UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ÚVOD DO DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE V ÚLOHÁCH PRO STŘEDNÍ ŠKOLY TECHNICKÉHO SMĚRU

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Vypracovala: Ivana Huříková, M-DG, III. ročník

Rok odevzdání: 2013

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D.

Všechny použité materiály a zdroje jsou uvedeny v seznamu použité literatury na konci práce.

V Olomouci 4.července 2013 Ivana Huříková

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla vyslovit poděkování RNDr. Lence Juklové, Ph.D za cenné připomínky k mé práci, ochotu a pomoc při vyhledávání vhodných zdrojů a trpělivost při odpovídání na mé nesčetné dotazy.

OBSAH

ÚVOD

Motivem k napsání této práce bylo vytvořit pro žáky středních škol užitečnou pomůcku pro studium deskriptivní geometrie, v níž naleznou přehledně a stručně formulované a objasněné poznatky ze stereometrie, volného rovnoběžného promítání, kótovaného promítání a Mongeovy projekce.

Vytvořená kniha v žádném případě nezastupuje roli učitele, je určena k procvičování a opakování učiva, které již bylo žákovi předneseno v rámci vyučovací hodiny. Také by mohla být považována za poměrně užitečnou příručku, v níž žák snadno vyhledá a připomene si učivo, které už pozapomněl.

Práce je rozdělena do tří hlavních částí, přičemž každá kapitola obsahuje základní teoretické znalosti, které jsou doplněny obrázky konstrukcí, a celá látka je znovu a konkrétně objasněna na vhodně zvoleném řešeném příkladu. Některé kapitoly jsou doplněny situačními obrázky znázorňujícími danou konstrukci v prostoru.

První část práce obsahuje úmluvy pro značení a základy stereometrie. Bez těchto důležitých tématických celků se studium deskriptivní geometrie neobejde a žákům je doporučeno věnovat zejména kapitole o stereometrii maximum pozornosti. Získané znalosti je v zápětí možné prakticky si ověřit v druhé polovině této části, a to při osvojování poznatků o konstrukci těles a následně řezů těles ve volném rovnoběžném promítání.

Druhá část je věnována první zobrazovací metodě, s níž se žáci na středních školách setkávají – kótovanému promítání. V osmi podkapitolách se postupně naučí všechny konstrukce od sestrojení průmětu bodu po narýsování hranatých těles.

Poslední část práce obsahuje základní poznatky nejčastěji užívané zobrazovací metody – tzv. Mongeovy projekce. Struktura a názvy jednotlivých kapitol jsou stejné jako u kótovaného promítání a většina řešených příkladů je stejná jako v kótovaném promítání, nebo je zadání vhodně upraveno, aby byl výsledek co nejnázornější a žák si plně uvědomil, že se neučí něco zcela nového, ale učí se využít jiný „pohled“ na danou situaci.

Dnešní generace žáků středních škol dává přednost praktickým příkladům před rozsáhlým studiem teorie a tomuto požadavku bylo třeba práci přizpůsobit. Studium deskriptivní geometrie se neobejde bez opory v teorii, tato je však v práci uvedena stručněji než v plnohodnotných učebnicích a je vysvětlována na konkrétních příkladech.

1 VOLNÉ ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ

V této kapitole si připomeneme obvyklé značení využívané v deskriptivní geometrii (dále jen DG) a některé věty ze stereometrie, které nám pomohou při řešení úloh v dalších zobrazovacích metodách – v kótovaném promítání a v Mongeově projekci. Ve druhé části kapitoly si uvedeme základy rýsování ve volném rovnoběžném promítání a ukážeme si jejich použití na příkladech.

Volné rovnoběžné promítání není zobrazovací metoda, protože není vzájemně jednoznačné. Znalostí získaných v této kapitole však využijeme pro kreslení prostorových náčrtků, které nám pomohou při řešení úloh v dalších částech sbírky.

1.1 Značení

Deskriptivní geometrie využívá stejně jako matematika jednotné značení napříč mnoha jazyky. Jejímu „jazyku“ se naučíme porozumět velmi snadno.

Značení prvků:

- A, B, C... body (velká písmena latinky)
- *a, b, c*... přímky (malá písmena latinky)
- α, β, γ... roviny (malá písmena řecké abecedy).

Značení vzájemných vztahů:

- $B \in p$ bod B náleží / leží na přímce *p*
- $B \in \rho$ bod B náleží / leží v rovině ρ
- $p \subset \alpha$ přímka *p* náleží / leží v rovině α
- $\alpha \cap \beta = q$ přímka *q* je průnikem / průsečnicí rovin α, β
- $\gamma = Ac$ rovina γ je určena bodem A a přímkou *c*
- $\gamma = KLM$ rovina γ je určena body K, L, M
- $a \perp b$ přímka *a* je kolmá k přímce *b*
- $p \parallel q$ přímka *p* je rovnoběžná s přímkou *q*
- $d = |CD|$ *d* je vzdálenost bodu C od bodu D.

1.2 Stereometrické věty

Stereometrie je částí matematiky, zabývající se polohami geometrických objektů v prostoru. Jejím úkolem je s využitím vhodných obrázků a modelů rozvíjet prostorovou představivost nejen žáků.

Geometrii tak, jak ji známe, vybudoval Euklides (asi 325 – 260 př.n.l.) na několika pilířích, tzv. axiomech.

Axiomy:

- Dvěma různými body je určena právě jedna přímka.
- Přímkou a bodem, který na ní neleží, je určena právě jedna rovina.
- Mají-li dvě roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází.
- Leží-li bod A na přímce *p* a přímka *p* v rovině ρ, pak i bod A leží v rovině ρ.
- Daným bodem A, který neleží na přímce *p*, lze vést právě jednu přímku *q* rovnoběžnou s danou přímkou *p*.

Z těchto axiomů jsou odvozeny následující věty:

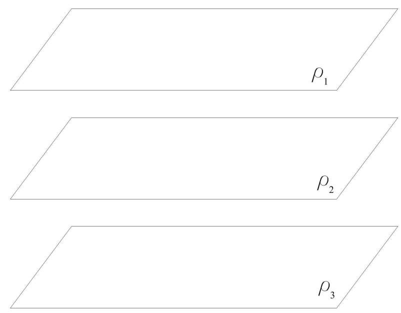
- Jestliže mají dvě přímky společné dva různé body, pak jsou tyto přímky totožné.
- Mají-li dvě roviny společnou přímku a bod, který na ní neleží, pak jsou totožné.
- Jestliže mají přímka a rovina dva různé společné body, pak přímka leží v této rovině.
- Rovina je určena třemi body, které neleží na jedné přímce, nebo přímkou a bodem, který na ní neleží, nebo dvěma různými rovnoběžkami, nebo dvěma různoběžkami.

Polohové vlastnosti:

- Dvě přímky jsou buď splývající, nebo různé. Jsou-li různé, pak mají společný právě jeden bod (jejich průsečík), nebo nemají žádný společný bod a leží v jedné rovině (takové přímky jsou rovnoběžné), nebo nemají žádný společný bod a neleží ve stejné rovině (mimoběžné přímky).
- Přímka a rovina mají společné buď všechny body (přímka leží v rovině), nebo mají společný právě jeden bod (tzv. průsečík přímky s rovinou), anebo nemají žádný společný bod (přímka je s rovinou rovnoběžná).
- Každé dvě roviny jsou buď různé, nebo splývající. Jsou-li různé, pak buď nemají žádný společný bod (tedy jsou rovnoběžné), anebo mají společnou právě jednu přímku (takové roviny nazveme různoběžné a jejich společnou přímku nazýváme průsečnicí rovin).
- Daným bodem lze k dané rovině vést jedinou rovinu, která je s ní rovnoběžná.
- Je-li přímka rovnoběžná s některou přímkou roviny, pak je s touto rovinou rovnoběžná.
- Přímka je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami právě tehdy, když je rovnoběžná s jejich průsečnicí.
- Jestliže jsou dvě roviny rovnoběžné, pak každá přímka jedné roviny je rovnoběžná s druhou rovinou.
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže v jedné rovině jsou dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.

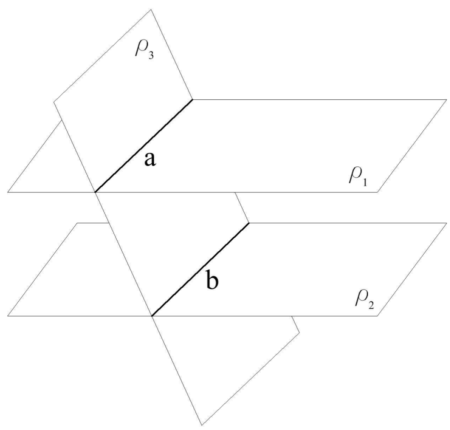
Určování vzájemné polohy tří rovin hraje důležitou roli v konstrukci řezů (nejen) ve volném rovnoběžném promítání. Následující odrážky (spolu s názornými obrázky) obsahují kompletní výčet všech vzájemných poloh tří různých rovin.

- Tři roviny, z nichž každé dvě jsou rovnoběžné, se neprotínají.



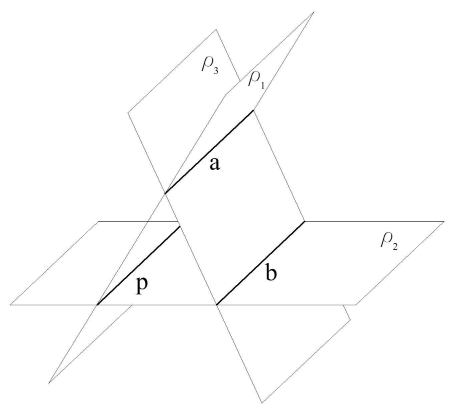
Obrázek 1 - Tři rovnoběžné roviny

- Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina, která není s prvními dvěma rovnoběžná, ve dvou rovnoběžných přímkách - průsečnicích.



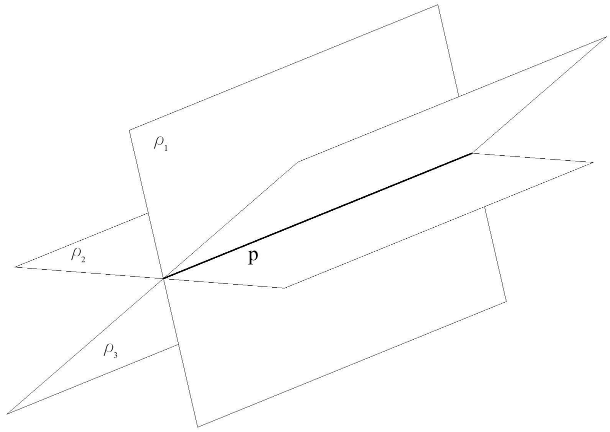
Obrázek 2 - Dvě rovnoběžné roviny proťaté třetí rovinou

- Dvě různoběžné roviny protíná třetí rovina, která není rovnoběžná s žádnou z nich, ale je rovnoběžná s jejich průsečnicí *p*, ve dvou přímkách *a, b*, které jsou rovnoběžné s průsečnicí *p*.



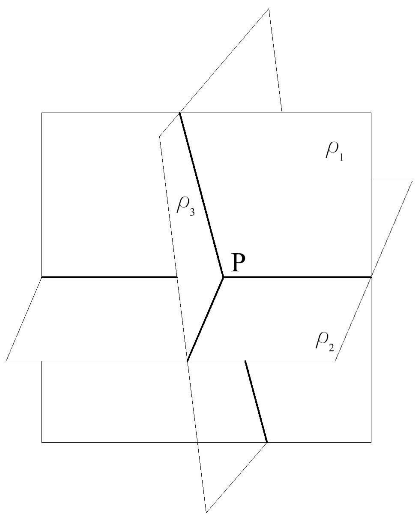
Obrázek 3 – Tři různoběžné roviny, jejichž průsečnice jsou navzájem rovnoběžné

- Každé dvě roviny jsou různoběžné a mají společnou jedinou průsečnici *p*.



Obrázek 4 - Tři různoběžné roviny, jejichž průsečnice splývají

- Tři roviny, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, a žádná není rovnoběžná s průsečnicí zbylých dvou, se protínají v jediném bodě P.



Obrázek 5 - Tři různoběžné roviny mající jediný společný bod

Nyní si ukážeme metrické vlastnosti geometrických útvarů v prostoru. Budeme přitom využívat pojmů známých z matematiky – délku úsečky a velikost úhlu, pomocí kterých zavedeme další důležité pojmy.

Odchylka:

- Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu přímky svírají. Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0˚.
- Odchylka dvou mimoběžných přímek *p, q* je rovna odchylce přímek *p´, q´* vedených libovolným bodem B prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

  (Z praktických důvodů často volíme bod B na jedné z mimoběžek. Např. pokud $B \in p$, pak $p = p'$.)
- Odchylka dvou různoběžných rovin je odchylka normál (kolmic) k daným rovinám vedených libovolným bodem prostoru, který neleží v žádné z daných rovin.

  NEBO (jiný způsob určení odchylky dvou různoběžných rovin)

  Odchylka dvou různoběžných rovin je rovna odchylce průsečnic těchto rovin s rovinou kolmou k jejich průsečnici.
- Odchylka přímky *p* od roviny ρ je odchylka přímek *p, q*, kde *q* je průsečnice roviny ρ s rovinou σ, která je kolmá k rovině ρ a obsahuje přímku *p*.

Kolmost:

- Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy když jejich odchylka je 90˚.

  NEBO (jiný způsob definování kolmosti dvou přímek)

  Dvě různoběžné přímky jsou k sobě kolmé, jestliže vedlejší úhly jimi určené jsou shodné.
- Přímka je kolmá k rovině, právě když je kolmá ke všem přímkám roviny.
- Dvě roviny jsou k sobě kolmé, jestliže jejich odchylka je 90˚.

Věty o kolmosti:

- Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny.
- Daným bodem lze vést jedinou přímku kolmou k dané rovině.
- Daným bodem lze vést jedinou rovinu kolmou k dané přímce.
- Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé.

Vzdálenost:

- Vzdáleností bodu A od přímky *p* rozumíme vzdálenost bodu A od přímky *p* v rovině, kterou tyto prvky určují (je to nejmenší vzdálenost ze všech vzdáleností bodu A od jednotlivých bodů přímky *p*).
- Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné přímky od druhé.
- Vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost A od paty kolmice k sestrojené z bodu A k rovině ρ.
- Vzdálenost přímky *p* od roviny ρ, která je s přímkou *p* rovnoběžná, je rovna vzdálenosti libovolného bodu A přímky od roviny ρ.
- Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ je rovna vzdálenosti libovolného bodu A roviny ρ od roviny σ (nebo naopak).

1.3 Zásady volného rovnoběžného promítání

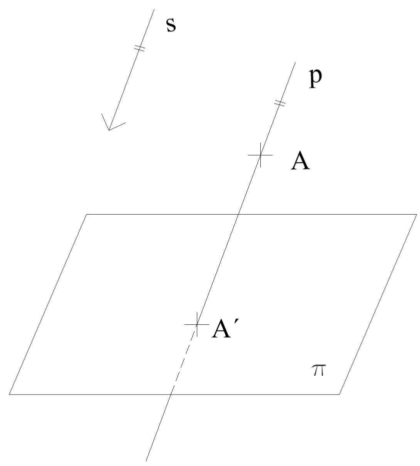
Jak už jsme si řekli, volného rovnoběžného promítání užíváme k řešení jednodušších stereometrických úloh a k tvorbě náčrtků, které pomáhají naší prostorové představivosti. Abychom mohli takové úlohy řešit, musíme napřed definovat rovnoběžné promítání a s jeho pomocí také volné rovnoběžné promítání.

Předpis, který každému prvku A množiny M přiřazuje právě jeden prvek A´ množiny M´, se nazývá zobrazení. Prvek A nazýváme vzor, prvku A´ říkáme obraz.

Rovnoběžné promítání je definováno následovně:

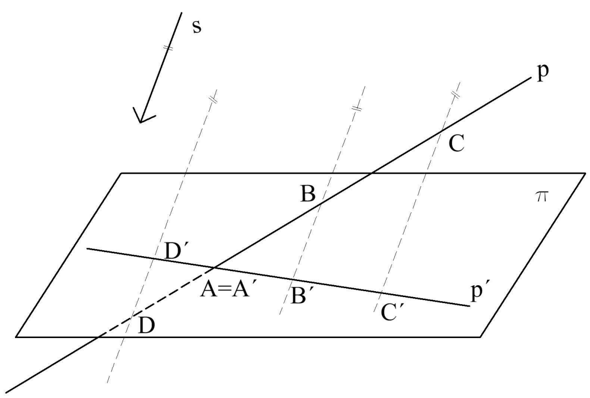
Mějme dánu rovinu π a směr *s*, který je s touto rovinou různoběžný. Dále mějme dán libovolný bod A v prostoru. Bodem A vedeme přímku *p* směru *s*. Obrazem bodu A je bod A´, který je průsečíkem přímky *p* s rovinou π.

Rovina π (tedy rovina, do které promítáme) se nazývá průmětna, směr *s*, kterým promítáme, nazveme směr promítání. Přímky rovnoběžné se směrem promítání nazýváme promítací. Bod A´ označujeme jako rovnoběžný průmět bodu A do roviny π.



Obrázek 6 - Rovnoběžné promítání

Z definice je patrné, že k sestrojení průmětu libovolného bodu prostoru musí být dána rovina π a směr *s*. Říkáme, že rovnoběžné promítání je určeno rovinou π a směrem *s*.



Obrázek 7 - Průmět přímky p ve VRP (které je dáno rovinou π a směrem s)

Pro rovnoběžné promítání platí následující tvrzení:

- průmětem bodu je bod,
- průmětem přímky je přímka (pokud je přímka různoběžná se směrem promítání) nebo bod (pokud je přímka promítací),

- leží-li bod A na přímce a, pak i průmět bodu A leží na průmětu přímky a (obdobně platí i pro body a přímky v rovině),
- průmětem rovnoběžných přímek, které nejsou promítací, jsou rovnoběžné přímky,
- průmětem různoběžných přímek, z nichž žádná není promítací, jsou různoběžky nebo splývající přímky,
- průmětem roviny je přímka (takové rovině říkáme promítací) nebo celá průmětna,
- poměr velikostí úseček, které neleží na promítacích přímkách, se zachovává,
- průmět útvaru ležícího v rovině, která je rovnoběžná s průmětnou, je útvar s ním shodný.

Jestliže je směr promítání s kolmý k průmětně π, pak promítání, které je směrem s a průmětnou π určeno, nazýváme <u>pravoúhlé promítání</u>.

Pro pravoúhlé promítání platí stejná tvrzení jako pro rovnoběžné promítání a navíc následující tři:

- průmětem úsečky AB je úsečka A´B´. Přitom $|A'B'|=|AB|.\cos\varphi$, kde φ je odchylka přímky AB od průmětny,
- průmětem dvou kolmých přímek, z nichž žádná není promítací, jsou kolmé přímky právě tehdy, když je alespoň jedna z nich rovnoběžná s průmětnou,
- (důsledek předcházejícího tvrzení) pravoúhlým průmětem pravého úhlu, jehož aspoň jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou a žádné není k průmětně kolmé, je pravý úhel.

<u>Volné rovnoběžné promítání</u> (dále jen VRP) je jednoduché a velmi názorné zobrazení prostoru do roviny (zde jí rovněž budeme říkat průmětna). VRP, které budeme používat, získáme tak, že k souboru tvrzení platných pro rovnoběžné promítání přidáme pravidlo, které říká: Úsečky kolmé k průmětně budeme zobrazovat jako úsečky, které s průměty úseček rovnoběžných s průmětnou svírají úhel 45°. Délka průmětu úsečky kolmé k průmětně bude rovna polovině skutečné délky této úsečky.

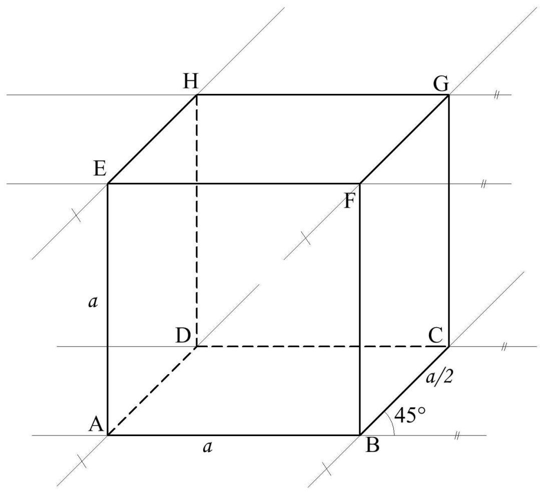
VRP využíváme v deskriptivní geometrii k tvorbě náčrtků prostorového řešení úloh.

