UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Parciální derivace – princip řešení a sbírka příkladů

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Vypracovala:
Lucie Mračnová
MATEKO, III. ročník

Rok odevzdání: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 10. března 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce, paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D., za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Tématem bakalářské práce je Sbírka úloh na parciální derivace. Důvodem, proč jsem si toto téma vybrala, byla snaha o vytvoření materiálu, který by měl pomoci studentům prvních ročníků vysokých škol při jejich přípravě na hodiny, zápočty a zkoušky. Účelem sbírky je procvičování různých typů příkladů. Příklady jsou rozděleny do jednotlivých kapitol podle typu. Jsou zde jak řešené, tak i příklady na procvičení.

Tato práce je psána s předpokladem, že čtenáři již ovládají učivo kurzu Matematika I.

První kapitola popisuje postup při výpočtu parciálních derivací prvního řádu funkcí dvou a tří proměnných. Jednotlivé řešené příklady jsou doplněny o grafy funkcí a jejich parciálních derivací. Grafy pomáhají lépe si představit, co vlastně parciální derivace funkce znamená. Tato kapitola pomůže čtenáři zvládnout základní princip výpočtu parciálních derivací funkce více proměnných.

Druhá kapitola je zaměřena na výpočet parciálních derivací vyšších řádů. Bude se zde řešit jak výpočet parciálních derivací pro všechny proměnné a jejich kombinace, tak výpočet pouze požadované parciální derivace.

Třetí kapitolou nahlédneme do problematiky totálního diferenciálu 1.řádu, naučíme se počítat diferenciál funkce za použití znalostí získaných z předchozích kapitol. Rozšířením této kapitoly je pak kapitola čtvrtá, kde budeme počítat totální diferenciál vyšších řádů. Obě tyto kapitoly jsou doprovázeny grafy funkcí a k nim grafy diferenciálů určitého řádu.

V páté kapitole se zaměřím na Taylorův polynom druhého stupně, který slouží k aproximaci funkce. Funkci budeme aproximovat na okolí určitého bodu.

Další kapitola je věnována určování přibližné hodnoty, která je užitečná pro případ, kdy máme za úkol spočítat hodnotu nějakého výrazu, který má složité hodnoty proměnných. Přibližnou hodnotu takového výrazu pak hledáme pomocí aproximace funkce, která odpovídá danému výrazu.

V poslední kapitole představím zadávání výše řešených příkladů do matematického programu *Wolfram Mathematica*. Tento program jsem si vybrala, protože se na Univerzitě Palackého v Olomouci začal letos nově vyučovat. Chtěla jsem, aby studenti po přečtení této práce uměli v tomto programu počítat parciální derivace, totální diferenciál, Taylorův polynom a určovat přibližnou hodnotu funkce.

Seznam použitého značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$
D_f	definiční obor funkce f
$D_{f'_x}$	defniční obor parciální derivace funkce f podle proměnné x
$D_{f''_{xx}}$	definiční obor parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnných xx
$D_{f''_{xy}}$	definiční obor smíšené parciální derivace funkce f podle proměnných xy
$f'_x(x, y)$	parciální derivace funkce f podle proměnné x
$f''_{xx}(x, y)$	parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnných xx
$f''_{xy}(x, y)$	smíšené parciální derivace funkce f podle proměnných xy
$df(x, y)$	totální diferenciál prvního řádu funkce f v bodě (x, y)
$df(A)$	totální difernciál prvního řádu funkce f v bodě $A = (x_0, y_0)$
$d^2f(x, y)$	totální diferenciál druhého řádu funkce f v bodě (x, y)
$d^2f(A)$	totální difernciál druhého řádu funkce f v bodě $A = (x_0, y_0)$
$T_2(A)$	Taylorův polynom druhého řádu v bodě $A = (x_0, y_0)$

1. Parciální derivace 1.řádu

Nejdříve si připomeneme základní definice, vlastnosti a vztahy pro výpočet parciálních derivací funkce f podle proměnných x a y. Poté se již budeme věnovat výpočtu konkrétních příkladů.

V práci nejsou uvedeny všechny definice a věty vztahující se k problematice diferenciálního počtu funkce dvou a více proměnných, jsou zde uvedeny jen takové, které jsou potřebné k výpočtům a vysvětlení probírané látky. Více podrobností k dané problematice je k nalezení například v [1],[2],[3],[4],[5] nebo [6].

Definice 1.1 *Nechť funkce $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí. Položíme $\varphi = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci* ***parciální derivací funkce*** *f podle proměnné x v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0)$.*
To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

Podobně má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci ***parciální derivací*** *funkce f podle proměnné y v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.*

Poznámka 1.1 *Parciální derivace funkce více proměnných se definují analogicky.*

Definice 1.2 *Nechť je funkce f definována na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_x} \neq \emptyset$, $D_{f_x} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž* ***existuje vlastní parciální derivace*** *$f'_x(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_x} předpisem $(x_0, y_0) \mapsto f'_x(x_0, y_0)$ se nazývá* ***parciální derivace funkce*** *f* ***podle proměnné*** *x a značí se f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$.*
Nechť je funkce f definována na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_y} \neq \emptyset$, $D_{f_y} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž ***existuje vlastní parciální derivace*** *$f'_y(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_y} předpisem*

$(x_0, y_0) \mapsto f'_y(x_0, y_0)$ *se nazývá* ***parciální derivace funkce*** f ***podle proměnné*** y *a značí se* f'_y *nebo* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Věta 1.1 *Nechť funkce* $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají parciální derivaci podle proměnné* x, *na otevřené množině* M. *Pak jejich součet , rozdíl, součin a podíl má na* M *parciální derivaci podle* x *a platí*

$$\begin{aligned}
(f(x,y) \pm g(x,y))'_x &= f'_x(x,y) \pm g'_x(x,y) \\
(f(x,y) \cdot g(x,y))'_x &= f'_x(x,y) \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot g'_x(x,y) \\
\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right)'_x &= \frac{f'_x(x,y) \cdot g(x,y) - f(x,y) \cdot g'_x(x,y)}{(g(x,y))^2},
\end{aligned}$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí za předpokladu, že $g(x,y) \neq 0$.

Důkaz 1 *Parciální derivace funkce dvou proměnných v bodě je definována jako obyčejná derivace této funkce pro pevně zvolenou hodnotu ostatních proměnných, tj. obyčejná derivace funkce jedné proměnné. Jestliže toto platí pro jednoduchou derivaci, platí to i pro parciální derivaci.*

Poznámka 1.2 *Obdobně i pro parciální derivace podle proměnné* y.

Další důležité vztahy:

$$(c \cdot f(x,y))'_x = c \cdot f'_x(x,y)$$

$$(g(f(x,y)))'_x = g'(f(x,y)) \cdot f'_x(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\left(f(x,y)^{g(x,y)}\right)'_x &= \left(e^{g(x,y) \cdot \ln f(x,y)}\right)'_x = \\
&= f(x,y)^{g(x,y)} \left(g'_x(x,y) \cdot \ln f(x,y) + g(x,y) \cdot \tfrac{f'_x(x,y)}{f(x,y)} \right)
\end{aligned}$$

$$F'_x(x,y) = f'_u(u,v) \cdot u'_x(x,y) + f'_v(u,v) \cdot v'_x(x,y)$$

Poznámka 1.3 *Poslední vzorec slouží k výpočtu parciální derivace podle proměnné* x *funkce složené ze tří funkcí dvou proměnných. Takto derivujeme v případě, kdy jednu z funkcí neznáme.*

Poznámka 1.4 *Všechny vzorce platí analogicky i pro parciální derivace podle proměnné* y.

Poznámka 1.5 *Při parciálním derivování hledíme na funkci dvou proměnných jako na funkci jedné proměnné (při pevně zvolené hodnotě druhé proměnné). Z toho důvodu budou v příkladech vzorce pro derivování součinu, podílu a složené funkce uváděny ve tvaru pro funkci jedné proměnné.*

Vzorce pro výpočet derivací

Při výpočtech parciálních derivací se využívají vztahy pro výpočet derivace funkce jedné proměnné.

Základní elementární funkce

$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty)$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$a > 0, x \in \mathbb{R}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

1.1. Řešené příklady

Spočtěte první parciální derivace funkce f.

1. $f(x, y) = x + y$

   Řešení

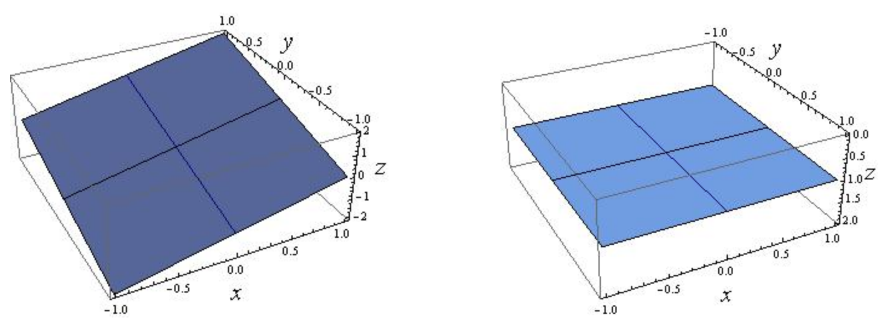
   Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}^2$.

   Nejprve budeme počítat parciální derivaci funkce f podle proměnné x, proměnnou y tedy budeme brát jako konstantu. Při parciálním derivování využíváme známé vzorce pro derivování funkce jedné proměnné, v tomto příkladě použijeme vztah $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Proměnná y je nyní konstanta, derivace konstanty je nula, proto dostaneme:

   $f'_x(x, y) = 1 \cdot x^0 + 0 = 1$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

   $D_{f'_x} = \mathbb{R}^2$



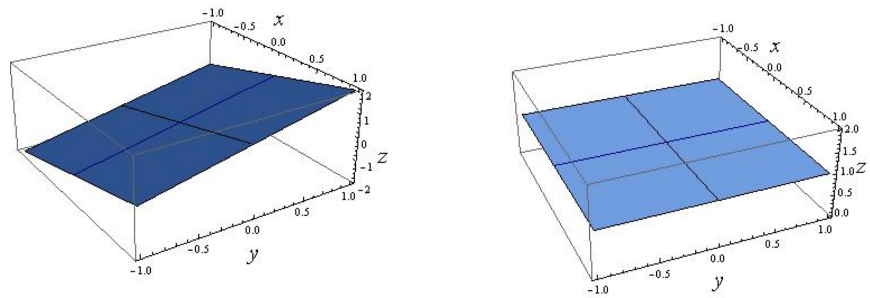
Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y) = x + y$ (vlevo) a jeho parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Grafem funkce $f(x, y)$ je nakloněná rovina, grafem její parciální derivace podle proměnné x je rovina ve výšce 1 rovnoběžná s rovinou (xy). (Jinými slovy, funkce $f(x, y)$ roste stejně rychle vůči proměnné x, tj. pro pevně zvolené y, je grafem funkce $f(x, y)$ přímka).

   Nyní budeme počítat parciální derivaci funkce f podle proměnné y, tedy proměnná x bude konstanta. I zde využijeme již známý vztah pro derivace jedné proměnné, a to $(y^n)' = n \cdot y^{n-1}$. A výsledkem je:

   $f'_y(x, y) = 0 + 1 \cdot y^0 = 1$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x + y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo).Grafem funkce $f(x, y)$ je nakloněná rovina, grafem její parciální derivace podle proměnné y je rovina ve výšce 1 rovnoběžná s rovinou (xy).

2. $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$

   Řešení

   Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}^2$.

   Postupujeme zde jako v předchozím příkladu. Využijeme vztah pro derivaci funkce jedné proměnné, a to $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Dostáváme:

   $f'_x(x, y) = 35 + 3 \cdot 2y = 35 + 6y$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

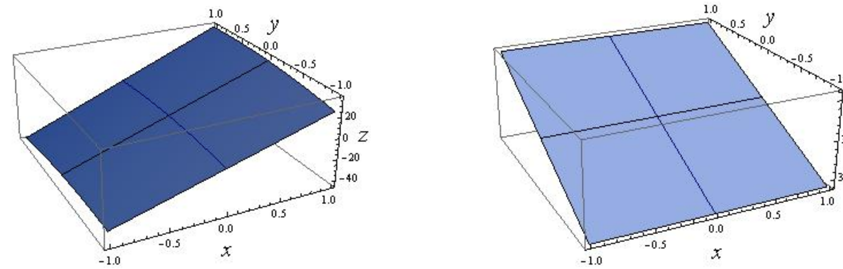
   $D_{f'_x} = \mathbb{R}^2$

   U parciální derivace funkce f podle podle proměnné y postupujeme jako u derivace funkce f podle proměnné x s tím rozdílem, že proměnná x je pro nás konstanta a derivujeme podle proměnné y.

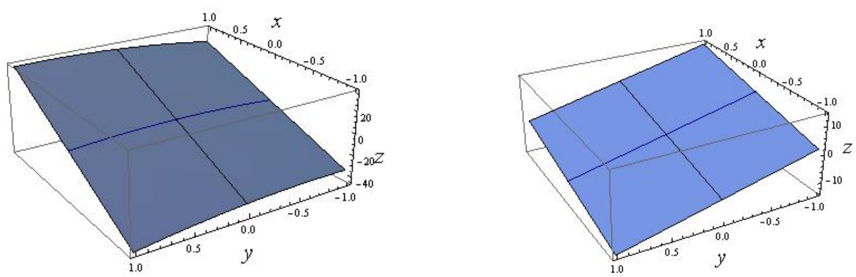
   $f'_y(x, y) = -8y + 2 \cdot 3x = 6x - 8y$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

   $D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$



Obrázek 3: Graf funkce $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Funkce f je vzhledem k proměnné y lineární, tj. pro pevnou hodnotu y je grafem funkce přímka. Na obrázku je černou linkou znázorněn graf funkce f pro hodnotu $y = 0$. Parciální derivace funkce f podle proměnné x pak pro pevnou hodnotu proměnné y představuje funkci konstantní, jejím grafem je přímka rovnoběžná s rovinou (xy). To lze pozorovat na obrázku vpravo, kde je černou linkou znázorněn graf parciální derivace funkce f podle proměnné x pro pevně zvolené $y = 0$.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo). Pro pevně zvolené $x = 0$ je grafem funkce f parabola znázorněná modrou křivkou. Grafem parciální derivace funkce f podle proměnné x je pro stejnou hodnotu proměnné x, tj. $x = 0$, přímka.

3. $f(x,y) = \ln(x)\cos y$

   Řešení

   Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

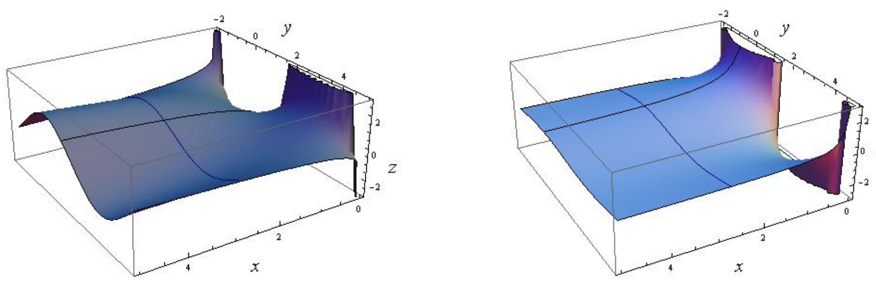
   Při výpočtu parciální derivace funkce f podle proměnné x postupujeme tak, že $\cos y$ budeme brát jako konstantu. Funkci $\ln(x)$ budeme derivovat podle vztahu pro derivaci funkce jedné proměnné, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, tudíž:

   $f'_x(x,y) = \frac{1}{x}\cos y$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Definiční obory parciálních derivací musí být podmnožinou definičního oboru zadané funkce. Proto zde není definičním oborem $D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, ale $D_{f'_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.



Obrázek 5: Graf funkce $f(x, y) = \ln(x)\cos y$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Na obrázku je černou linkou znázorněn graf funkce f pro hodnotu $y = 0$ a modrou linkou graf funkce f pro hodnotu $x = e$. Parciální derivace funkce f podle proměnné x v grafu funkce $f(x, y)$ při pevném y představuje funkci $\frac{1}{x}$ (černá linka), která vznikla derivací funkce $\ln(x)$.

Nyní postupujeme opačně než v předchozí situaci, budeme derivovat funkci f podle proměnné y. Funkce $\ln(x)$ pro nás bude vystupovat jako konstanta a derivujeme funkci $\cos y$ podle vztahu $(\cos y)' = -\sin y$. A dostaneme:

$f'_y(x, y) = \ln(x)(-\sin y) = -\ln(x)\sin y$

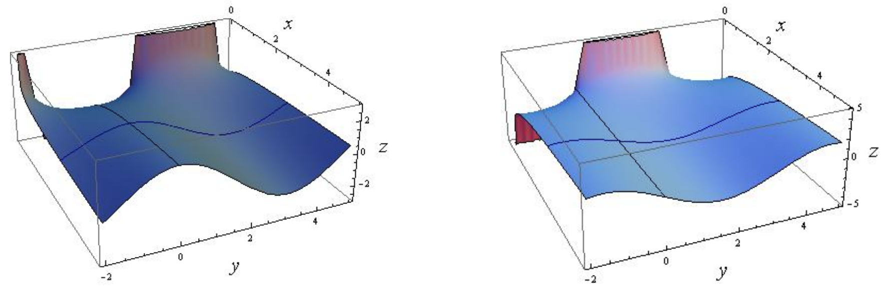
Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

4. $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Tuto funkci si nejdříve rozložíme na součin dvou základních elementárních funkcí podle jednotlivých proměnných. U parciální derivace funkce f podle proměnné x si nebudeme všímat funkce $\sin(y^2)$ a budeme se zabývat pouze



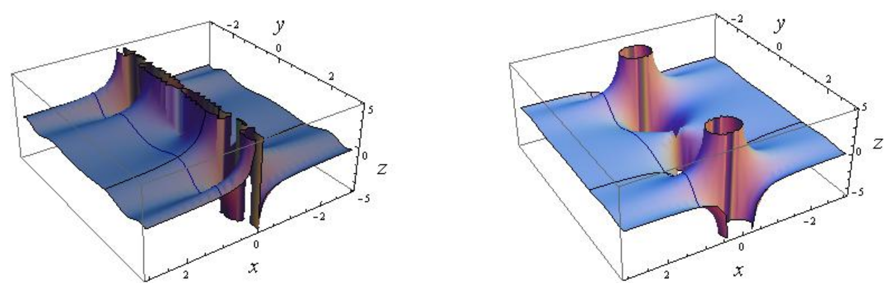
Obrázek 6: Graf funkce $f(x,y) = \ln(x)\cos y$ (vlevo) a její parciální derivace funkce f podle proměnné y (vpravo). Parciální derivace funkce f podle proměnné y v grafu funkce $f(x,y)$ při pevném $x = e$ představuje funkci $-\sin y$ (modrá linka), která vznikla derivací funkce $\cos x$.

funkcí $\frac{1}{x}$. Využijeme vztah pro derivace funkce jedné proměnné $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, stačí si představit, že $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Pak snadno získáme:

$f'_x(x,y) = \sin y^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y^2}{x^2}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.



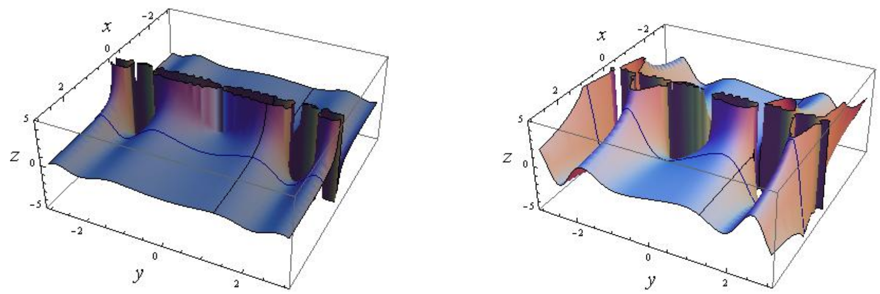
Obrázek 7: Graf funkce $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Černá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,tj. graf funkce $\frac{1}{x}$ v případě funkce f a graf funkce $-\frac{1}{x^2}$ v případě f'_x. Modrá linka zase graf funkce f a f'_x pevně zvolenou hodnotu $x = 1$.

V případě derivování funkce f podle proměnné y budeme muset počítat derivaci složené funkce $\sin y^2$ a to tak, že použijeme vztah $(g(h(y)))' = g'(h(y)) \cdot h'(y)$, kde g pro nás představuje funkce $\sin y$ a derivujeme podle vzorce $(\sin y)' = \cos y$ a funkci h čili y^2 derivujeme podle $(y^n)' = n \cdot y^{n-1}$, s tím, že $\frac{1}{x}$ bereme jako konstantu a nevšímáme si jí. Pak:

$f'_y(x,y) = \frac{1}{x}\cos(y^2)2y = \frac{2y\cos y^2}{x}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.



Obrázek 8: Graf funkce $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné y (vpravo). Černá linka představuje graf funkce f a f'_y pro pevně zvolenou hodnotu proměnné $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Modrá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $x = 1$, tj. graf funkce $\sin y^2$ v případě f a graf funkce $2y\cos y^2$ v případě f'_y.

5. $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.

U obou parciálních derivací funkce f budeme muset využít vztah pro výpočet derivace podílu funkcí a to: $\left(\frac{h(x,y)}{g(x,y)}\right)'_x = \frac{h'_x(x,y)\cdot g(x,y) - h(x,y)\cdot g'_x(x,y)}{(g(x,y))^2}$.

Při výpočtu parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x, budeme muset použít vztah $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$, který využijeme k derivaci funkce $\cos^2 x$. Funkce g je pro nás mocnina, její derivací dostaneme $2\cos x$ a funkce h představuje funkci $\cos x$, kterou derivujeme podle $(\cos x)' = -\sin x$. Ještě musíme spočítat druhou složenou funkci a to $\sqrt{x^2+9y}$. Tuto funkci si představíme jako: $(x^2+9y)^{\frac{1}{2}}$ a poté už jí derivujeme podle známého vzorce. Nyní už můžeme dosazovat do vzorce pro derivaci podílu funkcí.

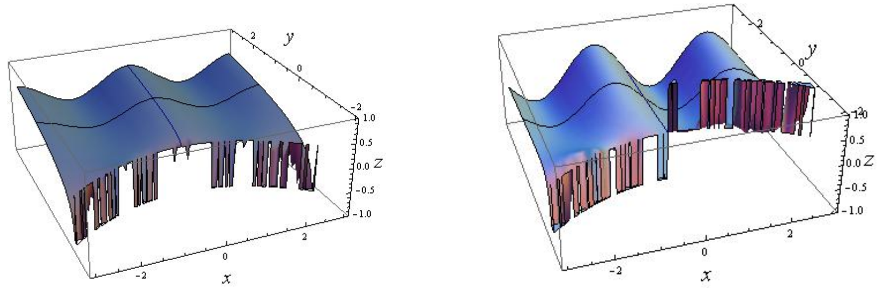
$$f'_x(x,y) = \frac{\left[y2\cos x(-\sin x)\cdot 1\sqrt{x^2+9y}\right] - y\cos^2 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+9y}}2x}{x^2+9y} =$$

$$= \frac{-y\cos x\left(2\sin x\sqrt{x^2+9y} + x\cos x\frac{1}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} =$$

$$= \frac{-y\cos x\left(\frac{2\sin x(x^2+9y)+x\cos x}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} = \frac{-y\cos x\left[2\sin x(x^2+9y)+x\cos x\right]}{\sqrt{(x^2+9y)^3}}$$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.



Obrázek 9: Graf funkce $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$ (vlevo) a její parciální derivace podle proměnné x (vpravo). Na těchto grafech je patrné omezení definičním oborem $D_{f'_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$, jehož hranicí je parabola. Černá linka představuje graf funkce pro pevně zvolené $y = 1$ a modrá linka pevně zvolené $x = 0$.

Dále derivujeme funkci f podle proměnné y, postup výpočtu je zde stejný, jako v předchozím případě, ale funkce $\cos^2 x$ si nevšímáme, proto se nám situace ulehčí.

$$f'_y(x,y) = \frac{\cos^2 x\sqrt{x^2+9y} - y\cos^2 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+9y}}9}{x^2+9y} = \frac{\cos^2 x\left(\sqrt{x^2+9y} - \frac{9}{2}y\frac{1}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} =$$

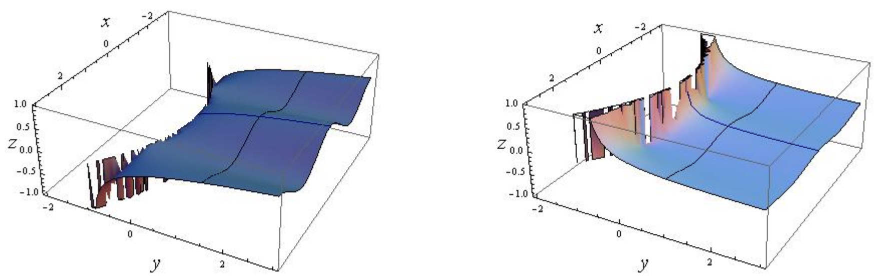
$$= \frac{\cos^2 x\left(\frac{x^2+9y-\frac{9}{2}y}{\sqrt{x^2+9y}}\right)}{x^2+9y} = \frac{\cos^2 x(x^2+\frac{9}{2}y)}{\sqrt{(x^2+9y)^3}}$$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y > 0\}$.

6. $f(x,y) = xy\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Řešení



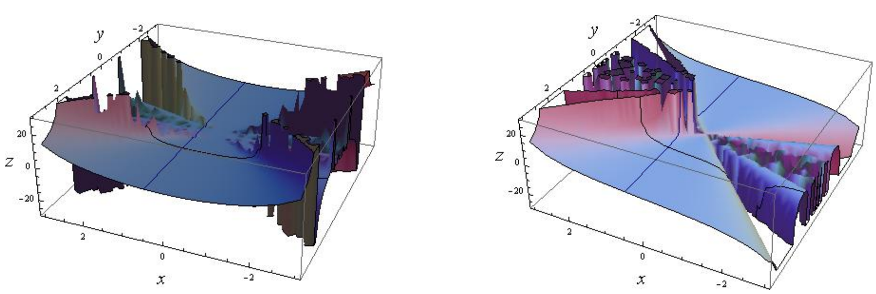
Obrázek 10: Graf funkce $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$ a její parciální derivace podle proměnné y.

