Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Využití komplexních čísel v analytické geometrii roviny

Bakalářská práce

Autor: Tereza Gamperová
Studijní program: B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Chemie se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Hradec Králové duben 2023

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor: **Tereza Gamperová**

Studium: S20MA018BP

Studijní program: B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání, Chemie se zaměřením na vzdělávání

Název bakalářské práce: **Využití komplexních čísel v analytické geometrii roviny**

Název bakalářské práce AJ: Use of complex numbers in analytical geometry of the plane

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem bakalářské práce je ukázat možnosti využití komplexních čísel v analytické geometrii roviny pro určení základních rovinných útvarů, stanovení jejich vzájemných vztahů a důkazů vybraných vět z planimetrie. Součástí bude srovnání takového přístupu s obvyklou středoškolskou analytickou geometrií roviny a planimetrií.

Sekanina, M.: Geometrie I. Praha: 1986

Sekanina, M.: Geometrie II. Praha: 1988

Kočandrle, M., Boček, L.: Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie. Praha: 1995

Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia - Planimetrie. Praha: 1999.

Zadávající pracoviště: Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Oponent: Ing. Mgr. Eva Trojovská, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 2.5.2022

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala (pod vedením vedoucího bakalářské práce) samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 3.5.2023 Tereza Gamperová

Poděkování

Chtěla bych tuto příležitost využít k poděkování panu Mgr. Tomáši Zuščákovi, Ph.D., vedoucímu mé práce, za jeho trpělivost, rady a pomoc při tvorbě této bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a partnerovi za neustálou podporu ve chvílích, kdy to bylo nejvíce potřeba.

Anotace

GAMPEROVÁ, T. *Využití komplexních čísel v analytické geometrii roviny*. Hradec Králové, 2023. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Tomáš Zuščák.

Bakalářská práce se zabývá tématem využití komplexních čísel v analytické geometrii roviny. Teoretická část je věnována základním poznatkům z obou témat – komplexní čísla, analytická geometrie, a jejich propojení. Praktická část zasazuje komplexní čísla v analytické geometrii do konkrétních příkladů, odvození a důkazů.

Klíčová slova

komplexní čísla, analytická geometrie, rovina, příklady, důkazy

Annotation

GAMPEROVÁ, T. Use of complex numbers in analytical geometry of the plane. Hradec Králové, 2023. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Tomáš Zuščák.

The bachelor's thesis deals with the topic of the use of complex numbers in the analytical geometry of the plane. The theoretical part is devoted to the basic knowledge of both topics - complex numbers, analytical geometry, and their connection. The practical part puts complex numbers in analytic geometry into specific examples, derivations and proofs.

Keywords

complex numbers, analytical geometry, plane,examples,proofs

Obsah

Úvod

Bakalářská práce se bude zabývat využitím komplexních čísel v analytické geometrii. S oběma pojmy, jako analytická geometrie a komplexní čísla, se setkáme v matematice na úrovni střední školy. K těmto tématům můžeme najít dostačující množství různých typů zdrojů, kdežto k jejich provázání se nám možnosti krátí. Tedy toto téma není v českých a zahraničních publikacích příliš rozvinuto.

Cílem práce je ověřit, zda použití komplexních čísel v analytické geometrii nám umožní rychlejšího a efektivnějšího dosažení výsledku. K zodpovězení jsou kladeny tyto otázky. Jsou komplexní čísla v analytické geometrii pro výpočet výhodnější než čísla reálná? A je tomu tak vždy? V jakých případech nám mohou komplexní čísla urychlit postup výpočtu a v jakých případech nám rychlost postupu nezmění? Tyto otázky budou zodpovězeny na základě konkrétních příkladů, které budou uvedeny v praktické části práce. Druhým cílem této práce bude ukázka využití komplexních čísel a analytické geometrie v jiných typech úloh než příkladových. Úlohy by měly mít charakter odvozovací nebo dokazovací, což může být druhý úhel pohledu na zadané téma bakalářské práce. První pohled je využití samotných komplexních čísel v příkladech z oboru analytické geometrie, druhým pohledem se využití obou těchto témat společně.

Toto téma jsem si vybrala a zpracovala na základě dobré znalosti analytické geometrie a možnosti jejího rozšíření pomocí komplexních čísel. Je to téma, se kterým jsem se na střední ani vysoké škole nesetkala a mohlo by být dobrým příspěvkem do sylabů odpovídajících předmětů. Dalším motivujícím faktorem je možné usnadnění vybraných důkazů, u kterých může být využití komplexních čísel a analytické geometrie i formou opakování či jejich aplikací.

První část práce, tedy teoretická, je věnována zavedení potřebných pojmů, se kterými se v práci nadále pracuje, především potom v praktické části. Teoretická část je rozdělena na tři kapitoly – komplexní čísla, analytická geometrie v rovině a porovnání vyjádření geometrických útvarů v rovině pomocí reálných čísel a Gaussově rovině pomocí komplexních čísel. Jako podklady a zdroje k prvním dvěma podkapitolám byla využita především literatura pro střední školy, doplňují ji autorské důkazy a obrázky (pokud u obrázku není uveden zdroj je dílem autora). Tento typ zdrojů byl zvolen, jelikož v praktické části se pracuje především se znalostmi ze střední školy, které jsou rozšířeny o poznatky autora. Jak bylo již zmíněno na začátku úvodu, mnoho zdrojů k tématu práce není publikováno, jak v českém, tak v jazyce cizím. Pro získání základních informací o této problematice byly využívány především zahraniční zdroje.

Druhá část práce, tedy praktická, je rozdělena do tří podkapitol. Každá tato část se zaměřuje na jiné využití komplexních čísel v analytické geometrii či přímé propojení komplexních čísel s analytickou geometrií. Zmiňované podkapitoly nesou názvy příklady, vyjádření průsečíků dvou různoběžných přímek a důkazy geometrických vět. Podkapitola příklady se věnuje dvěma ukázkovým příkladům, které jsou spojeny s předcházející teorií. U druhé podkapitoly praktické části se autor zaměřuje na rozdílnosti ve vyjádřeních průsečíku dvou přímek. U těchto úloh jsou uvedeny varianty s využitím jak parametrických rovnic, tak rovnic obecných a dále zde budou přiloženy ukázkové příklady pro porovnání náročnosti postupu. Poslední část, důkazy geometrických vět, se věnuje dokazování třech vybraných planimetrických vět – věty o těžišti, věty o úhlopříčkách v rovnoběžníku a Thaletovy věty.

Není předpokládána hlubší znalost této tématiky pro studování práce, jelikož bude práce obsahovat i úvod do tématu komplexních čísel, věty a definice ve zjednodušené formě.

1. Komplexní čísla

Obor komplexních čísel zavádíme pro rozšíření řešitelnosti určitých problémových příkladů, které nejsme v oboru čísel reálných schopni vyřešit. To znamená, že komplexní čísla C jsou rozšířením množiny reálných čísel R. Je možné říci, že obor čísel reálných je podmnožinou oboru čísel komplexních ($R \subseteq C$).

Komplexní číslo (prvek z oboru C) je uspořádaná dvojice prvků z oboru R. Značíme $a = (a_1, a_2)$, kde $a_1, a_2 \in R$.

První složku komplexního čísla nazýváme reálná část (reálná složka) – to je číslo a_1, a označujeme ho $Re(a)$.

Druhou složku komplexního čísla nazýváme imaginární část (imaginární složka) – to je číslo a_2, a označujeme ho $Im(a)$.

Je-li číslo $a_2 \neq 0$, nazývá se číslo a imaginární a je-li navíc $a_1 = 0$, pak se číslo a nazývá ryze imaginární.

Pro komplexní čísla zavedeme:

<u>Rovnost</u>

Pro $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in C$ platí:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

<u>Součet dvou komplexních čísel</u>

Pro $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in C$ platí:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

<u>Součin dvou komplexních čísel</u>

Pro $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in C$ platí:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

Číslo $\bar{a} = (a_1, -a_2)$, kde $a_1, a_2 \in R$, se nazývá číslo komplexně sdružené k číslu $a = (a_1, a_2)$.

Velikost (absolutní hodnota, modul) komplexního čísla $a = (a_1, a_2) \in C$ je definovaná pomocí následujícího vztahu.

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Modul komplexního čísla je nezáporné číslo a modul je roven nule, právě když komplexní číslo je nulové.

Imaginární jednotka je ryze imaginární komplexní číslo $i = (0,1)$. Platí:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0)$$

$$i \cdot (a, 0) = (0,1) \cdot (a, 0) = (0 \cdot a - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot a) = (0, a)$$

Pokud je imaginární složka komplexního čísla a rovna nule ($Im(a) = 0$), potom ztotožníme komplexní číslo $(a_1, 0)$ s reálným číslem a_1.

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, 0) + i \cdot (a_2, 0) = a_1 + i \cdot a_2$$

Užitím uvedených vztahů, jsme odvodili tzv. algebraický tvar komplexního čísla.

1.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Jak již bylo řečeno komplexní čísla jsou uspořádaná dvojice reálných čísel. Z praktického hlediska je určitě užitečné zavést jejich vyjádření v algebraickém tvaru, u kterého platí $i = (0,1) \in C$ a i nazýváme imaginární jednotka:

$$a = a_1 + ia_2.$$

Vztahy pro komplexní čísla s využitím algebraického tvaru:

Součet dvou komplexních čísel

Součtem dvou komplexních čísel $a, b \in C$ je komplexní číslo, jehož reálná část je rovna součtu reálných částí čísel $a, b \in C$ a imaginární část je rovna součtu imaginárních částí těchto dvou komplexních čísel.

$$a + b = (a_1 + ia_2) + (b_1 + ib_2) = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$$

Součin dvou komplexních čísel

Komplexní čísla násobíme jako dvojčleny s tím, že použije vztah pro $i^2 = (-1,0)$ a výsledek opět ztotožníme s reálným číslem, tedy $i^2 = -1$.

$$a \cdot b = (a_1 + i\,a_2) \cdot (b_1 + ib_2) = a_1b_1 + i\,a_1b_2 + i\,a_2b_1 + i^2a_2b_2 = \\ = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)i$$

Podíl dvou komplexních čísel

Podílem dvou komplexních čísel $a, b \in C$ vznikne opět komplexní číslo. Ukážeme odvození vzorce pro výpočet podílu dvou komplexních čísel, ve kterém se využívají algebraické tvary těchto čísel.

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} = \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} \cdot \frac{b_1 - ib_2}{b_1 - ib_2} = \frac{(a_1 + ia_2) \cdot (b_1 - ib_2)}{b_1^2 - i^2 b_2^2} = \\ = \frac{a_1b_1 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - i^2a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + i\,(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2} = \\ = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2}\,i$$

Jsou-li čísla $a, b \in C$, pak platí:

$$a = \overline{(a)} \Leftrightarrow a \in R \qquad (1.1a)$$

$$\overline{(a + b)} = \bar{a} + \bar{b} \qquad (1.1b)$$

$$\overline{(a - b)} = \bar{a} - \bar{b} \qquad (1.1c)$$

$$\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} \qquad (1.1d)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \qquad (1.1e)$$

$$\bar{a}b = \overline{(a\bar{b})} \quad (1.1f)$$

$$\overline{(\bar{a})} = a \quad (1.1g)$$

$$a + \bar{a} = 2\mathrm{Re}(a) \quad (1.1h)$$

$$a - \bar{a} = 2 \cdot i\, Im(a) \quad (1.1i)$$

$$Im(\bar{a}a) = 0 \quad (1.1j)$$

$$Im(a \pm \mathrm{b}) = Im(a) \pm\ Im(b) \quad (1.1k)$$

$$Im(a\bar{b}) = -Im\,(\bar{a}b) \quad (1.1l)$$

$$\bar{a}a = \big(Re(a)\big)^2 + \big(Im(a)\big)^2 \quad (1.1m)$$

Důkazy:

1) $a = \overline{(a)} \;\Leftrightarrow a \in R$ (1.1a)

$$a_1 + ia_2 = a_1 - ia_2$$
$$2ia_2 = 0$$
$$a_2 = 0$$

Tedy pro rovnost komplexního čísla s číslem k němu komplexně sdruženým platí, že vždy imaginární složka je rovna nule a číslo a je číslo reálné.

2) $\left(\overline{a + b}\right) = \bar{a} + \bar{b}$ (1.1b)

$a = a_1 + ia_2$ $\qquad \bar{a} = a_1 - ia_2$

$b = b_1 + ib_2$ $\qquad \bar{b} = b_1 - ib_2$

Nejprve vyjádříme součet dvou komplexních čísel $a, b \in C$.

$$a + b = a_1 + ia_2 + b_1 + ib_2 = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$$

Nyní k tomuto součtu vytvoříme číslo komplexně sdružené.

$$\left(\overline{a + b}\right) = (a_1 + b_1) - i(a_2 + b_2) = a_1 - ia_2 + b_1 - ib_2$$

A je-li tento výraz vhodně přezávorkován, tak získáme čísla komplexně sdružená ke komplexním číslům $a, b \in C$.

$$(a_1 - ia_2) + (b_1 - ib_2) = \bar{a} + \bar{b}$$

Tímto jsme tento vztah dokázali.

3) $\left(\overline{a - b}\right) = \bar{a} - \bar{b}$ (1.1c)

$a = a_1 + ia_2$ $\qquad \bar{a} = a_1 - ia_2$

$b = b_1 + ib_2$ $\qquad \bar{b} = b_1 - ib_2$

Nejprve vyjádříme rozdíl dvou komplexních čísel $a, b \in C$.

$$a - b = a_1 + ia_2 - b_1 - ib_2 = (a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)$$

Nyní k tomuto rozdílu vytvoříme číslo komplexně sdružené.

$$\overline{(a-b)} = (a_1 - b_1) - i(a_2 - b_2) = a_1 - ia_2 - b_1 + ib_2$$

A je-li tento výraz vhodně přezávorkován, tak získáme čísla komplexně sdružená ke komplexním číslům $a, b \in C$.

$$(a_1 - ia_2) - (b_1 - ib_2) = \bar{a} - \bar{b}$$

Tímto jsme tento vztah dokázali.

4) $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (1.1d)

Jako první krok opět vyjádříme součin dvou komplexních čísel $a, b \in C$.

$$a \cdot b = (a_1 + ia_2) \cdot (b_1 + ib_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

K tomuto součinu vytvoříme číslo komplexně sdružené.

$$\overline{(a \cdot b)} = (a_1 b_1 - a_2 b_2) - i \cdot (a_2 b_1 + a_1 b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i \cdot (-a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

Nyní vyjádříme tvar komplexně sdružených čísel k číslům $a, b \in C$ a jejich součin.

$$\bar{a} = a_1 - ia_2 \ , \bar{b} = b_1 - ib_2$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i \cdot (-a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

Po porovnání upravených stran rovnosti je jasné, že výrazy se sobě rovnají a vztah jsme dokázali.

5) $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ (1.1e)

Při tomto důkazu budeme postupovat analogicky. Pomocí již známých vztahů upravíme pravou i levou stranu rovnosti a následně je vzájemně porovnáme mezi sebou.

Nejdříve uvedeme dvě komplexní čísla $a, b \in C$ a jejich podíl.

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2} i$$

K tomuto podílu vytvoříme číslo komplexně sdružené.

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} - \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2} i$$

Následně vyjádříme pravou stranu rovnosti, ve které opět používáme čísla komplexně sdružená k $a, b \in C$, tedy:

$$\bar{a} = a_1 - ia_2 \ , \bar{b} = b_1 - ib_2$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a_1 - ia_2}{b_1 - ib_2} \cdot \frac{b_1 + ib_2}{b_1 + ib_2} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{b_1^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{b_1^2 + b_2^2} - i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

Obě upravené strany rovnosti jsou shodné, proto můžeme tvrdit, že jsme uvedený vztah dokázali.