1.4 Konstrukce těles

Těleso ve VRP zobrazujeme tak, že některou jeho stěnu či hranu umístíme do průmětny nebo roviny s ní rovnoběžné (tzv. průčelné roviny). Další části tělesa pak zkonstruujeme pomocí pravidel popsaných výše. Držíme se zásady, že viditelné hrany značíme plnou čarou, neviditelné pak čárkovaně.

Máme-li za úkol sestrojit krychli ABCDEFGH o hraně délky *a* ve VRP, umístíme jednu její stěnu, např. ABEF do průmětny nebo průčelné roviny.

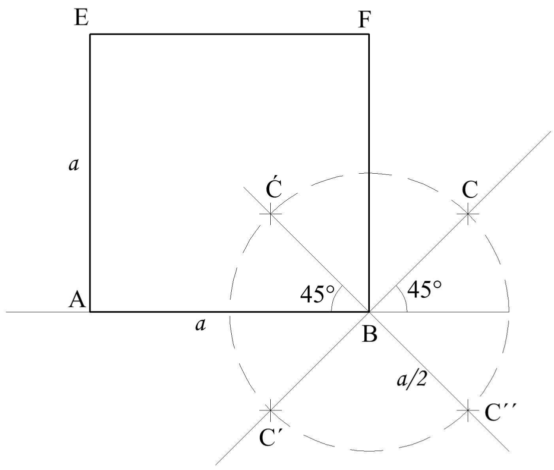
Příklad 1.1: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli ABCDEFGH o hraně délky *a*.



Obrázek 8 - Zobrazení krychle ve VRP

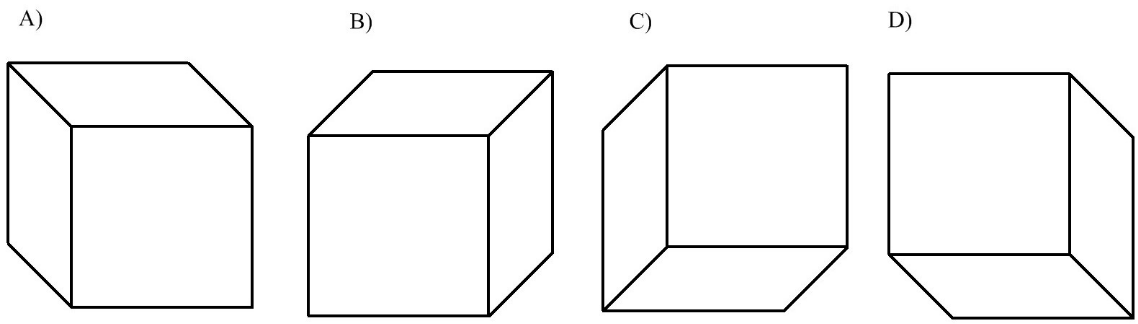
Řešení: (obr. 8) Poloha krychle vzhledem k průmětně není zadána, takže ji můžeme umístit libovolným vhodným způsobem. V tomto příkladě umístíme krychli tak, že stěna ABEF bude ležet v průčelné rovině a jejím průmětem je tedy čtverec o straně délky *a*. Dále sestrojíme průmět hrany BC. Tato je kolmá k průmětně, její průmět tedy bude ležet na přímce, která svírá s průmětem přímky (např.) AB úhel 45°. Délka průmětu hrany BC je rovna polovině délky hrany krychle. Protože VRP zachovává incidenci a rovnoběžnost, můžeme k nalezení průmětu bodu D využít skutečnosti, že přímka CD je rovnoběžná s přímkou AB a přímka BC je rovnoběžná s AD. Průmět bodu D je tedy průsečíkem průmětu přímky CD s průmětem přímky AD. Stěna CDGH leží v průčelné rovině, proto jejím průmětem bude čtverec o straně délky *a.* Průmět strany CD již máme narýsován a průměty bodů G, H získáme sestrojením čtverce nad CD (do poloroviny CDE).

Jiným způsobem sestrojení průmětů zbývajících bodů G, H je např. sestrojení rovnoběžníku nad průmětem EF, který je shodný s rovnoběžníkem ABCD (který je průmětem stěny ABCD).



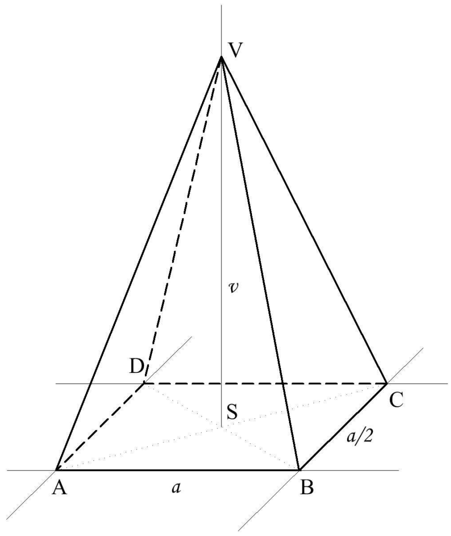
Obrázek 9 - Možné polohy průmětu bodu C

Všimněme si, že při sestrojování průmětu hrany BC existují čtyři různé možnosti polohy průmětu bodu C (Obr. 9). Každou volbou této polohy získáme jiný průmět krychle ABCDEFGH ve VRP. Nazýváme je levý nadhled (Obr.10 A), pravý nadhled (Obr.10 B), levý podhled (Obr.10 C) a pravý podhled (Obr.10 D).



Obrázek 10 - Rovnoběžné průměty krychle

<u>Příklad 1.2:</u> Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Délka podstavné hrany je *a*, výška *v*.

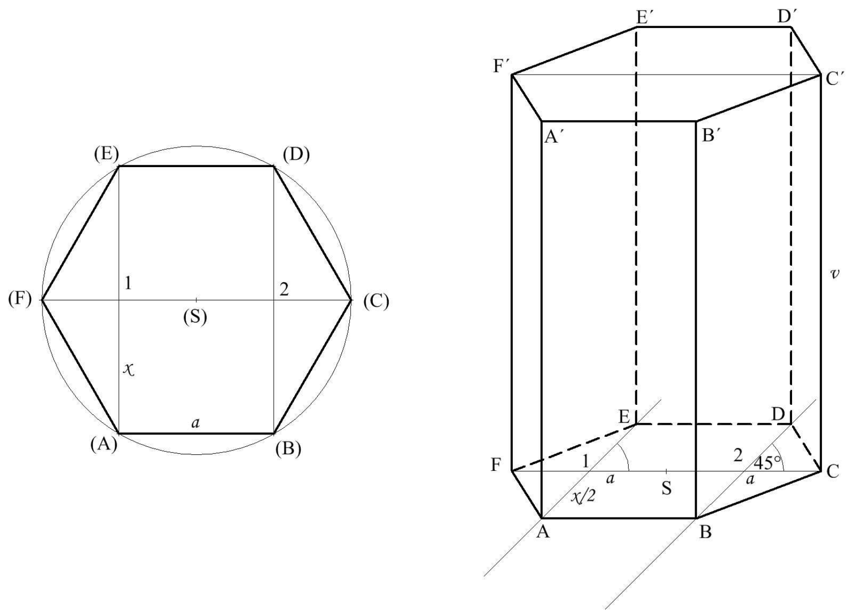


Obrázek 11 – Průmět jehlanu ve VRP

<u>Řešení:</u> (Obr. 11) Jehlan umístíme tak, aby hrana AB ležela v průmětně a rovina podstavy ABCD byla k průmětně kolmá. Průmět podstavy ABCD sestrojíme stejně jako průmět stěny ABCD v příkladě 1.1.

Vrchol V leží na přímce kolmé k podstavě jdoucí jejím středem S. Nalezneme průmět středu S podstavy jako střed sestrojeného rovnoběžníka ABCD (střed libovolného rovnoběžníka je průsečíkem jeho úhlopříček). Výška jehlanu je rovnoběžná s průmětnou, zobrazí se jako přímka jdoucí průmětem bodu S kolmá k průmětu přímky AB a vzdálenost průmětu bodu V od průmětu bodu S je rovna *v*.

<u>Příklad 1.3:</u> Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA´B´C´D´E´F´ o délce podstavné hrany *a* a výšce *v*.



Obrázek 12 - Průmět pravidelného šestibokého hranolu ve VRP

<u>Řešení:</u> (Obr. 12) Těleso umístíme tak, že stěna CFC´F´ bude ležet v průmětně. Jejím průmětem je obdélník o stranách délek 2*a*, *v*. Dále sestrojíme pomocný 6-úhelník (A)(B)(C)(D)(E)(F) o straně délky *a* a středu (S), z něhož budeme měřit další potřebné vzdálenosti, a vyznačíme v něm úsečky (C)(F), (A)(E), (B)(D). Průsečík (A)(E) a (C)(F) ozn.1, průsečík (B)(D) a (C)(F) ozn.2.

Průmět středu S podstavy se zobrazí jako střed průmětu CF. Úsečky AE, BD podstavy hranolu jsou kolmé k průmětně, jejich průměty tedy budou ležet na přímkách, které svírají s přímkou CF úhel 45° a prochází průměty bodů 1,2 (jejich vzdálenost od průmětu středu S známe z pomocného šestiúhelníku (A)(B)(C)(D)(E)(F) a tato se zobrazí ve skutečné velikosti, protože leží na přímce CF). Délka průmětu úsečky, která je kolmá k průmětně, je rovna polovině skutečné délky této úsečky, můžeme najít průměty bodů A, B, D, E. Takto jsme získali průmět podstavy hranolu.

Pobočné hrany AA´, BB´, ... , FF´ hranolu jsou rovnoběžné s průmětnou a jejich průměty můžeme sestrojit stejně jako výšku jehlanu z příkladu 1.2. Většinou takto sestrojujeme průmět jen jedné v těchto hran a zbytek průmětu horní podstavy sestrojíme jako útvar shodný s průmětem spodní podstavy hranolu.

V příkladech 1.4 – 1.12 volte vždy podstavu v rovině kolmé k průmětně.

Příklad 1.4: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli ABCDEFGH o délce hrany 4.

Příklad 1.5: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV o délce podstavné hrany 3,5 a výšce 5.

Příklad 1.6: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA´B´C´D´E´F´ o délce podstavné hrany 3 a výšce 7.

Příklad 1.7: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný pětiboký jehlan ABCDEV o délce podstavné hrany 3,3 a výšce 6.

Příklad 1.8: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný trojboký jehlan ABCV o délce podstavné hrany 4 a výšce 2,5.

Příklad 1.9: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný osmistěn ABCDEF o hraně délky 5.

Příklad 1.10: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřstěn ABCD o hraně délky 4,5.

Příklad 1.11: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný trojboký hranol ABCDEF o délce podstavné hrany 4 a výšce 6.

Příklad 1.12: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli ABCDEFGH, víte-li, že $|AC|=4$.

1.5 Řezy na tělesech

Nejzajímavějšími úlohami řešenými ve VRP jsou řezy těles danými rovinami. Řezem tělesa rovinou budeme rozumět množinu všech společných bodů tělesa a roviny řezu. V úlohách o hranatých tělesech se řez zobrazí vždy jako n-úhelník (případně bod nebo úsečka), řezem oblých těles (kužel, válec...) je obecně křivka – kuželosečka.

V této sbírce budeme hledat řezy těch těles, jejichž rýsování jsme procvičili v kapitole předchozí, tedy pouze těch hranatých.

Významnou roli při určování úseček náležejících řezu zaujímá určování vzájemné polohy tří rovin (detailně popsané v kapitole 1.2). Jedna z rovin je vždy rovina řezu a zbylé dvě jsou rovinami stěn těles nebo jejich vrcholové (v úlohách o jehlanu) či směrové (v úlohách o hranolu) roviny.

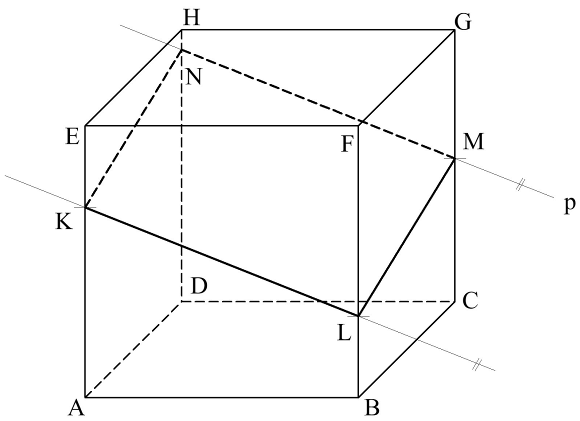
Pro úplnost si zde uveďme důsledky některých stereometrických vět, které využíváme při konstrukci řezů ve VRP:

(1) Jestliže dva různé doby roviny řezu leží v rovině jedné stěny tělesa, pak leží v této rovině i jejich spojnice. Průnik stěny a spojnice je stranou řezu.

(2) Jsou-li roviny dvou stěn navzájem rovnoběžné a při tom různoběžné s rovinou řezu, pak jsou průsečnice rovin stěn s rovinou řezu také rovnoběžné.

(3) Průsečnice roviny řezu s dvěma sousedními stěnami a průsečnice těchto dvou stěn, se protínají v jednom bodě.

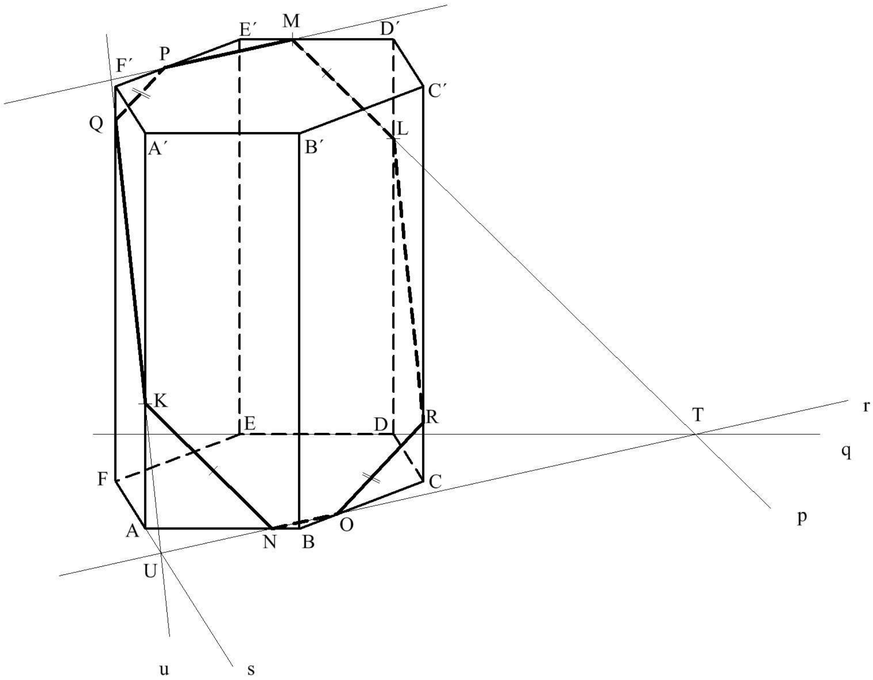
<u>Příklad 1.13:</u> Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez krychle ABCDEFGH rovinou, která je určena body KLM.



Obrázek 13 - Řez krychle rovinou

<u>Řešení:</u> (obr. 13) Průnikem roviny KLM a stěny ABEF je úsečka KL dle (1), průmětem této úsečky je spojnice průmětů bodů KL. Průmět části řezu ve stěně BCFG je spojnice průmětů bodů L, M řezu (stejné jako ve stěně ABEF). Stranu řezu ve stěně CDGH sestrojíme s využitím důsledku (2). V této stěně známe bod řezu M a jím bude, rovnoběžně se stranou KL, procházet přímka p. Označme N průsečík přímky p s hranou DH. Dle (1) už víme, že strana řezu ve stěně CDGH určená body MN je jejich spojnicí. Je třeba si uvědomit, že průmět této strany řezu nebude viditelná, jelikož leží ve stěně, jejíž průmět viditelný není. Poslední strana řezu je určena body KN (a jejím průmětem bude opět neviditelná hrana).

<u>Příklad 1.14:</u> Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez pravidelného šestiúhelníku ABCDEFA´B´C´D´E´F´ rovinou, která je určena body KLM.

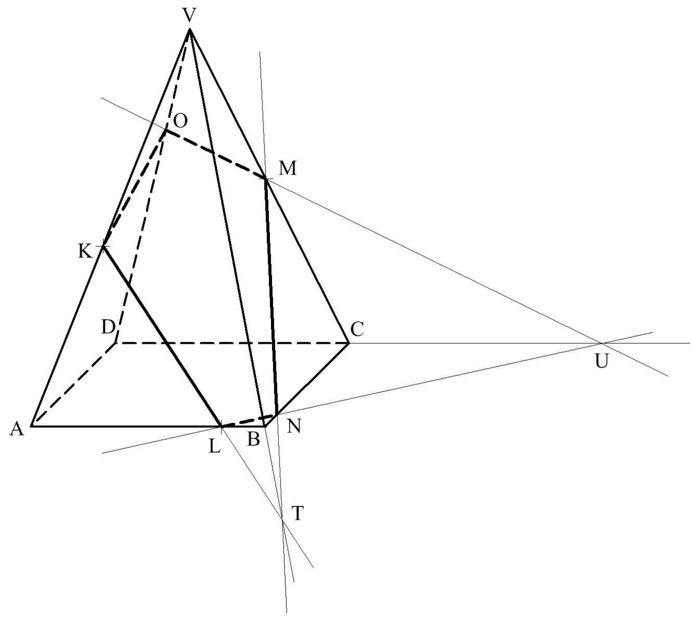


Obrázek 14 - Řez pravidelného šestibokého hranolu rovinou

<u>Řešení:</u> (obr. 14) Průnikem roviny KLM a stěny DED´E´ je úsečka LM (dle (1)). Dále sestrojíme stranu řezu ležící ve stěně ABA´B´. Tato stěna je rovnoběžná se stěnou DED´E´ a dle (2) víme, že strana řezu v této rovině prochází bodem K a je rovnoběžná se stranou LM řezu. Označme N průsečík strany řezu v rovině ABA´B´ s hranou AB. Chceme-li najít další bod řezu, nevystačíme už s důsledky (1) a (2), ale musíme využít důsledku (3). Uvažujme tři roviny: rovinu řezu KLM, rovinu spodní podstavy a rovinu stěny DED´E´. Dále označme *p* průsečnici rovin KLM a DED´E´, *q* průsečnici roviny spodní podstavy s rovinou DED´E´ a průsečík přímek *p, q* označme T. Dle (3) musí bodem T procházet i průsečnice roviny spodní podstavy s rovinou řezu. Na této průsečnici již známe bod N, tedy přímka TN=*r* je hledanou průsečnicí roviny řezu s rovinou spodní podstavy. Přímka *r* protíná hranu BC v bodě O a úsečka NO je další stranou hledaného řezu. Dle (2) určíme stranu řezu náležející horní podstavě, jedním jejím krajním bodem je M a druhý označme P.

Bod Q řezu ležící na hraně FF´ určíme opět dle (3). Průsečnicí roviny dolní podstavy s rovinou řezu je přímka *r*, průsečnici roviny dolní podstavy s rovinou stěny AFA´F´ označme *s*, a průsečík přímek *r, s* označme U. Průsečnice roviny řezu s rovinou stěny AFA´F´, ozn.*u*, prochází body K,U. Průsečík přímky *u* s hranou FF´ je hledaný bod Q. Poslední vrchol řezu – bod R sestrojíme dle důsledků (1) a (2).

