UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Preferenční relace na množině náhodných veličin

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Petra Bittnerová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vytvořila samostatně pod vedením RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a také jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 14. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Zároveň bych chtěla poděkovat svým rodičům a přátelům, kteří mě při studiu podporovali. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo.

Obsah

1 Úvod

V bakalářské práci se budeme zabývat preferenčními relacemi na množině náhodných veličin. Náhodné veličiny jsou funkce, jejichž hodnoty jsou ovlivněny náhodou. Aniž si to možná uvědomujeme, náhodné veličiny charakterizují mnoho skutečností kolem nás. Můžou například vyjadřovat počet gólů vstřelených za zápas nebo počet vadných výrobků z určité výrobní série.

Cílem práce je studovat různé možnosti uspořádání náhodných veličin. To pro nás znamená, že budeme chtít rozhodnout, kterou náhodnou veličinu budeme preferovat před druhou. Jedná se o velmi důležitý úkol z hlediska praktické využitelnosti. Např. je běžnou praxí manažerů, že se musí rozhodnout mezi několika projekty, který z nich bude pro danou firmu nejlepší, přičemž budoucí výnos z jednotlivých projektů je ve své podstatě náhodná veličina.

V následující kapitole si nadefinujeme pojmy, se kterými se budeme setkávat v celé práci. Budou to pojmy z algebry a teorie pravděpodobnosti. Zajímat nás budou relace a to zejména relace uspořádání. Dále se budeme zabývat pravděpodobností a náhodnými veličinami, jejich číselnými charakteristikami a vlastnostmi. Také si nadefinujeme rozdělení pravděpodobností a uvedeme si ty typy rozdělení, na kterých budeme metody aplikovat. Ve třetí kapitole už budeme zkoumat vztahy mezi náhodnými veličinami. Probereme si různé metody, kterými je možné uspořádat náhodné veličiny. Metody jsme rozdělili na uspořádání podle číselných charakteristik, uspořádání podle aspirační úrovně a uspořádání podle stochastické dominance. Dále pak prozkoumáme vztahy mezi jednotlivými metodami. Metody budou aplikovány na náhodných veličinách se spojitým rozdělením pravděpodobnosti. Na souhrnném příkladě pak metody aplikujeme také pro náhodné veličiny s diskrétním rozdělením pravděpodobnosti.

2 Přehled použitých pojmů

V této části si zavedeme pojmy, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách. Nejprve budeme definovat relace a poté se seznámíme s jejich základními typy a vlastnostmi. Dále budeme definovat základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, které použijeme v praktické části bakalářské práce. Podkapitola *Relace* je zpracována podle literatury [2, 4]. Podkapitola *Základní pojmy z matematické statistiky* je zpracována podle literatury [3].

2.1 Relace

S relacemi se budeme setkávat v průběhu celé práce, je proto důležité tento pojem správně pochopit a důkladně definovat. K tomu potřebujeme základní znalost teorie množin.

Definice 2.1. Nechť $n \in N$ a $M_1,M_2,\ldots,M_n$ jsou neprázdné množiny. Množinu $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, tvořenou všemi uspořádanými n-ticemi $(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, kde $m_i \in M_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, nazýváme *kartézským součinem množin* $M_1,M_2,\ldots,M_n$.

Definice 2.2. Nechť $n \in N$ a $M_1,M_2,\ldots,M_n$ jsou neprázdné množiny. Pak *n-ární relací* mezi množinami $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Je-li $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, pak podmnožinu R kartézského součinu $R \subseteq M^n$ nazveme n-ární relací na množině M. Pro $n = 1,2,3$ hovoříme speciálně o *unární, binární a ternární relaci na* M.

Nejčastějším typem relace je binární relace. Jestliže nebude řečeno jinak, budeme pod pojmem relace rozumět vždy binární relaci.

V této práci budeme používat pro uspořádanou dvojici $(a,b) \in M^2$ zápis $(a,b) \in R$, resp. aRb, tzn. prvky a,b jsou v relaci R, resp. a je v relaci R s prvkem b.

V praxi se setkáváme s binárními relacemi s různými vlastnostmi. Pro některé máme zavedeny speciální názvy.

Definice 2.3. Nechť R je binární relace na množině M. Relace R se nazývá

a) *reflexivní*, jestliže $\forall a \in M : (a,a) \in R$,

b) *symetrická*, jestliže $\forall a,b \in M : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$,

c) *tranzitivní*, jestliže $\forall a,b,c \in M : (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$,

d) *antisymetrická*, jestliže $\forall a,b \in M : (a,b) \in R,\ (b,a) \in R \Rightarrow a = b$.

e) *úplná*, jestliže $\forall a,b \in M : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

Definice 2.4. Nechť R je binární relace na množině M, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Pak říkáme, že R je *relace ekvivalence* na množině M.

Definice 2.5. Nechť $R \subseteq M_1 \times M_2$ je binární relace mezi množinami M_1 a M_2. *Inverzní relaci* k relaci R značíme $R^{-1} \subseteq M_2 \times M_1$ a platí:

$$\forall a \in M_1, b \in M_2;\ (b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in R \tag{1}$$

Věta 2.1. *Jestliže relace R má libovolnou ze čtyř vlastností (reflexivita, symetričnost, tranzitivita, antisymetričnost), potom také inverzní relace R^{-1} má tytéž vlastnosti.*

Důkaz: Viz [3]. ■

Binární relace jsou různých typů. Pro naše téma je podstatná relace uspořádání, pomocí niž budeme porovnávat náhodné veličiny v praktické části práce.

Definice 2.6. Binární relace $\leq$ na množině M, která je reflexivní a tranzitivní, se nazývá *kvaziuspořádání na M*. Množina M, na níž je definováno kvaziuspořádání $\leq$, se nazývá *kvaziuspořádaná* a značí se $(M, \leq)$.

Definice 2.7. Kvaziuspořádaná množina $(M, \leq)$ taková, že relace $\leq$ je antisymetrická, se nazývá *uspořádaná*. Relaci $\leq$ potom nazýváme *částečné uspořádání na M*. V případě, že relace $\leq$ je navíc úplná, nazýváme ji *lineárním uspořádáním*.

Poznámka 2.1. *Pro* $(a,b) \in (M^2, \leq)$, $a \leq b$ *čteme a je menší nebo rovno b, resp. a je obsaženo v b. Jestliže* $a \leq b$, $a \neq b$, *budeme psát* $a < b$ *a čteme a je menší než b. Pro* $(a,b) \in (M^2, \geq)$. *Pak* $a \geq b$ *čteme a je větší nebo rovno b,* $a > b$ *čteme a je větší než b.*

Věta 2.2. *Nechť* $\leq$ *je relace (kvazi)uspořádání na* M. *Pak relace* $\leq^{-1}$ *je také relace (kvazi)uspořádání na M.*

Důkaz: Plyne z Věty 2.1. ■

Definice 2.8. Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Říkáme, že prvky $(a,b) \in M^2$ jsou srovnatelné, je-li $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Není-li ani $a \leq b$ ani $b \leq a$, pak se nazývají nesrovnatelné, což značíme $a \parallel b$. Jsou-li každé dva prvky množiny M srovnatelné, pak říkáme, že $(M, \leq)$ je úplně uspořádaná množina nebo řetězec (resp. lineárně uspořádaná) a relaci $\leq$ pak nazýváme úplným (lineárním) uspořádáním.

Věta 2.3. *Nechť* $(M, \leq)$ *je kvaziuspořádaná množina. Definujeme binární relaci* I *na* M *takto: aRb právě když* $a \leq b$ *a současně* $b \leq a$. *Pak* I *je relace ekvivalenece na* M.

Důkaz: Viz [3]. ■

2.2 Základní pojmy z matematické statistiky

V této kapitole si zavedeme pojmy z matematické statistiky. Nejdůležitější pro nás budou náhodné veličiny a jejich vlastnosti. Dále se budeme zabývat číselnými charakteristikami náhodných veličin, které budou využity pro tvorbu preferenčních relací.

2.2.1 Pravděpodobnost

Dříve než se budeme zabývat náhodnými veličinami, je nutné nadefinovat si pojem pravděpodobnost a porozumět mu. Proto si vysvětlíme další pojmy, které s teorií pravděpodobnosti souvisí.

Pojem *pokus* známe dobře z fyziky, chemie nebo biologie. Jako příklad si uvedeme hořící svíčku. Ještě než pokus zahájíme, můžeme říct, jaký bude výsledek. Její plamen zhasne, pokud ji přikryjeme sklenicí. Tento pokus se nazývá *deterministický*, protože končí právě jedním výsledkem.

Pro teorii pravděpodobnosti je podstatný *náhodný pokus*, který je deterministický a je ovlivněn náhodou. Typickými příklady jsou hod kostkou, výběr karty z balíčku, tahání sirek... U náhodného pokusu nemůžeme s jistotou říct, jaký bude mít výsledek.

Označme Ω množinu všech možných výsledků náhodného pokusu. $\omega \in \Omega$ značí jeden konkrétní výsledek náhodného pokusu.

Definice 2.9. Každá množina $A \subset \Omega$ se nazývá *jev*, jednoprvkové podmnožiny nazýváme *elementární jevy.*

Definice 2.10. Nechť $\Omega \neq \emptyset$ je libovolná množina. Neprázdný systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny Ω se nazývá *jevové pole*. Platí-li

a) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

b) $A_n \in \mathcal{A},\ n = 1,2,\dots \ \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Prvky $A \in \mathcal{A}$ se nazývají *náhodné jevy.*

Náhodným jevům můžeme přiřadit pravděpodobnost.

Definice 2.11. Nechť je dána neprázdná množina Ω a na ní jevové pole $\mathcal{A}$ náhodných jevů. *Pravděpodobností* nazveme každou funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$, tj. reálnou funkci definovanou na $\mathcal{A}$, která vyhovuje následujícím axiomům:

a) $P(\Omega) = 1$,

b) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

c) Pro libovolnou posloupnost $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1{,}2,\dots$ neslučitelných náhodných jevů platí

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \tag{2}$$

Definice 2.12. Uspořádanou trojici $(\Omega,\mathcal{A},P)$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor.*

2.2.2 Náhodná veličina

Náhodná veličina je reálná funkce definovaná na množině všech možných výsledků náhodného pokusu. Většinou je možné každý z těchto výsledků vyjádřit číslem.

Definice 2.13. Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Reálnou funkci $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$ nazveme *náhodnou veličinou*, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^1$ platí $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.
Dané množině můžeme přiřadit pravděpodobnost a pro každé reálné číslo x určíme $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$. Množinu $M \subset \mathbb{R}^1$ všech hodnot náhodné veličiny X nazýváme *obor hodnot náhodné veličiny* X.

Definice 2.14. Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ je pevně zvolená množina a nechť $\mathcal{D}$ je třída všech množin typu
$\mathcal{D} = \{(a_1,b_1\rangle \times (a_2,b_2\rangle \times \dots \times (a_n,b_n\rangle\},\ -\infty < a_j \leq b_j < \infty,\ j = 1,\dots,n.$
Nejmenší σ-okruh $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ nad třídou $\mathcal{D}$ se nazývá *systém borelovských množin v* $\mathbb{R}^n$ a označuje se $\mathcal{B}_n$. Množiny $B \in \mathcal{B}_n$ nazýváme *borelovské množiny v* $\mathbb{R}^n$

Definice 2.15. Nechť $\mathcal{B}_1$ je systém borelovských množin v $\mathbb{R}^1$. Říkáme, že *funkce* $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *je borelovská (borelovky měřitelná)*, jestliže

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) \in B\} \in \mathcal{B}_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}_1. \tag{3}$$

Věta 2.4. *Každá spojitá funkce je borelovsky měřitelná.*

Důkaz: Viz [7]. ∎

Věta 2.5. *Je-li* $\varphi(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *borelovsky měřitelná funkce a je-li* X *náhodná veličina, potom také* $Y = \varphi(X)$ *je náhodná veličina.*

Důkaz: Viz [5]. ∎

V teorii pravděpodobosti je důležité stanovit *rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny*. Potom můžeme konstatovat, jaká je pravděpodobnost, že výsledek pokusu patří do určitého intervalu.