Definiční obor této funkce je $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nejprve budeme derivovat funkci podle proměnné x. Využijeme vzorec pro součin $(h(x) \cdot g(x))' = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$. Kde $h(x)$ pro nás bude xy a $g(x)$ pak $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$. Dále vidíme, že $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ budeme muset derivovat jako složenou funkci, kde využijeme vztah: $(g\left(h(x)\right))' = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$. Vzorec pro výpočet derivace $\operatorname{tg} x$ je $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$f'_x(x,y) = y\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}\frac{1}{y} = y\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

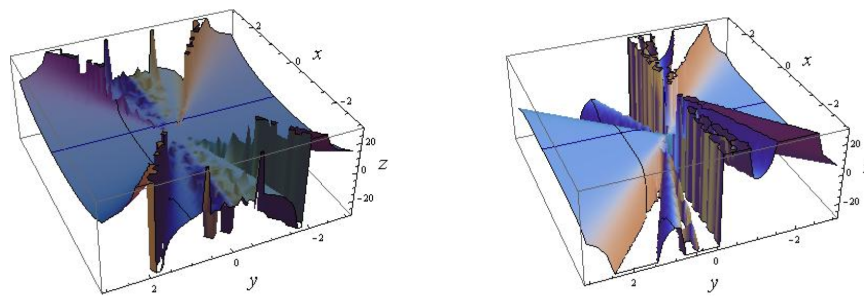


Obrázek 11: Graf funkce $f(x,y) = xy\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné x.

U derivace funkce podle proměnné y postupujeme jako u předchozí derivace, s tím rozdílem, že nyní x bude bráno jako konstanta.

$f'_y(x,y) = x \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}(-1)\frac{x}{y^2} = x \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Obrázek 12: Graf funkce $f(x,y) = xy \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné y.

7. $f(x,y) = xe^{xy}$

   Řešení

   Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}^2$.

   Nejprve využijeme již známý vztah pro součin $(h(x) \cdot g(x))' = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$. Kde funkce $h(x)$ představuje funkci x a $g(x)$ funkci e^{xy}. Dále využijeme vztah $(e^x)' = e^x$. A poté ještě musíme zderivovat exponent, čili $(xy)'_x = y$.

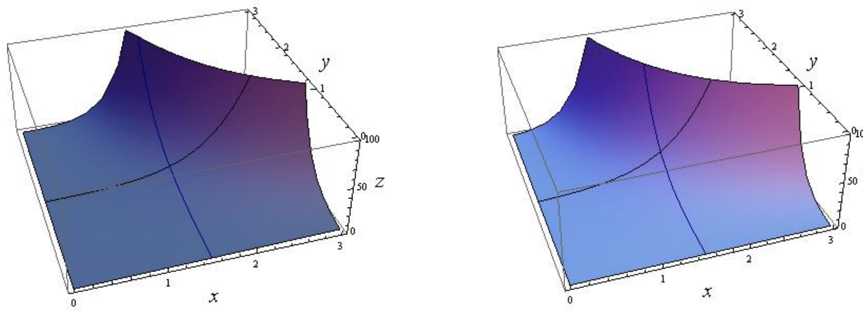
   $f'_x(x,y) = e^{xy} + xe^{xy}y = e^{xy} + xye^{xy}$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \mathbb{R}^2$.

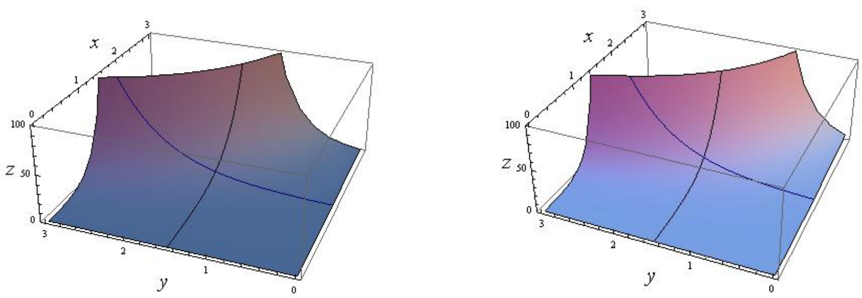
   Zde nám ubude práce se součinem, protože x máme jako konstantu, proto využíváme pouze vztahu $(e^x)' = e^x$

   $f'_y(x,y) = xe^{xy}x = x^2e^{xy}$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$.



Obrázek 13: Graf funkce $f(x, y) = xe^{xy}$ a její parciální derivace podle proměnné x.



Obrázek 14: Graf funkce $f(x, y) = xe^{xy}$ a její parciální derivace podle proměnné y.

8. $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

   Řešení

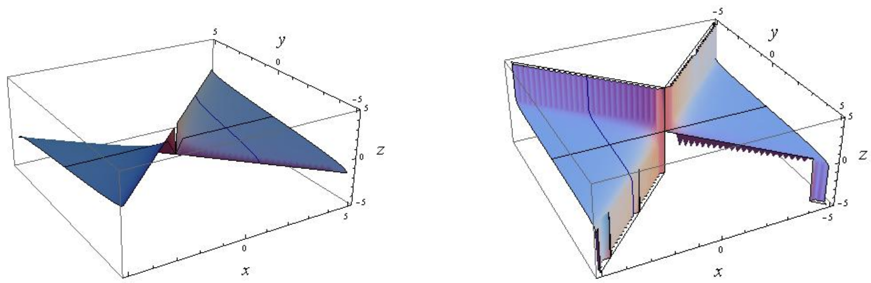
   Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x, x > 0\} \cup$
   $\cup\, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \geq y \geq x, x < 0\}$.

   Zde máme opět složenou funkci, kterou budeme derivovat podle $(g\,(h(x)))' = g'\,(h(x)) \cdot h'(x)$. Kde $g(x)$ bude reprezentováno funkcí $\arcsin x$ a funkce $\frac{y}{x}$ pro nás bude představovat $h(x)$. Pro derivaci $\arcsin x$ využijeme vztah $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Na závěr si ještě $\frac{y}{x}$ vyjádříme jako $y \cdot x^{-1}$, pak již lehce spočteme parciální derivaci funkce f podle proměnné x.

   $f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot (-1) \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}}$

   Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$D_{f'_x} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{x^2} < 1, x \neq 0\right\}$.



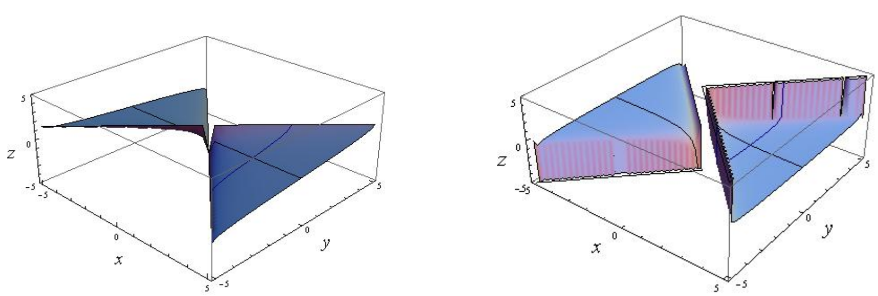
Obrázek 15: Graf funkce $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné x.

Zde je postup pro derivace úplně stejný, pouze funkci $\frac{y}{x}$ derivujeme podle y.

$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$D_{f'_y} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{x^2} < 1, x \neq 0\right\}$.



Obrázek 16: Graf funkce $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ a její parciální derivace podle proměnné y.

9. $f(x, y) = (x + y)^x$

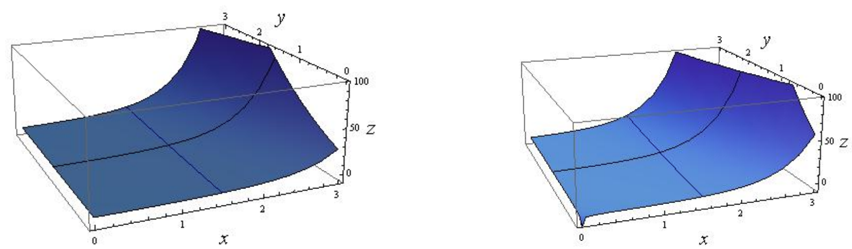
Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

U paricální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x budeme využívat vzorec $\left(h(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln h(x)}\right)' = h(x)^{g(x)}\left(g'(x)\cdot\ln h(x) + g(x)\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}\right)$. Teď již zbývá jen dosadit.

$f'_x(x,y) = (x+y)^x\left[1\cdot\ln(x+y) + x\frac{1}{x+y}\right] = (x+y)^x\left[\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right]$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$.



Obrázek 17: Graf funkce $f(x,y) = (x+y)^x$ a její parciální derivace podle proměnné x.

Parciální derivaci funkce f podle proměnné y, derivujeme podle vzorce $(y^n)' = n\cdot y^{n-1}$, s tím, že pak ještě musíme zderivovat vnitřní funkci, v našem případě však derivace $(y)'=1$.

$f'_y(x,y) = x\,(x+y)^{x-1}$

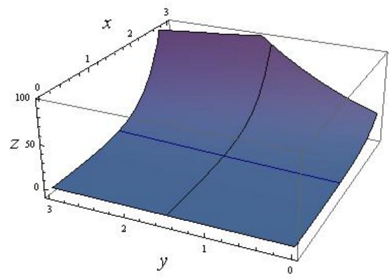
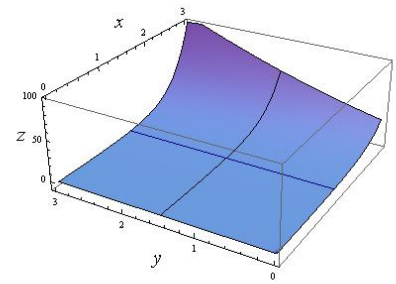
Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$.

Poznámka 1.6 *Podobně postupujeme při výpočtu parciálních derivací funkce tří proměnných. Což si ukážeme na následujícím příkladu.*

10. $f(x,y,z) = x^2z + \ln(2y-xz)$

Řešení

Definiční obor této funkce je $D_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2y-xz>0\}$.

Obrázek 18: Graf funkce $f(x,y) = (x+y)^x$ a její parciální derivace podle proměnné y.

U funkce o třech proměnných budeme počítat parciální derivace 3, podle proměnné x, y a z.

Poté již využijeme poznatků z předchozích příkladů.

$f'_x(x,y,z) = 2xz + \frac{1}{2y-xz} \cdot (-z) = z\left(2x - \frac{1}{2y-xz}\right)$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné x je $D_{f'_x} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - xz > 0\}$.

$f'_y(x,y,z) = \frac{1}{2y-xz} \cdot 2 = \frac{2}{2y-xz}$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné y je $D_{f'_y} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - xz > 0\}$.

$f'_z(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2y-xz} \cdot (-x) = x\left(x - \frac{1}{2y-xz}\right)$

Definičním oborem parciální derivace funkce f podle proměnné z je $D_{f'_z} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - xz > 0\}$.

Nyní už víme, jak postupovat při výpočtu parciálních derivací. Proto další příklady už nebudou komentované, komentář se objeví jen v případě, kdy postup nebyl dříve vysvětlen.

11. $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$

Řešení

$f'_x(x,y) = 3 \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}} y^2 = \frac{3y^2}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$

$f'_y(x,y) = 3 \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}} 2xy = \frac{6xy}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \geq 0\}$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 > 0\}$

12. $f(x,y) = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{xy}}$

    Řešení

    $$f'_x(x,y) = y\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1\cdot(xy)^{\frac{1}{3}} - x(\frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}y)}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(xy)(xy)^{-\frac{2}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} =$$
    $$= \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(xy)^{\frac{1}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{2}{3}(xy)^{\frac{1}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{xy}}$$

    $$f'_y(x,y) = \sqrt{x} + x(-\tfrac{1}{3})(xy)^{-\frac{4}{3}}x = \sqrt{x} - \tfrac{1}{3}x^2y^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{4}{3}} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{y^4}}$$

    $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy > 0\}$

13. $f(x,y) = \frac{y+x}{y-x}$

    Řešení

    $f'_x(x,y) = \frac{(y-x)-(y+x)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{y-x+y+x}{(y-x)^2} = \frac{2y}{(y-x)^2}$

    $f'_y(x,y) = \frac{(y-x)-(y+x)}{(y-x)^2} = \frac{y-x-y-x}{(y-x)^2} = -\frac{2x}{(y-x)^2}$

    $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

14. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$

    Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{3x^2(x^3-y^3)-(x^3+y^3)3x^2}{(x^3-y^3)^2} = \frac{3x^5-3x^2y^3-3x^5-3x^2y^3}{(x^3-y^3)^2} = -\frac{6x^2y^3}{(x^3-y^3)^2}$

$f'_y(x,y) = \frac{3x^2(x^3-y^3)-(x^3+y^3)(-3y^2)}{(x^3-y^3)^2} = \frac{3x^3y^2-3y^5+3x^3y^2+3y^5}{(x^3-y^3)^2} = \frac{6x^3y2}{(x^3-y^3)^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

15. $f(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)$

$f'_y(x,y) = \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)(-1)\frac{x^2}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

16. $f(x,y) = y\cos x + x\sin y$

Řešení

$f'_x(x,y) = -y\sin x + \sin y = \sin y - y\sin x$

$f'_y(x,y) = \cos x + x\cos y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

17. $f(x,y) = ye^{\frac{y}{x}}$

Řešení

$f'_x(x,y) = ye^{\frac{y}{x}}\left(-1\right)\frac{y}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$

$f'_y(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + ye^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}}\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

18. $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right) \left[\frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right) \left[\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2y}{(x+y) \cdot (x-y)} = -\frac{y}{x^2-y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right) \left[\frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right) \left[\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x+y) \cdot (x-y)} = \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, y < x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x, y > x\}$$

19. $f(x,y) = \operatorname{arccotg} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = -\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-(x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} = -\frac{x-y+x+y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

20. $f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^{x-y}$

Řešení

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \left[\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)^{x-y}\right]\cdot\left[\ln\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)\cdot 1+(x-y)\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\cdot(-1)\cdot\tfrac{1}{x^2}\right]= \\
&= \left[\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)^{x-y}\right]\cdot\left[\ln\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)-\tfrac{x-y}{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_y(x,y) &= \left[\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)^{x-y}\right]\cdot\left[\ln\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)\cdot(-1)+(x-y)\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\cdot(-1)\cdot\tfrac{1}{y^2}\right]= \\
&= \left[\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)^{x-y}\right]\cdot\left[-\ln\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right)-\tfrac{x-y}{y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}>0, x\neq 0, y\neq 0\right\}
$$

1.2. Cvičení

V předchozí kapitole jsme si ukázali, jak počítat parciální derivace prvního řádu funkce f. A nyní si tyto příklady procvičíme, jejich řešení je k dispozici na konci práce.

Spočtěte první parciální derivace:

1. $f(x,y) = \sqrt{xy} - \frac{x}{3\sqrt{y}}$
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
3. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{x^3-y^2}{x^2+y^3}$
5. $f(x,y) = (2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^5$
6. $f(x,y) = \cos(3x - 3y)$
7. $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(\frac{y^2}{x}\right)$
8. $f(x,y) = x \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{y}\right)$
9. $f(x,y) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}$
10. $f(x,y) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + y^4)$
11. $f(x,y) = \ln[\ln(x) + y]$
12. $f(x,y) = \ln(y + \sqrt{x+y})$
13. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$
14. $f(x,y) = (xy+1)^x$
15. $f(x,y) = \sin x + \ln(y^3)$
16. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
17. $f(x,y) = \frac{e^x - e^y}{e^{xy}}$
18. $f(x,y) = 4 \operatorname{arctg} x^2 - 4x^2y$
19. $f(x,y) = x^2 - \frac{x+y}{x-y} - e^{2x+2y}$
20. $f(x,y,z) = x^2y^2z^2 \cdot \ln(xyz) + \left(\frac{\cos x}{\sin y}\right)^z$

2. Parciální derivace vyšších řádů

Definice 2.1 *Nechť* $(x_0, y_0) \in D_{f_x}$. *Existuje-li parciální derivace funkce* $f_x(x, y)$ *podle proměnné* x *v bodě* (x_0, y_0), *nazýváme tuto derivaci* ***parciální derivací 2.řádu*** *podle* x *funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *a značíme* $f''_{xx}(x_0, y_0)$ *nebo* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. *Existuje-li parciální derivace funkce* $f_x(x, y)$ *podle proměnné* y *v bodě* (x_0, y_0), *nazýváme tuto derivaci* ***smíšenou parciální derivací 2.řádu*** *funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *a značíme* $f'_{xy}(x_0, y_0)$, *nebo také* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Poznámka 2.1 *Obdobně definujeme parciální derivace 2. řádu* $f_{yy}(x_0, y_0)$ *a* $f_{yx}(x_0, y_0)$. *Parciální derivace n-tého řádu* $(n \geq 3)$ *definujeme jako parciální derivace derivací* $(n-1)$ *- tého řádu.*

Věta 2.1 (Schwarzova) *Nechť funkce* f *má spojité parciální derivace* f_{xy}, f_{yx} *v bodě* (x_0, y_0). *Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

2.1. Řešené příklady

Pro určení druhých parciálních derivací nejprve musíme spočítat první parciální derivace podle proměnných x a y. Poté se až můžeme věnovat druhým derivacím. Funkci $f'_x(x, y)$ zderivujeme podle proměnné x, čili spočítáme $(f'_x(x, y))'_x$. Takto obdržíme druhou parciální derivaci funkce f podle proměnné x, druhou parciální derivaci funkce f podle proměnné y obdržíme analogicky. Tyto druhé parciální derivace budeme značit f''_{xx} a f''_{yy}.

Nyní ještě musíme vypočítat smíšené parciální derivace. Pro výpočet druhé parciální derivace f''_{xy} vezmeme první parciální derivaci podle proměnné x a tuto zderivujeme ještě jednou, tentokrát podle proměnné y. Podobně postupujeme při výpočtu zbývající smíšené parciální derivace , tj. f''_{yx}. Rozdíl je v tom, že nejdříve derivujeme podle proměnné y a teprve poté podle proměnné x.

V této kapitole je 16 řešených příkladů. Z toho 11 příkladů na určení druhé parciální derivace a zbylých 5 na určení vyšších parciálních derivací. Tyto příklady již nejsou komentované, protože princip řešení je popsán výše.

Určete druhé parciální derivace:

1. $f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 + 4$

Řešení

$f'_x(x,y) = 4x$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = 9y^2$

$f''_{xx}(x,y) = 4$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = 18y$

$f''_{xy}(x,y) = 0$ $\qquad$ $f''_{yx}(x,y) = 0$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

2. $f(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{y^2}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = -\frac{2}{y^3}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = -2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{6}{y^4}$

$f''_{xy}(x,y) = 0$ $\qquad$ $f''_{yx}(x,y) = 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \neq 0\}$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f'_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\}$$

3. $f(x,y) = 3y \sin x$

Řešení

$f'_x(x,y) = 3y \cos x$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = 3 \sin x$

$f''_{xx}(x,y) = -3y \sin x$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = 3 \cos x$ $\qquad$ $f''_{yx}(x,y) = 3 \cos x$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

4. $f(x,y) = x^2y + e^{x^2y}$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = 2xy + e^{x^2y}2xy = 2xy(1+e^{x^2y})$

   $f'_y(x,y) = x^2 + e^{x^2y}x^2 = x^2(1+e^{x^2y})$

   $$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2y + e^{x^2y}2xy2xy + e^{x^2y}2y = 2y + 4x^2y^2e^{x^2y} + 2ye^{x^2y} = \\ &= 2y(1 + 2x^2ye^{x^2y} + e^{x^2y}) \end{aligned}$$

   $f''_{yy}(x,y) = e^{x^2y}x^2x^2 = x^4x^2 + e^{x^2y}x^2$

   $f''_{xy}(x,y) = 2x + e^{x^2y}x^22xy + e^{x^2y}2x = 2x(1 + e^{x^2y} + x^2ye^{x^2y})$

   $f''_{yx}(x,y) = 2x + e^{x^2y}x^22xy + e^{x^2y}2x = 2x(1 + e^{x^2y} + x^2ye^{x^2y})$

   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

5. $f(x,y) = \frac{\sin^2 x}{y^2}$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = \frac{2\sin x \cos x}{y^2}$

   $f'_y(x,y) = \sin^2 x\,(-2)\,\frac{1}{y^3} = -\frac{2\sin^2 x}{y^3}$

   $f''_{xx}(x,y) = \frac{2\cos x \cos x + 2\sin x(-\sin x)}{y^2} = \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{y^2}$

   $f''_{yy}(x,y) = -2\sin^2 x\,(-3)\,\frac{1}{y^4} = \frac{6\sin^2 x}{y^4}$

   $f''_{xy}(x,y) = 2\sin x\cos x\,(-2)\,\frac{1}{y^3} = -\frac{4\sin x\cos x}{y^3}$

   $f''_{yx}(x,y) = -\frac{2}{y^3}\cdot 2\sin x\cos x = -\frac{4\sin x\cos x}{y^3}$

   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

6. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$

Řešení

$$f'_x(x,y)=\frac{2x\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}-(x^2+y^2)\left(\frac{1}{2}\right)(x+y)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{x+y}=\frac{2x\cdot\sqrt{x+y}-\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)}{x+y}=$$

$$=\frac{\frac{4x(x+y)-x^2-y^2}{2\sqrt{x+y}}}{x+y}=\frac{3x^2+4xy-y^2}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{2y\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}-(x^2+y^2)\left(\frac{1}{2}\right)(x+y)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{x+y}=\frac{2y\cdot\sqrt{x+y}-\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)}{x+y}=$$

$$=\frac{\frac{4y(x+y)-x^2-y^2}{2\sqrt{x+y}}}{x+y}=\frac{-x^2+4xy+3y^2}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{(6x+4y)\cdot 2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}-\left(3x^2+4xy-y^2\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}\left[2(6x+4y)(x+y)-3\left(3x^2+4xy-y^2\right)\right]}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{12x^2+12xy+8xy+8y^2-9x^2-12xy+3y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3x^2+8xy+11y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{(4x+6y)\cdot 2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}-\left(-x^2+4xy+3y^2\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}\left[2(4x+6y)(x+y)-3\left(-x^2+4xy+3y^2\right)\right]}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{8x^2+8xy+12xy+12y^2+3x^2-12xy-9y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}=\frac{11x^2+8xy+3y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{(4x-2y)\cdot 2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}-\left(3x^2+4xy-y^2\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}\left[2(4x-2y)(x+y)-3\left(3x^2+4xy-y^2\right)\right]}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{8x^2+8xy-4xy-4y^2-9x^2-12xy+3y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-x^2-8xy-y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{(-2x+4y)\cdot 2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}-\left(-x^2+4xy+3y^2\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}}}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}\left[2(-2x+4y)(x+y)-3\left(-x^2+4xy+3y^2\right)\right]}{4(x+y)^3}=$$

$$=\frac{-4x^2-4xy+8xy+8y^2+3x^2-12xy-9y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-x^2-8xy-y^2}{4(x+y)^{\frac{5}{2}}}$$

$$D_f=D_{f'_x}=D_{f'_y}=D_{f''_{xx}}=D_{f''_{yy}}=D_{f''_{xy}}=D_{f''_{yx}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y>0\}$$

7. $f(x,y) = y^{x+1}$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^{x+1} \ln y$

$f'_y(x,y) = (x+1)\, y^x$

$f''_{xx}(x,y) = y^{x+1} \ln y \ln y = y^{x+1} \left(\ln y\right)^2$

$f''_{yy}(x,y) = (x+1) \cdot x \cdot y^{x-1} = (x^2+x) \cdot y^{x-1}$

$f''_{xy}(x,y) = (x+1) \cdot y^x \cdot \ln y + y^{x+1} \cdot \frac{1}{y} = y^x + (x+1) \cdot y^x \cdot \ln y = y^x \left[1 + (x+1)\ln y\right]$

$f''_{yx}(x,y) = y^x + (x+1) \cdot y^x \cdot \ln y = y^x \left[1 + (x+1)\ln y\right]$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

8. $f(x,y) = e^{y^2+\cos x}$

Řešení

$f'_x(x,y) = e^{y^2+\cos x}\,(-\sin x) = -\sin x \cdot e^{y^2+\cos x}$

$f'_y(x,y) = e^{y^2+\cos x} \cdot 2y = 2ye^{y^2+\cos x}$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= -\cos x \cdot e^{y^2+\cos x} - \sin x \cdot e^{y^2+\cos x}\,(-\sin x) = \\ &= -\cos x \cdot e^{y^2+\cos x} + \sin^2 x \cdot e^{y^2+\cos x} \end{aligned}$$

$f''_{yy}(x,y) = 2e^{y^2+\cos x} + 2ye^{y^2+\cos x} \cdot 2y = 2e^{y^2+\cos x} + 4y^2 e^{y^2+\cos x}$

$f''_{xy}(x,y) = -\sin x \cdot e^{y^2+\cos x} \cdot 2y = -2y \sin x \cdot e^{y^2+\cos x}$

$f''_{yx}(x,y) = 2y \cdot e^{y^2+\cos x} \cdot (-\sin x) = -2y \sin x \cdot e^{y^2+\cos x}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

9. $f(x,y) = x \arcsin(\sqrt{y}) + \sqrt{(x+y)^3}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \arcsin(\sqrt{y}) + \frac{3}{2}\sqrt{x+y}$

$f'_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{x}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{3}{4\sqrt{x+y}}$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= \frac{x}{2\cdot(-2)\cdot\sqrt{y}(1-y)^{\frac{3}{2}}\cdot(-1)} + \frac{x}{2\cdot(-2)\cdot y^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{4\sqrt{x+y}} = \\ &= \frac{x}{4\sqrt{y}\sqrt{(1-y)^3}} - \frac{x}{\sqrt{y^3}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{4\sqrt{x+y}} \end{aligned}$$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{4\sqrt{x+y}}$

$f''_{yx}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} + \frac{3}{4\sqrt{x+y}}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xx}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq 1, x+y > 0\right\}$

$D_{f'_y} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, x+y > 0\}$

Poznámka 2.2 *V příkladech, kde máme více než dvě proměnné, se omezíme na výpis pouze některých smíšených parciálních derivací, např. xy, zy, zx. Nebudeme zvlášť vypisovat derivace yx, yz, xz. Vzhledem ke spojitosti těchto derivací zde totiž nezáleží na pořadí derivování (viz Schwartzova věta).*

10. $f(x,y,z) = x^3y^2z$

Řešení

$f'_x(x,y,z) = 3x^2y^2z$

$f'_y(x,y,z) = 2x^3yz$

$f'_z(x,y,z) = x^3y^2$

$f''_{xx}(x,y,z) = 6xy^2z$

$f''_{yy}(x,y,z) = 2x^3z$

$f''_{zz}(x,y,z) = 0$

$f''_{xy}(x,y,z) = 6x^2yz$

$f''_{xz}(x,y,z) = 3x^2y^2$

$f''_{yz}(x,y,z) = 2x^3y$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{zz}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{xz}} = D_{f''_{yz}} = \mathbb{R}^3$$

11. $f(x, y, z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \ln(z)$

Řešení

$f'_x(x, y, z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \ln(z)$

$f'_y(x, y, z) = \sin x \cdot (-\sin y) \cdot \ln(z)$

$f'_z(x, y, z) = \frac{1}{z} \sin x \cdot \cos y$

$f''_{xx}(x, y, z) = -\sin x \cdot \cos y \cdot \ln(z)$

$f''_{yy}(x, y, z) = \sin x \cdot (-\cos y) \cdot \ln(z)$

$f''_{zz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} \sin x \cdot \cos y$

$f''_{xy}(x, y, z) = \cos x \cdot (-\sin y) \cdot \ln(z)$

$f''_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z} \cos x \cdot \cos y$

$f''_{yz}(x, y, z) = \frac{1}{z} \sin x \cdot (-\sin y)$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{zz}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{xz}} = D_{f''_{yz}} =\text{-}$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

Doteď nám smíšené derivace vycházely stejně, nyní si ukážeme, že to tak vždy být nemusí. Následující příklad byl převzat z [10].

12. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Použitím definice parciální derivace dokažte,že:

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$$

Řešení

Nejdříve spočteme parciální derivace prvního řádu, pro $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{\left[y\left(x^2-y^2\right)+xy(2x)\right]\left(x^2+y^2\right)-\left[xy\left(x^2-y^2\right)\right]\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \\
&= \frac{\left(x^2y-y^3+2x^2y\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \\
&= \frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2x^4y+2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \\
&= \frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_y(x,y) &= \frac{\left[x\left(x^2-y^2\right)+xy(-2y)\right]\left(x^2+y^2\right)-xy\left(x^2-y^2\right)\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \\
&= \frac{\left(x^3-xy^2-2xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \\
&= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-4xy^4+2x^3y^2+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x\left(x^4-4x^2y^2-4y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

Parciální derivaci v bodě $(0,0)$ musíme spočítat z definice.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(0+h,0) - f(0,0)\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(0-0) = 0$$

a podobně i pro $f'_y(0,0) = 0$.

Nyní už přistoupíme k výpočtu smíšených derivací.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f'_y(h,0) - f'_y(0,0)\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{h^5}{h^4} - 0\Big) = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f'_x(0,h) - f'_x(0,0)\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(-\frac{h^5}{h^4} - 0\Big) = -1$$

Odtud vidíme, že se opravdu smíšené derivace nerovnají.

Dále už nebudeme počítat všechny parciální derivace až do druhého řádu (včetně), ale zaměříme se pouze na požadované parciální derivace.

13. $f(x,y) = y^2 \cdot \cos^2 x$, určete parciální derivaci: $f'''_{yyx}(x,y)$

Řešení

$f'_y(x,y) = 2y \cdot \cos^2 x$

$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot \cos^2 x$

$f'''_{yyx} = 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cdot \cos x$

$D_f = D_{f'_y} = D_{f''_{yy}} = D_{f'''_{yyx}} = \mathbb{R}^2$

Výsledkem požadované parciální derivace je $f'''_{yyx}(x,y) = -4 \sin x \cdot \cos x$.

14. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, určete parciální derivaci: $f'''_{xxy}(x,y)$

Řešení

$f'_x(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x + 2 \cdot e^{x^2+y^2} = 4x^2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2 \cdot e^{x^2+y^2}$

$f'''_{xxy} = 4x^2 \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y + 2 \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 8x^2 y \cdot e^{x^2+y^2} + 4y \cdot e^{x^2+y^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xx}} = D_{f'''_{xxy}} = \mathbb{R}^2$

Výsledkem požadované parciální derivace je $f'''_{xxy}(x,y) = 8x^2 y \cdot e^{x^2+y^2} + 4y \cdot e^{x^2+y^2}$

15. $f(x,y) = \cos(x + \sin y)$, určete parciální derivaci: $f'''_{yxy}(x,y)$

Řešení

$f'_y(x,y) = -\sin(x + \sin y) \cdot \cos y$

$f''_{yx}(x,y) = -\cos(x + \sin y) \cdot \cos y$

$$\begin{aligned} f'''_{yxy} &= \sin(x + \sin y) \cdot \cos y \cdot \cos y - \cos(x + \sin y) \cdot (-\sin y) = \\ &= \cos^2 y \cdot \sin(x + \sin y) + \sin y \cdot \cos(x + \sin y) \end{aligned}$$

$D_f = D_{f'_y} = D_{f''_{yx}} = D_{f'''_{yxy}} = \mathbb{R}^2$

Výsledkem požadované parciální derivace je $f'''_{yxy}(x,y) = \cos^2 y \cdot \sin(x + \sin y) +$
$+ \sin y \cdot \cos(x + \sin y)$.

16. $f(x,y) = \ln x \cdot \ln y + \sin x \cdot \cos y$, určete parciální derivaci: $f^{(IV)}_{xyxy}(x,y)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \ln y + \cos x \cos y$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + \cos x \cdot (-\sin y) = \frac{1}{xy} - \cos x \cdot \sin y$

$f'''_{xyx} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} + \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{x^2 y} + \sin x \cdot \sin y$

$f^{(IV)}_{xyxy} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} + \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{x^2 y^2} + \sin x \cdot \cos y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xy}} = D_{f'''_{xyx}} = D_{f^{(IV)}_{xyxy}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

Výsledkem požadované parciální derivace je $f^{(IV)}_{xyxy} = \frac{1}{x^2 y^2} + \sin x \cdot \cos y$

17. $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$, určete parciální derivaci: $f'''_{xyz}(x,y)$

Řešení

$f'_x(x,y) = 2xy^3 z^4$

$f''_{xy}(x,y) = 6xy^2 z^4$

$f'''_{xyz} = 24xy^2 z^3$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xy}} = D_{f'''_{xyz}} = \mathbb{R}^3$

Výsledkem požadované parciální derivace je $f'''_{xyz} = 24xy^2 z^3$.

2.2. Cvičení

Nyní se zaměříme na procvičení parciálních derivací druhého a vyššího řádu, které jsme se naučili počítat v předchozí kapitole. Řešení příkladů na procvičení jsou k dispozici na konci práce.

Spočtěte druhé parciální derivace:

1. $f(x, y) = 3x + 2y - 1$
2. $f(x, y) = x^2 y$
3. $f(x, y) = 3x^2y^3 + 3x^3y^2$
4. $f(x, y) = e^x \ln(y) + e^y \ln(x)$
5. $f(x, y) = \frac{1}{y} \sin x + \frac{1}{x} \cos y$
6. $f(x + y) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
7. $f(x, y) = x^2 \sin^4 y$
8. $f(x, y) = xy^2 - \frac{x^3}{y^4}$
9. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$
10. $f(x, y, z) = e^{x \cdot y \cdot z}$
11. $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Spočtěte požadované parciální derivace:

12. $f(x, y) = e^y \cdot \ln(x) + \sin x \cdot \ln(y)$, určete parciální derivaci: $f'''_{xxx}(x, y)$
13. $f(x, y) = e^{x^2 y}$, určete parciální derivaci: $f'''_{yxy}(x, y)$
14. $f(x, y) = x^6 \cos y$, určete parciální derivaci: $f^{(VI)}_{xxyyxy}(x, y)$
15. $f(x, y) = x^4 \cdot \ln(y)$, určete parciální derivaci: $f^{(IV)}_{yxyx}(x, y)$

16. $f(x, y, z) = 2^x \cdot 4^y \cdot 6^z$, určete parciální derivaci: $f'''_{zyx}(x, y, z)$

3. Totální diferenciál 1.řádu

V následujících čtyřech kapitolách se podíváme, kde se využívá parciální derivování, které jsme si procvičili v předchozích kapitolách.

Někdy jsou vztahy mezi proměnnými vyjádřeny pomocí složitých vztahů, proto je chceme nahradit na okolí určitého bodu funkcí jednodušší. Nejjednodušší způsob lokální aproximace funkce dvou proměnných je pomocí tečné roviny. V takovém případě přírůstek funkce nahrazujeme přírůstkem na tečné rovině prostřednictvím tzv. diferenciálu 1. řádu. Abychom byli schopni tento diferenciál pro daný bod a danou funkci určit, potřebujeme znát první parciální derivace uvažované funkce.

Totální diferenciál lze také použít k určování přibližné hodnoty. Návod, jak tuto přibližnou hodnotu spočítat, je v 6 kapitole.

Definice 3.1 *Řekneme, že funkce $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu (x_0, y_0) je v tomto bodě* ***diferencovatelná****, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Lineární funkce

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

dvou proměnných dx a dy se nazývá ***(totální) diferenciál funkce*** f ***v bodě*** (x_0, y_0) *a značí se $df(x_0, y_0)$.*

Věta 3.1 *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) pak je v tomto bodě spojitá.*

3.1. Řešené příklady

Při hledání diferenciálu 1. řádu, postupujeme tak, že nejprve určíme první parciální derivace. Ty pak dosadíme do rovnice pro určení totálního diferenciálu prvního řádu: $df(x, y) = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy$.

Jestliže máme zadaný bod A o souřadnicích (x_0, y_0), dosadíme ho do výše uvedené rovnice a to tak, že $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.

V posledním kroku rovnici upravíme a lineární funkce, kterou jsme vypočítali, se nazývá totální diferenciál prvního řádu.

Spočtěte první diferenciál funkce v bodě A:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\qquad\qquad$ $A = (1, -1)$

   Řešení

   $f'_x(x, y) = 2x$

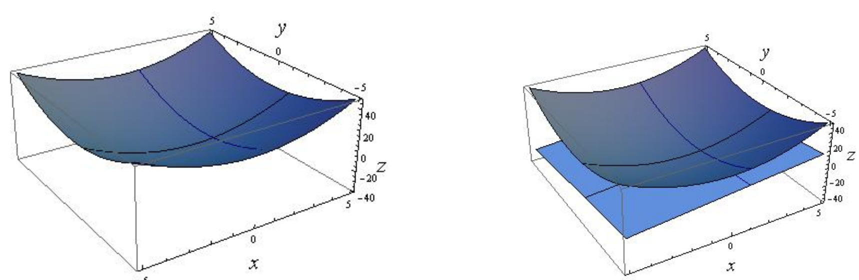
   $f'_y(x, y) = 2y$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

   $df(x, y) = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy$

   $df(A) = 2 \cdot 1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (-1) \cdot (y + 1) = 2x - 2 - 2y - 2 = 2x - 2y - 4$

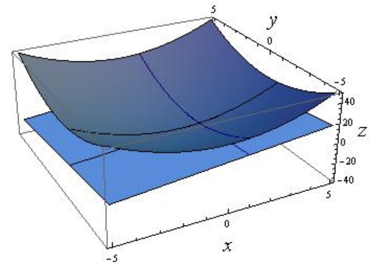
   Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 2x - 2y - 4$.



Obrázek 19: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (1, -1)$.

Přičteme-li k totálnímu diferenciálu číslo, které je rovno funkční hodnotě funkce f v bodě A, získáme rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě

A. Tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $A = (1,-1)$ má tedy rovnici $z(A) = 2x - 2y - 2$ a je znázorněna na obrázku 20.



Obrázek 20: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ a tečná rovina k této funkci v bodě $A = (1,-1)$.

2. $f(x,y) = x \cdot \ln(y)$ $\qquad A = (2,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \ln(y)$

$f'_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$df(x,y) = \ln(y) \cdot dx + \frac{x}{y} \cdot dy$

$df(A) = \ln(1) \cdot (x-2) + \frac{2}{1} \cdot (y-1) = 2y - 2$

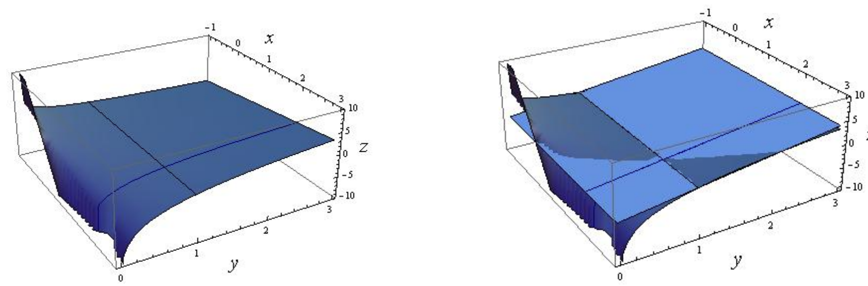
Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 2y - 2$.

3. $f(x,y) = xy^4 + x^2y^3 - x^3y^2 - x^4y$ $\qquad A = (-2,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^4 + 2xy^3 - 3x^2y^2 - 4x^3y$

$f'_y(x,y) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 2x^3y - x^4$



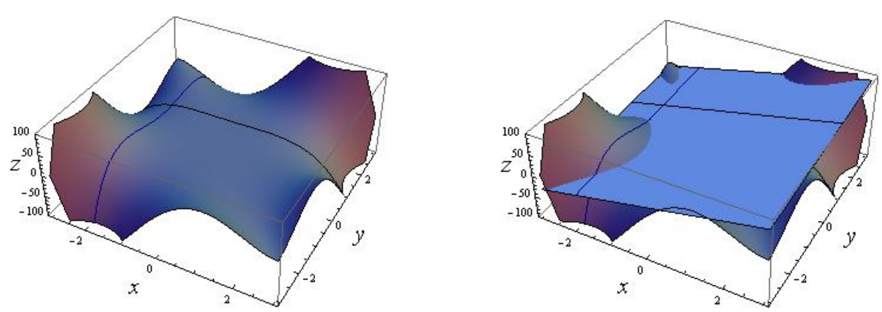
Obrázek 21: Graf funkce $f(x,y) = x \cdot \ln(y)$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (2,1)$. U této funkce je diferenciál roven tečné rovině, protože funkční hodnota funkce f v bodě A je rovna nule.

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

$$df(x,y) = (y^4 + 2xy^3 - 3x^2y^2 - 4x^3y)\,dx + (4xy^3 + 3x^2y^2 - 2x^3y - x^4)\,dy$$

$$\begin{aligned} df(A) &= [1^4 + 2\cdot(-2)\cdot 1^3 - 3\cdot(-2)^2\cdot 1^2 - 4\cdot(-2)^3\cdot 1](x+2) + \\ &+ [4\cdot(-2)\cdot 1^3 + 3\cdot(-2)^2\cdot 1^2 - 2\cdot(-2)^3\cdot 1 - (-2)^4](y-2) = \\ &= (1 - 4 - 12 + 32)(x+2) + (-8 + 12 + 16 - 16)(y-1) = \\ &= 17x + 34 + 4y - 4 = 17x + 4y + 30 \end{aligned}$$

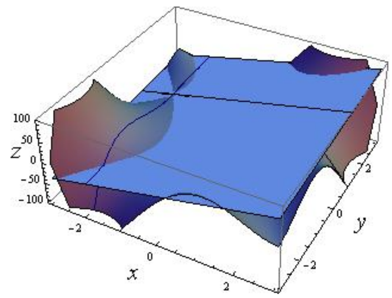
Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 17x + 4y + 30$.



Obrázek 22: Graf funkce $f(x,y) = xy^4 + x^2y^3 - x^3y^2 - x^4y$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (-2,1)$.

4. $f(x,y) = y\sin^2 x$ $\qquad\qquad$ $A = (\frac{\pi}{4}, 4)$

Řešení



Obrázek 23: Graf funkce $f(x,y) = xy^4 + x^2y^3 - x^3y^2 - x^4y$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $A = (-2,1)$, kterou jsme zkonstruovali tak, že jsme k diferenciálu přičetli funkční hodnotu funkce f v bodě A, tj. $f(A) = -6$.

$$f'_x(x,y) = y \cdot 2 \sin x \cos x = 2y \sin x \cos x$$

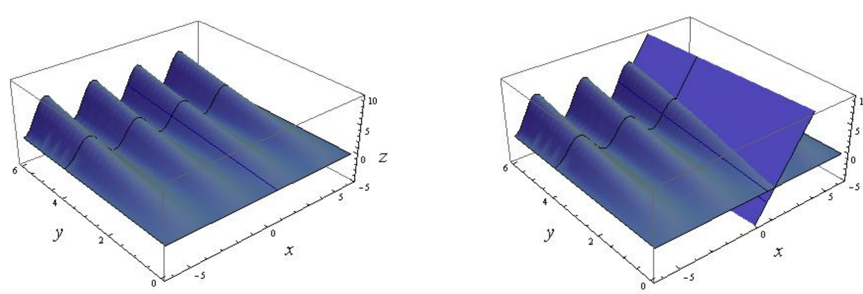
$$f'_y(x,y) = \sin^2 x$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

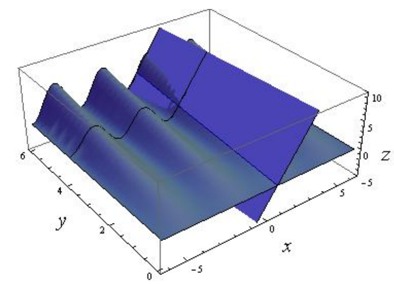
$$df(x,y) = 2y \sin x \cos x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dy$$

$$\begin{aligned} df(A) &= 2 \cdot 4 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \cdot (y-4) = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot (y-4) = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{2}{4}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}(y-4) = \tfrac{1}{2}(8x + y - 2\pi - 4) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = \frac{1}{2}(8x + y - 2\pi - 4)$.



Obrázek 24: Graf funkce $f(x,y) = y \sin^2 x$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{4}, 4)$.



Obrázek 25: Graf funkce $f(x,y) = y\sin^2 x$ a její tečná rovina ke grafu funkce v bodě A, tj. její diferenciál prvního řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{4}, 4)$ posunutý o funkční hodnotu 2.

5. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ $\qquad A = (3,1)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(xy)-\left(x^2-y^2\right)x}{x^2y^2} = \frac{2x^2y-x^2y+y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2y+y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y(xy)-\left(x^2-y^2\right)x}{x^2y^2} = \frac{-2xy^2-x^3+xy^2}{x^2y^2} = \frac{-xy^2-x^3}{x^2y^2} = \frac{-y^2-x^2}{xy^2} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$$

$$df(x,y) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) dy$$

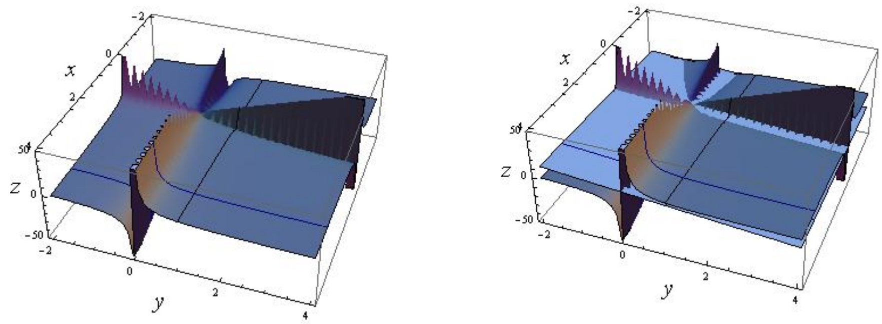
$$\begin{aligned} df(A) &= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3^2}\right)(x-3) + \left(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{1^2}\right)(y-1) = \\ &= \left(1 + \tfrac{1}{9}\right)(x-3) + \left(-\tfrac{1}{3} - 3\right)(y-1) = \\ &= \tfrac{10}{9}(x-3) - \tfrac{10}{3}(y-1) = \tfrac{10}{9}x - \tfrac{10}{3} - \tfrac{10}{3}y + \tfrac{10}{3} = \tfrac{10}{9}x - \tfrac{10}{3}y \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = \frac{10}{9}x - \frac{10}{3}y$.

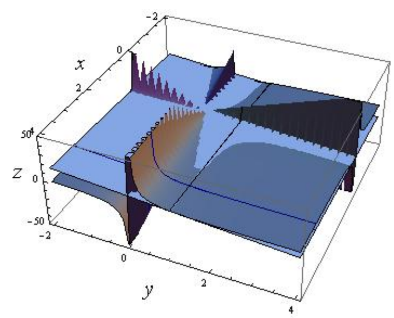
6. $f(x,y) = \sin(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2)$ $\qquad A = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$

Řešení

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos(x+y)\cdot 1\cdot\cos(x^2-y^2) + \sin(x+y)\cdot[-\sin(x^2-y^2)]\cdot(2x) = \\ &= \cos(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2) - 2x\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x^2-y^2) \end{aligned}$$



Obrázek 26: Graf funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (3,1)$.



Obrázek 27: Graf funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ a její tečná rovina ke grafu funkce v bodě A, tj. její diferenciál prvního řádu v bodě $A = (3,1)$ posunutý o funkční hodnotu $\frac{8}{3}$.

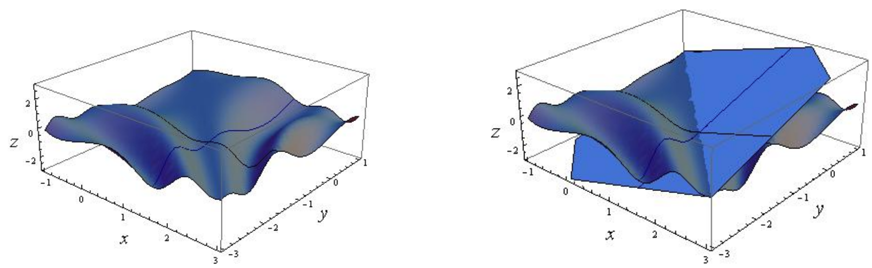
$$
\begin{aligned}
f'_y(x,y) &= \cos(x+y)\cdot 1\cdot\cos(x^2-y^2) + \sin(x+y)\cdot\left[-\sin(x^2-y^2)\right](-2y) = \\
&= \cos(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2) + 2y\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x^2-y^2)
\end{aligned}
$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

$$
\begin{aligned}
df(x,y) &= \left[\cos(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2) - 2x\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x^2-y^2)\right]dx + \\
&\quad + \left[\cos(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2) + 2y\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x^2-y^2)\right]dy
\end{aligned}
$$

$$df(A) = [\cos(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}) \cdot \cos\left[\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right] -$$
$$- 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left[\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right]] \left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ [\cos(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}) \cdot \cos\left[\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right] +$$
$$+ 2 \cdot \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left[\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right]] \left(y + \tfrac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \left[1 \cdot 1 - 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 0\right] \left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \left[1 \cdot 1 - 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 0\right] \left(y + \tfrac{\pi}{2}\right) =$$
$$= 1(x - \tfrac{\pi}{2}) + 1(y + \tfrac{\pi}{2}) = x - \tfrac{\pi}{2} + y + \tfrac{\pi}{2} = x + y$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = x + y$.



Obrázek 28: Graf funkce $f(x, y) = \sin(x + y) \cdot \cos(x^2 - y^2)$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. U tohoto příkladu je diferenciál roven tečné rovině, protože funkční hodnota funkce f v bodě A je nula.

7. $f(x, y) = \ln[\sin(xy)]$ $\qquad A = (\frac{\pi}{4}, 1)$

Řešení

$$f'_x(x, y) = \tfrac{1}{\sin(xy)} \cdot \cos(xy) \cdot y = \tfrac{y \cdot \cos(xy)}{\sin(xy)} = y \cdot \mathrm{cotg}(xy)$$

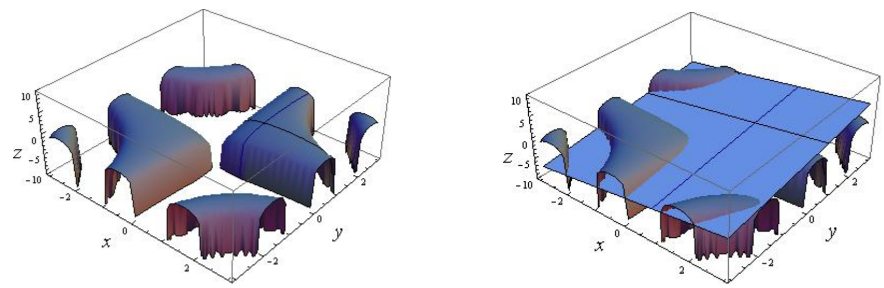
$$f'_y(x, y) = \tfrac{1}{\sin(xy)} \cdot \cos(xy) \cdot x = \tfrac{x \cdot \cos(xy)}{\sin(xy)} = x \cdot \mathrm{cotg}(xy)$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) > 0\}$$

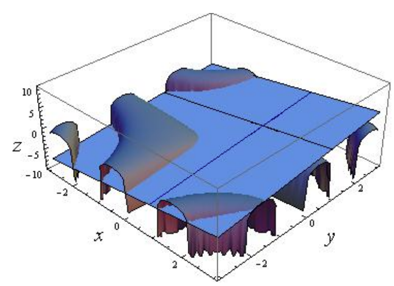
$$df(x, y) = y \cdot \mathrm{cotg}(xy) \cdot dx + x \cdot \mathrm{cotg}(xy) \cdot dy$$

$$
\begin{aligned}
df(A) &= 1 \cdot \operatorname{cotg}(\tfrac{\pi}{4} \cdot 1)\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cotg}(\tfrac{\pi}{4} \cdot 1)\,(y-1) = \\
&= 1 \cdot 1\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{\pi}{4} \cdot 1\,(y-1) = x - \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4}y - \tfrac{\pi}{4} = \\
&= x + \tfrac{\pi}{4}y - \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = x + \frac{\pi}{4}y - \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 29: Graf funkce $f(x,y) = \ln[\sin(xy)]$ a její diferenciál 1. řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{4}, 1)$.



Obrázek 30: Graf funkce $f(x,y) = \ln[\sin(xy)]$ a její tečná rovina ke grafu funkce v bodě A, tj. její diferenciál prvního řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{4}, 1)$ posunutý o funkční hodnotu $-\frac{\ln(2)}{2}$.

Poznámka 3.1 *Diferenciál funkce tří proměnných se definuje podobně jako diferenciál funkce dvou proměnných. A to:*

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz.$$

8. $f(x,y,z) = x^{yz}$ $\qquad\qquad A = (e, 1, 2)$

Řešení

$f'_x(x, y, z) = (yz)\, x^{(yz-1)}$

$f'_y(x, y, z) = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$

$f'_z(x, y, z) = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= (yz)\, x^{(yz-1)} \cdot dx + x^{yz} \cdot \ln x \cdot z \cdot dy + x^{yz} \cdot \ln x \cdot y \cdot dz = \\ &= x^{yz} \left(\tfrac{yz}{x} \cdot dx + z \ln x \cdot dy + y \ln x \cdot dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(A) &= (1 \cdot 2)\, e^{(1 \cdot 2 - 1)}\, (x - e) + (2 \cdot e^{1 \cdot 2} \cdot \ln e)\, (y - 1) + (1 \cdot e^{1 \cdot 2} \cdot \ln e)\, (z - 2) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot e \cdot (x - e) + 2 \cdot e^2 \cdot 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot e^2 \cdot 1 \cdot (z - 2) = \\ &= 2ex - 2e^2 + 2e^2 y - 2e^2 + e^2 z - 2e^2 = 2ex + 2e^2 y + e^2 z - 6e^2 = \\ &= 2e\, (x + ey + ez - 3e) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 2e\, (x + ey + ez - 3e)$.

9. $f(x, y, z) = e^{\left(x^2 + y\right)} \cdot \ln(z)$ $\qquad A = (1, -2, e^2)$

Řešení

$f'_x(x, y, z) = e^{\left(x^2 + y\right)} \cdot \ln(z) \cdot 2x$

$f'_y(x, y, z) = e^{\left(x^2 + y\right)} \cdot \ln(z) \cdot 1$

$f'_z(x, y, z) = e^{\left(x^2 + y\right)} \cdot \frac{1}{z}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$

$df(x, y, z) = e^{x^2 + y} \left(2x \cdot \ln z \cdot dx + \ln z \cdot dy + \frac{1}{z} \cdot dz \right)$

$$\begin{aligned} df(A) &= e^{\left(1^2 - 2\right)} \left[2 \cdot 1 \cdot \ln(e^2)\, (x - 1) + \ln(e^2)\, (y + 2) + \tfrac{1}{e^2}\, (z - e^2) \right] = \\ &= e^{-1} \left[2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 2) + \tfrac{1}{e^2}\, (z - e^2) \right] = \\ &= e^{-1} \left[4x + 2y + \tfrac{z}{e^2} - 1 \right] = e^{-1}\, (4x + 2y + e^{-2} z - 1) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1.řádu v bodě A je $df(A) = e^{-1}\,(4x + 2y + e^{-2}z - 1)$.

