UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matematický pohled na různá hudební ladění a jejich vývoj

Vedoucí diplomové práce:
Tomáš Fürst
Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:
Martina Klápová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení Tomáše Fürsta a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 7. prosince 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce Tomáši Fürstovi za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém TEX, kterým je práce vysázena.

Obsah

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá detailnějším rozborem vztahu matematiky a hudby. Přestože pro mnoho lidí tyto dva obory spolu vůbec nesouvisejí, ve skutečnosti mají mnoho společného. Práce je zaměřená zejména na různé typy ladění v hudbě.

Diplomová práce má tři základní cíle. Prvním je pochopit a matematicky popsat několik základních druhů ladění, která se nejvíce používala nebo stále používají. Ukáže matematický popis těchto ladění, tedy způsob, jakým jsou určovány poměry frekvencí intervalů, čímž se právě jednotlivé typy ladění zejména liší. Zaměřena je pak zejména na ladění pythagorejské, které patří do skupiny tzv. přirozených ladění, a rovnoměrně temperované, které se nejčastěji používá v současnosti.

Dalším cílem je naučit se vytvářet tóny v softwaru MATLAB. Tyto znalosti pak využít ke konstrukci tónů a souzvuků, aby si čtenář mohl některé zákonitosti a tvrzení uvedená v této práci ověřit, dále pak využít algoritmus diskrétní Fourierovy transformace k zjišťování frekvenčního spektra zvuků. Dále bylo vytvořeno několik testovacích souzvuků, které pak byly použity na výzkum rozdílu mezi pythagorejským a rovnoměrně temperovaným laděním.

Právě tento výzkum je posledním cílem diplomové práce. Dle teoretických předpokladů by pythagorejské ladění mělo znít lidskému uchu čistěji, tedy konsonantněji, než ladění rovnoměrně temperované. Vytvořené souzvuky měly frekvence vypočítané dle těchto dvou typů ladění, tyto testovací souzvuky pak byly puštěny skupině hudebníků a nehudebníků a na základě jejich poslechu a odpovědí na jednoduchý dotazník bylo cílem zjistit, zda lze slyšet rozdíl mezi těmito laděními a zejména které zní lépe, tedy jestli platí teoretické předpoklady. Jinými slovy otestovat hypotézu, že rozdíl mezi laděními je slyšitelný a zjistit, zda souzvuk s frekvencemi dle pythagorejského ladění zní libozvučněji.

2 MATEMATIKA A HUDBA

V této kapitole je uvedeno několik příkladů, kde lze v hudbě nalézt matematiku, jak lze popisovat hudbu pomocí matematiky, jak je hudba s matematikou propojena.

2.1 Notový zápis

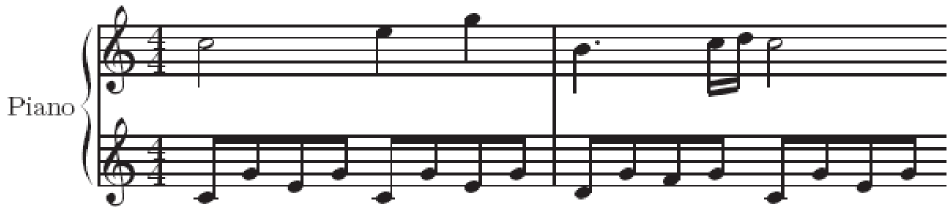
Nejvýraznější souvislost matematiky a hudby můžeme spatřit již v samotných notových zápisech. Malá čísla napsaná pod sebou na začátku notové osnovy nám udávají, jestli je takt čtyřčtvrťový - 4:4, tříčtvrťový - 3:4, šestiosminový 6:8, apod. A také doby – celé noty, půlové, čtvrťové, osminové, šestnáctinové. Je to podobné zlomkům. Několik not různé délky tvoří jednu dobu a několik dob jeden takt, tak jako několik různých zlomků tvoří jeden celek. Noty různé délky se při daném rytmu musí umístit do konkrétního taktu. To připomíná hledání společného jmenovatele v matematice. Ačkoliv se nám to nezdá, skladatel se při komponování musí držet přísné struktury notového zápisu. Tak se každý skladatel na chvíli stává matematikem.

Dnes existují různé softwary umožňující sazbu not a notových osnov. Jedním z nich je sazečský systém TEX s balíkem maker MusixTex , který umožňuje sazbu not a který vytvořil Daniel Taupin z Universitè de Paris Sud à Orsay. Tento způsob sazby má určitě dost nevýhod, například to, že je poměrně pracný, ale má také hodně výhod oproti jiným grafickým editorům. Kupříkladu lze pomocí TEXu vysázet opravdu cokoliv kamkoliv a výsledek vypadá lépe než u ostatních softwarů pro psaní a editaci not (například MIDIcomp, NoteWorthy, MusicEase, apod.) [10].

Nyní si ukážeme, jak takové kódování notových osnov vypadá. Vezmeme si například první dva takty sonáty od W. A. Mozarta KV-545 (C dur). Na **Obrázku 1** vidíme, jak vypadá daná notová osnova po vysázení v TEXu. A zde je zdrojový kód:

```
\begin{music}
\intrumentnumber{1}  % určuje počet nástrojů
\setname1{Piano}  % název nástroje
\setstaffs1{2}  % počet
\generalmeter{\meterfrac44}  % čtyřčtvrťový takt
```

Obr. 1: **První dva takty sonáty KV-545**




```
\startextract  % začátek zápisu samotných not
\notes \ibu0f0 \qb0{cge} \tbu0 \qb0g | \hl j \n
\notes \ibu0f0 \qb0{cge} \tbu0 \qb0g | \ql l \sk \ql n \en
\bar  % začátek dalšího taktu
\notes \ibu0f0 \qb0{dgf}|\glp i \en
\notes \tbu0 \qb0g \ibbl1j3 \qb1j \tbl1 \qb1k \en
\notes \ibu0f0 \qbo{cge} \tbu0 \qb0g |\hl j \n
\zendextract
\end{music}
```

Kde jednotlivé příkazy pro zápis not znamenají následující:

`\ibu0f0` značí začátek praporku, který je umístěn na úrovni noty F a má sklon 0 (je vodorovný)

`\tbu0` oznamuje ukončení praporku po druhé notě G

`qbo{cge}` označuje příslušnost čtvrťových not C, G a E k praporku

`\qb0g` označuje příslušnost druhé noty G k praporku

`\qlp` je čtvrťová nota s tečkou

`\sk` zarovnává druhou část not pro pravou ruku v prvním taktu pod noty pro levou ruku

`\ibbl1j3` začíná dvojitý praporek na úrovni noty C se sklonem 15%

`\hl` resp. `\ql` značí půlovou resp. čtvrťovou notu s nožičkou dolů

Písmena „j“, „l“ či „n“ označují tóny nad H1, tedy „j“ značí C2, „k“ je E2 a „n“ znamená

G2.

Znak | odděluje v daném taktu notový zápis pro pravou a levou ruku.

2.2 Fibonacciho čísla a zlatý řez

Dále můžeme vidět souvislost matematiky a hudby v tzv. zlatém řezu, o kterém je známo, že se využíval a využívá zejména ve výtvarném umění. Lze ho nalézt ale i v hudbě. Stejně jako Fibonacciho čísla, která se zlatým řezem souvisí.

Někteří skladatelé používali při skládání Fibonacciho čísla nebo zlatý řez. Fibonacciho čísla tvoří nekonečnou posloupnost přirozených čísel, pro která platí, že jsou součtem dvou předchozích. Řada vypadá takto: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ Pokud zvolíme místo prvních dvou členů posloupnosti 1 a 3, dostaneme $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...$, což jsou tzv. Lucasova čísla.

Jako zlatý řez (latinsky sectio aurea) se označuje poměr o hodnotě přibližně 1,618. Zlatý řez vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části. Hodnota tohoto poměru je rovna iracionálnímu číslu

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749894848...$$

a platí, že poměr dvou sousedních Fibonacciho čísel, se blíží poměru zlatého řezu tím více, čím jsou čísla vyšší.

Důkaz: Předpokládejme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = x$$

kde a_n a a_{n-1} jsou sousední Fibonacciho čísla. Dokažme, že $x = \varphi$. Nejprve rekurentní vztah Fibonacciho čísel $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ upravíme tak, že ho vydělíme členem a_n. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

A jelikož pro $n \to \infty$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, můžeme dosadit do rovnice $x = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a $\frac{1}{x} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Tím získáme rovnici ve tvaru

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

a spočítáme kořeny

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Druhý kořen nemá smysl, jelikož všechna čísla Fibonacciho posloupnosti jsou kladná a $x_2 < 0$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

[13]

Tento poměr se hodně využíval, ale i stále využívá, zejména ve výtvarném umění, v architektuře apod.

Již nejméně od renesance využívají zlatý řez umělci ve svých dílech, zejména ve formě tzv. zlatého obdélníku, ve kterém se zlatý řez vyskytuje jako poměr stran. Zlatý řez prý totiž působí esteticky příznivým dojmem. Poměr zlatého řezu můžeme také pozorovat v přírodě. Ale i v hudbě lze Fibonacciho čísla i poměr zlatého řezu nalézt. Už od 17. století se tvorba nástrojů inspiruje zlatým řezem. Stradivari se při konstrukci houslí a umístění *f*-otvorů řídil tímto poměrem. Proto jeho housle mají tak výjimečný zvuk. I jiné smyčcové nástroje jsou konstruovány tak, že poměr délky těla nástroje a krku odpovídá zlatému řezu. Analýzou skladeb W. A. Mozarta bylo zjištěno, že délka skoro všech jeho skladeb je rozdělena na dvě části, přesně podle zlatého řezu [4].

Systematické uspořádání skladeb ve smyslu časových úseků i pomocí Fibonacciho nebo Lucasových čísel je celkem běžnou praxí. Fibonacciho i Lucasova čísla můžeme najít například v první skladbě z cyklu Umění fugy (Die Kunst der Fuge) od J. S. Bacha. Celkový počet vstupů je 11, což je Lucasovo číslo. Z těchto 11 vstupů začínají dva tónem E a ty určují formu skladby. První z nich, vstup číslo 8, začíná s 40. taktem z celkových 78, takže je to začátek druhé poloviny skladby, druhý vstup (číslo 9) začíná v taktu 49, čímž rozděluje skladbu na 48 a 30 taktů neboli 8/13 a 5/13 (celkem se skladba skládá ze 78 taktů, což je součin $13 \cdot 6$). Takovéto souvislosti s Fibonacciho a Lucasovými čísly lze najít i ve skladbách dalších autorů [12]. Ovšem pravděpodobně nebylo zjištěno, zda tito autoři využívali tato čísla záměrně doufajíc, že stejně jako ve výtvarném umění bude zlatý řez a s ním související Fibonacciho a Lucasova čísla znít „estetičtěji“, nebo zda tato čísla používali zcela náhodně a třeba se jim pouze podvědomě více líbila.

3 HARMONIE A POMĚRY FREKVENCÍ TÓNŮ

Nejprve vysvětleme, co je tón a co je zvuk. Zvuk je každé mechanické vlnění, které je schopné vyvolat v lidském uchu sluchový vjem. Tón je z fyzikálního hlediska zvuk, který je charakterizován pravidelným kmitáním (na rozdíl od hluku) [9].

Pokud zní více tónů současně, jedná se o souzvuk. Jestliže souzvuk zní příjemně, říkáme, že je konsonantní, naopak, pokud nezní příjemně, je disonantní. Míru harmonie lze také určitým způsobem spočítat. Existuje vztah mezi konsonancí a disonancí a poměry frekvencí tónů v souzvuku.

Frekvence je veličina, která udává počet cyklů periodického děje za časovou jednotku. Základní jednotkou je 1 Hz, což je jeden cyklus za vteřinu. U zvuků frekvence souvisí s výškou tónu, pro teorii ladění je to tedy zásadní veličina. Frekvence přímo udává výšku pouze u periodických zvuků, zatímco u neperiodických zvuků je souvislost frekvence a výšky složitější.

Když zní tón např. na strunovém nebo dechovém nástroji s určitou frekvencí v, je v zásadě periodický a má tuto frekvenci. Fourierova teorie říká, že tento zvuk může být rozložen na součet sinových vln s různými periodami, jejichž frekvence jsou celočíselnými násobky frekvence v. Člen tohoto součtu s frekvencí $m \cdot v$ se nazývá m-tá harmonická nebo $(m-1)$-tý alikvotní tón (podtón). Takže například při $m = 3$ máme 3. harmonickou nebo 2. alikvotní tón.

Alikvotní tóny jsou vedlejší vyšší tóny, které při chvění struny nebo vzduchového sloupce znějí současně s hlavním tónem – ovšem podstatně slaběji. Většinou je ani nevnímáme, ale pro barvu tónu mají velký význam [1].

V ukázce *0_10_100_alikvot.wav* lze slyšet 3 po sobě jdoucí tóny, které mají stejnou frekvenci, ale liší se počtem alikvotních tónů. První tón je jednoduchý, tedy nemá žádné alikvóty, druhý jich má 10 a třetí 100.

Na **Obrázku 2** lze vidět křivku tónu bez alikvót, tedy jednoduchou sinusoidu. Křivka odpovídá tónu, který je v MATLABu zadán takto:

```
f=330;
t=0:1/44100:0.01;
```

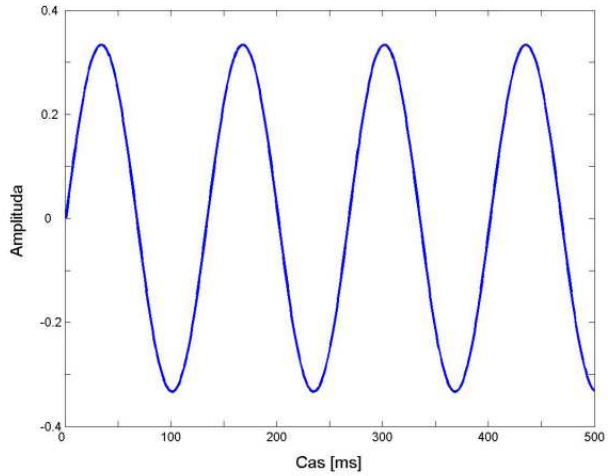
```
PK = sin(2*pi*f*t);
mm = max(PK);
PK = PK/(3*mm);
```

Hodnoty amplitudy jsou znormovány (vyděleno trojnásobkem maximální amplitudy), tedy maximální amplituda je $\frac{1}{3} \approx 0,333333$. Frekvence f je zde rovna 330 Hz a perioda je $T = \frac{1}{330} \approx 0,0030303$ s. Zatímco na **Obrázku 3** je křivka tónu, kde společně se základním tónem zní ještě 9 alikvotních. Ten byl vytvořen pomocí MATALBU užitím níže uvedených příkazů. Tento tón je jedním z tónů, které byly použity při vytváření testovacích souzvuků pro výzkum, který je součástí této práce. Zde hodnoty amplitud alikvotních tónů postupně exponenciálně klesají. Ovšem amplituda celkového složeného tónu je opět $\frac{1}{3}$.

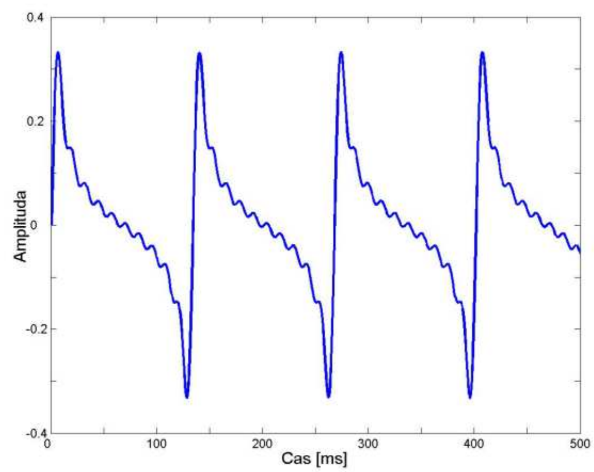
```
f=330;
t=0:1/44100:0.01;
PK = 0*t;
for i=1:1:10
    PK = PK + exp(-0.2*i)*sin(2*pi*f*i*t);
end
mm = max(PK);

PK = PK/(3*mm);
```

Nyní se zabývejme otázkou, proč dva tóny vzdálené o oktávy znějí spolu konsonantně, zatímco dva tóny vzdálené o něco více nebo o něco méně než o oktávu disonantně. Jako příklad vezmeme komorní A, jemuž se přiřazuje frekvence 440 Hz [5]. Tón A o oktávu níž má 220 Hz. Jak bylo zmíněno výše, současně s tónem o frekvenci 440 Hz znějí alikvotní tóny, jejichž frekvence jsou násobky základní frekvence. Pro 440 Hz dostaneme tedy frekvence 440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz,… a pro 220 Hz: 220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz,… Pokud bychom frekvenci jednoho tónu trochu změnili, řekněme například, že zahrajeme tóny o frekvencích 445 Hz a 220 Hz, dostaneme tyto násobky: 445 Hz, 890 Hz, 1390 Hz, 1780 Hz,… a 220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz,… Přítomnost komponent 445 Hz a 440 Hz, 890 Hz a 880 Hz atd. způsobí kostrbatý vjem, které ucho

Obr. 2: **Jednoduchý tón**



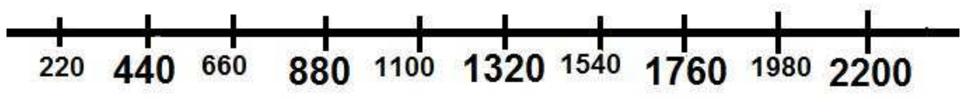
Obr. 3: **Složený tón**



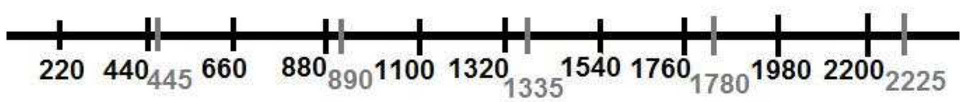
reprezentuje jako disonanci. Díky extrémní konsonanci oktávy, lidský mozek vnímá dva tóny vzdálené o oktávu téměř jako totožné.