Definice 2.16. *Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny* X je množinová funkce $P_X(B) : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{R}^1$ dána vztahem

$$P_X(B) = P(X \in B), \qquad B \in \mathcal{B}_1. \tag{4}$$

Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny je možné určit pomocí *distribuční funkce*, která nám podává úplnou informaci o náhodné veličině a jejím pravděpodobnostním chování.

Definice 2.17. Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Reálná funkce F_X definovaná na $\mathbb{R}^1$ předpisem

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \tag{5}$$

se nazývá *distribuční funkce náhodné veličiny* X.

V praxi existují dva typy distribučních funkcí, diskrétní a spojité.

Definice 2.18. Předpokládejme, že existuje konečná nebo nekonečná prostá posloupnost reálných čísel $\{x_n\}$ taková, že

$$\sum_n P(X = x_n) = 1. \tag{6}$$

Označme $p_n = P(X = x_n)$. Posloupnost $\{x_n\}$ hodnot , kterých nabývá náhodná veličina X a posloupnost $\{p_n\}$ pravděpodobností, s nimiž náhodná veličina svých hodnot nabývá, určují tzv. *diskrétní rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny* X. *Náhodná veličina*, která má diskrétní rozdělení pravděpodobností, se nazývá *diskrétní, resp. diskrétního typu.* Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je dána vztahem

$$F_X(x) = \sum_{n: x_n \le x} p_n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{7}$$

Tato funkce se nazývá *diskrétní distribuční funkce.*

Definice 2.19. Řekneme, že *náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobností (má rozdělení spojitého typu, je spojitá)*, existuje-li nezáporná, borelovsky měřitelná funkce $f_X(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ taková, že

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Funkce $f_X(x)$ se nazývá *hustota rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X.*

Věta 2.6. *Každá nezáporná, borelovsky měřitelná funkce g taková, že*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1, \tag{9}$$

je hustotou rozdělení pravděpodobností nějaké náhodné veličiny, tzn. existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a na něm náhodná veličina X spojitého typu taková, že $g(x)$ je její hustotou.

Důkaz: Viz [4]. ■

2.2.3 Číselné charakteristiky náhodné veličiny

V řadě případů nepotřebujeme znát distribuční funkci náhodné veličiny a postačí nám pouze *číselné charakteristiky náhodné veličiny.* Ty shrnují informace o náhodné veličině do jednoho čísla.

Definice 2.20. Nechť X je diskrétní náhodná veličina s rozdělením $\{x_n\}$,$\{p_n\}$. Je-li

$$\sum_n |x_n| p_n = \sum_n |x_n| P(X = x_n) < \infty, \tag{10}$$

nazveme součet řady

$$\sum_n x_n p_n = \sum_n x_n P(X = x_n) < \infty, \tag{11}$$

střední hodnotou $E(X)$ *náhodné veličiny* X. Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina X nemá střední hodnotu.
Nechť $\varphi(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ je borelovsky měřitelná funkce. Je-li

$$\sum_n |\varphi(x_n)| p_n = \sum_n |\varphi(x_n)| P(X = x_n) < \infty, \tag{12}$$

nazveme součet řady

$$\sum_n \varphi(x_n) p_n = \sum_n \varphi(x_n) P(X = x_n) < \infty, \tag{13}$$

střední hodnotou $E(\varphi(X))$ *náhodné veličiny* $\varphi(X)$. Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina $\varphi(X)$ nemá střední hodnotu.

Definice střední hodnoty spojité náhodné veličiny je založena na stejném principu, ale namísto sčítání integrujeme.

Definice 2.21. Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f_X(x)$. Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty, \tag{14}$$

nazveme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \tag{15}$$

střední hodnotou $E(X)$ *náhodné veličiny* X. Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina X nemá střední hodnotu (její střední hodnota neexistuje).
Nechť $\varphi(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ je borelovsky měřitelná funkce. Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| f_X(x) dx < \infty, \tag{16}$$

nazveme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) dx < \infty, \tag{17}$$

střední hodnotou $E(\varphi(X))$ *náhodné veličiny* $\varphi(X)$. Není-li uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina $\varphi(X)$ nemá střední hodnotu.

Označení: Symbolem $L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ značíme množinu všech náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru, které mají střední hodnotu.

Věta 2.7. *Nechť jsou náhodné veličiny* X,Y *definovány na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *a nechť* a,b *jsou libovolná reálná čísla. Platí*

1.

$$X \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P) \Rightarrow E(aX) = aE(X), \tag{18}$$

2.

$$P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow E(X) \geq 0, \tag{19}$$

3.

$$X \in L_1, Y \in L_1 \Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y), \tag{20}$$

4.

$$X \in L_1, Y \in L_1, \quad P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow E(X) \leq E(Y), \tag{21}$$

5.

$$P(X = a) = 1 \Rightarrow E(X) = a. \tag{22}$$

Důkaz: Plyne z vlastností číselných řad a integrálů. ■

Definice 2.22. Nechť X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega,\mathcal{A},P)$,$r = 1,2,\ldots$

$E(X^r)$ se nazývá *r-tý (počáteční, obecný) moment*,

$E(|X|^r)$ se nazývá *r-tý (počáteční, obecný) moment.*

Je-li $X \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$, pak

$E(X - E(X))^r$ se nazývá *r-tý centrální moment,*

$E(|X - E(X)|)^r$ se nazývá *r-tý centrální absolutní moment.*

Definice 2.23. Druhý centrální moment náhodné veličiny X se nazývá *rozptyl (variance, disperse) náhodné veličiny* X. Obvykle se označuje

$$var(X) = E[X - E(X)]^2. \tag{23}$$

Druhá odmocnina z rozptylu $\sqrt{var(X)}$ se nazývá *směrodatná (standardní, střední, kvadratická) odchylka náhodné veličiny* X.

Definice 2.24. Nechť $\alpha \in (0{,}1)$. α*-kvantil náhodné veličiny* X je takové reálné číslo x_α, pro které platí

$$P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha \qquad \wedge \qquad P(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha. \tag{24}$$

Poznámka 2.2. *Je-li distribuční funkce* F_X *náhodné veličiny* X *spojitá a rostoucí všude, kde* $0 < F_X(x) < 1$, *což také splňují všechny náhodné veličiny se spojitým rozdělením, je* α*-kvantil* x_α *jednoznačně určen jako*

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \tag{25}$$

a současně platí vztahy

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha \quad \wedge \quad P(X \geq x_\alpha) = 1 - \alpha. \tag{26}$$

Poznámka 2.3. *Pro některé kvantily máme zavedeny speciální názvy.* 0,50-*kvantil se nazývá* medián *a značí se* $\tilde{x}$ *nebo* Med. 0,25-*kvantil nazýváme* dolní kvartil *a* 0,75-*kvantil nazýváme* horní kvartil.

Definice 2.25. Je-li X diskrétní náhodná veličina, její nejpravděpodobnější hodnotu nazýváme *modus* a značíme $\hat{x}$ nebo Mod, tzn.

$$P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i). \tag{27}$$

Je-li X spojitá náhodná veličina, bod, ve kterém má hustota f_X maximum, nazýváme *modus* a značíme $\hat{x}$ nebo Mod, tzn.

$$f_X(\hat{x}) \geq f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{28}$$

Definice 2.26. Říkáme, že diskrétní náhodná veličina X má *symetrické rozdělení podle bodu* μ, jestliže platí

$$P(X = x_n) = P(X = 2\mu - x_n) \tag{29}$$

pro všechny její hodnoty x_n.
Říkáme, že spojitá náhodná veličina X má *symetrické rozdělení podle bodu* μ, jestliže pro její hustotu platí

$$f(\mu - x) = f(\mu + x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{30}$$

Pro náhodnou veličinu X, která má rozdělení symetrické podle bodu μ, platí

$$E(X) = \mu,\ E[(X - \mu)^k] = 0, \quad \forall k = 1{,}3{,}5, \ldots \tag{31}$$

tj. všechny její liché centrální momenty jsou nulové.

2.2.4 Přehled použitých rozdělení pravděpodobnosti

V další kapitole budeme používat diskrétní i spojité rozdělení pravděpodobnosti. Na spojitém trojúhelníkovém rozdělení pravděpodobnosti budeme aplikovat jednotlivé metody. Diskrétní binomické rozdělení použijeme na souhrnném příkladě.

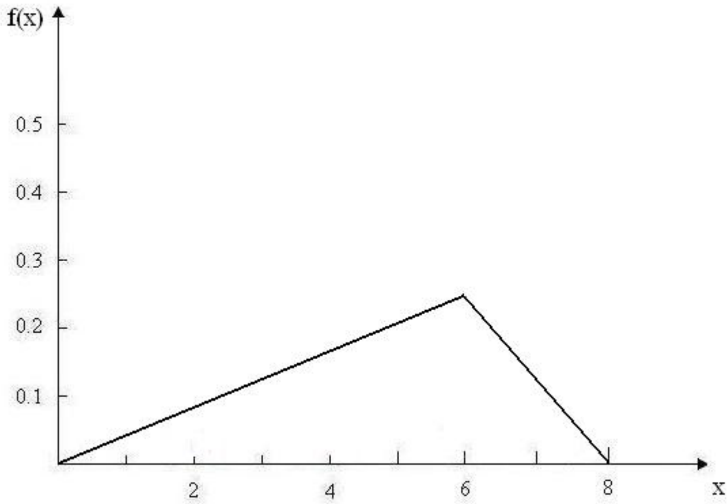
Trojúhelníkové rozdělení

Náhodná veličina X má trojúhelníkové rozdělení s parametry a, b, c, pro které platí $a \leq c \leq b$, jestliže hustota trojúhleníkového rozdělení je ve tvaru

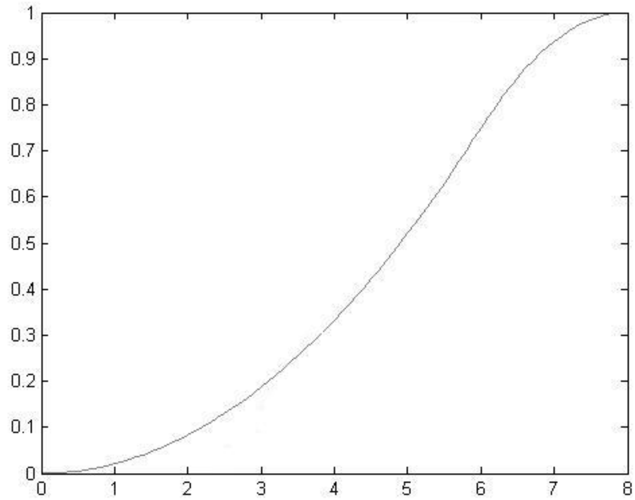
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{pro } a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{pro } c < x \leq b, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \tag{32}$$

Označujeme $X \sim Tri(a{,}c{,}b)$. Distribuční funkce je ve tvaru

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < a, \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & \text{pro } a \leq x \leq c, \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & \text{pro } c < x \leq b, \\ 1, & \text{pro } b < x < \infty. \end{cases} \tag{33}$$



Obr. 1: Hustota $X \sim Tri(0, 6, 8)$



Obr. 2: Distribuční funkce $X \sim Tri(0, 6, 8)$

Pro střední hodnotu a rozptyl platí vztahy

$$E(X) = \tfrac{a+b+c}{3}, \tag{34}$$

$$var(X) = \tfrac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}. \tag{35}$$

Modus trojúhelníkového rozdělení je roven parametru c.