6) $\bar{a}b = \overline{(a\bar{b})}$ (1.1f)

U tohoto důkazu budeme postupovat analogicky jako u předchozích, tedy porovnáváním jednotlivých upravených stran rovnosti dokážeme její platnost.

Máme komplexní čísla $a, b \in C$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, a čísla k nim čísla komplexně sdružená $\bar{a} = a_1 - ia_2$, $\bar{b} = b_1 - ib_2$.

$$\bar{a}b = (a_1 - ia_2) \cdot (b_1 + ib_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i \cdot (-a_2b_1 + a_1b_2)$$
$$(a\bar{b}) = (a_1 + ia_2) \cdot (b_1 - ib_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i \cdot (a_2b_1 - a_1b_2)$$
$$\Rightarrow \overline{(a\bar{b})} = (a_1b_1 + a_2b_2) - i \cdot (a_2b_1 - a_1b_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i \cdot (-a_2b_1 + a_1b_2)$$

Upravené výrazy se sobě rovnají a vztah je tímto dokázán.

7) $\overline{(\bar{a})} = a$ (1.1g)

Nechť máme komplexní číslo $a = a_1 + ia_2$, číslo k němu komplexně sdružené má tvar $\bar{a} = a_1 - ia_2$ a k tomuto číslu jeho komplexně sdružené číslo ve tvaru $\overline{(\bar{a})} = a_1 - (-ia_2) = a_1 + ia_2$, platí tak dokazovaná rovnost.

8) $a + \bar{a} = 2\mathrm{Re}(a)$ (1.1h)

$a = a_1 + ia_2$, $\bar{a} = a_1 - ia_2$

Součet komplexního a k němu komplexně sdruženého čísla je dán:

$$a + \bar{a} = a_1 + ia_2 + a_1 - ia_2 = 2a_1 = 2R(a)$$

9) $a - \bar{a} = 2 \cdot i\, Im(a)$ (1.1i)

$a = a_1 + ia_2$, $\bar{a} = a_1 - ia_2$

Rozdíl komplexního a k němu komplexně sdruženého čísla je dán:

$$a - \bar{a} = a_1 + ia_2 - (a_1 - ia_2) = a_1 + ia_2 - a_1 + ia_2 = 2a_2i = 2 \cdot i\, Im(a)$$

10) $Im(\bar{a}a) = 0$ (1.1j)

Vyjádříme součin komplexních čísel $a, \bar{a} \in C$.

$$\bar{a} \cdot a = (a_1 - ia_2) \cdot (a_1 + ia_2) = a_1^2 + ia_1a_2 - ia_1a_2 - i^2a_2^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Z výsledku plyne, že neobsahuje imaginární složku, a tedy můžeme říci, že $Im(\bar{a} \cdot a) = 0$, čímž jsme vztah dokázali.

11) $Im(a \pm b) = Im(a) \pm Im(b)$ (1.1k)

Nejdříve si vyjádříme součet komplexních čísel $a, b \in C$ a ve výsledku se budeme zaměřovat na imaginární část.

$$a + b = a_1 + ia_2 + b_1 + ib_2 = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$$

Tedy $Im(a + b) = a_2 + b_2$.

Nyní si vyjádříme imaginární složky komplexních čísel jednotlivě a poté je spolu sečteme.

$Im(a) = a_2$, $Im(b) = b_2 \Rightarrow Im(a) + Im(b) = a_2 + b_2$.

Obě strany rovnosti jsme si vyjádřili zvlášť a nyní je porovnáme. Vidíme, že se sobě rovnají, a tímto je vztah dokázán pro operaci sčítání. Jelikož operace odčítání je pouze přičtení čísla opačného můžeme tento důkaz vztáhnout i na tuto operaci.

12) $Im(a\bar{b}) = -Im\,(\bar{a}b)$ (1.1l)

V tomto důkazu vždy vyjádříme příslušné součiny $a\bar{b}$ a $\bar{a}b$ a poté opět porovnáme pouze jejich imaginární části.

$$a\bar{b} = (a_1 + ia_2) \cdot (b_1 - ib_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i \cdot (a_2b_1 - a_1b_2)$$

$$\bar{a}b = (a_1 - ia_2) \cdot (b_1 + ib_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i \cdot (-a_2b_1 + a_1b_2)$$

$$\Rightarrow Im(a\bar{b}) = a_2b_1 - a_1b_2 = -(-a_2b_1 + a_1b_2) = -Im(\bar{a}b)$$

Tímto je vztah dokázán.

13) $\bar{a}a = \left(Re(a)\right)^2 + \left(Im(a)\right)^2$ (1.1m)

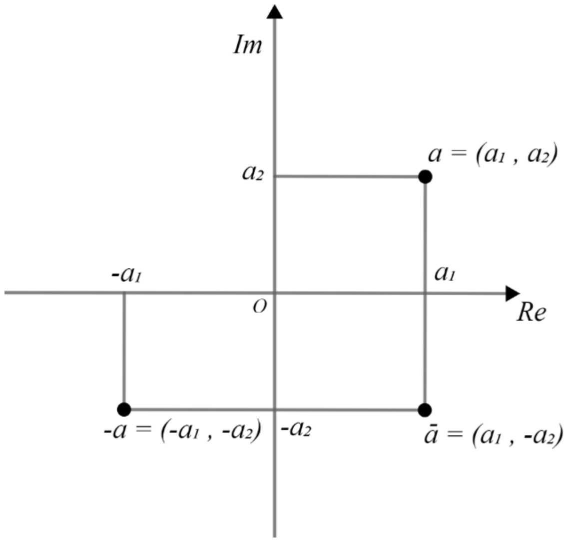
Pokud máme komplexní číslo $a \in C$, pak jeho algebraický tvar je $a = a_1 + ia_2$ a $Re(a) = a_1$ a $Im(a) = a_2$. Vyjádříme součin $\bar{a} \cdot a$.

$$\bar{a} \cdot a = (a_1 - ia_2) \cdot (a_1 + ia_2) = a_1^2 + ia_1a_2 - ia_1a_2 - i^2a_2^2 = a_1^2 + a_2^2$$
$$= \left(Re(a)\right)^2 + \left(Im(a)\right)^2$$

Tímto je vztah dokázán.

1.2 Grafické znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

Z definice komplexního čísla víme, že se jedná o uspořádanou dvojici dvou reálných čísel, která se dá zapsat jako (a_1, a_2). Potom této uspořádané dvojici můžeme přiřadit bod o těchto souřadnicích. Tímto je dáno jednoznačné zobrazení množiny všech komplexních čísel na množinu všech bodů roviny. Gaussova rovina je rovina, v níž takto komplexní čísla zobrazujeme. Přičemž reálná část se zobrazuje na vodorovnou osu a imaginární na svislou. Vodorovnou osu nazýváme reálná osa a svislou imaginární osa. Z Obr.1.1 je zřejmé, že body přiřazené číslům $a, -a$ jsou symetrické podle počátku $O[0,0]$ a body $a, \bar{a}$ jsou symetrické podle reálné osy (viz Obr. 1.1).

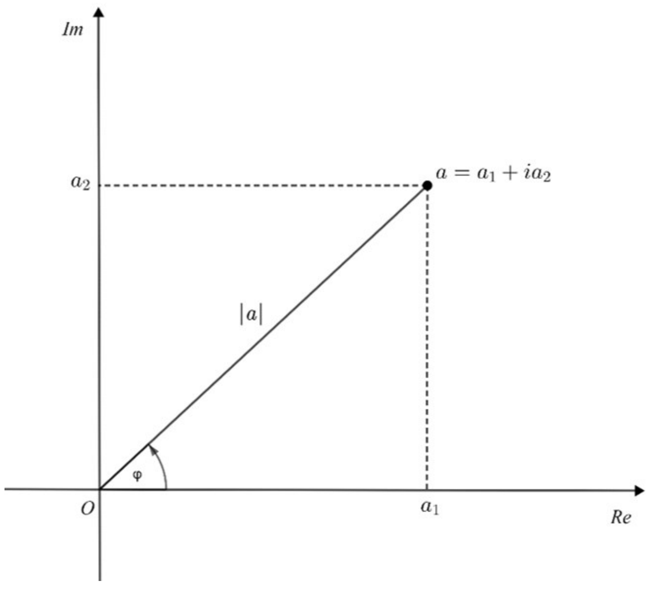


Obr. 1.1 Gaussova rovina

Grafické znázornění je zejména uplatněno při geometrickém řešení součtu a rozdílu komplexních čísel s využitím vektorového rovnoběžníku. Úzce spojený s modulem komplexního čísla a s grafickým znázorněním je goniometrický tvar komplexního čísla.

1.3 Goniometrický tvar komplexního čísla

Pro lepší představu, z čeho vychází goniometrický tvar komplexního čísla, si uvedeme obrázek (viz Obr. 1.2).



Obr. 1.2 Goniometrický tvar komplexního čísla

Je-li $a \in C$, pak ho můžeme zapsat jako $a = a_1 + ia_2$, z tohoto algebraického tvaru se odvozuje tvar goniometrický, pro $a \neq 0$.

Z pravoúhlého trojúhelníku je možné vyjádřit pomocí goniometrických funkcí a_1a a_2. Tedy

$\cos\varphi = \frac{a_1}{|a|}$, $\sin\varphi = \frac{a_2}{|a|}$. Po vyjádření a_1a a_2 z uvedených vztahů dostaneme $a_1 = \cos\varphi \cdot |a|$ a $a_2 = \sin\varphi \cdot |a|$.

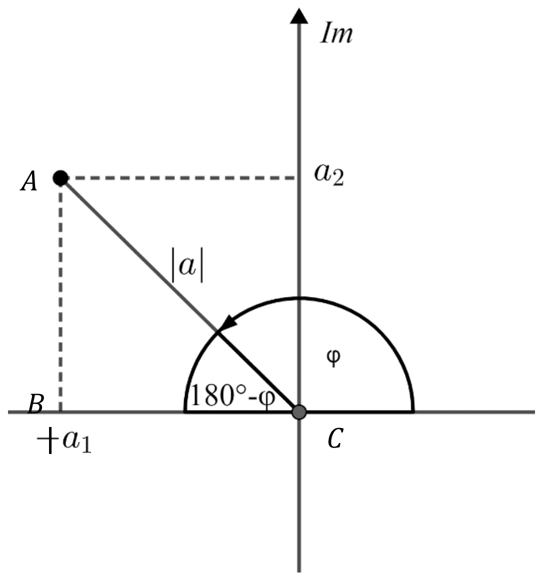
Nyní tyto vyjádření dosadíme do uvedeného algebraického tvaru a upravíme:

$$a = \cos\varphi \cdot |a| + i \cdot \sin\varphi \cdot |a| = |a| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde φ je velikost orientovaného úhlu, který svírá průvodič bodu a s polopřímkou kladné reálné osy. Uvedený vztah platný pro číslo a se nazývá goniometrický tvar komplexního čísla.

Jelikož jsme goniometrický tvar odvozovali pouze pro první kvadrant je potřebné, abychom ověřili, že tento tvar je platný i pro ostatní tři kvadranty. Opět budeme pracovat s funkcemi $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$, u kterých budeme využívat jejich paritu. Víme, že funkce kosinus je sudá a tedy $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ a funkce sinus je lichá, tedy $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.Uvedeme také vzorce, které platí pro hodnoty goniometrických funkcí. Tyto vztahy vychází z grafů jednotlivých goniometrických funkcí či z jednotkové kružnice: $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$.

Ověření platnosti goniometrického tvaru komplexního čísla pro II. kvadrant



Obr. 1.3 Ověření pro II. kvadrant

Pro ověření budeme pracovat s trojúhelníkem ABC (viz Obr 1.3), který má ostrý úhel $180° - \varphi$.

V tomto trojúhelníku platí:

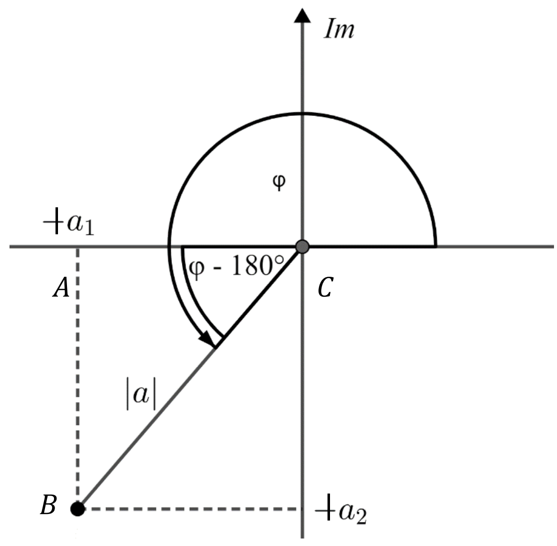
$\cos(180° - \varphi) = \frac{-a_1}{|a|}$, $\sin(180° - \varphi) = \frac{a_2}{|a|}$

$\Rightarrow -\cos\varphi = \frac{-a_1}{|a|}$, $\sin\varphi = \frac{a_2}{|a|}$

$\Rightarrow a_1 = \cos\varphi \cdot |a|$, $a_2 = \sin\varphi \cdot |a|$

Po dosazení do algebraického tvaru opět dostaneme již zmiňovaný goniometrický tvar.

Ověření platnosti goniometrického tvaru komplexního čísla pro III. kvadrant



Obr. 1.4 Ověření pro III. kvadrant

Pro ověření budeme pracovat s trojúhelníkem ABC (viz Obr 1.4), který má ostrý úhel $\varphi - 180°$. V tomto trojúhelníku platí:

$$\cos(\varphi - 180°) = \frac{-a_1}{|a|}$$

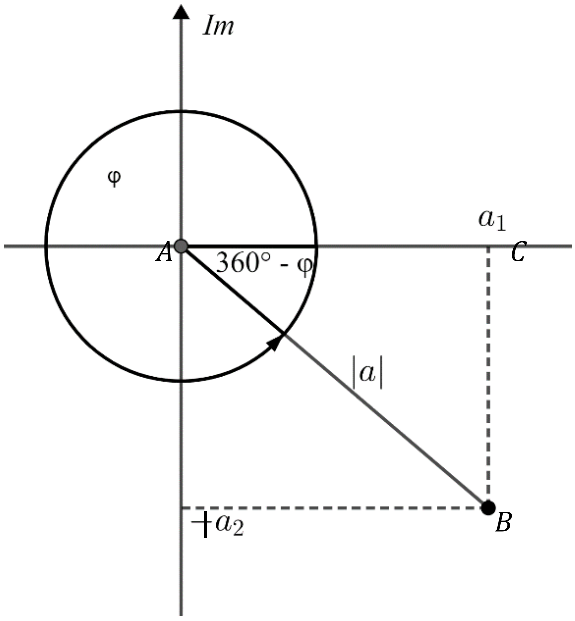
$$\sin(\varphi - 180°) = \frac{-a_2}{|a|}$$

$$\Rightarrow \cos\big(-(180° - \varphi)\big) = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{-a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = \cos\varphi \cdot |a|$$

$$\Rightarrow \sin(-(180° - \varphi)) = -\sin(180° - \varphi) = -\sin\varphi = \frac{-a_2}{|a|} \Rightarrow, a_2 = \sin\varphi \cdot |a|$$

Po dosazení do algebraického tvaru opět dostaneme již zmiňovaný goniometrický tvar.

Ověření platnosti goniometrického tvaru komplexního čísla pro IV. Kvadrant



Obr. 1.5 Ověření pro IV. kvadrant

Pro ověření budeme pracovat s trojúhelníkem ABC (viz Obr 1.5), který má ostrý úhel $360° - \varphi$.