Na **Obrázku 4** můžeme vidět frekvenci 220 Hz a její celočíselné násobky a dále 440 Hz a její násobky. Je vidět, že mají mnoho společných násobků (čísla velkým písmem). Zatímco na **Obrázku 5** jsou znázorněny frekvence 220 Hz (černá čísla) a 445 Hz (šedá čísla) a jejich celočíselné násobky, tedy frekvence jejich alikvotních tónů. Tady vidíme, že nemají žádné společné násobky (alespoň do frekvence 2225 Hz).

Obr. 4: **Násobky frekvencí 220 Hz a 440 Hz**



Obr. 5: **Násobky frekvencí 220 Hz a 445 Hz**



Kostrbatý vjem, který vzniká u souzvuku tónů s frekvencemi 220 a 445 Hz lze vysvětlit tímto způsobem. Pokud tvoříme dvouzvuk, sčítáme vlastně dvě sinusoidy. Tedy máme-li tón o frekvenci a a tón o frekvenci b, souzvuk lze napsat jako $\sin a + \sin b$, což můžeme vyjádřit takto:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{b-a}{2}$$

Takže pokud vezmeme souzvuky s frekvencemi jako v předchozím příkladě, tedy s frekvencemi 220 Hz – 440 Hz a 220 Hz – 445 Hz, dle **Obrázků 4 a 5** vidíme, že frekvence vyššího tónu v prvním souzvuku je totožná s frekvencí 2. alikvotního tónu náležícího k tónu nižšího. Dostáváme tedy

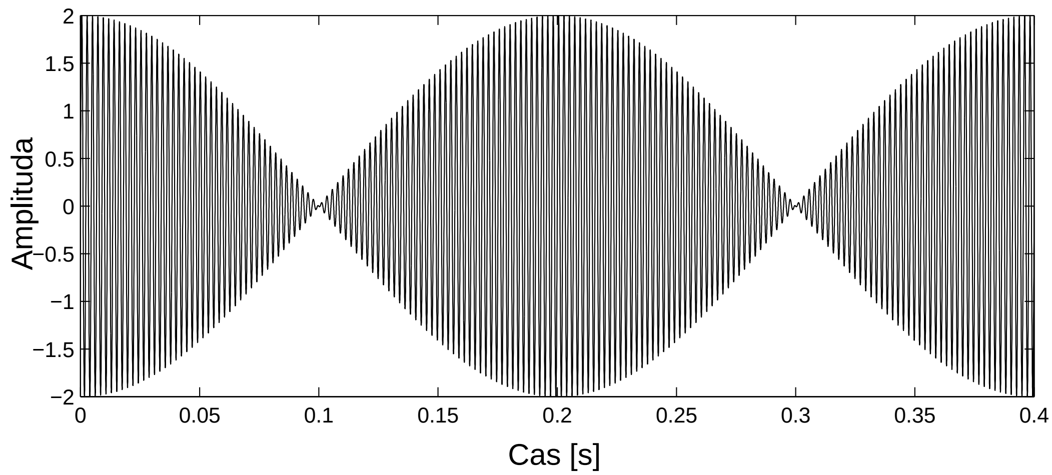
$$\sin(2\pi 440t) + \sin(2\pi 440t) = 2 \sin(2\pi 440t) \cos 0 = 2 \sin(2\pi 440t)$$

a tyto dva tóny tedy tvoří jednoduchou sinusoidu (podobně jako na **Obrázku 2**), ale pro souzvuk s frekvencemi 220 Hz a 445 Hz máme

$$\sin(2\pi 440t) + \sin(2\pi 445t) = 2 \sin(2\pi 442,5t) \cos(2\pi 2,5t)$$

V tomto případě zde tedy vznikne složitější kmitání. Toto kmitání si můžeme prohlédnou na **Obrázku 6**. Sinusová funkce má frekvenci 442,5 Hz a kosinová 2,5 Hz. Zatímco uvedený sinus má periodu přibližně 0,00226 s, kosinus s frekvencí 2,5 Hz kmitá mnohem pomaleji, a to s periodou 0,4 s. Onen kostrbatý vjem je způsoben právě tím, že tón s vnímanou výškou 442,5 Hz se s touto periodou (0,4 s) zesiluje a zeslabuje.

Obr. 6: **Křivka kmitání souzvuku dvou tónů v mírně rozladěné oktávě**



V ukázce *rozladena oktava.wav* jsou dva tóny vzdálené o oktávu, které odpovídají popisu v předešlých odstavcích (a **Obrázkům 4 a 5**), kde první z nich je čistá, tedy základní tóny mají frekvenci 220 a 440 Hz a spolu s nimi znějí odpovídající alikvotní tóny. Druhá oktáva je posunutá, tóny mají frekvence 220 a 445 Hz a opět spolu s nimi znějí odpovídající alikvóty stejně, jako je popsáno výše, a měla by být znát mírná disonance. Zatímco v ukázce *rozladene alikvoty.wav* jsou u druhého souzvuku posunuté alikvóty tak, že základní frekvence jsou 220 a 440 Hz, ale alikvotní tóny mají frekvence, které jsou násobky 220 a 445 Hz, a dle předpokladů by tyto tóny měly společně znít disonantně. A nakonec, v ukázce *ciste alikvoty.wav* zní opět nejprve čistá oktáva s čistými alikvótami a po ní tóny s frekvencemi 220 a 445 Hz, ale s čistými alikvótami, tedy odpovídajícími frekvencím 220 a 440 Hz, které, jak již bylo řečeno, mají mnoho společných násobků, proto by tento souzvuk měl znít také konsonantně, téměř stejně jako souzvuk znějící před ním.

Interval čisté kvinty odpovídá poměru frekvencí 3:2. Pokud hrajeme zároveň dva tóny, jejichž frekvence jsou v poměru 3:2, potom třetí alikvotní tón nižšího tónu se shoduje s druhým podtónem vyššího tónu. Označme x frekvenci vyššího tónu a y frekvenci nižšího tónu. Potom $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ a $2x = 3y$. Tedy dvojnásobek frekvence vyššího tónu se rovná trojnásobku frekvence nižšího tónu a tyto násobky jsou alikvotními tóny. Tóny budou mít i další společné podtóny a vyšších frekvencích a budou to společné násobky základních frekvencí. A stejně jako u oktávy, pokud poměr frekvencí nebude úplně přesně 3:2, budeme vnímat tento souzvuk jako disonantní.

Z těchto poznatků vyplývá, že takové poměry frekvencí, které jsou tvořeny malými čísly, zní konsonantněji. To z toho důvodu, že tyto frekvence mají více společných násobků, tj. mají více společných podtónů.

Z toho lze také odvodit, proč zrovna intervaly jako oktáva, kvinta atd. znějí lidskému uchu nejkonsonantněji. Člověk totiž jako libozvučné chápe ty intervaly, na které je nejvíce zvyklý, tedy intervaly několika prvních alikvotních složek. Těmito intervaly jsou oktáva, kvinta, dále velká a malá tercie, kvarta. Navíc platí, že když slyšíme dva tóny vzdálené o oktávu, zní to jakoby tyto tóny splývaly. Méně splývají tóny v kvintě, ještě méně v velké tercii atd. [6].

Pro lepší představu, proč platí tvrzení v předešlém odstavci, je zde uvedena **Tabulka 1**. V ní jsou vypočteny frekvence tónů ve dvou po sobě jdoucích oktávách. Alikvóty mají frekvence, které jsou násobky základního tónu. Použili jsme frekvence didymického ladění (viz kapitola 4.2 Přirozená ladění), které má ze všech dále uvedených ladění frekvence vyjádřené nejmenšími čísly. Za základní tón jsme zvolili tón C1 a přiřadili jsme mu frekvenci 1. Pokud hledáme celočíselné násobky základní frekvence (tedy frekvence alikvotních tónů), vidíme, že se nacházejí ve vzdálenosti jedné oktávy od základního tónu, další je o kvintu výše a následující je o velkou tercii výš nad předešlým alikvotním tónem (tedy v posledním sloupci tabulky hledáme jednoduše celá čísla). Proto právě tyto intervaly zní lidskému uchu nejkonsonantněji. Vyskytují se mezi alikvotními tóny nejčastěji.

Tabulka 1: **Výpočty frekvencí alikvót**

Krok	**Tón**	**Výpočet**	**Frekvence**
1.	C1	1 : 1	**1**
2.	D1	9 : 8	1,125
3.	E1	5 : 4	1,25
4.	F1	4 : 3	1,333
5.	G1	3 : 2	1,5
6.	A1	5 : 3	1,667
7.	H1	15 : 8	1,875
8.	C2	2 : 1	**2**
9.	D2	18 : 8	2,25
10.	E2	10 : 4	2,5
11.	F2	8 : 3	2,667
12.	G2	6 : 2	**3**
13.	A2	10 : 3	3,333
14.	H2	30 : 8	3,75
15.	C3	4 : 1	**4**

4 LADĚNÍ

Ladění stanovuje přesné vzdálenosti jednotlivých tónů v hudební stupnici a tím určuje frekvence jednotlivých tónů a poměry mezi nimi. V následujících kapitolách popíšeme několik nejznámějších typů ladění, která se v průběhu hudební historie používala.

Tón má čtyři základní vlastnosti. Hlasitost, délku, barvu, výšku, která je podstatou ladění. Pokud jde o výšku tónu, lze rozlišit výšku absolutní a relativní. Absolutní výška souvisí zejména s frekvencí základního tónu (frekvence alikvotních tónů na výšku vliv nemají) udaná například v jednotkách Hz, relativní udává poměr frekvencí dvou tónu, tj. poměr tónů v určitém intervalu [9].

4.1 Přepočet na vzdálenosti tónů v centech

Nyní vysvětlíme systém centů pro měření poměrů frekvencí, který poprvé představil Alexandr Ellis kolem roku 1875 [1].

V hudbě se přidávání intervalů vyznačuje násobením poměrů frekvencí. Takže například, když vezmeme interval čisté kvinty s poměrem frekvencí 3:2 a chceme spočítat frekvenci kvinty a oktávu výš, dostaneme $(3 : 2) \cdot (2 : 1) = 6 : 2$ atd. Jinými slovy naše chápání vzdálenosti v hudbě mezi dvěma tóny je logaritmické a používají se geometrické posloupnosti, nikoliv aritmetické.

Abychom přepočetli poměr frekvencí r na počet centů n, použijeme vztah:

$$n = 1200 \log_2(r) = \frac{1200 \ln(r)}{\ln(2)}$$

Naopak poměr frekvencí r, pokud známe počet centů (n), získáme následovně [1]:

$$r = 2^{(n/1200)}$$

Výpočtem vzdálenosti dvou tónů z relativní frekvence těchto tónů na centy pomocí logaritmů získáme aritmetickou posloupnost a v centech se frekvence klasicky sčítají. V dnešním rovnoměrně temperovaném ladění (Kapitola 4.3.2 Rovnoměrně temperovaná ladění), které je založeno na tom, že vzdálenost mezi všemi půltóny je stejná, je vzdálenost mezi dvěma celými tóny 200 centů a mezi půltóny 100 centů. Tedy oktáva, která je tvořena 12 půltóny, má velikost 1200 centů. A opravdu jde o klasické sčítání neboli aritmetickou posloupnost. Pro přechod mezi sčítáním a násobením slouží právě logaritmy.

Vezmeme-li jako příklad kvintu, která má v pythagorejském ladění frekvenci 3:2 a v 12-tónové stupnici se skládá ze 7 půltónů, pak vzdálenost dvou tónů v centech, mezi nimiž je právě interval kvinty, vypočteme jako

$$1200 \cdot \log_2 (3:2) \approx 701,955 \text{ centů}$$

a naopak, pokud bychom věděli, že dva tóny jsou vzdálené o přibližně 701,955 centů, jejich poměr frekvencí bychom zjistili takto

$$2^{701,955/1200} \approx 1,5$$

4.2 Přirozená ladění

Jako přirozená neboli čistá ladění se označují taková ladění využívající pouze tóny, jejichž frekvence jsou ve vzájemných poměrech vyjádřitelných celými čísly.

V případě použití čistých laděních mají intervaly přirozenou velikost, danou poměrem celých čísel. Tato ladění mají ale i své nevýhody, které fakticky znemožňují jejich použití v běžné současné evropské hudbě. Při použití omezeného počtu tónů se v systému ladění objevují nečisté, nelibozvučné intervaly. Přesné frekvence jednotlivých tónů se navíc v různých stupnicích u čistých ladění liší. Při přechodu do jiné tóniny znějí proto některé intervaly rozladěně, čistá ladění jsou tedy pro složitější hudbu, využívající modulací, prakticky nevyužitelná (dokázáno výpočtem na konci kapitoly 4.2.1 Pythagorejské ladění). V čistých laděních také není možná enharmonická záměna většiny tónů (například Cis není Des, tedy pokud půjdeme z C o půltón nahoru nedostaneme se do úplně stejného tónu, jako kdybychom šli z D o půltón dolů). Enharmonická záměna je tedy ignorování těchto rozdílů tím, že se z těchto dvou tónů vybereme vždy tu frekvenci, která vyjádřena menšími čísly, a tu pak používáme pro oba dva tóny. Pokud toto provedeme u čistých ladění, vznikají pak potíže a disonantní intervaly při modulacích. Toto působí také problémy při konstrukci a ladění nástrojů s pevnými výškami tónů [9].

4.2.1 Pythagorejské ladění

Zhruba do poloviny 15. století se na klávesových nástrojích užívalo tzv. pythagorejské ladění.

Oktáva je v podstatě matematický interval, tj. množina s nekonečně mnoha prvky (množina nekonečně mnoha tónů). V ladění jde o to, jak oktávu vyplnit konečným počtem tónů. To lze udělat např. jedním z těchto způsobů: buď můžeme dělit oktávový prostor libovolným počtem kroků, nebo zvolíme harmonický zlomek a nechat ho generovat postupně nové tóny [2].

Pythagoras použil druhou metodu. Při této metodě se zvolí prvotní harmonický interval jako stavební kámen pro tvorbu konečného počtu tónů v rámci oktávy. Výsledek bude stupnice. V pythagorejském systému je touto entitou interval, který se nachází v harmonické hierarchii hned po oktávě - čistá kvinta.

Při pythagorejském ladění se tedy užívá k odvozování všech tónů oktáva s poměry frekvenci 2:1 a kvinta s 3:2.

Pythagorejský kruh a pythagorejské koma

Pythagorejský neboli kvintový kruh je postup, jakým se odvozují poměry frekvencí při pythagorejském ladění. Postupně odvozujeme tyto poměry a posouváme se po oktávách, kde poměr frekvencí tónů je 2:1 a po čistých kvintách s poměrem frekvencí 3:2 [1].

Má-li základní tón relativní frekvenci 1, má o kvintu vyšší tón frekvenci 3:2. Tón o další kvintu vyšší má frekvenci $(3:2) \cdot (3:2) = 9:4$. Tón o kvintu nižší než základní tón má frekvenci 2:3, tón o další kvintu nižší má frekvenci $(2:3) \cdot (2:3) = 4:9$, atd.

Nyní si ukážeme celý postup, jak odvodíme poměry frekvencí například v C dur. Za základní tón vezmeme tón C1. Dále pokračujeme doprava do tónu G1 - 3:2, poté ještě o kvintu výše a dostaneme se do tónu D2 (9:4). Pokud se vrátíme o oktávu níž, máme frekvenci dalšího tónu v C dur – D1, tedy $(9:4) \cdot (1:2) = 9:8$. Posunem o kvintu výš získáme frekvenci pro tón A1. Dalšími kvintovými a oktávovými kroky nahoru a dolů pak získáme všechny tóny durové stupnice.

