46
24 . 63 = 42 . 36
24 . 84 = 42 . 48
26 . 93 = 62 . 39
34 . 86 = 43 . 68
36 . 84 = 63 . 48
46 . 96 = 64 . 69

14. 9 + 9 = 18 9 . 9 = 81
47 + 2 = 49 47 . 2 = 94
497 + 2 = 499 497 . 2 = 994
- další vkládání devítek mezi číslice 4 a 7
24 + 3 = 27 24 . 3 = 72
263 + 2 = 265 263 . 2 = 562

15. a)
9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99 7 znamének
9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99 6 znamének

b)
1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100 4 znaménka
1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100 4 znaménka

c) 1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100 4 znaménka
1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100 4 znaménka

16.

$7 \cdot 3 + 2 - 5 - 8 = 10$

$5 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 10$

$4 + 3 - 5 + 3 + 5 = 10$

$8 \cdot 2 + 4 - 6 - 4 = 10$

$6 \cdot 3 - 4 + 2 - 6 = 10$

17.

a) $8 + 8 + 8 = 24$
$22 + 2 = 24$

b) $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1\,000$

c) $6 . 6 – 6 = 30$
$5 . 5 + 5 = 30$

d) $111 – 11 = 100$
$5 . 5 . 5 – 5 . 5 = 100$
$(5 + 5 + 5 + 5) . 5 = 1000$

e) $1 = 77 : 77$
$2 = 7 : 7 + 7 : 7$
$3 = (7 + 7 + 7) : 7$
$4 = 77 : 7 - 7$
$5 = 7 - (7 + 7) : 7$
$6 = (7 . 7 - 7) : 7$
$7 = 7 + 7 . (7 - 7)$
$8 = (7 . 7 + 7) : 7$
$9 = 7 + (7 + 7) : 7$
$10 = (77 - 7) : 7$

18.

a) Původní číslo odhalíte tak, že nahlášený zbytek vydělíte dvěma.

b) Výsledkem je shodné číslo jako na začátku.

c) Připíšeme-li k trojcifernému číslu stejné číslo, je to to samé, jako kdybychom ho násobili 1001 krát. Proto ho budeme dělit 7, 11 a 13. Součin těchto čísel odpovídá 1001.

d) Původní číslo odečteme z výsledku tak, že nebudeme uvažovat číslice na místě jednotek a desítek.

19. Protože je číslice jednotek o 5 větší než číslice desítek, (9 - 5) : 2 je číslice desítek, tedy 7. Dostaneme 27, které násobíme 2, čímž dostaneme trojnásobek hledaného čísla zvětšený o 6. Trojnásobek hledaného čísla je 48 a hledané číslo je 16.

20. Např. věk 21, libovolné jednociferné číslo 7.
21 . 10 = 210, 7 . 9 = 63, 210 - 63 = 147, 14 + 7 = 21
Součin jednomístného čísla a 9 je dvojmístné číslo, v němž součet číslic je 9. Odečteme-li je od desetinásobku zvoleného čísla, má zbytek tu vlastnost, že první dvě číslice tvoří číslo o tolik menší, kolik je na posledním místě.

21. 25052

22. Součet obou sloupců je shodný, protože pro jednotlivé řády se v každém z příslušných sloupců vyskytuje stejná hodnota.

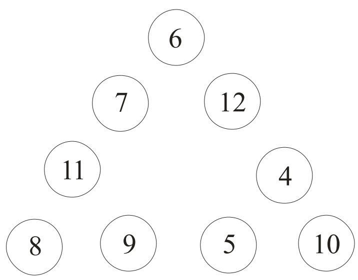
23. Existuje strategie, jejímž dodržením se jako první dostanete k požadovanému číslu. Hlavní zásadou je držet se výsledků 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Dostanete-li se k číslu 89, protihráč nemůže přičíst takovou hodnotu, aby dosáhl 100. Pokud začnete číslem 1 a během hry neuděláte chybu, máte výhru jistou.

24. Číslo na místě desítek dává počet teček v horním poli domina, počet jednotek dává počet teček v dolním poli. Počet horních teček jste násobili 10, čímž jste se dostali do řádu desítek.