V tomto trojúhelníku platí:

$\cos(360° - \varphi) = \frac{a_1}{|a|}$, $\sin(360° - \varphi) = \frac{-a_2}{|a|}$

$$\Rightarrow \cos(360° - \varphi) = \cos(-\varphi) = \cos\varphi = \frac{a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = \cos\varphi \cdot |a|$$

$$\Rightarrow \sin(360° - \varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi = \frac{-a_2}{|a|} \Rightarrow a_2 = \sin\varphi \cdot |a|$$

Po dosazení do algebraického tvaru opět dostaneme již zmiňovaný goniometrický tvar.

Nyní máme potvrzeno, že goniometrický tvar komplexního čísla platí pro všechny čtyři kvadranty a můžeme pomocí něj vyjádřit libovolné komplexní číslo v těchto kvadrantech. K zamyšlení jsou ještě dvě další situace. Zda platí tento tvar i pro komplexní číslo $a = 0 + i0$ a pro situaci, kdy komplexní číslo a leží na jedné ze souřadnicových os Gaussovy roviny. Je možné ukázat, že ano, ale těmito případy se nyní již zabývat nebudeme.

2. Analytická geometrie v rovině

Jak uvádí Milan Kočandrle [3], str.7 analytická geometrie je disciplína matematiky, která vznikla již v 17. století. Za její zakladatele jsou považováni francouzští matematikové a filozofové René Descartes (1596-1650) a Pierre de Fermat (1601-1665).

Jaké místo zaujímá analytická geometrie v matematice přibližuje Jura Charvát [1], str.4. Jednou z metod, jak řešit geometrické problémy a úlohy, je metoda syntetická. Tato metoda nevyužívá k řešení a studiu geometrických útvarů zvláštní početní prostředky. Pracuje pouze s geometrickými útvary a jejich již známými vlastnostmi, díky kterým se zavádějí i vlastnosti další. Analytická geometrie na práci s geometrickými útvary nahlíží z jiného pohledu. Využívá ke zkoumání rovinných útvarů metodu analytickou. Základem této metody je zavedení soustavy souřadnic, tedy určitých pravidel, pomocí nichž se bodům přiřazují čísla, kterým se říká souřadnice. Analytická geometrie pracuje s geometrickými objekty (bod, přímka, rovina, …) a k jejich popisu používá objekty algebraické (čísla, rovnice, nerovnice, …).

2.1 Souřadnice bodu v rovině

Než začneme s určováním souřadnic v rovině připomeneme konstrukci číselné osy, se kterou budeme následně pracovat. Na libovolné přímce budeme volit bod O a následně bod I, tak aby $|OI| = 1$ (viz Obr. 2.1). Bod O rozděluje přímku na dvě navzájem opačné polopřímky, které nazýváme kladná a záporná poloosa. Každému bodu M, který leží na přímce přiřadíme reálné číslo x_M tak, že $|x_M| = |OM|$. Přičemž pro bod M, který leží na kladné poloose platí $x_M \geq 0$, pro bod M ležící na záporné poloose platí $x_M \leq 0$. Říkáme, že bod M je obrazem čísla x_M a dále je potřeba si uvědomit, že každému reálnému číslu na číselné ose je přiřazen právě jeden bod, který je obrazem tohoto čísla. Takto lze zavést pojem číselná osa. Na číselné ose číslo x_M nazýváme souřadnicí bodu M.

Obr. 2.1 Číselná osa

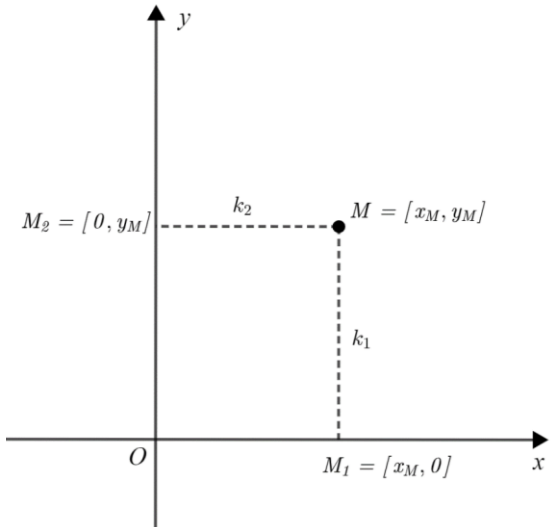
Nyní se již přesuneme do roviny, kde se budeme zabývat popisem polohy bodu.

Nechť tedy máme dvě číselné osy x a y, pro které platí:

1) obě jsou navzájem kolmé,
2) jejich průsečík je O a na obou osách odpovídá číslu 0,
3) mají stejnou jednotku délky.

Podle pana Jury Charváta [1] str. 10. Tato soustava souřadnic se nazývá kartézská soustava souřadnic[1] v rovině a značí se O_{xy}. Bod O se nazývá počátek kartézské soustavy souřadnic a přímky x, y se nazývají souřadnicové osy. Při nákresu obrázku zobrazujícího kartézskou soustavu souřadnic budeme písmeno označující danou číselnou osu psát k příslušné kladné poloose. Kdybychom neuvažovali stejnou jednotku délky na obou osách, hovořili bychom pouze o pravoúhlé soustavě souřadnic.

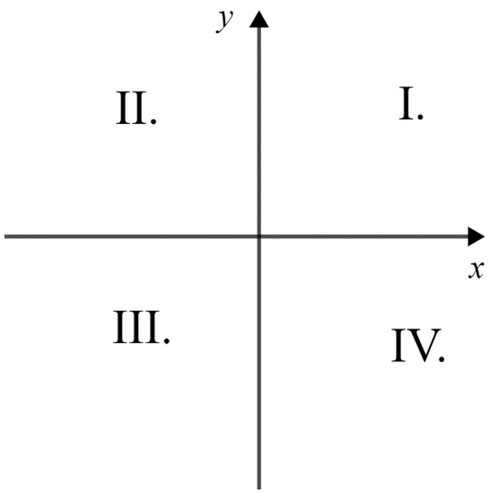
[1] Slovo *souřadnice* (neboli *coordinata*) vzniklo z latinských slov *cum* (význam *s*) a *ordinata* (význam *uspořádaná*). Slovo *kartézská* je odvozeno ze jména *Cartesius*, což je latinský překlad jména *Descartes* [1], str. 10.



Obr. 2.2 Kartézská soustava souřadnic

Máme-li nyní danou kartézskou soustavu souřadnic a libovolný bod M (viz Obr. 2.2), pak tomuto bodu přiřadíme uspořádanou dvojici $[x_M, y_M]$, tak že číslo x_M je souřadnicí pravoúhlého průmětu M_1 bodu M na osu x a číslo y_M je souřadnicí pravoúhlého průmětu M_2 bodu M na osu y. Můžeme také uvažovat obráceně a to tak, že ke každé uspořádané dvojici $[x_M, y_M]$ reálných čísel můžeme přiřadit bod M následujícím postupem. Na ose x sestrojíme bod $M_1 = [x_M]$ a na ose y sestrojíme bod $M_2 = [y_M]$. Bod M získáme jako průsečík rovnoběžky k_1 s osou y vedenou bodem M_1 a rovnoběžky k_2 s osou x vedenou bodem M_2. Uspořádanou dvojici reálných čísel $[x_M, y_M]$ nazýváme kartézskými souřadnicemi bodu M v soustavě souřadnic O_{xy}. Číslo x_M se nazývá první souřadnicí bodu M, číslo y_M nazýváme druhou souřadnicí bodu M. A zapisujeme je tímto způsobem $M[x_M, y_M]$.

Z toho plyne, že každý bod náležící ose x má druhou souřadnici rovnou nule $X[x, 0]$ a obdobně, každý bod na ose y má první souřadnici rovnou nule $Y[0, y]$. Jelikož jsou na sebe osy souřadnic kolmé, ty rozdělují rovinu na čtyři pravé úhly, jejichž vnitřky nazýváme kvadranty, jsou číslovány římskými číslicemi (viz Obr. 2.3).



Obr. 2.3 Kvadranty

2.2 Vzdálenost bodů v rovině

Pomocí kartézských souřadnic také můžeme vypočítat vzdálenost dvou bodů v rovině. Uvedeme vzorec a důkaz pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v rovině.

Vzdálenost dvou bodů $A[x_A, y_A]$ a $B[x_B, y_B]$ v rovině je dána vzorcem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

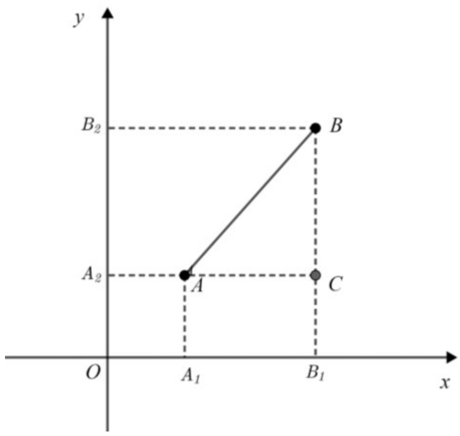
Důkaz.

Budeme uvažovat tři možné situace.

1) $A = B$, v tomto případě $x_A = x_B$ a $y_A = y_B$ po dosazení do vzorce $|AB| = \sqrt{(x_B - x_B)^2 + (y_B - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, což odpovídá předpokladu a vztah platí.

2) $A \neq B$, v tomto případě můžeme uvažovat dva speciální případy, a to, když je přímka zadaná body rovnoběžná s jednou ze souřadnicových os. Tedy budeme uvažovat, že je přímka určená body A, B rovnoběžná s osou x. Tím pádem $y_A = y_B$ a pro vzdálenost bodů A, B platí $|AB| = |A_1B_1|$, kde A_1, B_1 jsou pravoúhlé průměty bodů na osu x (viz Obr. 2.4). A jelikož tyto průměty mají souřadnice $A_1[x_A, 0]$, $B_1[x_B, 0]$, pak lze jejich vzdálenost zapsat také jako $|x_A x_B| = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$. Vzhledem k tomu, že vzdálenost $|y_B - y_A| = 0$, tak správnost vzorce je zde potvrzena. Pokud by se jednalo o druhý případ, tedy rovnoběžnost přímky s osou y, pak se při důkazu postupuje úplně stejně a v průběhu se využijí pravoúhlé průměty A_2, B_2 bodů A, B na osu y.

3) V případě, že jsou body A, B různé, ale přímka určena těmito body není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou, tak sestrojíme trojúhelník ABC , kde bod C vznikne jako průsečík rovnoběžky s osou x procházející bodem A a rovnoběžky s osou y procházející bodem B (viz Obr. 2.4). Jelikož $C[x_B, y_A]$, tak podle postupu z předchozí části důkazu můžeme opět pracovat s pravoúhlými průměty, tedy $|AC| = |A_1B_1| = |x_B - x_A|$, $|BC| = |A_2B_2| = |y_B - y_A|$. Vidíme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a při použití Pythagorovy věty platí: $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Nyní po odmocnění dostaneme příslušný dokazovaný vzorec. Tímto jsme vztah dokázali.



Obr. 2.4 Vzdálenost bodů v rovině

2.3 Střed úsečky

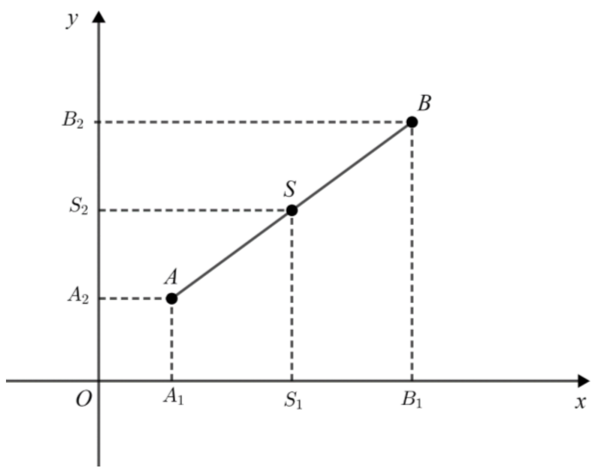
V této podkapitole uvedeme a dokážeme vzorec pro výpočet středu úsečky dané dvěma krajními body A, B. O středu úsečky víme, že dělí tuto úsečky na dvě stejně dlouhé části.

Střed $S[x_S, y_S]$ úsečky s krajními body $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$ má souřadnice

$$x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_B), y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

Důkaz.

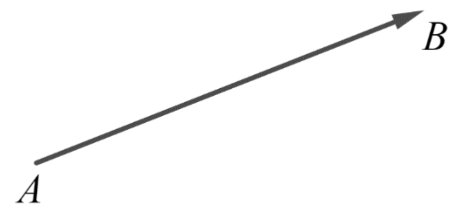
Na princip důkazu budeme nahlížet jako Jura Charvát [1], str.14. Budeme předpokládat, že úsečka není rovnoběžná s žádnou ze souřadnicových os a sestrojíme pravoúhlé průměty bodů A, B, S na obě souřadnicové osy, tedy vzniknou body A_1, B_1, S_1 na ose x a body A_2, B_2, S_2 na ose y (viz Obr. 2.5). Pro body A_1, B_1, S_1 platí, že S_1 je středem úsečky A_1B_1a tedy $|A_1S_1| = |B_1S_1|$. Uvedenou rovnost můžeme pomocí souřadnic přepsat jako $|x_S - x_A| = |x_S - x_B|$, jelikož bod S_1 leží mezi body A_1, B_1 musím být jedno z čísel $x_S - x_A, x_S - x_B$ kladné a druhé záporné. Po dosazení do předchozí rovnice tak dostáváme $x_S - x_A = -(x_S - x_B)$ a po úpravě dostáváme dokazovaný vzorec pro x-ovou souřadnici bodu S. Provedeme-li analogickou úvahu pro pravoúhlé průměty A_2, B_2, S_2 dostaneme druhý z dokazovaných vzorců. V případě rovnoběžnosti úsečky se souřadnicovou osou x, je platnost vztahů přímo zřejmá. Postup pro důkaz souřadnic na ose x by byla identická již s uvedeným postupem a na ose y by se dokazování značně zjednodušilo, neboť všechny pravoúhlé průměty by byly body o stejných souřadnicích, a tento případ by opět potvrzoval uvedený vztah. Analogie by byla opět u úsečky rovnoběžné se souřadnicovou osou y.



Obr. 2.5 Střed úsečky

2.4 Vektory

Nejprve, než začneme definovat pojem vektor a pracovat s ním, je potřeba zavést pojem tomu předcházející, a to orientovaná úsečka. Úsečku orientujeme tak, že rozhodneme, který bod bude počáteční, a který koncový. Orientovaná úsečka je graficky znázorněna jako úsečka opatřená šipkou u koncového bodu (viz Obr. 2.6).