Tímto postupem získáme frekvenci pro tón F1 a další tóny, které jsou ale vyjádřeny v poměrech frekvencí velkých čísel (pro F1 177147:131072). Jak již bylo řečeno, souzvuk zní tím konsonantněji, čím menší je poměr frekvencí tónů v souzvuku. Pokud se ale posuneme po kvintovém kruhu na druhou stranu než doposud, získáme tak frekvenci 4:3 pro čistou kvartu. Rozdíl mezi touto frekvencí a frekvencí získanou posouváním se po pythagorejském kruhu doprava (po směru hodinových ručiček) tvoří tzv. pythagorejské koma:

$$\frac{177147}{131072} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3^{11}}{2^{17}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,013643265$$

A po přepočtu do centů dostaneme

$$1200 \cdot \log_2 \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right) \approx 23,46 \text{ centů}$$

Posouváním se po pythagorejském kruhu stále stejným směrem sice získáme všechny ostatní potřebné poměry frekvencí v intervalech jak pro durovou, tak pro mollovou stupnici, ale tyto poměry jsou také vyjádřené příliš velkými čísly. Postup po směru hodinových ručiček tedy ukončíme u tónu H1 a změníme směr proti směru hodinových ručiček. Pokud bychom pokračovali i po odvození F1 stále doprava, až bychom se vrátili do počátečního tónu C1, získali bychom místo původního poměru frekvencí 1:1 poměr $\frac{3^{12}}{2^{19}}$, což je velikost pythagorejského komatu.

V **Tabulce 2** je popsán celý postup odvození poměrů frekvencí všech tónů resp. intervalů durové i mollové stupnice pomocí algoritmu pythagorejského kruhu, kde je vidět, že pomocí 12 kvint jdoucích po sobě lze odvodit frekvence v intervalech stupnice. Mocniny poměru (1:2) určují, o kolik oktáv se musíme vrátit zpět, abychom dostali frekvence intervalů se základním tónem C1. Většina postupů je ukazována na základní stupnici C dur, ale pomocí pythagorejského kruhu lze odvodit frekvence i ve stupnicích mollových, jsou zde dopočítány i frekvence pro mollové intervaly, konkrétně pro jednoduchost C moll, která má stejný základní tón jako C dur. Rozdíl mezi durovou a mollovou stupnicí je ten, že některé intervaly v durové stupnici jsou nahrazeny intervaly mollovými. Například místo durové velké tercie (čtyři půltóny) se používá mollová malá tercie, která je tvořena třemi půltóny, velká sexta (9 půltónů) je nahrazena malou sextou (8 půltónů) a také velká septima (11 půltónů) je nahrazena malou septimou (10 půltónů). V závorkách za nově získanými tóny (s křížky či béčky) jsou v tabulce tóny, které by měly být vzájemně záměnné (tedy při používání dvanáctitónové stupnice).

V **Tabulce 3** jsou vypočteny frekvence pro tón F – čistá kvarta – a další tóny durové a mollové stupnice postupem na opačnou stranu. To provedeme tak, že tentokrát zvolíme za základní tón C8 a posouváme se po kvintách naopak dolů. To nám stačí pouze do tónu Des, protože pro další tóny se již v pythagorejském ladění používají frekvence získané v první tabulce. To proto, že kdybychom pokračovali stále stejným směrem i za tón Des, získali bychom frekvence vyjádřené většími čísly, než frekvence vzniklé opačným postupem.

V **Tabulce 4** jsou uvedeny poměry frekvencí všech intervalů durové stupnice.

Obrázek 7 představuje schéma pythagorejského kruhu.

Mezi některými tóny, například mezi tóny Es a Dis, vznikne díky tomuto postupnému skládání velmi malá vzdálenost. Tyto tóny by měly být totožné, tedy i jejich frekvence by měly být úplně stejné. Avšak tomu tak není a mezi frekvencemi je malý rozdíl. To je způsobeno tím, že se pro odvození frekvencí používá pouze frekvence čisté kvinty a oktávy.

Tabulka 2: **Pythagorejský kruh po směru hodinových ručiček**

Kvinta	Nový tón	Interval	Frekvence
C1–G1	**G1**	kvinta	$(3:2)^1 = 3:2$
G1–D2	D1	velká sekunda	$(3:2)^2 \cdot (1:2) = 9:8$
D2–A2	**A1**	velká sexta	$(3:2)^3 \cdot (1:2) = 27:16$
A2–E3	**E1**	velká tercie	$(3:2)^4 \cdot (1:2)^3 = 81:64$
E3–H3	**H1**	velká septima	$(3:2)^5 \cdot (1:2)^3 = 243:128$
H3–Fis4	Fis1 (Ges1)	zvetšená kvarta	$(3:2)^6 \cdot (1:2)^4 = 729:256$
Fis4–Cis5	Cis1 (Des1)	malá sekunda	$(3:2)^7 \cdot (1:2)^5 = 2187:2048$
Cis5–Gis5	Gis1 (As1)	malá sexta	$(3:2)^8 \cdot (1:2)^5 = 26561:4096$
Gis5–Dis6	Dis1 (Es1)	malá tercie	$(3:2)^9 \cdot (1:2)^6 = 19683:16384$
Dis6–Ais6	Ais1 (B1)	malá septima	$(3:2)^{10} \cdot (1:2)^6 = 59049:32768$
Ais6–F7	**F1**	kvarta	$(3:2)^{11} \cdot (1:2)^7 = 177147:131072$
F7–C8	C2	oktáva	$(3:2)^{12} \cdot (1:2)^7 = 531441:131072$

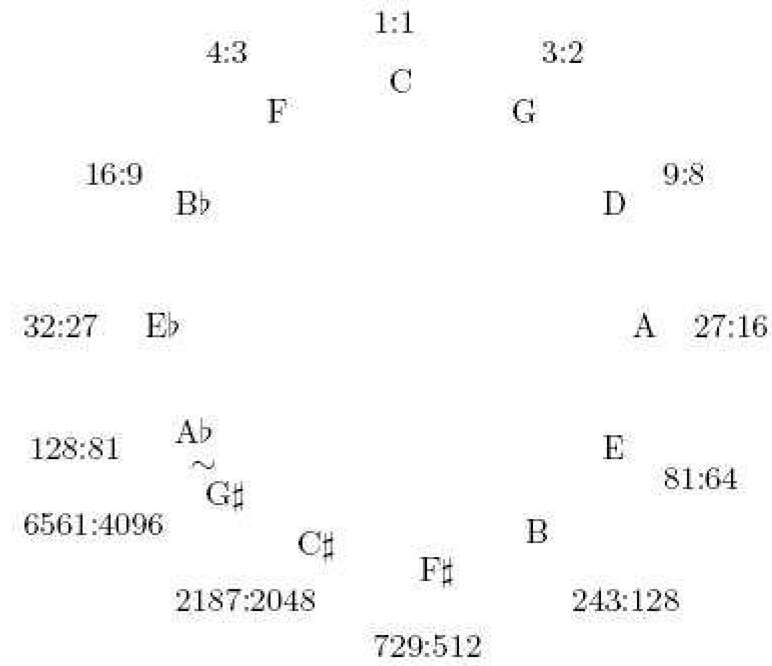
Tabulka 3: **Pythagorejský kruh proti směru hodinových ručiček**

Kvinta	Nový tón	Interval	Frekvence
C8–F7	**F1**	kvarta	$(2:1)^1 \cdot (2:3)^1 = 4:3$
F7–B6	B1 (Ais1)	malá septima	$(2:1)^2 \cdot (2:3)^2 = 16:9$
B6–Es6	Es1 (Dis1)	malá tercie	$(2:1)^2 \cdot (2:3)^3 = 32:27$
Es6–As5	As1 (Gis1)	malá sexta	$(2:1)^3 \cdot (2:3)^4 = 128:81$
As5–Des5	Des1 (Cis1)	malá sekunda	$(2:1)^3 \cdot (2:3)^5 = 256:243$

Tabulka 4: **Poměry frekvencí tónů všech intervalů oktávy**

Interval	Tón	Poměr frekvencí
prima	C	1:1
velká sekunda	D	9:8
malá tercie	Es	32:27
velká tercie	E	81:64
čistá kvarta	F	4:3
čistá kvinta	G	3:2
malá sexta	As	128:81
velká sexta	A	27:16
malá septima	B	16:9
velká septima	H	243:128
oktáva	C	2:1

Obr. 7: **Pythagorejský kruh**



Tento rozdíl, tedy vzdálenost mezi tóny Es a Dis je pythagorejské koma. Frekvence tónu Es je vyjádřena poměrem $32 : 7 = 2^5 : 3^3$ a frekvence tónu Dis poměrem $19683 : 16384 = 3^9 : 2^{14}$ a tyto frekvence vzniknou pohybem po pythagorejském kruhu dvěma různými směry. Pro frekvence tónů Es a Dis používáme v dvanáctitónové stupnici jedno číslo. Zvolíme tu frekvenci, která je vyjádřena menšími čísly, v tomto případě tedy první poměr (Es) a budeme ho používat pro oba tóny, které jsou již totožné, a dojde tím k enharmonické záměně [1].

Frekvence tónu v ukázce *es_dis.wav* jsou odvozeny od základního tónu C, kterému byla přiřazena frekvence 260 Hz. Frekvence tónu Es je tedy $260 \cdot \frac{32}{27} = 308,15$ Hz a tón Dis má frekvenci $260 \cdot \frac{19683}{16384} = 312,35$ Hz. Rozdíl mezi nimi je přibližně 4,2 Hz (asi 1,35% z frekvence Dis), což je pro lidské ucho poměrně snadno rozpoznatelný rozdíl, který by při modulacích do vzdálenějších tónin působil problémy (viz příklad v závěru této kapitoly a ukázka *tercie.wav*).

Vzdálenost 12 kvint a 7 oktáv jsou stejné (12 kvint je tvořeno $12 \cdot 7$ půltóny). Ovšem při výpočtu frekvencí těchto intervalů podle pythagorejského ladění zjistíme, že úplně stejné nejsou, jsou ale téměř totožné. Jinými slovy, pythagorejské ladění je založeno na faktu, že $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$ neboli $2^{19} \approx 3^{12}$, tedy $524288 \approx 531441$, což znamená, že když se posuneme o 12 kvint nahoru a pak 7 oktáv dolů, dostaneme se téměř do stejného místa, kde jsme začali. Velikost pythagorejského komatu je $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = 3^{12} : 2^{19} \approx 1,01364$ což je necelá čtvrtina půltónu. Toto koma je důsledkem faktu, že mocniny čísla 2 a čísla 3 se nikdy nesejdou, tzn. nemají společný násobek, neboť mocniny čísla 2 jsou vždy sudé a mocniny čísla 3 jsou vždy liché.

Pythagorejské koma můžeme pozorovat posouváním se i po jiných intervalech než po čisté kvintě. Například kdybychom se místo kvinty posouvali po sekundách, vidíme, že šest velkých sekund by měly mít stejnou vzdálenost jako 1 oktáva. Tedy že

$$\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^6}{2} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136$$

Dále například čtyři velké sexty by měly být totožné se třemi oktávami (ve velké sextě je 8 půltónů, tedy nejmenší společný násobek počtu tónů v sextě a oktávě je 36, což jsou čtyři sexty nebo dvě oktávy), neboli:

$$\frac{\left(\frac{27}{16}\right)^4}{2^3} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136$$

A tak bychom mohli pokračovat pro všechny intervaly.

Protože se při výpočtu poměru frekvencí tónů pohybujeme pouze po kvintách a oktávách, posloupnost těchto poměrů v pythagorejském ladění jsou součiny mocnin 2 a 3 s celočíselným exponentem, tj. tvaru $2^p 3^q$, kde p a q jsou celá čísla. Tyto součiny jsou uvedeny v **Tabulce 5**, kde jsou také vypočtené vzdálenosti tónů v centech.

Přepočet na vzdálenosti tónů v centech

Vzdálenosti vypočteme dle vzorce uvedeného v kapitole 4.1. Například interval mezi tóny C a D mají podle pythagorejského ladění poměr frekvencí 9:8 a jejich vzdálenost v centech je tedy

$$1200 \log_2 (9:8) \approx 203,91 \text{ centů}$$

Tabulka 5: **Poměry frekvencí tónů durové stupnice a vzdálenosti tónů v centech**

Tón	Poměr frekvencí	Vzdálenost v centech
C	$1:1 = 2^0 3^0$	0
D	$9:8 = 2^{-3} 3^2$	203,910
E	$81:64 = 2^{-6} 3^4$	407,820
F	$4:3 = 2^2 3^{-1}$	498,045
G	$3:2 = 2^{-1} 3^1$	701,955
A	$27:16 = 2^{-4} 3^3$	905,865
H	$243:128 = 2^{-7} 3^5$	1109,775
C	$2:1 = 2^1 3^0$	1200

Nyní dokážeme již zmíněné tvrzení, které vychází z faktu, že pythagorejské (i ostatní přirozená) ladění je odvozeno od základního tónu, což znamená, že při přechodu do jiné tóniny, má tentýž tón (v našem příkladě tón As, který by v dvanáctitónové stupnici měl mít stejnou frekvenci jako Gis) jinou frekvenci, než by měl mít, proto by potom hraná skladba zněla nelibozvučně. Například vezmeme-li C moll naladěnou od základního tónu C1, dostaneme pro tón As (malá sexta) poměr frekvencí 128:81. Nyní se v průběhu skladby přesuneme bez přeladění do stupnice E dur, kde se tón Gis, který by měl být totožný s tónem As, nachází v intervalu velké tercie od základního tónu E1 (poměr frekvencí 81:64). Nejprve vypočteme z frekvence tónu A1, jemuž přiřadíme frekvenci 440 Hz, tóny základní, tedy C1 a E1. Pro tón C1 dostaneme:

$$440 \cdot \frac{16}{27} = 260,74 \text{ Hz}$$

Tuto frekvenci jsme získali postupem o velkou sextu dolů. Teoreticky by mohl být zvolen i jiný postup (např. o malou tercii výš a potom o oktávu níž), ale tak získáme stejné číslo ($\frac{32:27}{2} = \frac{16}{27}$). Frekvence tónu E1 je:

$$440 \cdot \frac{3}{4} = 330 \text{ Hz}$$

Nyní vypočteme frekvence tónu Gis1, které bylo naladěno od základního tónu E1 máme:

$$330 \cdot \frac{81}{64} = 417,66 \text{ Hz}$$

A As1 naladěné od C1:

$$260,74 \cdot \frac{128}{81} = 421,03 \text{ Hz}$$

Je vidět, že frekvence, které by měly být stejné, se ve skutečnosti liší o přibližně 5,62 Hz. Pokud rozdíl vyjádříme poměrem frekvencí, získáme velikost pythagorejského komatu, neboť

$$\left(\frac{16}{27} \cdot \frac{128}{81}\right) : \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{81}{64}\right) = \left(\frac{2^4}{3^3} \cdot \frac{2^7}{3^4}\right) : \left(\frac{3^1}{2^2} \cdot \frac{3^4}{2^6}\right) = \frac{2^{19}}{3^{12}}$$

Čili po přechodu z C moll do E dur by velká tercie byla o 5,62 Hz menší a nezněla by konsonantně. A se vzdálenějšími tóninami by se tento rozdíl ještě zvětšoval, například při přechodu z C moll naladěného od tónu C1 do E dur naladěného od E2 by byl rozdíl roven dvojnásobku pythagorejského komatu atd.

V ukázce *tercie.wav* lze slyšet dvě tercie, obě se základním tónem E1 o frekvenci 330 Hz. První tercie má takovou frekvenci, jako kdybychom ji naladili od tónu E s poměry frekvencí pro durovou stupnici, tedy $330 \cdot \frac{81}{64} = 417,65625$ Hz. Druhá má frekvenci, kterou získáme, pokud máme naladěno od základního tónu C: $440 \cdot \frac{16}{27} \cdot \frac{128}{81} \approx 412,0347508$ Hz.

4.2.2 Didymické ladění

Během poloviny 15. století přichází do praxe tzv. didymické ladění. Základ ladění vytvořil v prvním století př. n. l. hudební teoretik Didymus z Alexandrie [1].

Didymické ladění je jedno z nejběžnějších přirozených neboli čistých hudebních ladění. Často bývá jako čisté ladění označováno právě ladění didymické.

K oktávě 2:1 a kvintě 3:2, které byly použity již při konstrukci pythagorejského ladění, byly přidány intervaly, v nichž se objevuje číslo 5. Disonantní pythagorejská velká tercie 81:64 byla nahrazena didymickou velkou tercií 5:4 a pythagorejská velká sexta 27:16 didymickou sextou 5:3. Rozdíl mezi pythagorejskou a didymickou tercií se nazývá didymické nebo také syntonické koma. Je to interval s poměrem frekvencí 81:80

$$\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$$

neboli asi 21,51 centů [1].

Nyní si ukážeme, že na základě tvrzení, které říká, že dva tóny znějí společně tím lépe, čím více mají společných alikvotních tónů, je opravdu didymická velká tercie konsonantnější než pythagorejská. Alikvotní tóny mají frekvence, které jsou celočíselnými násobky frekvence základního tónu. Ve velké tercii máme tedy dva tóny, jeden řekněme o základní frekvenci 1, druhý 81:64 v případě pythagorejského a 5:4 v případě didymického. Celočíselné násobky základní frekvence jsou tedy 2, 3, … neboli přirozená čísla. Pro pythagorejskou tercii máme $2 \cdot \frac{81}{64}, 3 \cdot \frac{81}{64}, ...$ a pro didymickou $2 \cdot \frac{5}{4}, 3 \cdot \frac{5}{4}, ...$ Abychom z výrazu $a \cdot \frac{b}{c}$ dostali celé číslo, musí být čitatel celočíselným násobkem jmenovatele a hledáme tedy vlastně společné násobky $(n \cdot 81, 64)$ a $(n \cdot 5, 4)$, což jsou násobky čísla 81 resp. 5 pro n, která jsou násobky čísla 64 resp. 4. Tedy společnými násobky frekvencí základního tónu a tónu v didymické velké tercii jsou například čísla 5, 10, 15, …, zatímco u pythagorejské tercie dostáváme až násobky 81, 162, 243, 324, … Což dokazuje teorii, že frekvence v intervalech by měly být vyjádřeny poměrem co nejmenších celých čísel, aby souzvuky zněly libozvučně.