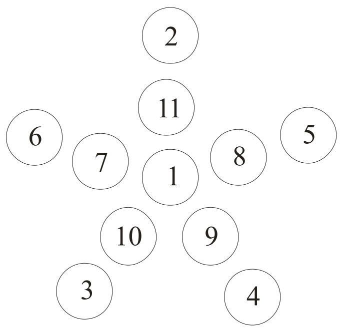
25. Každé žákem napsané číslo učitel doplní tak, aby součet čísel byl 999. Tím si učitel zajistí vyplnění své předpovědi, že součet čísel bude 1998.

6.5.2 Algebrografy

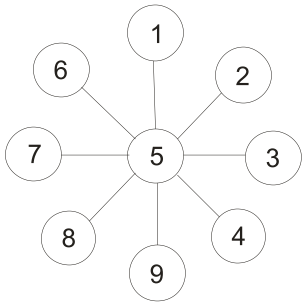
26.



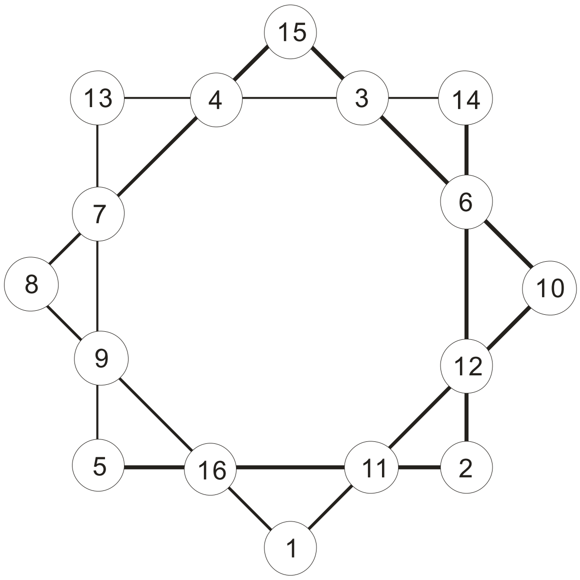
27.



28.

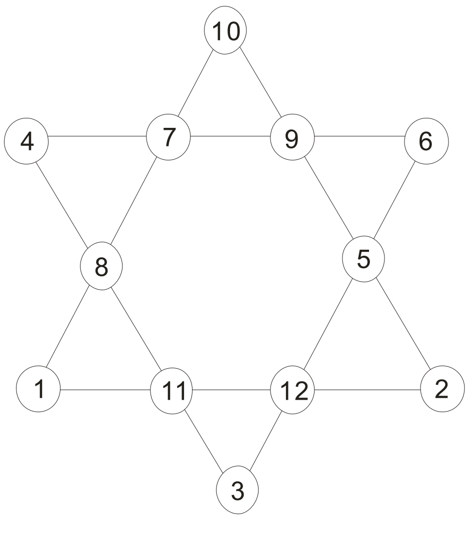


29.

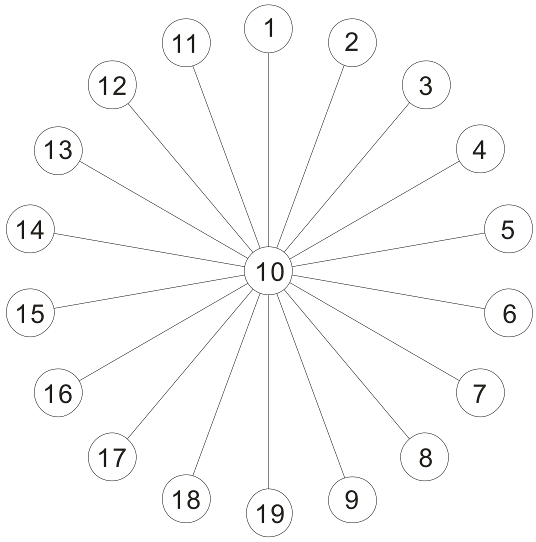


30. Pouze jedno řešení, vnitřnímu kruhu náleží součet čísel 5, 6, 7, 8.

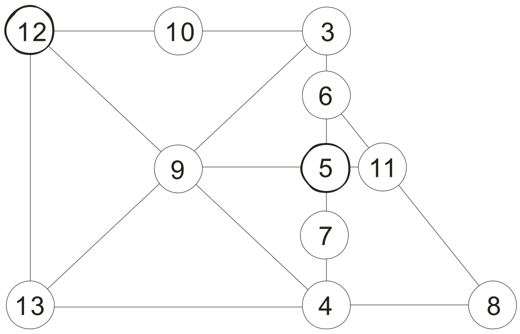
31.