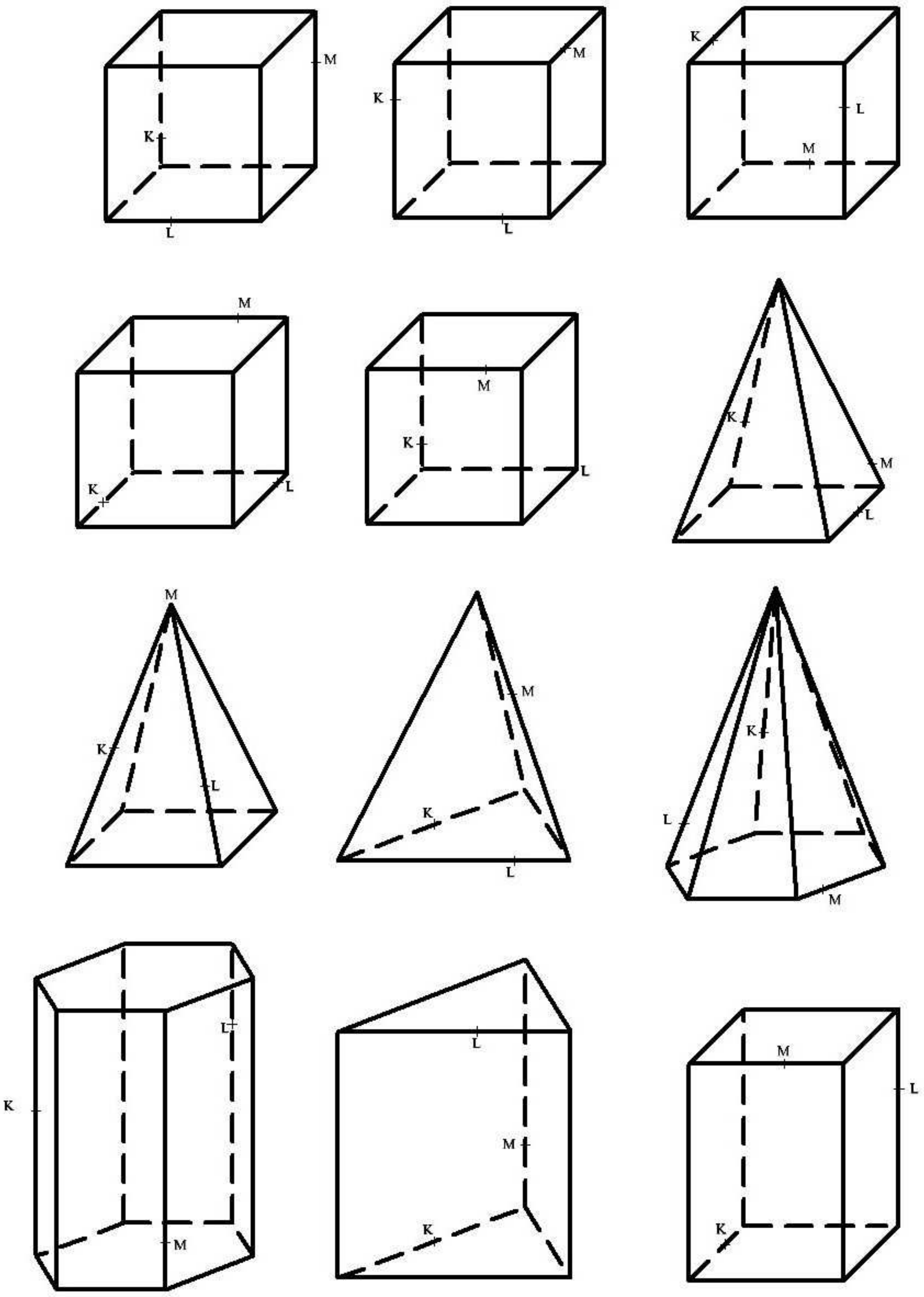
<u>Příklad 1.15:</u> Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou KLM.



Obrázek 15 - Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou

<u>Řešení:</u> (Obr. 15) Dle (1) je průnikem roviny KLM a stěny ABV úsečka KL. K nalezení strany řezu ležící ve stěně BCV využijeme (3). Průsečnice roviny řezu s rovinou stěny ABV je přímka KL, průsečnice rovin ABV a BCV je přímka BV. Označme T průsečík přímek KL a BV. Body T, M je určena průsečnice roviny řezu s rovinou stěny BCV a bod N je průsečík této stěny s přímkou TM. Úsečka MN je stranou hledaného řezu. Dále můžeme sestrojit stranu LN řezu, která leží v rovně podstavy (1). Dle (3) sestrojíme také vrchol O řezu. Průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu je přímka LN a protíná se s průsečnicí CD rovin podstavy a CDV v bodě U. Body U, M určují průsečnici roviny řezu s rovinou CDV a bod O je průsečíkem hrany DV s přímkou UM. Poslední stranu KO řezu sestrojíme dle (1).

Příklad 1.16: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez daného tělesa rovinou KLM.



Obrázek 16 - Řez tělesa rovinou – příklady

2 KÓTOVANÉ PROMÍTÁNÍ

Mějme dáno pravoúhlé promítání do dané roviny π. Tato rovina rozděluje prostor na dva opačné poloprostory, z nichž jeden (obvykle ten nad průmětnou) budeme považovat za kladný a druhý za záporný.

Dále sestrojme pravoúhlý průmět některého bodu A prostoru do průmětny π a označme jej A_1. Bodu A prostoru jsme sice přiřadili jeho průmět A_1, ale z průmětu nedokážeme jednoznačně určit polohu bodu v prostoru. Tento problém vyřešíme tak, že k průmětu bodu A (tedy k A_1) přiřadíme do závorky číselný údaj – tzv. kótu.

Kóta bodu je reálné číslo, které udává vzdálenost bodu A od jeho průmětu A_1 s ohledem na poloprostor, v němž bod A leží (Obr. 17). Jestliže je bod A v kladném poloprostoru (určeném rovinou π), přiřazujeme kótě kladné znaménko, leží-li bod A v záporném poloprostoru, přiřazujeme znaménko záporné. Body ležící v průmětně π mají kótu rovnu nule.

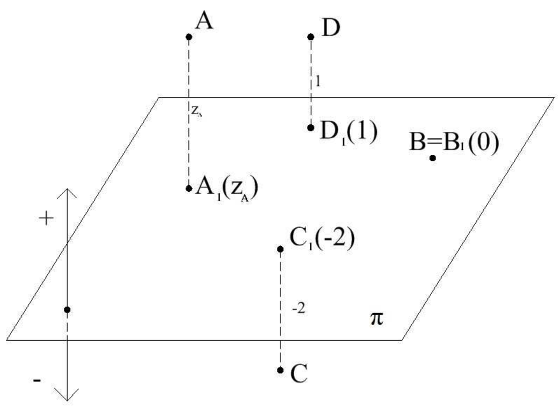
Výše popsaná zobrazovací metoda se nazývá kótované promítání.

Značení v kótovaném promítání:

A ... bod v prostoru

$A_1(k)$ ... kótovaný průmět bodu A , k ... kóta bodu A

π... průmětna



Obrázek 17 - Kótované promítání

2.1 Zobrazení bodu a přímky

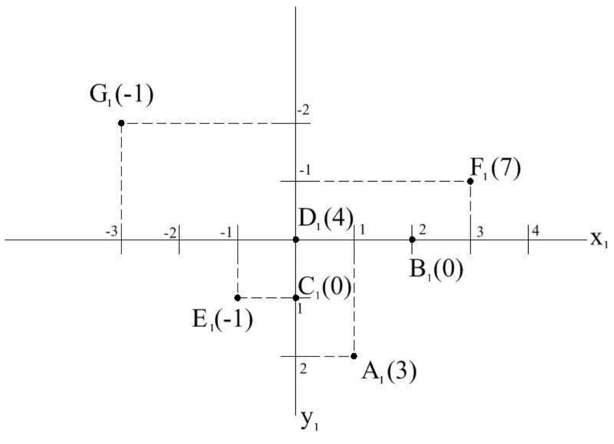
V deskriptivní geometrii řešíme úlohy zadané pomocí souřadnic (souřadnice zajistí, že všem např. ve třídě vyjde stejný výsledek), proto je nutné zvolit vhodnou soustavu souřadnic. Budeme využívat tzv. levotočivou kartézskou soustavu souřadnic (známe z matematiky), přičemž osy x,y leží v průmětně a osa z je k průmětně kolmá. Pro zjednodušení a zpřehlednění konstrukcí ztotožníme průmětnu s rovinou, tzv. nákresnou, do níž rýsujeme (např. sešit či tabule).

V nákresně osu x volíme vodorovně a její kladný směr vpravo od počátku O soustavy souřadnic, osa y je svislá a její kladná část od počátku O dolů (vyplývá ze zvolené soustavy souřadnic). Jednotky na osách vždy vhodně zvolíme (příklady v této sbírce jsou zadávány tak, že při volbě (části) nákresny formátu A4 je pro názornost nejvhodnější volit jednotku 1cm).

Zobrazení bodu

Nyní můžeme bod v kótovaném promítání zadat souřadnicemi. Je-li dáno A=[x_A ,y_A,z_A], pak kótovaný průmět bodu A dostaneme tak, že v nákresně sestrojíme jeho průmět A_1=[x_A ,y_A] a jako kótu připíšeme (do závorky) souřadnici z_A.

<u>Příklad 2.1:</u> V kótovaném promítání zobrazte body A=[1;2;3], B=[2;0;0], C=[0;1;0], D=[0;0;4], E=[-1;1;-1], F=[3;-1;7], G=[-3;-2;-1].



Obrázek 18 – Zobrazení bodů v kótovaném promítání

Řešení: (obr. 18) Sestrojíme osy *x, y*, určíme orientaci a jednotky. Kótovaný průmět bodu A – bod A_1 sestrojíme jako bod o souřadnicích x_A=1, y_A=2 a k němu připíšeme kótu z_A=3. Průměty ostatních bodů sestrojíme stejným postupem.

Když si v prostoru vymodelujeme body, jejichž průměty jsme sestrojili, vidíme, že body E, G leží v opačném poloprostoru určeném průmětnou (jejich kóty jsou záporná čísla), než body A, D, F (jejich kóty jsou čísla kladná), a body B, C leží v průmětně (kóta je rovna nule). Body E, G leží pod průmětnou a body A, D, F nad průmětnou.

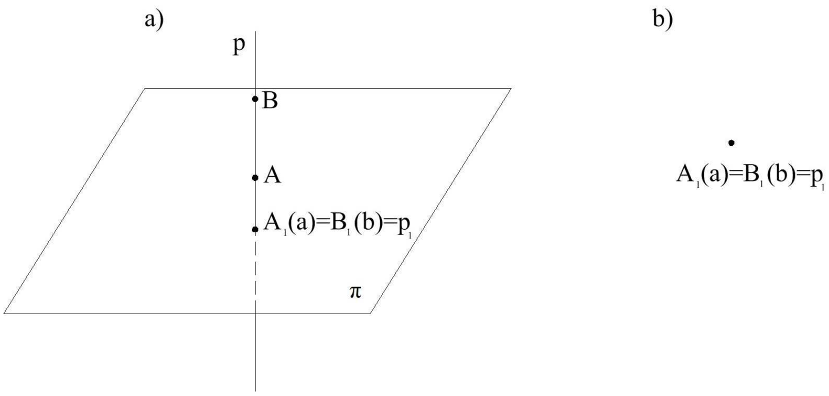
Příklad 2.2: V kótovaném promítání zobrazte body: K=[2;3;-4], L=[-1;2;1], M=[-3;-2;3], N=[1;-4;-9].

Zobrazení přímky

Každá přímka *p* prostoru je určena dvěma různými body A, B. Chceme-li najít její průmět p_1 v kótovaném promítání, stačí znát průměty libovolných dvou různých bodů této přímky - A_1, B_1. Významným bodem každé přímky je její průsečík P s průmětnou, který nazýváme stopník (P= P_1).

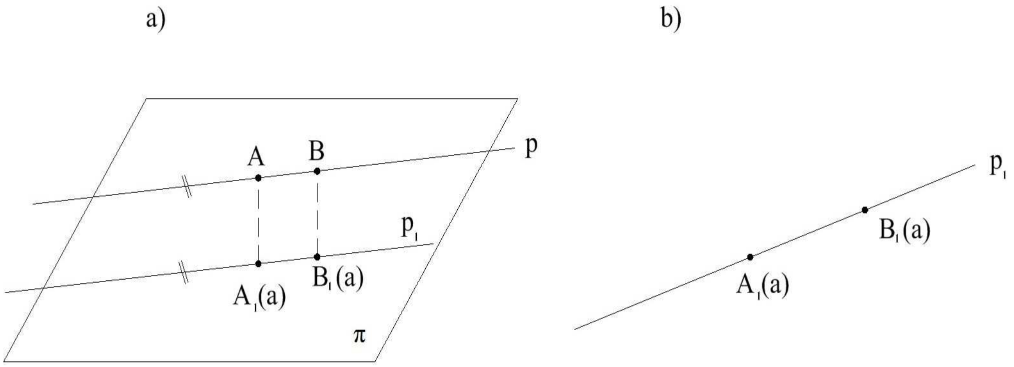
Vzájemná poloha přímky a průmětny:

- Přímka kolmá k průmětně (obr. 19a) je rovnoběžná se směrem promítání a jejím průmětem je tedy bod. Takovou přímku nazýváme, stejně jako ve VRP, promítací. (Průměty dvou různých bodů A, B, které určují přímku *p*, splývají a celá přímka *p* se zobrazí do bodu A_1= B_1= p_1 (obr. 19b) .)



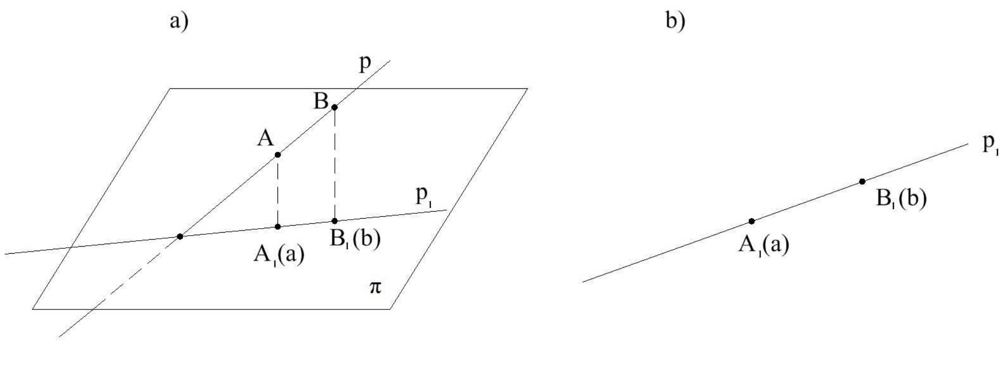
Obrázek 19 - Přímka kolmá k průmětně

- Přímka je rovnoběžná s průmětnou (obr. 20a), jestliže má každý její bod od průmětny stejnou vzdálenost (vzdálenost bodu od průmětny je rovna absolutní hodnotě jeho kóty). Průmětem přímky (obr. 20b), která je rovnoběžná s průmětnou, je přímka, jejíž všechny body mají stejnou kótu. (Dva různé body A_1, B_1 o stejné kótě určují průmět přímky, která je rovnoběžná s průmětnou.) Přímka rovnoběžná s průmětnou nemá stopník (protože průmětnu neprotíná). O přímkách rovnoběžných s průmětnou říkáme, že mají kótu (ta je rovna kótě všech bodů, které na ní leží).



Obrázek 20 - Přímka rovnoběžná s průmětnou

- Posledním možným případem je přímka v obecné poloze, tj. přímka, která není kolmá k průmětně ani s ní není rovnoběžná (Obr. 21a), a jejím průmětem je přímka. (Dvěma různými body A_1, B_1 o různé kótě je dán průmět přímky (obr. 21b), která je s průmětnou různoběžná.) Promítací přímky všech bodů přímky tvoří promítací rovinu této přímky (ta je kolmá k průmětně).



Obrázek 21 - Přímka, která není k průmětně kolmá ani s ní rovnoběžná

2.2 Sklápění

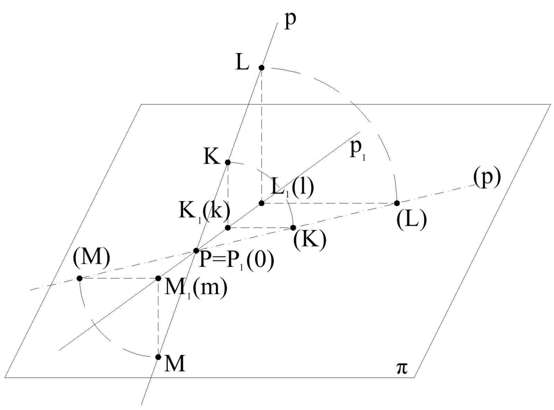
Každá přímka, která není promítací, leží v některé promítací rovině a tato je kolmá k průmětně π. Abychom zjistili skutečné velikosti útvarů této promítací roviny, musíme ji přemístit tak, aby splynula s průmětnou nebo s ní byla rovnoběžná (z vlastností rovnoběžného promítání víme, že útvary v průmětně nebo v rovinách, které jsou s průmětnou rovnoběžné, se promítají ve skutečné velikosti). Promítací rovinu musíme otočit o 90° okolo její průsečnice s rovinou, do které promítáme (při otáčení do průmětny otáčíme promítací rovinu kolem průmětu přímky, která v této rovině leží). Tato konstrukce se nazývá sklápění promítací roviny do průmětny.

Chceme-li určit skutečnou velikost úsečky ležící na promítací přímce, zvolíme libovolnou rovinu, která obsahuje tuto promítací přímku a je kolmá k průmětně, a tuto rovinu (jelikož je promítací) sklopíme.

Sklápění využíváme k hledání stopníků přímek, ke zjištění skutečných velikostí úseček a odchylek přímek od průmětny.

Pravidla značení sklopených útvarů:

- Ve sklopení rýsujeme čerchovanou čarou.
- Sklopené průměty bodů píšeme do závorek.

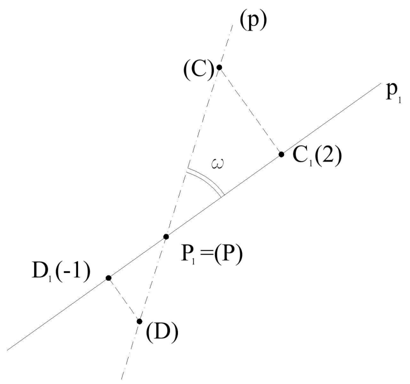


Obrázek 22 – Sklápění přímky

Konstrukce sklápění: (Obr. 22) Bod K přímky p otočíme o úhel 90° do bodu (K) po kružnici k (kružnice otáčení) se středem v bodě K_1 a poloměrem z_K (poloměr otáčení), přičemž $K_1(K) \perp p_1$. Rovina určená body $K(K)K_1$ se nazývá rovina otáčení bodu K, přímka p_1 je osou otáčení. Obdobně pro body L, M.

Uvědomme si, že:

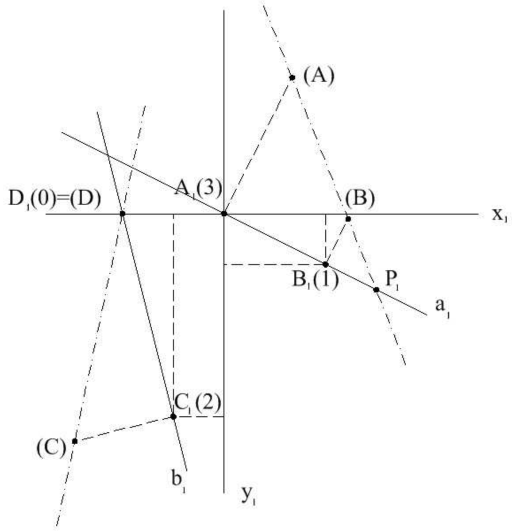
- Stopník při sklápění zůstává na místě – jeho kóta je rovna nule. Toho využíváme při hledání stopníku přímky, protože kótovaný a sklopený průmět přímky se protínají právě ve stopníku.
- Body s kladnými kótami sklápíme do jedné poloroviny (určené přímkou, jejíž body sklápíme) a body se zápornými kótami sklápíme do poloroviny opačné.
- Promítací přímky jednotlivých bodů zůstávají po sklopení kolmé k průmětu přímky.



Obrázek 23 – Sklopení promítací roviny přímky p v kótovaném promítání

Odchylka ω přímky *p* od průmětny je rovna odchylce *(p)* od p_1. Na obr. 23 vidíme také konstrukci určení odchylky ω přímky *p* od průmětny a skutečné velikosti úsečky CD v kótovaném promítání. Skutečná velikost úsečky CD je rovna vzdálenosti bodu (C) od bodu (D).

Příklad 2.3: V kótovaném promítání zobrazte přímky a=AB, b=CD a určete jejich stopníky. A=[0;0;3], B=[2;1;1], C=[-1;4;2], D=[-2;0;0].