V ukázce *tercie didym_pyth.wav* jsou za sebou velké tercie nejdříve s poměrem frekvencí dle didymického a potom dle pythagorejského ladění.

Frekvence ostatních intervalů, tedy kromě oktávy, čisté kvinty, velké tercie a malé tercie lze získat podobným způsobem, jako u pythagorejského ladění. Tedy pohybováním se po těchto intervalech postupně nahoru a dolů.

Uvedeme zde příklad výpočtu frekvencí pro durovou stupnici, například vezměme C dur. Známe tedy frekvence pro intervaly malá tercie (3 půltóny, frekvence 6:5), velká tercie (4 půltóny, frekvence 5:4), čistá kvinta (7 půltónů, 3:2) a oktáva (12 půltónů, 2:1). Zbývají nám tedy vypočítat frekvence pro velkou sekundu (2 půltóny), čistou kvartu (5 půltónů), velkou sextu (9 půltónů) a velkou septimu (11 půltónů).

Tón D (velká sekunda) získáme stejně jako u pythagorejského ladění, tedy posunem o dvě kvinty nahoru a jednu oktávu dolů ($7 + 7 - 12 = 2$ půltóny):

$$\frac{(3:2)^2}{2:1} = 9:8$$

Dále můžeme spočítat frekvenci pro tón A (velká sexta), a to posunem o jednu oktávu výš a malou tercii zpět (což ale není nezbytně nutné, neboť poměr frekvencí pro velkou sextu je dán již z předpokladů didymického ladění) ($12-3=9$ půltónů):

$$\frac{2:1}{6:5}=5:3$$

A tón H (velká septima) získáme posunem o kvintu a velkou tercii nahoru ($7+4=11$ půltónů):

$$(3:2)\cdot(5:4)=15:8$$

A nakonec frekvenci pro čistou kvartu (tón F) dostaneme posunutím o velkou sextu nahoru a velkou tercii zpět ($9-4=5$ půltónů):

$$\frac{5:3}{5:4}=4:3$$

Můžeme si všimnout, že mezi tóny durové stupnice vzniknou tři různé velikosti. Jedná se o tzv. malý celý tón, který se nachází v C dur mezi tóny D–E, G–A a má poměr frekvencí 10:9 (např. D–E: $\frac{5}{4}:\frac{9}{8}=\frac{10}{9}$) , dále se objeví velký celý tón, a to mezi C–D, F–G a A–H a jeho poměr frekvencí je 9:8. A mezi tóny E–F a H–C je půltón s poměrem frekvencí 16:15 (např. E–F: $\frac{4}{3}:\frac{5}{4}=\frac{16}{15}$). **Tabulka 6** představuje schéma rozložení těchto vzdáleností mezi tóny v durové stupnici (C dur).

Tabulka 6: **Vzdálenosti mezi tóny v durové stupnici při didymickém ladění**

C		**D**		**E**		**F**		**G**		**A**		**H**		**C**
	velký celý tón		malý celý tón		půltón		velký celý tón		malý celý tón		velký celý tón		půltón	

Dochází k zjednodušení zlomků a mnoho tónů lze dosáhnout pomocí kvint a tercií než pouze pomocí kvint samotných.

V **Tabulce 7** je souhrn všech frekvencí pro intervaly durové stupnice naladěné podle didymického ladění. Od pythagorejského ladění se tedy didymické odlišuje pouze frekvencí tří intervalů (v rámci durové stupnice), a to velké tercie, velké sexty a velké septimy. Porovnání těchto intervalů s pythagorejskými je v **Tabulce 8**.

Tabulka 7: **Poměry frekvencí v didymickém ladění pro durovou stupnici**

Interval	**Poměr frekvencí**	**Vzdálenost v centech**
prima	1:1	0
velká sekunda	9:8	203,910
velká tercie	5:4	386,314
čistá kvarta	4:3	498,045
čistá kvinta	3:2	701,955
velká sexta	5:3	884,359
velká septima	15:8	1088,269
oktáva	2:1	1200

Tabulka 8: **Srovnání didymického a pythagorejského ladění pro odlišné intervaly durové stupnice**

Interval	**Poměr frekvencí**		**Vzdálenost v centech**	
	Didymic.	**Pythag.**	**Didymic.**	**Pythag.**
velká tercie	$5:4=1,25$	$81:64=1,265625$	386,314	407,820
velká sexta	$5:3=1,666667$	$27:16=1,687500$	884,359	905,865
velká septima	$15:8=1,875$	$243:128=1,898438$	1088,269	1109,765

Poměry frekvencí tónů a matematický průměr

Intervaly znějí nejharmoničtěji, pokud jejich frekvence jsou v poměru malých celých čísel. Ty nejkonsonantnější intervaly by měly mít poměr frekvencí didymického ladění. Je zajímavé, že tyto poměry (tedy poměry frekvencí didymického neboli čistého ladění) lze získat i matematicky. Konkrétně pomocí matematických průměrů [8].

Máme několik druhů průměrů. My budeme potřebovat dva z nich. Pod pojmem průměr si většina lidí představí tzv. aritmetický průměr, který se vypočte takto

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$$

a dále budeme potřebovat průměr harmonický

$$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$$

Pomocí těchto průměrů lze rozdělit oktávu, kvintu atd. a tím určit poměry frekvencí tónů

v oktávě. Vycházejme z toho, že poměr frekvence dvou tónů vzdálených o oktávu je 2:1. Nejprve rozdělíme oktávu. Vypočteme aritmetický a harmonický průměr čísel 1 a 2 a dostaneme poměry frekvencí pro intervaly čistá kvinta a čistá kvarta, jak vidíme na **Obrázku 8**.
Kvinta:

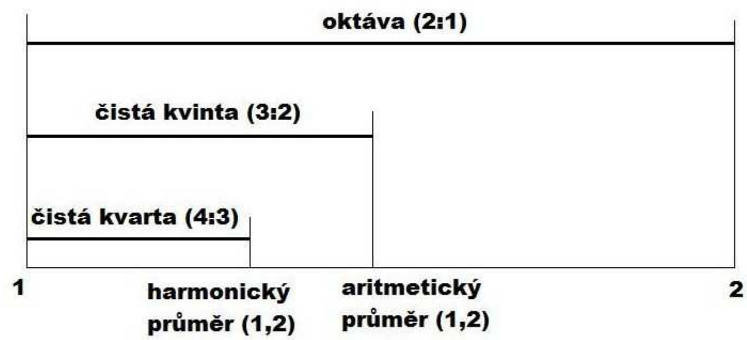
$$A\left(1,2\right)=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

Kvarta:

$$H\left(1,2\right)=\frac{2\cdot1\cdot2}{1+2}=\frac{4}{3}$$

Podobným způsobem rozdělíme kvintu a získáme malou a velkou tercii (**Obrázku 9**):

Obr. 8: **Aritmetický a harmonický průměr oktávy**



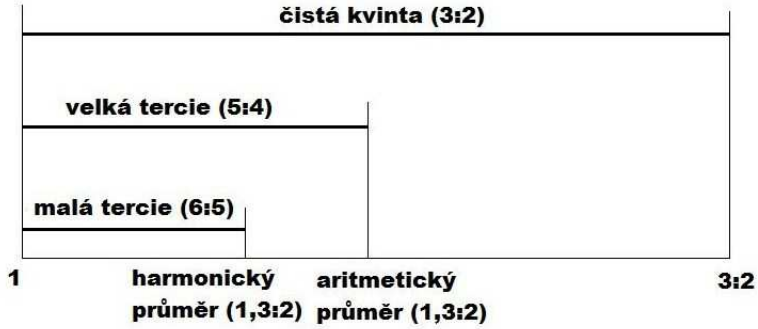
Malá tercie:

$$H\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{2\cdot1\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{6}{5}$$

Velká tercie:

$$A\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

Obr. 9: **Aritmetický a harmonický průměr kvinty**



A nakonec pomocí průměrů velké tercie získáme poměry frekvencí tónů malého (např. mezi tóny D a E) a velkého celého tónu (velká sekunda).

Malý celý tón:

$$H\left(1, \frac{5}{4}\right) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4}}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{10}{9}$$

Velká sekunda (velký celý tón):

$$A\left(1, \frac{5}{4}\right) = \frac{1 + \frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}$$

4.3 Temperovaná ladění

4.3.1 Nerovnoměrně temperovaná ladění

$\frac{1}{4}$-*středotónové ladění*

Ve 30. letech 16. století se začíná prosazovat tzv. středotónové ladění. Nejčastější verze tohoto ladění je $\frac{1}{4}$-koma středotónové ladění, jehož hlavním cílem jsou čisté (tj. didymické) velké tercie a stejná velikost u všech kvint kvintového kruhu (C–G, G–D, D–A, A–E, E–H, H–Fis, Fis–Cis, Cis–Gis, Gis–Dis, Dis–Ais, Ais–F, F–C). V tomto ladění jde zejména o docílení menší velikosti komatu než je velikost pythagorejského komatu. Proto se každá kvinta jemně zúží, takže místo původních 702 centů má 696,5 centů [2].

Obecně lze zjednodušeně popsat středotónové ladění tak, že kvinty se sníží o určitou část syntonického komatu, řekněme o m, tedy hodnotu syntonického komatu umocníme na $\frac{1}{m}$ a velká tercie se sníží o $4 \cdot \frac{1}{m}$ syntonického komatu. Pro $m = 4$ tedy dostaneme frekvenci velké tercie jako v didymickém ladění:

$$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{81}{64} : \frac{81}{80} = \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$$

Jak již bylo řečeno, v $\frac{1}{4}$-koma středotónovém ladění dochází k zúžení kvinty, a to o $\frac{1}{4}$ syntonického komatu. Syntonické koma je 81:80, čtvrtina z něj činí $\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$ (v hudbě se pracuje s geometrickými, nikoliv aritmetickými řadami). Kvinta 3:2 zmenšená o $\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$ je

$$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} : 1 \approx 1,495$$

neboli 696,58 centů. Kvinty jsou tedy o 5,38 centů užší než kvinty čisté (701,96 centů), velké tercie vycházejí jako čisté. Otázkou je, jak velký zlomek pro zmenšení syntonického komatu použijeme. Nejčastější je právě $\frac{1}{4}$, jako hraniční hodnoty bychom mohli brát 0, kdy vznikne pythagorejská stupnice a zlomek $\frac{1}{11}$, kdy dostaneme přibližně rovnoměrně temperovanou stupnici [2].

V **Tabulce 9** jsou vypočteny frekvence kvint, velkých tercií a velikosti komatu pro jednotlivé druhy středotónových ladění od $\frac{1}{4}$-koma středotónového po $\frac{1}{11}$-koma středotónové (od $m = 4$ do $m = 11$) . Například pro $\frac{1}{4}$-koma středotónové ladění je frekvence pro kvitnu

$5^{\frac{1}{4}} : 1 = 1,495$ pro velkou tercii 5:4 a velikost komatu (poměr by měl být 1, protože jdeme o 12 kvint nahoru a vracíme se o 7 oktáv dolů, což je stejný počet půltónů)

$$(5^{\frac{1}{4}} : 1)^{12} : 2^7 \approx 0,9765625$$

Z tabulky lze vyčíst, že nelze jednoznačně určit, jestli je lepší používat větší či menší m, neboť s rostoucím m se sice kvinta přibližuje svému přirozenému poměru frekvencí (1,5) a koma se zmenšuje, ale zároveň frekvence velké tercie se poměrně rychle oddaluje od své přirozené velikosti (1,25).

Tabulka 9: **Hodnoty frekvence kvinty, velké tercie a komatu pro různé druhy středotónových ladění**

m	Frekvence kvinty	Frekvence velké tercie	Koma
4	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 1,495348781$	$\frac{81}{64} : \frac{81}{80} = 1,25$	0,9765625
5	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,49627787$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 1,253109491$	0,983868514
6	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,496897583$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{6}} \approx 1,255186781$	0,988769531
7	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 1,497340392$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{7}} \approx 1,256672668$	0,992285198
8	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1,497672585$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{8}} \approx 1,257788237$	0,994930149
9	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,497931008$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{9}} \approx 1,258656587$	0,996992206
10	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,498137779$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{10}} \approx 1,259351698$	0,998644928
11	$\frac{3}{2} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1,498306976$	$\frac{81}{64} : \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{4}{11}} \approx 1,259920711$	0,999999193

Čisté ladění obsahuje dva druhy celých tónů: velký celý tón (9:8) a malý celý tón (10:9), což je problém, kterého se lze u středotónového ladění zbavit. Tyto celé tóny jsou středotónovým temperováním nahrazeny celými tóny o jednotné velikosti $\frac{\sqrt{5}}{2}$ [2].

Fakt, že středotónově temperovaný celý tón leží mezi dvěma druhy čistých celých tónů (tedy pokud se posuneme o tyto dva celé tóny dostaneme stejnou frekvenci jako když se posuneme o dva celé tóny středotónového ladění), je dokázán níže.

$$\sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{5} : 2$$

Takto temperovaný tón se tedy nachází přesně v geometrickém středu mezi oběma čistými celými tóny, což dalo i název tomuto druhu ladění. Pokud vezmeme například tóny

C-D-E v C dur, kde C má frekvenci 1, E má 5:4 a D bude přesně uprostřed a jeho frekvenci tedy získáme takto: $\sqrt{5:4} = \sqrt{5} : 2$ a pro C-D-E dostaneme: $1 : \sqrt{5} : 2 : \frac{5}{4}$, a frekvence jednoho celého tónu je tedy $\frac{\sqrt{5}}{2} : 1$. Stejné poměry frekvencí budou mít i tóny, které mají mezi sebou také jeden celý tón, jako je tomu u C-D-E. Tedy i poměr frekvence tónu G ku tónu F a A ku G bude $\frac{\sqrt{5}}{2} : 1$ a i pro trojici G-A-H bude platit to samé.

Nyní nám tedy zbývá dopočítat vzdálenosti mezi tóny E-F a H-C, mezi nimiž je jeden půltón. Víme již, že oktávu tvoří 5 celých tónů, které mají mezi sebou poměry frekvencí $\frac{\sqrt{5}}{2} : 1$ a dva půltóny, jejichž frekvence chceme zjistit. Což uděláme tím, že vypočteme polovinu vzdálenosti mezi oktávou a 5 celými tóny, tedy:

$$\sqrt{\frac{2}{(\frac{\sqrt{5}}{2})^5}} : 1 = 8 : 5^{\frac{1}{4}}$$

Takže nyní již máme vše, co potřebujeme k určení frekvencí všech tónů durové stupnice. Tón D (velká sekunda) má poměr frekvencí $\sqrt{5}/2 : 1$. E (velká tercie) je dán frekvencí $5 : 4$. O jeden půltón vyšší tón F (čitá kvarta) má frekvenci

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5^{\frac{1}{4}}} = 2 : 5^{\frac{1}{4}}$$

O celý tón výše je G (čistá kvinta), která má frekvenci

$$\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 5^{\frac{1}{4}} : 1$$

a takto bychom mohli pokračovat dále i pro zbývající tóny [1].

Frekvence všech tónů, vzdálenosti mezi nimi a vzdálenosti v centech jsou v **Tabulce 10**. V **Tabulce 11** jsou potom porovnány poměry frekvencí ve středotónovém a pythagorejském ladění.

Středotónové ladění se dnes stále občas používá, například pro ladění varhan [1].