3.2. Cvičení

Tato podkapitola je věnována procvičení příkladů na hledání diferenciálu 1. řádu. Řešení příkladů je k nalezení na konci práce.

Spočtěte první diferenciál funkce v bodě A:

1. $f(x, y) = xy$ $\qquad A = (2, 4)$
2. $f(x, y) = 2x^2 - 8xy + 2y^2$ $\qquad A = (-2, 2)$
3. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ $\qquad A = (4, 2)$
4. $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$ $\qquad A = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$
5. $f(x, y) = y^2 \arcsin x$ $\qquad A = (0, 2)$
6. $f(x, y) = e^{-x} [\sin(2y) - 3\cos(2y)]$ $\qquad A = (-1, \frac{\pi}{2})$
7. $f(x, y) = y^{xy}$ $\qquad A = (2, 1)$
8. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{xy} + 3x^4y^3$ $\qquad A = (1, 1)$

4. Totální diferenciál 2.řádu

U hledání diferenciálu 1. řádu jsme nahrazovali funkci tečnou rovinou. To nám ovšem nemusí stačit, proto budeme chtít nahrazovat funkci funkcí složitější, konkrétně polynomem druhého stupně.

K tomu nám poslouží totální diferenciál 2. řádu, který pak spolu s totálním diferenciálem 1. řádu a funkční hodnotou v daném bodě budeme používat v Taylorově vzorci.

Definice 4.1 *Nechť funkce $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu m včetně.* ***Diferenciálem m-tého*** *řádu funkce f v bodě (x_0, y_0) rozumíme homogenní funkci m-tého stupně*

$$d^m f(x_0, y_0)(dx, dy) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) dx^j dy^{m-j}.$$

4.1. Řešené příklady

Pro výpočet totálního diferenciálu 2. řádu nejprve potřebujeme spočítat parciální derivace 1. řádu a z nich poté parciální derivace 2. řádu. Určené derivace poté dosadíme do vzorce pro výpočet totálního diferenciálu 2. řádu, $d^2 f(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot dx^2 + 2f''_{xy}(x, y) \cdot dx \cdot dy + f''_{yy}(x, y) \cdot dy^2$.

Jestliže máme zadaný bod A o souřadnicích (x_0, y_0), dosadíme ho do rovnice pro totální diferenciál 2. řádu, čili
$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$.

Úpravou pak obdržíme požadovaný vztah.

Spočtěte totální diferenciál 2.řádu

1. $f(x, y) = x^2y^2 - xy$ $\qquad A = (-2, 1)$

   Řešení

$f'_x(x,y) = 2xy^2 - y$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = 2x^2y - x$

$f''_{xx}(x,y) = 2y^2$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = 2x^2$

$f''_{xy}(x,y) = 4xy - 1$ $\qquad$ $f''_{yx}(x,y) = 4xy - 1$

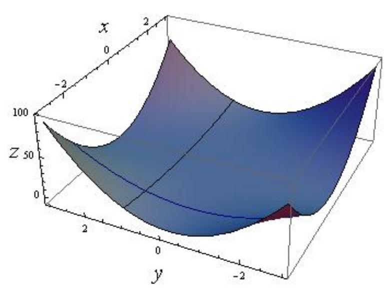
$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

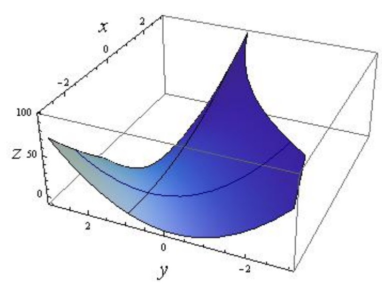
$$d^2f(x,y) = 2y^2dx^2 + 2\,(4xy-1)\,dxdy + 2x^2dy^2 = 2\left[y^2dx^2 + (4xy-1)\,dxdy + x^2dy^2\right]$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= 2\left[1\cdot(x+2)^2 + (-8-1)\,(x+2)\,(y-1) + 4\cdot(y-1)^2\right] = \\ &= 2\left[(x^2+4x+4) - 9(xy - x + 2y - 2) + 4(y^2 - 2y + 1)\right] = \\ &= 2x^2 + 8x + 8 - 18xy + 18x - 36y + 36 + 8y^2 - 16y + 8 = \\ &= 2\,(x^2 + 4y^2 - 9xy + 13x - 26y + 26) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = 2\,(x^2 + 4y^2 - 9xy + 13x - 26y + 26).$$





Obrázek 31: Graf funkce $f(x,y) = x^2y^2 - xy$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (-2,1)$.

2. $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ $\qquad$ $A = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$

Řešení

$f'_x(x,y) = \cos(x^2+y^2)\cdot 2x$

$$f'_y(x,y) = \cos(x^2+y^2)\cdot 2y$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) + 2x\,[-\sin(x^2+y^2)]\,2x = \\ &= 2\,[\cos(x^2+y^2) - 2x^2\sin(x^2+y^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) + 2y\,[-\sin(x^2+y^2)]\,2y = \\ &= 2\,[\cos(x^2+y^2) - 2y^2\sin(x^2+y^2)] \end{aligned}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2x\,[-\sin(x^2+y^2)]\,2y = -4xy\sin(x^2+y^2)$$

$$f''_{yx}(x,y) = 2x\,[-\sin(x^2+y^2)]\,2y = -4xy\sin(x^2+y^2)$$

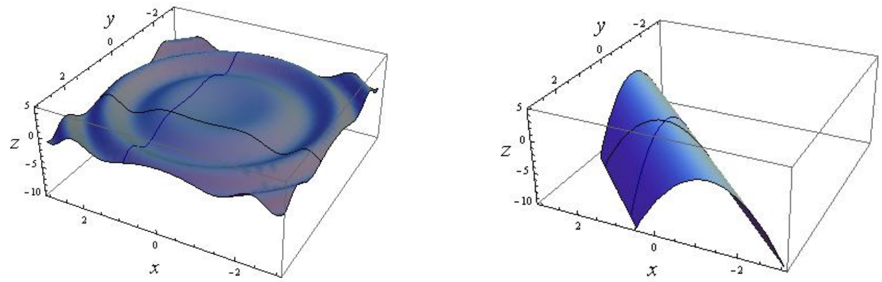
$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} d^2f(x,y) &= 2\,[\cos(x^2+y^2) - 2x^2\sin(x^2+y^2)]\,dx^2 - 2\,[4xy\sin(x^2+y^2)]\,dxdy + \\ &+ 2\,[\cos(x^2+y^2) - 2y^2\sin(x^2+y^2)]\,dy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= 2\left[\cos\left[\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right] - 2\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \sin\left[\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right]\right]\left(x - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 - \\ &- 2\left[4\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\sin\left[\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right]\right]\left(x - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \\ &+ 2\left[\cos\left[\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right] - 2\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \sin\left[\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right]\right]\left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \\ &= 2\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]\left(x^2 - \sqrt{\pi}x + \tfrac{\pi}{4}\right) - \\ &- 2\left[4\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]\left(xy - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}x - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}y + \tfrac{\pi}{4}\right) + \\ &+ 2\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]\left(y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4}\right) = \\ &= 2[0 - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}\cdot 1]\left(x^2 - \sqrt{\pi}x + \tfrac{\pi}{4}\right) - 2[\pi\cdot 1]\left(xy - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}x - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}y + \tfrac{\pi}{4}\right) + \\ &+ 2[0 - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}\cdot 1]\left(y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4}\right) = -\pi\left(x^2 - \sqrt{\pi}x + \tfrac{\pi}{4}\right) - \\ &- 2\pi\left(xy - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}x - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}y + \tfrac{\pi}{4}\right) - \pi\left(y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\pi\left(x^2 - \sqrt{\pi}x + \tfrac{\pi}{4} + 2xy - \sqrt{\pi}x - \sqrt{\pi}y - \tfrac{\pi}{2} + y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\pi\,(x^2 + y^2 - 2xy - 2\sqrt{\pi}x - 2\sqrt{\pi}y + \pi) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = -\pi\,(x^2 + y^2 - 2xy - 2\sqrt{\pi}x - 2\sqrt{\pi}y + \pi).$$



Obrázek 32: Graf funkce $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$.

3. $f(x,y) = e^{xy^2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad A = (3,-1)$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = e^{xy^2} \cdot y^2$

   $f'_y(x,y) = e^{xy^2} \cdot 2xy$

   $f''_{xx}(x,y) = e^{xy^2} \cdot y^2 \cdot y^2 = y^4 \cdot e^{xy^2}$

   $f''_{yy}(x,y) = e^{xy^2} \cdot 2x + 2xy \cdot e^{xy^2} \cdot 2xy = 2\left(x \cdot e^{xy^2} + 2x^2y^2e^{xy^2}\right)$

   $f''_{xy}(x,y) = 2ye^{xy^2} + e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot y^2 = 2\left(ye^{xy^2} + xy^3e^{xy^2}\right)$

   $f''_{yx}(x,y) = 2ye^{xy^2} + e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot y^2 = 2\left(ye^{xy^2} + xy^3e^{xy^2}\right)$

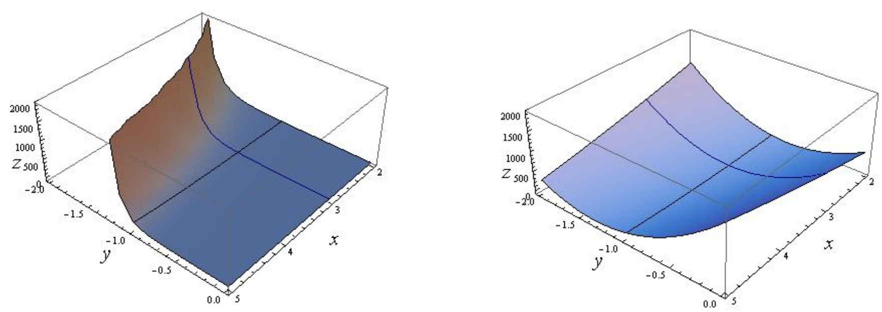
   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

   $$d^2f(x,y) = y^4 \cdot e^{xy^2} dx^2 + 2 \cdot 2\left(ye^{xy^2} + xy^3e^{xy^2}\right) dxdy + 2\left(x \cdot e^{xy^2} + 2x^2y^2e^{xy^2}\right) dy^2$$

$$\begin{aligned}
d^2f(A) &= 1\cdot e^3\,(x-3)^2 + 2\cdot 2\,[(-1)\cdot e^3 + 3\cdot(-1)\cdot e^3]\,(x-3)\,(y+1) + \\
&+ 2\,(3\cdot e^3 + 2\cdot 3^2\cdot 1\cdot e^3)\,(y+1)^2 = e^3\,(x^2-6x+9) + \\
&+ 4\,(-e^3-3e^3)\,(xy+x-3y-3) + 2\,(3e^3+18e^3)\,(y^2+2y+1) = \\
&= e^3\,(x^2-6x+9) + 4e^3\,(-1-3)\,(xy+x-3y-3) + \\
&+ 2e^3\,(3+18)\,(y^2+2y+1) = \\
&= e^3\,[x^2-6x+9+16\,(xy+x-3y-3)+42\,(y^2+2y+1)] = \\
&= e^3\,(x^2-6x+9+16xy+16x-48y-48+42y^2+84y+42) = \\
&= e^3\,(x^2+42y^2+16xy+10x+36y+3)
\end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = e^3\,(x^2+42y^2+16xy+10x+36y+3).$$



Obrázek 33: Graf funkce $f(x,y) = e^{xy^2}$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (3,-1)$.

4. $f(x,y) = \frac{1}{y}\sin x$ $\qquad$ $A = (\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{y}\cos x$

$f'_y(x,y) = -\frac{1}{y^2}\sin x$

$f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{y}\sin x$

$f''_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3}\sin x$

$f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}\cos x$

$f''_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2}\cos x$

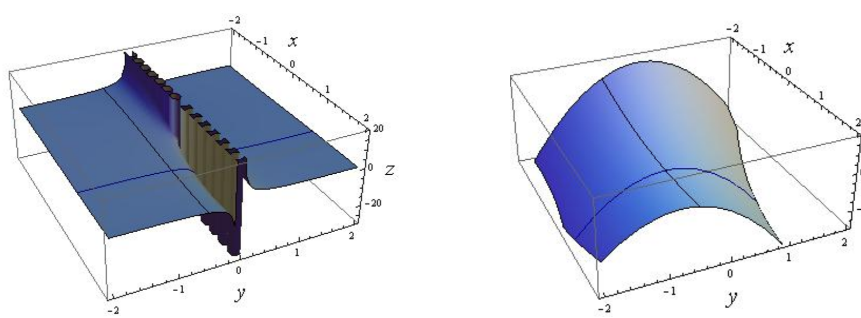
$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$$d^2 f(x,y) = \left[-\frac{1}{y}\sin x\right] dx^2 + 2\left[-\frac{1}{y^2}\cos x\right] dxdy + \left[\frac{2}{y^3}\sin x\right] dy^2$$

$$\begin{aligned} d^2 f(A) = {} & \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\left[-\frac{1}{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) + \\ & + \left[\frac{2}{-\frac{1}{8}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{16}\right) - \\ & - 2\left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(xy + \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}y - \frac{\pi}{8}\right) + \left(16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = \\ & = \sqrt{2}\left(x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{16}\right) - 4\sqrt{2}\left(xy + \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}y - \frac{\pi}{8}\right) - 8\sqrt{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = \\ & = \sqrt{2}\left(x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{16} - 4xy + 2x + \pi y + \frac{\pi}{2} - 8y^2 - 8y - 2\right) = \\ & = \sqrt{2}\left[x^2 - 8y^2 - 4xy - x\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) + y(\pi - 8) + \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right] \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2 f(A) = \sqrt{2}\left[x^2 - 8y^2 - 4xy - x\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) + y(\pi - 8) + \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right].$$



Obrázek 34: Graf funkce $f(x,y) = \frac{1}{y}\sin x$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$.

5. $f(x,y) = \sqrt[4]{xy}$ $\qquad A = (1,1)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{4}\,(xy)^{-\frac{3}{4}}\,y = \frac{y}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{4}\,(xy)^{-\frac{3}{4}}\,x = \frac{x}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$$

$$f''_{xx}(x,y) = -\frac{3}{16}\,(xy)^{-\frac{7}{4}}\,y^2 = -\frac{3y^2}{16\sqrt[4]{(xy)^7}}$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{3}{16}\,(xy)^{-\frac{7}{4}}\,x^2 = -\frac{3x^2}{16\sqrt[4]{(xy)^7}}$$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{3}{16}\,(xy)^{-\frac{7}{4}}\,xy + \frac{1}{4}\,(xy)^{-\frac{3}{4}}\cdot 1 = -\frac{3xy}{16\sqrt[4]{(xy)^7}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$$

$$f''_{yx}(x,y) = -\frac{3}{16}\,(xy)^{-\frac{7}{4}}\,xy + \frac{1}{4}\,(xy)^{-\frac{3}{4}}\cdot 1 = -\frac{3xy}{16\sqrt[4]{(xy)^7}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$$

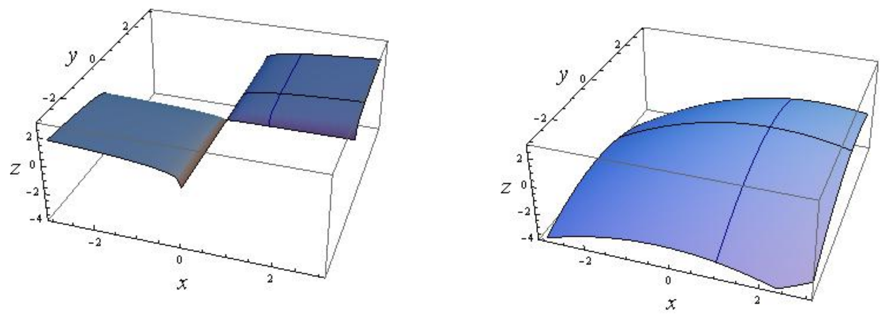
$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

$$d^2f(x,y) = -\frac{3y^2}{16\sqrt[4]{(xy)^7}}dx^2 + 2\left[-\frac{3xy}{16\sqrt[4]{(xy)^7}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}\right]dxdy - \frac{3x^2}{16\sqrt[4]{(xy)^7}}dy^2$$

$$\begin{aligned}
d^2f(A) &= -\frac{3\cdot 1^2}{16\sqrt[4]{(1\cdot 1)^7}}\,(x-1)^2 + 2\left[-\frac{3\cdot 1\cdot 1}{16\sqrt[4]{(1\cdot 1)^7}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(1\cdot 1y)^3}}\right](x-1)\,(y-1) - \\
&- \frac{3\cdot 1^2}{16\sqrt[4]{(1\cdot 1)^7}}\,(y-1)^2 = -\frac{3}{16\sqrt[4]{1^7}}\,(x^2-2x+1) + \\
&+ 2\left[-\frac{3}{16\sqrt[4]{1^7}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}}\right](xy-x-y+1) - \\
&- \frac{3}{16\sqrt[4]{1^7}}\,(y^2-2y+1) = -\frac{3}{16\cdot 1}\,(x^2-2x+1) + \\
&+ 2\left(-\frac{3}{16\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 1}\right)(xy-x-y+1) - \frac{3}{16\cdot 1}\,(y^2-2y+1) = \\
&= -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} + 2\left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\right)(xy-x-y+1) - \frac{3}{16}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{3}{16} = \\
&= -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8}xy - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8} - \frac{3}{16}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{3}{16} = \\
&= -\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{16}y^2 + \frac{1}{8}xy + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}y^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}y^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right).$$



Obrázek 35: Graf funkce $f(x,y) = \sqrt[4]{xy}$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (1,1)$.

6. $f(x,y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$ $\qquad\qquad A = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = \sin y + y \cdot (-\sin x) = \sin y - y \sin x$

   $f'_y(x,y) = x \cdot \cos y + \cos x$

   $f''_{xx}(x,y) = -y \cdot \cos x$

   $f''_{yy}(x,y) = -x \cdot \sin y$

   $f''_{xy}(x,y) = \cos y - \sin x$

   $f''_{yx}(x,y) = \cos y - \sin x$

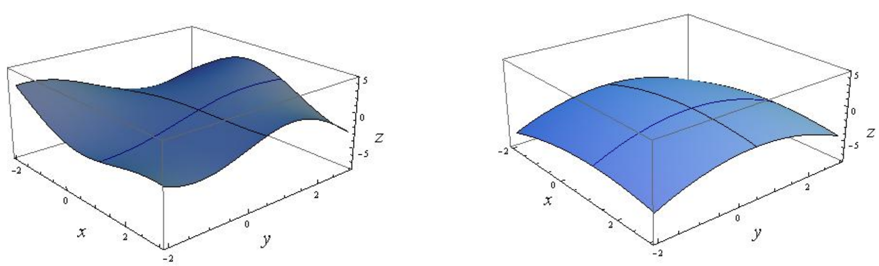
   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

   $$d^2 f(x,y) = (-y \cdot \cos x)\, dx^2 + 2\,(\cos y - \sin x)\, dxdy - (x \cdot \sin y)\, dy^2$$

$$
\begin{aligned}
d^2 f(A) &= \left[-\tfrac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right]\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2 + 2\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right]\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)\left(y - \tfrac{\pi}{6}\right) - \\
&\quad - \left[\tfrac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right]\left(y - \tfrac{\pi}{6}\right)^2 = -\tfrac{\pi}{6} \cdot \tfrac{1}{2}\left(x^2 - \tfrac{2\pi}{3}x + \tfrac{\pi^2}{9}\right) + \\
&\quad + 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(xy - \tfrac{\pi}{6}x - \tfrac{\pi}{3}y + \tfrac{\pi^2}{18}\right) - \tfrac{\pi}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\left(y^2 - \tfrac{2\pi}{6}y + \tfrac{\pi^2}{36}\right) = \\
&\quad = -\tfrac{\pi}{12}x^2 + \tfrac{\pi}{12} \cdot \tfrac{2\pi}{3}x - \tfrac{\pi}{12} \cdot \tfrac{\pi^2}{9} + 0 - \tfrac{\pi}{6}y^2 + \tfrac{2\pi^2}{36}y - \tfrac{\pi^3}{216} = \\
&\quad = -\tfrac{\pi}{12}x^2 + \tfrac{\pi^2}{18}x - \tfrac{\pi}{6}y^2 + \tfrac{\pi^2}{18}y - \tfrac{2\pi^3 + \pi^3}{216} = \\
&\quad = -\tfrac{\pi}{12}x^2 + \tfrac{\pi^2}{18}x - \tfrac{\pi}{6}y^2 + \tfrac{\pi^2}{18}y - \tfrac{\pi^3}{72} = \\
&\quad = \tfrac{\pi}{6}\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{\pi}{3}x - y^2 + \tfrac{\pi}{3}y - \tfrac{\pi^2}{12}\right) = \\
&\quad = \tfrac{\pi}{6}\left(-\tfrac{1}{2}x^2 - y^2 + \tfrac{\pi}{3}x + \tfrac{\pi}{3}y - \tfrac{\pi^2}{12}\right)
\end{aligned}
$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$
d^2 f(A) = \tfrac{\pi}{6}\left(-\tfrac{1}{2}x^2 - y^2 + \tfrac{\pi}{3}x + \tfrac{\pi}{3}y - \tfrac{\pi^2}{12}\right).
$$



Obrázek 36: Graf funkce $f(x, y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$ a její diferenciál 2. řádu v bodě $A = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

4.2. Cvičení

Spočtěte totální diferenciál 2.řádu

1. $f(x,y) = 2x^2 + 4x^2y + 4xy^2 + 2y^2$ $\qquad A = (-2, \frac{1}{2})$
2. $f(x,y) = x\cos y$ $\qquad A = (4, \frac{\pi}{4})$
3. $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{x+y}\right)$ $\qquad A = (2, -1)$
4. $f(x,y) = \sin y^2 \cdot \cos x^2$ $\qquad A = (-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$
5. $f(x,y) = \ln(x) \cdot \sin^2 y$ $\qquad A = (e, \frac{\pi}{4})$

5. Taylorův polynom

Pomocí Taylorova polynomu nahrazujeme zadanou funkci funkcí jednodušší. Tato funkce má se zadanou funkcí f v daném bodě stejnou funkční hodnotu a také stejné parciální derivace.

Věta 5.1 (Taylorova) *Nechť funkce $f : A \subset \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně. Pak pro každý bod (x, y) z tohoto okolí platí*

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$$

kde

$$T_n(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \tfrac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \cdots + \tfrac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)$$

je Taylorův polynom a R_n zbytek v Taylorově vzorci.

5.1. Řešené příklady

Výše je definovaný Taylorův polynom n-tého stupně. My si ukážeme, jak se hledá Taylorův polynom 2. stupně.

Spočtěte Taylorův polynom 2. stupně:

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ $\quad\quad\quad$ $A = (2, -2)$

   Řešení

   Definiční obor zadané funkce je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

   Nejprve spočteme první a druhé parciální derivace.

   $f'_x(x,y) = \frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2} = \frac{xy-y^2-xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$

   $f'_y(x,y) = \frac{x(x-y)-(-1)(xy)}{(x-y)^2} = \frac{x^2-xy+xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$

   $f''_{xx}(x,y) = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$

   $f''_{yy}(x,y) = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{2y(x-y)^2 - y^2 \cdot 2 \cdot (x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2y(x-y)-2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy+2y^2-2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$f''_{yx}(x,y) = -\frac{2y(x-y)^2 - y^2 \cdot 2 \cdot (x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2y(x-y)-2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy+2y^2-2y^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

Dalším krokem bude dosadit bod A do základní funkce, tedy:

$$f(A) = \frac{2 \cdot (-2)}{2-(-2)} = -1$$

Nyní budeme počítat totální diferenciál prvního řádu v bodě A.

$$\begin{aligned}
df(A) &= -\tfrac{4}{(2+2)^2}(x-2) + \tfrac{4}{(2+2)^2}(y+2) = \\
&= -\tfrac{4}{16}(x-2) + \tfrac{4}{16}(y+2) = \\
&= -\tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{4}(y+2) = \\
&= -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2} = \\
&= -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + 1
\end{aligned}$$

Dále vypočítáme totální diferenciál druhého řádu v bodě A.

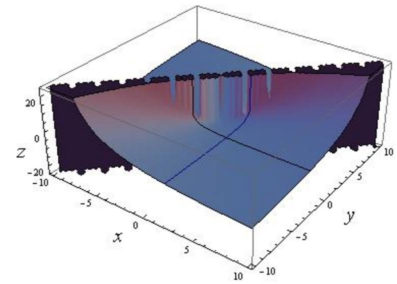
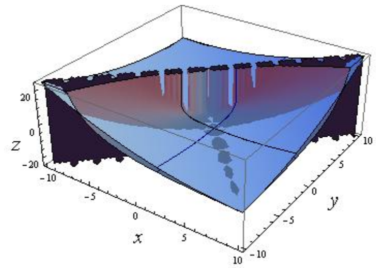
$$\begin{aligned}
d^2f(A) &= \left[\tfrac{2\cdot(-2)^2}{[2-(-2)]^3}\right](x-2)^2 + 2\left[\tfrac{-2\cdot 2\cdot(-2)}{[2-(-2)]^3}\right](x-2)(y+2) + \\
&\quad + \left[\tfrac{2\cdot 2^2}{[2-(-2)]^3}\right](y+2)^2 = \\
&= \tfrac{8}{64}(x^2-4x+4) + 2\cdot\tfrac{8}{64}(xy+2x-2y-4) + \tfrac{8}{64}(y^2+4y+4) = \\
&= \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}xy + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - 1 + \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} = \\
&= \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{4}xy
\end{aligned}$$

Posledním krokem, je dosadit do vzorce pro Taylorův polynom druhého stupně $T_2(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!}$ námi spočítané hodnoty $f(A), df(A), d^2f(A)$.

$$\begin{aligned}
T_2(A) &= -1 + \frac{\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+1\right)}{1!} + \frac{\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{4}xy}{2!} = \\
&= -1 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + 1 + \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{16}y^2 + \tfrac{1}{8}xy = \\
&= \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{16}y^2 + \tfrac{1}{8}xy - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y = \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{1}{2}xy - x + y\right)
\end{aligned}$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy - x + y\right)$$

Obrázek 37: Graf funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$ a Taylorův ploynom druhého stupně této funkce v bodě $A = (2, -2)$.

2. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ $\qquad\qquad A = (0, 0)$

   Řešení

   $f'_x(x, y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$

   $f'_y(x, y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$

   $f''_{xx}(x, y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x + 2 \cdot e^{x^2+y^2} = 4x^2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2 \cdot e^{x^2+y^2}$

   $f''_{yy}(x, y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y + 2 \cdot e^{x^2+y^2} = 4y^2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2 \cdot e^{x^2+y^2}$

   $f''_{xy}(x, y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$

   $f''_{yx}(x, y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

   $f(A) = e^{0^2+0^2} = 1$

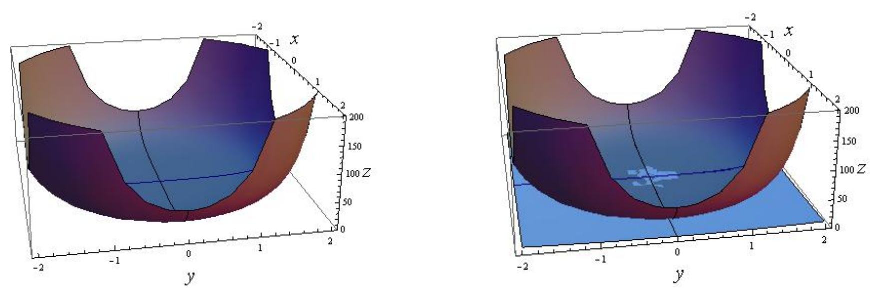
   $df(A) = 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2+0^2}\,(x - 0) + 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2+0^2}\,(y - 0) = 0$

$$
\begin{aligned}
d^2f(A) &= \left(4\cdot 0^2\cdot e^{0^2+0^2}+2\cdot e^{0^2+0^2}\right)(x-0)^2+\\
&+2\left(4\cdot 0\cdot 0\cdot e^{0^2+0^2}\right)(x-0)(y-0)+\\
&+\left(4\cdot 0^2\cdot e^{0^2+0^2}+2\cdot e^{0^2+0^2}\right)(y-0)^2=\\
&=(4\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1)\,x^2+2\,(4\cdot 0\cdot 0\cdot 1)\,xy+(4\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1)\,y^2=\\
&=2x^2+2y^2
\end{aligned}
$$

$T_2(A)=1+\frac{0}{1!}+\frac{2x^2+2y^2}{2!}=x^2+y^2+1$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A)=x^2+y^2+1.$$



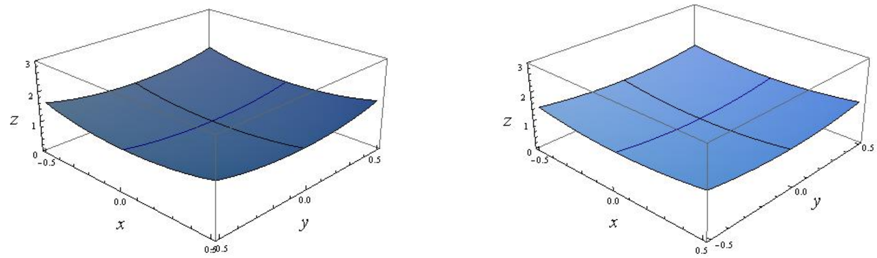
Obrázek 38: Graf funkce $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ a Taylorův ploynom druhého stupně této funkce v bodě $A=(0,0)$.

Obrázek 38 může být pro někoho překvapivý. Taylorův polynom druhého stupně, který je na obrázku znázorněn v pravo světle modrou barvou, vypadá spíše jako rovina, než jako polynom druhého stupně. Je to jen optický klam způsoben tím, že funkce $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ roste mnohem rychleji než polynom druhého stupně, tj. aproximace této funkce polynomem druhého stupně má smysl pouze na malém okolí bodu A (viz obrázek 39).

3. $f(x,y)=\sqrt{xy}+xy$ $\qquad\qquad A=(2,2)$

Řešení

$f'_x(x,y)=\frac{1}{2}\cdot(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot y+y=\frac{y}{2\sqrt{xy}}+y$



Obrázek 39: Opět graf funkce $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ a Taylorův polynom druhého stupně v bodě $A = (0,0)$, tentokrát však na mnohem menším okolí bodu $(0,0)$. Jestliže se zaměříme na toto malé okolí bodu $(0,0)$ je lépe vidět, že grafem Taylorova polynomu je paraboloid.

$$f'_y(x,y) = \tfrac{1}{2} \cdot (xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot x + x = \tfrac{x}{2\sqrt{xy}} + x$$

$$f''_{xx}(x,y) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) (xy)^{-\frac{3}{2}} \cdot y \cdot y = -\tfrac{y^2}{4\sqrt{(xy)^3}}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) (xy)^{-\frac{3}{2}} \cdot x \cdot x = -\tfrac{x^2}{4\sqrt{(xy)^3}}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x,y) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(xy)^{\frac{1}{2}} - y \cdot \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot x}{xy} + 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{xy\left[(xy)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot(xy)^{-\frac{1}{2}}\right]}{xy} + 1 = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{xy}} - \tfrac{1}{2\sqrt{xy}}\right) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yx}(x,y) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(xy)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot y}{xy} + 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{xy\left[(xy)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot(xy)^{-\frac{1}{2}}\right]}{xy} + 1 = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{xy}} - \tfrac{1}{2\sqrt{xy}}\right) + 1 \end{aligned}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

$$f(A) = \sqrt{2 \cdot 2} + 2 \cdot 2 = \sqrt{4} + 4 = 6$$

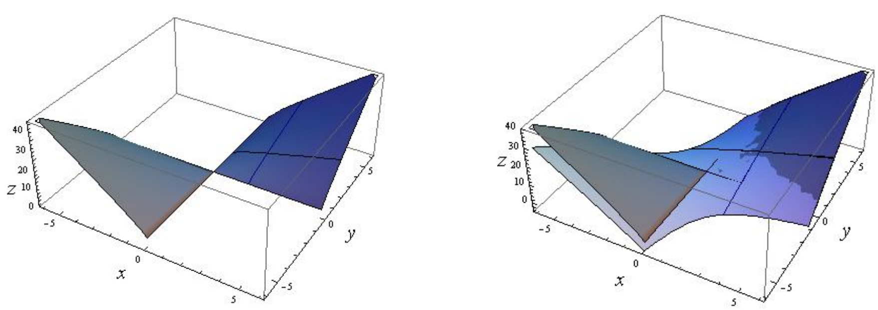
$$\begin{aligned} df(A) &= \left(\tfrac{2}{2\sqrt{2\cdot 2}} + 2\right)(x-2) + \left(\tfrac{2}{2\sqrt{2\cdot 2}} + 2\right)(y-2) = \\ &= \tfrac{5}{2}(x-2) + \tfrac{5}{2}(y-2) = \\ &= \tfrac{5}{2}x - 5\tfrac{5}{2}y - 5 = \tfrac{5}{2}x + \tfrac{5}{2}y - 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d^2f(A) &= -\frac{2^2}{4\sqrt{(2\cdot 2)^3}}\left(x-2\right)^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} - \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 2}}\right) + 1\right]\left(x-2\right)\left(y-2\right) - \\
&\quad - \frac{2^2}{4\sqrt{(2\cdot 2)^3}}\left(y-2\right)^2 = -\frac{2^2}{4\sqrt{4^3}}\left(x^2-4x+4\right) + \\
&\quad + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} - \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 2}}\right) + 1\right]\left(xy-2x-2y+4\right) - \frac{2^2}{4\sqrt{4^3}}\left(x^2-4x+4\right) = \\
&\quad = -\frac{1}{8}\left(x^2-4x+4\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}\left(xy-2x-2y+4\right) - \frac{1}{8}\left(y^2-4y+4\right) = \\
&\quad = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{9}{4}xy - \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}y + 9 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = \\
&\quad = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{9}{4}xy - 4x - 4y + 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2(A) &= 6 + \frac{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}y-10}{1!} + \frac{-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}y^2+\frac{9}{4}xy-4x-4y+8}{2!} = \\
&= 6 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y - 10 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}y^2 + \frac{9}{8}xy - 2x - 2y + 4 = \\
&= -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}y^2 + \frac{9}{8}xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y
\end{aligned}
$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}y^2 + \frac{9}{8}xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$



Obrázek 40: Graf funkce $f(x,y) = \sqrt{xy} + xy$ a Taylorův ploynom druhého stupně této funkce v bodě $A = (2,2)$.

4. $f(x,y) = 2x^2 + 3x^2y + 4xy^2 + 2y^2 + x + y + 3$ $\qquad A = (-2,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = 4x + 6xy + 4y^2 + 1$

$f'_y(x,y) = 3x^2 + 8xy + 4y + 1$

$f''_{xx}(x,y) = 4 + 6y$

$f''_{yy}(x,y) = 8x + 4$

$f''_{xy}(x,y) = 6x + 8y$

$f''_{yx}(x,y) = 6x + 8y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

$f(A) = 2{\cdot}4{+}3{\cdot}4{\cdot}1{+}4{\cdot}1{\cdot}(-2){+}2{\cdot}1{-}2{+}1{+}3 = 8{+}12{-}8{+}2{-}2{+}1{+}3 = 16$

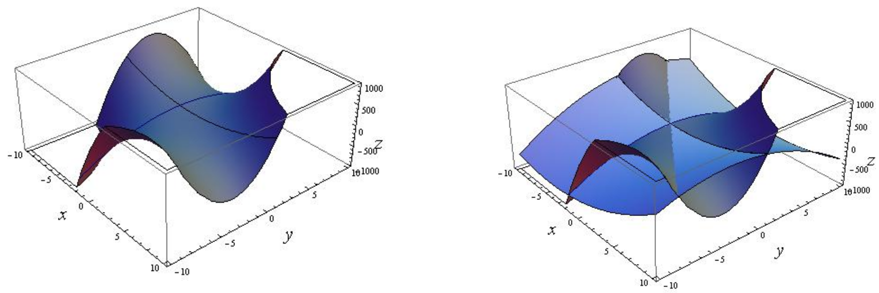
$$\begin{aligned} df(A) &= \left[4\cdot(-2) + 6\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 1^2 + 1\right](x+2) + \\ &+ \left[3\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1\right](y-1) = \\ &= (-8-12+4+1)(x+2) + (12-16+4+1)(y-1) = \\ &= -15x - 30 + y - 1 = -15x + y - 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= (4+6\cdot 1)(x+2)^2 + 2\left[6\cdot(-2) + 8\cdot 1\right](x+2)(y-1) + \\ &+ \left[8\cdot(-2)+4\right](y-1)^2 = (4+6)(x^2+4x+4) + \\ &+ 2(-12+8)(xy - x + 2y - 2) + (-16+4)(y^2 - 2y + 1) = \\ &= 10x^2 + 40x + 40 - 8xy + 8x - 16y + 16 - 12y^2 + 24y - 12 = \\ &= 10x^2 - 12y^2 - 8xy + 48x + 8y + 44 = \\ &= 2(5x^2 - 6y^2 - 4xy + 24x + 4y + 22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(A) &= 16 + \tfrac{-15x+y-31}{1!} + \tfrac{2\left(5x^2-6y^2-4xy+24x+4y+22\right)}{2!} = \\ &= 16 - 15x + y - 31 - 5x^2 - 6y^2 - 4xy + 24x + 4y + 22 = \\ &= 5x^2 - 6y^2 - 4xy + 9x + 5y + 7 \end{aligned}$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = 5x^2 - 6y^2 - 4xy + 9x + 5y + 7.$$



Obrázek 41: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 + 3x^2y + 4xy^2 + 2y^2 + x + y + 3$ a Taylorův ploynom druhého stupně této funkce v bodě $A = (-2, 1)$.

5.2. Cvičení

V této podkapitole jsou příklady na procvičení Taylorova polynomu druhého stupně, řešení je k dispozici na konci práce.

Spočtěte Taylorův polynom 2.stupně funkce f v bodě A.

1. $f(x, y) = \ln(xy)$ $\qquad A = (3, 2)$
2. $f(x, y) = y^x$ $\qquad A = (2, 1)$
3. $f(x, y) = \sin^4 x \cdot \ln y^3$ $\qquad A = (\frac{\pi}{2}, e)$

6. Určování přibližné hodnoty

Tato kapitola nám pomůže při určování funkčních hodnot složitých funkcí, které budeme chtít hledat bez použití kalkulačky.

Využijeme zde znalosti z předchozích kapitol, konkrétně totální diferenciál prvního řádu a Taylorova polynomu.

Budeme využívat rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A = (x_0, y_0)$, což vlastně není nic jiného než Taylorův polynom prvního stupně.

6.1. Řešené příklady

Pomocí prvního diferenciálu funkce spočtěte přibližnou hodnotu

1. $\frac{1}{\sqrt{3.02 \cdot 1.86}} = ?$

   Řešení

   Nejdříve si musíme zvolit vhodný bod (x_0, y_0) tak, abychom byli schopni spočítat funkční hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0). Dále by měl tento bod být dostatečně blízko bodu $(3.02, 1.86)$, abychom se ve výpočtu přibližné hodnoty příliš neodchýlili od skutečné hodnoty. Zvolíme tedy v tomto případě bod $(x_0, y_0) = (3, 2)$. Potom nám hodnoty $dx = 0.02$ a $dy = -0.14$ říkají, jak daleko jsme od bodu $(3.02, 1.86)$.

   $x_0 = 3$ $\qquad\qquad$ $dx = 0.02$

   $y_0 = 2$ $\qquad\qquad$ $dy = -0.14$

   Ze zadání si zvolíme vhodnou funkci, v našem případě:

   $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x \cdot y}}$

   Spočteme první parciální derivace funkce.

   $f'_x(x, y) = -\frac{y}{2\sqrt{x^3 \cdot y^3}}$

   $f'_y(x, y) = -\frac{x}{2\sqrt{x^3 \cdot y^3}}$

Nyní nalezneme totální diferenciál funkce f: $df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$. Dále dosadíme do této funkce bod $A = (x_0, y_0)$:

$df(A) = f'_x(A)\,(x - x_0) + f'_y(A)\,(y - y_0)$.

$$df(3,2) = -\frac{2}{2\sqrt{3^3 \cdot 2^3}} \cdot 0.02 - \frac{3}{2\sqrt{3^3 \cdot 2^3}} \cdot (-0,14) = \\ = 0.01293$$

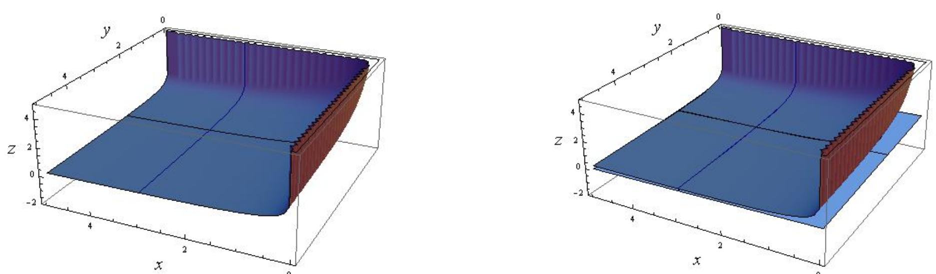
V posledním kroku využijeme vztah $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$

$f(3.02, 1.86) \approx f(3,2) + df(3,2) = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + 0.01293 = 0.421176$

Přibližná hodnota výrazu $\frac{1}{\sqrt{3.02 \cdot 1.86}}$ je 0.421176.

Toto číslo je vlastně funkční hodnota funkce v bodě $(3.02, 1.86)$, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(3,2)$.

Skutečná hodnota: $\left[\frac{1}{\sqrt{3.02 \cdot 1.86}} = 0.42193\right]$



Obrázek 42: Graf funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x \cdot y}}$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(3,2)$, kterou jsme použili pro určení přibližné hodnoty.

2. $\ln(2.01) \cdot \ln(1.01) = ?$

Řešení

$x_0 = 2$ $\qquad$ $dx = 0.01$

$y_0 = 1$ $\qquad$ $dy = 0.01$

$f(x,y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$

$f_x'(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \ln(y)$

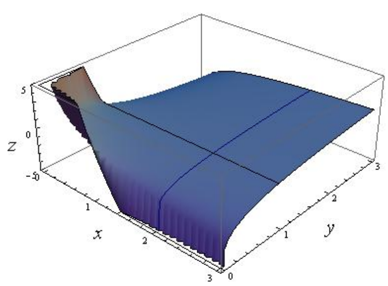
$f_y'(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \ln(x)$

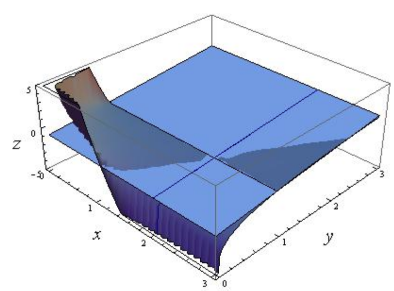
$$df(2,1) = \left[\tfrac{1}{2} \cdot \ln(1)\right] 0.01 + \left[\tfrac{1}{1} \cdot \ln(2)\right] 0.01 =$$
$$= 0.0069315$$

$f(2.01, 1.01) \approx f(2,1) + df(2,1) = \ln(2) \cdot \ln(1) + 0.0069315 = 0.0069315$

Přibližná hodnota výrazu $\ln(2.01) \cdot \ln(1.01)$ je 0.0069315.

Skutečná hodnota: $[\ln(2.01) \cdot \ln(1.01) = 0.00694667]$





Obrázek 43: Graf funkce $f(x,y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(2,1)$, kterou jsme použili pro určení přibližné hodnoty.

3. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2.02}{1.08}\right) =?$, za předopkladu, že $\operatorname{arctg}(2) = 1.10714871779$

Řešení

$x_0 = 2$ $\qquad dx = 0.02$

$y_0 = 1$ $\qquad dy = 0.08$

$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

$f_x'(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$

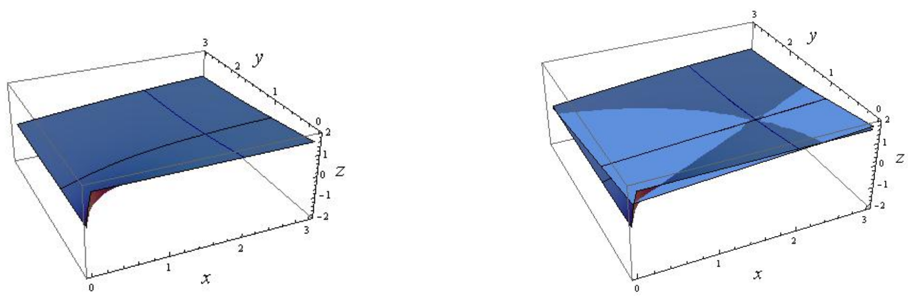
$f_y'(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$$
\begin{aligned}
df(3,1) &= \left(\tfrac{1}{2^2+1^2}\right)(0.02) + \left(-\tfrac{2}{2^2+1^2}\right)0.08 = \\
&= -0.028
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(2.02, 1.08) \approx f(2,1) + df(2,1) &= \operatorname{arctg}\left(\tfrac{2}{1}\right) - 0.028 = \\
&= 1.10714871779 - 0.028 = \\
&= 1.079148718
\end{aligned}
$$

Přibližná hodnota výrazu $\operatorname{arctg}\left(\frac{2.02}{1.08}\right)$ je 1.079148718.

Skutečná hodnota: $\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2.02}{1.08}\right) = 1.07981\right]$



Obrázek 44: Graf funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(2,1)$, kterou jsme použili pro určení přibližné hodnoty.

4. $0.98^{1.95^2} = ?$

Řešení

$x_0 = 1$ $\quad\quad\quad$ $dx = -0.02$

$y_0 = 2$ $\quad\quad\quad$ $dy = -0.05$

$f(x,y) = x^{y^2}$

$f'_x(x,y) = y^2 \cdot x^{y^2-1}$

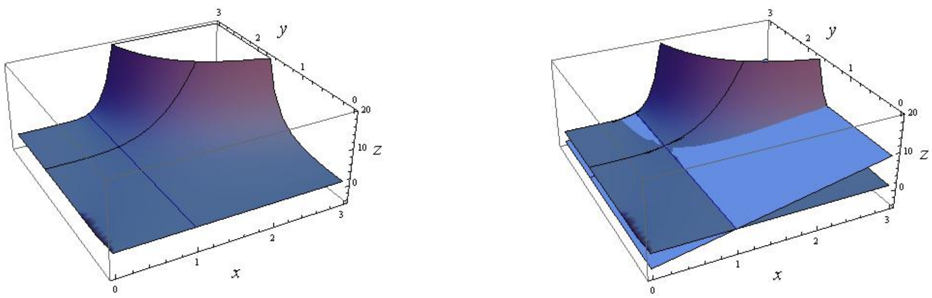
$f'_y(x,y) = x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2} \cdot \ln x$

$$
\begin{aligned}
df(3,2) &= \left(2^2 \cdot 1^{2^2-1}\right)(-0.02) + \left(2 \cdot 2 \cdot 1^{2^2} \cdot \ln 1\right)(-0.05) = \\
&= -0.08
\end{aligned}
$$

$$f(0.98, 1.95) \approx f(1,2) + df(1,2) = 1^{2^2} - 0.08 = 0.92$$

Přibližná hodnota výrazu $0.98^{1.95^2}$ je 0.92.

Skutečná hodnota: $\left[2.87^{1.69^2} = 0.926\right]$



Obrázek 45: Graf funkce $f(x, y) = x^{y^2}$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(1, 2)$, kterou jsme použili pro určení přibližné hodnoty.

5. $\ln\left(\sqrt[5]{1.19} + \sqrt{3.83}\right) = ?$ za předpokladu, že $\ln 3 = 1.098612289$

Řešení

$x_0 = 1$ $dx = 0.19$

$y_0 = 4$ $dy = -0.17$

$$f(x, y) = \ln\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt{y}\right)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt{y}\right)}$$

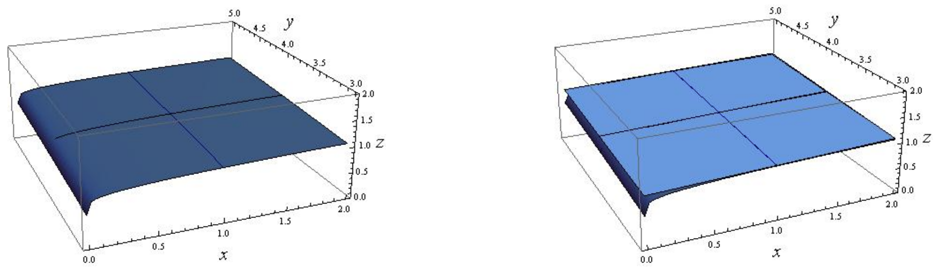
$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt{y}\right)}$$

$$df(1, 4) = \frac{1}{5\sqrt[5]{1^4}\left(\sqrt[5]{1}+\sqrt{4}\right)} 0.19 + \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}\left(\sqrt[5]{1}+\sqrt{4}\right)}(-0.17) =$$
$$= -0.0015$$

$$f(1.19, 3.83) \approx f(1,4) + df(1,4) = \ln\left(\sqrt[5]{1} + \sqrt{4}\right) - 0.0015 = 1.09711$$

Přibližná hodnota výrazu $\ln\left(\sqrt[5]{1.19} + \sqrt{3.83}\right)$ je 1.09711.

Skutečná hodnota: $\left[\ln\left(\sqrt[5]{1.19}+\sqrt{3.83}\right)=1.0960896\right]$



Obrázek 46: Graf funkce $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt{y}\right)$ a tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(1,4)$, kterou jsme použili pro určení přibližné hodnoty.

6.2. Cvičení

Pomocí prvního diferenciálu funkce spočtěte přibližnou hodnotu

1. $1.14^4 + 1.14 \cdot 2.14^3 =?$

2. $0.52 \cdot 1.24 + 0.52^2 \cdot 1.24^2 - 0.52^3 \cdot 1.24^3 =?$

3. $e^{1.03 \cdot 1.92} + \ln(1.03 \cdot 1.92) =?$

4. $\sqrt{2.12^4 + 2.88^2} =?$

7. Řešení příkladů v programu Mathematica

Program *Wolfram Mathematica* je počítačový program, který slouží k výpočtům a vizualizacím dat.

Byl vybrán z toho důvodu, že se na naší univerzitě začal nově vyučovat. Je zde předvedeno, jak tento program funguje a jak dokáže pomoci ve výpočtech.

Wolfram Mathematica má výhodu, že existuje i online verze, ve které lze bez instalování programu spočítat nejrůznější příklady. Tato verze je k nalezení na: `http://www.wolframalpha.com/`.

Dále uvedené návody, jak pracovat s programem, jsou k verzi *Wolfram Mathematica 8*.

Základní pravidla pro práci s programem *Wolfram Mathematica*:

- Výpočet příkazu se provede stisknutím kláves SHIFT+ENTER nebo stiskem klávesy ENTER na numerické klávesnici
- Jestliže chceme přejít na další řádek bez zobrazení výsledku stiskneme pouze ENTER
- Příkazy se píší s velkými písmeny na začátku (př. Sin)
- Argumenty funkcí se uvádí v hranatých závorkách (př. Sin[x])
- Je-li příkaz zapsán modrou barvou, je zapsán špatně, při správném zapsání je text uveden černě
- Desetinné číslo se odděluje tečkou
- Pro násobení výrazu se používá hvězdička nebo stačí použít mezeru
- Pro zobrazení nápovědy napíšeme řešený problém (př. D, Plot) do okna. Klikneme na něj pravým tlačítkem myši a z možností vybereme "Get Help". Zobrazí se nám okno s nápovědou, kde se také můžeme podívat na možnosti tohoto příkazu.

Při otevření programu se zobrazí tabulka s několika možnostmi, po zvolení možnosti notebook se ocitneme v okně, ve kterém můžeme pracovat.

Nejdříve musíme zadat funkci, se kterou budeme chtít počítat. V našem případě funkci dvou proměnných. A to takhle: **f[x_,y_]=výraz**.

V následujicích podkapitolách je předveden postup výpočtu parciálních derivací 1. řádu i vyšších řádů, hledání totálního diferenciálu, Taylorova polynomu a užití diferenciálu k určení přibližné hodnoty.

7.1. Parciální derivace 1.řádu

Pro výpočet parciálních derivací se v programu *Mathematica* využívá příkaz **D[f[x,y],x]**, tj. první parciální derivace funkce f podle proměnné x. Jestliže chceme počítat první parciální derivaci funkce f podle proměnné y použijeme příkaz **D[f[x,y],y]**.

Program si nyní ukážeme na příkladech, které byly spočteny na začátku práce. Tím si ověříme jejich správnost.