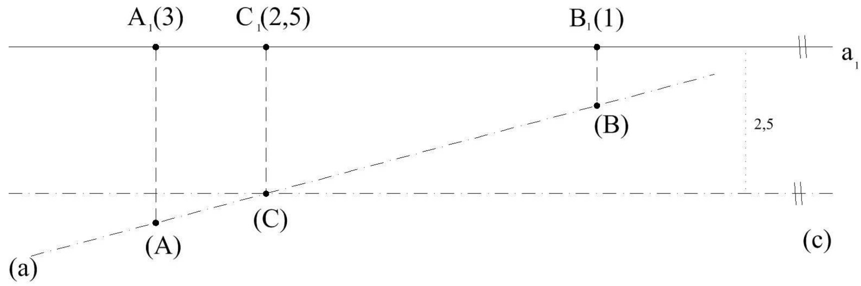
Obrázek 24 – Určování stopníků přímky v kótovaném promítání

Řešení: (Obr. 24) Sestrojíme průměty zadaných přímek a, b. Sklopené body A, B – body (A), (B) leží na přímkách kolmých k a_1 procházejících po řadě body A_1, B_1 (sklopené promítací přímky bodů A, B). Body A, B mají oba kladnou kótu, proto oba sklápíme do téže poloroviny. Délka úsečky A_1(A) je rovna kótě bodu A, $|B_1(B)| = z_B$. Sklopená přímka *(a)* je určena body (A), (B). Průsečík přímek a_1, a je hledaný stopník P přímky a.

Na přímce b je dán bod D, jehož kóta je rovna 0, tedy bod D je stopníkem přímky b.

Příklad 2.4: V kótovaném promítání narýsujte přímky k=KL, m=MN, r=QR a určete jejich stopníky. K=[1;1;1], L=[3;3;-2], M=[-2;-2;4], N=[0;0;0], Q=[7;6;2], R=[5;-4;-1].

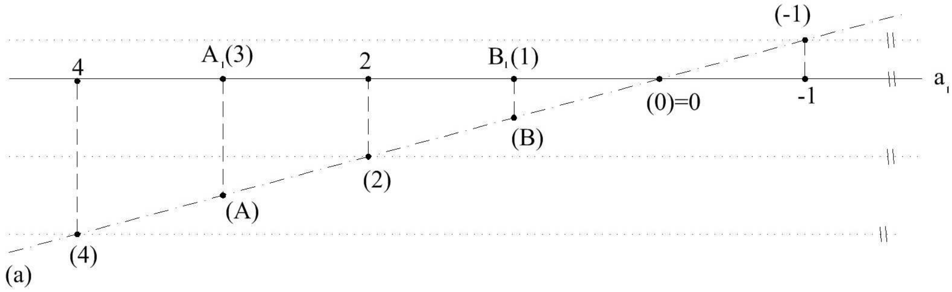
<u>Příklad 2.5:</u> V kótovaném promítání najděte bod C přímky a=AB, o kótě 2,5.



Obrázek 25 – Hledání bodu dané kóty na dané přímce

<u>Řešení:</u> (Obr. 25) Sklopíme promítací rovinu přímky a do průmětny. Všechny body této roviny jejichž kóta je 2,5 leží na přímce, ozn. *(c)*, která je rovnoběžná s a_1 a jejíž vzdálenost od přímky a_1 je rovna 2,5. Přímka *(c)* leží v kladné (jelikož kóta hledaného bodu je kladné číslo) polorovině určené přímkou a_1. Protože bod C leží i na přímce a, sklopený bod (C) je průsečíkem přímek *(c)* a *(a)*. Průmět bodu C – bod C_1 je patou kolmice vedené k přímce a_1 z bodu (C).

Této konstrukce se užívá zejména k nalezení bodů dané přímky o celočíselných kótách a nazývá se <u>stupňování přímky</u>. Máme-li za úkol vystupňovat přímku, obvykle stačí najít dva až tři různé body, jejichž kóty jsou po sobě jdoucí celá čísla.



Obrázek 26 - Vystupňování přímky a z příkladu 2.5

<u>Příklad 2.6:</u> V kótovaném promítání na přímkách k=KL, m=MN, r=QR najděte body A∈ k, B∈ m, C∈ r tak, aby kóta bodu A byla 1,8, kóta bodu B byla 1,5 a kóta bodu C byla 2,2. Přímky vystupňujte. K=[1;1;1], L=[3;3;-2], M=[-2;-2;4], N=[0;0;0], Q=[7;6;2], R=[5;-4;-1].

2.3 Zobrazení roviny

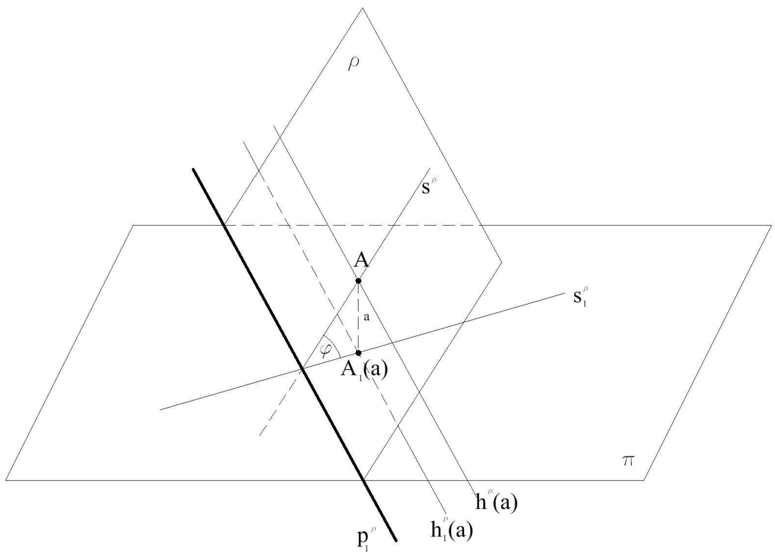
S dvěma případy zobrazení roviny jsme se již v textu setkali. Prvním byla promítací rovina, jejímž průmětem je přímka. Všechny prvky této roviny se mám zobrazí jako body, přímky nebo úsečky a všechny konstrukce řešíme pomocí sklápění.

Druhým již známým případem je rovina, která je rovnoběžná s průmětnou (tedy nemá s průmětnou žádný společný bod). Průmětem takové roviny je celá průmětna a veškeré útvary této roviny se zobrazí ve skutečné velikosti.Všechny body této roviny mají stejnou kótu. Rovině, která je rovnoběžná s průmětnou, se říká hlavní rovina.

Pro nás zatím neznámým případem je rovina, která není promítací a je různoběžná s průmětnou - rovina obecná. Průsečnici obecné roviny s průmětnou nazýváme stopa roviny. Značíme ji z pravidla p_1^ρ, kde ρ je označení roviny, a její kóta je rovna nule. Průmětem obecné roviny je celá průmětna.

Další významnou přímkou roviny je hlavní přímka, ozn. $h_1^\rho(a)$. Hlavní přímka je taková přímka roviny, která je rovnoběžná s průmětnou (nemá stopník). Nalezneme ji jako průsečnici obecné roviny s hlavní rovinou. Je tedy rovnoběžná se stopou roviny a číslo *a* udává kótu všech bodů, které na ní leží.

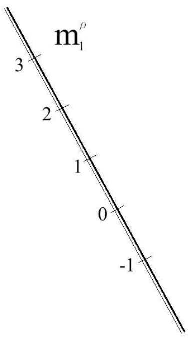
Poslední významnou přímkou roviny je spádová přímka, ozn. s_1^ρ . Spádová přímka je kolmá na stopu (tedy i na všechny hlavní přímky) roviny. Jejím sklopením získáme skutečnou odchylku roviny od průmětny.



Obrázek 27 – Hlavní a spádová přímka roviny

Spádových přímek je, stejně jako hlavních, v každé rovině nekonečně mnoho.

Spádové měřítko roviny ρ je její libovolná vystupňovaná spádová přímka. Bodem o kótě 0 vedeme kolmo k vystupňované přímce stopu roviny a dalšími body rovnoběžně se stopou hlavní přímky. Vzdálenost dvou bodů, jejichž kóty jsou po sobě jdoucí celá čísla, se nazývá <u>interval</u>.



Obrázek 28 - Spádové měřítko roviny ρ

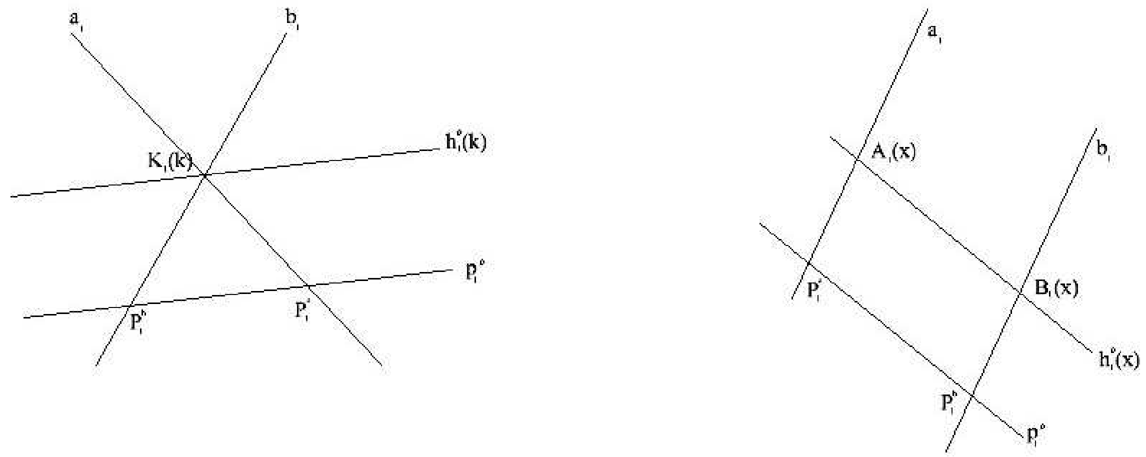
<u>Rovina může být zadána několika způsoby:</u>

a) dvěma rovnoběžnými nebo různoběžnými přímkami,
b) přímkou a bodem, který na ní neleží,
c) třemi nekolineárními body,
d) pomocí souřadnic.

Konstrukce roviny ze zadaných prvků:

Ad a) Rovina je zadána dvěma různoběžnými (Obr. 29a) nebo rovnoběžnými (Obr. 29b) přímkami *a, b*.

Najdeme jejich stopníky (užitím sklápění) a, jak už víme, spojnice těchto bodů je stopa roviny. Pro úplnost můžeme vést libovolným bodem některé z přímek rovnoběžku se stopou, tedy hlavní přímku roviny.



Obrázek 29 - Rovina daná dvěma různoběžkami (a), rovnoběžkami (b)

Ad b) Rovina určená přímkou a bodem.

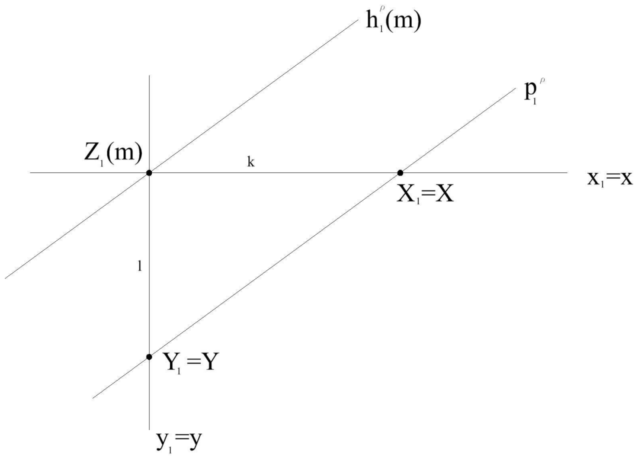
Bodem vedeme přímku rovnoběžnou nebo různoběžnou se zadanou přímkou a dále postupujeme dle bodu a).

Ad c) Rovina je zadaná třemi nekolineárními body.

Tři nekolineární body určují tři navzájem různoběžné přímky nebo tři různé dvojice rovnoběžek. Zvolíme některé dvě přímky a dál postupujeme stejně jako v případě a).

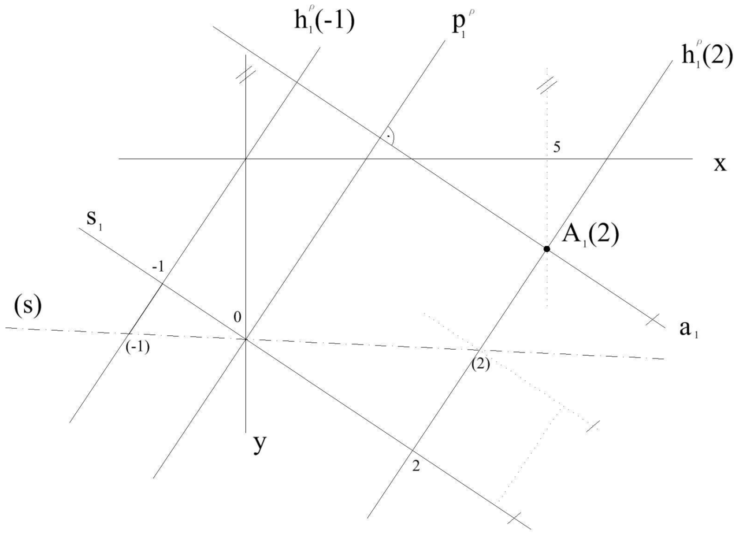
Ad d) Mějme takovéto zadání: ρ=(*k,l,m*), kde *k,l,m* jsou reálná čísla.

Postup řešení: (obr. 30) Zvolíme vhodnou soustavu souřadnic. Označíme po řadě X, Y, Z průsečíky roviny ρ s osami *x, y, z*, pak souřadnice těchto bodů jsou X=[*k*,0,0], Y=[0,*l*,0], Z=[0,0,*m*]. Rovina ρ je tedy dána body X, Y, Z a dál postupujeme stejně jako v případě c).



Obrázek 30 - Zobrazení roviny dané souřadnicemi

Příklad 2.7: V kótovaném promítání sestrojte rovinu ρ=(2;3;-1) a jejím bodem A=[3;?;2] veďte hlavní a spádovou přímku roviny ρ.

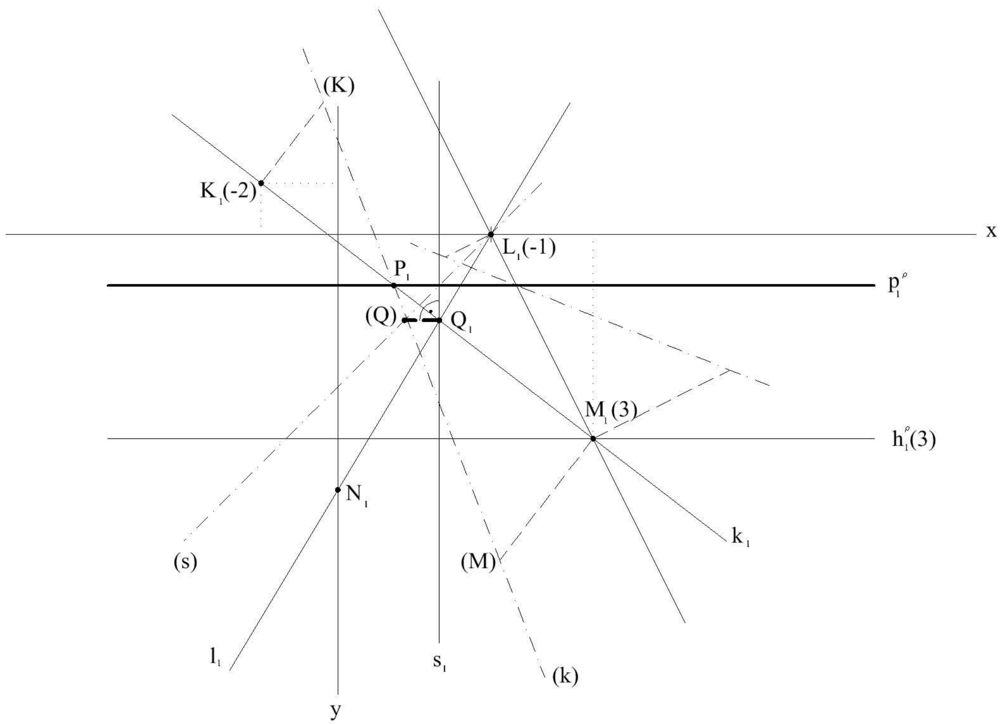


Obrázek 31 - Bod v rovině

Řešení: (Obr. 31) Sestrojíme průmět roviny ρ dle obr. 29. Protože bod A leží v rovině ρ, prochází jím hlavní přímka této roviny, jejíž kóta je rovna kótě bodu A. Abychom sestrojili průmět hlavní přímky roviny ρ o kótě 2 - $h_1^\rho(2)$, musíme zvolit libovolnou spádovou přímku *s* roviny ρ, určit její průmět s_1 a ten vystupňovat. Průmětem bodu přímky *s*, jehož kóta je rovna 2 (v obrázku označen číslicí 2), prochází rovnoběžně se stopou roviny průmět hledané hlavní přímky $h_1^\rho(2)$. Průmět bodu A leží na přímce $h_1^\rho(2)$ a na přímce rovnoběžné s osou *y*, jejíž vzdálenost od osy *y* je rovna 3 (x-ová souřadnice bodu A je rovna 3). Určíme-li tedy průsečík těchto dvou přímek, nalezneme bod A_1.

Zbývá sestrojit bodem A spádovou přímku *a*. Průmět každé spádové přímky roviny je kolmý ke stopě roviny, proto přímku a_1 sestrojíme jako kolmici k p_1 bodem A_1.

__Příklad 2.8:__ V kótovaném promítání určete kótu průsečíku Q dvou různoběžek *k*=KM, *l*=LN. K=[-2;-1;-2], L=[3;0;-1], M=[5;4;3], N=[0;5;?].



Obrázek 32 - K příkladu 2.8

__Řešení:__ (Obr. 32) Přímky *k, l* jsou různoběžné a určují rovinu ρ. Sestrojíme průměty zadaných přímek *k, l*, průmět jejich průsečíku Q a sklopenou přímku *k* (sklopenou přímku *l* zatím sestrojit nelze, protože neznáme kótu bodu N). Průmět stopníku P přímky *k* je průsečíkem *(k)* a k_1. Abychom sestrojili stopu p_1 roviny ρ, je třeba určit stopník některé z dalších přímek roviny – na obrázku stopník přímky LM. Libovolným bodem vedeme hlavní přímku roviny ρ – např. bodem M_1 přímku $h_1^\rho(3)$. Dále sestrojíme průmět spádové přímky s roviny ρ, která prochází bodem Q, a přímku s_1 vystupňujeme. Hledaná kóta je rovna vzdálenosti bodů Q_1(Q), kde (Q) je průsečík sklopené promítací přímky bodu Q (tedy kolmice z Q_1 k přímce s_1) se sklopenou přímkou s.

Tuto úlohu lze řešit také sklopením promítací roviny přímky k dle příkladu 2.5.

Příklad 2.9: V kótovaném promítání sestrojte rovinu ρ=(-3;3;2) a určete kótu bodu A=[5;1;?], který leží v rovině ρ.

Příklad 2.10: V kótovaném promítání sestrojte bodem D hlavní a spádovou přímku roviny, která je určena body A,B,C. A=[-2;3;0], B=[4;-1;-1], C=[5;4;3], D=[0;0;?].

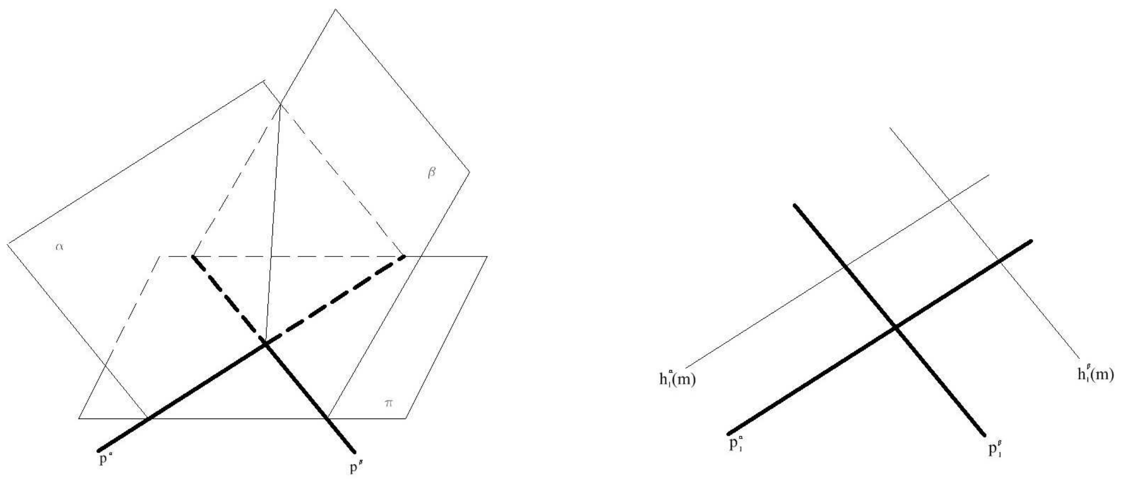
2.4 Vzájemná poloha dvou rovin

V předchozí části jsme si ukázali vzájemnou polohu roviny a průmětny, zde se budeme zabývat vzájemnou polohou dvou rovin, z nichž žádná není průmětnou. Dvě roviny jsou buď rovnoběžné, nebo různoběžné. V kótovaném promítání určujeme vzájemnou polohu dvou rovin z polohy jejich stop a průmětů dvou hlavních přímek o téže kótě.