Tabulka 10: **Poměry frekvencí v $\frac{1}{4}$-středotónovém ladění pro durovou stupnici**

Interval	Vzdálenost mezi tóny	Poměr frekvencí	Vzdálenost v centech
prima		1:1	0
velká sekunda	$\sqrt{5} : 2$	$\sqrt{5} : 2$	193,157
velká tercie	$\sqrt{5} : 2$	5:4	386,314
kvarta	$8 : 5^{\frac{1}{4}}$	$2 : 5^{\frac{1}{4}}$	503,422
kvinta	$\sqrt{5} : 2$	$5^{\frac{1}{4}} : 1$	696,579
velká sexta	$\sqrt{5} : 2$	$5^{\frac{8}{4}} : 2$	889,735
velká septima	$\sqrt{5} : 2$	$5^{\frac{5}{4}} : 4$	1082,892
oktáva	$8 : 5^{\frac{1}{4}}$	2:1	1200

Tabulka 11: **Srovnání $\frac{1}{4}$-středotónového a pythagorejského ladění pro intervaly durové stupnice**

Interval	Poměr frekvencí		Vzdálenost v centech	
	Středotón.	**Pythag.**	**Středotón.**	**Pythag.**
prima	1:1	1:1	0	0
velká sekunda	$\sqrt{5} : 2 = 1,118034$	$9 : 8 = 1,125000$	193,157	203,910
velká tercie	$5 : 4 = 1,25$	$81 : 64 = 1,265625$	386,314	407,820
kvarta	$2 : 5^{\frac{1}{4}} = 1,337481$	$4 : 3 = 1,333333$	503,422	498,045
kvinta	$5^{\frac{1}{4}} : 1 = 1,495349$	$3 : 2 = 1,500000$	696,579	701,955
velká sexta	$5^{\frac{3}{4}} : 2 = 1,671851$	$27 : 16 = 1,687500$	889,735	905,865
velká septima	$5^{\frac{5}{4}} : 4 = 1,869186$	$243 : 128 = 1,898438$	1082,892	1109,765
oktáva	2:1	2:1	1200	1200

Kirnbergerova ladění

Dalším druhem nerovnoměrně temperovaného ladění jsou ladění Kirnbergerova, která sestrojil německý skladatel a hudební teoretik Johann Philipp Kirnberger (1721-1783). Jeho tři typy ladění byla označena jako Kirnberger I. (1766), Kirnberger II. (1771) a Kirnberger III. (1779). Tato ladění jsou založena na problému, jak mezi 12 kvint v pythagorejském kvintovém kruhu rozdělit pythagorejské koma [14].

Vychází se tedy z pythagorejského ladění, kdy postupným skládáním 12 kvint na sebe bychom se měli dostat do frekvence totožné s frekvencí 7 oktáv, ale namísto toho získáme frekvenci o pythagorejské koma odlišnou. Připomeňme nyní velikost pythagorejského komatu:

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$$

Kirnberger sestrojil tato ladění tak, že se toto koma rozdělil třemi způsoby mezi 12 kvint kvintového kruhu: C–G, G–D, D–A, A–E, E–H, H–Fis, Fis–Cis, Cis–Gis, Gis–Dis, Dis–Ais, Ais–F, F–C [1].

Kirnberger I.

V tomto ladění Kirnberger rozdělil pythagorejské koma mezi kvintu D–A a Fis–Cis tímto způsobem:
Kvintu D–A zmenšil o $\frac{11}{12}$ pythagorejského komatu

$$\frac{3}{2} : \sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{11}} \approx 1,481482577$$

V centech

$$1200 \cdot \log_2 1,481482577 \approx 680,45$$

A kvintu Fis–Cis, která byla snížena o zbytek, tedy $\frac{1}{12}$ komatu

$$\frac{3}{2} : \sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}} \approx 1,498307077$$

V centech

$$1200 \cdot \log_2 1,498307077 \approx 700,00$$

Ostatní kvinty kvintového kruhu zůstávají čisté, tedy s poměrem frekvencí $3:2 = 1,5$, což je asi 701,95 centů. Nyní můžeme odvodit frekvence všech tónů stupnice, což si ukážeme opět na příkladu stupnice C dur, tedy tón C má frekvenci 1. Tóny C, F, G a D získáme stejně jako u pythagorejského ladění. Dále vypočteme frekvenci tónu A, když víme, že kvinta D–A je zmenšená o $\frac{11}{12}$ komatu, tedy vynásobíme frekvenci tónu D a frekvenci této zmenšené kvinty

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} : \sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{11}} = \frac{2^{13} \cdot \sqrt[12]{2^5}}{3^8} \approx 1,666666789$$

O další kvintu (3:2) výš je tón E, který získáme vynásobením frekvence čisté kvinty, frekvence tónu A a posunutím o oktávu níž:

$$\frac{2^{13} \cdot \sqrt[12]{2^5}}{3^8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2^{11} \cdot \sqrt[12]{2^5}}{3^7} \approx 1,250000924$$

A nyní se opět posuneme o čistou kvintu výš do tónu H

$$\frac{2^{11}\cdot\sqrt[12]{2^5}}{3^7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2^{10}\cdot\sqrt[12]{2^5}}{3^6}\approx 1,875001386$$

Kirnberger si také všiml, že $\frac{11}{12}$ pythagorejského komatu je téměř stejná jako syntonické koma

$$\sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{11}}\approx 1,012499251\approx\frac{81}{80}=1,0125$$

a $\frac{1}{12}$ pythagorejského komatu je téměř totožná s tzv. schismatem, čímž se označuje rozdíl mezi pythagorejským a syntonickým komatem. Schisma má tedy velikost

$$\frac{3^{12}}{2^{19}}:\frac{81}{80}=\frac{3^{12}}{2^{19}}:\frac{3^4}{5\cdot 2^4}=\frac{3^8\cdot 5}{2^{15}}=\frac{32805}{32768}=1,00112915\approx 1,001129891\approx\sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)}$$

Pokud bychom tedy nahradili zmenšení u kvint syntonickým komatem a schismatem, dostaneme frekvence intervalů vyjádřené v poměru celých čísel a získáme tak přirozené ladění [14]. V **Tabulce 12** je souhrn frekvencí pro všechny intervaly durové stupnice.

Tabulka 12: **Frekvence intervalů durové stupnice v ladění Kirnberger I.**

Interval	**Frekvence**	**V centech**	**Frekvence**	**V centech**
prima	1	0	1	0
velká sekunda	$\frac{9}{8}=1,125$	203,91	$\frac{9}{8}=1,125$	203,91
velká tercie	$\frac{2^{11}\cdot\sqrt[12]{2^5}}{3^7}\approx 1,250000924$	386,31	$\frac{5}{4}=1,25$	386,24
kvarta	$\frac{4}{3}\approx 1,333333333$	498,05	$\frac{4}{3}\approx 1,333333333$	498,05
kvinta	$\frac{3}{2}=1,5$	701,96	$\frac{3}{2}=1,5$	701,96
velká sexta	$\frac{2^{13}\cdot\sqrt[12]{2^5}}{3^8}\approx 1,666666789$	884,36	$\frac{5}{3}\approx 1,666666667$	884,36
velká septima	$\frac{2^{10}\cdot\sqrt[12]{2^5}}{3^6}\approx 1,875001386$	1088,27	$\frac{15}{8}=1,875$	1088,27
oktáva	2	1200	2	1200

Nyní si ukážeme, že pokud se posuneme o 12 kvint dál dostaneme se do stejného bodu jako kdybychom se posunuli o 7 oktáv. V ladění Kirnberger I. máme 10 kvint čistých a dvě snížené, tedy o 12 oktáv výš dostaneme

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{2}:\sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{11}}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}:\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{12}:\sqrt[12]{\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{12}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\frac{2^{19}}{3^{12}}=2^7$$

což je frekvence tónů vzdálených o 7 oktáv. Podobně bychom mohli provést důkaz pro ostatní Kirnbergerova ladění.

Kirnberger II.

Princip ladění je podobný jako u Kirnberger I., jen koma je trochu jinak rozděleno. Pythagorejské koma je opět rozděleno na syntonické koma a schizma. Syntonické koma je rozděleno mezi kvinty D–A a A–E. Tyto kvinty mají velikost

$$\frac{3}{2} : \sqrt{\frac{81}{80}} \approx 1,509345885$$

Což je asi 712,71 centů. A další snížená kvinta bude opět Cis–Fis a to o schisma

$$\frac{3}{2} : \frac{3^8 \cdot 5}{2^{15}} \approx 1,501693726$$

Neboli přibližně 703,91 centů. Ostatní kvinty zůstávají čisté a zbylé frekvence se dopočítají obdobně jako u ladění Kirnberger I. [14].

Kirnberger III.

Zde se opět opakuje zmenšení kvinty Fis-Cis o schizma, zatímco syntonické koma je rozděleno tentokrát mezi čtyři kvinty, a to C-G, D-A, A-H a A-E. Tyto kvinty mají tedy velikost:

$$\frac{3}{2} : \sqrt[4]{\frac{81}{80}} \approx 1,504665686$$

Kvinta Fis-Cis je stejně velká jako u Kirnberger II. , ostatní kvinty kvintového kruhu jsou čisté a frekvence zbylých intervalů můžeme opět dopočíst [14].

Werckmeisterovo ladění

Dalšími z používaných nerovnoměrných ladění obdobných Kirnbergerovým je například ladění, které zkonstruoval jiný německý hudební teoretik Andreas Werckmeister. Ten postupoval podobně jako Kirnberger, s tím rozdílem, že pythagorejské koma rozdělil rovnoměrně mezi 4 kvinty C-G, G-D, D-A a H-Fis. Werckmeister vytvořil další způsoby rozdělení koma, tento byl ale nejpoužívanější. Kvinty mají velikost [1]

$$\frac{3}{2} : \sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^{19}}} \approx 1,505090255$$

Důvodem pro nerovnoměrné rozložení pythagorejského komatu mezi 12 kvint (což je principem všech ladění typu Kirnberger nebo Werckmeister) je lepší přiblížení přirozené velikosti velké tercie a (5:4) a čisté kvinty (3:2) než když použijeme rovnoměrné rozdělení, jak je tomu u rovnoměrně temperovaného ladění, kde je koma rozděleno opravdu rovnoměrně mezi všech 12 kvint. Zde je také kvintový kruh uzavřen, můžeme tedy modulovat do jiných tónin bez nutnosti přelaďování nástroje, jak je tomu u přirozených a středotónových ladění (v nich jde o zmenšení komatu, nikoliv odstranění). Ovšem stejně nezískáme stejné frekvence pro všechny kvinty ani tercie, ale rozdíl se oproti přirozeným laděním s modulacemi do vzdálenějších tónin nezvětšuje.

4.3.2 Rovnoměrně temperovaná ladění

Jedny z prvních zmínek o rovnoměrně temperovaném ladění se objevují v knize Erweiterte und verbesserte Ogel – Probe z roku 1698. Všeobecně se rozšířilo po vydání sbírky skladeb Das wohltempertierte Klavier v roce 1721 od Johanna Sebastiana Bacha. Bylo nutné nalézt takové ladění, při kterém by bylo možné modulovat do vzdálených tónin. Výsledkem bylo rovnoměrně temperované ladění [2].

U rovnoměrně temperovaného ladění je vzdálenost (poměr frekvencí) mezi jakýmikoli dvěma sousedními půltóny totožná. Přesně stejné jsou i všechny intervaly stejného druhu (kvinty, kvarty, tercie atd.). Když chceme dělit oktávu na 12 stejných částí, musíme spočítat dvanáctou odmocninu čísla 2. Tedy chceme najít takové číslo, které násobené dvanáctkrát s nějakou frekvencí dá postupně dvojnásobek této frekvence. Rovnoměrně temperované ladění je původně přiblížením 12 kvint 7 oktávám. Jinými slovy pythagorejské koma je rovnoměrně rozděleno mezi 12 kvint v rámci 7 oktáv. Chyba pro každou čistou kvintu je tedy 1/12 pythagorejského komatu, což je mnohem menší číslo než syntonické koma, které vznikne při didymickém ladění, kde se používají čisté velké tercie [2].

Je-li třeba rozdělit oktávu na dvanáct stejných dílů (půltónů), musíme dvanácti kroky dosáhnout dvojnásobku výchozí frekvence. Frekvence v rovnoměrně temperovaném ladění tedy tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \sqrt[12]{2}$. Jelikož hodnota $\sqrt[12]{2}$ je iracionální číslo, všechny intervaly kromě oktávy se v rovnoměrně temperovaném ladění liší od intervalů v čistém ladění.

Věta 4.1. *Číslo* $\sqrt[12]{2}$ *je iracionální.*

Důkaz: Předpokládejme, že číslo $\sqrt[12]{2}$ je racionální. V tom případě lze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel $\frac{a}{b} = \sqrt[12]{2}$, kde a, b jsou nesoudělná. Po umocnění dostaneme $\frac{a^{12}}{b^{12}} = 2$ neboli $a^{12} = 2b^{12}$. Z toho vyplývá, že číslo a^{12} je sudé, proto i a je sudé a lze jej vyjádřit jako $a = 2c$. Dosadíme-li do předchozího vztahu, dostaneme $(2c)^{12} = b^{12}$, z čehož lze stejným způsobem odvodit, že i číslo b je sudé a čísla a a b mají společný násobek 2, tudíž nejsou nesoudělná a to odporuje předpokladu, tj., došli jsme ke sporu s předpokladem, že a, b jsou nesoudělná, a číslo $\sqrt[12]{2}$ je tedy iracionální.

Rovnoměrně temperované ladění je tedy charakterizováno následující posloupností čísel, což jsou poměry frekvencí půltónů vzhledem prvnímu tónu oktávy:

$$1 = (\sqrt[12]{2})^0,\ \sqrt[12]{2}, (\sqrt[12]{2})^2, ..., (\sqrt[12]{2})^{12} = 2$$

Jeden půltón má při rovnoměrně temperovaném ladění velikost 100 centů, oktáva tedy 1200 centů.

Poměry frekvencí vypočteme následujícím způsobem:
V intervalu velká sekunda, tedy například mezi tóny C a D jsou dva půltóny. Interval prima má poměr frekvencí 1:1, tento poměr zvětšíme dvakrát výše uvedený kvocient

$$(1:1) \cdot (2^{\frac{1}{12}})^2 = 2^{\frac{1}{6}} : 1$$

Mezi tóny D a E jsou opět dva půltóny, opět poměr frekvencí zvětšíme o dva kvocienty

$$(2^{\frac{1}{6}} : 1) \cdot (2^{\frac{1}{12}})^2 = 2^{\frac{1}{3}} : 1$$

Všechny frekvence jsou uvedeny v **Tabulce 13**.

V **Tabulce 14** je srovnání pythagorejského a rovnoměrně temperovaného ladění pro intervaly durové i mollové stupnice.

V praxi se většinou používá jako základní frekvence tónu A1 neboli komorního a, a to 440 Hz. Ne vždy tomu ale bylo takto. Dříve každý směr nebo hudební škola měly svůj

Tabulka 13: **Poměry frekvencí v rovnoměrně temperovaném ladění pro durovou stupnici**

Interval	**Poměr frekvencí**	**Vzdálenost v centech**
prima	1:1	0
velká sekunda	$2^{\frac{1}{6}} : 1$	200
velká tercie	$2^{\frac{1}{3}} : 1$	400
kvarta	$2^{\frac{5}{12}} : 1$	500
kvinta	$2^{\frac{7}{12}} : 1$	700
velká sexta	$2^{\frac{3}{4}} : 1$	900
velká septima	$2^{\frac{11}{12}} : 1$	1100
oktáva	2:1	1200

Tabulka 14: **Srovnání pythagorejského a rovnoměrně temperovaného ladění pro intervaly durové i mollové stupnice**

Interval	**Poměr frekvencí**		**Vzdálenost v centech**	
	Rovn. temp.	**Pythag.**	**Rovn. temp.**	**Pythag.**
prima	1:1	1:1	0	0
velká sekunda	$2^{\frac{1}{6}} : 1 = 1,122462$	$9 : 8 = 1,125000$	200	203,910
malá tercie	$2^{\frac{1}{4}} : 1 = 1,189207$	$32 : 27 = 1,185185$	300	293,135
velká tercie	$2^{\frac{1}{3}} : 1 = 1,259921$	$81 : 64 = 1,265625$	400	407,820
kvarta	$2^{\frac{5}{12}} : 1 = 1,334834$	$4 : 3 = 1,333333$	500	498,045
kvinta	$2^{\frac{7}{12}} : 1 = 1,498307$	$3 : 2 = 1,500000$	700	701,955
malá sexta	$2^{\frac{2}{3}} : 1 = 1,587401$	$128 : 81 = 1,580247$	800	792,180
velká sexta	$2^{\frac{3}{4}} : 1 = 1,681493$	$27 : 16 = 1,687500$	900	905,865
malá septima	$2^{\frac{5}{6}} : 1 = 1,781797$	$16 : 9 = 1,777778$	1000	996,090
velká septima	$2^{\frac{11}{12}} : 1 = 1,887749$	$243 : 128 = 1,898438$	1100	1109,765
oktáva	2:1	2:1	1200	1200

vlastní standard pro tuto frekvenci. Například od roku 1780 používal skladatel J. F. Händel frekvenci 409 Hz, v barokní hudbě se používala hodnota 415 Hz, v Milánské opeře se v 18. století používala frekvence 452 Hz a v roce 1958 se mezinárodní komise shodla na používání 440 Hz [5].

Nyní si ukažme, jak se tedy vypočte frekvence v Hz, pokud známe poměry frekvencí pro všechny tóny stupnice.

Nejprve se určí frekvence tónu C1 (při rovnoměrně temperovaném ladění):

$$\frac{440}{2^{\frac{3}{4}}} = 261,63 \text{ Hz}$$

Poté už můžeme vypočítat frekvenci v Hz pro všechny ostatní tóny stupnice. Například frekvenci tónu D (velká sekunda) získáme takto:

$$261,63 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 293,66 \text{ Hz}$$

V **Tabulce 15** jsou uvedeny hodnoty frekvence v jednotkách Hz včetně výpočtu i pro ostatní tóny durové stupnice a to jak při ladění rovnoměrně temperovaném, tak při ladění pythagorejském.