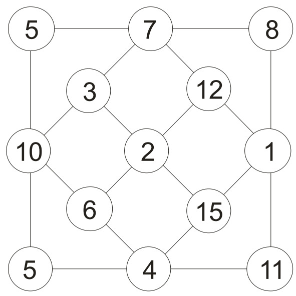
32.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

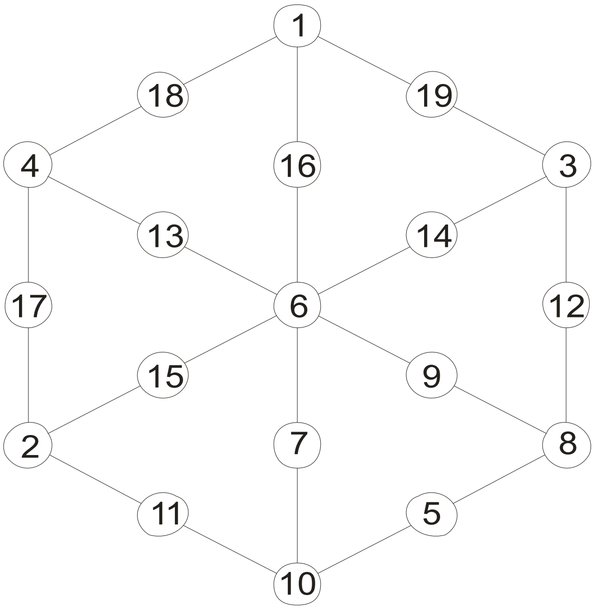
33.


12
10
3
6
9
5
11
7
13
4
8

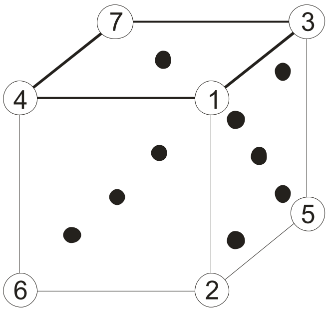
34.


5
7
8
3
12
10
2
1
6
15
5
4
11

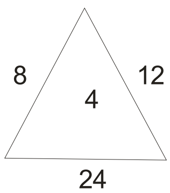
35.



36.

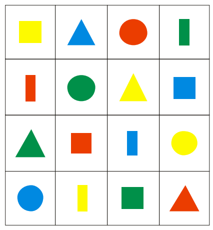


37.



6.5.3 Magické čtverce

38.



39.

72	147	42
57	87	117
132	27	102

40.

3	2	7
1	6	5
8	4	0

41.

43	61	7
1	37	73
67	13	31

42.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

43.

1	3	4	5	2
3	5	2	4	1
2	4	3	1	5
4	1	5	2	3
5	2	1	3	4

44.

7	3	2	6
1	8	5	4
4	5	8	1
6	2	3	7

45.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

12	6	7	9
13	3	2	16
1	15	14	4
8	10	11	5

46. celkem 48 řešení

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

47.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

48.

4	48	3	49	5	44	22
14	11	40	41	38	23	8
29	16	18	33	24	20	35
43	37	31	25	19	13	7
15	30	26	17	32	34	21
42	27	12	9	10	39	36
28	6	45	1	47	2	46

49.

5	184	294	335
390	239	129	60
349	280	170	19
74	115	225	404

50.