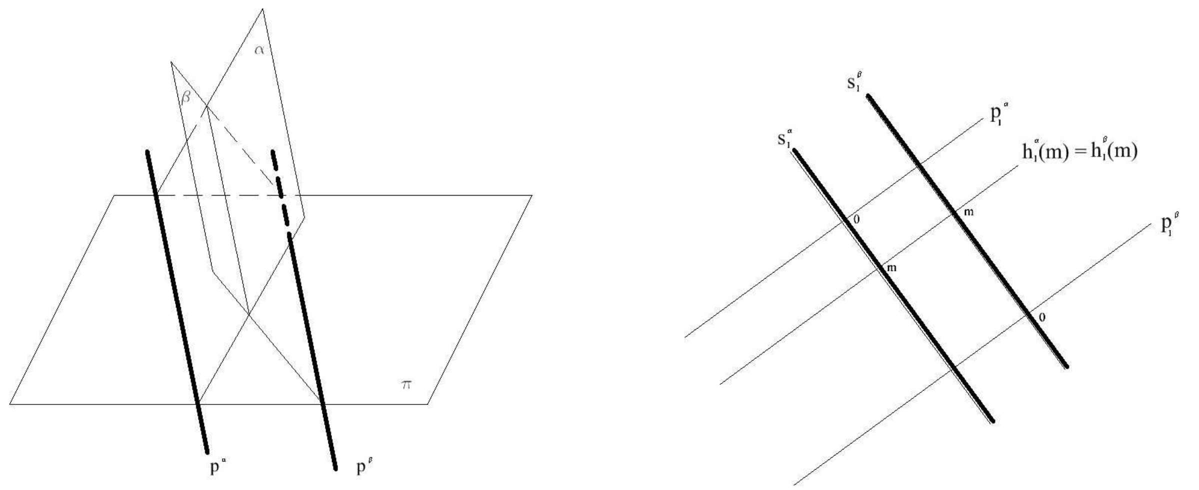
Jestliže jsou dvě roviny a, b různoběžné, jejich stopy jsou různoběžné přímky (Obr. 33) nebo rovnoběžné přímky (Obr. 34). V takovém případě existuje hlavní přímka, která náleží oběma rovinám.

Roviny a, b jsou rovnoběžné (Obr.35), jestliže jsou jejich stopy rovnoběžné přímky a neexistuje žádná hlavní přímka společná oběma rovinám.

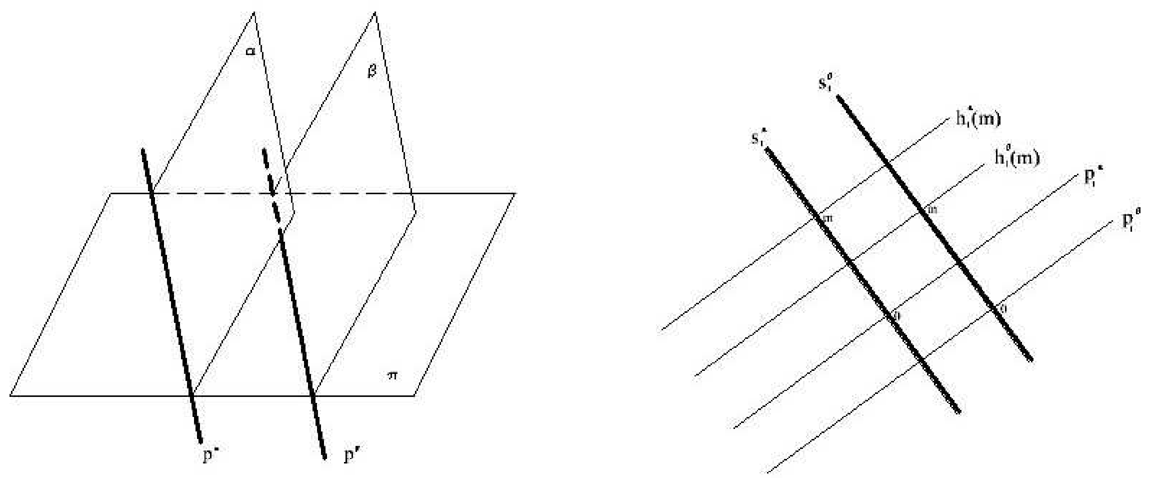
Jsou-li roviny určeny spádovými měřítky, jsou rovnoběžné, právě když mají obě měřítka stejný interval a orientaci. Ve všech ostatních případech jsou roviny různoběžné.



Obrázek 33 - Dvě různoběžné roviny, jejichž stopy jsou různoběžné přímky

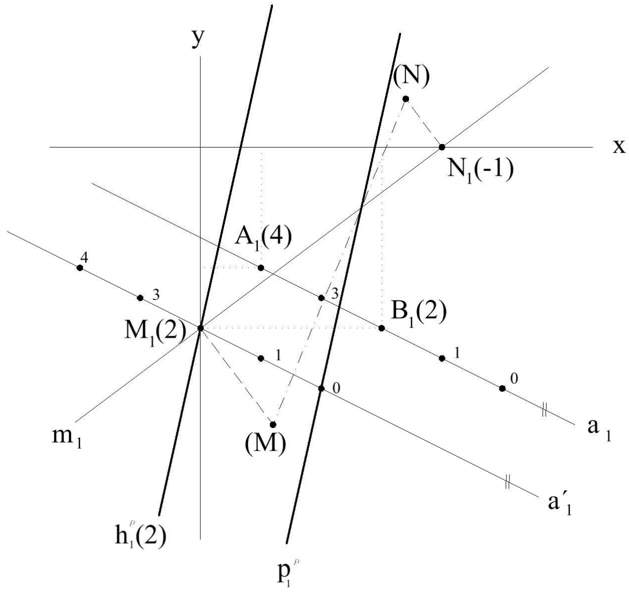


Obrázek 34- Dvě různoběžné roviny, jejichž stopy jsou rovnoběžné přímky



Obrázek 35 - Rovnoběžné roviny a jejich průmět v kótovaném promítání

<u>Příklad 2.11:</u> V kótovaném promítání přímkou m=MN proložte rovinu ρ rovnoběžnou s přímkou a=AB. A=[1;2;4], B=[3;3;2], M=[0;3;2], N=[4;0;-1].

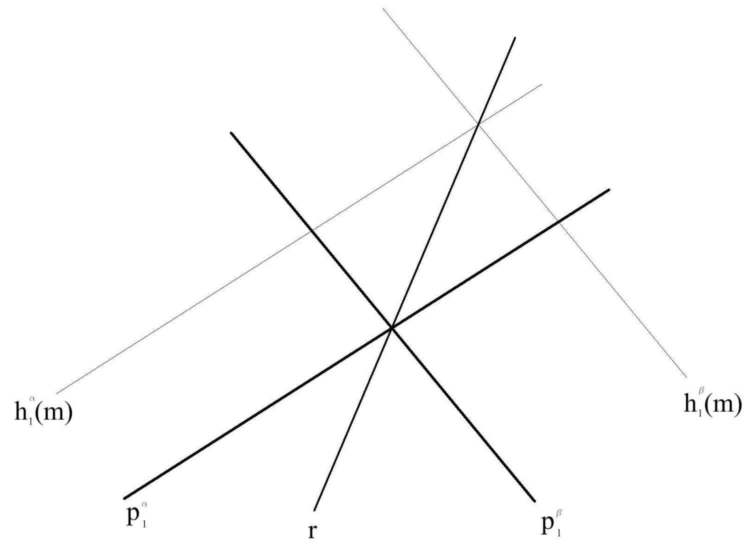


Obrázek 36 – K příkladu 2.11

<u>Řešení:</u> (Obr. 36) Ze stereometrie víme, že je-li přímka rovnoběžná s některou přímkou roviny, pak je s touto rovinou rovnoběžná. Některým bodem přímky m tedy vedeme rovnoběžku $a´$ s přímkou a a tuto vystupňujeme (v tomto příkladu využijeme bodu M). Hledaná rovina ρ je přímkami m, $a´$ určena.

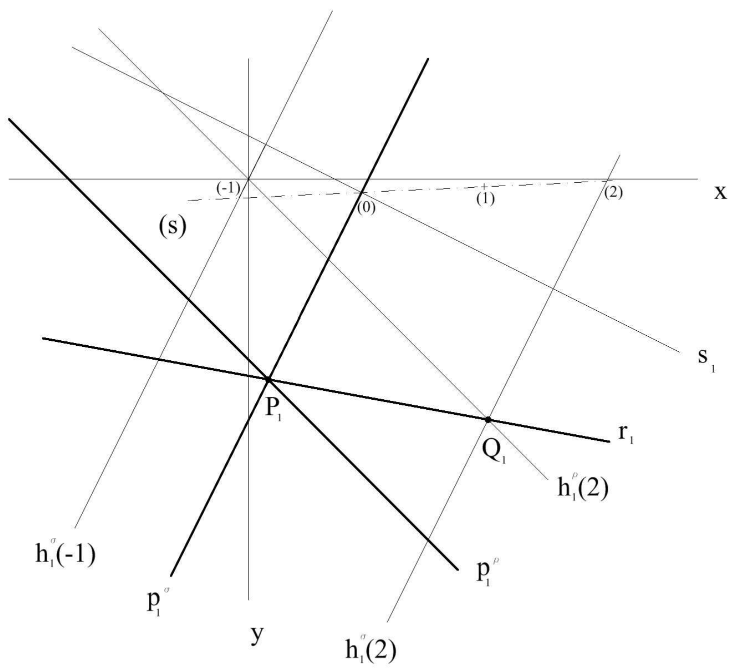
K sestrojení <u>průsečnice</u> r dvou různoběžných rovin (Obr. 37) je třeba určit alespoň dva její body. Víme, že průsečnice leží v obou rovinách, takže musí mít stopník na stopě každé z rovin – tedy v průsečíku těchto stop získáme první bod průsečnice. Druhý najdeme v průsečíku dvojice hlavních přímek stejné kóty obou rovin. Pokud nelze nalézt stopy např. z důvodu nedostatku místa, určíme průsečnici pomocí dvou průsečíků hlavních přímek.

Jestliže jsou stopy dvou různoběžných rovin α, β rovnoběžné, jejich průsečnicí je hlavní přímka h, která náleží oběma rovinám (Obr. 34). Průsečnici h sestrojíme tak, že obě roviny α, β protneme rovinou λ, která není kolmá k průmětně, a jejíž stopa je se stopami obou rovin různoběžná. Určíme průsečnice q, r rovin α, β s rovinou λ a hledaná průsečnice h prochází průsečíkem přímek q, r (a je rovnoběžná se stopami rovin α, β).



Obrázek 37 - Průsečnice dvou rovin

<u>Příklad 2.12:</u> V kótovaném promítání sestrojte průsečnici *r* rovin ρ=(-3;3;2), σ=(2;4;-1).



Obrázek 38 - Průsečnice dvou rovin v kótovaném promítání

<u>Řešení:</u> (Obr. 38) Sestrojíme roviny ρ, σ dle zadání. Prvním bodem průsečnice *r* je průsečík P stop rovin ρ, σ. Abychom našli nějaký druhý bod průsečnice, najdeme v obou rovinách hlavní přímky o stejné kótě. Pro zjednodušení konstrukcí zvolíme jednu hlavní přímku, jejíž průmět máme zadán, a sestrojíme průmět hlavní přímky druhé roviny o stejné kótě

(vystupňujeme spádovou přímku, nalezneme na ní bod o příslušné kótě a jím vedeme hledanou hlavní přímku) a určíme jejich průsečík Q. Hledaná průsečnice *r* je dána body P,Q.

Příklad 2.13: V kótovaném promítání sestrojte průsečnici dvou rovin ρ, σ. ρ=ABC, σ=DEF. A=[-2;3;0], B=[4;-1;-1], C=[5;4;3], D=[0;0;0], E=[3;3;0], F=[5;2;2].

2.5 Průsečík přímky s rovinou

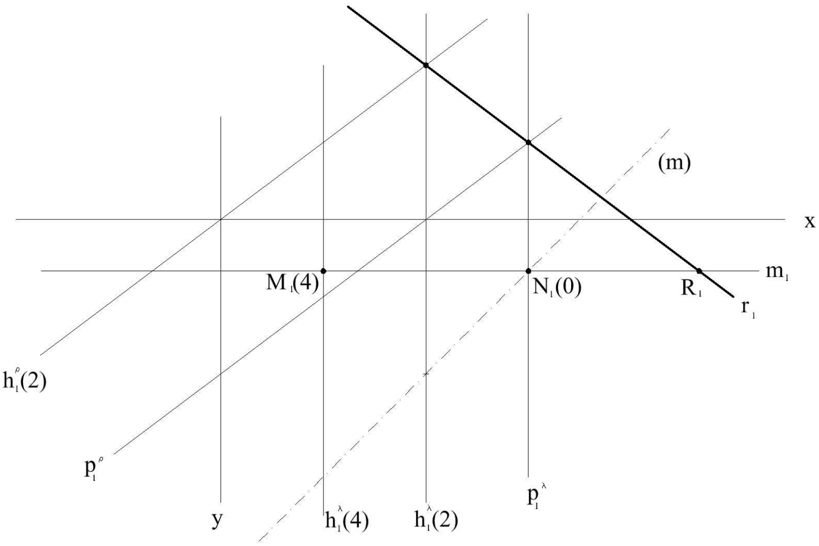
Při řešení úloh (např. o tělesech) budeme často potřebovat nalézt průsečík R přímky *p* s rovinou ρ.

Postup konstrukce rozložme do tří základních kroků:

1. přímkou proložíme libovolnou pomocnou rovinu,
2. najdeme průsečnici pomocné roviny se zadanou rovinou,
3. průsečík průsečnice se zadanou přímkou je hledaný bod.

Nejprve si přímkou *p* proložíme libovolnou rovinu λ. Roviny λ a ρ jsou vždy různoběžné, protože mají alespoň jeden společný bod – hledaný průsečík R, a můžeme najít jejich průsečnici *r*. Protože víme, že bod R leží na průsečnici rovin λ a ρ a na přímce *p*, tak stačí nalézt jejich průsečík.

Příklad 2.14: V kótovaném promítání sestrojte průsečík R roviny ρ=(4;3;2) s přímkou *m*=MN, M=[2;2;4], N=[6;2;0].



Obrázek 39 - Průsečík přímky s rovinou

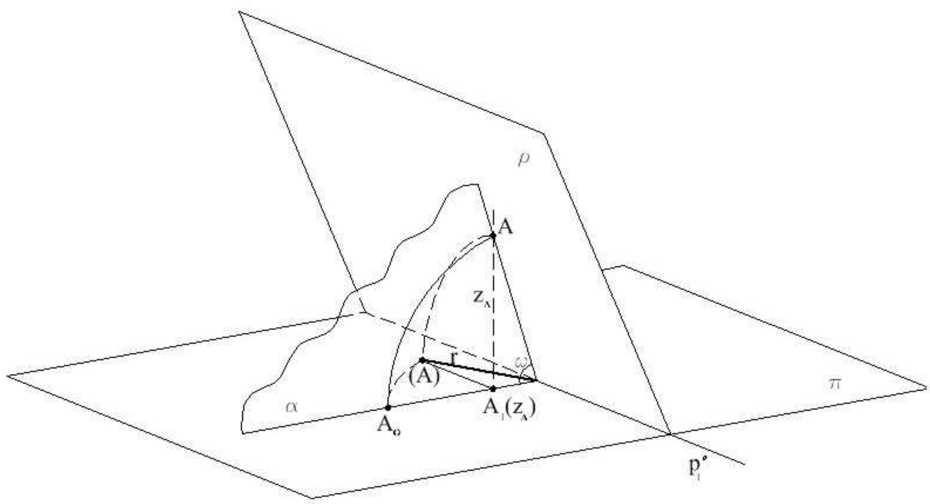
Řešení: (Obr. 39) Přímkou *m* proložíme rovinu λ tak, že přímka *m* je její spádovou přímkou (obdobně jako u příkladu 2.12). Určíme průsečnici *r* rovin λ a ρ. Hledaný bod R je průsečíkem průsečnice *r* s přímkou *m*.

Příklad 2.15: V kótovaném promítání sestrojte průsečík R roviny ρ=KLM s přímkou *a*=AB, A=[1;0;3], B=[4;3;-1], K=[1;1;-1], L=[2;3;2], M=[4;2;1].

2.6 Otáčení roviny

Máme dánu průmětnu a obecnou rovinu ρ. Z předchozích kapitol víme, že promítneme-li obecnou rovinu do průmětny, útvary roviny se nezobrazí ve skutečných velikostech. Chceme-li zobrazit daný útvar této roviny ve skutečné velikosti, je třeba rovinu otočit kolem její stopy (Obr. 40) do průmětny (nebo do roviny rovnoběžné s průmětnou).

Útvar v dané rovině a otočený útvar si odpovídají v prostorové afinitě, jejíž osou je průsečnice dané roviny a roviny, do které otáčíme (tedy stopa nebo hlavní přímka). Směr afinity je dán spojnicí bodu a otočeného bodu. Zobrazením v kótovaném promítání získáme afinitu v rovině, osa afinity je stopa roviny (nebo průmět hlavní přímky), směr afinity je určen průmětem bodu a otočeným bodem.



Obrázek 40- Otáčení roviny do průmětny

α ... rovina otáčení

r ... poloměr otáčení

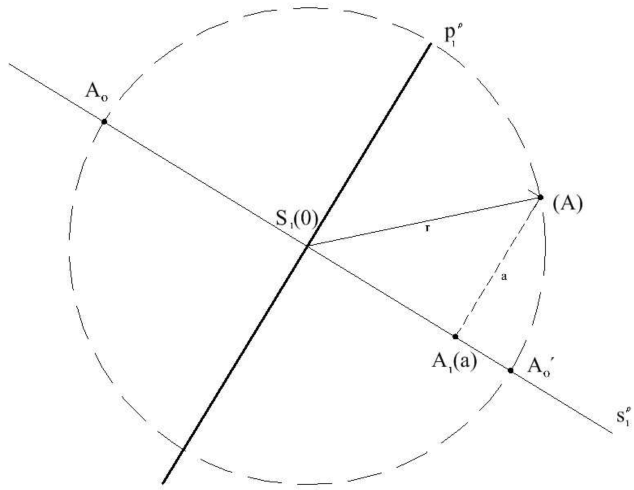
ω ... úhel otočení

(A) ... sklopený průmět bodu A

A_0 ... otočený průmět bodu A

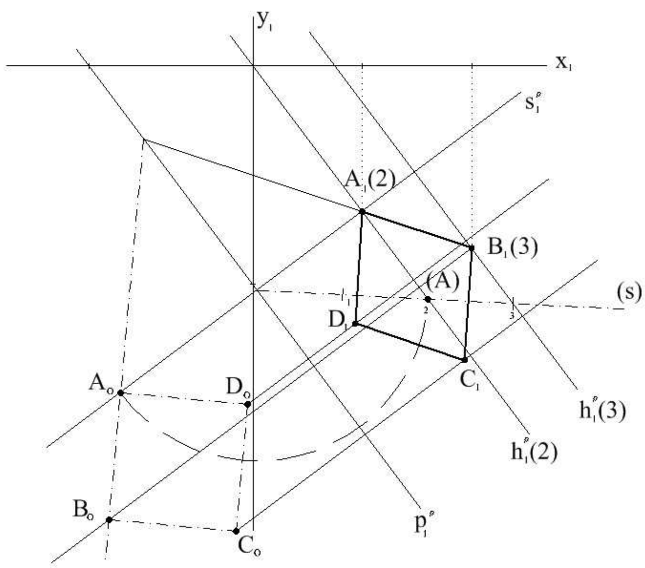
Konstrukce otáčení roviny v kótovaném promítání (Obr. 41):

Průmětem bodu A∈ ρ – tedy bodem $A_1(a)$ – prochází průmět spádové s přímky roviny ρ, kterou proložíme promítací rovinu α (α je kolmá k ose otáčení). Stopník spádové přímky *s* je střed otočení bodu A - $S_1(0)$. Poloměr *r* otočení bodu A je roven vzdálenosti bodu A od středu S. Sklopíme-li promítací rovinu α přímky AS (spádové přímky s roviny ρ), získáme skutečnou délku úsečky AS a tedy i poloměr otáčení *r*. Otočený bod A, tedy A_0 , A_0', leží na průmětu přímky *s* ve vzdálenost *r* od průmětu středu otáčení $S_1(0)$.