Trojúhelníkové rozdělení se často aplikuje v managementu, jeho parametry nám totiž určují hodnoty při pesimistickém scénáři, nejpravděpodobnějším scénáři a při optimistickém scénáři.

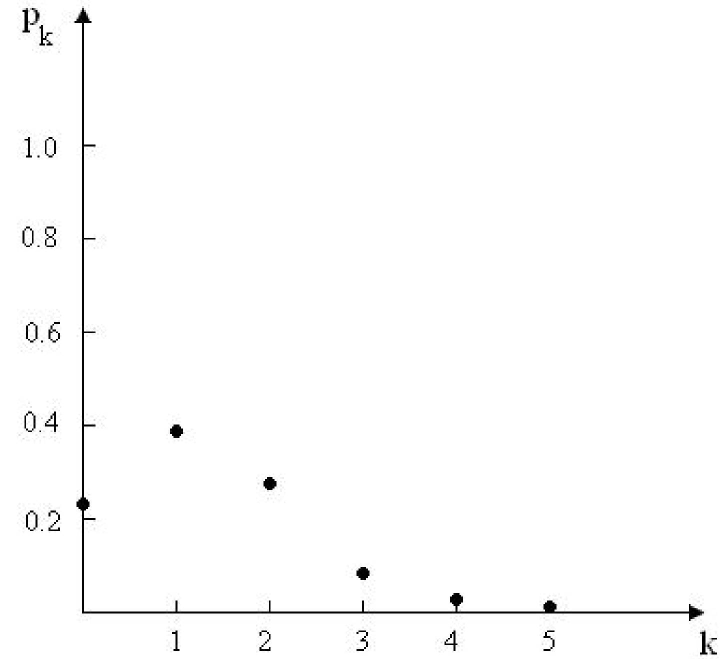
Binomické rozdělení

Náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry n,p, kde $p \in (0{,}1)$, $n \in \mathbb{N}$, jestliže nabývá hodnot $k = 0{,}1,\ldots,n$ s pravděpodobnostmi

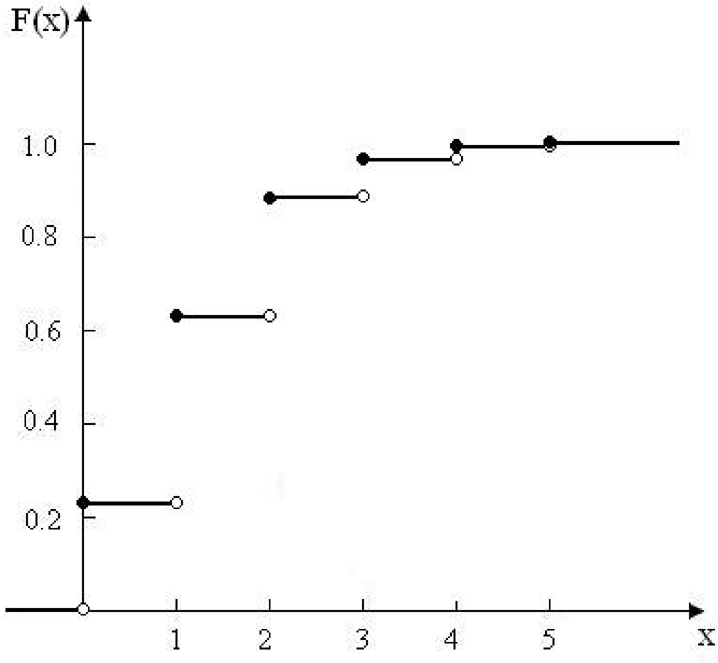
$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p_k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0{,}1,\ldots,n. \tag{36}$$

Označujeme $X \sim Bi(n,p)$. Distribuční funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0, \\ \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p_k (1-p)^{n-k}, & \text{pro } 0 \le x < n, \\ 1, & \text{pro } x \ge n. \end{cases} \tag{37}$$



Obr. 3: Pravděpodobnostní funkce $X \sim Bi(5; 0{,}25)$



Obr. 4: Distribuční funkce $X \sim Bi(5; 0{,}25)$

Z definice střední hodnoty a rozptylu získáváme vztahy

$$E(X) = np, \tag{38}$$

$$var(X) = np(1 - p). \tag{39}$$

Pro výpočet modu platí vztah

$$p(n + 1) - 1 \leq \hat{x} \leq p(n + 1). \tag{40}$$

Binomické rozdělení použijeme tehdy, když jsme provedli pevný počet nezávislých pokusů (n). V každém pokusu přitom mohl nastat jev (úspěch) se stejnou pravděpodobností $p \in (0,1)$ nebo neúspěch s pravděpodobností $1 - p$.

3 Metody preferenčních uspořádání náhodných veličin

V této kapitole se budeme zabývat metodami, podle kterých je možné uspořádat náhodné veličiny. Tyto metody jsou rozděleny do tří tříd. Jednotlivé metody potom aplikujeme na názorných příkladech.

V úvodu jsme naznačili, že náhodné veličiny mohou znamenat zisk z projektů, ze kterých manažer vybírá ten nejlepší pro firmu. Proto i my si tak můžeme představit náhodné veličiny. Z tohoto důvodu budeme předpokládat, že náhodné veličiny mají takovou interpretaci, že budeme preferovat vyšší hodnoty před nižšími, tj. kladné hodnoty pro nás znamenají zisk, záporné hodnoty ztrátu.

V praxi je ale vyšší zisk úzce spojen s rizikem projektu, který představuje rozptyl. Proto rozhodovatel musí určit, jaký postoj k riziku zaujme a jak velké riziko je pro něj přijatelné či nepřijatelné. Existují tři typy rozhodovatelů:

- **Rozhodovatel s averzí k riziku** upřednostňuje málo rizikové projekty, které s vysokou pravděpodobností dosáhnou pro něj přijatelného výsledku, před značně rizikovými projekty, tzn. projekty s velkým rozptylem, třebaže můžou dosáhnout většího zisku.

- **Rozhodovatel se sklonem k riziku** naopak vyhledává značně rizikové projekty, které mají naději vykazovat zvláště dobré výsledky, ale také jsou spjaty s vyšší pravděpodobností ztráty.

- **Rozhodovatel s neutrálním postojem k riziku** má averzi a sklon k riziku v rovnováze.

Poznámka 3.1. *Rozhodovatel s averzí k riziku potřebuje do úvah zahrnout i rozptyl. Abychom mohli počítat s rozptylem, vyžadujeme alespoň přibližnou symetrii rozdělení náhodných veličin. Ta ale není příliš častá, proto tyto metody zpravidla neumožní vybrat jedinou vhodnou náhodnou veličinu, ale zato pomůžou eliminovat dominované náhodné veličiny. Příkladem jsou metody střední hodnoty a rozptylu nebo střední hodnoty a variačního koeficientu* $k = \frac{\sqrt{var(X)}}{E(X)}$*, více viz [1].*

3.1 Uspořádání podle číselných charakteristik polohy

První třída metod, pomocí které můžeme náhodné veličiny uspořádat, je uspořádání podle číselných charakteristik polohy. Číselnou charakteristiku si můžeme představit jako funkci $\rho : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbf{X}$ je množina náhodných veličin.

Definice 3.1. Mějmě náhodné veličiny X a Y. Řekneme, že *náhodná veličina X je menší nebo rovna náhodné veličině Y podle číselné charakteristiky polohy ρ*, jestliže platí

$$\rho(X) \leq \rho(Y). \tag{41}$$

Značíme $X \leq_\rho Y$.
Řekneme, že *náhodná veličina X je menší než náhodná veličina Y podle číselné charakteristiky polohy ρ*, jestliže platí

$$\rho(X) < \rho(Y). \tag{42}$$

Značíme $X <_\rho Y$.
Řekneme, že *náhodná veličina X je rovna náhodné veličině Y podle číselné charakteristiky polohy ρ*, jestliže platí

$$\rho(X) = \rho(Y). \tag{43}$$

Značíme $X =_\rho Y$.

Číselné charakeristiky polohy, které budeme v dalším textu uvažovat, jsou střední hodnota, α-kvantil, medián a modus. Místo $X \leq_\rho Y$, $X <_\rho Y$, $X =_\rho Y$ potom budeme speciálně značit:

$X \leq_E Y$, $X <_E Y$, $X =_E Y$, pro $\rho \ldots$ střední hodnota,

$X \leq_{\alpha q} Y$, $X <_{q\alpha} Y$, $X =_{q\alpha} Y$, pro $\rho \ldots \alpha$ - kvantil[1],

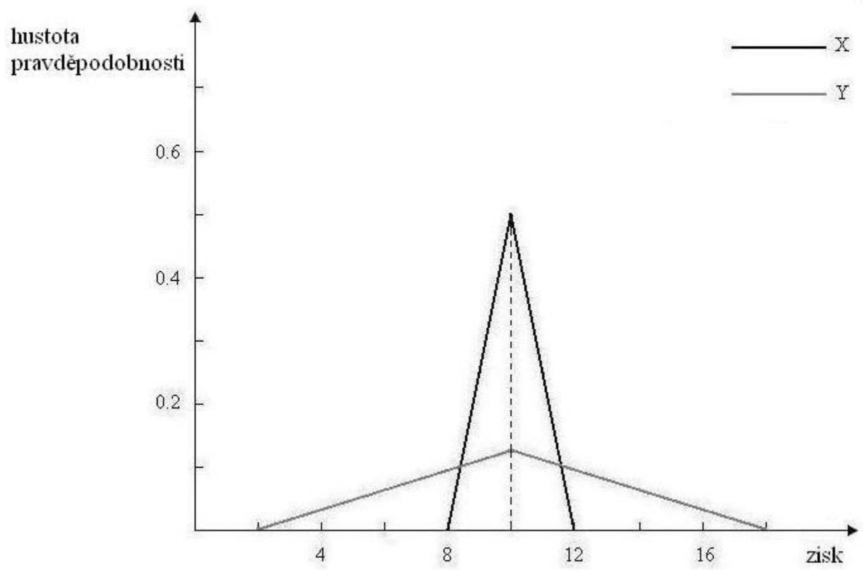
[1] Existuje α-kvantil s názvem *Value at Risk*, zkráceně VaR. Je to ukazatel, který odhaduje riziko maximální pravděpodobné ztráty v důsledku nepříznivých pohybů tržních sazeb a to v horizontu několika dní. Obvykle se pokládá $\alpha = 0{,}05$ nebo $\alpha = 0{,}01$, více viz [8].

$X \leq_{med} Y,\;\; X <_{med} Y,\;\; X =_{med} Y,$ pro $\rho \ldots$ medián,

$X \leq_{mod} Y,\;\; X <_{mod} Y, X =_{mod} Y,$ pro $\rho \ldots$ modus.