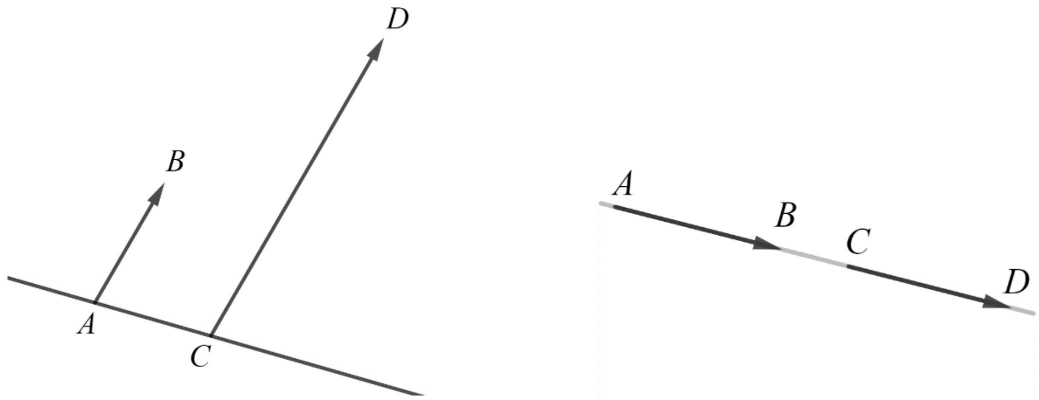


Obr.2.6 Orientovaná úsečka

Jelikož u orientované úsečky závisí na tom, který bod je koncový a počáteční, tak se od toho také odvíjí její označení (zápis). Tedy pokud máme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B, tak potom do textu tuto úsečku označíme symbolem $\overrightarrow{AB}$. Velikost orientované úsečky je vzdálenost bodů A, B.

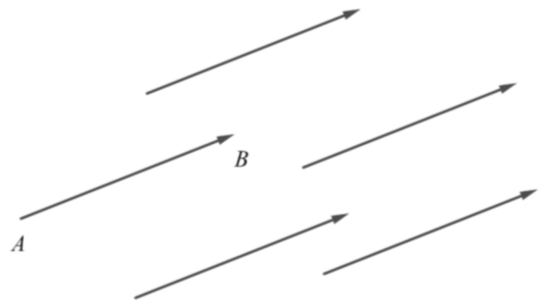
Mezi orientované úsečky se také počítají jednobodové množiny, které mají počáteční a koncový bod totožný, jinak je také můžeme nazývat nulové orientované úsečky. Tento název je odvozen od jejich velikosti, která je nulová. Nyní si přesně vyjádříme, za jakých podmínek jsou dvě orientované úsečky souhlasně orientované.

Pokud máme dvě nenulové orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, pak jsou souhlasně orientované, jestliže (viz Obr. 2.7) buď přímky AB, CD jsou rovnoběžné různé a body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC, nebo přímky AB, CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB, CD je opět polopřímka.

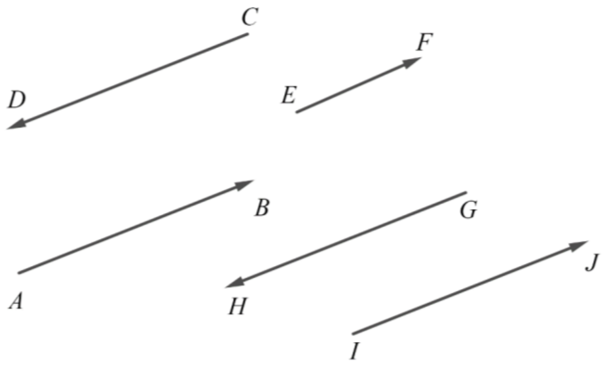


Obr. 2.7 Souhlasně orientované úsečky

Nyní můžeme již navázat na pojem orientovaná úsečka pojmem dalším – vektor. Konkrétně volný vektor můžeme zavést jako množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti (viz obrázek 2.8). Každou orientovanou úsečku, která reprezentuje daný vektor, budeme nazývat umístěním, případně reprezentantem daného vektoru. Reprezentuje-li vektor $\vec{u}$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, potom říkáme, že vektor $\vec{u}$ jsme umístili do bodu A (viz Obr. 2.8). Místo $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ obvykle píšeme $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, i když je tento zápis symbolicky nepřesný.



Obr. 2.8 Volný vektor



Obr. 2.9 Určení stejného vektoru

Vidíme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{IJ}$ jsou souhlasně orientované (viz Obr. 2.9) a orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{GH}$ mají stejnou velikost, ale pouze dvojice orientovaných úseček $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}$ určují stejný vektor.

Součet bodu a vektoru

Jak již bylo zmíněno a použito, umístíme vektor $\vec{u}$ do bodu A a koncovým bodem je bod B. Bod B nazveme součtem bodu A a vektoru $\vec{u}$, $B = A + \vec{u}$. Vektor $\vec{u}$ nazýváme rozdílem bodů B, A v tomto pořadí a značíme $\vec{u} = B - A$.

Souřadnice vektoru

Nechť máme v rovině vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, kde $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$, potom se čísla $u_1 = x_B - x_A, u_2 = y_B - y_A$ nazýváme souřadnice vektoru u a zapisujeme $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Velikost (délka) vektoru

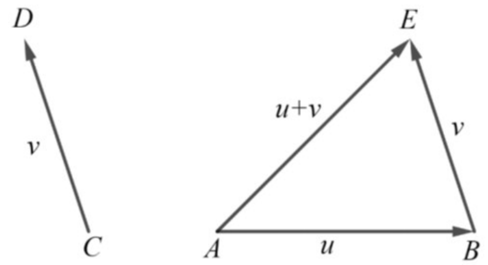
Velikostí vektoru rozumíme velikost jeho libovolného umístění (reprezentanta, orientované úsečky). Vektor, jehož velikost je rovna jedné se nazývá jednotkový vektor ($|\vec{u}| = 1$). Značíme $|\vec{u}|$. Pro velikost každého vektoru $\vec{u}$ platí $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, kde tento vztah můžeme přepsat pomocí souřadnic krajních bodů orientované úsečky určující daný vektor, tedy $|\vec{u}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ a tento vztah máme již dokázaný.

Násobení vektoru skalárem (reálným číslem)

Pokud máme dáno libovolné reálné číslo $k \in R$ a libovolný vektor $\vec{u}$, potom součinem čísla k a vektoru $\vec{u}$ rozumíme vektor $k \cdot \vec{u}$, který je rovnoběžný a souhlasně orientovaný ($k > 0$) resp. nesouhlasně orientovaný ($k < 0$) s vektorem $\vec{u}$. Speciální případ je pro $k = -1$. Pro $k = -1$ platí $k \cdot \vec{u} = -1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$. Tento vektor potom nazýváme opačným vektorem k vektoru $\vec{u}$. Pro každý vektor $\vec{u}$ v rovině platí $k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2)$ a $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|$.

Součet dvou vektorů

Nechť máme dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$. Vektor $\vec{u}$ je dán orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a vektor $\vec{v}$ je dán orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CD}$. Pokud umístíme počáteční bod vektoru $\vec{v}$ do bodu B dostaneme $\vec{v} = E - B$ a tedy součet vektorů $\vec{u} + \vec{v} = E - A$ (viz Obr. 2.10). Pro souřadnice součtu každých dvou vektorů v rovině platí $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Rozdíl vektorů není nic jiného než přičtení vektoru opačného.



Obr. 2.10 Součet dvou vektorů

Lineární kombinace vektorů

Nechť máme vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ v rovině, pak vektor $\vec{z} = c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k$, kde $c_1, \dots c_k \in R$, se nazývá lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.

Úhel dvou vektorů

Úhlem dvou nenulových vektorů rozumíme úhel, který svírají jejich reprezentanti se stejným počátkem. Odchylkou nazýváme velikost tohoto úhlu. V případě, že je alespoň jeden z vektorů nulový, odchylku nedefinujeme.

Skalární součin

Skalárním součinem dvou nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$, pro které platí

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$, kde φ je odchylka vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Lze také psát $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ kolineární, potom:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ navzájem kolmé, potom:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Pomocí skalárního součinu můžeme jednoduše definovat vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

2.5 Přímka v rovině

V této části se zaměříme na analytické vyjádření přímky, kterým rozumíme každý předpis, kterému vyhovují souřadnice libovolného bodu této přímky a žádné jiné. Zavedeme první typ vyjádření přímky v rovině pomocí parametrických rovnic.

a) Parametrické rovnice přímky

Uvažujme libovolnou přímku p a na ní zvolme libovolný bod A a libovolný nenulový vektor $\vec{u}$, který je s touto přímkou p rovnoběžný. Nyní pro libovolný bod $X \in p$ můžeme zapsat $\vec{v} = X - A$. Přitom vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou rovnoběžné, proto vektor $\vec{v}$ je násobkem vektoru $\vec{u}$ tj. $\vec{v} = t\cdot\vec{u}$.

$\vec{v} = t\cdot\vec{u} \Rightarrow X - A = t\cdot\vec{u} \Rightarrow X = A + t\cdot\vec{u}$, kde $t \in R$ a jedná se o parametr bodu X. Zapíšeme-li parametrickou rovnici pomocí souřadnic, potom postupujeme takto:

$$[x,y] = [x_A, y_A] + t\cdot(u_1, u_2)$$
$$[x,y] = [x_A, y_A] + (tu_1, tu_2)$$
$$[x,y] = [x_A + tu_1, y_A + tu_2]$$

Pokud se mají rovnat dva body, musí se rovnat jejich odpovídající si souřadnice, tedy z tohoto odvození dostaneme dvojici parametrických rovnic, kde $t \in R$:

$$x = x_A + tu_1$$
$$y = y_A + tu_2$$

b) Obecná rovnice přímky

Pro odvození obecné rovnice přímky využijeme zápis pomocí parametrických rovnic:

$$x = x_A + tu_1$$
$$y = y_A + tu_2$$

Z této soustavy lineárních rovnic nyní vyloučíme parametr t.

$$x = x_A + tu_1 \;/\cdot u_2$$
$$\underline{y = y_A + tu_2} \;/\cdot(-u_1)$$
$$u_2x = u_2x_A + \mathrm{t}u_1u_2$$
$$\underline{-u_1y = -u_1y_A} - \mathrm{t}u_1u_2$$
$$u_2x - u_1y = u_2x_A - u_1y_A$$
$$u_2x - u_1y - u_2x_A + u_1y_A = 0$$

Poslední rovnici píšeme ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, a nazýváme ji obecná rovnice přímky v rovině. Z odvození je jasné, že $a = u_2, b = -u_1$a pokud je $\vec{u} = (u_1, u_2)$ směrovým vektorem přímky p, potom lze dokázat, že vektory $\vec{n}, \vec{u}$ jsou na sebe kolmé, a kde vektor $\vec{n} = (-u_2, u_1)$ budeme nazývat vektorem normálovým:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -u_2 u_1 + u_1 u_2 = 0$$

c) Směrnicový tvar rovnice přímky

K odvození tohoto tvaru rovnice budeme využívat opět předchozího tvaru, a tedy budeme vycházet z obecné rovnice přímky, ze které vyjádříme proměnnou y.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Takto dostaneme tzv. směrnicový tvar přímky. Je nutné dodat, že směrnicový tvar přímky nelze vyjádřit v případě, kdy $b = 0$. Je zvykem tuto rovnici psát ve tvaru $y = kx + q$, kde $k = tg\ \varphi$ a nazývá se směrnice přímky (φ je orientovaný úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou souřadnicové osy x) a q je úsek, který vytíná přímka na ose y.

2.6 Kružnice

Kružnice se v analytické geometrii řadí mezi kuželosečky. Ty jsou definované jako řez kuželové rotační plochy rovinou ρ, která neprochází vrcholem kuželové plochy. Kružnici jako křivku dostaneme v případě, že rovina ρ svírá s osou kužele úhel o velikosti 90°. Kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu (středu) stálou vzdálenost (poloměr).

Analytická rovnice pro kružnici:

Kružnici, která má střed v bodě $S[m, n]$ a poloměr r, lze vyjádřit rovnicí $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

3. Geometrické útvary v rovině a Gaussově rovině

V této kapitole se zaměříme na vzájemné porovnávání určení jednotlivých geometrických útvarů v rovině pomocí reálných čísel a v Gaussově rovině pomocí čísel komplexních.

<u>Určení bodu</u>

V rovině

Souřadnice bodu lze psát $X[x, y]$(viz podkapitola 2.1).

V Gaussově rovině

Bod $X[x, y]$ je v Gaussově rovině obrazem komplexního čísla $z = x + iy$, respektive $z = (x, y)$. V dalším textu často ztotožníme bod X v Gaussově rovině a číslo z, jehož je obrazem. Místo bod $A[a_1, a_2]$ v Gaussově rovině, který je obrazem komplexního čísla $a = a_1 + ia_2$, resp. $a = (a_1, a_2)$, budeme stručně psát bod $a = a_1 + ia_2$, resp. $a = (a_1, a_2)$.

<u>Vzdálenost dvou bodů</u>

V rovině

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ v rovině je dán vzorcem (viz podkapitola 2.2)

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

V Gaussově rovině

Nechť máme dva body $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$. Potom vzdálenost těchto bodů je dána vztahem:

$$|b - a| = |(b_1, b_2) - (a_1, a_2)| = |b_1 - a_1, b_2 - a_2| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Ve vztahu využíváme rozdíl komplexních čísel a vztah pro velikost komplexního čísla.

Dále se přesuneme k souřadnicím vektorů a jejich vyjádření v jednotlivých množinách.

<u>Určení vektorů</u>

V rovině

Souřadnice vektoru $\vec{u}$ lze psát $\vec{u} = (u_1, u_2)$ nebo pomocí krajních bodů orientované úsečky reprezentující tento vektor $\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (viz podkapitola 2.4).

V Gaussově rovině

Umístíme vektor $\vec{u} = (v, w)$v Gaussově rovině tak, že počáteční bod je v 0 a koncový bod U má souřadnice $[v, w]$, tj. koncový bod je obrazem komplexního čísla $u = v + iw$, resp. $u = (v, w)$. Určení vektoru v Gaussově rovině bude založeno na ztotožnění daného vektoru v Gaussově rovině a příslušného komplexního čísla. Místo vektor $\vec{u} = (v, w)$ v Gaussově rovině budeme psát vektor $u = v + iw$, resp. $u = (v, w)$. V rovině vektor $\vec{u}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ je možné zapsat $\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = [b_1, b_2] - [a_1, a_2]$, to samé však platí pro Gaussovu rovinu. Tedy vektor zadaný jeho krajními body, lze určit jako $u = b - a$.

Vidíme, že vektor $\vec{u}$ můžeme vyjádřit jako komplexní číslo u pomocí rozdílu komplexních čísel a, b.

Parametrické rovnice přímky – pomocí směrových vektorů

V rovině

Pokud je dán bod $A[x_A, y_A]$ náležící přímce p a směrový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přímky p, (pozn.:$t \in R$):

$$p: x = x_A + tu_1$$
$$y = y_A + tu_2$$

V Gaussově rovině

Je zadán bod $a = x_A + iy_A$ a směrový vektor $u = u_1 + iu_2$. Zápis parametrické rovnice přímky p v Gaussově rovině opět chápeme jako vyjádření libovolného bodu přímky tak, že z bodu a se posuneme o t násobek vektoru u.

$$p: x = a + t \cdot u, t \in R.$$

Parametrické rovnice přímky – pomocí dvojice bodů přímky

V rovině

Nyní máme zadané dva body $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, oba tyto body leží na přímce p. Budeme je zároveň považovat za krajní body orientované úsečky, která je vhodným reprezentantem směrového vektoru $\vec{u}$. Tedy $\vec{u} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Potom parametrické rovnice mají tvar (pozn.: $t \in R$):

$$p: x = x_A + t(x_B - x_A)$$
$$y = y_A + t(y_B - y_A)$$

V Gaussově rovině

Máme zadané dva body $a = (x_A, y_A), b = (x_B, y_B)$. Tyto body zvolíme jako krajní body orientované úsečky, která je vhodným reprezentantem směrového vektoru u. Již bylo uvedeno, tento vektor je možné zapsat pomocí jeho krajních bodů, tedy $u = b - a$. Je možné psát parametrickou rovnici přímky p v tomto tvaru:

$$p: x = a + t(b - a), t \in R.$$

Obecná rovnice přímky – pomocí směrového nebo normálového vektoru

V rovině

Obecná rovnice přímky p (viz podkapitola 2.5) $ax + by + c = 0$.