Obrázek 41 - Konstrukce otočení bodu A v kótovaném promítání

<u>Příklad 2.16:</u> V kótovaném promítání sestrojte v rovině ρ čtverec ABCD, znáte-li jeho dva sousední vrcholy. ρ=(-3;4;2), A=[2;?;2], B=[4;?;3].



Obrázek 42 - Sestrojení čtverce v obecné rovině

Řešení: (Obr. 42) Pomocí hlavních přímek najdeme průměty bodů A, B (dle příkladu 2.7). Najdeme spádové přímky roviny ρ, které body A, B prochází, a ty sklopíme. Stopník každé spádové přímky je středem otáčení příslušného bodu. Poloměr otáčení je, jak už víme, vzdálenost středu otáčení od sklopeného průmětu daného bodu. Otočíme tedy průměty bodů A, B a získáme jejich otočené průměty, tedy body A_0, B_0.

Nyní můžeme sestrojit čtverec $A_0B_0C_0D_0$ (na obrázku je pro přehlednost sestrojeno jen jedno ze dvou možných řešení).

K získání kótovaných průmětů bodů C,D – tedy C_1, D_1 využijeme osové afinity, která je dána osou p_1^ρ a dvojicí odpovídajících si bodů A_1 A_0. Body C_1, D_1 leží na přímkách, které jsou rovnoběžné s přímkou A_1 A_0 (směr afinity). Dále víme, že odpovídající si přímky se protínají na ose afinity, tedy přímce A_0D_0 odpovídá přímka A_1D_1. Označme 1 bod, v němž se A_0D_0 protíná se stopou roviny ρ. Bod D_1 leží na průsečíku přímky $A_1$1 s přímkou směru afinity procházející bodem D_0. Stejným postupem sestrojíme zbývající bod C_1.

Příklad 2.17: V kótovaném promítání sestrojte v rovině ρ rovnoramenný trojúhelník KLM, znáte-li jeho dva vrcholy. ρ=(4;5;-3), K=[5;?;3], L=[7;2,5;?].

Příklad 2.18: V kótovaném promítání sestrojte v rovině α pravidelný 6-úhelník ABCDEF, znáte-li jeho vrchol A a střed S. α=(1;2;-1), A=[2;1;?], S=[3;?;3].

Příklad 2.19: V kótovaném promítání určete odchylku přímek *a,b*, jestliže *a*=AB a *b*=AC. A=[2;1;1], B=[3;-2;3], C=[5;4;4].

Příklad 2.20: V kótovaném promítání sestrojte čtverec ABCD, znáte-li bod B a víte, že úhlopříčka čtverce leží na přímce *t*=TU. B=[-3;1;1], T=[-1;2;0], U=[-6;7;2].

Příklad 2.21: V kótovaném promítání sestrojte střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, znáte-li jeho vrcholy. A=[3;-4;5], B=[1;0;1], C=[2;-3;1].

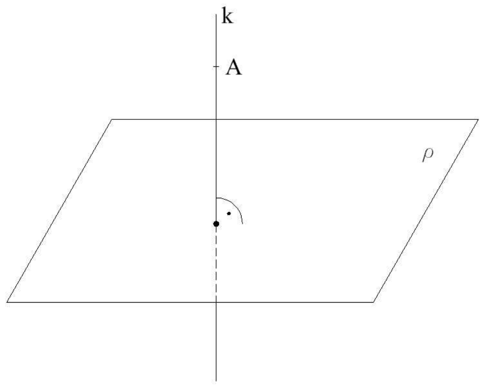
2.7 Přímka kolmá k rovině, rovina kolmá k přímce

V této kapitole si ukážeme konstrukce, které jsou nezbytné pro rýsování těles.

- Přímka kolmá k rovině (Obr. 43):

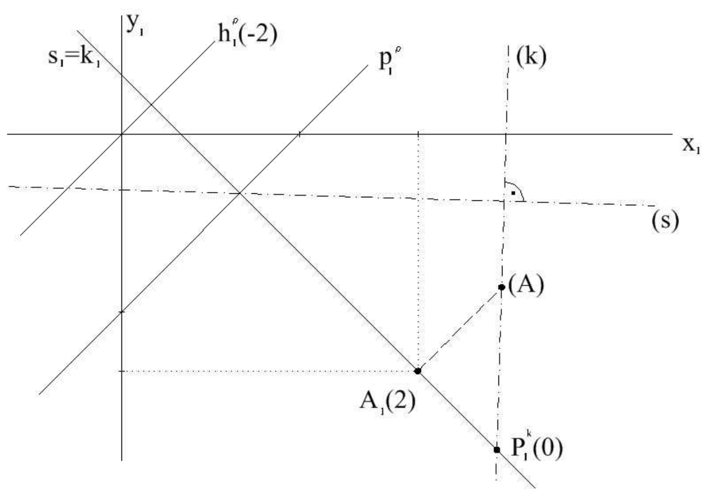
Ze stereometrie víme, že tato úloha má vždy právě jedno řešení. Na příkladě 2.22 si ukážeme, jak tuto konstrukci provést v kótovaném promítání. Budeme přitom využívat následující tvrzení platné pro přímky a roviny, které nejsou hlavní ani promítací.

Průmět přímky kolmé k rovině je kolmý na průměty jejích hlavních přímek (tedy rovnoběžný s průměty jejích spádových přímek).



Obrázek 43 - Přímka kolmá k rovině

<u>Příklad 2.22:</u> Daným bodem A veďte přímku *k* kolmou k rovině ρ. A=[5;4;2], ρ=(3;3;-2).



Obrázek 44 - Přímka kolmá k rovině v kótovaném promítání

Řešení: (Obr. 44) Průmět kolmice *k* bude procházet průmětem bodu A a bude kolmý na stopu roviny ρ (vyplývá z tvrzení uvedeného výše). Sice jsme našli průmět hledané kolmice *k*, ale přímka *k* jím není jednoznačně určena, na přímce *k* známe jen jediný bod – A). Následující konstrukcí tedy určíme průmět některého dalšího bodu přímky *k*.

Víme, že přímky kolmé ke stopě roviny jsou spádové přímky. Hledaná kolmice k rovině a spádová přímka *s* roviny ρ procházející patou této kolmice leží v téže promítací rovině, takže průmět hledané kolmice splyne s průmětem spádové přímky. Průmět kolmice i průmět spádové přímky *s*, kterou ke konstrukci využijeme, prochází průmětem bodu A.

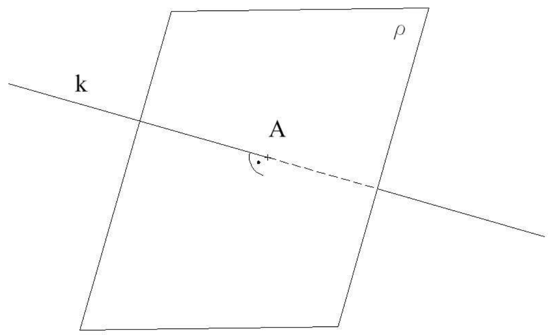
Sklopíme promítací rovinu přímek *s, k* (a bod A) a sestrojíme sklopený průmět kolmice *k* (prochází sklopeným průmětem A a je kolmý na sklopený průmět *s*). Nyní zbývá určit nějaký další bod přímky *k*, aby tato byla jednoznačně určena. V našem případě je nejjednodušší najít její stopník P (jeho průmět P_1 je průsečíkem přímky *(k)* s přímkou k_1).

Příklad 2.23: Daným bodem Q veďte přímku *k* kolmou k rovině ρ. Q=[2;1;4], ρ=(-2;2;3).

Příklad 2.24: Daným bodem M veďte přímku *k* kolmou k rovině ρ=ABC. A=[0;0;-2], B=[4;2;1], C=[0;3;0], M=[1;1;3].

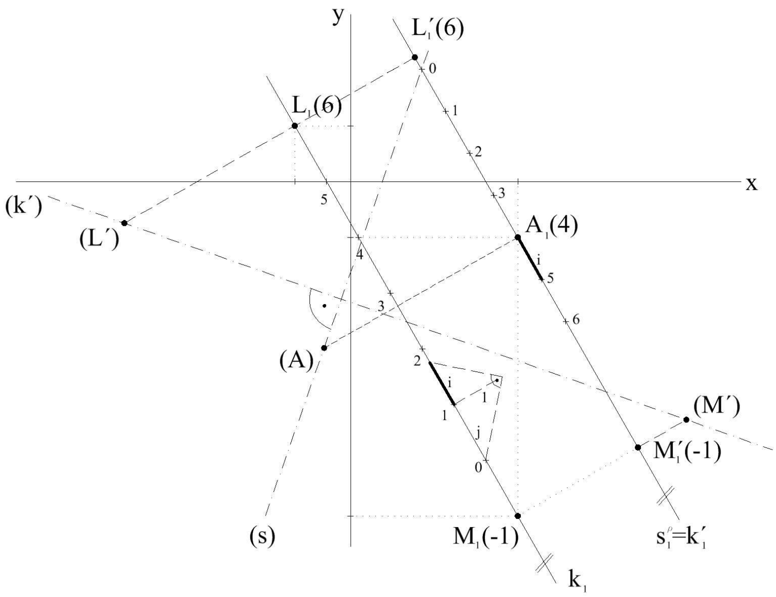
- Rovina kolmá k přímce (Obr. 45):

Ze stereometrie víme, že tato úloha má vždy právě jedno řešení. Na příkladě 2.25 si ukážeme, jak tuto konstrukci provést v kótovaném promítání. Budeme přitom využívat tvrzení vyslovené v odstavci o přímce kolmé k rovině.



Obrázek 45 - Rovina kolmá k přímce

Příklad 2.25: Daným bodem A veďte rovinu kolmou k přímce *k*=LM. A=[3;1;4], L=[-1;-1;6], M=[3;6;-1].



Obrázek 46 - Rovina kolmá k přímce v kótovaném promítání

Řešení: (Obr. 46) Průmět spádové přímky *s* hledané roviny bude procházet průmětem bodu A a bude rovnoběžný s průmětem přímky *k* (vyplývá z tvrzení uvedeného výše).

Sestrojíme přímku *k′*, která je rovnoběžná s *k* a jejíž průmět splývá s průmětem přímky *s*. Sklopíme promítací rovinu přímek *k′, s*, sestrojíme stopník přímky *s* a tuto můžeme vystupňovat.

Mnohem častěji však využíváme jiné konstrukce, která je důsledkem konstrukce právě popsané. Vystupňujeme přímku *k* a určíme délku průmětu jednotky spádové přímky *s* – interval *i*. Označme *j* délku jednotky přímky *k*. Protože přímka *k* je kolmá k hledané rovině, platí pro intervaly *i, j* vztah *i.j*=1. Užitím Euklidovy věty o výšce sestrojíme hledaný interval *i* přímky *s* a tuto vystupňujeme (kóta bodu A je dána, průměty dalších bodů o celočíselných kótách leží ve vzdálenosti *i* od A_1).

Získali jsme spádové měřítko *s*, jímž je hledaná rovina jednoznačně určena.

Příklad 2.26: Daným bodem Q veďte rovinu ρ kolmou k přímce *k*=AB. Q=[4;0;3], A=[2;3;2], B=[1;1;-1].

Příklad 2.27: Daným bodem M veďte rovinu kolmou k přímce *s*=ST. M=[4;5;1], S=[0;5;-2], T=[4;0;3].

2.8 Zobrazení těles

V této kapitole si ukážeme, jak narýsovat průmět libovolného hranolu či jehlanu. Všechny potřebné konstrukce známe z předchozích kapitol, vysvětlíme si jen určování viditelnosti hran tělesa.

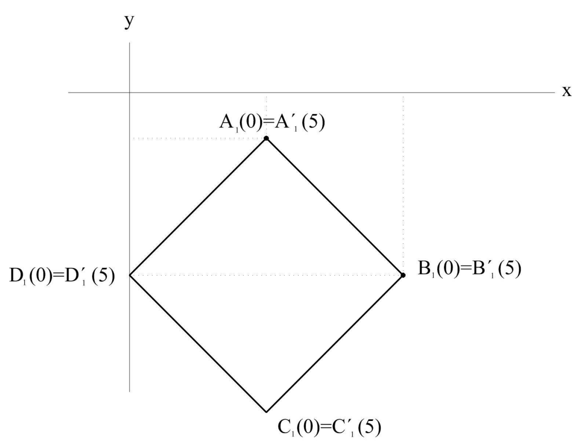
Podíváme-li se například na nějaký dům, vidíme na něm jen některé hrany, i když víme, že jich má více. Umíme si přesně představit jejich polohu, směr a velikost.

Stejně tak, zobrazíme-li těleso v kótovaném promítání, je jasné, že neuvidíme všechny jeho hrany. Jako se na dům díváme z protějšího chodníku, tak tělesa v kótovaném promítání zobrazujeme tak, jako bychom se na ně dívali shora. Uvidíme celý vnější obrys a ty hrany, které jsou nám blíže, tedy ty s vyšší kótou.

Konkrétněji si viditelnost vysvětlíme na příkladech.

Viditelné hrany rýsujeme plnou čarou, neviditelné čárkovaně.

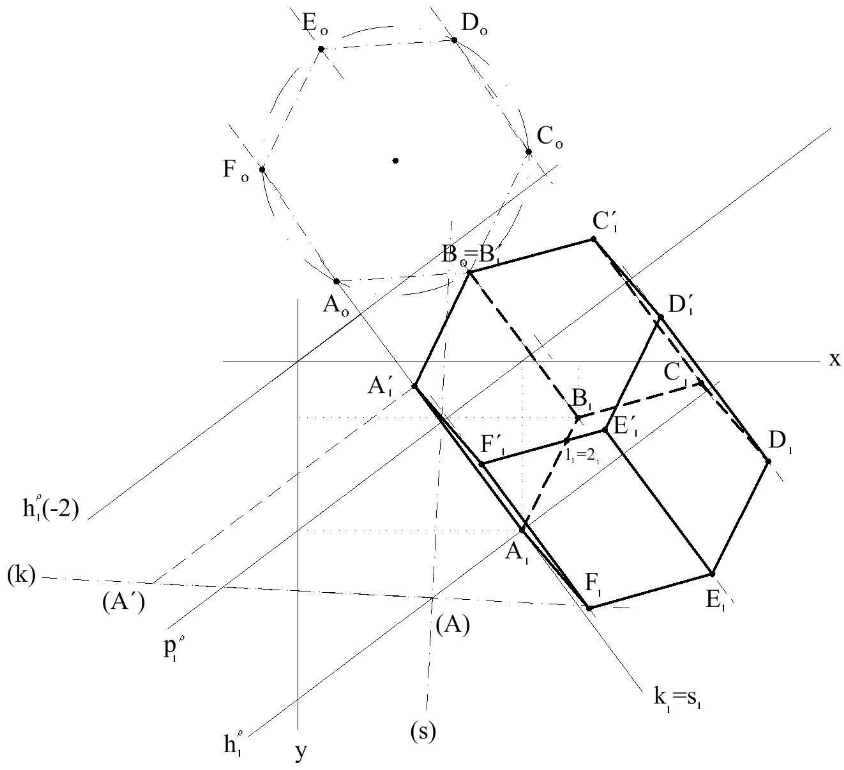
Příklad 2.28: V kótovaném promítání sestrojte průmět pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, který má podstavu v průmětně a výšku *v*=5. A=[3;1;0], B=[6;4;0].



Obrázek 47 - Průmět pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavou v půdorysně

Řešení: (Obr. 47) Spodní podstava hranolu leží v průmětně, tedy podstava (čtverec) ABCD se zobrazí ve skutečné velikosti na čtverec A_1 B_1 C_1 D_1. Dále hledáme přímky, na nichž leží boční hrany hranolu. Tyto přímky prochází body A, B, C, D a jsou kolmé k podstavě, tedy i k půdorysně, a jak už víme, zobrazí se jako body. Jejich průměty tedy splynou s průměty bodů A, B, C, D. Celý hranol se zobrazí jako čtverec, takže je vidět celá horní podstava a viditelnost ostatních hran neurčujeme.

Příklad 2.29: V kótovaném promítání sestrojte průmět pravidelného šestibokého hranolu ABCDEFA´B´C´D´E´F´, který má podstavu v rovině ρ dánu body A, B a výšku *v*=5. ρ=(4;3;-2), A=[4;3;?], B=[5;1;?] .

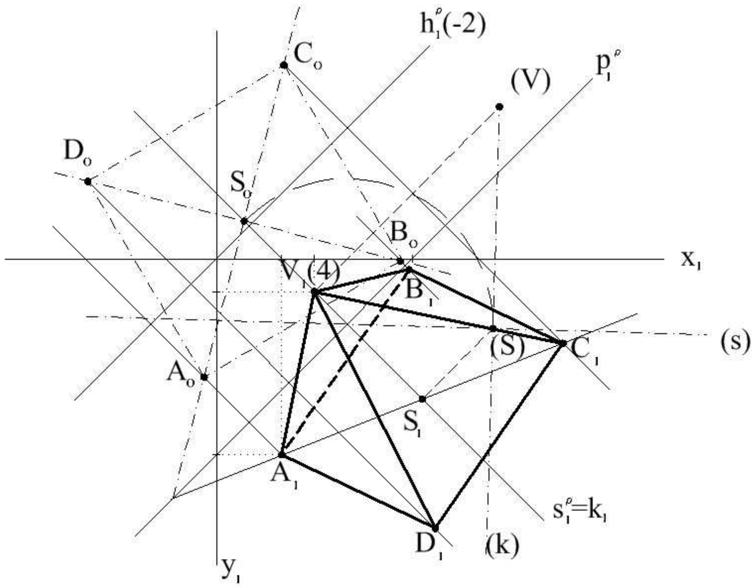


Obrázek 48 - Průmět pravidelného šestibokého hranolu

Řešení: (Obr. 48) Průmět podstavy (pravidelného šestiúhelníku) v rovině ρ sestrojíme otočením podle příkladu 2.11. Dále hledáme přímky, na nichž leží boční hrany hranolu. Tyto přímky prochází body A, B, C, D, E, F a jsou kolmé k rovině podstavy. K jejich určení využijeme dříve popsané konstrukce přímky kolmé k rovině. Průmět přímky *k*=AA´ splývá s průmětem spádové přímky *s*, protože obě leží v téže promítací rovině. Tuto rovinu sklopíme, na sklopeném průmětu přímky *k* nalezneme bod (A´) ve vzdálenosti *v* od bodu (A) a určíme průmět bodu A´. Kolmice k rovině podstavy, které procházejí všemi body podstavy, jsou navzájem rovnoběžné, takže průměty bodů B´ ... F´ nalezneme tak, že od bodu B_1 ... F_1 naneseme na kolmice ke stopě, které jimi prochází, vzdálenost rovnu $|A_1A_1'|$. Našli jsme průmět zadaného hranolu, zbývá jen určit viditelnost.

Viditelný je, jak už jsme si řekli, celý vnější obrys tělesa. Potom se zaměříme na hrany, jejichž průměty se protínají. Vezměme si například hrany E´F´ a AB a určeme na nich po řadě body po řadě 1, 2, jejichž průměty splývají (viz obr. 48). Bod 1 má menší kótu, než bod 2 (určíme sklopením dle příkladu 2.5), proto bude hrana E´F´ viditelná a AB neviditelná. Viditelnost dalších hran už stanovíme snadno s využitím prostorové představivosti nebo můžeme použít výše popsané úvahy.

<u>Příklad 2.30:</u> V kótovaném promítání sestrojte průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV, který má podstavu v rovině ρ. Dále známe bod A podstavy a vrchol V jehlanu. ρ =(3;3;-2), A=[1;3;?], V=[1,5;0,5;4] .



Obrázek 49 - Průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu

<u>Řešení:</u> (Obr. 49) Pravidelný čtyřboký jehlan má výšku na přímce *k* jdoucí bodem V a kolmé k rovině ρ podstavy (kolmici k rovině daným bodem sestrojíme dle příkladu 2.22). Pata této kolmice je středem S podstavy (bod S nalezneme jako průsečík kolmice *k* s rovinou ρ dle příkladu 2.14). Nyní v rovině ρ známe střed S a vrchol A podstavy, takže ji můžeme

s pomocí otočení sestrojit (dle příkladu 2.16). Sestrojili jsme zadaný jehlan, zbývá jen určit viditelnost.

Viditelný je opět celý vnější obrys tělesa. Další viditelné hrany určíme podle postupu z příkladu 2.29 (např. hrana DV bude viditelná, hrana AB nikoli). Viditelnost dalších hran stanovíme obdobnými úvahami nebo díky prostorové představivosti.