Poznámka 3.2. *Uspořádání náhodných veličin podle čísených charakteristik polohy vytvoří vždy kvaziuspořádání.*

Příklad 3.1. Uvažujme náhodné veličiny X a Y s trojúhelníkovým rozdělením a parametry a, c, b takové, že $X \sim Tri(8{,}10{,}12)$ a $Y \sim Tri(2{,}10{,}18)$. Funkce hustoty jsou zobrazeny na Obr. 5. Obě náhodné veličiny mají stejnou střední hodnotu, medián i modus a přesto jsou různé, proto se jedná o kvaziuspořádání.



Obr. 5: $X \sim Tri(8{,}10{,}12)$ a $Y \sim Tri(2{,}10{,}18)$

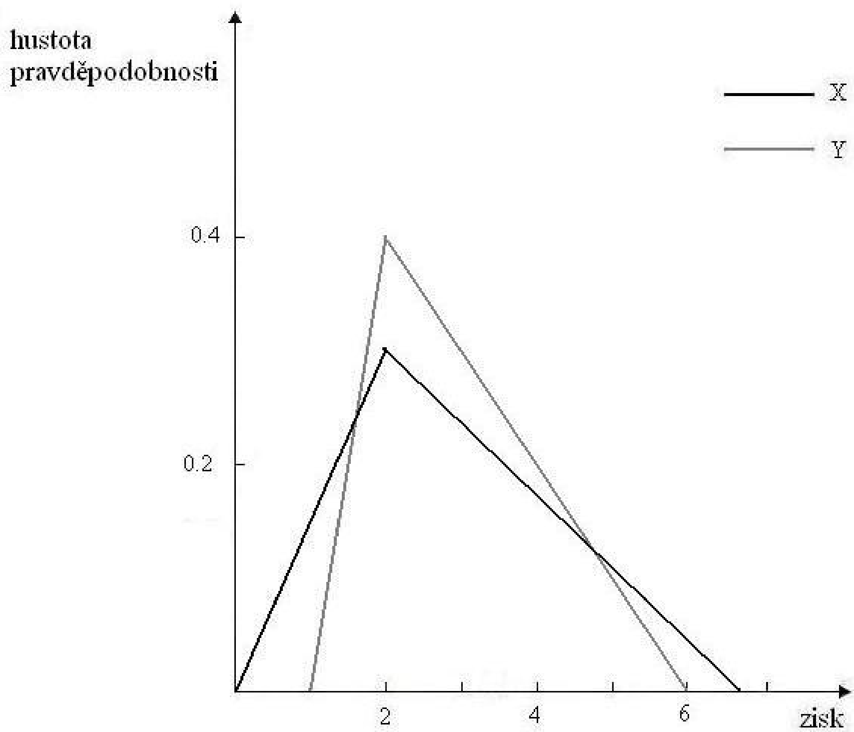
Volba číselné charakteristiky je pro nás zásadní a může vést k různým výsledkům. V příkladě použijeme náhodné veličiny se spojitým rozdělením, které jsme si zavedli v úvodu kapitoly a uspořádáme je podle různých číselných charakteristik.

Příklad 3.2. Mějme náhodné veličiny X a Y, takové, že $X \sim Tri(0; 2; 6{,}67)$a $Y \sim Tri(1; 2; 6)$. Jejich hustoty jsou ve tvaru:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6{,}67}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{120-18x}{280}, & \text{pro } 2 < x \leq 6{,}67, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \tag{44}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{5}, & \text{pro } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{6-x}{10}, & \text{pro } 2 < x \leq 6, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \tag{45}$$

Hustoty náhodných veličin X a Y jsou graficky znázorněny na Obr. 6.



Obr. 6: $X \sim Tri(0; 2; 6{,}67)$ a $Y \sim Tri(1; 2; 6)$

Náhodné veličiny uspořádáme podle jednotlivých číselných charakteristik polohy. V tomto příkladě není vhodné do úvah zahrnout rozptyl, protože není splněna podmínka symetrie rozdělení náhodných veličin.

1. Uspořádání podle střední hodnoty

Střední hodnota $E(X)$ nám říká, kde můžeme očekávat hodnoty náhodné veličiny neboli kde jsou hodnoty koncentrovány. V tomto příkladě je střední hodnota náhodné veličiny X menší než střední hodnota náhodné veličiny Y a jejich hodnoty jsou: $E(X) = 2{,}89$ a $E(Y) = 3{,}00$, tedy $X <_E Y$. Rozhodovatel bude na základě střední hodnoty preferovat náhodnou veličinu Y. Tato metoda je vhodná pro rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku.

2. Uspořádání podle modu

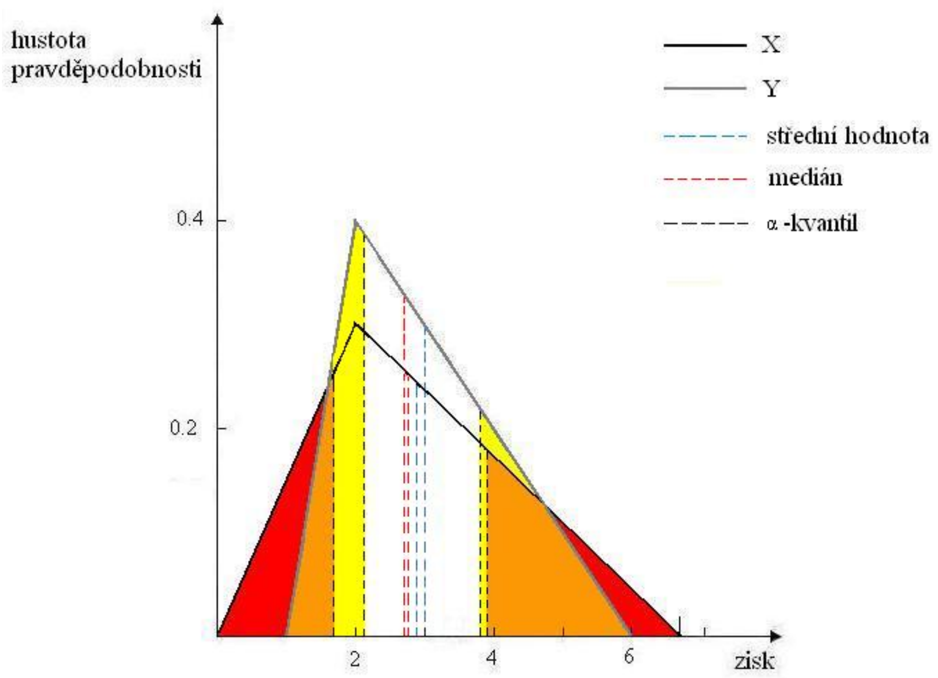
Modus je bod, ve kterém funkce hustoty náhodné veličiny nabývá svého maxima. V trojúhelníkovém rozdělení se rovná parametru c. V našem případě se mody náhodných veličin X a Y rovnají, $Mod(X) = Mod(Y) = 2$, tj. $X =_{mod} Y$. Podle modu jsou náhodné veličiny hodnoceny stejně. Metoda je vhodná pro rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku.

3. Uspořádání podle α-kvantilu

V další metodě porovnáváme náhodné veličiny podle α-kvantilu, který značíme x_α. V našem případě použijeme dolní a horní kvartil, tj. $\alpha = 0{,}25$ a $\alpha = 0{,}75$. Hodnoty dolních kvartilů náhodných veličin X a Y jsou $x_{0,25} = 1{,}67$ a $y_{0,25} = 2{,}13$. Hodnoty horních kvartilů jsou $x_{0,75} = 3,88$ a $y_{0,75} = 3{,}76$, tedy $X <_{q0,25} Y$ a $X >_{q0,75} Y$. Z tohoto příkladu dobře vidíme, že volba čísla α je zásadní a může vést k různým výsledkům. Z hlediska postoje k riziku je malé α vhodné pro rozhodovatele s averzí k riziku a velké α pro rozhodovatele se sklonem k riziku.

4. Uspořádání podle mediánu

Funkce ρ v této metodě představuje medián. Medián je speciálním typem α-kvantilu a v případě diskrétního rozdělení dělí statistický soubor na dvě stejné části. V případě spojitého rozdělení rozděluje plochu pod křivkou hustoty na dvě stejné části. Pravděpodobnost, že realizace bude mít menší hodnotu než medián je stejná jako pravděpodobnost, že realizace bude mít vyšší hodnotu než medián. V našem případě je hodnota mediánu náhodné veličiny X vyšší než hodnota mediánu náhodné veličiny Y, $Med(X) = 2{,}72$ a $Med(Y) = 2{,}68$, tj. $X >_{med} Y$. Podle mediánu budeme preferovat náhodnou veličinu X. Metoda je vhodná pro rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku. Vypočtené číselné charakteristiky jsou vyznačeny na Obr. 7.



Obr. 7: Číselné charakteristiky náhodných veličin$X$ a Y

3.2 Uspořádání podle aspirační úrovně

Dalším typem metody je uspořádání náhodných veličin podle aspirační úrovně. Základ této metody spočívá ve volbě reálného čísla a (aspirační úrovně), které pro nás představuje minimální hodnotu, které má náhodná veličina dosáhnout. Náhodné veličiny se pak uspořádají podle velikosti pravděpodobnosti překročení aspirační úrovně. Metoda uspořádání podle aspirační úrovně se často používá v manažerském rozhodování, kdy je naším cílem realizovat určitý minimální zisk nebo naopak nedosáhnout určité ztráty, přitom nás zajímá pravděpodobnost, s jakou bude tento cíl splněn.

Definice 3.2. Mějmě náhodné veličiny X a Y. Řekneme, že *náhodná veličina X je menší nebo rovna náhodné veličině Y podle aspirační úrovně a*, jestliže platí

$$P(X \geq a) \;\leq\; P(Y \geq a). \tag{46}$$

Značíme $X \leq_a Y$. Řekneme, že *náhodná veličina X je menší než náhodná veličina Y podle aspirační úrovně a*, jestliže platí

$$P(X \geq a) \;<\; P(Y \geq a). \tag{47}$$

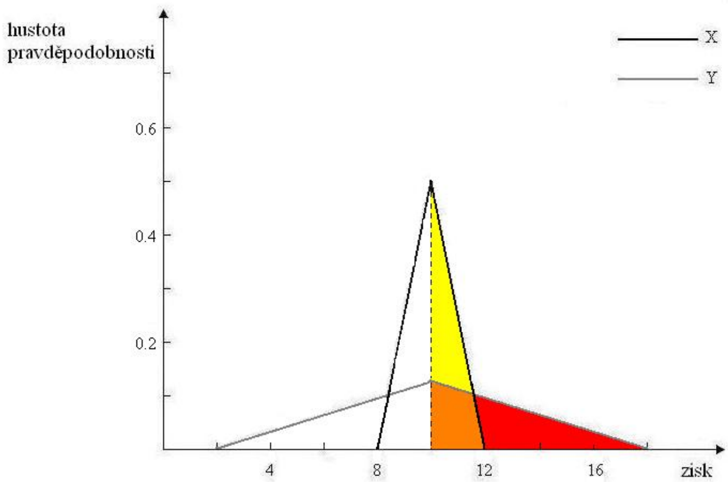
Značíme $X <_a Y$. Řekneme, že *náhodná veličina X je rovna náhodné veličině Y podle aspirační úrovně a*, jestliže platí

$$P(X \geq a) \;=\; P(Y \geq a). \tag{48}$$

Značíme $X =_a Y$.