Tabulka 15: **Frekvence v Hz všech tónů stupnice C dur v rovnoměrně temperovaném ladění**

Tón	**Pythagorejské**	**Rovn. temperované**
C	$440 \cdot \frac{16}{27} = 260,74$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 261,63$ Hz
D	$260,74 \cdot \frac{9}{8} = 293,33$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 293,66$ Hz
E	$260,74 \cdot \frac{81}{64} = 330,00$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 329,63$ Hz
F	$260,74 \cdot \frac{4}{3} = 367,65$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 349,23$ Hz
G	$260,74 \cdot \frac{3}{2} = 391,11$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{7}{12}} = 391,00$ Hz
A	440 Hz	440 Hz
H	$260,74 \cdot \frac{243}{128} = 495,00$ Hz	$261,63 \cdot 2^{\frac{11}{12}} = 493,88$ Hz
C	$260,74 \cdot \frac{2}{1} = 521,48$ Hz	$261,63 \cdot 2 = 523,25$ Hz

4.3.3 Rovnoměrně temperované ladění a řetězové zlomky

Pokud bychom nebrali v úvahu, že dnes se běžně používá dvanáctitónová stupnice, mohla by nás napadnout otázka, zda neexistuje vhodnější počet tónů v oktávě, který by zajistil, že při použití rovnoměrně temperovaného ladění se více přiblížíme čistým intervalům.

Například kvinta je tvořena v dvanáctitónové stupnici 7 půltóny, tedy tvoří $\frac{7}{12}$ oktávy a její frekvence se vypočte jako $2^{\frac{7}{12}}$. Nelze ale nalézt jiné rozdělení oktávy (počet tónů v oktávě) a příslušný počet tónů v kvintě tak, abychom byli blíže čistému poměru frekvencí pro kvintu, tedy 3:2? To lze zjistit pomocí tzv. řetězových zlomků.

Jinými slovy, chceme najít zlomek $\frac{x}{y}$, kde x vyjadřuje počet tónů příslušejících danému intervalu (např. kvintě) a y je číslo, které vyjadřuje celkový počet tónů v oktávě. Chceme tedy vědět na kolik y-tin umocnit číslo 2, abychom dostali co nejlepší aproximaci frekvence čistého ladění, tedy $\frac{3}{2}$ pro kvintu. Toto zapíšeme následovně

$$2^{\frac{x}{y}} \approx \frac{3}{2}$$

To přepíšeme pomocí logaritmu

$$\frac{x}{y} \approx \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

A hledáme přirozená čísla x a y, pro která je aproximace nejlepší.

Abychom dostali rovnost, potřebovali bychom tedy vyjádřit $\log_2(\frac{3}{2})$ jako podíl dvou přirozených čísel $\frac{x}{y}$. Vzhledem k tomu, že $\log_2(\frac{3}{2})$ je iracionální číslo, tento podíl nalézt nelze. Dále platí, že $\log_2(\frac{3}{2}) = \frac{\log_2(3)}{\log_2(2)} = \log_2(3)$, takže stačí iracionalitu dokázat pouze pro $\log_2(3)$.

Lemma 4.1. *Číslo $log_2(3)$ je iracionální.*

Důkaz: Předpokládejme, že číslo $\log_2(3)$ lze vyjádřit poměrem dvou přirozených čísel m a n. Potom $3 = 2^{\frac{m}{n}}$ nebo $3^m = 2^n$. Tato rovnost nastat nemůže, protože číslo 3^m je vždy liché a číslo 2^n je vždy sudé [1].

To nejlepší, co tedy nyní můžeme udělat, je aproximovat $\log_2(\frac{3}{2})$ co nejpodobnějším podílem dvou čísel. K tomu nám pomůže algoritmus, který slouží právě například k aproximaci iracionálních čísel zlomkem obsahujícím přirozená čísla [1].

Řetězové zlomky mají tvar:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

kde $a_0 \in Z, a_1, a_2, a_3, ... \in N$

A zapisujeme je zjednodušeně takto:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$$

Každé iracionální číslo lze zapsat jedinečným řetězovým zlomkem a posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, ...$ je konečná právě tehdy, když je toto číslo racionální [7].

Algoritmus pro tvorbu řetězových zlomků vypadá takto:
Nalezneme největší celé číslo, které je menší nebo rovno zadanému číslu, které označíme x. Pro tento účel užijeme funkci celá část čísla x neboli $[x]$, kde $[x]$ je zároveň číslo a_0. Pro rozdíl $x - [x]$ platí $0 < x - [x] < 1$. Toto číslo invertujeme a dostaneme $\frac{1}{x-[x]}$, což je číslo větší než jedna.

Nyní si označíme $x_0 = x, [x] = a_0, x_1 = \frac{1}{x-[x]}$ a máme

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

Dále pokračujeme stejným způsobem.
Označíme $a_1 = [x_1], x_2 = \frac{1}{x_1-[x_1]}$ a obecně $a_n = [x_n], x_{n+1} = \frac{1}{x_n-[x_n]}$ [1]

Nyní se budeme zabývat tím, jak lze tento algoritmus zjednodušit a řetězové zlomky, nebo pokud jsou nekonečné tak jejich části, počítat efektivněji. Toho lze docílit pomocí tzv. sblížených zlomků [7].

Definice 4.1. *Sblíženým zlomkem řádu n budeme rozumět zlomek*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \ ,$$

kde p_n a q_n jsou přirozená nesoudělná čísla.

Pomocí následující věty lze pak tyto zlomky vypočítat [7].

Věta 4.2. *Pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků platí rekurence:*

$$p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1,$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

pro $k \geq 2$.

Důkaz: Předpokládejme, že věta platí pro všechna přirozená n. Nejprve ověříme, že věta platí pro $n = 0$ a $n = 1$. Pro $n = 0$ platnost vyplývá již z věty samotné, pro $n = 1$ dostáváme $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$. Předpokládáme, že jestliže tvrzení platí pro n, pak platí pro všechna přirozená čísla menší než n. Dostáváme tedy:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_n}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Nyní dokážeme, že pokud věta platí pro každé přirozené n, pak platí také pro $n - 1$:

$$\frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{a_n(a_{n_1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Na základě této věty byly v MATLABu vytvořeny programy, které při dané toleranci vypočtou nejmenší možný počet tónů v oktávě tak, aby odchylky frekvencí velké tercie, kvarty a kvinty v rovnoměrně temperovaném ladění nepřesáhly danou hranici (tedy aby odchylky byly menší než tolerance, kterou zvolíme). Program tedy hledá pro každý z těchto intervalů zlomek $\frac{x}{y}$ tak, aby splňoval

$$\left| 1 - \frac{2^{\frac{x}{y}}}{a : b} \right| < tolerance \ ,$$

kde $a : b$ poměr frekvencí daného intervalu v didymickém (čistém) ladění.

Funkce najdi_min bere postupně počet tónů v oktávě počínaje jedním tónem, postupně tento počet navyšuje a zastaví se tehdy, když nalezne počet tónů v oktávě, který splňuje kritéria uvedená výše.

```
function najdi_min(argin)

tol = argin; % tolerance

delej = true;
tonu = 1;

while delej
    tonu = tonu+1;
    chyba = odchyl(tonu); %výpočet odchylek
    if max(chyba) < tol % je splněna podmínka
        disp(['minimalni pocet tonu je ' num2str(tonu)])
    %zobrazení počtu tónů v oktávě
        disp(['chyby u kvarty, kvinty a tercie jsou ' num2str(chyba)])
    %zobrazení odchylek
        delej = false;
    end
end
```

Následující funkce (odchyl) počítá odchylky frekvencí těchto tří intervalů v temperovaném ladění od ladění čistého. Tato funkce byla použita uvnitř funkce předchozí (najdi_min). Vstupním parametrem je počet tónů v oktávě získaný pomocí funkce najdi_min a výstupním tyto odchylky při daném počtu tónů:

```
function argout = odchyl(argin)

m = argin; % počet tónů v oktávě
% čisté hodnoty frekvencí
kvart=4/3;
kvint=3/2;
terc=5/4;
```

```
% řešení rovnice 2^(x/m) je co nejblíž 3/2 (pro případ kvinty)
xkvart = round(m*log(kvart)/log(2));
xkvint = round(m*log(kvint)/log(2));
xterc = round(m*log(terc)/log(2));
% výpočet relativní odchylky
okvart = abs(kvart - 2^(xkvart/m))/kvart;
okvint = abs(kvint - 2^(xkvint/m))/kvint;
oterc = abs(terc - 2^(xterc/m))/terc;

argout = [okvart okvint oterc];
```

V **Tabulce 16** je ukázka výsledků získaných pomocí těchto dvou funkcí při různých tolerancích.

Tabulka 16: **Odchylky frekvencí vybraných intervalů při různých počtech tónů v oktávě**

Tolerance	**Počet tónů v oktávě**	**Odchylka tercie**	**Odchylka kvarty**	**Odchylka kvinty**
0,5%	19	0.41781%	0.41607%	0.42459%
0,1%	53	0.00394%	0.00394%	0.08123%
0,05%	118	0.01502%	0.01502%	0.00733%
0,01%	376	0.00997%	0.00997%	0.00829%

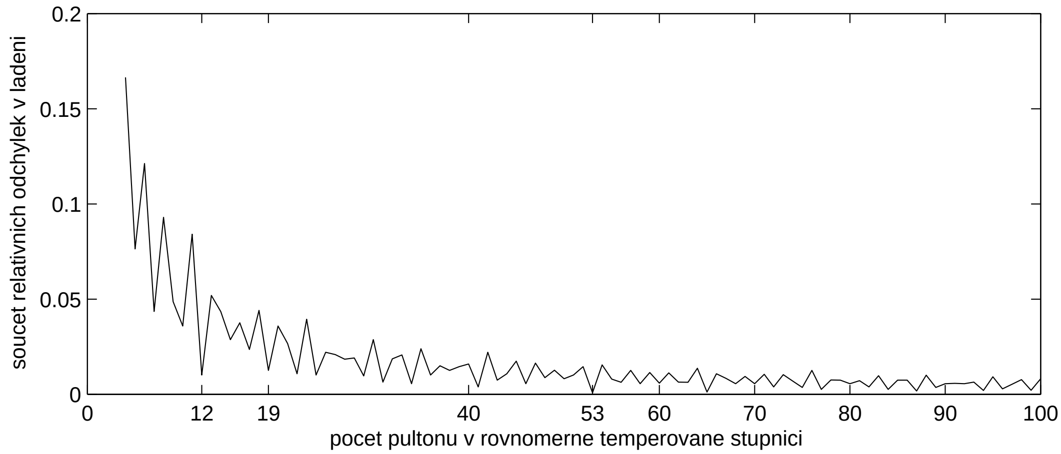
Pokud bychom tedy chtěli, abychom se při použití rovnoměrně temperovaného ladění více přiblížili čistým frekvencím intervalů, museli bychom oktávu rozdělit na více než 12 tónů. Některé z vícetónových stupnic se již v minulosti používaly, nebo se alespoň o to někteří skladatelé a tvůrci hudebních nástrojů pokoušeli.

Například již v roce 1876 Robert Bosanquet vyrobil 53-tónové varhany. Či v roce 1886 maďarský pianista Paul von Jankó sestrojil 41-tónové piano. Oba tyto nástroje jsou ojedinělé a dnes se již z praktických důvodů nepoužívají, neboť dnes se používá téměř výhradně 12-tónová stupnice.

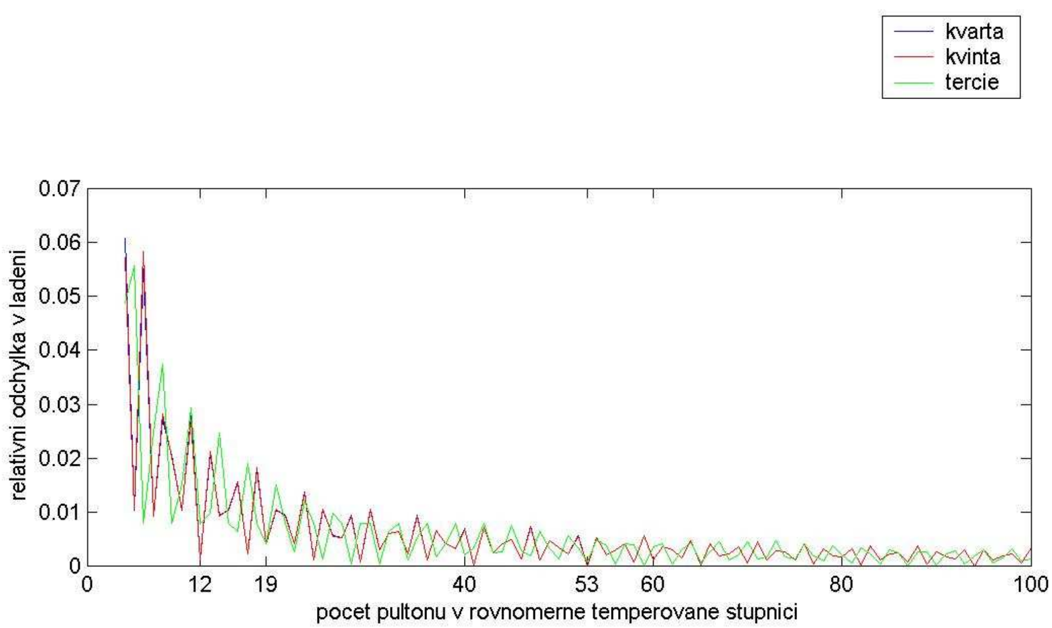
Pokud porovnáme hodnoty odchylek pro 12-tónové rovnoměrně temperované ladění (tercie $0,79368\%$, kvarta $0,11299\%$ a kvinta $0,11286\%$) s ostatními z tabulky výše, vidíme, že například ve srovnání s 19-tónovou stupnicí je zde kvarta i kvinta znatelně blíž čistým frekvencím v případě 12 tónů , pouze kvinta je na tom o něco hůře.

Dále byl vytvořen program, který vykreslí dva grafy. První graf zobrazí odchylky (osa y) frekvencí jednotlivých intervalů při různých počtech tónů v oktávě (osa x, v našem příkladě od 3 do 100 tónů). Druhý ukáže celkový součet těchto odchylek. Grafy, které tento program vytvoří jsou vidět na **Obrázku 10 a 11**.

Obr. 10: **Odchylky frekvencí velké tercie, kvarty a kvinty v temperovaném ladění od jejich čistých frekvencí při různých počtech tónů**



Obr. 11: **Součet odchylek frekvencí velké tercie, kvarty a kvinty v temperovaném ladění od jejich čistých frekvencí při různých počtech tónů**



4.4 Srovnání vybraných ladění

V této kapitole uvedeme srovnání čtyř typů ladění, kterými jsme se zabývali. Jedná se o ladění pythagorejské, didymické, středotónové a rovnoměrně temperované. V tabulkách jsou srovnání z hlediska poměrů frekvencí v intervalech durové stupnice, z hlediska vzdáleností tónů v centech a frekvencích v Hz.

Tabulka 17: **Srovnání poměrů frekvencí vybraných ladění pro durovou stupnici**

Interval	**Pythagorejské**	**Didymické**	**$\frac{1}{4}$-koma středotónové**	**Rovn. temp.**
prima	1:1	1:1	1:1	1:1
velká sekunda	$9:8=1,125$	$9:8=1,125$	$\sqrt{5}:2=1,118034$	$2^{\frac{1}{6}}:1=1,122462$
velká tercie	$81:64=1,265625$	$5:4=1,25$	$5:4=1,25$	$2^{\frac{1}{3}}:1=1,259921$
kvarta	$4:3=1,333333$	$4:3=1,333333$	$2:5^{\frac{1}{4}}=1,337481$	$2^{\frac{5}{12}}:1=1,334834$
kvinta	$3:2=1,5$	$3:2=1,5$	$5^{\frac{1}{4}}:1=1,495349$	$2^{\frac{7}{12}}:1=1,498307$
velká sexta	$27:16=1,6875$	$5:3=1,666667$	$5^{\frac{3}{4}}:2=1,671851$	$2^{\frac{3}{4}}:1=1,681493$
velká septima	$243:128=1,898438$	$15:8=1,875$	$5^{\frac{5}{4}}:4=1,869186$	$2^{\frac{11}{12}}:1=1,887749$
oktáva	2:1	2:1	2:1	2:1

Tabulka 18: **Srovnání vzdáleností tónů v centech vybraných ladění pro durovou stupnici**

Interval	**Pythagorejské**	**Didymické**	**$\frac{1}{4}$-koma středotónové**	**Rovn. temp.**
prima	0	0	0	0
velká sekunda	203,910	203,910	193,157	200
velká tercie	407,820	386,314	386,314	400
kvarta	498,045	498,045	503,422	500
kvinta	701,955	701,955	696,579	700
velká sexta	905,865	884,359	889,735	900
velká septima	1109,765	1088,269	1082,892	1100
oktáva	1200	1200	1200	1200

Tabulka 19: **Srovnání frekvencí tónů vybraných ladění stupnice C dur v Hz**

Tón	Pythagorejské	Didymické	$\frac{1}{4}$-koma středotónové	Rovn. temp.
C1	260,741	264	263,181	261,626
D1	293,333	297	294,246	293,665
E1	330	330	328,977	329,628
F1	347,654	352	352	349,228
G1	391,111	396	393,548	391,995
A1	440	440	440	440
H1	495	495	491,935	493,883
C2	521,481	528	526,363	523,251

5 VÝZKUM ROZDÍLU MEZI PYTHAGOREJSKÝM A RONOMĚRNĚ TEMPEROVANÝM LADĚNÍM

5.1 Cíl

Cílem mého experimentu je zjistit, zda existuje slyšitelný rozdíl mezi pythagorejským (resp. čistým, neboť kvinta má v obou laděních stejný poměr frekvencí) a rovnoměrně temperovaným laděním a pokud existuje, pak potvrdit či vyvrátit teoretické předpoklady, které říkají, že čistá ladění zní libozvučněji než temperovaná.