Příklad 2.31: V kótovaném promítání sestrojte průmět kvádru ABCDEFGH, Známe-li body A, B, C podstavy a víme, že jeho výška v=5. A=[3;3;1], B=[0;1;-1], C=[-1;4;1].

Příklad 2.32: V kótovaném promítání sestrojte průmět pravidelného šestibokého jehlanu ABCDEFV, který má podstavu v rovině ρ, znáte-li střed S podstavy a vrchol A. ρ =(-2;4;2), A=[5;?;5], S=[?;3;4].

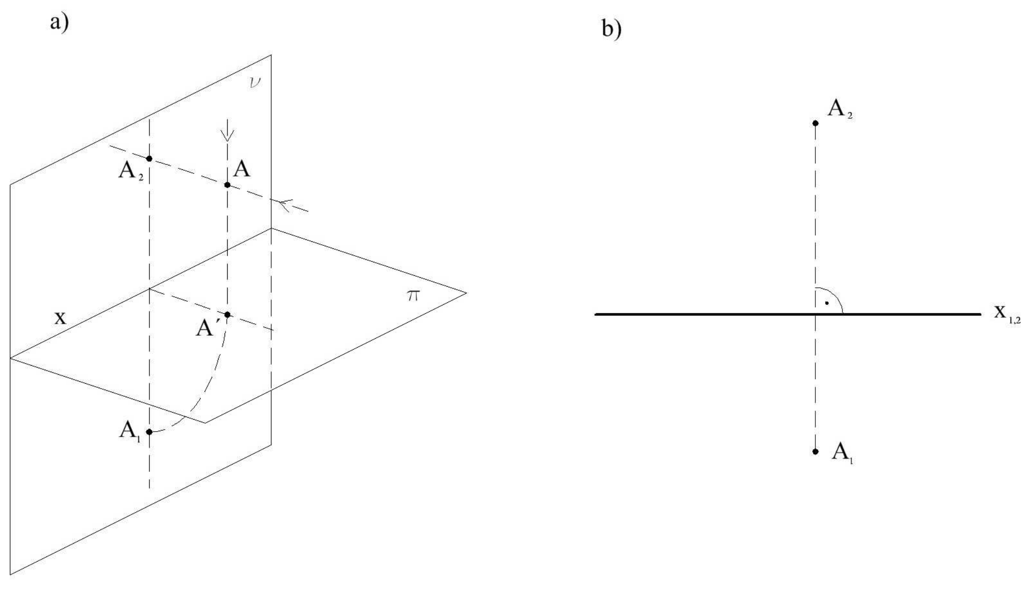
Příklad 2.33: V kótovaném promítání sestrojte průmět pravidelného čtyřstěnu ABCD. Rovina podstavy je určena body ABQ. (Pozn. Osový kříž volte ve středu nákresny). A=[0;0;0], B=[4;2;3], Q=[-1;-1;-1].

3 MONGEOVA PROJEKCE

Nejčastěji užívaným typem promítání je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny (jinak se mu říká též Mongeovo promítání nebo Mongeova projekce). Bod A v prostoru promítneme kolmo do vodorovné roviny – tzv. půdorysny, ozn. π, a získáme jeho průmět A'_1, jak to známe z kótovaného promítání (místo pojmu půdorysna jsme užívali pojem průmětna). Potom bod A promítneme ještě kolmo do druhé roviny (svislé) kolmé k půdorysně – nárysny, ozn. ν. Takto získáme nárys bodu A, bod A_2. Abychom měli oba průměty bodu A v jedné společné nákresně, ztotožníme nárysnu s nákresnou a otočíme půdorysnu do nárysny (Obr. 50a) kolem jejich průsečnice – osy *x*, které se říká základnice, takt se bod A'_1 zobrazí do bodu A_1.

Přímka určená touto dvojicí dvojicí sdružených průmětů A_1, A_2 (Obr. 50b) je vždy kolmá k základnici a nazýváme ji ordinála.

Dvojice A_1 A_2 jednoznačně určuje polohu bodu A v prostoru, takže popsané zobrazení je vzájemně jednoznačné.



Obrázek 50 - Mongeovo promítání

Značení v Mongeově promítání:

A ... bod v prostoru,

A_1 ... půdorys bodu A,

A_2 ... nárys bodu A,

π ... půdorysna,

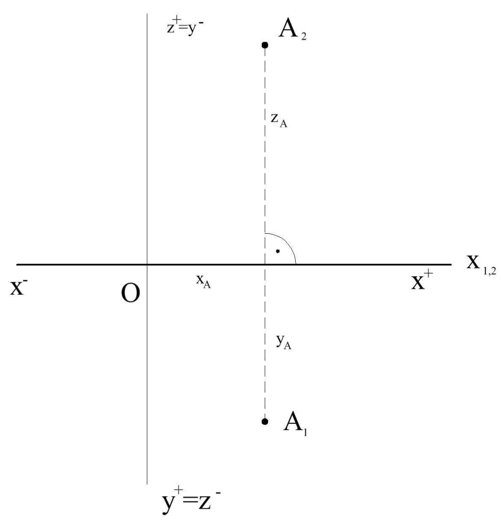
ν ... nárysna.

3.1 Zobrazení bodu a přímky

V nákresně osu *x* volíme vodorovně a její kladný směr vpravo od počátku O soustavy souřadnic. Průmět osy *y* je přímka kolmá k ose *x* a její kladná část od počátku O dolů (rovina určená osami *x,y* byla kolem *x* otočena do nákresny). Osa *z* leží v nárysně (tedy i v nákresně), je kolmá k ose *y* a její kladná část směřuje od počátku O nahoru. Jednotku na osách vždy vhodně zvolíme (příklady v této sbírce jsou zadávány tak, že při volbě (části) nákresny formátu A4 je pro názornost nejvhodnější volit jednotku 1cm).

Zobrazení bodu

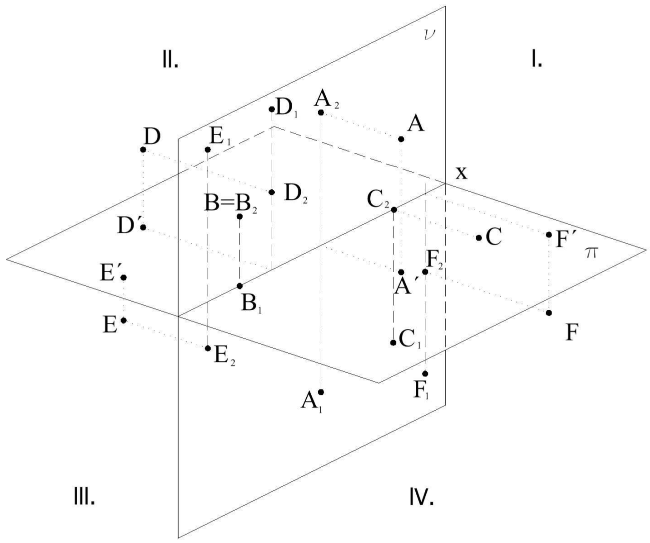
Nyní můžeme bod v Mongeově promítání zadat pomocí souřadnic (Obr. 51). Je-li dáno $A=[x_A,y_A,z_A]$, pak půdorys bodu A nalezneme tak, že v nákresně sestrojíme bod $A_1=[x_A,y_A]$. Nárys bodu A sestrojíme jako bod $A_2=[x_A,z_A]$.



Obrázek 51 – Zobrazení bodu v Mongeově promítání

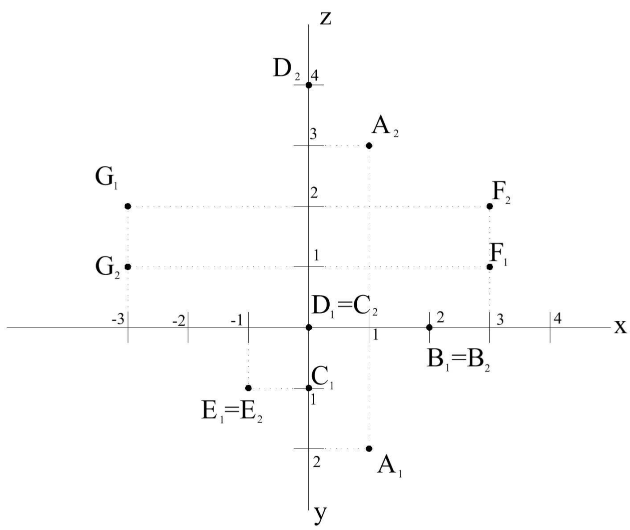
Na obrázku 52 vidíme, jak obě průmětny dělí prostor na čtyři kvadranty, ozn. I., II., III., IV. Je dobré mít tuto skutečnost stále na paměti, abychom vždy správně určili, ve kterém kvadrantu daný bod leží, protože nám to velmi pomůže s prostorovou představivostí, která je pro deskriptivní geometrii nezbytná.

Bod A leží v I. kvadrantu, bod D leží ve II. kvadrantu, bod E ve III. kvadrantu a bod F v IV. kvadrantu. Bod B leží v nárysně, bod C v půdorysně.



Obrázek 52 - Rozdělení prostoru na jednotlivé kvadranty

<u>Příklad 3.1:</u> V Mongeově promítání zobrazte body A=[1;2;3], B=[2;0;0], C=[0;1;0], D=[0;0;4], E=[-1;1;-1], F=[3;-1;2], G=[-3;-2;-1].



Obrázek 53 - Příklad vynášení bodů v Mongeově projekci

<u>Řešení:</u> (obr. 53) Sestrojíme osy *x, y*, určíme orientaci a naneseme jednotky. Půdorys bodu A – bod A_1 sestrojíme jako bod o souřadnicích x_A=1, y_A=2, nárys bodu A – bod A_2 sestrojíme jako bod o souřadnicích x_A=1, z_A=3. Půdorysy a nárysy ostatních bodů sestrojíme stejným postupem.

<u>Příklad 3.2:</u> V Mongeově promítání zobrazte body: K=[2;3;-4], L=[-1;2;1], M=[-3;-2;3], N=[1;-4;-9].

Zobrazení přímky

Přímka *p* je dána dvěma různými body A, B. Jelikož v Mongeově promítání má každý bod dva průměty, bude mít i přímka svůj půdorys (nebo první průmět) p_1 a nárys (druhý průmět) p_2. Těmto průmětům říkáme sdružené průměty přímky *p* a přímka *p* je jimi jednoznačně určena.

Vzájemně rovnoběžné promítací přímky bodů A, B ležících na přímce *p* tvoří <u>promítací roviny α, β přímky *p*</u>. (Přímka kolmá k některé z průměten má jen jednu promítací rovinu.) Promítací rovina α je kolmá k půdorysně π, často se jí říká první (prvá) promítací rovina. Promítací rovina β je kolmá k nárysně a říká se jí druhá promítací rovina.

V kótovaném promítání jsme hodně využívali stopníků přímek a nejinak tomu bude i u Mongeovy projekce. Protože ale promítáme na dvě průmětny, bude mít každá přímka dva stopníky. Půdorysný stopník, ozn. P, je průsečík přímky s půdorysnou, a nárysný stopník, ozn. N, je průsečík přímky s nárysnou.

Každý bod je určen svými sdruženými průměty, takže pokud budeme hledat průměty stopníků přímky, nalezneme celkem čtyři body:

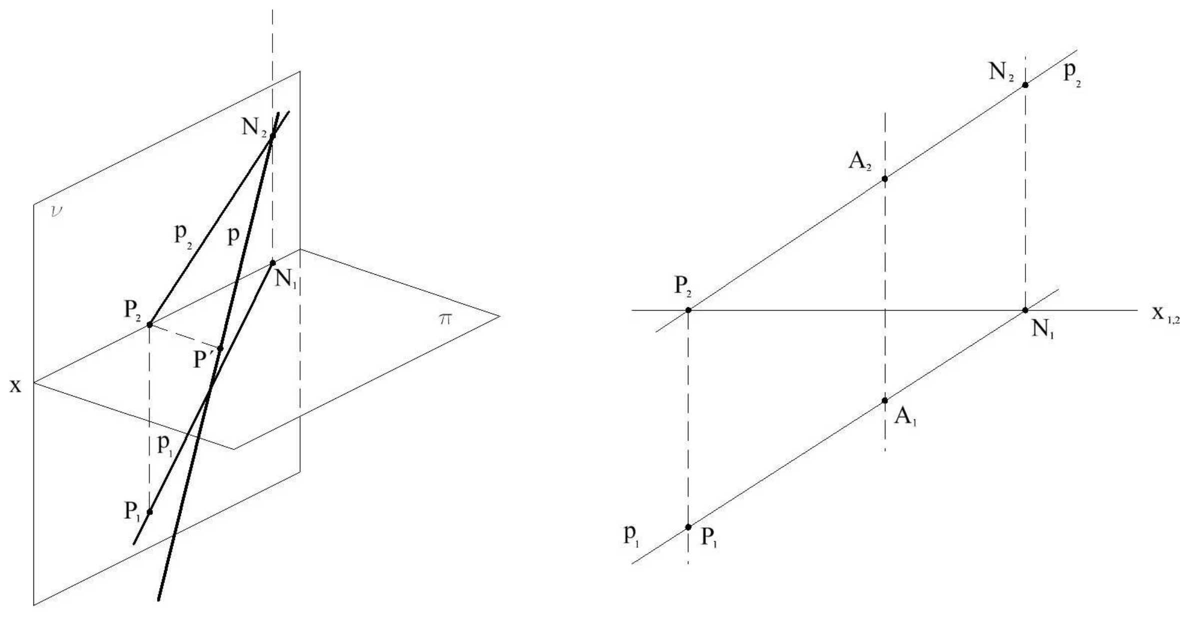
P_1 ... půdorys půdorysného stopníku,

P_2 ... nárys půdorysného stopníku,

N_1 ... půdorys nárysného stopníku,

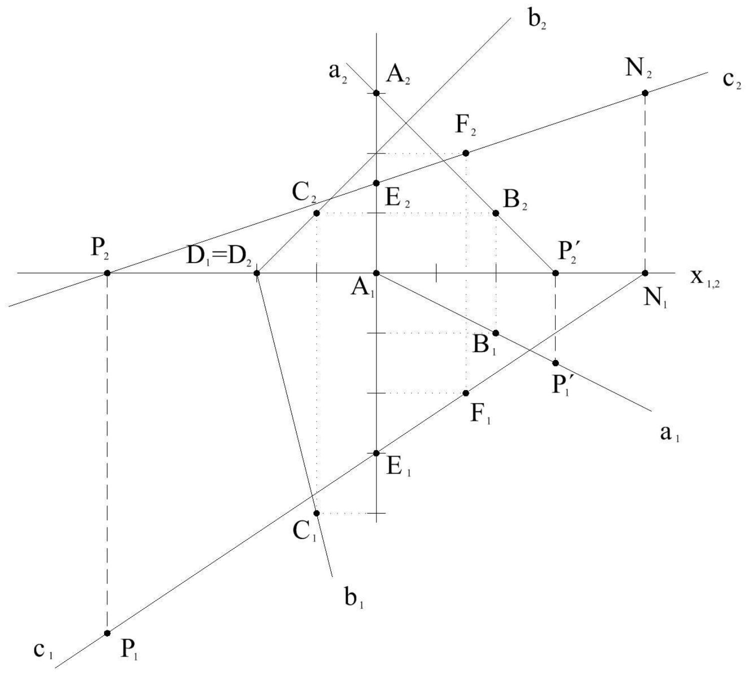
N_2 ... nárys nárysného stopníku.

Půdorysný stopník přímky p leží v půdorysně, takže jeho nárys P_2 je průsečík p_2 se základnicí. Podobně N_1 je průsečík se p_1 základnicí a leží N_2 na ordinále na p_2 (Obr. 54).



Obrázek 54 – Zobrazení přímky p v Mongeově promítání

<u>Příklad 3.3:</u> V Mongeově promítání narýsujte přímky *a*=AB, *b*=CD, *c*=EF a určete jejich stopníky. A=[0;0;3], B=[2;1;1], C=[-1;4;2], D=[-2;0;0], E=[0;3;1,5], F=[1,5;2;2].



Obrázek 55 - Určování stopníků v Mongeově projekci

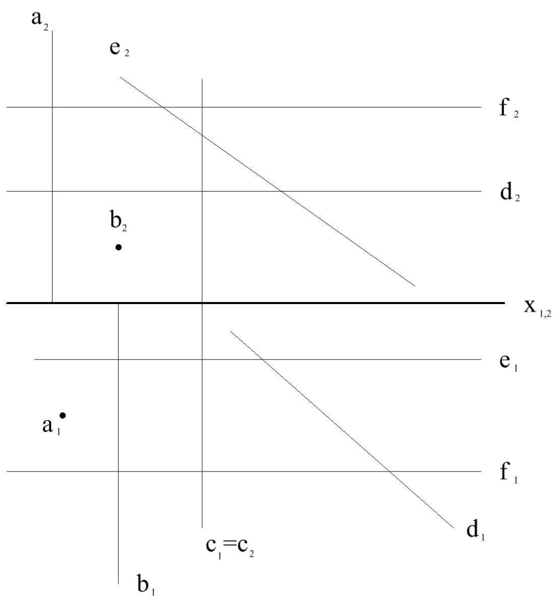
<u>Řešení:</u> (Obr. 55) Vyneseme průměty bodů ve zvolené soustavě souřadnic a narýsujeme zadané přímky. Nejprve sestrojíme všechny průměty stopníků přímky *c*. Půdorys nárysného stopníku (bod N_1) je průsečík půdorysu přímky *c* (přímka c_1) s osou *x*. Nárys nárysného stopníku (bod N_2) leží na průsečíku ordinály s nárysem přímky *c* (přímka c_2). Nárys půdorysného stopníku (bod P_2) přímky *c* je průsečík nárysu přímky *c* (přímka c_2) s osou *x*. Půdorys půdorysného stopníku (bod P_1) leží na průsečíku ordinály tohoto stopníku s půdorysem přímky *c* (přímka c_1).

Nárysným stopníkem přímky *a* je bod A, jejím půdorysným stopníkem je bod P´. Oba stopníky přímky *b* splývají s bodem D.

<u>Příklad 3.4:</u> V Mongeově promítání narýsujte přímky *k*=KL, *m*=LM, *o*=OQ a určete jejich stopníky. K=[2;2;3], L=[0;3;2], M=[2;1;1], O=[5;1;3], Q=[4;2;4].

Zvláštní polohy přímky (Obr. 56):

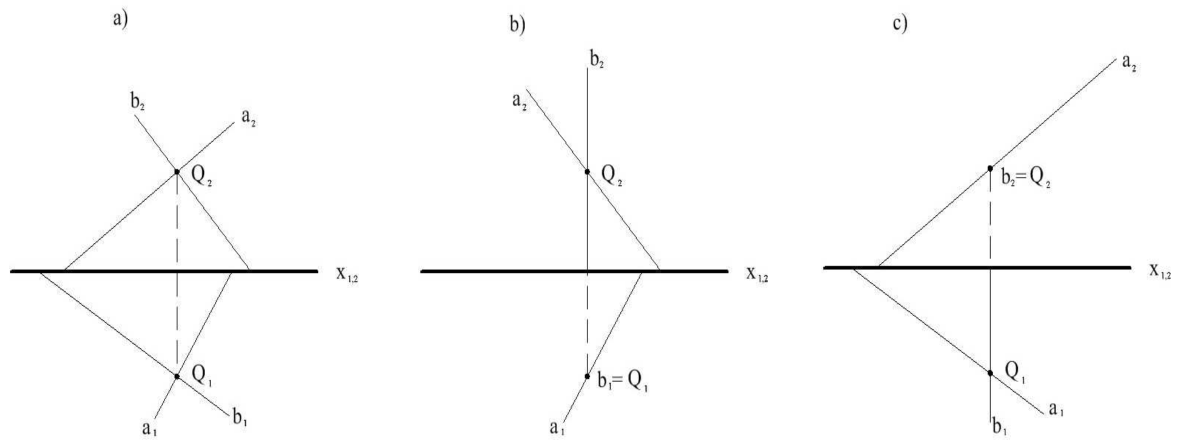
- Přímka *a* je kolmá k půdorysně – jejím půdorysem je bod a nárysem je přímka kolmá k základnici.
- Přímka *b* je kolmá k nárysně – jejím půdorysem je přímka kolmá k základnici a nárysem je bod.
- Přímka *c* je kolmá k základnici – její půdorys i nárys splynou, k jednoznačnému určení takové přímky na ní musíme znát alespoň dva body.
- Přímka *d* je rovnoběžná s půdorysnou – jejím půdorysem je přímka, na níž jsou všechny úsečky zobrazeny ve skutečné velikosti, a její nárys je rovnoběžný se základnicí.
- Přímka *e* je rovnoběžná s nárysnou – jejím nárysem je přímka, na níž jsou všechny úsečky zobrazeny ve skutečné velikosti, a její půdorys je rovnoběžný se základnicí.
- Přímka *f* je rovnoběžná se základnicí – její půdorys i nárys jsou dvě různé přímky rovnoběžné se základnicí.