1 / 16	9 / 15	3 / 14	11 / 13
8 / 2	7 / 10	6 / 4	5 / 12

6.5.4 Algebrogramy

51. 8

52. Jde o magický čtverec známý již ve středověku. Všemi směry dostaneme součet 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

53.

$$\begin{array}{r} 5\,805 \\ +\ 1\,265 \\ \hline 7\,070 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,500 \\ -\ 3\,496 \\ \hline 4\,004 \end{array}$$

54.

$$\begin{array}{r} 251 \\ 89 \\ 695 \\ \hline 1\,035 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,555 \\ 555 \\ 545 \\ \hline 6\,655 \end{array}$$

55.

$$\begin{array}{r} 415 \\ .\ \ 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

56.

$$\begin{array}{r} 29\,786 \\ 850 \\ 850 \\ \hline 31\,486 \end{array}$$

57.

$$\begin{array}{l} \underline{125} \times 37 \\ 375 \\ \underline{\ 875} \\ 4625 \end{array}$$

58.
a) 3 + 2 415 + 14 + 8 514 = 10 946
b) 504 + 7 923 + 86 + 392 567 = 401 080
c) 90 578 + 90 578 + 90 578 = 271 734
d) 35 694 + 35 694 + 35 694 = 107 082

e) 9 587 + 41 368 + 41 910 = 92 865

f) 4 590 + 8 612 + 73 934 = 87 136

g) 796 816 + 7 265 + 1 624 = 805 705

h) 54 137 + 13 832 + 5 702 = 73 671

i) 9 637 + 365 + 208 = 10 246

j) 146 + 701 + 79 865 = 80 742

k) 13 686 + 67 640 + 13 686 = 95 012

l) 14 292 + 38 926 + 14 292 = 67 510

m) 792 + 3 202 + 6 202 + 4 202 + 2 002 + 28 702 = 45 102

n) 698 + 450 + 6 950 + 16 750 + 16 357 = 41 202

o) 3 906 + 86 + 4 925 = 8 917

7. Závěr

Úkolem této diplomové práce bylo sestavení studijního materiálu shrnujícího problematiku přirozených čísel tak, aby byla využitelná pro studenty oboru učitelství 1. stupně ZŠ. K tomuto společnému cíli směřovala všechna témata, která byla v diplomové práci zpracována, a to sice historie přirozených čísel a psychologický pohled na tuto problematiku ať už v procesu školní výuky nebo v procesu vznikání číselných představ v průběhu dějin lidstva.

Doufáme, že samostatné studium této práce studentům poskytne ucelený pohled na obor přirozených čísel a pomůže jim uchopit učivo při vyučovacím procesu tak, aby nebylo pojímáno pouze formálně. Pro tyto účely byla vytvořena sbírka úloh, která je sestavena z příkladů rozvíjejících dovednosti budoucích učitelů, kterou ovšem mohou využít i při své budoucí praxi pro rozvíjení logického myšlení žáků, oživení výuky, jako rozšiřující učivo pro bystré žáky či jako náplň vyučovacích hodin na 2. stupni při suplování.

Během vytváření této diplomové práce nás napadalo mnoho dalších problémů, které by mohly být zkoumány v dalších diplomových pracích týkajících se přirozených čísel. Jedním z těchto problému by mohlo být rozsáhlejší testování úrovně studentských dovedností v oboru přirozených čísel. Takové testování by také mohlo být aplikováno na samotné žáky základních škol, pro jehož účely by mohl být vytvořen kroužek zájmové matematiky.

Další rozvoj by mohl být věnován problematice vyvozování čísel v 1. třídě, jehož výsledkem by bylo sestavení metodické příručky pro budoucí učitele. Součástí takové práce by mohl být dotazník pro učitele, který by zjišťoval úroveň dovedností žáků s přirozenými čísly. Jiný dotazník by mohl být orientován na zjištění nejčastějších obtíží v oboru přirozených čísel v 1. vzdělávacím období 1. stupně ZŠ. Zpracování takových dotazníků by bylo přínosem pro začínající učitele.

Doufáme, že tato práce přiblíží studentům problematiku přirozených čísel, a že se stane používanou příručkou nejen při studiu přirozených čísel, ale také v jejich uvádění do praxe.