V MATLABu byl vytvořen program, který vygeneruje soubor typu WAV. Jedná se o dvouzvuky tónů v intervalu kvinty, kde tóny mají frekvence vypočtené dle dvou již zmíněných typů ladění. Tyto dvouzvuky v různých kombinacích po třech byly puštěny několika lidem a na základě jejich odpovědí na jednoduchý dotazník byl tento experiment statisticky vyhodnocen. Základní tón má zde frekvenci 220 Hz. V pythagorejském ladění má tedy tón ležící o kvintu výš frekvenci

$$220 \cdot \frac{3}{2} = 330 \text{ Hz}$$

a v rovnoměrně temperovaném

$$220 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 329,6276 \text{ Hz}$$

Rozdíl je tedy přibližně 0,372443 Hz, vyjádřeno poměrem frekvencí

$$\frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}} \approx 1,001129891$$

a v centech

$$1200 \log_2(1,001129891) \approx 1,955000865 \text{ centů}$$

Neboli pythagorejská kvinta je velká přibližně 701,955000865 centů a rovnoměrně temperovaná 700 centů.

Je tedy otázkou, zda člověk dokáže tento malý rozdíl rozeznat a jestli nějak ovlivní vnímání tónu co se týče konsonantnosti. Vzhledem k tomu, že na rovnoměrně temperované ladění je lidské ucho dnes zvyklé, je zde možnost, že přestože pythagorejské ladění by mělo teoreticky znít libozvučněji, nakonec tomu bude naopak.

5.2 Příprava experimentu

Nejprve byly vytvořeny m-soubory, které vytvořily soubory typu WAV. Každý obsahoval tři souzvuky dlouhé jednu sekundu a mezi nimi dvě pauzy dlouhé také jednu sekundu. Tyto tři zvuky byly kombinací souzvuku naladěných dle pythagorejského nebo rovnoměrně temperovaného ladění. Vyskytovaly se mezi nimi buď tři stejné souzvuky, nebo jeden v pythagorejském a dva v rovnoměrně temperovaném ladění a naopak a to v různém pořadí. Tedy označíme-li pythagorejskou kvintu „P“ a temperovanou „T“, jeden posluchač slyšel například tři ukázky vypadající takto: PPT–PPP–TTP.

Ke každé poslechnuté trojici dostal účastník dotazník, který vypadal takto:

V této ukázce jsem slyšel(a):
a) tři stejné akordy
b) dva stejné a jeden odlišný

Pokud jste odpověděl(a) b), který z akordů byl odlišný od ostatních?
a) první
b) druhý
c) třetí

Který akord se Vám líbil více?

a) ten odlišný

b) ty dva, které byly stejnéM-soubor, který tyto tóny vygeneroval je popsán v následující kapitole.

5.3 M-file

Následující m-file je ukázkou, jak lze vytvořit pomocí počítače tóny. Tento soubor je jeden z těch, jejichž výsledný soubor WAV byl použit na testování. Vytvoří tři souzvuky dlouhé jednu vteřinu, mezi nimiž je vteřinová pauza. První dva souzvuky jsou tóny vzdálené o kvintu s frekvencí vypočtenou dle pythagorejského ladění, poslední souzvuk je v rovnoměrně temperované kvintě. Frekvence základního tónu, tónu o pythagorejskou kvintu výš a o temperovanou kvintu výš jsou označeny f1, f2, f3.

Dále je nutné určit délku zvuku, tedy 1 vteřina, a samplovací frekvenci. Ta označuje počet samplů za 1 vteřinu, ve kterých se ze spojitého signálu se vytvoří signál diskrétní. Je to tedy jinými slovy řečeno počet diskrétních časů, ve kterých se „odeberou vzorky ze spojité křivky“. Zde byla použita frekvence 44 100 Hz, která se běžně používá například k zápisu CD apod.

Uvnitř for cyklů, které tvoří součet sinusoid základního tónu a alikvotních tónů, které mají frekvence 2f1, 3f1, 4f1, ..., jsou kromě samotných sinusoid určeny exponenciálně klesající amplitudy alikvotních tónů. Postupně se tedy vytvoří tóny o třech frekvencích, součtem se vytvoří souzvuky. Vypíšeme vektor souzvuků tak, jak mají jít po sobě, a na závěr se použije příkaz wavwrite, který tyto zvuky uloží do souboru PPT.wav.

Nyní následuje celý m-file tak, jak byl naprogramován v MATLABU a za znakem procenta je popis jednotlivých kroků.

```
f1 = 220;   %[Hz] základní frekvence
f2 = f1*(3/2);  %[Hz] frekvence tónu o kvintu výš v pythagorejském ladění
f3 = 220*(2^(7/12));  %[Hz] frekvence tónu o kvintu výš v
rovnoměrně temperovaném ladění
maxt = 1;   %[s] délka zvuku
```

```
Fs = 44100;  %[Hz] samplovací frekvence
delta = 0.2;  %parametr zmenšování amplitudy alikvótů
pocet = 10;  %počet alikvótů (těch je 9, neboť pro i = 1
dostaneme základní tón)

dt = 1/Fs;  %časový úsek mezi dvěma vzorky
t = 0:dt:maxt;  %vzorkování v časových úsecích o délce dt od začátku
do konce zvuku
t = t';  %transpozice vektoru t

%nyní vytvoříme tón a s frekvencí 220 Hz
ton1 = 0*t;
for i=1:1:pocet %for cyklus 10-krát se opakující, abychom získali
základní tón a 9 alikvót
    ton1 = ton1 + exp(-delta*i)*sin(2*pi*f1*i*t);   %tón je tvořen
součtem základního tónu a alikvót
end
mm = max(ton1);
ton1 = ton1/(3*mm);  %normování amplitudy

%tón o pythagorejskou kvintu výš s frekvencí f2
ton2 = 0*t;
for i=1:1:pocet
    ton2 = ton2 + exp(-delta*i)*sin(2*pi*f2*i*t);
end
mm = max(ton2);
ton2 = ton2/(3*mm);

%tón o rovnoměrně temperovanou kvintu výš s frekvencí f3
ton3 = 0*t;
```

```
for i=1:1:pocet
    ton3 = ton3 + exp(-delta*i)*sin(2*pi*f3*i*t);
end
mm = max(ton3);
ton3 = ton3/(3*mm);

pyth = ton1 + ton2;   %souzvuk dvou tónů v pythagorejské kvintě
ticho = 0*a;   %pauza mezi souzvuky
rovn = ton1 + ton3;    %souzvuk dvou tónů v rovnoměrně temperované kvintě

celek = [pyth; ticho; pyth; ticho; rovn];  %celkový zvuk
wavwrite(celek,Fs,'PPT.wav')   %vytvoření souboru typu WAV
```

Pokud nakonec přidáme příkaz pro výpočet rychlé Fourierovy transformace a necháme si zobrazit graf, vidíme frekvenční spektrum souzvuku, který jsme vytvořili. Na vodorovné ose jsou frekvence, které jsou v tónu zastoupeny, a na svislé ose je znázorněno, v jaké míře jsou zastoupeny. Vidíme, že na **Obrázku 12**, který vyjadřuje Fourierovu transformaci souzvuku v pythagorejské kvintě, jsou nejvíce zastoupeny frekvence základních tónů, tedy, 220 a 330 Hz a dále frekvence, které jsou společnými násobky těchto frekvencí (660, 1320,..). Zatímco na **Obrázku 13** je zobrazeno frekvenční spektrum v rovnoměrně temperované kvintě, kde například u hodnoty 660 Hz vidíme, že je zastoupena méně než u pythagorejské kvinty, neboť příslušné alikvóty mají frekvenci 660 Hz u pythagorejské a přibližně 659,26 Hz u temperované kvinty. A nakonec na **Obrázku 14** je zobrazen výsledek Fourierovy transformace pro rozdíl těchto souzvuků, kde vidíme pouze ty frekvence alikvotních tónů, které se u kvint liší. Rozdíl frekvencí základního tónu, které jsou stejné a tedy mají i stejné alikvóty, jsou rovny nule.

MATLAB využívá k výpočtu frekvenčního spektra takzvanou rychlou Fourierovu transformaci, což je způsob výpočtu diskrétní Fourierovy transformace. Ta je dána vztahem v komplexním tvaru

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

kde $k = 0, 1, 2, ...N - 1$

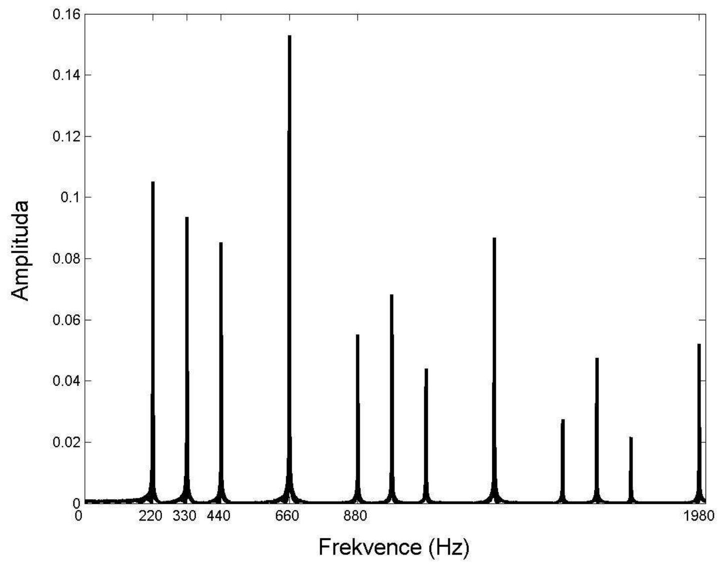
Diskrétní Fourierova transformace umožňuje ze zadaných N diskrétních hodnot (vzorků) signálu $x(n)$ vypočítat N diskrétních hodnot spektra $X(k)$ [11].

Výpočet hodnot $X(k)$ je časově velmi náročný, neboť při větších N zahrnuje velké množství aritmetických operací, zejména součinů. Jejich počet lze snížit využitím algoritmu již zmíněné rychlé Fourierovy transformace. Ta je obecně založena na rozkladu posloupnosti N hodnot na kratší posloupnosti, které vyžadují menší počet operací. Kombinací výsledků je pak možné získat výsledek diskrétní Fourierovy transformace pro N hodnot na základě menšího počtu aritmetických operací [11].

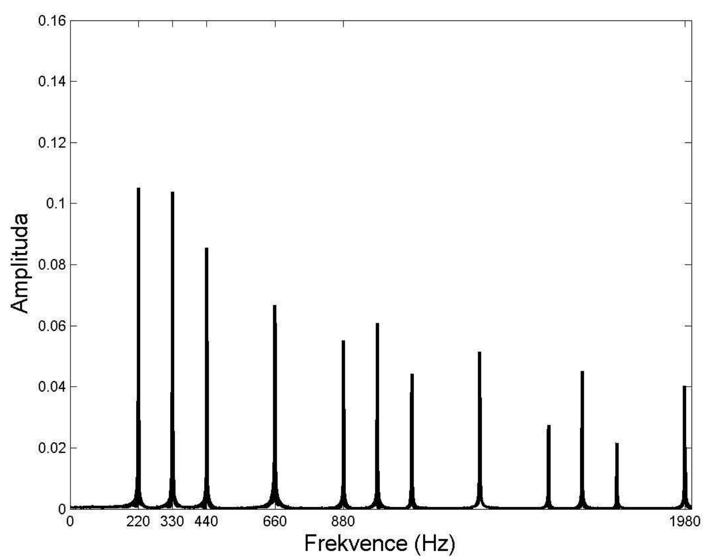
MATLAB kód pro výpočet Fourierovy transformace a zobrazení grafu:

```
NFFT = 2^nextpow2(Fs);
Y = fft(pyth,NFFT)/Fs;
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2);
plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2)))
```

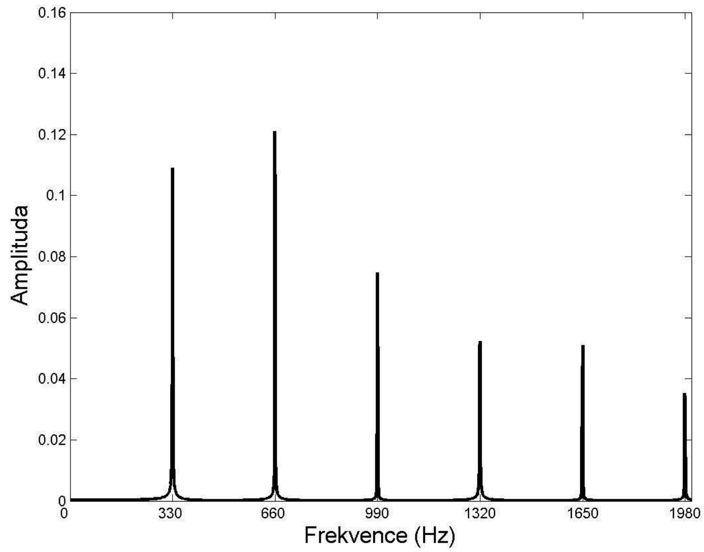
Obr. 12: **Frekvenční spektrum souzvuku (čistá kvinta)**



Obr. 13: **Frekvenční spektrum souzvuku (temperovaná kvinta)**



Obr. 14: **Frekvenční spektrum rozdílu čisté a temperované kvinty**



5.4 Výsledky průzkumu

Výzkumu se zúčastnilo celkem 56 lidí. Skupinu tvořili hudebníci (25 lidí) a hudební laikové (31 lidí). Tyto dvě skupiny byly posuzovány odděleně. Statistický soubor, na kterém testujeme ale netvoří účastnící výzkumu, ale poslechnuté trojice souzvuků. Vzhledem k tomu, že odpovědi by měly být nezávislé, mohl by zde nastat problém. Každý člověk si ale poslechne tři různé kombinace souzvuků a budeme tedy předpokládat, že odpovědi každého posluchače lze považovat za nezávislé. Těch máme tedy celkem 168, neboť každý si poslechl jednu trojici, kde se objevuje pouze jeden typ ladění (tedy celkem 56 trojic) a dvě trojice, kde je jeden souzvuk odlišný (112 testovacích trojic).

Všechny výsledky výzkumu jsou shrnuty v **Tabulce 20**.

Zkoumat, jaký ze dvou typů souzvuků se účastníkům líbil více má smysl pouze v těch případech, kdy účastník odpověděl správně na 1. i 2. otázku. U ukázek, kde byl jeden souzvuk odlišný od zbylých dvou, bylo správně odpovězeno na obě dvě otázky (zda je slyšet rozdíl a který souzvuk se liší) celkem 19 u nehudebníků a 28 u hudebníků. U každého posluchače se jednalo o dvě ze tří ukázek, tedy celkem 62 resp. 50 poslechnutých ukázek.

Tabulka 20: Výsledky

	Nehudebníci	**Hudebníci**
Celkový počet posluchačů	31	25
Počet poslechnutých stejných trojic	31	25
Počet správně rozpoznaných stejných trojic	25	23
Počet poslechnutých rozdílných trojic	62	50
Počet správně rozpoznaných rozdílných trojic	19	28
Počet posluchačů, kterým se více líbil pythagorejský souzvuk	10	7
Počet posluchačů, kterým se více líbil rovnoměrně temperovaný souzvuk	5	12
Počet posluchačů, kteří správně rozpoznali všechny tři ukázky	4	11

5.5 Zpracování výsledků

Nyní chceme testovat hypotézu H_0*: Rozdíl není slyšet* oproti hypotéze H_1*: Rozdíl je slyšet*.

Pokud by platilo, že rozdíl slyšet není, můžeme předpokládat, že lidé budou odpovídat náhodně. To znamená, že pokud uslyší tři stejné souzvuky, polovina odpoví, že slyšela tři stejné, druhá polovina jeden jiný souzvuk. Poměr počtu správně rozpoznaných trojic (v případě tří stejných souzvuků) ku špatně rozpoznaným, by tedy měl být 50 : 50. Ve skutečnosti tento poměr je $\frac{25}{31} : \frac{6}{31}$ u nehudebníků a $\frac{23}{25} : \frac{2}{25}$ u hudebníků ve prospěch správných odpovědí.