1. $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$

```
In[3]:= f[x_, y_] = 35 x - 4 y^2 + 3 x * 2 y
        D[f[x, y], x]
        D[f[x, y], y]

Out[3]= 35 x + 6 x y - 4 y^2

Out[4]= 35 + 6 y

Out[5]= 6 x - 8 y
```

2. $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$

```
In[1]:= f[x_, y_] = 3 * (x * y^2) ^ (1 / 5)
        D[f[x, y], x]
        D[f[x, y], y]
```

Out[1]= $3\left(x\,y^2\right)^{1/5}$

Out[2]= $\dfrac{3\,y^2}{5\left(x\,y^2\right)^{4/5}}$

Out[3]= $\dfrac{6\,x\,y}{5\left(x\,y^2\right)^{4/5}}$

3. $f(x,y) = \ln(x)\cos y$

```
In[4]:= f[x_, y_] = Log[x] * Cos[y]
        D[f[x, y], x]
        D[f[x, y], y]
```

Out[4]= Cos[y] Log[x]

Out[5]= $\dfrac{\text{Cos[y]}}{x}$

Out[6]= -Log[x] Sin[y]

4. $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$

```
In[7]:= f[x_, y_] = Sin[y^2] / x
        D[f[x, y], x]
        D[f[x, y], y]
```

Out[7]= $\dfrac{\text{Sin}\left[y^2\right]}{x}$

Out[8]= $-\dfrac{\text{Sin}\left[y^2\right]}{x^2}$

Out[9]= $\dfrac{2\,y\,\text{Cos}\left[y^2\right]}{x}$

5. $f(x,y) = \frac{y\cos^2 x}{\sqrt{x^2+9y}}$

```
In[10]:= f[x_, y_] = y * Cos[x]^2 / (x^2 + 9 y)^{1/2}
         D[f[x, y], x]
         D[f[x, y], y]
```

Out[10]= $\left\{\frac{y\,\mathrm{Cos}[x]^2}{\sqrt{x^2+9\,y}}\right\}$

Out[11]= $\left\{-\frac{x\,y\,\mathrm{Cos}[x]^2}{\left(x^2+9\,y\right)^{3/2}} - \frac{2\,y\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]}{\sqrt{x^2+9\,y}}\right\}$

Out[12]= $\left\{-\frac{9\,y\,\mathrm{Cos}[x]^2}{2\,\left(x^2+9\,y\right)^{3/2}} + \frac{\mathrm{Cos}[x]^2}{\sqrt{x^2+9\,y}}\right\}$

6. $f(x,y,z) = x^2 z + \ln(2y - xz)$

```
In[13]:= f[x_, y_, z_] = x^2 z + Log[2 * y - x * z]
         D[f[x, y, z], x]
         D[f[x, y, z], y]
         D[f[x, y, z], z]
```

Out[13]= $x^2\,z + \mathrm{Log}[2\,y - x\,z]$

Out[14]= $2\,x\,z - \frac{z}{2\,y - x\,z}$

Out[15]= $\frac{2}{2\,y - x\,z}$

Out[16]= $x^2 - \frac{x}{2\,y - x\,z}$

7. $f(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$

```
In[17]:= f[x_, y_] = Sin[x^2 / y]
         D[f[x, y], x]
         D[f[x, y], y]
```

Out[17]= $\mathrm{Sin}\left[\frac{x^2}{y}\right]$

Out[18]= $\frac{2\,x\,\mathrm{Cos}\left[\frac{x^2}{y}\right]}{y}$

Out[19]= $-\frac{x^2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{x^2}{y}\right]}{y^2}$

8. $f(x,y) = xe^{xy}$

```
In[20]:= f[x_, y_] = x E^(x * y)
         D[f[x, y], x]
         D[f[x, y], y]
```

Out[20]= $e^{x\,y}\,x$

Out[21]= $e^{x\,y} + e^{x\,y}\,x\,y$

Out[22]= $e^{x\,y}\,x^2$

9. $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

```
In[23]:= f[x_, y_] = ArcCot[(x + y) / (x - y)]
         D[f[x, y], x]
         D[f[x, y], y]
```

Out[23]= $\operatorname{ArcCot}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]$

Out[24]= $-\dfrac{\frac{1}{x-y} - \frac{x+y}{(x-y)^2}}{1 + \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}$

Out[25]= $-\dfrac{\frac{1}{x-y} + \frac{x+y}{(x-y)^2}}{1 + \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}$

10. $f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{x-y}$

```
In[26]:= f[x_, y_] = (1 / x + 1 / y) ^ (x - y)
         D[f[x, y], x]
         D[f[x, y], y]
```

Out[26]= $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{x-y}$

Out[27]= $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{x-y} \left(-\frac{x-y}{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} + \operatorname{Log}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]\right)$

Out[28]= $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{x-y} \left(-\frac{x-y}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) y^2} - \operatorname{Log}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]\right)$

7.2. Parciální derivace vyšších řádů

Funkci zadáváme stejným způsobem jako v předchozí kapitole a parciální derivace vyšších řádů spočteme pomocí: **D**[**f**[**x,y**],**x,x**]. Kde měníme pouze proměnné, tzn. **D**[**f**[**x,y**],**y,y**], **D**[**f**[**x,y**],**x,y**], **D**[**f**[**x,y**],**y,x**].

1. $f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 + 4$

```
In[29]:= f[x_, y_] = 2 x^2 + 3 y^3 + 4
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]

Out[29]= 4 + 2 x^2 + 3 y^3

Out[30]= 4

Out[31]= 18 y

Out[32]= 0

Out[33]= 0
```

2. $f(x,y) = 3y \sin x$

```
In[34]:= f[x_, y_] = 3 y Sin[x]
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]

Out[34]= 3 y Sin[x]

Out[35]= -3 y Sin[x]

Out[36]= 0

Out[37]= 3 Cos[x]

Out[38]= 3 Cos[x]
```

3. $f(x, y) = x^2 y + e^{x^2 y}$

```
In[39]:= f[x_, y_] = x^2 y + E^(x^2 y)
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]
```

Out[39]= $e^{x^2 y} + x^2 y$

Out[40]= $2 y + 2 e^{x^2 y} y + 4 e^{x^2 y} x^2 y^2$

Out[41]= $e^{x^2 y} x^4$

Out[42]= $2 x + 2 e^{x^2 y} x + 2 e^{x^2 y} x^3 y$

Out[43]= $2 x + 2 e^{x^2 y} x + 2 e^{x^2 y} x^3 y$

4. $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$

```
In[44]:= f[x_, y_] = (x^2 + y^2) / (x + y)^(1 / 2)
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]
```

Out[44]= $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x + y}}$

Out[45]= $-\frac{2 x}{(x + y)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{x + y}} + \frac{3 \left(x^2 + y^2\right)}{4 (x + y)^{5/2}}$

Out[46]= $-\frac{2 y}{(x + y)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{x + y}} + \frac{3 \left(x^2 + y^2\right)}{4 (x + y)^{5/2}}$

Out[47]= $-\frac{x}{(x + y)^{3/2}} - \frac{y}{(x + y)^{3/2}} + \frac{3 \left(x^2 + y^2\right)}{4 (x + y)^{5/2}}$

Out[48]= $-\frac{x}{(x + y)^{3/2}} - \frac{y}{(x + y)^{3/2}} + \frac{3 \left(x^2 + y^2\right)}{4 (x + y)^{5/2}}$

5. $f(x,y) = x \arcsin(\sqrt{y}) + \sqrt{(x+y)^3}$

```
In[49]:= f[x_, y_] = x ArcSin[y^(1/2)] + (x + y)^(3/2)
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]
```

Out[49]= $(x+y)^{3/2} + x \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{y}\right]$

Out[50]= $\dfrac{3}{4\sqrt{x+y}}$

Out[51]= $-\dfrac{x}{4\sqrt{1-y}\; y^{3/2}} + \dfrac{x}{4\,(1-y)^{3/2}\sqrt{y}} + \dfrac{3}{4\sqrt{x+y}}$

Out[52]= $\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}\;\sqrt{y}} + \dfrac{3}{4\sqrt{x+y}}$

Out[53]= $\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}\;\sqrt{y}} + \dfrac{3}{4\sqrt{x+y}}$

6. $f(x, y, z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \ln(z)$

```
In[54]:= f[x_, y_] = Sin[x] Cos[y] Log[z]
         D[f[x, y], x, x]
         D[f[x, y], y, y]
         D[f[x, y], z, z]
         D[f[x, y], x, y]
         D[f[x, y], y, x]
         D[f[x, y], x, z]
         D[f[x, y], z, x]
         D[f[x, y], y, z]
         D[f[x, y], z, y]
```

Out[54]= Cos[y] Log[z] Sin[x]

Out[55]= -Cos[y] Log[z] Sin[x]

Out[56]= -Cos[y] Log[z] Sin[x]

Out[57]= $-\dfrac{\text{Cos[y] Sin[x]}}{z^2}$

Out[58]= -Cos[x] Log[z] Sin[y]

Out[59]= -Cos[x] Log[z] Sin[y]

Out[60]= $\dfrac{\text{Cos[x] Cos[y]}}{z}$

Out[61]= $\dfrac{\text{Cos[x] Cos[y]}}{z}$

Out[62]= $-\dfrac{\text{Sin[x] Sin[y]}}{z}$

Out[63]= $-\dfrac{\text{Sin[x] Sin[y]}}{z}$

7. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ $\qquad\qquad f'''_{xxy}(x, y) = ?$

```
In[64]:= f[x_, y_] = E^(x^2 + y^2)
         D[f[x, y], x, x, y]
```

Out[64]= $e^{x^2+y^2}$

Out[65]= $4\, e^{x^2+y^2}\, y + 8\, e^{x^2+y^2}\, x^2\, y$

8. $f(x,y) = \cos(x + \sin y)$ $\qquad\qquad$ $f'''_{yxy}(x,y) = ?$

```
In[16]:= f[x_, y_] = Cos[x + Sin[y]]
         D[f[x, y], y, x, y]

Out[16]= Cos[x + Sin[y]]

Out[17]= Cos[x + Sin[y]] Sin[y] + Cos[y]^2 Sin[x + Sin[y]]
```

7.3. Totální diferenciál 1.řádu

Nejříve nadefinujeme základní funkci již známým příkazem.

Bude se zde využívat příkaz **Series**, který slouží pro výpočet Taylorova polynomu.

Tento příkaz vypočte rozvoj funkce až do nejvyšší zadané mocniny každé proměnné. a definuje se takto:

$$\textbf{Series}[f[x,y]\textbf{,}\ \{x,x_0,r\}\,,\{y,y_0,r\}].$$

Toto zadání pro výpočty diferenciálů a Taylorova polynomu není příliš vhodné, proto se tento příkaz zadává pomocí paramtetru t:

$$\textbf{Series}[f[(x-x_0)t+x_0,(y-y_0)t+y_0]\textbf{,}\ \{t,0,r\}]/.t->1,$$

kde x_0 a y_0 jsou souřadnice zadaného bodu. Za r je volen řád Taylorova polynomu, který je třeba spočíat,tj. 1,2,... Za parametr t, který zaručí, že bude ve výsledku opravdu jen polynom r-tého stupně, bude voleno $t=1$.

U příkazu **Series** se ještě využívá příkaz **Normal**, který odstraní prvky vyššího než požadovaného řádu.

U výpočtu diferenciál 1. řádu je možno využít Taylorův polynom prvního stupně, od kterého je odečtena funkční hodnota.

$$T_1(A)=f(A)+\tfrac{df(A)}{1!}$$
$$df(A)=T_1(A)-f(A)$$

Příkaz **Simplify** slouží k úpravě výsledku, je-li spočtený výraz složitý a jde nějak upravit.

Nyní už můžeme přistoupit přímo k výpočtům.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad\qquad$ $A = (1, -1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x^2 + y^2
Out[1]= x^2 + y^2

In[2]:= f[x, y] /. x → 1 /. y → -1
Out[2]= 2

In[3]:= Normal[Series[f[(x - 1) t + 1, (y + 1) t - 1], {t, 0, 1}]] - 2 /. t → 1
Out[3]= -4 + 2 x - 2 y
```

2. $f(x,y) = x \cdot \ln(y)$ $\qquad\qquad$ $A = (2, 1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x Log[y]
Out[1]= x Log[y]

In[2]:= f[x, y] /. x → 2 /. y → 1
Out[2]= 0

In[3]:= Normal[Series[f[(x - 2) t + 2, (y - 1) t + 1], {t, 0, 1}]] - 0 /. t → 1
Out[3]= -2 + 2 y
```

3. $f(x,y) = xy^4 + x^2y^3 - x^3y^2 - x^4y$ $\qquad\qquad$ $A = (-2, 1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x y^4 + x^2 y^3 - x^3 y^2 - x^4 y
Out[1]= -x^4 y - x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4

In[2]:= f[x, y] /. x → -2 /. y → 1
Out[2]= -6

In[3]:= Normal[Series[f[(x + 2) t - 2, (y - 1) t + 1], {t, 0, 1}]] + 6 /. t → 1
Out[3]= 30 + 17 x + 4 y
```

4. $f(x,y) = y\sin^2 x$ $\qquad A = (\frac{\pi}{4}, 4)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = y Sin[x]^2
Out[1]= y Sin[x]^2

In[2]:= f[x, y] /. x → Pi / 4 /. y → 4
Out[2]= 2

In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 4) t + Pi / 4, (y - 4) t + 4], {t, 0, 1}]] - 2 /. t → 1
Out[3]= -2 - π + 4 x + y/2
```

5. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ $\qquad A = (3, 1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = (x^2 - y^2) / (x y)
Out[1]= (x^2 - y^2)/(x y)

In[2]:= f[x, y] /. x → 3 /. y → 1
Out[2]= 8/3

In[3]:= Normal[Series[f[(x - 3) t + 3, (y - 1) t + 1], {t, 0, 1}]] - (8 / 3) /. t → 1
Out[3]= 10/9 (x - 3 y)
```

6. $f(x,y) = \sin(x+y)\cdot\cos(x^2-y^2)$ $\qquad A = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$

```
In[1]:= f[x_, y_] = Sin[x + y] Cos[x^2 - y^2]
Out[1]= Cos[x^2 - y^2] Sin[x + y]

In[2]:= f[x, y] /. x → Pi / 2 /. y → -Pi / 2
Out[2]= 0

In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 2) t + Pi / 2, (y + Pi / 2) t - Pi / 2],
          {t, 0, 1}]] - 0 /. t → 1
Out[3]= x + y
```

7. $f(x,y) = \ln[\sin(xy)]$ $\qquad\qquad$ $A = (\frac{\pi}{4}, 1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = Log[Sin[x y]]

Out[1]= Log[Sin[x y]]

In[2]:= f[x, y] /. x → Pi / 4 /. y → 1

Out[2]= -Log[2]/2

In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 4) t + Pi / 4, (y - 1) t + 1], {t, 0, 1}]] +
          (Log[2] / 2) /. t → 1

Out[3]= -π/2 + x + π y/4
```

7.4. Totální diferenciál 2.řádu

U výpočtu totálního diferenciálu druhého řádu je opět využit příkaz **Series**. Totální diferenciál spočteme pomocí Taylorova polynomu prvního a druhého stupně, kde pak ještě výsledek musíme vynásobit dvojkou (ze znalosti vzorce).

$$T_2(A) = f(A) + \tfrac{df(A)}{1!} + \tfrac{d^2 f(A)}{2!}$$

Postup uvidíme na vypočtených příkladech.

1. $f(x, y) = x^2y^2 - xy$ $\qquad A = (-2, 1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x^2 y^2 - x y
Out[1]= -x y + x^2 y^2

In[2]:= Normal[Series[f[(x + 2) t - 2, (y - 1 ) t + 1], {t, 0, 2}]] /. t → 1
Out[2]= 12 + 8 x + x^2 - 16 y - 9 x y + 4 y^2

In[3]:= Normal[Series[f[(x + 2) t - 2, (y - 1 ) t + 1], {t, 0, 1}]] /. t → 1
Out[3]= -14 - 5 x + 10 y

In[4]:= 2 * ((12 + 8 x + x^2 - 16 y - 9 x y + 4 y^2) - (-14 - 5 x + 10 y))
Out[4]= 2 (26 + 13 x + x^2 - 26 y - 9 x y + 4 y^2)
```

2. $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ $\qquad\qquad A = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$

```
In[1]:= f[x_, y_] = Sin[x^2 + y^2]
```

Out[1]= $\mathrm{Sin}\left[x^2 + y^2\right]$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - Pi^(1/2)/2) t + Pi^(1/2)/2,
          (y - Pi^(1/2)/2) t + Pi^(1/2)/2], {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

Out[2]= $1 - \frac{1}{2}\left(-\pi + \sqrt{\pi}\, x + \sqrt{\pi}\, y\right)^2$

```
In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi^(1/2)/2) t + Pi^(1/2)/2,
          (y - Pi^(1/2)/2) t + Pi^(1/2)/2], {t, 0, 1}]] /. t → 1
```

Out[3]= 1

In[4]:= $\mathrm{Simplify}\left[2 * \left(1 - \frac{1}{2}\left(-\pi + \sqrt{\pi}\, x + \sqrt{\pi}\, y\right)^2 - 1\right)\right]$

Out[4]= $-\pi\left(-\sqrt{\pi} + x + y\right)^2$

3. $f(x,y) = e^{xy^2}$ $\qquad\qquad A = (3,-1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = E^(x y^2)
```

Out[1]= $e^{x y^2}$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 3) t + 3, (y + 1) t - 1], {t, 0, 2}]] /.
          t → 1
```

Out[2]= $-8 e^3 + e^3 x - 6 e^3 y + \frac{1}{2}\left(99 e^3 - 22 e^3 x + e^3 x^2 + 132 e^3 y - 16 e^3 x y + 42 e^3 y^2\right)$

```
In[3]:= Normal[Series[f[(x - 3) t + 3, (y + 1) t - 1], {t, 0, 1}]] /.
          t → 1
```

Out[3]= $-8 e^3 + e^3 x - 6 e^3 y$

In[4]:= Simplify$\Big[2 * \Big(-8 e^3 + e^3 x - 6 e^3 y + \frac{1}{2}\left(99 e^3 - 22 e^3 x + e^3 x^2 + 132 e^3 y - 16 e^3 x y + 42 e^3 y^2\right) - \left(-8 e^3 + e^3 x - 6 e^3 y\right)\Big)\Big]$

Out[4]= $e^3 \left(99 + x^2 + 132 y + 42 y^2 - 2 x (11 + 8 y)\right)$

4. $f(x,y) = \frac{1}{y}\sin x$ $\qquad\qquad A = (\frac{\sqrt{\pi}}{4}, -\frac{1}{2})$

```
In[1]:= f[x_, y_] = 1 / y Sin[x]
```

Out[1]= $\dfrac{\text{Sin}[x]}{y}$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 4) t + Pi / 4, (y + 1 / 2) t - 1 / 2],
          {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

Out[2]= $-\sqrt{2} + \dfrac{-4 + \pi - 4x - 8y}{2\sqrt{2}} + \dfrac{-32 + 8\pi + \pi^2 - 32x - 8\pi x + 16x^2 - 128y + 16\pi y - 64xy - 128y^2}{16\sqrt{2}}$

```
In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 4) t + Pi / 4, (y + 1 / 2) t - 1 / 2],
          {t, 0, 1}]] /. t → 1
```

Out[3]= $-2\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y$

In[4]:= Simplify$\Big[$

$$2 * \left(-\sqrt{2} + \frac{-4 + \pi - 4x - 8y}{2\sqrt{2}} + \frac{-32 + 8\pi + \pi^2 - 32x - 8\pi x + 16x^2 - 128y + 16\pi y - 64xy - 128y^2}{16\sqrt{2}} - \left(-2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y\right)\right)\Big]$$

Out[4]= $\dfrac{\pi^2 - 8\pi(-1 + x - 2y) + 16\left(x^2 - 2x(1 + 2y) - 2(1 + 2y)^2\right)}{8\sqrt{2}}$

5. $f(x,y) = \sqrt[4]{xy}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad A = (1,1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = (x y)^(1/4)

Out[1]= (x y)^(1/4)

In[2]:= Normal[Series[f[(x - 1) t + 1, (y - 1) t + 1], {t, 0, 2}]] /.
          t → 1
```

$$\text{Out[2]= } 1 + \frac{1}{4}(-2 + x + y) + \frac{1}{32}\left(-4 + 4x - 3x^2 + 4y + 2xy - 3y^2\right)$$

```
In[3]:= Normal[Series[f[(x - 1) t + 1, (y - 1) t + 1], {t, 0, 1}]] /.
          t → 1
```

$$\text{Out[3]= } 1 + \frac{1}{4}(-2 + x + y)$$

$$\text{In[4]:= Simplify}\left[2 * \left(1 + \frac{1}{4}(-2 + x + y) + \frac{1}{32}\left(-4 + 4x - 3x^2 + 4y + 2xy - 3y^2\right) - \left(1 + \frac{1}{4}(-2 + x + y)\right)\right)\right]$$

$$\text{Out[4]= } \frac{1}{16}\left(-4 - 3x^2 + 4y - 3y^2 + 2x(2 + y)\right)$$

6. $f(x,y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$ $\qquad A = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x Sin[y] + y Cos[x]
```

Out[1]= $y \operatorname{Cos}[x] + x \operatorname{Sin}[y]$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 3) t + Pi / 3, (y - Pi / 6) t + Pi / 6],
          {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

Out[2]= $$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\left(-3\pi + 6x - \sqrt{3}\,\pi x + 6y + 2\sqrt{3}\,\pi y\right) + \frac{1}{144}\left(-\pi^3 + 4\pi^2 x - 6\pi x^2 + 4\pi^2 y - 12\pi y^2\right)$$

```
In[3]:= Normal[Series[f[(x - Pi / 3) t + Pi / 3, (y - Pi / 6) t + Pi / 6],
          {t, 0, 1}]] /. t → 1
```

Out[3]= $$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\left(-3\pi + 6x - \sqrt{3}\,\pi x + 6y + 2\sqrt{3}\,\pi y\right)$$

In[4]:= Simplify[

$$2 * \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\left(-3\pi + 6x - \sqrt{3}\,\pi x + 6y + 2\sqrt{3}\,\pi y\right) + \frac{1}{144}\left(-\pi^3 + 4\pi^2 x - 6\pi x^2 + 4\pi^2 y - 12\pi y^2\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\left(-3\pi + 6x - \sqrt{3}\,\pi x + 6y + 2\sqrt{3}\,\pi y\right)\right)\right)]$$

Out[4]= $$-\frac{1}{72}\pi\left(\pi^2 - 4\pi(x+y) + 6\left(x^2 + 2y^2\right)\right)$$

7.5. Taylorův polynom

Tento výpočet je po přečtení dvou předchozích podkapitol zcela zřejmý. Využijeme již známý příkaz **Series**.

A to následovně:

$$\textbf{Series}[f[(x-x_0)t+x_0,(y-y_0)t+y_0],\ \{t,0,r\}]/.t->1$$

Za r je voleno číslo 2, protože jde o výpočet Taylorova polynomu druhého stupně.

1. $f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$ $\qquad\qquad A=(2,-2)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = (x y) / (x - y)
```

Out[1]= $\frac{x\,y}{x-y}$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 2) t + 2, (y + 2) t - 2], {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

Out[2]= $-1+\frac{1}{4}(4-x+y)+\frac{1}{16}\left(x^2+2\,x\,y+y^2\right)$

In[3]:= Simplify$\left[-1+\frac{1}{4}(4-x+y)+\frac{1}{16}\left(x^2+2\,x\,y+y^2\right)\right]$

Out[3]= $\frac{1}{16}\left(x^2+2\,x\,(-2+y)+y\,(4+y)\right)$

2. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ $\qquad\qquad A=(0,0)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = E^(x^2 + y^2)
```

Out[1]= $e^{x^2+y^2}$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 0) t + 0, (y + 0) t - 0], {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

Out[2]= $1+x^2+y^2$

3. $f(x,y)=\sqrt{xy}+xy$ $\qquad\qquad$ $A=(2,2)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = (x y)^(1/2) + x y
Out[1]= x y + √(x y)

In[2]:= Normal[Series[f[(x - 2) t + 2, (y - 2) t + 2], {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

$$\text{Out[2]= } 6+\frac{5}{2}\ (-4+x+y)+\frac{1}{16}\ \left(64-32\,x-x^2-32\,y+18\,x\,y-y^2\right)$$

$$\text{In[3]:= Simplify}\left[6+\frac{5}{2}\ (-4+x+y)+\frac{1}{16}\ \left(64-32\,x-x^2-32\,y+18\,x\,y-y^2\right)\right]$$

$$\text{Out[3]= } \frac{1}{16}\ \left(-x^2-(-8+y)\ y+2\,x\ (4+9\,y)\right)$$

4. $f(x,y)=2x^2+3x^2y+4xy^2+2y^2+x+y+3$ $\qquad\qquad$ $A=(-2,1)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = 2 x^2 + 3 x^2 y + 4 x y^2 + 2 y^2 + x + y + 3
```

$$\text{Out[1]= } 3+x+2\,x^2+y+3\,x^2\,y+2\,y^2+4\,x\,y^2$$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x + 2) t - 2, (y - 1) t + 1], {t, 0, 2}]] /. t → 1
```

$$\text{Out[2]= } 7+9\,x+5\,x^2+5\,y-4\,x\,y-6\,y^2$$

7.6. Určování přibližné hodnoty

Při určování přibližné hodnoty se opět využívá příkaz **Series**. Vypočte se Taylorův polynom prvního řádu, kde za x_0 a y_0 dosazujeme přibližné hodnoty.

$$\textbf{Series}[f[(x-x_0)t+x_0,(y-y_0)t+y_0]\textbf{,}\ \{t,0,1\}]/.t->1$$

Po výpočtu Taylorova polynomu je třeba dosadit skutečné hodnoty. Poté se již zobrazí správný výsledek.

1. $\frac{1}{\sqrt{3.02\cdot 1.86}}=?$

In[1]:= `f[x_, y_] = 1 / (x y) ^ (1 / 2)`

Out[1]= $\frac{1}{\sqrt{x\,y}}$

In[2]:= `Normal[Series[f[(x - 3) t + 3, (y - 2) t + 2], {t, 0, 1}]] /. t → 1`

Out[2]= $\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{x}{6\sqrt{6}}-\frac{y}{4\sqrt{6}}$

In[3]:= $\texttt{Simplify}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{x}{6\sqrt{6}}-\frac{y}{4\sqrt{6}}\right]$

Out[3]= $-\frac{2\,x+3\,(-8+y)}{12\sqrt{6}}$

In[4]:= $-\frac{2\,x+3\,(-8+y)}{12\sqrt{6}}$ `/. x → 3.02 /. y → 1.86`

Out[4]= `0.421176`

2. $\ln(2.01) \cdot \ln(1.01) = ?$

```
In[1]:= f[x_, y_] = Log[x] Log[y]
Out[1]= Log[x] Log[y]

In[2]:= Normal[Series[f[(x - 2) t + 2, (y - 1 ) t + 1], {t, 0, 1}]] /. t → 1
Out[2]= -Log[2] + y Log[2]

In[3]:= -Log[2] + y Log[2] /. x →  2.01 /. y → 1.01
Out[3]= 0.00693147
```

3. $\mathrm{arctg}\left(\frac{2.02}{1.08}\right) = ?$

```
In[1]:= f[x_, y_] = ArcTan[x / y]
```

Out[1]= $\text{ArcTan}\left[\frac{x}{y}\right]$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 2) t + 2, (y - 1 ) t + 1], {t, 0, 1}]] /. t → 1
```

Out[2]= $\frac{1}{5}(x - 2y) + \text{ArcTan}[2]$

In[3]:= $\frac{1}{5}(x - 2y) + \text{ArcTan}[2]$ /. x → 2.02 /. y → 1.08

```
Out[3]= 1.07915
```