V Gaussově rovině

V Gaussově rovině uvedeme odvození obecné rovnice přímky, které bude vycházet z parametrické rovnice přímky p.

Parametrická rovnice přímky $p: x = a + t \cdot u, t \in R$. Postup bude analogický, jako u odvození obecné rovnice přímky v rovině, tedy eliminujeme parametr t.V takovém případě pro eliminaci nestačí pouze jedna rovnice. Zavedeme druhé možné vyjádření bodu na přímce, pomocí komplexně sdružených čísel. Druhé možné parametrické vyjádření přímky $p: \bar{x} = \bar{a} + t \cdot \bar{u}, t \in R$. Jelikož je parametr t reálné číslo, tak k němu komplexně sdružené číslo bude opět číslo t. Zde se tedy dostáváme k řešení, jelikož pro jednu přímku máme dvě možná zadání a z těch eliminujeme parametr t.

$$x = a + t \cdot u \;/\cdot\, \bar{u}$$

$$\underline{\bar{x} = \bar{a} + t \cdot \bar{u}} \;/\cdot\, (-u)$$

$$x \cdot \bar{u} = a \cdot \bar{u} + tu\bar{u}$$

$$\underline{\bar{x} \cdot (-u) = \bar{a} \cdot (-u) - tu\bar{u}}$$

$$x \cdot \bar{u} - \bar{x} \cdot u = a \cdot \bar{u} - \bar{a} \cdot u$$

$$x \cdot \bar{u} - a \cdot \bar{u} = \bar{x} \cdot u - \bar{a} \cdot u$$

$$\bar{u} \cdot (x - a) = u \cdot (\bar{x} - \bar{a})$$

$$\bar{u} \cdot (x - a) - u \cdot (\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

Poslední uvedený vztah je již zmíněný tvar obecné rovnice přímky v Gaussově rovině. Členy $u, (x-a)$ lze chápat jako vektory, které jsou rovnoběžné. Zmiňovaná rovnoběžnost vektorů v Gaussově rovině může být další ze způsobů odvození obecné rovnice přímky. K odvození podmínky rovnoběžnosti vektorů v Gaussově rovině budeme využívat znalosti z analytické geometrie (viz podkapitola 2.5). Konkrétně využijeme podmínky pro rovnoběžnost vektorů u, v. Tedy $u \parallel v$, potom $\frac{u}{v} = k$, kde $k \in R$, a tedy $\frac{u}{v} \in R \Rightarrow Im\left(\frac{u}{v}\right) = 0$. Je možné využít vztah 1.1i, ze kterého po dosazení získáme $\frac{u}{v} - \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = 2i \cdot Im\left(\frac{u}{v}\right) = 2i \cdot 0 = 0 \Rightarrow \frac{u}{v} - \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = 0 \Rightarrow u \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot v = 0$. Nyní již stačí za vektor v dosadit vektor $(x-a)$, a získáme tak výše uvedenou obecnou rovnici přímky p.

Jelikož jsme zmínili podmínku rovnoběžnosti vektorů v Gaussově rovině, jistě se nabízí i odvození podmínky kolmosti vektorů v Gaussově rovině. Postup bude dosti podobný, avšak počáteční podmínka musí být očividně jiná. Pokud jsou vektory u, v kolmé, potom $u = k \cdot iv$ (je známo, že násobení činitelem i interpretujeme v Gaussově rovině jako otočení o 90°), tedy $\frac{u}{v} = i \cdot k \Rightarrow \frac{u}{v} \in C - R$. Je možné tedy psát $Re\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ a využít vzorec 1.1h. Po dosazení do vzorce získáme:

$$\frac{u}{v} + \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = 2Re\left(\frac{u}{v}\right) = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \frac{u}{v} + \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = 0 \Rightarrow u \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot v = 0$$

Nyní již stačí za vektor v dosadit vektor $(x-a)$ a za vektor u normálový vektor n přímky p. Získáme tak obecnou rovnici přímky p ve tvaru:

$$\bar{n}(x - a) + n(\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

<u>Obecná rovnice přímky – pomocí dvojice bodů přímky</u>

V rovině

Máme zadané dva body $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$, oba tyto body leží na přímce p. Budeme je zároveň považovat za krajní body orientované úsečky, která je vhodným reprezentantem směrového vektoru $\vec{u}$. Tedy $\vec{u} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Jelikož do obecné rovnice nedosazujeme vektor směrový, ale normálový $\vec{n}$, tak souřadnice tohoto vektoru budou $\vec{n} = (y_A - y_B, x_B - x_A)$ (viz podkapitola 2.5). Opět můžeme psát obecnou rovnici přímky p v tomto tvaru

$$p: (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + c = 0.$$

V Gaussově rovině

Jsou zadané dva body $a = x_A + iy_A, b = x_B + iy_B$. Oba body zvolíme jako krajní body orientované úsečky, která je vhodným reprezentantem směrového vektoru u. Již bylo uvedeno, že tento vektor je možné zapsat ve tvaru $u = b - a$. Po dosazení tohoto vztahu pro komplexní číslo u do již odvozené obecné rovnice můžeme psát:

$$(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (x - a) - (b - a) \cdot (\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

<u>Kružnice</u>

V rovině

Kružnice, která má střed v bodě $S[m, n]$ a má poloměr r, je určená rovnicí $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$(viz podkapitola 2.6).

V Gaussově rovině

Množina všech bodů $x = (x_1, x_2)$, které mají stejnou vzdálenost r od bodu $s = (s_1, s_2)$, je kružnice v Gaussově rovině s rovnicí $|x - s| = r$. Využijeme vzorec pro výpočet velikosti komplexního čísla $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a\bar{a}} \Rightarrow |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 = a\bar{a}$

Po umocnění získáme následující tvar $|x - s|^2 = r^2 \Rightarrow (x - s)(\bar{x} - \bar{s}) = r^2$, po roznásobení tohoto výrazu: $x\bar{x} + s\bar{s} - x\bar{s} - \bar{x}s = r^2$.

4. Praktická část

Tato kapitola bude mít tři různá zaměření. První bude uvedení příkladů, které těsně navazují na teoretickou část a budou z ní také vycházet. Bude se jednat o prakticky zasazené příklady, ve kterých zpracuji i několik možných postupů řešení. Druhé zaměření této kapitoly bude na obecné vyjádření průsečíku dvou různoběžek a vzájemné porovnání výsledků mezi komplexním vyjádřením a vyjádřením reálným. I v této části ke každému typu zadání uvedu ukázkové příklady s řešením a využitím právě odvozených vztahů pro hledaný průsečík. Poslední podkapitola bude věnována důkazům geometrických vět pomocí analytické geometrie v Gaussově rovině. Důkazy tedy budu směřovat do analytické geometrie a využívat vlastností geometrických útvarů v Gaussově rovině uvedených v teoretické části práce.

4.1 Příklady

Příklad 1

Určete parametrickou a obecnou rovnici přímky, která prochází body $A\left[\frac{1}{2},3\right], B[-2,4]$.

Postup:

Oba body můžeme nahradit komplexními čísly $a=\left(\frac{1}{2},3\right), b=(-2,4)$. Díky těmto bodům určíme směrový vektor přímky, který je dán komplexním číslem

$$u=b-a=(-2,4)-\left(\frac{1}{2},3\right)=\left(-\frac{5}{2},1\right).$$

Nyní je možné psát parametrickou rovnici $p: x=b+t\cdot u$ a po dosazení získáme vyjádření $p: x=(-2+4i)+t\cdot(-\frac{5}{2}+i)$, kde $t\in R$. Je možné také psát rovnici pomocí komplexně sdružených čísel.

$\bar{a}=\left(\frac{1}{2},-3\right), \bar{b}=(-2,-4), \bar{u}=(-\frac{5}{2},-1)$

$p: \bar{x}=\bar{b}+t\cdot\bar{u}$, po dosazení $p: \bar{x}=(-2-4i)+t\cdot\left(-\frac{5}{2}-i\right)$.

Pro zapsání obecné rovnice již máme všechny podstatné údaje. Dosadíme tedy do rovnice $\bar{u}\cdot(x-b)-u\cdot(\bar{x}-\bar{b})=0$.

$\left(-\frac{5}{2}-i\right)\cdot[x-(-2+4i)]-\left(-\frac{5}{2}+i\right)\cdot[\bar{x}-(-2-4i)]=0$ tuto rovnici je možné ještě dále upravit.

$$\left(-\frac{5}{2}-i\right)\cdot[x+2-4i]+\left(\frac{5}{2}-i\right)\cdot[\bar{x}+2+4i]=0$$

$$-\frac{5}{2}x-5+10i-xi-2i-4+\frac{5}{2}\bar{x}+5+10i-\bar{x}i-2i+4=0$$

$$\left(-\frac{5}{2}-i\right)\cdot x-\left(-\frac{5}{2}+i\right)\cdot\bar{x}+16i=0$$

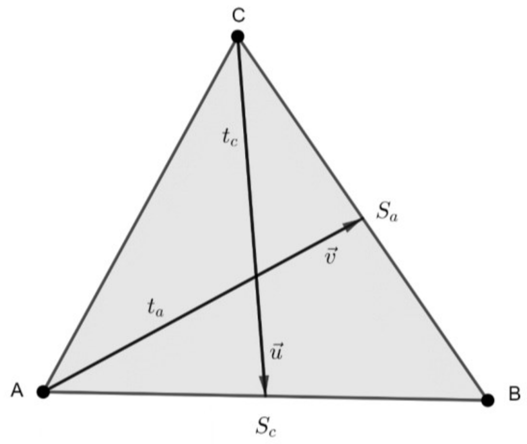
Vidíme, že rovnice by se dala zapsat ve tvaru $\bar{u}\cdot x-u\cdot\bar{x}+\alpha=0$, kde $\alpha=-u_1b_2i+u_2b_1i-u_1b_2i+u_2b_1i=2i(u_2b_1-u_1b_2)$.

Příklad 2

Určete souřadnice těžiště trojúhelníku ABC, kde vrcholy mají souřadnice $A[1,1], B[8,0], C[3,5]$.

Postup: U tohoto příkladu jsem vybrala 3 různé způsoby řešení.

1) Pro lepší představu využijeme Obr. 4.1. První postup spočívá ve vyjádření parametrické rovnice těžnice, přitom víme, že se těžiště nachází v její $\frac{1}{3}$, a toto číslo tedy dosadíme za parametr t.



Obr. 4.1 Dvojice těžnic v trojúhelníku ABC

Body trojúhelníku vyjádříme pomocí komplexních čísel: $a = (1,1), b = (8,0)$, $c = (3,5)$.

Střed úsečky AB: $s_{AB} = \frac{a+b}{2} = \frac{(1,1)+(8,0)}{2} = \frac{(9,1)}{2} = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$

Směrový vektor přímky nahrazený komplexním číslem: $u = c - s_{AB} = (3,5) - \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) =$ $= (-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$.

Parametrická rovnice těžnice na stranu c trojúhelníku: $t_c: x = s_{AB} + t \cdot u$ (obecný tvar), po dosazení $t_a: x = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) + t \cdot (-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$.

Pro zjištění souřadnic těžiště budeme volit $t = \frac{1}{3}$, protože zároveň v rovnici používáme jako počáteční bod střed strany AB a od středu k těžišti se posuneme právě o $\frac{1}{3}\ u$.

$$x = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = (4,2)$$

Vidíme, že těžiště je bod $x = (4,2)$.

2) Druhý možný přístup využívá uvědomění si, že těžiště se nachází v průsečíku těžnic. Tedy vyjádříme si dvě různé těžnice trojúhelníku a spočítáme jejich průnik. Z tohoto průniku nám vyjde parametr t a ten opět dosadíme do jedné z rovnic, ve které jsme ho použili.

Pro zápis parametrické rovnice jedné z těžnic máme již vše podstatné, pro druhou si důležité údaje musíme opět vyjádřit.
Budeme pracovat z těžnicí t_b. Pro vyjádření směrového vektoru je potřeba střed úsečky AC.

Střed úsečky AC: $s_{AC} = \frac{a+c}{2} = \frac{(1,1)+(3,5)}{2} = \frac{(4,6)}{2} = (2,3)$.

Směrový vektor těžnice t_b nahrazený komplexní číslem $v = b - s_{AC} = (8,0) - (2,3) =$
$= (6,-3)$.

Parametrické rovnice těžnic:

$$t_a \colon x = (3,5) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$t_b \colon x = (8,0) + s(6,-3)$$

Průnik těchto těžnic:

$$\boldsymbol{t_a} \cap \boldsymbol{t_b} \colon (3,5) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = (8,0) + s(6,-3)$$

Jak již bylo zmíněno, je potřeba z rovnice vyjádřit parametr t, avšak je zřejmé, že se zde nachází také druhý parametr, který je potřeba eliminovat, parametr s. Pro tuto eliminaci využijeme, stejně jako u odvození obecné rovnice v Gaussově rovině, druhý možný způsob parametrického vyjádření přímky – pomocí komplexně sdružených čísel.

$$t_a \colon \bar{x} = (3,-5) + t\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$t_b \colon \bar{x} = (8,0) + s(6,3)$$

Průnik tohoto vyjádření těžnic:

$$\boldsymbol{t_a} \cap \boldsymbol{t_b} \colon (3,-5) + t\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right) = (8,0) + s(6,3)$$

Jelikož jsou parametry t, s stále reálná čísla, tak čísla k nim komplexně sdružená jsou stejná reálná čísla. Máme tedy druhou rovnici, ve které se vyskytují právě tyto dva parametry a jeden z nich je možné vypočítat díky soustavě rovnic a eliminaci druhého parametru.

$$(3,5) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = (8,0) + s(6,-3) \; /\cdot\ (6,3)$$

$$\underline{(3,-5) + t\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right) = (8,0) + s(6,3)} \; /\cdot\ (-6,3)$$

$$(3,5)(6,3) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)(6,3) = (8,0)(6,3) + s(6,-3)(6,3)$$

$$\underline{(3,-5)(-6,3) + t\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)(-6,3) = (8,0)(-6,3)} + s(6,3)(-6,3)$$

$$(18-15{,}30+9)+t\left(-9-\frac{27}{2},27-\frac{9}{2}\right)=(48-0{,}0+24)+s(6,-3)(6{,}3)$$

$$\underline{(-18+15{,}30+9)+t\left(9+\frac{27}{2},27-\frac{9}{2}\right)=(-48-0{,}0+24)+s(6{,}3)(-6{,}3)}$$

$$(3{,}39)+t\left(-\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)=(48{,}24)+s(6,-3)(6{,}3)$$

$$\underline{(-3{,}39)+t\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)}=(-48{,}24)+s(6{,}3)(-6{,}3)$$

$$(3{,}39)+(-3{,}39)+t\left(-\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)+t\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)=(48{,}24)+(-48{,}24)$$

$$(0{,}78)+t\left[\left(-\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)+\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)\right]=(0{,}48)$$

$$t(0{,}45)=(0,-30)$$

$$t=\frac{(0,-30)}{(0{,}45)}=\left(\frac{0-30\cdot 45}{45^2},\frac{0-0}{45^2}\right)=-\frac{2}{3}\in R$$

Nyní dosadíme hodnotu parametru t do rovnice pro t_a.

$$x=(3{,}5)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)=(3{,}5)+(1,-3)=(4{,}2)$$

Opět jsme došli ke stejnému výsledku a těžiště je bod $x=(4{,}2)$.

3) Poslední a nejrychlejší způsob je práce se vzorcem na výpočet souřadnic těžiště. Můžeme vycházet ze vzorce pro reálná čísla, kde souřadnice těžiště jsou aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů trojúhelníku. U komplexních čísel se tento princip zachovává.