Poznámka 3.3. *Uspořádání náhodných veličin podle aspirační úrovně vytvoří vždy kvaziuspořádání.*

Příklad 3.3. Mějme dvě náhodné veličiny X a Y s trojúhelníkovým rozdělením s parametry a, c, b takové, že $X \sim Tri(8; 10; 12)$ a $Y \sim Tri(2; 10; 18)$. . Na Obr. 8 jsou zobrazeny jejich hustoty a zvolena aspirační úroveň $a = 10$. Výsledné pravděpodobnosti překročení aspirační úrovně jsou stejné a rovny 0,5, ale náhodné veličiny jsou různé. Proto se jedná o kvaziuspořádání.



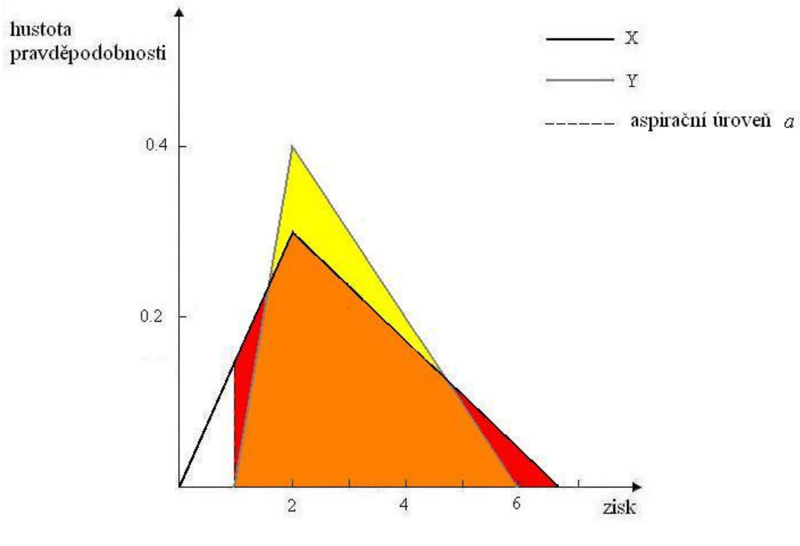
Obr. 8: Aspirační úroveň $a = 10$

Na následujícím příkladě si ukážeme, jak se preferenční uspořádání může měnit v závislosti na zvolené aspirační úrovni.

Příklad 3.4. Mějme náhodné veličiny X a Y z příkladu 3.2, tj. $X \sim Tri(0; 2; 6{,}67)$, $Y \sim Tri(1; 2; 6)$. Uvažujme dvě aspirační úrovně $a_1 = 1$, $a_2 = 4{,}72$. Náhodné veličiny uspořádáme podle pravděpodobnosti překročení těchto aspiračních úrovní. Podobně jako u α-kvantilu rozhodovatel s averzí k riziku volí malé a a rozhodovatel se sklonem k riziku volí velké a.

1. Aspirační úroveň $a_1 = 1$

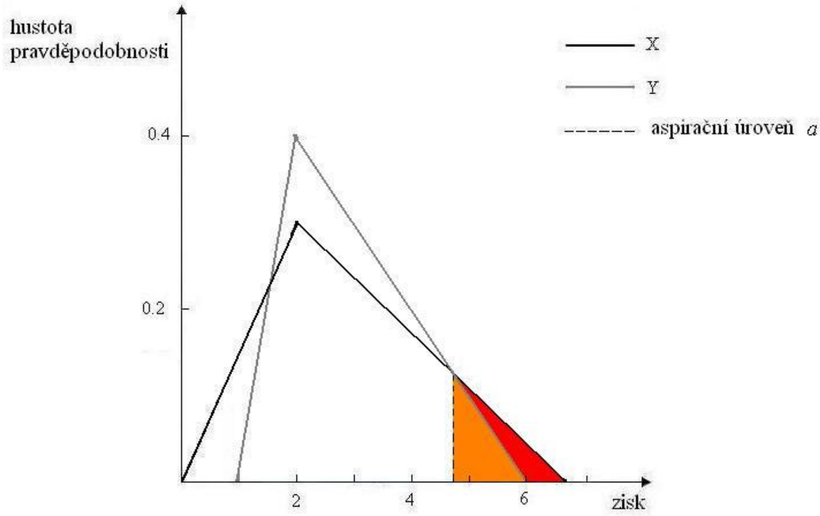
Aspirační úroveň a_1 jsme zvolili rovnu jedné. V tomto případě je výsledná pravděpodobnost jejího překročení u náhodné veličiny Y vyšší než u náhodné veličiny X, jejich hodnoty jsou $P(X \geq 1) = 0{,}925$ a $P(Y \geq 1) = 1$, tedy $X <_{a_1=1} Y$. Pokud jsme hodnotu aspirační úrovně zvolili jedna, budeme preferovat náhodnou veličinu Y. Graficky je tato možnost vykreslena na Obr. 9.



Obr. 9: Aspirační úroveň $a_1 = 1$

2. Aspirační úroveň $a_2 = 4{,}72$

Aspirační úroveň jsme nyní zvolili tak, aby vedla k opačnému preferenčnímu uspořádání a výsledná pravděpodobnost je tedy vyšší u náhodné veličiny X. Hodnoty pravděpodobností jsou následující: $P(X \geq 4{,}72) = 0{,}121$ a $P(Y \geq 4{,}72) = 0{,}082$. Preferenční relace je ve tvaru $X >_{a_2=4{,}72} Y$. Preferovat tedy budeme náhodou veličinu X, viz Obr. 10.



Obr. 10: Aspirační úroveň $a_2 = 4{,}72$

3.3 Uspořádání podle stochastické dominance

Metoda uspořádání podle stochastické dominance je založena na znalosti celého rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, nestačí nám znát pouze některé číselné charakteristiky. Stochastická dominance může být prvního, druhého a vyššího řádu, viz [6]. V této práci se budeme zabývat pouze stochastickou dominancí prvního a druhého řádu a také druhým pravidlem stochastické dominance. Metody stochastické dominance předpokládají, že rozhodovatel má averzi k riziku. Kapitola je zpracovaná podle literatury [1, 6].

3.3.1 Uspořádání podle stochastické dominance prvního řádu

Stochastická dominance prvního řádu, která se někdy nazývá první pravidlo stochastické dominance, viz [1], je nejjednodušší typ stochastické dominance. Podmínkou této metody je, že se distribuční funkce náhodných veličin nesmí protínat. V případě, kdy se distribuční funkce protínají, používáme druhé pravidlo stochastické dominance nebo stochastickou dominanci druhého řádu.

Definice 3.3. Mějmě náhodné veličiny X a Y. Řekneme, že *náhodná veličina* X *je menší nebo rovna náhodné veličině* Y *podle stochastické dominance prvního řádu*, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$F_Y(x) \leq F_X(x), \tag{49}$$

kde $F_X(x)$ a $F_Y(x)$ jsou distribuční funkce náhodných veličin X a Y.
Značíme $X \leq_{SD1} Y$.

Poznámka 3.4. *Splnění podmínky* (49) *pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$1 - F_Y(x) = P(Y > x) \geq P(X > x) = 1 - F_X(x). \tag{50}$$

To znamená pravděpodobnost, že náhodná veličina Y *je větší než* $x \in \mathbb{R}$*, je vždy větší nebo rovna pravděpodobnosti, že náhodná veličina* X *je větší než* x.

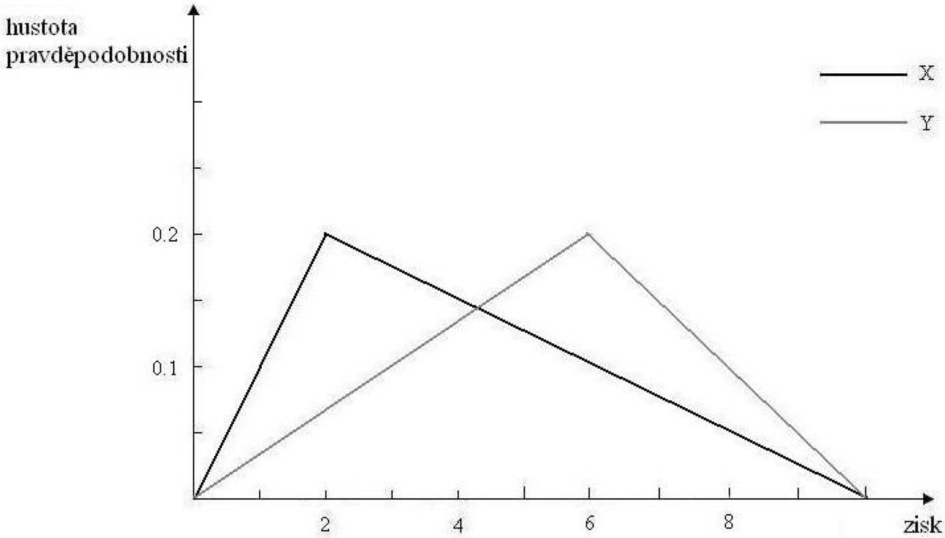
Příklad 3.5. Mějme dvě náhodné veličiny X a Y s trojúhelníkovým rozdělením s parametry a,c,b, takové, že $X \sim Tri(0{,}2{,}10)$ a $Y \sim Tri(0{,}6{,}10)$. Jejich hustoty a distribuční funkce jsou ve tvaru:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{10-x}{40}, & \text{pro } 2 < x \leq 10, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

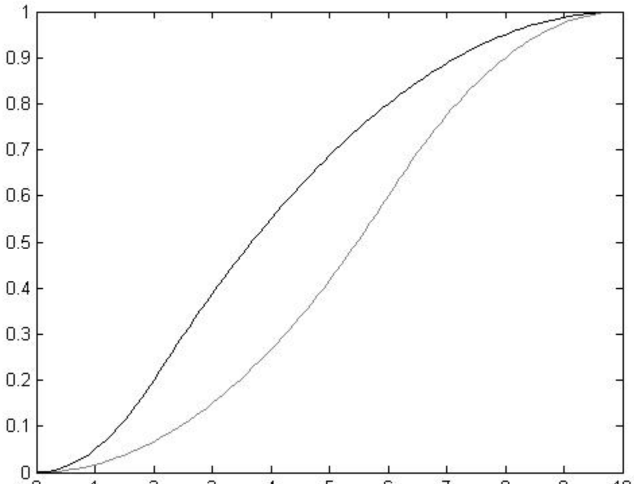
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{20}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{80}, & \text{pro } 2 < x \leq 10, \\ 1, & \text{pro } 10 < x < \infty, \end{cases} \tag{52}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x}{30}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ \frac{10-x}{20}, & \text{pro } 6 < x \leq 10, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \tag{53}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{60}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{40}, & \text{pro } 6 < x \leq 10, \\ 1, & \text{pro } 10 < x < \infty. \end{cases} \tag{54}$$



Obr. 11: Hustoty $X \sim Tri(0, 2, 10)$ a $Y \sim Tri(0, 6, 10)$



Obr. 12: Distribuční funkce $X \sim Tri(0, 2, 10)$ a $Y \sim Tri(0, 6, 10)$

Metoda stochastické dominance je založena na znalosti celého rozdělení náhodných veličin. Musíme tedy porovnat jejich celé distribuční funkce. Ty jsou zakresleny na Obr.12. Náhodná veličina Y dominuje náhodné veličině X, jestliže hodnota distribuční funkce náhodné veličiny Y pro libovolnou realizaci je menší, resp. rovna odpovídající hodnotě distribuční funkce náhodné veličiny X. Jinak řečeno, graf distribuční funkce preferované náhodné veličiny leží napravo od grafu distribuční funkce dominované náhodné veličiny. Z grafu vidíme, že náhodná veličina Y dominuje náhodné veličině X podle stochastické dominance prvního řádu. Preferenční relace je ve tvaru $Y \geq_{SD1} X$.