8. Použitá literatura

Balada, F. (1959): *Z dějin elementární matematiky*, Praha: SPN, s. 239 (s. 35 – 62)

Barrow, J., D. (2000): *Pí na nebesích*, Praha: Mladá fronta, s. 312 (s. 34 – 10)

Bělík, M. (1998): *Přirozená čísla jako čísla kardinální a ordinální*, Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, s. 101

Coufalová, J. (2000*): Matematika s didaktikou pro 1. ročník učitelství 1. stupně ZŠ*, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, s. 127

Divíšek, J. a kol. (1989): *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, Praha: SPN, s. 272 (s. 22 - 27, s. 48 – 50, s. 56 – 6)

Divíšek, J., Hošpesová, A. (2002): *Matematika pro všechny děti : sborník materiálů kurzu pro učitele "Vyučování matematice na 1. stupni ZŠ"*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, s. 101

Drábek J. a kol. (1985): *Základy elementární matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, Praha: SPN, s. 224 (s. 130 – 157)

Hejný, M., Hejná, M. (1998): *Součtové trojúhelníky – metodický materiál*, Praha: Raabe, s. 25

Hejný, M., Stehlíková, N. (1999): *Číselné představy dětí*, Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, s. 123 (s. 25 – 29)

Kolman, A. (1969): *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha: Academia, s. 221 (s. 14 – 74)

Korděwskij, B., A. (1966): *Matematické prostocviky*, Praha: Mladá fronta, s. 540

Kopka, J. (2003): *Kapitoly o přirozených číslech*, Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, s. 88

Kuřina, F. a kol. (2001): *Dítě, škola, matematika,* Praha: Portál, s. 189

Luhan, E. (1987): *Kapitoly z dějin matematiky II. část*, Praha: SPN, s 115 (s. 5 – 40)

Novoveský, Š. a kol. (1971*): 777 matematických zábav a her*, Praha: SPN, s. 384

Pěnčík, J., Pěnčíková, J., (1995): *Lámejte si hlavu*, Praha: Prométheus, s. 383

Zelinková, O. (2001): *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací plán*, Praha: Portál, s. 207 (s. 148 – 155)

http://cs.wikipedia.org/wiki/

http://www.vuppraha.cz/soubory/ RVPZV_2007-07.pdf

9. Přílohy

Seznam příloh

1. Seznam obrázkové přílohy

Obrázky č. 6 až 14 pocházejí z internetového portálu uvedeného v seznamu literatury, ostatní obrázky pocházejí z vlastních zdrojů, tzn. jsou vlastnoručně vytvořené v programu Corel Draw 12.

2. Očekávané výstupy

Očekávané výstupy – 1. období

žák by měl:

- číst, psát a používat číslice v oboru do 20, numerace do 100
- sčítat a odčítat s užitím názoru v oboru do 20
- porovnávat množství a vytvářet soubory prvků podle daných kritérií v oboru do 20
- znát matematické pojmy + , - , =, <, > a umět je zapsat
- umět rozklad čísel v oboru do 20
- řešit jednoduché slovní úlohy na sčítání a odčítání v oboru do 20

Očekávané výstupy – 2. období

žák by měl:

- číst, psát a porovnávat čísla v oboru do 100 i na číselné ose, numerace do 1000
- rozeznávat sudá a lichá čísla
- sčítat a odčítat zpaměti i písemně dvouciferná čísla
- zapsat a řešit jednoduché slovní úlohy
- zaokrouhlovat čísla na desítky i na stovky s využitím ve slovních úlohách
- zvládnout s názorem řady násobků čísel 2 až 10 do 100
- tvořit a zapisovat příklady na násobení a dělení v oboru do 100
- umět používat kalkulátor

Učivo celého 1. stupně by se dalo rozdělit do následujících okruhů:

- obor přirozených čísel do 1000
- násobilka
- zápis a rozklad čísla v desítkové soustavě, číselná osa
- porovnávání čísel
- sčítání, odčítání, násobení, dělení
- práce s kalkulátorem

Na 2. stupni základní školy dochází k dalšímu rozšiřování číselného oboru přirozených čísel.