   Vzorec pro výpočet souřadnic těžiště: $t=\frac{a+b+c}{3}$

   Pro náš případ: $t=\frac{(1{,}1)+(8{,}0)+(3{,}5)}{3}=\frac{(12{,}6)}{3}=(4{,}2)$

4.2 Vyjádření průsečíku dvou různoběžných přímek

V této podkapitole se zaměříme na vyjádření průsečíku dvou různoběžných přímek a budeme tak navazovat přímo na teoretickou část. V tomto případě uvedeme postup jak pro Gaussovu rovinu, tak pro (reálnou) rovinu a budeme výsledné vyjádření porovnávat s ohledem na to, zda využití komplexních čísel může být výhodnější při rychlosti řešení úlohy či nikoliv. Bude uveden výpočet pro průsečík pomocí parametrických rovnic i obecných rovnic. Ke každému typu řešení bude uveden i ukázkový příklad, díky kterému můžeme porovnávat i počet početních kroků při řešení daného problému.

<u>Průsečík dvou různoběžných přímek zadaných parametricky – v rovině</u>

Nechť máme přímku p, která je dána body $A[a_1,a_2]$, $B[b_1,b_2]$. Dále máme přímku q, která je dána body $C[c_1,c_2]$ a $D[d_1,d_2]$. Body náležící přímce zvolíme jako krajní body orientované úsečky, tedy pro přímku p bude vhodný reprezentant směrového vektoru $\vec{u}$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Pro přímku q bude vhodný reprezentant směrového vektoru $\vec{v}$ orientovaná úsečka $\overrightarrow{CD}$. Potom můžeme psát, že pro souřadnice vektorů platí:

$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = D - C = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (v_1, v_2)$. Pro obě přímky vyjádříme parametrické rovnice.

$$p: x = a_1 + t \cdot u_1$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2 \,, t \in R$$

$$q: x = c_1 + s \cdot v_1$$

$$y = c_2 + s \cdot v_2 \,, s \in R$$

$$p \cap q: a_1 + t \cdot u_1 = \; c_1 + s \cdot v_1 \; / \cdot v_2$$

$$\underline{a_2 + t \cdot u_2 = c_2 + s \cdot v_2} \; / \cdot (-v_1)$$

$$a_1 v_2 + t u_1 v_2 = c_1 v_2 + s v_1 v_2$$

$$\underline{-a_2 v_1 - t u_2 v_1 = -c_2 v_1 - s v_2 v_1}$$

$$a_1 v_2 - a_2 v_1 + t u_1 v_2 - t u_2 v_1 = c_1 v_2 - c_2 v_1$$

$$t \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = c_1 v_2 - c_2 v_1 - a_1 v_2 + a_2 v_1$$

$$t = \frac{c_1 v_2 - c_2 v_1 - a_1 v_2 + a_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

<u>Průsečík dvou různoběžných přímek zadaných parametricky – v Gaussově rovině</u>

Nechť máme přímku p, která je dána body $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Dále máme přímku q, která je dána body $c = (c_1, c_2)$ a $d = (d_1, d_2)$. Opět můžeme pomocí těchto komplexních čísel a jejich rozdílu zavést nové komplexní číslo, které bude odpovídat směrovému vektoru přímky. Pro přímku p uvedeme směrový vektor pomocí komplexního čísla $u = b - a$ a pro přímku q směrový vektor pomocí komplexního čísla $v = d - c$. Parametrické rovnice přímek je možné psát pomocí komplexních čísel uvedených výše nebo pomocí čísel k nim komplexně sdružených.

$$p: x = a + t \cdot u, t \in R$$

$$q: x = c + s \cdot v, s \in R$$

Průnik přímek p, q:

$$p \cap q: a + t \cdot u = c + s \cdot v$$

I když je příklad obecný, postup bude analogický jako u příkladu početního. To znamená eliminace jednoho z parametrů a vyjádření druhého, k tomuto postupu jsou opět potřeba dvě rovnice, tedy využijeme opět rovnice s komplexně sdruženými čísly.

$$p: \bar{x} = \bar{a} + t \cdot \bar{u}, t \in R$$

$$q: \bar{x} = \bar{c} + s \cdot \bar{v}, s \in R$$

Průnik přímek určený pomocí komplexně sdružených čísel:

$$p \cap q: \bar{a} + t \cdot \bar{u} = \bar{c} + s \cdot \bar{v}$$

Soustava rovnic:

$$a + t \cdot u = c + s \cdot v \ /\cdot \bar{v}$$

$$\underline{\bar{a} + t \cdot \bar{u} = \bar{c} + s \cdot \bar{v}} \ /\cdot (-v)$$

$$a\bar{v} + tu\bar{v} = c\bar{v} + sv\bar{v}$$

$$\underline{-\bar{a}v - t\bar{u}v = -\bar{c}v - s\bar{v}v}$$

$$a\bar{v} - \bar{a}v + tu\bar{v} - t\bar{u}v = c\bar{v} - \bar{c}v$$

$$t \cdot (u\bar{v} - \bar{u}v) = c\bar{v} - \bar{c}v - a\bar{v} + \bar{a}v$$

$$t = \frac{c\bar{v} - \bar{c}v - a\bar{v} + \bar{a}v}{u\bar{v} - \bar{u}v}$$

<u>Porovnání</u>:

Při porovnání výsledků pro průsečíky dvou různoběžných přímek jak v reálných číslech, tak v komplexních číslech si můžeme všimnout, že počet členů těchto výsledků je stejný, dále mají také stejná znaménka. Shrnula bych to do myšlenky, že při práci s komplexními čísly, nepracujeme se souřadnicemi bodů, ale s komplexními čísly a čísly k nim komplexně sdruženými. Můžeme si všimnout podobnosti mezi výsledky v následujícím: první souřadnice daných bodů v rovině ve vyjádření odpovídají daným komplexním číslům a druhé souřadnice bodů odpovídají číslům komplexně sdruženým. Tedy můžeme tvrdit, že v tomto případě nám využití komplexních čísel příliš nezjednoduší řešení úlohy.

Je možné uvést zjednodušení výsledku v rámci komplexních čísel pomocí vzorců z podkapitoly 1.1. Především využijeme vzorec 1.1i ($2i \cdot Im(a) = a - \bar{a}$) následovně

$$t = \frac{c\bar{v} - \bar{c}v - a\bar{v} + \bar{a}v}{u\bar{v} - \bar{u}v} = \frac{(c\bar{v} - \bar{c}v) + (\bar{a}v - a\bar{v})}{(u\bar{v} - \bar{u}v)} = \frac{2i \cdot Im(c\bar{v}) + 2i \cdot Im(\bar{a}v)}{2i \cdot Im(u\bar{v})}$$
$$= \frac{2i \cdot (Im(c\bar{v}) + Im(\bar{a}v))}{2i \cdot Im(u\bar{v})} = \frac{Im(c\bar{v}) + Im(\bar{a}v)}{Im(u\bar{v})}$$

Ukázkový příklad

Budeme pracovat se stejným označením jako při odvozování. V ukázkových příkladech budeme pracovat především s výše odvozenými vzorci pro určení hodnoty parametru t, počtem kroků a jednoduchostí úprav, které jsou potřebné k určení výsledku.

<u>V rovině</u>

Přímka p je zadána body $A[1,3], B[-1,-1]$ a přímka q je zadána body $C[-3,1], D[0,-2]$. Najděte souřadnice průsečíku přímek p, q.

Přímka p je zadána směrovým vektorem $\vec{u} = B - A = (-1 - 1, -1 - 3) = (-2, -4)$.

Přímka q je zadána směrovým vektorem $\vec{v} = D - C = (0 + 3, -2 - 1) = (3, -3)$.

$$p: x = 1 - 2t$$

$$y = 3 - 4t, t \in R$$

Nyní využijeme k nalezení souřadnic průsečíku přímek p, q odvozený vztah pro t.

$$t = \frac{c_1v_2 - c_2v_1 - a_1v_2 + a_2v_1}{u_1v_2 - u_2v_1} =$$

$$= \frac{-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 3}{-2 \cdot (-3) - (-4) \cdot 3} = \frac{18}{18} = 1$$

Nyní hodnotu pro t dosadíme do rovnice přímky p a zjistíme hodnotu souřadnic průsečíku přímek.

$$x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$y = 3 - 4 \cdot 1 = -1$$

Souřadnice průsečíku přímek p, q jsou $[-1, -1]$.

V Gaussově rovině

Přímka p je dána body $a = (1{,}3), b = (-1, -1)$. Přímka q je dána body $c = (-3{,}1)$, $d = (0, -2)$. Najděte souřadnice průsečíku přímek p, q.

Přímka p je zadána pomocí směrového vektoru, který můžeme zapsat pomocí komplexního čísla $u = b - a = (-1, -1) - (1{,}3) = (-1 - 1, -1 - 3) = (-2, -4)$.

Přímka q je zadána pomocí směrového vektoru, jehož souřadnice můžeme zapsat pomocí komplexního čísla $v = d - c = (0, -2) - (-3{,}1) = (0 + 3, -2 - 1) = (3, -3)$.

Ke všem zmíněným komplexním číslům zapíšeme čísla komplexně sdružená.

$$\bar{a} = (1, -3), \bar{b} = (-1{,}1), \bar{c} = (-3, -1), \bar{d} = (0{,}2), \bar{u} = (-2{,}4), \bar{v} = (3{,}3)$$

Vyjádření přímky p.

$$p: x = (1{,}3) + (-2, -4) \cdot t, t \in R$$

Nyní zjistíme hodnoty parametru t dosazením do odvozeného vzorce.

$$t = \frac{c\bar{v} - \bar{c}v - a\bar{v} + \bar{a}v}{u\bar{v} - \bar{u}v}$$

$$t = \frac{(-3{,}1) \cdot (3{,}3) - (-3, -1) \cdot (3, -3) - (1{,}3) \cdot (3{,}3) + (1, -3) \cdot (3, -3)}{(-2, -4) \cdot (3{,}3) - (-2{,}4) \cdot (3, -3)}$$

Použijeme vzorec pro násobení komplexních čísel.

$$t = \frac{(-9 - 3{,}3 - 9) - (-9 - 3, -3 + 9) - (3 - 9{,}9 + 3) + (3 - 9, -9 - 3)}{(-6 + 12, -12 - 6) - (-6 + 12{,}12 + 6)} =$$

$$= \frac{(-12, -6) - (-12{,}6) - (-6{,}12) + (-6, -12)}{(6, -18) - (6{,}18)} = \frac{(0, -36)}{(0, -36)} = 1$$

Podíl dvou stejných komplexních čísel je roven 1, čímž se nám potvrdilo, že parametr t je reálné číslo. Pokud bychom pro dosazení do rovnice chtěli výsledek zapsat jako uspořádanou dvojici, byl by zapsán takto (1,0).

Nyní parametr t dosadíme do rovnice přímky p a zjistíme souřadnice průsečíku přímek.

$$x = (1{,}3) + (-2, -4) \cdot (1{,}0) = (1, -3) + (-2, -4) = (-1, -1)$$

Průsečík přímek p, q je $x = (-1, -1)$ a tento výsledek také odpovídá nalezenému průsečíku v rovině.

Porovnání:

I když jsem předpokládala, že by použití komplexních čísel mohlo být efektivnější při postupu a výpočtu výsledku, tak v tomto případě tomu tak nebylo. Délka postupu (počet početních kroků) se mi zde zdála podobně dlouhá. Co by však mohlo postup řešení urychlit je tvar pro t, zmíněný v porovnání obecných vyjádření. Jelikož v tomto tvaru používáme pouze imaginární složky součinu dvou komplexních čísel, není potřeba reálnou složku součinu vůbec počítat, na základě této myšlenky budou reálné části pouze vytečkovány.

$$c\bar{v} = (\dots, -6), \bar{a}v = (\dots, -12), u\bar{v} = (\dots, -18)$$

$$t = \frac{Im(c\bar{v}) + Im(\bar{a}v)}{Im(u\bar{v})} = \frac{-6 + (-12)}{-18} = 1$$

Vidíme, že v tomto případě jsme se vyhnuli několika početním operacím s komplexními čísly a výsledek pro t nám vyšel stejný jako v rozsáhlejším postupu. Zde můžeme říci, že využití komplexních čísel je rychlejší pro tento typ úlohy – průsečík dvou přímek zadaných parametricky.

Průsečík dvou různoběžných přímek zadaných obecnou rovnicí – v rovině

Nechť máme přímku p, která je určená obecnou rovnicí $p: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ Nechť máme přímku q, která je určena obecnou rovnicí $q: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

$$p \cap q: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;/\cdot (-a_2)$$

$$\underline{a_2x + b_2y + c_2 = 0} \;/\cdot a_1$$

$$-a_2a_1x - a_2b_1y - a_2c_1 = 0$$

$$\underline{a_2a_1x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0}$$

$$a_1b_2y - a_2b_1y + a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

$$y \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$p \cap q: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;/\cdot (-b_2)$$

$$\underline{a_2x + b_2y + c_2 = 0} \;/\cdot b_1$$

$$-a_1b_2x - b_1b_2y - b_2c_1 = 0$$

$$\underline{a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0}$$

$$a_2b_1x - a_1b_2x + b_1c_2 - b_2c_1 = 0$$

$$x \cdot (a_2b_1 - a_1b_2) = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

<u>Průsečík dvou různoběžných přímek zadaných obecnou rovnicí – v Gaussově rovině</u>

Nechť máme přímku p, která je určená bodem $a = (a_1, a_2)$ a vektorem u. K zápisu obecné rovnice přímky p využijeme již odvozený obecný tvar rovnice přímky v Gaussově rovině (viz kapitola 3). Obecná rovnice přímky $p: \bar{u}(x - a) - u(\bar{x} - \bar{a}) = 0$

Nechť máme přímku q, která je určena bodem $b = (b_1, b_2)$ a vektorem v. Obecná rovnice přímky $q: \bar{v} \cdot (x - b) - v \cdot (\bar{x} - \bar{b}) = 0$

$$p \cap q: \bar{u} \cdot (x - a) - u \cdot (\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

$$\underline{\bar{v} \cdot (x - b) - v \cdot (\bar{x} - \bar{b}) = 0}$$

$$\bar{u}x - \bar{u}a - u\bar{x} + u\bar{a} = 0$$

$$\underline{\bar{v}x - \bar{v}b - v\bar{x} + v\bar{b} = 0}$$

$$\bar{u}x - u\bar{x} = \bar{u}a - u\bar{a} \;/\cdot v$$

$$\underline{\bar{v}x - v\bar{x} = \bar{v}b - v\bar{b}} \;/\cdot (-u)$$

$$\bar{u}vx - uv\bar{x} = v\bar{u}a - vu\bar{a}$$

$$\underline{-u\bar{v}x + uv\bar{x} = -u\bar{v}b + uv\bar{b}}$$

$$\bar{u}vx - u\bar{v}x = \bar{u}va - uv\bar{a} - u\bar{v}b + uv\bar{b}$$

$$x \cdot (\bar{u}v - u\bar{v}) = \bar{u}va - uv\bar{a} - u\bar{v}b + uv\bar{b}$$

$$x = \frac{\bar{u}va - uv\bar{a} - u\bar{v}b + uv\bar{b}}{\bar{u}v - u\bar{v}}$$

<u>Porovnání</u>:

Na rozdíl od předchozího příkladu, ve kterém jsme mohli vidět analogii v jednotlivých výsledcích, zde totéž nepozorujeme. Rozdílné výsledné výrazy jsou důsledek toho, že v rovině je potřeba obě souřadnice průsečíku vyjádřit samostatně. V Gaussově rovině výsledný výraz v sobě zahrnuje výpočet obou souřadnic průsečíku přímek. Z tohoto důvodu, zde není žádná analogie. I když se zdá výraz poněkud složitější, stále se dá hovořit o zjednodušení, neboť slouží k výpočtu obou souřadnic na rozdíl od výsledných výrazů v rovině. Můžeme také uvažovat, zde by se vyjádření pro x v Gaussově rovině nedalo dále zjednodušit pomocí vzorců pro komplexní čísla (viz podkapitola 1.1).

$$x = \frac{\bar{u}va - uv\bar{a} - u\bar{v}b + uv\bar{b}}{\bar{u}v - u\bar{v}} = \frac{v(\bar{u}a - u\bar{a}) - u(\bar{v}b - v\bar{b})}{\bar{u}v - u\bar{v}} = \frac{v \cdot Im(a\bar{u}) - u \cdot Im(b\bar{v})}{-Im(u\bar{v})}$$

$$x = \frac{u \cdot Im(b\bar{v}) - v \cdot Im(a\bar{u})}{Im(u\bar{v})}$$

V takto upraveném tvaru se opět vyskytují pouze imaginární složky součinu dvou komplexních čísel, což by vedlo k dalšímu zjednodušení výpočtu. Můžeme tedy říci, že v Gaussově rovině představuje vyjádření průsečíku dvou přímek jednoznačné zjednodušení.