Hypotéza H_0 je ekvivalentní hypotéze, že odpovědi tvoří náhodný výběr z binomického rozdělení s parametrem $p = \frac{1}{2}$ – H_0*:* $X \sim Bi(n,p)$*, kde* $p = \frac{1}{2}$. Máme tedy náhodnou veličinu X, což je počet špatně rozpoznaných trojic, která má dle předpokladů binomické rozdělení s parametry n (celkový počet poslechnutých trojic, tedy $n = 31$ u nehudebníků a $n = 25$ u hudebníků) a p, který testujeme.

Podobně můžeme odhadnout parametr p pro trojice, kde jeden souzvuk je odlišný. Opět pokud by rozdíl mezi laděními nebyl slyšet, počet trojic, kde rozdíl byl slyšet ku počtu těch, kde slyšet nebyl, by měl být 50 : 50. Těch 50% trojic, kde rozdíl byl slyšet ještě rozdělíme na případy, kdy je správně identifikován odlišný souzvuk a kdy ne. Pokud by tedy platila hypotéza, že rozdíl slyšet není, posluchači by tipovali náhodně a pravděpodobnost, že se trefí by byla $\frac{1}{3}$. Takže celkem dostáváme pravděpodobnost $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, což je pravděpodobnost, že v případě, že rozdíl mezi laděními nelze rozpoznat, bude trojice, kde jeden souzvuk je jiný než ostatní správně identifikován. Testujeme tedy hypotézu $H_0: \ X \sim Bi(n,p)$, kde $p = \frac{1}{6}$ oproti hypotéze H_1: $X \sim Bi(n,p)$, kde $p \neq \frac{1}{6}$.

Pokud $n > 25$ můžeme binomické rozdělení aproximovat rozdělením normálním. Vypočítáme statistiku Z, která má za předpokladu hypotézy H_0 asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou 0 a jednotkovým rozptylem [16].

$$Z = \frac{r - np}{\sqrt{npq}}$$

Kde $r = x - 0,5$ v případě, že pro naměřenou hodnotu x veličiny X (x je tedy skutečný počet špatně rozpoznaných trojic), platí $x > np$. Naopak pokud $x < np$, pak $r = x + 0,5$. n je celkový počet pozorování, p je odhadnutá pravděpodobnost výskytu veličiny X a $q = 1 - p$ [16].

Pro hodnotu veličiny zjistíme pomocí statistického softwaru R $p - value$, což je pravděpodobnost, se kterou získáme takové výsledky, jaké jsme získali, pokud by platila hypotéza H_0, nebo horší, tedy takové, které ještě více odporují hypotéze. Hraniční hodnota pro $p - value$ je $0,05$. To znamená, že hypotézu H_0 zamítneme, pokud $p - value < 0,05$.

Například pro ukázky se třemi stejnými souzvuky, které byly poslechnuty nehudebníky, kde $r = 6$, $n = 31$, $p = q = 0,5$ dostaneme

$$Z = \frac{6,5 - 31 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{31 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \approx -3,23$$

$$p - value \approx 0,001238$$

A pro trojice obsahující různé souzvuky

$$Z = \frac{18,5 - 62 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{62 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \approx 2,78$$

$$p - value \approx 0,005436$$

Tedy pro oba případy zamítáme hypotézu H_0 a nelze tvrdit, že rozdíl mezi laděními není slyšet, což se potvrdilo i pro skupinu hudebníků. Všechny hodnoty $p - value$ jsou v následující tabulce:

	Tři stejné souzvuky	Odlišné souzvuky
Nehudebníci	$0,001238$	$0,005436$
Hudebníci	$0,000063$	$5,841 \cdot 10^{-7}$

Dále použijeme kontingenční tabulku, abychom zjistili, zda počet správně rozpoznaných trojic závisí na tom, zda jsou poslouchány hudebníky či nehudebníky. Tabulka bude vypadat takto

Skupina posluchačů	Správně poznané	Špatně poznané
Nehudebníci	n_{11}	n_{12}
Hudebníci	n_{21}	n_{22}

kde n_{11} je počet testovacích trojic, které poslouchali nehudebníci a poznali správně, co slyší. Tedy počet těch, jimž byly puštěny tři stejné souzvuky, a poznali, že jsou stejné (25), a těch, kterým byla puštěna trojice s jedním rozdílným souzvukem a ten správně identifikovali (19). Zatímco n_{12} je počet trojic poslechnutých nehudebníky, které byly rozpoznány špatně.

V následující tabulce jsou výsledky výzkumu do těchto kontingenčních tabulek.

Skupina posluchačů	Správně poznané	Špatně poznané
Nehudebníci	44	49
Hudebníci	51	24

Budeme testovat závislost sloupcových a řádkových četností, tedy jestli odpovědi závisí na tom, zda testovací souzvuky poslouchá hudebník či nehudebník. Budeme tedy testovat hypotézu H_0*: Správné rozpoznání souzvuků nezávisí na tom, zda je posluchač hudebník* oproti hypotéze H_1*: Správné rozpoznání souzvuků závisí na tom, zda je posluchač hudebník.* Nyní vypočteme statistiku G, která vypadá takto [15]:

$$G = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$$

kde r a s jsou rozměry kontingenční tabulky, v našem případě tedy $r = s = 2$ a n'_{ij} jsou četnosti očekávané v případě nezávislosti (tedy za platnosti hypotézy H_0) a vypočítají se následovně:

$$n'_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$$

kde

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$$

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$

Například pro prvek n_{11} dostáváme

$$n'_{11} = \frac{(51+24)(51+44)}{(51+24+44+49)} \approx 42,41$$

$$\frac{(n_{11}-n'_{11})^2}{n'_{11}} = \frac{(51-42,41)^2}{42,41} \approx 1,739875$$

$$G \approx 13,96$$

Tato testovací statistika má za platnosti hypotézy H_0 při dostatečně velkém počtu pozorování ($n'_{ij} > 5$ pro každé i a j, což platí) přibližně chí-kvadrát rozdělení s $v = (r-1)(s-1) = 1$ stupni volnosti. Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$, tedy kritický obor tvoří hodnoty G větší než kvantil $\chi^2_{0,95}(1) = 3,84$ neboli hypotézu H_0 zamítneme, pokud $G > 3,84$.

My jsme dostali hodnotu statistiky $G \approx 13,96 > 3,84$, tedy můžeme hypotézu H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05. To znamená, že jestli bude poslechnutá trojice souzvuků správně rozpoznána, závisí na tom, zda ji poslouchá hudebník nebo nehudebník.

Dále se zabývejme otázkou, které ladění se posluchačům, kteří slyšeli rozdíl mezi nimi, líbilo více.

Tuto skupinu lidí ještě roztřídíme do dvou kategorií. Na posluchače, kteří z obou poslechnutých trojic, kde se vyskytovala odlišná ladění, poznali obě (skupina s názvem „Slyší výborně“) nebo jen jednu („Slyší dobře“). Výsledky vyjádřené v procentech jsou uvedeny v následující tabulce.

	Temperované ladění	Pythagorejské ladění	Celkem
Slyší dobře	68,4% (13)	31,6% (6)	19
Slyší výborně	60% (9)	40% (6)	15

Nyní zavedeme dva pojmy - senzitivita a specificita sluchu. Senzitivita sluchu bude pravděpodobnost, že člověk slyší správně rozdíl, pokud tam rozdílný souzvuk opravdu je, zatímco specificita sluchu je pravděpodobnost, že člověk slyší tři stejné souzvuky, pokud opravdu tři stejné poslouchá. Hodnoty vypočteme jednoduše jako podíly počtu správně rozpoznaných trojic a celkového počtu daných trojic. Výsledky jsou opět v tabulce.

	Senzitivita	Specificita
Nehudebníci	$0,31$	$0,81$
Hudebníci	$0,56$	$0,92$

5.6 Shrnutí

Nejprve jsme zkoumali, jestli je vůbec slyšet rozdíl mezi těmito laděními. Ze statistického testu vyplývá, že nemůžeme potvrdit, že rozdíl není slyšet. Tedy zamítáme tuto hypotézu ve prospěch alternativní hypotézy, která říká, že rozdíl slyšet je. Tyto testy provádíme na základě $p - value$, což je jinak řečeno pravděpodobnost, s kterou bychom nulovou hypotézu nezamítli. Tato pravděpodobnost je u skupiny hudebníků ještě menší než u skupiny nehudebníků.

Dalším statistickým testem, který využívá kontingenční tabulky, jsme zamítli hypotézu o tom, že rozpoznatelnost ladění nezávisí na tom, zda ukázku poslouchá hudebník. Tuto hypotézu jsme také zamítli, takže platí, že to, zda bude trojice souzvuků správně identifikována, závisí na tom, jestli si ho poslechne hudebník či nehudebník.

Dalším cílem statistické analýzy získaných dat bylo zjistit, které z dvou typů ladění se posluchačům líbilo více. Zde bylo zjištěno, že rovnoměrně temperované ladění je na tom o něco lépe.

Následně jsme zavedli dva pojmy, které oddělují skupiny ukázek, které byly správně identifikovány, na skupinu se třemi stejnými souzvuky a jedním odlišným. Byla spočítána pravděpodobnost, že tyto souzvuky budou rozpoznány. Z analýzy vyplývá, že specificita (pravděpodobnost rozpoznání tří stejných souzvuků) je znatelně větší než senzitivita.

6 ZÁVĚR

Základními cíli diplomové práce bylo matematicky popsat různé typy ladění vhudbě, dále se naučit a ukázat, jak lze využít software MATLAB například při tvorbě tónů a na základě výzkumu zjistit, zda je slyšitelný rozdíl mezi laděním pythagorejským a rovnoměrně temperovaným a které z nich se lidem líbí více.

První část práce se věnuje kromě několika typů ladění také harmonii a její souvislosti spoměry frekvencí tónů vintervalech. Ztéto teorie vyplývá, která zuvedených ladění by měla znít libozvučněji. Jedná se o ladění přirozená, jejichž poměry frekvencí tónů v intervalech jsou vyjádřeny jako poměry malých celých čísel, znichž nejmenší čísla využívá ladění didymické, někdy nazývané čisté. Je zde popsáno, jak souvisí frekvence alikvotních tónů s libozvučností. Vzávěru teoretické části je srovnání několika ladění, kde lze vyčíst, jak hodně se frekvence ostatních ladění od těchto přirozených odlišují. V této kapitole by bylo možné také například zkoumat celkovou odchylku frekvencí tónů od didymického (čistého ladění). Zde by se ovšem mohla nabízet otázka, pro jaké intervaly celkovou odchylku počítat, zda jen pro některé či pro všechny.

Důvodem, proč se nepoužívají přirozená ladění, přestože by měla znít lépe, je zejména problém při modulaci do jiných tónin a stím související nutnost přeladění nástroje, což je v práci podloženo konkrétním výpočtem a zvukovou ukázkou, stejně jako několik ostatních tvrzení. Tento konkrétní problém řeší právě například dnešní rovnoměrně temperované ladění, které dělí oktávu na 12 stejných částí. Také se zabýváme otázkou, na kolik částí rozdělit oktávu, abychom se při použití rovnoměrně temperovaného ladění lépe přiblížili čistým frekvencím u velké tercie, kvarty a kvinty. S větším počtem tónů se odchylka zmenšuje, ale dnes je 12-tónová stupnice již tak zavedena, že by bylo asi těžké pokusit se prosadit vícetónovou stupnici, například vzhledem k některým hudebním nástrojům, u kterých počet tónů zvýšit nelze (piano apod.).

Existuje velké množství dalších typů ladění, která by mohla být předmětem dalšího zkoumání. Jedná se zejména o mnoho druhů ladění nerovnoměrně temperovaných. Cílem práce bylo ale ukázat pouze vzorek různých ladění a ukázat principy, na základě kterých se vypočítávají frekvence tónů a porovnat je.

VMATLABu byly vytvořeny ukázky většinou souzvuků sfrekvencemi odpovídajícími několika laděním. Jedná se o jednoduché umělé tóny, které nezní příliš příjemně. Kvytvoření lépe znějících tónů by bylo třeba více prohloubit jak znalosti v oblasti vytváření tónů vtomto softwaru, tak znalosti o fyzikální podstatě tónů, tedy jak lze více ovlivnit barvu tónů a podobně.

Vzávěru práce je praktická část, která se zabývá výzkumem rozdílu mezi pythagorejským a rovnoměrně temperovaným laděním. Výzkum byl prováděn na základě pouštění souzvuků tónů vkvintě, kde frekvence byly vypočteny dle principů těchto ladění. Výsledky výzkumu byly rozděleny do dvou skupin podle toho, zda si souzvuky poslechli nehudebníci nebo hudebníci (většinou členové pěveckých sborů).

Pomocí statistických metod jsme potvrdili, že rozdíl mezi laděními slyšet je. A to jak u skupiny hudebníků tak nehudebníků. Hypotézu o rozpoznatelnosti rozdílu by bylo možné zkoumat i jinými metodami, než tou, která byla zvolena zde. Pravděpodobně bychom ale došli k podobným závěrům. Dále by například mohly být vypočítány konfidenční intervaly parametru p, abychom zjistili, v jakém rozmezí se tato pravděpodobnost bude pohybovat (s určitou pravděpodobností). Dále jsme zjistili, že správné rozpoznání souzvuků závisí na tom, zda ho poslouchá hudebník či nehudebník, a z dané kontingenční tabulky je vidět, že poměr celkového počtu správně poznaných a špatně poznaných je u hudebníků znatelně vyšší než u nehudebníků.

Při zkoumání senzitivity a specificity sluchu bylo na základě získaných dat zjištěno, že specificita sluchu je vyšší než senzitivita. To může být zkresleno tím, že do této skupiny spadají i ukázky o třech stejných souzvucích, které sice byly správně označeny za tři stejné, ale byly poslechnuty lidmi, kteří takto odpovídali i když se jednalo o souzvuky odlišné (tedy neslyšeli vůbec rozdíl ani v případě odlišných souzvuků).

Na závěr byly zpracovány odpovědi na třetí otázku, na kterou posluchači odpovídali, tedy které ladění (pokud vůbec poznali rozdíl) se jim líbí více. U obou skupin, do kterých byli tito posluchači rozděleni (Slyší dobře, Slyší výborně) bylo zaznamenáno více odpovědí, kde za líbivější bylo označeno rovnoměrně temperované ladění. To je v rozporu s teorií, podle které lépe zní ladění, kde frekvence v intervalech jsou tvořeny poměry malých celých čísel, což splňuje ladění pythagorejské. Bylo by zajímavé se tímto faktem více zabývat. Nejspíše je to ale způsobeno tím, že temperované ladění se již dlouho používá a lidské ucho je na něj natolik zvyklé, že mu toto ladění zní libozvučněji.

Tato práce pokrývá jen jen malou část toho, co lze zkoumat v oboru hudebních ladění. Bylo by možné zaobírat se dalšími laděními, matematickou a fyzikální podstatou ladění, tónů a harmonie nebo provést velké množství dalších statistických analýz.

Literatura

[1] David Benson, Music: *A Mathematical Offering*

[2] Jan Haluška, *Hladanie harmonie matematika o hudbe a trocha aj o filozofii* Veda, Bratislava 2006

[3] Roman Berger, Boleslav Riečan, *Matematika a hudba*, Veda, Bratislava 1997

[4] James Jeans, *Věda a hudba*, Dělnické nakladatelství, Praha 1946

[5] Marek Franěk, *Hudební psychologie*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2005

[6] Antonín Sychra, *Hudba očima vědy*, Československý spisovatel, Praha 1965

[7] *Řetězové zlomky*, Matematický korespondenční seminář MFF CUNI (http://mks.mff.cuni.cz/library/retezove_zlomky/retezove_zlomky.pdf)

[8] Scot Makeing, Means, *Meaning and Music – Pythagoras, Archytas and Plato*, Ex-tempore - A Journal of Compositional and Theoretical Research in Music (http://www.ex-tempore.org/means/means.htm)

[9] Jan Obdržálek, *Přehled a výklad hudebních ladění*, 2003 (http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/.../ladeni/prehled_a_vyklad_hudebniho_ladeni.doc)

[10] Daniel Taupin, Ross Mitchell, Andreas Egler, *Using TEX to write polyphonic or instrumental music*, 2006 (http://icking-music-archive.org/software/musixtex/musixdoc.pdf)

[11] Josef Prchal, Boris Šimák, výukový text předmětu Digitální zpracování signálů v telekomunikacích, Vydavatelství ČVUT, Praha 2001

[12] Hugo Norden, *Propositions of Music*, Boston University, Boston, 1964, Fibonacci Quarterly (http://www.fq.math.ca/Scanned/2-3/norden.pdf)

[13] Tomáš Jirotka, Fyzikální korespondenční seminář UK MFF (ročník XX, číslo 3/7), Úloha I.E...sbírání šišek (http://fykos.cz/rocnik20/serie3.pdf)

[14] *Kirnberger temperament* (http://en.wikipedia.org/Kirnberger_ temperament)

[15] Luboš Marek a kol., *Statistika pro ekonomy*, Kamil Mařík–Profesional Publishing, Praha 2007

[16] *Binomial Test of Significance* (http://www.statisticssolutions.com/methods-chapter,statistical-tests/binomial-test-of-significance/)

[17] jiří Anděl, *Statistické metody*, Matfyzpress, Praha 2007