Očekávané výstupy

žák by měl:

- psát, číst, porovnávat a zaokrouhlovat čísla v oboru do 1 000 000
- zvládat orientaci na číselné ose
- písemně sčítat, odčítat, násobit a dělit víceciferná čísla, dělit se zbytkem
- provádět odhad výsledku, zaokrouhlovat čísla
- dělitelnost přirozených čísel – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti
- římské číslice

Při osvojování učiva o přirozených číslech můžeme využít takové formy výuky a práce žáků, které povedou k rozvíjení stanovených klíčových kompetencí podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2007)

3. Náměty pro práci s přirozenými čísly pro žáky ZŠ

3.1 Stovková tabulka

Její hlavní přínos spočívá v samostatném odhalování zákonitostí desítkové soustavy, v množství různých způsobů práce se stovkovou tabulkou. Následující náměty uvádíme pouze jako inspiraci, tedy se nezabýváme uváděním řešení.

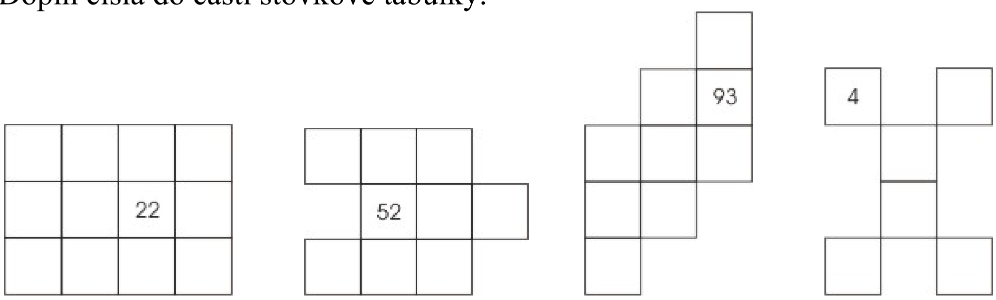
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1. Náměty pro práci se stovkovou tabulkou

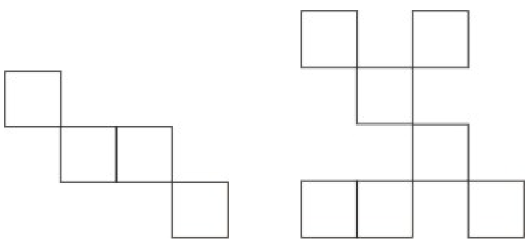
1	11	21		41	51	61	71		91
2	12	22		42	52	62	72		
	13	23		43	53	63			93
4		24		44	54		74		94
5	15			45		65	75		95
7	17	27			57	67	77		97
8	18			48		68	78		98
9		29		49	59		79		99
	20	30		50	60	70			100

a) Doplň do tabulky chybějící čísla
b) Jaký je vztah mezi žlutě označenými čísly?
c) Jaký je vztah mezi zeleně označenými čísly?
d) Jaký je vztah mezi žlutě a zeleně označenými čísly?
e) Porovnej součet žlutě a součet zeleně označených čísel.
f) Zakroužkuj červeně všechny násobky čísla 5. Pozoruješ zde něco zvláštního?

2. Doplň čísla do části stovkové tabulky.



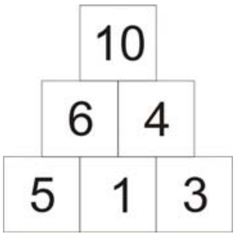
3. Doplň čísla do obrazce tak, aby byl částí stovkové tabulky



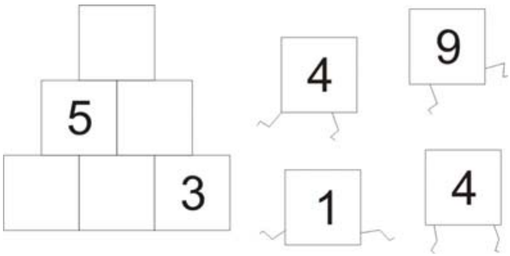
3.2 Součtové trojúhelníky

Hlavním pozitivem práce se součtovými trojúhelníky je velké množství příkladů, které žáci spočítají při řešení celého součtového trojúhelníku. Další kladnou stránkou je motivace, jelikož v učebnicích se úlohy tohoto typu nevyskytují často a jsou pro žáky zajímavé. Při řešení takových úloh nemají pocit učení, ale vnímají je jako hru.