Ukázkový příklad

Budeme pracovat se stejným označením jako při odvozování. V ukázkových příkladech budeme pracovat především s výše odvozenými vzorci, počtem kroků a jednoduchostí úprav, které jsou potřebné k dosažení výsledku.

V rovině

Přímka p je zadána body $A[1,3], B[-1,-1]$ a přímka q je zadána body $C[-3,1], D[0,-2]$. Najděte souřadnice průsečíku přímek p, q.

Přímka p je zadána směrovým vektorem $\vec{u} = B - A = (-1-1, -1-3) = (-2,-4)$. Normálový vektor pro přímku p má souřadnice $\overrightarrow{n_1} = (4,-2)$.

Přímka q je zadána směrovým vektorem $\vec{v} = D - C = (0+3, -2-1) = (3,-3)$. Normálový vektor přímky q má souřadnice $\overrightarrow{n_2} = (3,3)$.

Obecné rovnice přímek.

$$p: 4x - 2y + c_1 = 0$$

$$A \in p: 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + c_1 = 0$$

$$c_1 = 2$$

$$p: 4x - 2y + 2 = 0$$

$$q: 3x + 3y + c_2 = 0$$

$$D \in q: 3 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + c_2 = 0$$

$$c_2 = 6$$

$$q: 3x + 3y + 6 = 0$$

Nyní dosadíme do odvozených vztahů pro souřadnice průsečíku přímek.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

$$x = \frac{3 \cdot 2 - (-2) \cdot 6}{3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3} = \frac{18}{-18} = -1$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 6}{4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2)} = \frac{-18}{18} = -1$$

Tedy souřadnice průsečíku přímek p, q jsou $[-1,-1]$.

V Gaussově rovině

Přímka p je dána body $a = (1,3), b = (-1,-1)$. Přímka q je dána body $c = (-3,1)$, $d = (0,-2)$. Najděte souřadnice průsečíku přímek p, q.

Přímka p je zadána pomocí směrového vektoru, který můžeme zapsat pomocí komplexního čísla $u = b - a = (-1,-1) - (1{,}3) = (-1-1,-1-3) = (-2,-4)$.

Přímka q je zadána pomocí směrového vektoru, který můžeme zapsat pomocí komplexního čísla $v = d - c = (0,-2) - (-3{,}1) = (0+3,-2-1) = (3,-3)$.

Ke všem zmíněným komplexním číslům vytvoříme čísla komplexně sdružená.

$$\bar{a} = (1,-3), \bar{b} = (-1{,}1), \bar{c} = (-3,-1), \bar{d} = (0{,}2), \bar{u} = (-2{,}4), \bar{v} = (3{,}3)$$

Není potřeba si vyjadřovat jednotlivé přímky, jelikož do výsledného výrazu dosazujeme pouze tyto vypsané údaje.

Nyní dosadíme do odvozeného vzorce pro výpočet průsečíku přímek.

$$x = \frac{\bar{u}va - uv\bar{a} - u\bar{v}c + uv\bar{c}}{\bar{u}v - u\bar{v}}$$

$$\frac{(-2{,}4)\cdot(3,-3)\cdot(1{,}3) - (-2,-4)\cdot(3,-3)\cdot(1,-3) - (-2,-4)\cdot(3{,}3)\cdot(-3{,}1) + (-2,-4)\cdot(3,-3)\cdot(-3,-1)}{(-2{,}4)\cdot(3,-3) - (-2,-4)\cdot(3{,}3)}$$

Roznásobíme vždy dvojici komplexních čísel a následně výsledek roznásobíme třetím komplexním číslem.

$$\frac{(-6+12{,}12+6)\cdot(1{,}3) - (-6-12,-12+6)\cdot(1,-3) - (-6+12,-12-6)\cdot(-1,-1) + (-6-12,-12+6)\cdot(-1{,}1)}{(-6+12{,}12+6) - (-6+12,-12-6)}$$

$$\frac{(6{,}18)\cdot(1{,}3) - (-18,-6)\cdot(1,-3) - (6,-18)\cdot(-3{,}1) + (-18,-6)\cdot(-3,-1)}{(6{,}18) - (6,-18)}$$

$$\frac{(6-54{,}18+18) - (-18-18,-6+54) - (-18+18{,}54+6) + (54-6{,}18+18)}{(0{,}36)}$$

$$\frac{(-48{,}36) - (-36{,}48) - (0{,}60) + (48{,}36)}{(0{,}36)} = \frac{(36,-36)}{(0{,}36)}$$

Použijeme vztah pro počítání podílu komplexních čísel.

$$\frac{(36,-36)}{(0{,}36)} = \left(\frac{0 + (-36)\cdot 36}{0 + 36^2}, \frac{0 - 36\cdot 36}{36^2}\right) = (-1,-1)$$

Průsečík přímek p, q je bod $(-1,-1)$.

<u>Porovnání</u>

U příkladu v rovině musíme vyjádřit obecné rovnice obou přímek, což v Gaussově rovině není potřeba, ale následný postup dosazování a dopočítání výsledku je v rovině značně rychlejší. Jedná se o snadné početní operace, kdežto v Gaussově rovině je postup zdlouhavý, jelikož je potřeba vynásobit tři komplexní čísla, sečíst, případně odečíst a tento výsledek následně vydělit. Postup je možné urychlit v případě uvědomění si komplexně sdružených čísel, které jsou součástí součinů $v(\bar{u}a - u\bar{a}), u(\bar{v}b - v\bar{b}), \bar{u}v - u\bar{v}$. Postačilo by tedy vypočítat pouze jeden součin a druhý je známý jako komplexně sdružené číslo. Největší možné urychlení však vidím při použití vzorce, který je uveden v porovnání obecného postupu: $x = \frac{u\cdot Im(c\bar{v}) - v\cdot Im(a\bar{u})}{Im(u\bar{v})}$. Vidíme, že v uvedeném vzorci jsou pouze imaginární složky součinu, tedy reálné složky počítat nebudeme a jejich pozici vytečkujeme.

$$c\bar{v} = (\dots,-6), a\bar{u} = (\dots,-2), u\bar{v} = (\dots,-18)$$

$$x = \frac{(-2,-4)\cdot(-6)-(3,-3)\cdot(-2)}{-18} = \frac{(12{,}24)-(-6{,}6)}{-18} = \frac{(18{,}18)}{-18} = (-1,-1)$$

Tento způsob výpočtu je jednoznačně nejrychlejší i v porovnání s hledáním průsečíku v rovině. Vyplývá z toho, že pro určení průsečíku dvou různoběžných přímek, i v početním příkladu je nejvýhodnější využít zadání pomocí Gaussovy roviny.

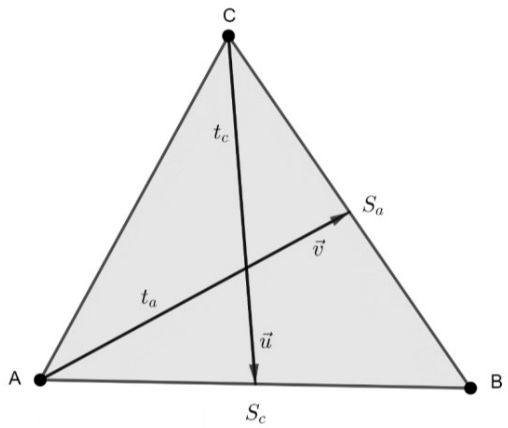
4.3 Důkazy geometrických vět

V této podkapitole se zaměříme na dokazování geometrických vět pomocí analytické geometrie v Gaussově rovině.

4.3.1 Věta o těžišti

Tato část bude zaměřena na ověření jedné vlastnosti libovolně zvolené těžnice pomocí komplexních čísel. Konkrétně se bude zabývat touto vlastností těžnic – rozdělení její délky průsečíkem s druhou těžnicí v poměru, vyjádřeném určitou konstantou. Proto je tento poměr u průsečíků s oběma dalšími těžnicemi stejný, tj. oba průsečíky splynou. Můžeme tak dokázat, že těžnice trojúhelníku procházejí jedním bodem – těžištěm trojúhelníku.

Budeme uvažovat případ v trojúhelníku ABC (viz Obr. 4.2).



Obr. 4.2 Průsečík dvojice těžnic v trojúhelníku ABC

Určíme jednotlivé význačné body a vektory trojúhelníku ABC:

$$a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2, c = c_1 + ic_2$$

$$s_c = \frac{a+b}{2}, s_a = \frac{b+c}{2}$$

$$u = s_a - a, v = s_c - c$$

Parametrické rovnice těžnic:

$$t_a: x = a + t\cdot(s_a - a), t \in R$$

$$t_c: x = c + r \cdot (s_c - c), r \in R$$

Dosadíme vyjádření pro s_a, s_c do obou parametrických rovnic.

$$t_a: x = a + t \cdot \left(\frac{b+c}{2} - a\right), t \in R$$

$$t_c: x = c + r \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right), r \in R$$

Při hledání průsečíku dvou přímek dáme do rovnosti vyjádření pro x:

$$t_a \cap t_c: a + t \cdot \left(\frac{b+c}{2} - a\right) = c + r \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right) \; /\cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)$$

Můžeme si všimnout, že se v rovnici vyskytují opět dva parametry. Cílem znovu bude jeden z parametrů eliminovat, k tomuto kroku budeme však potřebovat ještě jednu rovnici s těmito neznámými. Opět tedy využijeme vyjádření parametrické rovnice přímky pomocí komplexně sdružených čísel.

$$t_a: \bar{x} = \bar{a} + t \cdot \left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}\right), t \in R$$

$$t_c: \bar{x} = \bar{c} + r \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right), r \in R$$

A pokud tato vyjádření dáme také do rovnosti, dostaneme druhou potřebnou rovnici k možnosti eliminovat jeden z parametrů.

$$a + t \cdot \left(\frac{b+c}{2} - a\right) = c + r \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right) \; /\cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)$$

$$\underline{\bar{a} + t \cdot \left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}\right) = \bar{c} + r \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)} \; /\cdot -\left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

$$a \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) + t \cdot \left(\frac{b+c}{2} - a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) = c\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) + r\left(\frac{a+b}{2} - c\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)$$

$$\underline{-\bar{a}\left(\frac{a+b}{2} - c\right) - t \cdot \left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) = -\bar{c} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right)} - r\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

$$a \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) - \bar{a}\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + t \cdot \left(\frac{b+c}{2} - a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) - t \cdot \left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) =$$
$$= c \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) - \bar{c} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

$$t \cdot \left[\left(\frac{b+c}{2} - a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) - \left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} - \bar{a}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right)\right] =$$
$$= c \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) - \bar{c} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right) - a \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) + \bar{a}\left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

Pro jednodušší vyjádření použijeme vztah 1.1.i (viz podkapitola 1.2).

$$t \cdot \left\{2i \cdot Im\left[\left(\frac{b+c}{2} - a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right]\right\} =$$

$$= 2i \cdot Im\left[c \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right] - 2i \cdot Im\left[a \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right]$$

Vyjádříme neznámou t. Výraz je dále upravován s použitím vztahů z podkapitoly 1.2.

$$t = \frac{2i \cdot \left\{Im\left[c \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right] - Im\left[a \cdot \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right]\right\}}{2i \cdot Im\left[\left(\frac{b+c}{2} - a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)\right]}$$

Vykrátíme $2i$.

$$t = \frac{Im(\frac{c\bar{a} + c\bar{b} - 2c\bar{c}}{2}) - Im(\frac{a\bar{a} + a\bar{b} - 2a\bar{c}}{2})}{Im\left(\frac{\bar{a}b + \bar{b}b + c\bar{a} + \bar{b}c}{4} - \frac{\bar{c}b + \bar{c}c}{2} + \frac{-a\bar{a} - a\bar{b}}{2} + a\bar{c}\right)}$$

Použijeme vzorec 1.1k.

$$t = \frac{Im\left(\frac{c\bar{a} + c\bar{b} - 2c\bar{c} - a\bar{a} - a\bar{b} + 2a\bar{c}}{2}\right)}{Im\left(\frac{\bar{a}b + \bar{b}b + c\bar{a} + \bar{b}c - 2\bar{c}b - 2\bar{c}c - 2a\bar{a} - 2a\bar{b} + 4a\bar{c}}{4}\right)}$$

Rozšíříme 4 a opět použijeme vzorec 1.1k, tentokrát však na rozepsání jednotlivých imaginárních částí.

$$\frac{2 \cdot \left[Im(c\bar{a}) + Im(c\bar{b}) - Im(2c\bar{c}) - Im(a\bar{a}) - Im(a\bar{b}) + Im(2a\bar{c})\right]}{Im(\bar{a}b) + Im(\bar{b}b) + Im(c\bar{a}) + Im(\bar{b}c) - Im(2\bar{c}b) - Im(2\bar{c}c) - Im(2a\bar{a}) - Im(2a\bar{b}) + Im(4a\bar{c})}$$

Použijeme vzorec 1.1j.

$$\frac{2Im(c\bar{a}) + 2Im(c\bar{b}) - 2Im(a\bar{b}) + 4Im(a\bar{c})}{Im(\bar{a}b) + Im(c\bar{a}) + Im(\bar{b}c) - 2Im(\bar{c}b) - 2Im(a\bar{b}) + 4Im(a\bar{c})}$$

Použijeme vzorec 1.1l.

$$\frac{-2Im(a\bar{c}) + 2Im(c\bar{b}) - 2Im(a\bar{b}) + 4Im(a\bar{c})}{-Im(a\bar{b}) - Im(a\bar{c}) + Im(\bar{b}c) + 2Im(\bar{b}c) - 2Im(a\bar{b}) + 4Im(a\bar{c})} =$$

$$= \frac{2Im(c\bar{b}) - 2Im(a\bar{b}) + 2Im(a\bar{c})}{3Im(c\bar{b}) - 3Im(a\bar{b}) + 3Im(a\bar{c})} =$$

$$= \frac{2[Im(c\bar{b}) - Im(a\bar{b}) + Im(a\bar{c})]}{3[Im(c\bar{b}) - Im(a\bar{b}) + Im(a\bar{c})]} = \frac{2}{3}$$

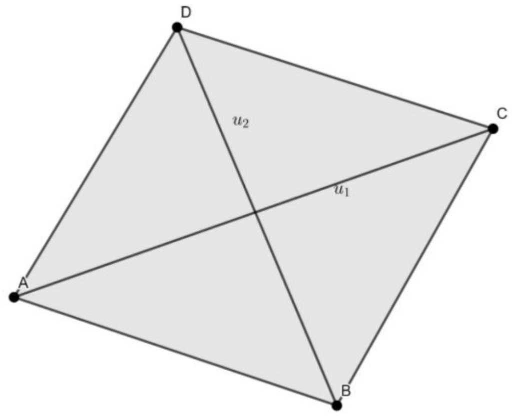
Jelikož nám pro parametr t vyšla hodnota $\frac{2}{3}$, která by se následně mohla dosadit do parametrické rovnice příslušné přímky, je evidentní, že odvození bylo správné a zároveň jsme tak dokázali vlastnost těžnice vzhledem k rozdělení její délky v daném poměru. Hodnota $\frac{2}{3}$ nám vyšla také z toho důvodu, že k zadání parametrické rovnice byl použit bod C a daný směrový vektor (viz Obr.4.2). Tedy po přičtení $\frac{2}{3}$ vektoru $\vec{u}$ z bodu C se posuneme do těžiště trojúhelníku.