4. $0.98^{1.95^2} = ?$

```
In[1]:= f[x_, y_] = x^y^2
```

Out[1]= x^{y^2}

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 1) t + 1, (y - 2 ) t + 2], {t, 0, 1}]] /. t → 1
Out[2]= -3 + 4 x

In[3]:= -3 + 4 x /. x →  0.98 /. y → 1.95
Out[3]= 0.92
```

5. $ln\left(\sqrt[5]{1.19}+\sqrt{3.83}\right)$

```
In[1]:= f[x_, y_] = Log[x^(1/5) + y^(1/2)]
```

Out[1]= $\text{Log}\left[x^{1/5}+\sqrt{y}\right]$

```
In[2]:= Normal[Series[f[(x - 1) t + 1, (y - 4) t + 4], {t, 0, 1}]] /. t → 1
```

Out[2]= $\frac{1}{60}(-24+4x+5y)+\text{Log}[3]$

In[3]:= $\frac{1}{60}(-24+4x+5y)+\text{Log}[3]$ /. x → 1.19 /. y → 3.83

Out[3]= 1.09711

8. Řešení cvičení

8.1. Parciální derivace 1. řádu

Řešení příkladů z kapitoly 1.2

1. $f(x,y) = \sqrt{xy} - \frac{x}{3\sqrt{y^3}}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}y - \frac{1}{3\sqrt{y^3}} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{3\sqrt{y^3}}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}x - x\frac{1}{3}(-\frac{3}{2})\frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{x}{2\sqrt{y^5}}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0, y > 0\}$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, y > 0\}$

2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x-y-y-x}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$

$f'_y(x,y) = \frac{(x-y)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

3. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{2y(x^2-y^2)-2xy*2x}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2x^2y-2y^3-4x^2y}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-2y^3-2x^2y}{(x^2-y^2)^2} =$

$= -\frac{2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x(x^2-y^2)-2xy(-2y)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2x^3-2xy^2+4xy^2}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2x^3+2xy^2}{(x^2-y^2)^2} =$$
$$= \frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$$

4. $f(x,y) = \frac{x^3-y^2}{x^2+y^3}$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^3)-(x^3-y^2)2x}{(x^2+y^3)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^3-2x^4+2xy^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{x^4+3x^2y^3+2xy^2}{(x^2+y^3)^2} =$$
$$= \frac{x\left(x^3+3xy^3+2y^2\right)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(-2y)(x^2+y^3)-(x^3-y^2)3y^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-2x^2y-2y^4-3x^3y^2+3y^4}{(x^2+y^3)^2} = \frac{y^4-2x^2y-3x^3y^2}{(x^2+y^3)^2} =$$
$$= \frac{y\left(-3x^3y-2x^2+y^3\right)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^3 \neq 0\}$$

5. $f(x,y) = (2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^5$

Řešení

$$f'_x(x,y) = 5(2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^4 6x^2y^2 = 30x^2y^2(2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^4$$

$$f'_y(x,y) = 5(2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^4(4x^3y - 4y) = 20y(x^3-1)(2x^3y^2 - 2y^2 + 7)^4$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

6. $f(x,y) = \cos(3x-3y)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = -\sin(3x-3y)\cdot 3 = -3\sin(3x-3y)$$

$$f'_y(x,y) = -\sin(3x-3y)(-3) = 3\sin(3x-3y)$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

7. $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(\frac{y^2}{x}\right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x}\right)}(-1)\frac{y^2}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2\cos^2\left(\frac{y^2}{x}\right)}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x}\right)}\frac{2y}{x} = \frac{2y}{x\cos^2\left(\frac{y^2}{x}\right)}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{y^2}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

8. $f(x,y) = x\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{y}\right) - x\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)}\frac{1}{y} = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$f'_y(x,y) = -x\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)}(-1)\frac{x}{y^2} = \frac{x^2}{y^2\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9. $f(x,y) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}$

Řešení

$$f'_x(x,y) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{y} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}(\ln 1 - \ln 6)\frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}\ln 6$$

$$f'_y(x,y) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(\frac{1}{6}\right)(-1)\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}(\ln 1 - \ln 6) = \frac{x}{y^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{y}}\ln 6$$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

10. $f(x,y) = \frac{1}{4}\ln\left(x^4+y^4\right)$

    Řešení

    $f'_x(x,y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4+y^4} 4x^3 = \frac{x^3}{x^4+y^4}$

    $f'_y(x,y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4+y^4} 4y^3 = \frac{y^3}{x^4+y^4}$

    $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

11. $f(x,y) = \ln\left[\ln(x) + y\right]$

    Řešení

    $f'_x(x,y) = \frac{1}{\ln(x)+y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x[\ln(x)+y]}$

    $f'_y(x,y) = \frac{1}{\ln(x)+y} \cdot 1 = \frac{1}{\ln(x)+y}$

    $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x) + y > 0, x > 0\}$

12. $f(x,y) = \ln\left(y + \sqrt{x+y}\right)$

    Řešení

    $f'_x(x,y) = \frac{1}{y+\sqrt{x+y}} \cdot \left[\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1\right] = \frac{1}{(y+\sqrt{x+y})(2\sqrt{x+y})} =$
    $= \frac{1}{2(x+y)+2y\sqrt{x+y}}$

    $f'_y(x,y) = \frac{1}{(y+\sqrt{x+y}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1\right] = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{y+\sqrt{x+y}} =$
    $= \frac{2\sqrt{x+y}+1}{2\sqrt{x+y}} \cdot \frac{1}{y+\sqrt{x+y}} = \frac{1+2\sqrt{x+y}}{2(x+y)+2y\sqrt{x+y}}$

    $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + \sqrt{x+y} > 0, x+y > 0\}$

13. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y}} = \frac{y}{x^2+y^2}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot (-1) \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x^2+y^2 \neq 0\}$

14. $f(x,y) = (xy+1)^x$

Řešení

$f'_x(x,y) = (xy+1)^x \left[1 \cdot \ln(xy+1) + x\frac{y}{xy+1}\right] = (xy+1)^x \left[\ln(xy+1) + \frac{xy}{xy+1}\right]$

$f'_y(x,y) = x\,(xy+1)^{x-1}\, x = x^2\,(xy+1)^{x-1} = (xy+1)^x \cdot \frac{x^2}{xy+1}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy+1 > 0\}$

15. $f(x,y) = \sin x + \ln(y^3)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \cos x$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3}{y}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

16. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$f'_y(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\right\}$

17. $f(x,y) = \frac{e^x - e^y}{e^{xy}}$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{e^x \cdot 1 \cdot e^{xy} - (e^x - e^y)e^{xy} \cdot y}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(e^x - ye^x + ye^y)}{(e^{xy})^2} = \frac{ye^y - ye^x + e^x}{e^{xy}}$

$f'_y(x,y) = \frac{-e^y \cdot 1 \cdot e^{xy} - (e^x - e^y)e^{xy} \cdot x}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(-e^y - xe^x + xe^y)}{(e^{xy})^2} = \frac{xe^y - xe^x - e^y}{e^{xy}}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

18. $f(x,y) = 4\operatorname{arctg} x^2 - 4x^2y$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{4}{1+x^4} \cdot 2x - 8xy = \frac{8x}{1+x^4} - 8xy$

$f'_y(x,y) = -4x^2$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

19. $f(x,y) = x^2 - \frac{x+y}{x-y} - e^{2x+2y}$

Řešení

$$f'_x(x,y) = 2x - \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} - e^{2x+2y} \cdot 2 = 2x - \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} - 2e^{2x+2y} =$$

$$= 2x + \frac{2y}{(x-y)^2} - 2e^{2x+2y} = 2 \cdot \left(x + \frac{y}{(x-y)^2} - e^{2x+2y}\right)$$

$$f'_y(x,y) = -\tfrac{(x-y)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2} - e^{2x+2y}\cdot 2 = -\tfrac{x-y+x+y}{(x-y)^2} - 2e^{2x+2y} =$$
$$= 2\cdot\left(-\tfrac{x}{(x-y)^2} - e^{2x+2y}\right)$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

20. $f(x,y,z) = x^2y^2z^2\cdot\ln(xyz) + \left(\frac{\cos x}{\sin y}\right)^z$

Řešení

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= 2xy^2z^2\ln(xyz) + x^2y^2z^2\tfrac{1}{xyz}yz + z\cdot\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^{z-1}\cdot\left(\tfrac{-\sin x}{\sin y}\right) = \\
&= 2xy^2z^2\ln(xyz) + xy^2z^2 - z\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z\left(\tfrac{\sin y}{\cos x}\right)\left(\tfrac{\sin x}{\sin y}\right) = \\
&= 2xy^2z^2\ln(xyz) + xy^2z^2 - z\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_y(x,y,z) &= x^2 2yz^2\ln(xyz) + x^2y^2z^2\tfrac{1}{xyz}xz + z\cdot\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^{z-1}\cdot(-1)\,\tfrac{\cos x}{\sin^2 y}\cos y = \\
&= 2x^2yz^2\ln(xyz) + x^2yz^2 - z\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z\left(\tfrac{\sin y}{\cos x}\right)\left(\tfrac{\cos x\cos y}{\sin^2 y}\right) = \\
&= 2x^2yz^2\ln(xyz) + x^2yz^2 - z\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z \operatorname{cotg} y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_z(x,y,z) &= x^2y^2 2z\ln(x,yz) + x^2y^2z^2\tfrac{1}{xyz}xy + \left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z\cdot\ln\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)\cdot 1 = \\
&= 2x^2y^2z\ln(xyz) + x^2y^2z + \left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)^z\cdot\ln\left(\tfrac{\cos x}{\sin y}\right)
\end{aligned}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xyz > 0, \sin(y)\neq 0, \tfrac{\cos x}{\sin y} > 0\right\}$$

8.2. Parciální derivace vyšších řádů

Řešení příkladů z kapitoly 2.2

1. $f(x,y) = 3x + 2y - 1$

   Řešení

   $$f'_x(x,y) = 3 \qquad f'_y(x,y) = 2$$

   $$f''_{xx}(x,y) = 0 \qquad f''_{yy}(x,y) = 0$$

   $$f''_{xy}(x,y) = 0 \qquad f''_{yx}(x,y) = 0$$

   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

2. $f(x,y) = x^2 y$

   Řešení

   $$f'_x(x,y) = 2xy \qquad f'_y(x,y) = x^2$$

   $$f''_{xx}(x,y) = 2y \qquad f''_{yy}(x,y) = 0$$

   $$f''_{xy}(x,y) = 2x \qquad f''_{yx}(x,y) = 2x$$

   $$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f'_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

3. $f(x,y) = 3x^2y^3 + 3x^3y^2$

   Řešení

   $$f'_x(x,y) = 6xy^3 + 9x^2y^2 \qquad f'_y(x,y) = 9x^2y^2 + 6x^3y$$

   $$f''_{xx}(x,y) = 6y^3 + 18xy^2 \qquad f''_{yy}(x,y) = 18x^2y + 6x^3$$

   $$f''_{xy}(x,y) = 18xy^2 + 18x^2y \qquad f''_{yx}(x,y) = 18xy^2 + 18x^2y$$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

4. $f(x,y) = e^x \ln(y) + e^y \ln(x)$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = e^x \cdot 1 \cdot \ln(y) + e^y \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^y}{x} + e^x \ln(y)$

   $f'_y(x,y) = e^x \cdot \frac{1}{y} + e^y \cdot 1 \cdot \ln(x) = \frac{e^x}{y} + e^y \ln(x)$

   $f''_{xx}(x,y) = e^x \cdot 1 \cdot \ln(y) + e^y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = e^x \ln(y) - \frac{e^y}{x^2}$

   $f''_{yy}(x,y) = e^x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y^2} + e^y \cdot 1 \cdot \ln(x) = e^x \ln(x) - \frac{e^x}{y^2}$

   $f''_{xy}(x,y) = e^y \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{y} = \frac{e^y}{x} + \frac{e^x}{y} +$

   $f''_{yx}(x,y) = e^x \frac{1}{y} + e^y \frac{1}{x} = \frac{e^x}{y} + \frac{e^y}{x}$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

5. $f(x,y) = \frac{1}{y} \sin x + \frac{1}{x} \cos y$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = \frac{1}{y} \cos x + \cos y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y} \cos x - \frac{1}{x^2} \cos y$

   $f'_y(x,y) = (-1)\,\frac{1}{y^2} \sin x + \frac{1}{x}\,(-1) \sin y = -\frac{1}{y^2} \sin x - \frac{1}{x} \sin y$

   $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{y} \sin x + \frac{2}{x^3} \cos y$

   $f''_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3} \sin x - \frac{1}{x} \cos y$

   $f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{y^2}\,(-1) \cdot \cos x + \frac{1}{x^2} \sin y = -\frac{1}{y^2} \cos x + \frac{1}{x^2} \sin y$

   $f''_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \cos x - \frac{1}{x^2} \cdot (-1) \sin y = -\frac{1}{y^2} \cos x + \frac{1}{x^2} \sin y$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$

6. $f(x,y) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = -\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f'_y(x,y) = -\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f''_{yx}(x,y) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

7. $f(x,y) = x^2\sin^4 y$

Řešení

$$f'_x(x,y) = 2x\sin^4 y$$

$$f'_y(x,y) = x^2 4\sin^3 y\cdot\cos y = 4x^2\sin^3 y\cdot\cos y$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2\sin^4 y$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= x^2\left[12\sin^2 y\cdot\cos y\cdot\cos y + 4\sin^3 y\,(-\sin y)\right] = \\ &= 4x^2\sin^2 y\left(3\cos^2 y - \sin^2 y\right) \end{aligned}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2x4\sin^3 y\cdot\cos y = 8x\sin^3 y\cdot\cos y$$

$$f''_{yx}(x,y) = 8x\sin^3 y\cdot\cos y$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

8. $f(x,y) = xy^2 - \frac{x^3}{y^4}$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^2 - \frac{3x^2}{y^4}$

$f'_y(x,y) = 2xy - (-4)\,\frac{x^3}{y^5} = 2xy + \frac{4x^3}{y^5}$

$f''_{xx}(x,y) = -\frac{6x}{y^4}$

$f''_{yy}(x,y) = 2x + (-5)\,\frac{4x^3}{y^6} = 2x - \frac{20x^3}{y^6}$

$f''_{xy}(x,y) = 2y - \frac{3x^2}{y^5}\,(-4) = 2y + \frac{12x^2}{y^5}$

$f''_{yx}(x,y) = 2y + \frac{4x^2}{y^5} \cdot 3 = 2y + \frac{12x^2}{y^5}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

9. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} = \frac{y}{x^2+y^2}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot (-1) \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = (-1) \cdot \left(y + \frac{x^2}{y}\right)^{-2} \cdot \frac{2x}{y} = -\frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{\frac{(x^2+y^2)^2}{y^2}} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f''_{yy}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot (-1) \cdot 2y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f''_{xy}(x,y) = \left[\frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$f''_{yx}(x,y) = -\left[\frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right] = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

10. $f(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z}$

Řešení

$f'_x(x,y,z) = y \cdot z \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f'_y(x,y,z) = x \cdot z \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f'_z(x,y,z) = x \cdot y \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{xx}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot y \cdot z \cdot y \cdot z = y^2 z^2 \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{yy}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot x \cdot z \cdot x \cdot z = x^2 z^2 \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{zz}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot x \cdot y \cdot x \cdot z = x^2 y^2 \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{xy}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot x \cdot z \cdot z = xz^2 \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{xz}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot x \cdot y \cdot y = xy^2 \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$f''_{yz}(x,y,z) = e^{x \cdot y \cdot z} \cdot x \cdot y \cdot x = x^2 y \cdot e^{x \cdot y \cdot z}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{zz}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{xz}} = D_{f''_{yz}} = \mathbb{R}^3$

11. $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení

$f'_x(x,y,z) = z\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot 2x = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$f'_y(x,y,z) = z\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot 2y = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$f'_z(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f''_{xx}(x,y,z) = -\left[\frac{z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - xz \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^3}\right] = \frac{-z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot z\left[-\left(x^2+y^2\right)+3x^2\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2z - x^2z - y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} =$$

$$= \frac{2x^2z - y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$$

$$f''_{yy}(x,y,z) = -\left[\frac{z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - yz\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3}\right] = \frac{-z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} + 3y^2 z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot z\left[-\left(x^2+y^2\right)+3y^2\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3y^2z - x^2z - y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} =$$

$$= \frac{2y^2z - x^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$$

$$f''_{zz}(x,y,z) = 0$$

$$f''_{xy}(x,y,z) = (-xz)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\cdot 2y = \frac{3xyz}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$$

$$f''_{xz}(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$f''_{yz}(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f'_z} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{zz}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{xz}} = D_{f''_{yz}} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$$

12. $f(x,y) = e^y \cdot \ln(x) + \sin x \cdot \ln(y)$, určete parciální derivaci: $f'''_{xxx}(x,y)$

Řešení

$$f'_x(x,y) = e^y \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot \ln(y)$$

$$f''_{xx}(x,y) = (-1)\cdot e^y \cdot \frac{1}{x^2} - \sin x \cdot \ln(y) = -\frac{e^y}{x^2} - \sin x \cdot \ln(y)$$

$$f'''_{xxx}(x,y) = 2\cdot e^y \cdot \frac{1}{x^3} - \cos x \cdot \ln(y) = \frac{2\cdot e^y}{x^3} - \cos x \cdot \ln(y)$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xx}} = D_{f'''_{xxx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Výsledkem požadované derivace je $f'''_{xxx}(x,y) = \frac{2\cdot e^y}{x^3} - \cos x \cdot \ln(y)$.

13. $f(x,y) = e^{x^2 y}$, určete parciální derivaci: $f'''_{yxy}(x,y)$

Řešení

$f'_y(x,y) = e^{x^2y} \cdot x^2$

$f''_{yx}(x,y) = 2x \cdot e^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2x \cdot e^{x^2y} + 2x^3y \cdot 2x \cdot e^{x^2y}$

$$\begin{aligned} f'''_{yxy}(x,y) &= 2x^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2y} + 2x^3y \cdot 2x \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = \\ &= 2x^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2y}\,(x^2y + 2) \end{aligned}$$

$D_f = D_{f'_y} = D_{f''_{yx}} = D_{f'''_{yxy}} = \mathbb{R}^2$

Výsledkem požadované derivace je $f'''_{yxy} = 2x^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2y}\,(x^2y + 2)$.

14. $f(x,y) = x^6 \cos y$, určete parciální derivaci: $f^{(VI)}_{xxyyxy}(x,y)$

Řešení

$f'_x(x,y) = 6x^5 \cdot \cos y$

$f''_{xx}(x,y) = 30x^4 \cdot \cos y$

$f'''_{xxy}(x,y) = -30x^4 \cdot \sin y$

$f^{(IV)}_{xxyy}(x,y) = -30x^4 \cdot \sin x$

$f^{(V)}_{xxyyx}(x,y) = -120x^3 \cdot \cos y$

$f^{(VI)}_{xxyyxy}(x,y) = 120x^3 \cdot \sin y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f''_{xx}} = D_{f'''_{xxy}} = D_{f^{(IV)}_{xxyy}} = D_{f^{(V)}_{xxyyx}} = D_{f^{(VI)}_{xxyyxy}} = \mathbb{R}^2$

Výsledkem požadované derivace je $f^{(VI)}_{xxyyxy} = 120x^3 \cdot \sin y$

15. $f(x,y) = x^4 \cdot \ln(y)$, určete parciální derivaci: $f^{(IV)}_{yxyx}(x,y)$

Řešení

$f'_y(x,y) = x^4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{x^4}{y}$

$f''_{yx}(x, y) = 4x^3 \cdot \frac{1}{y} = \frac{4x^3}{y}$

$f'''_{yxy}(x, y) = -4x^3 \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{4x^3}{y^2}$

$f^{(IV)}_{yxyx}(x, y) = -12x^2 \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{12x^2}{y^2}$

$D_f = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f'''_{yxy}} = D_{f^{(IV)}_{yxyx}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

Výsledkem požadované derivace je $f^{(IV)}_{yxyx} = -\frac{12x^2}{y^2}$.

16. $f(x, y, z) = 2^x \cdot 4^y \cdot 6^z$, určete parciální derivaci: $f'''_{zyx}(x, y, z)$

Řešení

$f'_z(x, y, z) = 2^x \cdot 4^y \cdot 6^z \cdot \ln 6$

$f''_{zy}(x, y, z) = 2^x \cdot 4^y \cdot \ln 4 \cdot 6^z \cdot \ln 6$

$f'''_{zyx}(x, y, z) = 2^x \cdot \ln 2 \cdot 4^y \cdot \ln 4 \cdot 6^z \cdot \ln 6$

$D_f = D_{f'_z} = D_{f''_{zy}} = D_{f'''_{zyx}} = \mathbb{R}^3$

Výsledkem požadované derivace je $f'''_{zyx}(x, y, z) = 2^x \cdot \ln 2 \cdot 4^y \cdot \ln 4 \cdot 6^z \cdot \ln 6$.

8.3. Totální diferenciál 1. řádu

Řešení příkladů z kapitoly 3.2

1. $f(x, y) = xy$ $\qquad A = (2, 4)$

   Řešení

   $f'_x(x, y) = y$

   $f'_y(x, y) = x$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

   $df(x, y) = y \cdot dx + x \cdot dy$

   $df(A) = 4 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 4) = 4x - 8 + 2y - 8 = 4x + 2y - 16$

   Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 4x + 2y - 16$.

2. $f(x, y) = 2x^2 - 8xy + 2y^2$ $\qquad A = (-2, 2)$

   Řešení

   $f'_x(x, y) = 4x - 8y$

   $f'_y(x, y) = -8y + 4y$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

   $df(x, y) = (4x - 8y)\, dx + (-8x + 4y)\, dy$

   $$\begin{aligned} df(A) &= [4 \cdot (-2) - 8 \cdot 2]\, (x + 2) + [-8 \cdot (-2) + 4 \cdot 2]\, (y - 2) = \\ &= (-8 - 16)\, (x + 2) + (16 + 8)\, (y - 2) = \\ &= -24x - 48 + 24y - 48 = -24x + 24y - 96 \end{aligned}$$

   Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = -24x + 24y - 96$.

3. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ $\qquad A = (4,2)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{y}$

$f'_y(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$df(x,y) = \frac{2x}{y} \cdot dx - \frac{x^2}{y^2} \cdot dy = \frac{x}{y}\left(2 \cdot dx - \frac{x}{y} \cdot dy\right)$

$$\begin{aligned} df(A) &= \tfrac{4}{2}\left[2 \cdot (x-4) - \tfrac{4}{2} \cdot (y-2)\right] = 2\,(2x - 8 - 2y + 4) = \\ &= 4x - 4y - 8 = 4\,(x - y - 2) \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 4\,(x - y - 2)$.

4. $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$ $\qquad A = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

Řešení

$f'_x(x,y) = \cos x \cdot \cos y$

$f'_y(x,y) = \sin x \cdot (\sin y)$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

$df(x,y) = \cos x \cdot \cos y \cdot dx - \sin x \cdot \sin y \cdot dy$

$$\begin{aligned} df(A) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(y - \tfrac{\pi}{6}\right) = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\left(y - \tfrac{\pi}{6}\right) = \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(y - \tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{4}x - \tfrac{\pi\sqrt{3}}{12} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}y + \tfrac{\pi\sqrt{3}}{24} = \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}x - \tfrac{\sqrt{3}}{4}y - \tfrac{\pi\sqrt{3}}{24} \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$.

5. $f(x,y) = y^2 \arcsin x$ $\qquad A = (0,2)$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'_y(x,y) = 2y \arcsin x$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$

$df(x,y) = y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx + 2y \arcsin x \cdot dy$

$$\begin{aligned} df(A) &= \left[2^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right](x-0) + [2 \cdot 2 \arcsin(0)]\,(y-2) = \\ &= 4x \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 4x$.

6. $f(x,y) = e^{-x}\,[\sin(2y) - 3\cos(2y)]$ $\qquad A = (-1, \frac{\pi}{2})$

Řešení

$f'_x(x,y) = e^{-x}\,[-\sin(2y) + 3\cos(2y)]$

$f'_y(x,y) = e^{-x}\,[\cos(2y) \cdot 2 + 3\sin(2y) \cdot 2] = e^{-x}\,[2\cos(2y) + 6\sin(2y)]$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$

$df(x,y) = e^{-x}\,[-\sin(2y) + 3\cos(2y)]\,dx + e^{-x}\,[2\cos(2y) + 6\sin(2y)]\,dy$

$$\begin{aligned} df(A) &= e^1\left[-\sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{2}) + 3\cos(2 \cdot \tfrac{\pi}{2})\right](x+1) + \\ &+ e^1\left[2\cos(2 \cdot \tfrac{\pi}{2}) + 6\sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{2})\right]\left(y - \tfrac{\pi}{2}\right) = \\ &= e^1\,[0 + 3 \cdot (-1)]\,(x+1) + e^1\,[2 \cdot (-1) + 6 \cdot 0]\left(y - \tfrac{\pi}{2}\right) = \\ &= -3ex - 2ey - 3e + \pi e \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = -3ex - 2ey - 3e + \pi e$.