Poznámka 3.5. *Uspořádání podle stochastické dominance vytvoří částečné uspořádání.*

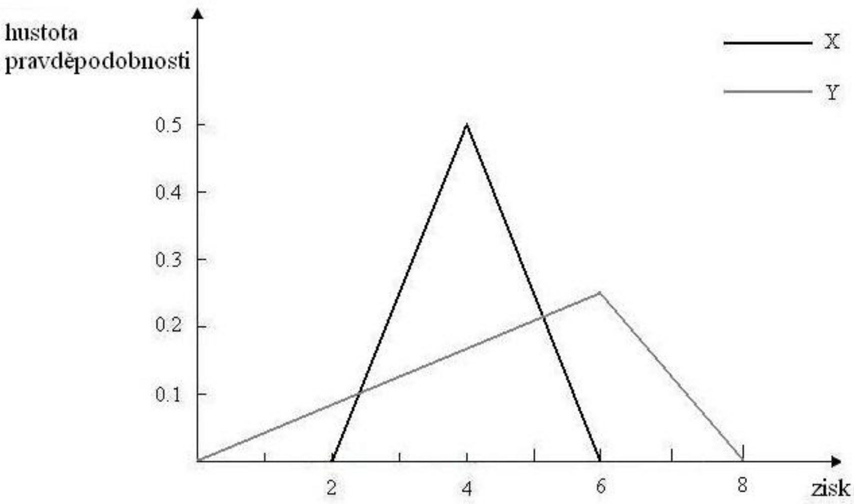
Příklad 3.6. Uvažujme dvě náhodné veličiny X a Y takové, že $X \sim Tri(2{,}4{,}6)$ a $Y \sim Tri(0{,}6{,}8)$. Jejich hustoty a distribuční funkce jsou ve tvaru:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4}, & \text{pro } 2 \leq x \leq 4, \\ \frac{16-x}{4}, & \text{pro } 4 < x \leq 6, \\ 0, & \text{jinde}, \end{cases} \tag{55}$$

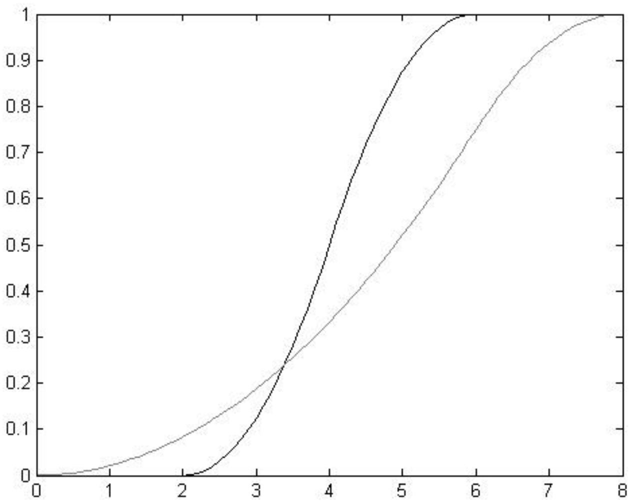
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{(x-2)^2}{8}, & \text{pro } 2 \leq x \leq 4, \\ 1 - \frac{(6-x)^2}{8}, & \text{pro } 4 < x \leq 6, \\ 1, & \text{pro } 6 < x < \infty, \end{cases} \tag{56}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x}{24}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ 1 - \frac{8-x}{8}, & \text{pro } 6 < x \leq 8, \\ 0, & \text{jinde}, \end{cases} \tag{57}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{48}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ 1 - \frac{(8-x)^2}{16}, & \text{pro } 6 < x \leq 8, \\ 1, & \text{pro } 8 < x < \infty. \end{cases} \tag{58}$$



Obr. 13: Hustoty $X \sim Tri(2{,}4{,}6)$ a $Y \sim Tri(0{,}6{,}8)$



Obr. 14: Distribuční funkce $X \sim Tri(2{,}4{,}6)$ a $Y \sim Tri(0{,}6{,}8)$

Vidíme, že se grafy distribučních funkcí náhodných veličin X a Y protínají, není tedy splněna nutná podmínka pro metodu stochastické dominance prvního řádu. Náhodné veličiny jsou podle této metody neporovnatelné, platí totiž

$$X \npreceq_{SD1} Y \;\wedge\; X \nsucceq_{SD1} Y. \tag{59}$$

Metoda stochastické dominance prvního řádu proto tvoří částečné uspořádání.

Podívejme se nyní na to, jaký je vztah mezi uspořádáním podle stochastické dominance prvního řádu a uspořádáním podle jednotlivých číselných charakteristik polohy.

Podle literatury [6] platí, že pokud náhodná veličina Y dominuje náhodné veličině X podle stochastické dominance prvního řádu, dominuje také podle střední hodnoty, tj. $X \leq_{SD1} Y \Rightarrow X \leq_E Y$. Tento vztah však neplatí naopak.

Věta 3.1. *Pro náhodné veličiny X a Y platí*

$$X \leq_{SD1} Y \;\Leftrightarrow\; X \leq_{q\alpha} Y, \quad \forall \alpha \in (0;1). \tag{60}$$

Důkaz: Označme si x_α jako α-kvantil náhodné veličiny X, y_α jako α-kvantil náhodné veličiny Y. Předpokládejme $X \leq_{SD1} Y$. Ze vztahu (49) plyne pro každé $\alpha \in (0;1)$ $F_Y(x_\alpha) \leq F_X(x_\alpha) = \alpha$, dále platí $F_Y(y_\alpha) = \alpha$ a protože F_Y je neklesající, tak nutně $x_\alpha \leq y_\alpha$, což znamená $X \leq_{q\alpha} Y$. Obrácený důkaz platí analogicky.

■

Poznámka 3.6. *Analogická věta jako Věta 3.1 platí také pro medián.*

Na následujícím příkladě si ukážeme, že neexistuje podobný vztah mezi uspořádáním podle modu a metodou stochastické dominance prvního řádu.

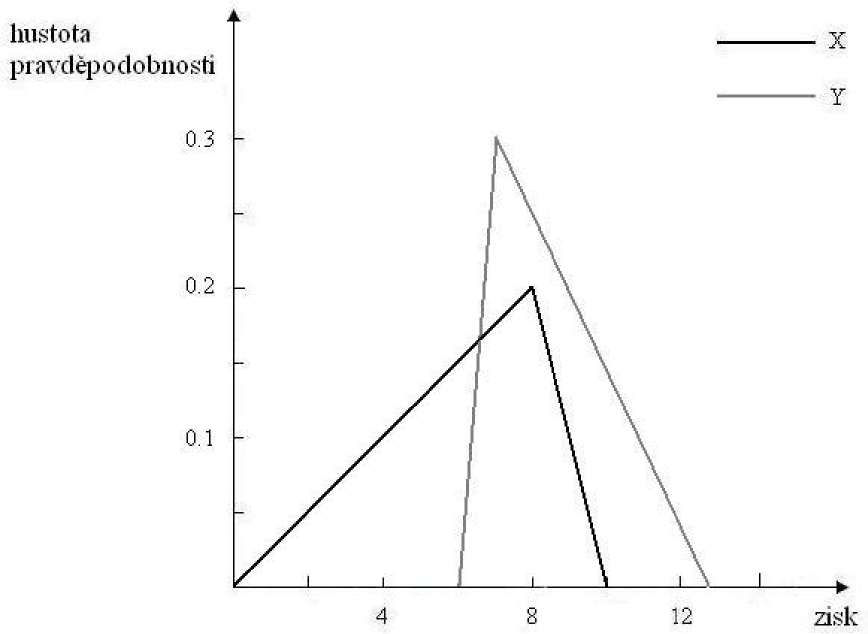
Příklad 3.7. Uvažujme dvě náhodné veličiny X a Y s trojúhleníkovým rozdělením a parametry a, b, c, takové, že $X \sim Tri(0{,}8{,}10)$ a $Y \sim Tri(6;7;12{,}67)$. Jejich hustoty a distribuční funkce jsou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{40}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 8, \\ \frac{10-x}{10}, & \text{pro } 8 < x \leq 10, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \tag{61}$$

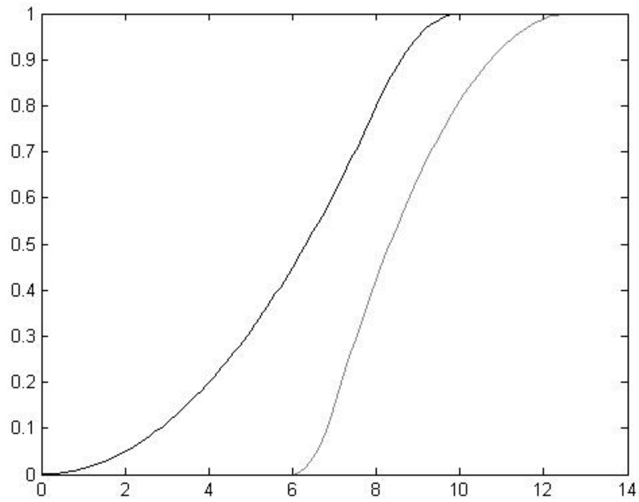
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{80}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 8, \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{20}, & \text{pro } 8 < x \leq 10, \\ 1, & \text{pro } 10 < x < \infty, \end{cases} \tag{62}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{(x-6)}{3{,}33}, & \text{pro } 6 \leq x \leq 7, \\ \frac{12{,}67-x}{18{,}91}, & \text{pro } 7 < x \leq 12{,}67, \\ 0, & \text{jinde}, \end{cases} \tag{63}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 6, \\ \frac{(x-6)^2}{6{,}67}, & \text{pro } 6 \leq x \leq 7, \\ 1 - \frac{(12{,}67-x)^2}{37{,}82}, & \text{pro } 7 < x \leq 12{,}67, \\ 1, & \text{pro } 12{,}67 < x < \infty. \end{cases} \tag{64}$$



Obr. 15: Hustoty $X \sim Tri(0{,}8{,}10)$ a $Y \sim Tri(6; 7; 12{,}67)$



Obr. 16: Distribuční funkce $X \sim Tri(0{,}8{,}10)$ a $Y \sim Tri(6; 7; 12{,}67)$

Z grafu vidíme, že distribuční funkce náhodné veličiny Y leží vpravo od distribuční funkce náhodné veličiny X, tedy $X \leq_{SD1} Y$. Pokud bychom použili metodu porovnávání náhodných veličin podle modu, dominovala by náhodná veličina X, tedy $Y <_{mod} X$.

Věta 3.2. *Pro náhodné veličiny X a Y platí*

$$X \leq_{SD1} Y \Leftrightarrow X \leq_a Y, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{65}$$

Parametr a značí aspirační úroveň.

Důkaz: Plyne přímo ze vztahu (50). ■

Je třeba si uvědomit, že pořád mluvíme o pravděpodobnosti. Může se stát, že náhodná veličina X dominuje náhodné veličině Y podle α-kvantilu nebo aspirační úrovně a tudíž dominuje i podle stochastické dominance prvního řádu, ale po realizaci se tak nestane a vyšší hodnoty nabyde náhodná veličina Y.

3.3.2 Uspořádání podle stochastické dominance druhého řádu

Ne všechny náhodné veličiny jsou podle stochastické dominance prvního řádu porovnatelné, proto se jedná o částečné uspořádání. Z toho důvodu byla zavedena stochastická dominance druhého řádu, viz např. [6]. Metoda uspořádání náhodných veličin podle stochastické dominance druhého řádu sice také vytvoří pouze částečné uspořádání, ale podle této metody lze porovnat více náhodných veličin.