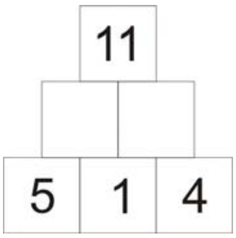
1. Vysvětli, jak je číselný trojúhelník sestaven.



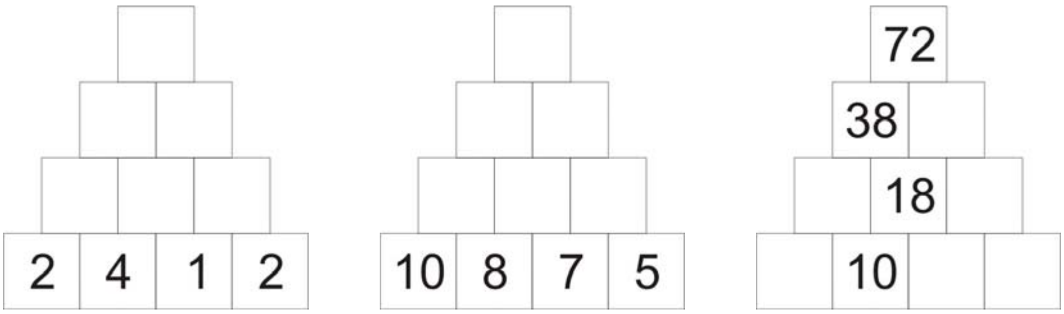
2. Ze součtového trojúhelníka utekla neposlušná čísla, umíš je vrátit na správné místo?



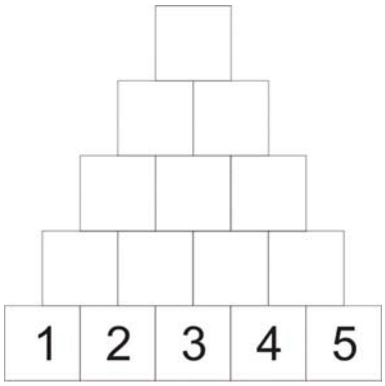
3. Poznáš, jaká čísla v součtovém trojúhelníku scházejí? Dosaď je.

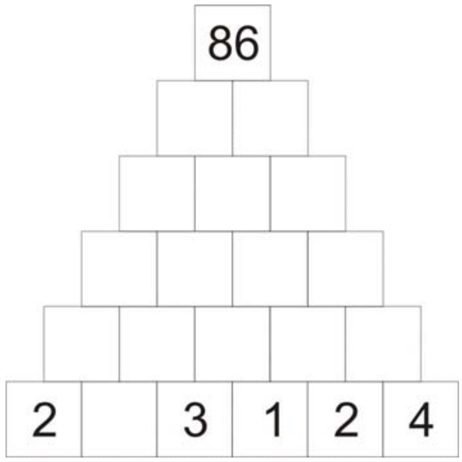


4. Doplň chybějící čísla.

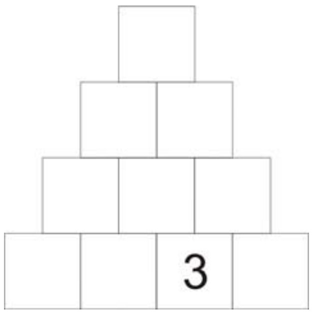


5. Doplň chybějící čísla do součtového trojúhelníku.

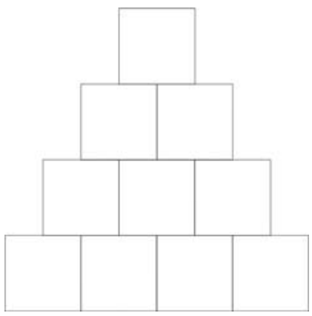




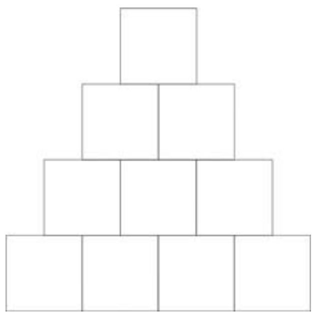
6. Doplň následující čísla do součtového trojúhelníku 1, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 16, 28.