7. $f(x,y) = y^{xy}$ $\qquad A = (2,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^{xy} \cdot \ln y \cdot y = y^{xy+1} \ln y$

$f'_y(x,y) = e^{xy \cdot \ln y} \left(x \ln y + xy \cdot \frac{1}{y} \right) = y^{xy} \left(x \ln y + x \right)$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$df(x,y) = [y^{xy+1} \ln y]\, dx + [y^{xy} \left(x \ln y + x \right)]\, dy$

$$\begin{aligned} df(A) &= [1^{2\cdot 1+1} \ln(1)]\,(x-2) + [1^{2\cdot 1}\,(2\ln(1)+2)]\,(y-1) = \\ &= 1^3 \cdot 0\,(x-2) + 1^2\,(2\cdot 0+2)\,(y-1) = \\ &= 0 + 2\,(y-1) = 2y-2 \end{aligned}$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = 2y - 2$

8. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \sqrt{xy} + 3x^4y^3$ $\qquad A = (1,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y + 12x^3y^3 = \frac{y}{2\sqrt{xy}(1+xy)} + 12x^3y^3$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x + 9x^4y^2 = \frac{x}{2\sqrt{xy}(1+xy)} + 9x^4y^2$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

$df(x,y) = \left[\frac{y}{2\sqrt{xy}(1+xy)} + 12x^3y^3 \right] dx + \left[\frac{x}{2\sqrt{xy}(1+xy)} + 9x^4y^2 \right] dy$

$$
\begin{aligned}
df(A) &= \left[\tfrac{1}{2\sqrt{1\cdot 1}(1+1\cdot 1)} + 12\cdot 1^3\cdot 1^3\right](x-1) + \left[\tfrac{1}{2\sqrt{1\cdot 1}(1+1\cdot 1)} + 9\cdot 1^4\cdot 1^2\right](y-1) = \\
&= \left[\tfrac{1}{2\sqrt{1}\cdot(2)} + 12\cdot 1\cdot 1\right](x-1) + \left[\tfrac{1}{2\sqrt{1}\cdot(2)} + 9\cdot 1\cdot 1\right](y-1) = \\
&= \left(\tfrac{1}{4} + 12\right)(x-1) + \left(\tfrac{1}{4} - 9\right)(y-1) = \tfrac{49}{4}x - \tfrac{49}{4} + \tfrac{37}{4} - \tfrac{37}{4}y = \\
&= \tfrac{49}{4}x + \tfrac{37}{4}y - \tfrac{43}{2}
\end{aligned}
$$

Totální diferenciál 1. řádu v bodě A je $df(A) = \frac{49}{4}x + \frac{37}{4}y - \frac{43}{2}$.

8.4. Totální diferenciál 2. řádu

Řešení příkladů z kapitoly 4.2

1. $f(x,y) = 2x^2 + 4x^2y + 4xy^2 + 2y^2$ $\qquad A = (-2, \frac{1}{2})$

   Řešení

   $f'_x(x,y) = 4x + 8xy + 4y^2$ $\qquad f'_y(x,y) = 4x^2 + 8xy + 4y$

   $f''_{xx}(x,y) = 8y + 4$ $\qquad f''_{yy}(x,y) = 8x + 4$

   $f''_{xy}(x,y) = 8x + 8y$ $\qquad f''_{yx}(x,y) = 8x + 8y$

   $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

   $d^2f(x,y) = (4 + 8y)\,dx^2 + 2\,(8x + 8y)\,dxdy + (8x + 4)\,dy^2$

   $$\begin{aligned} d^2f(A) = &\left[4 + 8 \cdot \tfrac{1}{2}\right](x+2)^2 + 2\left[8 \cdot (-2) + 8 \cdot \tfrac{1}{2}\right](x+2)\left(y - \tfrac{1}{2}\right) + \\ &+ [8 \cdot (-2) + 4]\left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = (4+4)\,(x^2 + 4x + 4) + \\ &+ 2\,(-16+4)\left(xy - \tfrac{1}{2}x + 2y - 1\right) + (4 - 16)\left(y^2 - y + \tfrac{1}{4}\right) = \\ &= 8x^2 + 32x + 32 - 24xy + 12x - 48y + 24 - 12y^2 + 12y - 3 = \\ &= 8x^2 - 12y^2 - 24xy + 44x - 36y + 53 \end{aligned}$$

   Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

   $$d^2f(A) = 8x^2 - 12y^2 - 24xy + 44x - 36y + 53.$$

2. $f(x,y) = x \cos y$ $\qquad A = (4, \frac{\pi}{4})$

   Řešení

$f'_x(x,y) = \cos y$ $\qquad$ $f'_y(x,y) = x\,(-\sin y) = -x \sin y$

$f''_{xx}(x,y) = 0$ $\qquad$ $f''_{yy}(x,y) = -x\cos y$

$f''_{xy}(x,y) = -\sin y$ $\qquad$ $f''_{yx}(x,y) = -\sin y$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$

$d^2f(x,y) = 0 \cdot dx^2 + 2\,(-\sin y)\,dxdy + (-\cos y)\,dy^2 = -2\sin y \cdot dxdy - x\cos y \cdot dy^2$

$$\begin{aligned}
d^2f(A) &= -2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot(x-4)\left(y-\tfrac{\pi}{4}\right) - 4\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(y-\tfrac{\pi}{4}\right)^2 = \\
&= -2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x-4)\left(y-\tfrac{\pi}{4}\right) - 4\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(y^2-\tfrac{\pi}{2}y+\tfrac{\pi^2}{16}\right) = \\
&= -\sqrt{2}\left(xy-\tfrac{\pi}{4}x-4y+\pi\right) - 2\sqrt{2}\left(y^2-\tfrac{\pi}{2}y+\tfrac{\pi^2}{16}\right) = \\
&= \sqrt{2}\left(-xy+\tfrac{\pi}{4}x+4y-\pi-2y^2+\pi y-\tfrac{\pi^2}{8}\right) = \\
&= \sqrt{2}\left(-2y^2-xy+\tfrac{\pi}{4}x-4y+\pi y+\pi-\tfrac{\pi^2}{8}\right) = \\
&= \sqrt{2}\left(-2y^2-xy+\tfrac{\pi}{4}x+y\,(-4+\pi)+\pi-\tfrac{\pi^2}{8}\right)
\end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = \sqrt{2}\left(-2y^2-xy+\tfrac{\pi}{4}x+y\,(-4+\pi)+\pi-\tfrac{\pi^2}{8}\right).$$

3. $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{x+y}\right)$ $\qquad$ $A = (2,-1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{x+y}{x}\cdot\frac{x+y-x\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x}{x(x+y)} = \frac{y}{x^2+xy}$

$f'_y(x,y) = \frac{x+y}{x}\cdot(-1)\,\frac{x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{0-y(2x+y)}{(x^2+xy)^2} = \frac{-2xy-y^2}{(x^2+xy)^2}$

$f''_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{(x^2+xy)-xy}{(x^2+xy)^2} = \frac{x^2}{x^2(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2}$

$f''_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{x+y} > 0, x+y \neq 0\right\}$

$d^2f(x,y) = \frac{-2xy-y^2}{(x^2+xy)^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{1}{(x+y)^2}dxdy + \frac{1}{(x+y)^2}dy^2$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= \tfrac{-2\cdot 2\cdot(-1)-(-1)^2}{(2^2+2\cdot(-1))^2}\left(x-2\right)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{(2-1)^2}\left(x-2\right)\left(y+1\right) + \tfrac{1}{(2-1)^2}\left(y+1\right)^2 = \\ &= \tfrac{4-1}{(2)^2}\left(x^2-4x+4\right) + 2\tfrac{1}{(1)^2}\left(xy+x-2y-2\right) + \\ &+ \tfrac{1}{(1)^2}\left(y^2+2y+1\right) = \tfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3 + 2xy + 2x - 4y - 4 + y^2 + 2y + 1 = \\ &= \tfrac{3}{4}x^2 + y^2 + 2xy - x - 2y \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2f(A) = \tfrac{3}{4}x^2 + y^2 + 2xy - x - 2y.$$

4. $f(x,y) = \sin y^2 \cdot \cos x^2$ $\qquad A = (-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$

Řešení

$f'_x(x,y) = \sin y^2 \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = -2x \cdot \sin y^2 \sin x^2$

$f'_y(x,y) = 2y \cdot \cos y^2 \cos x^2$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= -2\cdot\sin y^2\cdot\sin x^2 - 2x\cdot\sin y^2\cdot\cos x^2\cdot 2x = \\ &= -2\sin y^2\cdot\sin x^2 - 4x^2\cdot\sin y^2\cdot\cos x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= 2\cdot\cos y^2\cdot\cos x^2 + 2y\cdot(-\sin y^2)\,2y\cdot\cos x^2 = \\ &= 2\cos y^2\cdot\cos x^2 - 4y^2\sin y^2\cos x^2 \end{aligned}$$

$f''_{xy}(x,y) = -4xy \cdot \cos y^2 \cdot \sin x^2$

$$f''_{yx}(x,y) = -4xy \cdot \cos y^2 \cdot \sin x^2$$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) = {} & \left[-2\sin y^2 \cdot \sin x^2 - 4x^2 \cdot \sin y^2 \cdot \cos x^2\right] dx^2 + 2\left[-4xy \cdot \cos y^2 \cdot \sin x^2\right] dxdy + \\ & + \left[2\cos y^2 \cdot \cos x^2 - 4y^2 \sin y^2 \cos x^2\right] dy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(A) = {} & \left[-2\sin\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right] \left(x + \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \\ & + 2\left[-4 \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \cdot \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \cos\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right] \left(x + \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \\ & + \left[2\cos\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cos\left(-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right] \left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \\ & = \left[-2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \left(x + \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \\ & + 2\left[4\tfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \left(x + \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \\ & + \left[2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \left(y - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \\ & = \left(-1 - \tfrac{\pi}{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{\pi}x + \tfrac{\pi}{4}\right) + \pi\left(xy - \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}x + \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}y - \tfrac{\pi}{4}\right) + \\ & + \left(1 - \tfrac{\pi}{2}\right)\left(y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4}\right) = -x^2 - \sqrt{\pi}x - \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2}x^2 - \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}x - \\ & - \tfrac{\pi^2}{8} + \pi xy - \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}x + \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}y - \tfrac{\pi^2}{4} + y^2 - \sqrt{\pi}y + \tfrac{\pi}{4} - \\ & - \tfrac{\pi}{2}y^2 + \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}y - \tfrac{\pi^2}{8} = x^2\left(-1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + y^2\left(1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + \pi xy + \\ & + x\left(-\sqrt{\pi} - \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} - \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + y\left(-\sqrt{\pi} + \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} + \tfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + \\ & + \left(-\tfrac{\pi^2}{8} - \tfrac{\pi^2}{8} - \tfrac{\pi^2}{4}\right) = x^2\left(-1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + y^2\left(1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + \\ & + \pi xy + x\left(-\sqrt{\pi} - \pi^{\frac{3}{2}}\right) + y\left(-\sqrt{\pi} + \pi^{\frac{3}{2}}\right) - \tfrac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$\begin{aligned} d^2 f(A) = {} & x^2\left(-1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + y^2\left(1 - \tfrac{\pi}{2}\right) + \pi xy + \\ & + x\left(-\sqrt{\pi} - \pi^{\frac{3}{2}}\right) + y\left(-\sqrt{\pi} + \pi^{\frac{3}{2}}\right) - \tfrac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

5. $f(x,y) = \ln(x) \cdot \sin^2 y \qquad\qquad A = (e, \frac{\pi}{4})$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \sin^2 y$

$f'_y(x,y) = \ln(x) \cdot 2\sin y \cdot \cos y$

$f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin^2 y$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= \ln(x) \cdot 2\cos y \cdot \cos y + \ln(x) \cdot 2\sin y \cdot (-\sin y) = \\ &= 2\ln(x) \cdot \cos^2 y - 2\ln(x) \cdot \sin^2 y \end{aligned}$$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot 2\sin y \cdot \cos y$

$f''_{yx}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot 2\sin y \cdot \cos y$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) = &\left(-\tfrac{1}{x^2} \cdot \sin^2 y\right) dx^2 + 2\left(\tfrac{1}{x} \cdot 2\sin y \cdot \cos y\right) dxdy + \\ &+ \left(\ln x \cdot 2\cos y \cdot \cos y - \ln(x) \cdot 2\sin y \cdot \sin y\right) dy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(A) = &\left(-\tfrac{1}{e^2} \cdot \sin^2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)(x-e)^2 + 2\left[\tfrac{1}{e} \cdot 2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right](x-e)\left(y - \tfrac{\pi}{4}\right) + \\ &+ \left[\ln(e) \cdot 2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \ln(e) \cdot 2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right]\left(y - \tfrac{\pi}{4}\right)^2 = \\ &= \left(-\tfrac{1}{e^2} \cdot \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 2ex + e^2) + \\ &+ 2\left(\tfrac{1}{e} \cdot 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(xy - \tfrac{\pi}{4}x - ey + \tfrac{\pi}{4}e\right) + \\ &+ \left(1 \cdot 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y^2 - \pi x + \tfrac{\pi^2}{16}\right) = \\ &= -\tfrac{1}{2}e^{-2}x^2 + e^{-1}x - \tfrac{1}{2} + 2e^{-1}xy - \tfrac{1}{2}\pi e^{-1}x - 2y + \tfrac{\pi}{2} = \\ &= -\tfrac{1}{2}e^{-2}x^2 + 2e^{-1}xy + x\left(e^{-1} - \tfrac{1}{2}\pi e^{-1}\right) - 2y + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Totální diferenciál 2. řádu v bodě A je

$$d^2 f(A) = -\tfrac{1}{2}e^{-2}x^2 + 2e^{-1}xy + x\left(e^{-1} - \tfrac{1}{2}\pi e^{-1}\right) - 2y + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}.$$

8.5. Taylorův polynom

Řešení příkladů z kapitoly 5.2

1. $f(x,y) = \ln(xy)$ $\qquad A = (3,2)$

Řešení

$f'_x(x,y) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}$

$f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$

$f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{xy-xy}{(xy)^2} = 0$

$f''_{yx}(x,y) = \frac{xy-xy}{(xy)^2} = 0$

$$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

$f(A) = \ln(3 \cdot 2) = \ln 6$

$$\begin{aligned} df(A) &= \tfrac{1}{3}(x-3) + \tfrac{1}{2}(y-2) = \tfrac{1}{3}x - 1 + \tfrac{1}{2}y - 1 = \\ &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= -\tfrac{1}{3^2}(x-3)^2 + 2 \cdot 0\,(x-3)(y-2) - \tfrac{1}{2^2}(y-2)^2 = \\ &= -\tfrac{1}{9}(x^2-6x+9) - \tfrac{1}{4}(y^2-4y+4) = -\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{2}{3}x - 1 - \tfrac{1}{4}y^2 + y - 1 = \\ &= -\tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{2}{3}x + y - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(A) &= \ln 6 + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - 2}{1!} + \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{3}x + y - 2}{2!} = \\ &= \ln 6 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y - 2 - \tfrac{1}{18}x^2 - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y - 1 = \\ &= -\tfrac{1}{18}x^2 - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{2}{3}x + y - 3 - \ln 6 \end{aligned}$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = -\tfrac{1}{18}x^2 - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{2}{3}x + y - 3 - \ln 6.$$

2. $f(x,y) = y^x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad A = (2,1)$

Řešení

$f'_x(x,y) = y^x \cdot \ln y \cdot 1 = y^x \cdot \ln y$

$f'_y(x,y) = x \cdot y^{x-1}$

$f''_{xx}(x,y) = y^x \cdot \ln y \cdot 1 \ln y = y^x \cdot \ln y^2$

$f''_{yy}(x,y) = x\,(x-1)\,y^{x-2}$

$f''_{xy}(x,y) = x \cdot y^{(x-1)} \cdot \ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{(x-1)} \cdot \ln y + y^{(x-1)}$

$f''_{yx}(x,y) = x \cdot y^{(x-1)} \cdot \ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{(x-1)} \cdot \ln y + y^{(x-1)}$

$D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_{f''_{xx}} = D_{f''_{yy}} = D_{f''_{xy}} = D_{f''_{yx}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$f(A) = 1^2 = 1$

$df(A) = 1^2 \cdot \ln 1\,(x-2) + 2 \cdot 1^1\,(y-1) = 0 + 2\,(y-1) = 2y - 2$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= 1^2 \cdot \ln(1)\,(x-2)^2 + 2\left[2 \cdot 1^{(2-1)} \cdot \ln(1) + 1^{(2-1)}\right](x-2)\,(y-1) + \\ &\quad + 2\,(2-1)\,1^{2-2}\,(y-1) = 1 \cdot 0\,(x^2 - 4x + 4) + \\ &\quad + 2\,(2 \cdot 1 \cdot 0 + 1)\,(xy - x - 2y + 2) + \\ &\quad + 2 \cdot 1 \cdot 1\,(y^2 - 2y + 1) = 2xy - 2x - 4y + 4 + 2y^2 - 4y + 2 = \\ &\quad = 2y^2 + 2xy - 2x - 8y + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(A) &= 1 + \tfrac{2y-2}{1!} + \tfrac{2y^2+2xy-2x-8y+6}{2!} = 1 + 2y - 2 + y^2 + xy - x - 4y + 3 = \\ &= y^2 + xy - x - 2y + 2 \end{aligned}$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = y^2 + xy - x - 2y + 2.$$

3. $f(x,y)=\sin^4 x\cdot\ln y^3$ $\qquad A=(\frac{\pi}{2},e)$

Řešení

$f'_x(x,y)=4\sin^3 x\cdot\cos x\cdot\ln y^3$

$f'_y(x,y)=\sin^4 x\cdot\frac{1}{y^3}\cdot 3y^2=\sin^4 x\cdot\frac{3}{y}$

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x,y)&=12\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\ln y^3+4\sin^3 x\,(-\sin x)\cdot\ln y^3=\\&=12\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\ln y^3-4\sin^4 x\cdot\ln y^3\end{aligned}$$

$f''_{yy}(x,y)=\sin^4 y\cdot 3\cdot(-1)\cdot\frac{1}{y^2}=-\sin^4 x\cdot\frac{3}{y^2}$

$f''_{xy}(x,y)=4\sin^3 x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{y^3}\cdot 3y^2=\frac{12\sin^3 x\cos x}{y}$

$f''_{yx}(x,y)=4\sin^3 x\cdot\cos x\cdot\frac{3}{y}=\frac{12\sin^3 x\cos x}{y}$

$$D_f=D_{f'_x}=D_{f'_y}=D_{f''_{xx}}=D_{f''_{yy}}=D_{f''_{xy}}=D_{f''_{yx}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}$$

$f(A)=\sin^4 x\cdot\ln y^3=\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln e^3=1\cdot 3=3$

$$\begin{aligned}df(A)&=\left(4\sin^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\ln e^3\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\tfrac{3}{e}\,(y-e)=\\&=(4\cdot1\cdot0\cdot3)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)+1\cdot\tfrac{3}{e}\,(y-e)=\\&=3e^{-1}y-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^2f(A)&=\left[12\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\ln e^3-\left(4\sin^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\ln e^3\right)\right]\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2+\\&\quad+2\left[\frac{12\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{e}\right]\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)(y-e)-\sin^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\tfrac{3}{e^2}\,(y-e)^2=\\&=(12\cdot1\cdot0\cdot3-4\cdot1\cdot3)\left(x^2-\pi x+\tfrac{\pi^2}{4}\right)+\\&\quad+2\left(\tfrac{12\cdot1\cdot0}{e}\right)\left(xy-ex-\tfrac{\pi}{2}y+\tfrac{\pi}{2}e\right)-1\cdot\tfrac{3}{e^2}\left(y^2-2ey+e^2\right)=\\&=-12x^2+12\pi x-3\pi^2-3e^{-2}y^2+6e^{-1}y-3=\\&=-12x^2-3e^{-2}y^2+12\pi x+6e^{-1}y-3\pi^2-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2(A)&=3+\frac{3e^{-1}y-3}{1!}+\frac{\left(-12x^2-3e^{-2}y^2+12\pi x+6e^{-1}y-3\pi^2-3\right)}{2!}=\\&=3+3e^{-1}y-3-6x^2-\tfrac{3}{2}e^{-2}y^2+6\pi x+3e^{-1}y-\tfrac{3}{2}\pi^2-\tfrac{3}{2}=\\&=-6x^2-\tfrac{3}{2}e^{-2}y^2+6\pi x+6e^{-1}y+\tfrac{3}{2}\left(\pi^2-1\right)=\\&=3\left[-2x^2-\tfrac{1}{2}e^{-2}y^2+2\pi x+2e^{-1}y-\tfrac{1}{2}\left(\pi^2-1\right)\right]\end{aligned}$$

Taylorův polynom 2.stupně v bodě A je

$$T_2(A) = 3\left[-2x^2 - \tfrac{1}{2}e^{-2}y^2 + 2\pi x + 2e^{-1}y - \tfrac{1}{2}\left(\pi^2 - 1\right)\right].$$

8.6. Určování přibližné hodnoty

Řešení příkladů z kapitoly 6.2

1. $1.14^4 + 1.14 \cdot 2.14^3 =?$

   Řešení

   $x_0 = 1$ $\qquad dx = 0.14$

   $y_0 = 2$ $\qquad dy = 0.14$

   $f(x,y) = x^4 + xy^3$

   $f'_x(x,y) = 4x^3 + y^3$

   $f'_y(x,y) = 3xy^2$

   $$\begin{aligned} df(1,2) &= (4 \cdot 1^3 + 2^3)\, 0.14 + (3 \cdot 1 \cdot 2^2)\, 0.14 = \\ &= 3.36 \end{aligned}$$

   $f(1.14, 2.14) \approx f(1,2) + df(1,2) = (1^4 + 1 \cdot 2^3) + 3.36 = 12.36$

   Přibližná hodnota výrazu $1.14^4 + 1.14 \cdot 2.14^3$ je 12.36.

   Skutečná hodnota: $[1.14^4 + 1.14 \cdot 2.14^3 = 12.86]$

2. $0.52 \cdot 1.24 + 0.52^2 \cdot 1.24^2 - 0.52^3 \cdot 1.24^3 =?$

   Řešení

   $x_0 = 0.5$ $\qquad dx = 0.02$

   $y_0 = 1$ $\qquad dy = 0.24$

   $f(x,y) = xy + x^2y^2 - x^3y^3$

   $f'_x(x,y) = y + 2xy^2 - 3x^2y^3$

   $f'_y(x,y) = x + 2x^2y - 3x^3y^2$

$$
\begin{aligned}
df(0.5,1) &= (1+2\cdot 0.5\cdot 1^2 - 3\cdot 0.5^2\cdot 1^3)\,0.02+\\
&+(0.5+2\cdot 0.5^2\cdot 1-3\cdot 0.5^3\cdot 1^2)\,0.24=\\
&=0.175
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0.52,1.24)\approx f(0.5,1)+df(0.5,1) &= (0.5\cdot 1+0.5^2\cdot 1^2-0.5^3\cdot 1^3)+0.175=\\
&=0.625+0.175=0.8
\end{aligned}
$$

Přibližná hodnota výrazu $0.52\cdot 1.24+0.52^2\cdot 1.24^2-0.52^3\cdot 1.24^3$ je 0.8.

Skutečná hodnota: $[0.52\cdot 1.24+0.52^2\cdot 1.24^2-0.52^3\cdot 1.24^3=0.7925]$

3. $e^{1.03\cdot 1.92}+\ln(1.03\cdot 1.92)=?$

Řešení

$x_0=1$ $\qquad dx=0.03$

$y_0=2$ $\qquad dy=-0.08$

$f(x,y)=e^{xy}+\ln(xy)$

$f'_x(x,y)=e^{xy}\cdot y+\frac{1}{xy}\cdot y=ye^{xy}+\frac{1}{x}$

$f'_x(x,y)=e^{xy}\cdot x+\frac{1}{xy}\cdot x=xe^{xy}+\frac{1}{y}$

$$
\begin{aligned}
df(1,2) &= \left(2\cdot e^{1\cdot 2}+\tfrac{1}{1}\right)0.03+\left(1\cdot e^{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2}\right)(-0.08)=\\
&=-0.15778
\end{aligned}
$$

$$
f(1.03,1.92)\approx f(1,2)+df(1,2)=e^{1\cdot 2}+\ln(1\cdot 2)-0.15778=7.9244
$$

Přibližná hodnota výrazu $e^{1.03\cdot 1.92}+\ln(1.03\cdot 1.92)$ je 7.9244.

Skutečná hodnota: $[e^{1.03\cdot 1.92}+\ln(1.03\cdot 1.92)=7.90727]$

4. $\sqrt{2.12^4 + 2.88^2} = ?$

Řešení

$x_0 = 2$ $\qquad dx = 0.12$

$y_0 = 3$ $\qquad dy = -0.12$

$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$

$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^4 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}$

$f'_y(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^4 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}$

$df(2, 3) = \frac{2 \cdot 2^3}{\sqrt{2^4+3^2}} \cdot 0.12 + \frac{3}{\sqrt{2^4+3^2}}\,(-0.12) = 0.312$

$f(2.12, 2.88) \approx f(2, 3) + df(2, 3) = \sqrt{2^4 + 3^2} + 0.312 = 5.312$

Přibližná hodnota výrazu $\sqrt{2.12^4 + 2.88^2}$ je 5.312.

Skutečná hodnota: $\left[\sqrt{2.12^4 + 2.88^2} = 5.338\right]$

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na parciální derivace.

Práci tvoří 8 kapitol. První až šestá je rozdělena na řešené příklady a na příklady k procvičení. Postup lze zkontrolovat v osmé kapitole.

V první kapitole, která je dle mého pohledu nejdůležitější, jsem se zaměřila na způsob výpočtu parciálních derivací prvního řádu. Některé příklady jsou pro lepší názornost doplněny o grafy.

Druhá kapitola byla věnována parciálním derivacím druhého a vyššího řádu.

Ve třetí kapitole jsem se zabývala totálním diferenciálem prvního řádu. Kdy je funkce nahrazena tečnou rovinou, která je sestrojena pomocí diferenciálu funkce a může být na určitém okolí bodu dobrou aproximací. Pro lepší představu jsou zde také grafy těchto funkcí.

Čtvrtá kapitola byla zaměřena na totální diferenciál druhého řádu, který se používá pro sestrojení Taylorova polynomu druhého a vyššího řádu.

V páté kapitole jsem se zaměřila na výpočet Taylorova polynomu. Taylorův polynom slouží k tomu, abychom zadanou funkci aproximovali funkcí jednodušší, a to polynomickou. V této kapitole bylo využito, co jsme se naučili od první do čtvrté kapitoly. I zde jsou příklady doplněny o grafy.

Šestá kapitola byla věnována určování přibližné hodnoty funkcí. Její hodnotu bychom bez kalkulačky určovali jen velmi těžko. Zde se k výpočtům využíval totální diferenciál prvního řádu, který nám zadanou funkci zjednodušil.

V předposlední kapitole jsem se věnovala programu *Wolfram Mathematica*. S programem jsem měla zpočátku problém, protože informace o něm a manuály jsou převážně v anglickém jazyce. Radila bych studentům, aby používali nápovědu přímo v programu, protože i mně velice pomohla.

Tento program je velice užitečný nejen pro matematiky. Spočítá mnoho příkladů, umožňuje kontrolu výsledků a jeho velkou výhodou je, že v něm lze tvořit jak 2D, tak 3D grafy.

V poslední kapitole je postup a řešení ke cvičením z každé kapitoly.

Myslím si, že řešených příkladů je v práci dost na to, aby je studenti pochopili a dobře si je procvičili.

Pevně doufám, že se mi povedl naplnit cíl mé práce, a to vytvořit ucelenou sbírku příkladů s jejich vysvětlením.

Literatura

[1] Ostravský, J.: Diferenciální počet funkce více proměnných, Nekonečné číselné řady. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Zlín, 2009.

[2] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P.: Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple. Masarykova univerzita v Brně, Brno, 1999.

[3] Rektorys, K. a spol.: Přehled užité matematiky II. Prometheus,Praha, 2000.

[4] Kreml, P., Vlček, J., Volný, P.: Matematika II. Vysokoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2007.

[5] Došlá, Z., Došlý, O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Masarykova Univerzita, Brno, 2006.

[6] Navrátil, M.: Matematika– Diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných. Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, Brno,2001.

[7] Říha, J., Látal, F., Kainzová, V., Mošová, V., Vyšín, I., Švrček, F., Richterek, L.: Software Mathematica v přírodních vědách a ekonomii [online], dostupné z:
`http://icteduca.upol.cz/index.php?text=18-studijni-text-software-mathematica-v-prirodnich-vedach-a-ekonomii`
[cit. 2013-15-02]

[8] Mathematica 8 (Stručný manuál)[online], dostupné z:
`http://www.vscht.cz/mat/PASCh/HTMLMath/ManualMath.html` [cit. 2013-12-02]

[9] Wolfram Mathematica 9 [online], dostupné z:
`http://www.wolfram.com/mathematica/` [cit. 2013-02-02]

[10] Kalvoda, T., [online], dospupné z:
`http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~kalvotom/dokumenty/ls0809pr1.pdf`[cit. 2013-04-04]