Definice 3.4. Řekneme, že *náhodná veličina X je menší nebo rovna náhodné veličině Y podle stochastické dominance druhého řádu*, jestliže pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{-\infty}^{t} F_Y(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} F_X(x)dx. \tag{66}$$

Značíme $X \leq_{SD2} Y$.

Můžeme říct, že stochastická dominance prvního řádu implikuje stochastickou dominanci druhého řádu. Opačné tvrzení neplatí, protože některé náhodné veličiny, které lze porovnat podle stochastické dominance druhého řádu, jsou podle stochastické dominance prvního řádu neporovnatelné. Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Příklad 3.8. Uvažujme náhodné veličiny X a Y s trojúhelníkovým rozdělením a s parametry a, b, c, takové, že $X \sim Tri(5;6;7)$ a $Y \sim Tri(0;6;8)$. Vytvoříme preferenční uspořádání podle stochastické dominance druhého řádu. Jejich hustoty jsou ve tvaru

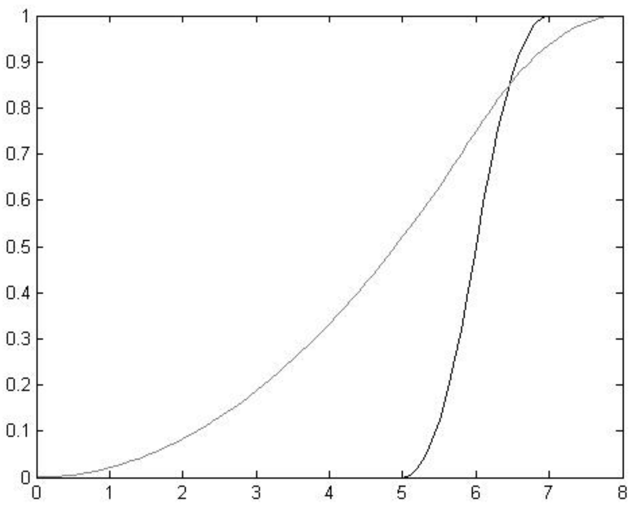
$$f_X(x) = \begin{cases} x-5, \text{ pro } 5 \leq x \leq 6, \\ 7-x, \text{ pro } 6 < x \leq 7, \\ 0, \qquad \text{jinde}, \end{cases} \tag{67}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x}{24}, \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ \frac{8-x}{8}, \text{ pro } 6 < x \leq 8, \\ 0, \quad \text{jinde}, \end{cases} \tag{68}$$

Distribuční funkce rovnou upravíme podle definice stochastické dominance druhého řádu, tj.

$$\int_{-\infty}^{t} F_X(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < t < 5, \\ \int_5^t \frac{(x-5)^2}{2}dx, & \text{pro } 5 \leq t \leq 6, \\ \int_5^6 \frac{(x-5)^2}{2}dx + \int_6^t 1 - \frac{(7-x)^2}{2}dx, & \text{pro } 6 < t \leq 7, \\ \int_5^6 \frac{(x-5)^2}{2}dx + \int_6^7 1 - \frac{(7-x)^2}{2}dx + \int_7^t 1dx, & \text{pro } 7 < t < \infty, \end{cases} \tag{69}$$

$$\int_{-\infty}^{t} F_Y(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < t < 0, \\ \int_0^t \frac{x^2}{48}dx, & \text{pro } 0 \leq t \leq 6, \\ \int_0^6 \frac{x^2}{48}dx + \int_6^t 1 - \frac{(8-x)^2}{16}dx, & \text{pro } 6 < t \leq 8, \\ \int_0^6 \frac{x^2}{48}dx + \int_6^8 1 - \frac{(8-x)^2}{16}dx + \int_8^t 1dx, & \text{pro } 8 < t < \infty. \end{cases} \tag{70}$$



Obr. 16: Distribuční funkce $X \sim Tri(5;6;7)$ a $Y \sim Tri(0;6;8)$

Ze vztahu $F_X(x) = F_Y(x)$ jsme zjistili, že distribuční funkce náhodných veličin se protínají v bodě 6,45. Jestliže se distribuční funkce náhodných veličiny protnou pouze jednou, pak náhodná veličina X dominuje náhodné veličině Y podle stochastické dominance druhého řádu, jestliže obsah první plochy S_1 vymezené distribučními funkcemi, kde dominuje náhodná veličina X (leží napravo), je větší než obsah druhé vymezené plochy S_2, kdy dominuje náhodná veličina Y. Obsah první plochy se rovná rozdílu $\int_0^{6{,}45} F_Y(x)dx - \int_0^{6{,}45} F_X(x)dx$. Pro náhodnou veličinu X je integrál roven $\int_0^6 \frac{(x-5)^2}{2}dx + \int_6^{6{,}45} 1 - \frac{(7-x)^2}{2}dx = 0{,}644$. Pro náhodnou veličinu Y je integrál roven $\int_0^6 \frac{x^2}{48}dx + \int_6^{6{,}45} 1 - \frac{(8-x)^2}{16}dx = 1{,}861$. Obsah první plochy je tedy roven rozdílu $1{,}861 - 0{,}644 = 1{,}217$. Obsah druhé plochy vypočítáme stejným způsobem. Pro náhodnou veličinu X je integrál roven $\int_{6{,}45}^7 1 - \frac{(7-x)^2}{2}dx + \int_7^8 1dx = 1{,}522$. Pro náhodnou veličinu Y je integrál roven $\int_{6{,}45}^8 1 - \frac{(8-x)^2}{16}dx = 1{,}472$. Obsah druhé plochy je roven rozdílu $1{,}522 - 1{,}472 = 0{,}05$. Náhodná veličina X dominuje náhodné veličině Y, protože $S_1 > S_2$, tj. $X \geq_{SD2} Y$.

3.3.3 Uspořádání podle druhého pravidla stochastické dominance

Tato metoda pro porovnávání náhodných veličin, která je popsaná v [1], je založena na podobném principu jako předchozí metody. Její nespornou výhodou je fakt, že získáme kvaziuspořádání na množině náhodných veličin.

Definice 3.5. Řekneme, že *náhodná veličina X je menší nebo rovna náhodné veličině Y podle druhého pravidla stochastické dominance*, jestliže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, F_X(x) - F_Y(x)\}dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, F_Y(x) - F_X(x)\}dx. \tag{71}$$

Značíme $X \leq_{2PSD} Y$.

Principem druhého pravidla stochastické dominance je porovnání obsahů ploch, které jsou vymezeny grafy distribučních funkcí náhodných veličin. Podle této metody budeme preferovat náhodnou veličinu Y před náhodnou veličinou X, jestliže plocha mezi distribučními funkcemi, kdy je vpravo distribuční funkce náhodné veličiny Y, je větší než plocha mezi distribučními funkcemi náhodných veličin, kdy je vpravo náhodná veličina X.

Poznámka 3.7. *Preference podle stochastické dominance prvního řádu a stochastické dominance druhého řádu implikuje stejnou preferenci podle druhého pravidla stochastické dominance. Tvrzení plyne přímo ze vztahu (49) a (66).*

Příklad 3.9. Mějme dvě náhodné veličiny X a Y s trojúhleníkovým rozdělením a parametry a, b, c takové, že $X \sim Tri(2{,}3{,}10)$ a $Y \sim (0{,}6{,}10)$. Uspořádejme je podle druhého pravidla stochastické dominance. Jejich hustoty a distribuční funkce jsou ve tvaru:

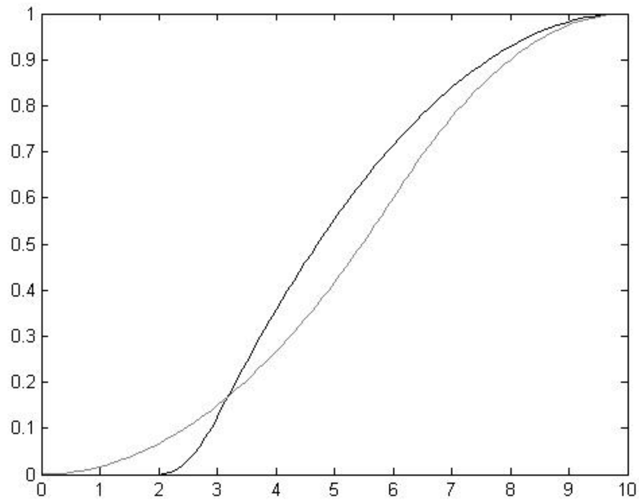
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4}, & \text{pro } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{10-x}{28}, & \text{pro } 3 < x \leq 10, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{72}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 2, \\ \frac{(x-2)^2}{8}, & \text{pro } 2 \leq x \leq 3, \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{56}, & \text{pro } 3 < x \leq 10, \\ 1, & \text{pro } 10 < x < \infty. \end{cases} \tag{73}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x}{30}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ \frac{10-x}{20}, & \text{pro } 6 < x \leq 10, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{74}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{60}, & \text{pro } 0 \leq x \leq 6, \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{40}, & \text{pro } 6 < x \leq 10, \\ 1, & \text{pro } 10 < x < \infty. \end{cases} \tag{75}$$

Na Obr. 18 jsou graficky vyznačeny distribuční funkce náhodných veličin X a Y.



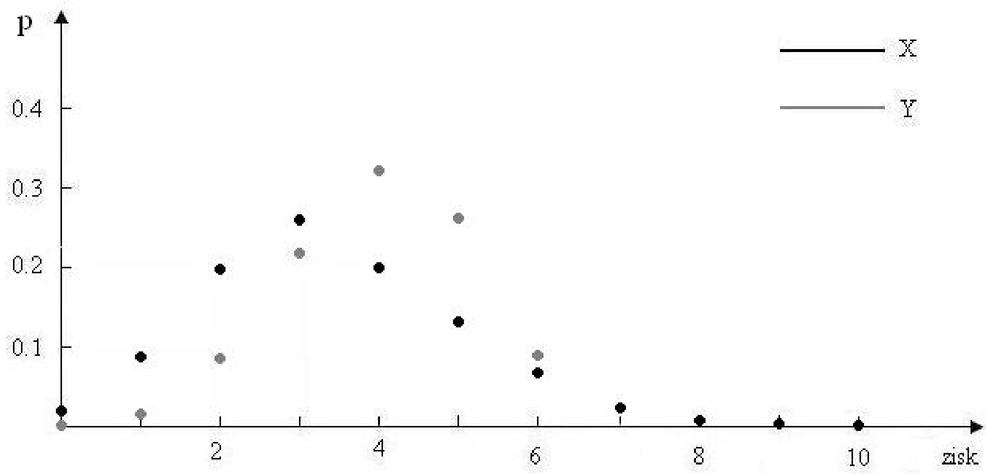
Obr. 18: Distribuční funkce $X \sim Tri(2{,}3{,}10)$ a $Y \sim Tri(0{,}6{,}10)$

V této metodě porovnáváme obsahy ploch vymezených distribučními funkcemi. Potřebujeme vědět, ve kterém bodě (označme např. u) se distribuční funkce náhodných veličin protínají, proto položme $F_X(x) = F_Y(x)$, odtud $u = 3{,}17$. Obsah první plochy vypočítáme jako rozdíl integrálů $\int_0^{3,17} F_X(x)dx$ a $\int_0^{3,17} F_Y(x)dx$. Jejich hodnoty jsou pro náhodnou veličinu X rovny $\int_2^3 \frac{(x-2)^2}{8}dx + \int_3^{3,17} 1 - \frac{(10-x)^2}{56}dx = 0{,}067$ a pro náhodnou veličinu Y rovny $\int_0^{3,17} \frac{x^2}{60}dx = 0{,}177$. Obsah první plochy v intervalu $\langle 0; 3{,}17\rangle$, je roven 0,11.