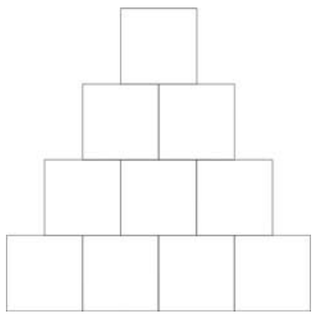
7. Do dolního řádku součtového trojúhelníku vlož čísla 1, 1, 1, 2 tak, aby horní číslo bylo



co největší



co nejmenší



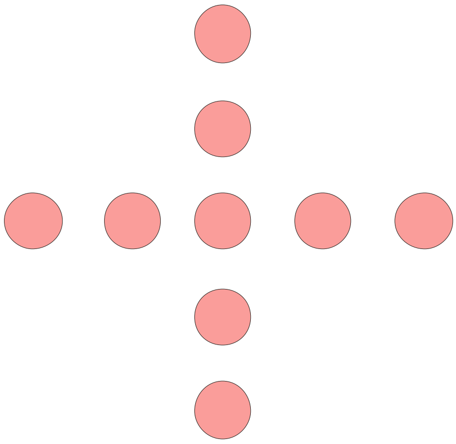
sudé

4. Test – varianta A

1. Rozložte číslo 1 648 na tři sčítance tak, aby první bylo o 170 větší než třetí a druhý o 54 větší než první.

2. Součet tří čísel je 456 789. Jedno z čísel je složeno ze 3 sedmiček a 2 šestek, druhé ze 4 osmiček a pětky, třetí z nuly, jedničky, 3 trojek a čtyřky. Která jsou to čísla?

3. Doplň všechna čísla od 1 do 9 do následujícího obrazce. Součet v každém jeho rameni (tento obrazec má 2 ramena) je 23.



4. Do prázdných políček vepište čísla 4, 7, 10, 13 tak, aby byl daný čtverec magický.

16	3	2	
5		11	8
9	6		12
	15	14	1

5. Sčítání a odčítání patří mezi nejjednodušší početní výkony. Pokuste se vyřešit tyto dvě úlohy. Místo teček vepište číslice.

```
  5 . 0 .
+ . 2 . 5
---------
  7 0 7 0
```

```
  7 . . 0
- . 4 9 .
---------
  4 0 0 4
```

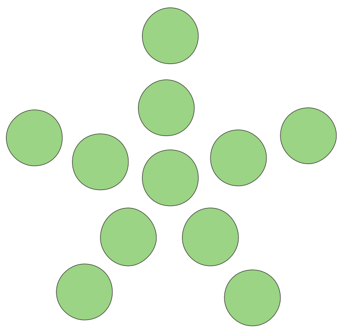
5. Test – varianta B

1. Doplňte mezi číslice znaky aritmetických úkonů tak, aby byl výsledek roven jedné. Můžete použít závorky a vytvářet dvojciferná čísla spojením dvou sousedních čísel, nesmíte však měnit jejich pořadí.

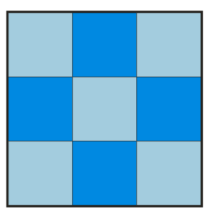
   a) 1 2 3 = 1
   b) 1 2 3 4 = 1
   c) 1 2 3 4 5 = 1
   d) 1 2 3 4 5 6 = 1

2. Jestliže k dvojcifernému číslu připíšete 6, k tomu získanému trojcifernému číslu připočtete 6 a od součtu odepíšete číslici označující jednotky, pak dostanete číslo 76. Jaké je původní číslo?

3. V následujícím obrazci vepište čísla od 1 do 11 do koleček tak, aby byl součet čísel 14 v každém rameni skládajícím se ze 3 koleček.



4. Rozmístěte čísla 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 v devíti čtverečcích velkého čtverce tak, aby součet v každé řádce byl 27.



5. Doplň místo hvězdiček čísla tak, aby byl příklad na násobení správně.

```
        * 1 *
 .      3 * 2
 ------------
        * 3 *
    3 * 2 *
  * 2 * 5
 ------------
  1 * 8 * 3 0
```