4.3.2 Věta o úhlopříčkách rovnoběžníku

Pro libovolný rovnoběžník $ABCD$ s délkou stran, pro něž platí $|AB| = |CD| = a$ a $|BC| = |AD| = b$ a úhlopříčkami o délkách $|AC| = u_1, |BD| = u_2$, platí

$$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

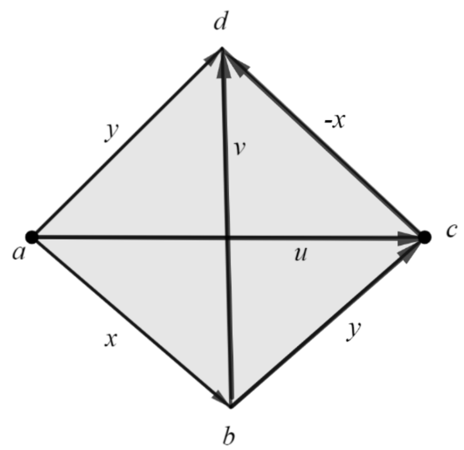
Tento vztah dokážeme.



Obr. 4.3 Rovnoběžník $ABCD$

Důkaz

Tento planimetrická vztah budeme dokazovat s využitím analytické geometrie v Gaussově rovině. V původním rovnoběžníku si určíme jeho vrcholy a vektory.



Obr. 4.4 Rovnoběžník $abcd$

Nyní si vyjádříme jednotlivé úhlopříčky, tedy vektory zadané komplexními čísly u, v.

$$u = x + y, v = -x + y$$

Nyní vyjádříme velikosti obou vektorů, druhé mocniny velikostí a jejich součet.

$$|u| = |x + y|, |v| = |-x + y| \Rightarrow |u|^2 = |x + y|^2, |v|^2 = |-x + y|^2$$

$$|u|^2 + |v|^2 = |y + x|^2 + |y - x|^2$$

Poslední uvedený tvar je vyjádření levé strany dokazovaného výrazu, nyní budeme provádět takové úpravy, abychom získali pravou stranu rovnosti. Můžeme použít vztahy pro kvadráty velikostí komplexních čísel.

$$|x+y|^2 = (x+y)\overline{(x+y)} = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2 + 2Re(x\bar{y})$$

$$|y-x|^2 = (y-x)\overline{(y-x)} = y\bar{y} - y\bar{x} - x\bar{y} + x\bar{x} = |x|^2 + |y|^2 - 2Re(x\bar{y})$$

$$|x+y|^2 + |y-x|^2 = [|x|^2 + |y|^2 + 2Re(x\bar{y})] + [|x|^2 + |y|^2 - 2Re(x\bar{y})] = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

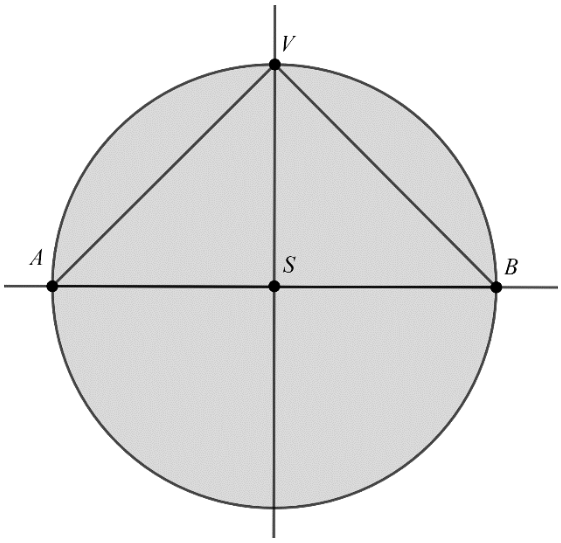
Můžeme říci, že jsme díky tomuto původní vztah dokázali, jelikož vektor x, y představují dané strany původního rovnoběžníku. Vztah tak platí.

4.3.3 Thaletova věta

V libovolné kružnici k jsou všechny obvodové úhly AVB nad jejím průměrem AB pravé ($|\measuredangle AVB| = 90°$).

Důkaz

Uvedu tři možné důkazy Thaletovy věty s tím, že první bude s využitím obrácené Pythagorovy věty, druhý a třetí bude s využitím kolmosti vektorů v Gaussově rovině (viz kapitola 3). V obou důkazech budu pracovat s kružnicí k a vhodně umístěnými body a, v, b (viz Obr. 4.5) tak, že střed kružnice k bude umístěn v bodu $s = (0,0)$. Dále body a, b budou ležet na průsečících kružnice a reálné osy, jedná se o body $a = (-r, 0), b = (r, 0)$ a bod $v = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$.



Obr. 4.5 Thaletova kružnice

1. varianta důkazu (obrácená Pythagorova věta)

Zavedeme si vektory x, y, kde $x = v - b, y = v - a$. Souřadnice těchto vektorů tedy jsou $x = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) - (r, 0) = (r(\cos\varphi - 1), r \cdot \sin\varphi)$,
$y = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) - (-r, 0) = (r(\cos\varphi + 1), r \cdot \sin\varphi)$. Dále můžeme psát velikost těchto vektorů $|x|^2 = r^2(\cos\varphi - 1)^2 + r^2 \cdot (\sin\varphi)^2$, $|y|^2 = r^2(\cos\varphi + 1)^2 + r^2 \cdot (\sin\varphi)^2$. Nyní velikosti sečteme a následně upravíme:

$$|x|^2 + |y|^2 = r^2(\cos\varphi - 1)^2 + r^2 \cdot (\sin\varphi)^2 + r^2(\cos\varphi + 1)^2 + r^2 \cdot (\sin\varphi)^2 =$$

$= 2r^2(\cos\varphi)^2 + 2r^2 + 2r^2 \cdot (\sin\varphi)^2 = 4r^2$. Stejnou velikost má také vektor $c = b - a$, tedy $c = (r, 0) - (-r, 0) = (2r, 0) \Rightarrow |c| = \sqrt{(2r)^2 + 0^2} \Rightarrow |c|^2 = (2r)^2$. Z odvozené rovnosti $|x|^2 + |y|^2 = |c|^2$ podle převrácené Pythagorovy věty platí, že trojúhelník AVB (pro každé V) je pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu V.

2. varianta důkazu (kolmost vektorů)

Vrcholy trojúhelníku AVB jsou v Gaussově rovině body $a = (-r, 0), b = (r, 0)$, $v = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$. Zavedeme si vektory x, y, kde $x = v - a, y = v - b$. Souřadnice těchto vektorů jsou $x = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) - (r, 0) = (r(\cos\varphi - 1), r \cdot \sin\varphi)$, $y = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) - (-r, 0) = (r(\cos\varphi + 1), r \cdot \sin\varphi)$. Nyní použijeme podmínku pro kolmost dvou vektorů v Gaussově rovině, tedy upravíme výraz $x\bar{y} + \bar{x}y$, a pokud bude roven 0 platí, že vektory jsou kolmé. Použijeme rovnost 1.1h $x\bar{y} + \bar{x}y = 2Re(x\bar{y})$, vyjádříme si tedy součin $x\bar{y}$.

$$x\bar{y} = (r(\cos\varphi - 1), r \cdot \sin\varphi)(r(\cos\varphi + 1), -r \cdot \sin\varphi)$$

Pro reálnou část uvedeného součinu platí:

$$r^2(\cos\varphi + 1)(\cos\varphi - 1) + r^2 \cdot (\sin\varphi)^2 = r^2((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 - 1) = 0$$

Jelikož daný vztah vyšel roven 0 jsou vektory x, y kolmé, a tedy u vrcholu V je pravý úhel, což dokazuje tvrzení Thaletovy věty.

3. varianta důkazu (kolmost vektorů)

Máme kružnici k, kterou lze určit rovnicí $(x - s)(\bar{x} - \bar{s}) = r^2$, přičemž tato kružnice má střed v bodě $s = (0,0)$ tedy kružnice k je určena rovnicí $x\bar{x} = r^2$. Kružnici k náleží body $a = (-r, 0) = \bar{a}, b = (r, 0) = \bar{b}$. Opět použijeme vztah pro kolmost vektorů.

$$\begin{aligned}&(x - a)(\bar{x} - \bar{b}) + (\bar{x} - \bar{a})(x - b) = x\bar{x} - x\bar{b} - \bar{x}a + a\bar{b} + x\bar{x} - x\bar{a} - \bar{x}b + \bar{a}b = \\ &= 2x\bar{x} + 2ab - x(a + b) - \bar{x}(a + b) = 2x\bar{x} + 2ab - (x + \bar{x})(a + b)\end{aligned}$$

Uvědomíme si, že body a, b můžeme ztotožnit s reálnými čísly $a = -r, b = r$.

$$2x\bar{x} + 2ab - (x + \bar{x})(a + b) = 2r^2 - 2r^2 - (x + \bar{x}) \cdot 0 = 0$$

A takto jsme opět dokázali platnost Thaletovy věty, jelikož dané vektory jsou na sebe kolmé.

Závěr

V první řadě si v návaznosti na úvod zodpovíme kladené otázky, které jsem si ohledně tohoto tématu zadala v prvním vytyčeném cíli. Jsou komplexní čísla v analytické geometrii pro výpočet výhodnější, než čísla reálná? A je tomu tak vždy? V jakých případech nám mohou komplexní čísla urychlit postup výpočtu a v jakých případech nám rychlost postupu nezmění? Z uvedených příkladů v praktické části a k nim připojených porovnání, můžeme říci, že využití komplexních čísel výpočet urychlit může, pokud používáme jejich specifické vlastnosti (použití vzorců z podkapitoly 1.1). Pokud by se tyto vztahy pro úpravu konečného výrazu nepoužili, dá se říci, že v tom případě by výpočet s použitím komplexních čísel byl složitější. Dalším z mých cílů bylo využití obou těchto témat při odvozování a dokazování zadaných problémů. Obě tyto vize byly splněny v praktické části, kde je každé z nich věnována samostatná podkapitola – vyjádření průsečíku dvou různoběžných přímek a důkazy geometrických vět. K části věnované vyjadřování výsledku v určitém tvaru jsem vždy přiřadila ukázkové příklady, které sloužily jako další podklad pro vyhodnocení cíle prvního. V poslední podkapitole praktické části jsem záměrně uváděla důkazy z planimetrie, které jsem řešila pomocí nástrojů jako jsou komplexní čísla a analytická geometrie, z důvodu ukázky jiného řešení a pohledu na tyto typy vět a jejich možné dokazování. U všech úloh z této části jsem využila jako podklad poznatky z teoretické části. Věty – o úhlopříčkách rovnoběžníku a Thaletova, by mohly být určitě zakomponovány do výuky na střední škole, jako propojení těchto tří témat – planimetrie, komplexní čísla a analytická geometrie.

V první kapitole jsem se zaměřila na zavedení základních informací o komplexních číslech. V jednotlivých částech se zaměřuji na samotnou definici komplexního čísla, následně algebraický tvar komplexního čísla a číslo komplexně sdružené. V této podkapitole jsou také uvedeny vztahy s důkazy, které jsou následně využívány v dalších částech práce. Aby bylo témata možné propojit, bylo nezbytné uvést také grafické znázornění komplexního čísla. Poslední část první kapitoly je věnována jejich goniometrickému tvaru a jeho platnosti pro všechny kvadranty Gaussovy roviny. Druhá kapitola uvedená v teoretické části se nazývá Analytická geometrie roviny. Jsou zde zavedeny souřadnice bodu, se kterými je úzce spjat souřadnicový systém, dále vzdálenost bodů a orientovaná úsečka. Na tyto zmíněná témata navazují vektory a dále je kapitola rozšířena o přímku v rovině a kružnici. Ve zmiňované kapitole je velké množství obrázků pro lepší názornost. Poslední kapitola teoretické části je věnována propojení obou předešlých témat. Tato část nazvaná Geometrické útvary v rovině a Gaussově rovině je koncipovaná už lehce do takové podoby, aby čtenář viděl rozdíly ve vyjádření stejného geometrického útvaru ve dvou různých rovinách. Při zadávání údajů ke každému útvaru jsem přistupovala tak, aby výchozí informace byly stejné a pomocí vyjadřování v dané číselné množině se dostanu ke konečnému tvaru pro daný geometrický útvar. Přičemž u reálných čísel odkazuji na předešlou kapitolu Analytická geometrie v rovině a zde uvádím výsledné tvary pro tuto množinu čísel. Jelikož se jedná stále o část teoretickou, neuvádím zde žádná porovnání výsledků.

Celá čtvrtá kapitola je věnována praktické části. První část – příklady, přímo navazuje na třetí kapitolu a jsou zde uvedeny dvě úlohy k určení rovnice přímky a souřadnic těžiště, přičemž u příkladu s těžištěm uvádím 3 možné způsoby řešení. Druhá část – vyjádření průsečíku dvou různoběžek, byla zakomponována jako jeden z dalších podkladů pro zodpovězení mých otázek v tomto tématu. U jednotlivých výsledných vyjádření se nachází porovnání, zda se ve výrazech nachází případná analogie, či nikoliv a ukázkové příklady pro určení, zda je využití komplexních čísel výhodnější. V poslední části – Důkazy geometrických vět, kde je zakomponována myšlenka využití obou těchto témat. Všechny tři důkazy se opírají o teoretickou část. U každého důkazu je také uveden obrázek, pro lepší představu o jednotlivých označeních v řešeném problému.

Práce by bylo možné dále rozšířit o téma odchylky přímek a vzdálenost vybraných geometrických útvarů. Také by bylo možné přidat téma kuželoseček.

Bibliografie

[1] CHARVÁT, J. *Analytická geometrie pro střední školy: lineární útvary v rovině.* První vydání. František Janeček. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1995. ISBN 80-7015-504-3.

[2] CHEN,H. *Geometry in the complex plane*. UNC Awards Banquet, 2016. Dostupné z: https://uncmathcontest.files.wordpress.com/2016/04/complexbash.pdf

[3] KOČANDRLE, M. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. První vydání. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-120-5.

[4] MACHAIN, R. *Planimetrie s využitím komplexních souřadnic* [online]. Brno, 2010 [cit. 2023-03-11]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/g09wt/0diplomka.pdf. Diplomová práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity. Vedoucí práce Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

[5] POLÁK,J. *Důkazy v planimetrii užitím komplexních čísel*. Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni,2021. Dostupné z: https://mfi.upol.cz/files/30/3004/mfi_3004_241_251.pdf

[6] ŠILAROVÁ, L. *Komplexní čísla ve výuce matematiky na střední škole s využitím internetu* [online]. Praha, 2006 [cit. 2023-04-22]. Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/silarova/index.html. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Jarmila Robová, CSc.