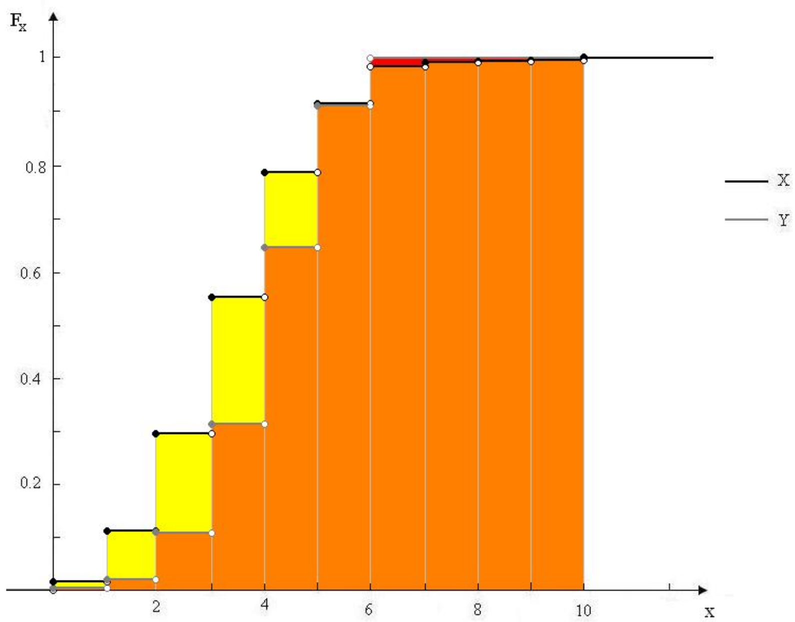
Analogicky budeme postupovat i při výpočtu v dalším intervalu a dostaneme $\int_{3,17}^{10} F_X(x)dx = \int_{3,17}^{10} 1 - \frac{(10-x)^2}{56}dx = 4{,}93$ a $\int_{3,17}^{10} F_Y(x)dx = \int_{3,17}^{6} \frac{x^2}{60}dx + \int_6^{10} 1 - \frac{(10-x)^2}{40}dx = 4{,}49$. Obsah druhé plochy v intervalu $\langle 3{,}17; 10\rangle$ je roven 0,44. Protože je obsah ve druhém intervalu, kde leží napravo náhodná veličina Y, větší než obsah v prvním intervalu, kde leží napravo náhodná veličina X, budeme preferovat náhodnou veličinu Y, tj. $Y \geq_{2PSD} X$.

3.4 Souhrnný příklad s binomickým rozdělením

Představme si, že vlastníme podnik a rozhodujeme o dalších aktivitách. Máme možnost orientovat se na větší trh nebo zůstat v menším. S větším trhem souvisí více příležitostí, ale také menší pravděpodobnost je uskutečnit z důvodu větší konkurence. Rozhodujeme se, který trh je pro nás výhodnější. Příležitosti pro nás budou znamenat investiční projekty a jejich potenciální zisky. Projekty mají binomické rozdělení a jsou charakterizovány náhodnou veličinou X pro velký trh a náhodnou veličinou Y pro malý trh. Náhodné veličiny jsou z binomického rozdělení s parametry n, p takové, že $X \sim Bi(10,\frac{1}{3})$ a $Y \sim Bi(6,\frac{2}{3})$.



Obr. 17: Pravděpodobnostní funkce $X \sim Bi(10, \frac{1}{3})$ a $Y \sim Bi(6, \frac{2}{3})$



Obr. 18: Distribuční funkce $X \sim Bi(10, \frac{1}{3})$ a $Y \sim Bi(6, \frac{2}{3})$

Metody uspořádání podle číselných charakteristik

Nejprve náhodné veličiny porovnáme podle střední hodnoty. Střední hodnoty náhodných veličin X a Y jsou $E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{3} = 3{,}33$ a $E(Y) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, pokud bychom se rozhodovali podle střední hodnoty, preferovali bychom náhodnou veličinu Y, tj. $X \leq_E Y$.

Další metodou je uspořádání podle modu. Modus náhodné veličiny X je $\hat{x} = 3$, modus náhodné veličiny Y je $\hat{y} = 4$. Podle této metody budeme preferovat náhodnou veličinu Y, tj. $X \leq_{mod} Y$.

Nyní porovnáme náhodné veličiny podle α-kvantilu. Zvolíme si různé hodnoty α a zjistíme, pro které α bude dominovat náhodná veličina X a pro které náhodná veličina Y. Nejprve zvolíme $\alpha = 0{,}90$, potom $x_{0{,}90} = 5$ a $y_{0{,}90} = 5$. Zkusíme nyní zvolit menší α, např. Nejprve zvolíme $\alpha = 0{,}99$, potom příslušné α-kvantily náhodných veličin X a Y jsou $x_{0{,}99} = 7$ a $y_{0{,}99} = 6$. Podle tohoto kvantilu dominuje náhodná veličina X, tj. $X \geq_{q0{,}99} Y$. Velké α volí rozhodovatelé se sklonem k riziku, kteří v tomto případě upřednostní větší trh a jsou ochotni podstoupit větší riziko. Nyní zvolíme kvantil $\alpha = 0{,}10$, tj. $x_{0{,}10} = 1$ a $y_{0{,}10} = 2$. Podle tohoto kvantilu dominuje náhodná veličina Y, tj. $X \leq_{q0{,}10} Y$. Malé α jsou vhodné pro rozhodovatele s averzí k riziku, ti budou volit menší trh.

Náhodné veličiny ještě můžeme porovnat podle mediánu. Pro náhodnou veličinu X je roven $\tilde{x} = 3$, pro náhodnou veličinu Y je roven $\tilde{y} = 4$. Podle mediánu dominuje náhodná veličina Y, tj. $X \leq_{med} Y$.

Metoda uspořádání podle aspirační úrovně

Dále použijeme metodu aspirační úrovně. Z výpočtů jsme zjistili, že pro aspirační úroveň $a \leq 5$ dominuje náhodná veličina Y. Rozhodovatel s averzí k riziku bude tedy preferovat náhodnou veličinu Y a tudíž menší trh. Pro aspirační úroveň $a \geq 6$ dominuje náhodná veličina X, tu budou preferovat rozhodovatelé se sklonem k riziku. Pravděpodobnost překročení aspirační úrovně $a = 10$ je rovna 0 pro obě náhodné veličiny.

Metody uspořádání podle stochastické dominance

V tomto případě jsou náhodné veličiny neporovnatelné podle stochastické dominance prvního řádu. Použijeme tedy metodu stochastické dominance druhého řádu a druhé pravidlo stochastické dominance. Nejprve použijeme metodu stochastické dominance druhého řádu. Vycházíme ze vztahu (66).

Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny X jsou větší než hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny Y až do bodu 6. Pro interval od 6 jsou hodnoty opačné a jsou větší pro náhodnou veličinu Y. Nyní můžeme vypočítat obsahy ploch mezi distribučními funkcemi. Obsah první plochy v intervalu od 0 do 6, kdy dominuje náhodná veličina Y, se rovná rozdílu hodnot distribučních funkcí náhodných veličin X a Y, tj. $(0{,}01734 - 0{,}00137) + (0{,}10404 - 0{,}01777) + (0{,}29914 - 0{,}10007) + (0{,}55924 - 0{,}31957) + (0{,}78684 - 0{,}64877) + (0{,}92344 - 0{,}91217) = 0{,}69$. V intervalu od 6 do 10 je obsah plochy vymezený distribučními funkcemi roven $(1 - 0{,}98034) + (1 - 0{,}99664) + (1 - 0{,}99964) + (1 - 0{,}999979) = 0{,}023401$. Podle stochastické dominance druhého řádu tedy dominuje náhodná veličina Y, tj. $X \leq_{SD2} Y$.

V metodě druhého pravidla stochastické dominance už vyjdeme z metody stochastické dominance druhého řádu. V intervalu od 0 do 6, kde leží napravo náhodná veličina Y, je obsah plochy vymezený distribučními funkcemi roven 0,69. Ve druhém intervalu, kde leží napravo náhodná veličina X je obsah plochy vymezený distribučními funkcemi roven 0,023401. Protože je obsah první plochy větší, budeme preferovat náhodnou veličinu Y, tj. $X \leq_{2PSD} X$.

4 Závěr

Cílem práce bylo prostudovat různé metody preferenčního uspořádání náhodných veličin.

V první kapitole jsme se seznámili s pojmy z algebry a teorie pravděpodobnosti. Nadefinovali jsme relaci a její vlastnosti a také relaci uspořádání, se kterou jsme se setkávali v průběhu celé práce. Z teorie pravděpodobnosti jsme definovali jevy, pravděpodobnost, náhodné veličiny a jejich vlastnosti. Dále jsme uvedli číselné charakteristiky náhodných veličin a rozdělení.

V další kapitole jsme už studovali různé metody, pomocí kterých je možné uspořádat náhodné veličiny. První metodu, kterou jsme použili, byla metoda uspořádání podle číselných charakteristik polohy. V této metodě jsme náhodné veličiny uspořádali podle střední hodnoty, α-kvantilu, mediánu a modu. Ukázali jsme, že podle jednotlivých charakteristik se preference můžou lišit. Ve druhé metodě, uspořádání podle aspirační úrovně, jsme zjistili skutečnost, že preference záleží na zvolené aspirační úrovni. Poslední třídou metod byly stochastické dominance. Určili jsme si podmínky pro použití stochastické dominance a také jsme se zaměřili na vztah mezi stochastickou dominancí prvního řádu a číselnými charakteristikami. Náhodné veličiny, které nebyly porovnatelné podle stochastické dominance prvního řádu, jsme uspořádali podle stochastické dominance druhého řádu nebo druhého pravidla stochastické dominance. Poté jsme aplikovali všechny metody na příkladě s náhodnými veličinami s diskrétním rozdělením. Dále jsme do metod zahrnuli rozhodovatelův postoj k riziku.

Při zpracování bakalářské práce jsem si prohloubila znalosti z teorie pravděpodobnosti a zopakovala jsem si její základní pojmy. Dále jsem se seznámila se stochastickou dominancí a procvičila jsem si práci v Matlabu. Téma bakalářské práce mě zaujalo a doufám, že něco přineslo i čtenářům.

Literatura

[1] Fotr, J.- Hnilica, J.: Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování. Praha, Grada Publishing 2009.

[2] Hort, D.- Rachůnek, J.: Algebra 1. 2. přepracované vyd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci 2005

[3] Krutský, F.: Algebra l. 2. přepracované vyd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci 1995.

[4] Kunderová, P.: Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky. 1. vyd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci 2004.

[5] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. 1. vyd. Praha, Academia 1972.

[6] Schmid, F.- Trede, M.: Finanzmarkt-statistik. Berlin Helidelberg, Springer 2006

[7] Tutubalin, V. N.: Teorie pravděpodobnosti. 1. vyd. Praha, SNTL- Nakladatelství technické literatury 1978.

[8] Strnad, P.: Riziko tržní likvidity a jeho zohlednění v ukazateli Value at Risk. Acta Oeconomica Pragensia. 2009, 2, s. 21-37.

[9] Weisstein, Eric W.: Triangular Distribution. From MathWorld- A Wolfram Web Resource. [online]. Dostupné z WWW: http://mathworld.wolfram.com/TriangularDistribution.html