Obrázek 56 - Zvláštní polohy přímky

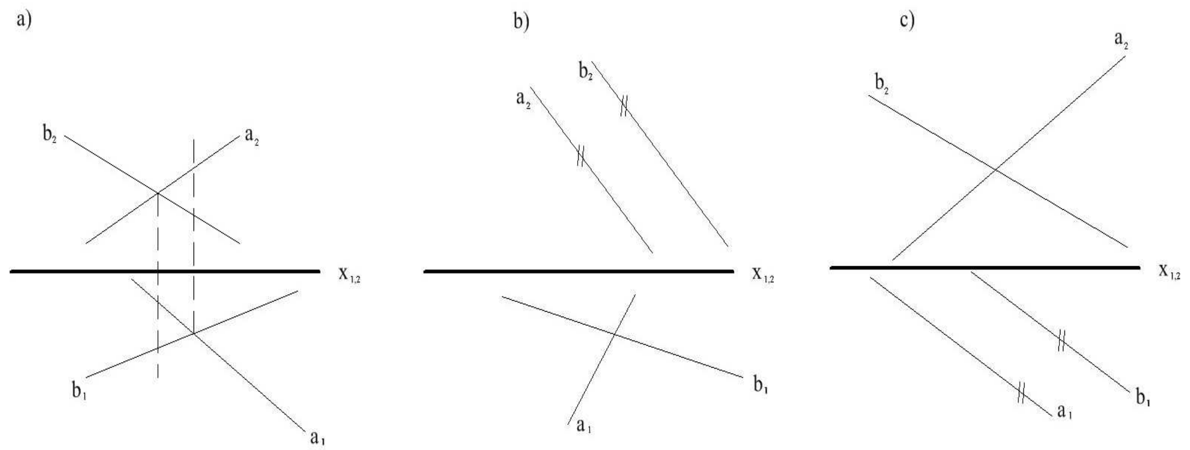
Vzájemná poloha dvou přímek:

- Průměty dvou různoběžných přímek *a, b* jsou buď dvě dvojice různoběžek, jejichž průsečíky leží na společné ordinále (Obr.57a), nebo dvojice různoběžek a přímka a bod, který na ní leží. (Obr. 57b,c).



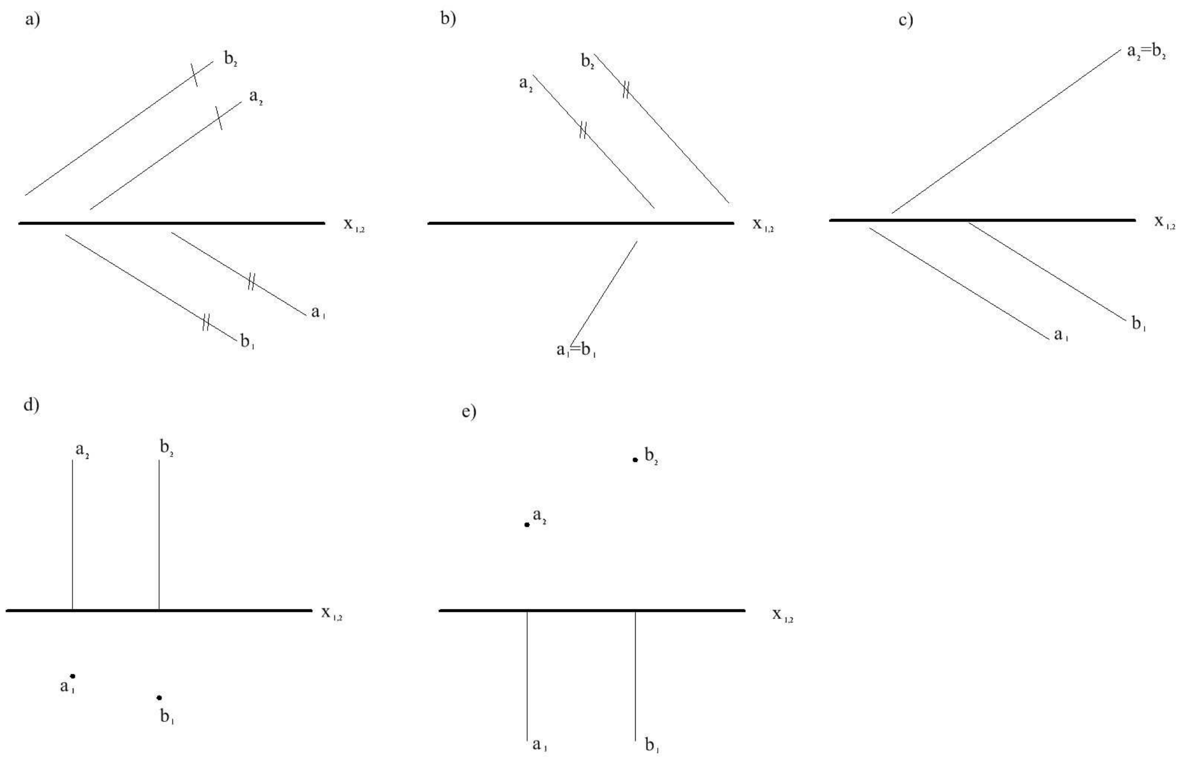
Obrázek 57 - Průmět dvou různoběžných přímek v Mongeově promítání

- Průmětem dvou mimoběžných přímek *a, b* jsou dvě dvojice různoběžek, jejichž průsečíky neleží na společné ordinále (Obr. 59a), dvojice rovnoběžných a různoběžných přímek (Obr. 59b,c).



Obrázek 58 - Průmět dvou mimoběžných přímek v Mongeově promítání

- Průmětem dvou rovnoběžných přímek *a, b* jsou dvě dvojice rovnoběžek (Obr. 58a), dvojice rovnoběžek a přímka (Obr. 58b,c) nebo dvojice přímek a dva body (Obr. 58d,e).



Obrázek 59 - Průmět dvou rovnoběžných přímek v Mongeově promítání

3.2 Sklápění

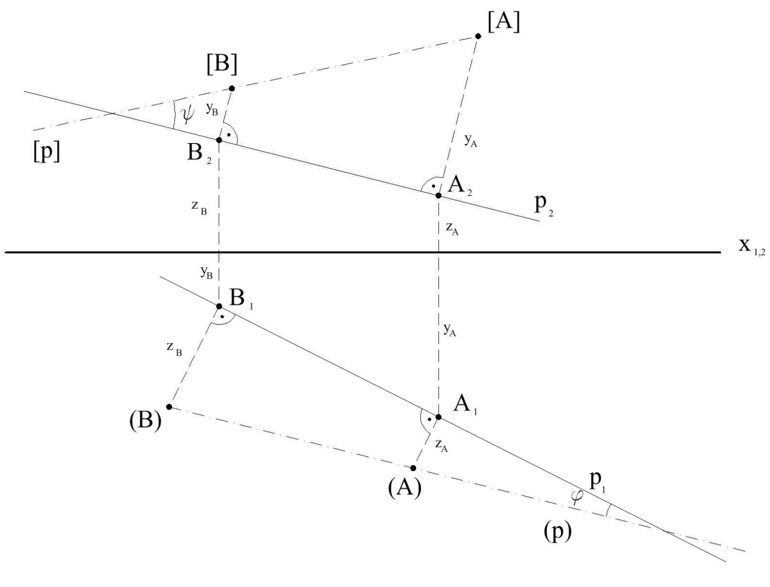
Každá přímka, která není promítací, leží ve dvou promítacích rovinách α, β a tyto jsou kolmé po řadě k průmětnám π, ν. Abychom zjistili skutečné velikosti útvarů některé promítací roviny, musíme ji přemístit tak, aby splynula s průmětnou, k níž je kolmá, nebo s ní byla rovnoběžná (z vlastností rovnoběžného promítání víme, že útvary v průmětně nebo v rovinách, které jsou s průmětnou rovnoběžné, se promítají ve skutečné velikosti). Promítací rovinu musíme otočit o 90° okolo její průsečnice s rovinou, do které promítáme (při otáčení do některé průmětny otáčíme promítací rovinu kolem příslušného průmětu přímky, která v této rovině leží). Tato konstrukce se nazývá sklápění promítací roviny do průmětny.

Chceme-li určit skutečnou velikost úsečky ležící na promítací přímce, zvolíme libovolnou první nebo druhou promítací rovinu, která obsahuje tuto promítací přímku, a tuto rovinu sklopíme.

Z výše popsaného postupu je zřejmé, že sklápění je v Mongeově promítání téměř stejné jako v kótovaném promítání. Zvolíme-li si jednu z průměten, např. půdorysnu, pak kóty bodů, jejichž první průměty leží v půdorysně, jsou graficky znázorněny v nárysně jako vzdálenosti nárysů bodů od osy *x* (je-li kóta bodu kladné nebo záporné číslo určíme podle polohy průmětu vzhledem k základnici *x*).

Pravidla značení sklopených útvarů:

- Ve sklopení rýsujeme čerchovanou čarou.
- Sklopené průměty bodů píšeme do závorek.
- Sklápíme-li různé promítací roviny, využíváme z důvodu přehlednosti k zápisu pro každou promítací rovinu jiný typ závorek (Obr. 60).



Obrázek 60 - Sklápění v Mongeově promítání

Přímku *p*, na níž známe (alespoň) dva body A, B , sklopíme (Obr. 60):

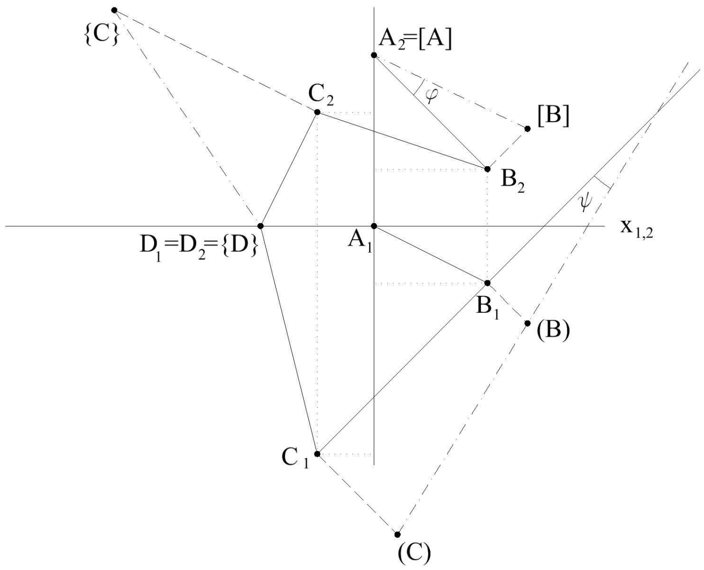
1. do půdorysny – konstrukci provedeme podobně jako v kótovaném promítání tak, že na pomocnou přímku kolmou k přímce p_1, naneseme od bodu A_1 jeho z-ovou souřadnici. Tím získáme sklopený průmět bodu A, ozn. (A). Stejně postupujeme při sklápění bodu B. Spojením bodů (A), (B) získáme sklopený průmět přímky *p*, ozn. *(p)*, a skutečná velikost úsečky AB je rovna vzdálenosti (A)(B). Odchylka φ přímky *p* od půdorysny je velikost úhlu, který svírá půdorys přímky *p* se sklopeným průmětem přímky *p*.

2. do nárysny – konstrukci provedeme tak, že na pomocnou přímku kolmou k přímce p_2, naneseme od bodu A_2 jeho y-ovou souřadnici. Tím získáme sklopený průmět bodu A, ozn. [A]. Stejně postupujeme při sklápění bodu B. Spojením bodů [A], [B] získáme sklopený průmět přímky *p*, ozn. *[p]*, a skutečná velikost úsečky AB je rovna vzdálenosti [A][B]. Odchylka y přímky *p* od nárysny je velikost úhlu, který svírá nárys přímky *p* s přímkou *[p]*.

Uvědomme si, že:

- Stopníky (půdorys půdorysného a nárys nárysného stopníku) při sklápění zůstávají na místě.
- Body s kladnými „kótami“ (viz. úvod této kapitoly) sklápíme do jedné poloroviny (určené průmětem přímky, jejíž body sklápíme) a body se zápornými „kótami“ sklápíme do poloroviny <u>opačné</u>.
- Promítací přímky jednotlivých bodů zůstávají po sklopení kolmé k průmětu přímky.

Příklad 3.5: V Mongeově promítání narýsujte úsečky AB, BC, CD, určete jejich skutečné délky a najděte odchylku přímky AB od nárysny a přímky BC od půdorysny. A=[0;0;3], B=[2;1;1], C=[-1;4;2], D=[-2;0;0].



Obrázek 61 - Skutečná velikost úsečky

Řešení: (Obr. 61) Sestrojíme průměty zadaných přímek AB, BC, CD. Sklopíme např. druhou promítací rovinu přímky AB. Y-ová souřadnice bodu A je rovna 0, bod A je nárysným stopníkem přímky AB, a proto nárys bodu A splývá se sklopeným bodem A – ozn. [A]. Sklopený bod B leží na sklopené promítací přímce bodu B a vzdálenost bodu [B] od bodu B_2 je rovna y-ové souřadnici bodu B. Skutečná velikost úsečky AB je rovna vzdálenosti bodů [A], [B]. Skutečnou velikost úseček BC, CD sestrojíme stejným způsobem.

Odchylka φ přímky AB od nárysny je rovna velikosti úhlu, který svírá nárys přímky AB se sklopenou přímkou. Odchylka ψ přímky BC od půdorysny je rovna velikosti úhlu, který svírá půdorys přímky BC s přímkou (B)(C).

Příklad 3.6: V Mongeově promítání určete skutečnou velikost úseček KM, LN a najděte odchylku přímky *k* od půdorysny a přímky *l* od nárysny. *k*=KM, *l*=LN. K=[-2;-1;1], L=[3;0;1], M=[5;4;-3], N=[0;5;-2].

Příklad 3.7: V Mongeově promítání narýsujte přímky k=KL, m=MN, r=QR, určete jejich stopníky, odchylky od obou průměten a skutečné velikosti úseček KL, MN, QR. K=[1;1;1], L=[3;3;-2], M=[-2;-2;4], N=[0;0;0], Q=[7;6;2], R=[5;-4;-1].

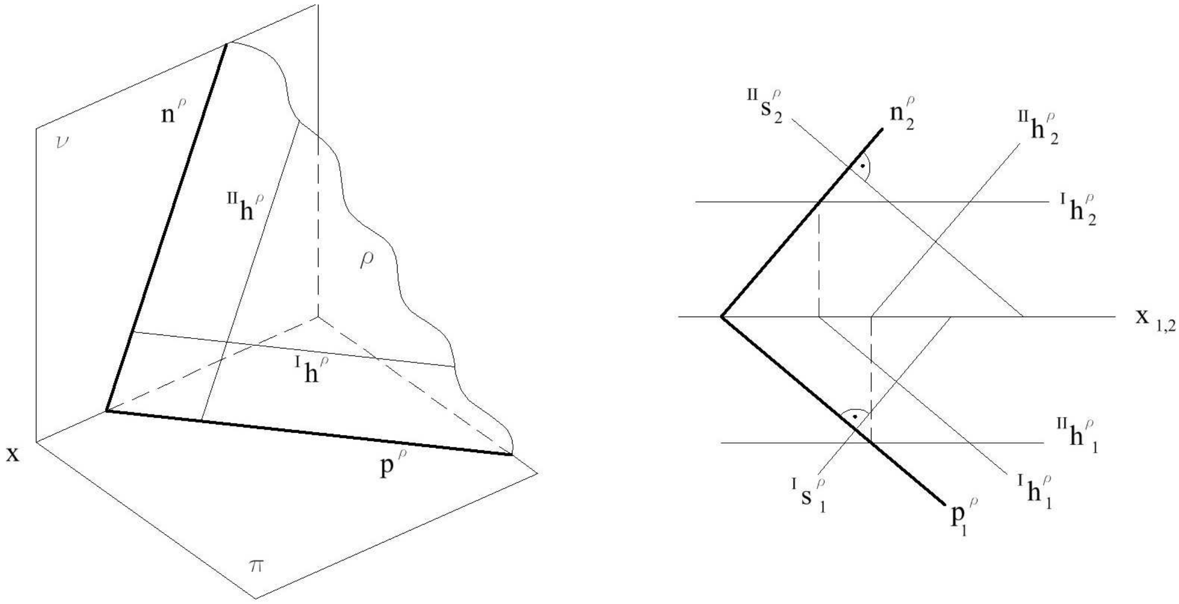
3.3 Zobrazení roviny

V textu jsme se již setkali s pojmem promítací rovina. Promítací rovina je vždy k jedné průmětně kolmá a s druhou průmětnou je rovnoběžná, nebo je kolmá k oběma průmětnám, tedy i k základnici x. Průmětem roviny kolmé k základnici je přímka. Je-li rovina promítací, ale není kolmá k základnici, pak jejím jedním průmětem je přímka a druhým celá průmětna. To znamená, že půdorysem první (druhé) promítací roviny je přímka (půdorysna) a jejím nárysem je celá nárysna (přímka). Všechny konstrukce v promítacích rovinách řešíme v průmětně, s níž je tato rovnoběžná (všechny útvary se zobrazují ve skutečné velikosti), nebo sklopením do průmětny, k níž je kolmá. Rovině, která je rovnoběžná s první (druhou) průmětnou, se říká první (druhá) hlavní rovina.

Půdorysem (nárysem) roviny v obecné poloze (není promítací) je celá půdorysna (nárysna). Průsečnice obecné roviny s průmětnami nazýváme stopy roviny. Průsečnici roviny (ozn. ρ) s půdorysnou – tzv. půdorysnou stopu - značíme stejně jako v kótovaném promítání p^{ρ}, průsečnici s nárysnou – tzv. nárysnou stopu - značíme n^{ρ}. (Obr. 62). Půdorys půdorysné a nárys nárysné stopy jsou buď přímky rovnoběžné se základnicí, nebo se protínají na základnici. Nárys půdorysné stopy a půdorys nárysné stopy jsou přímky splývající se základnicí. Půdorysné (nárysné) stopníky všech přímek, které leží v rovině, leží na půdorysné (nárysné) stopě této roviny.

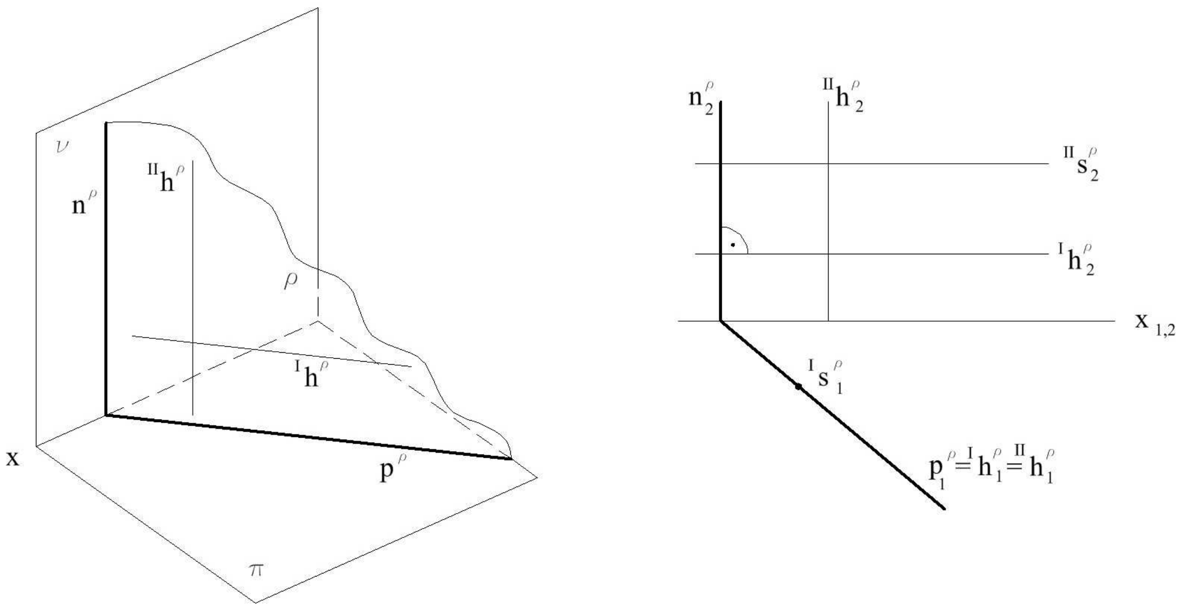
Hlavní přímka je taková přímka roviny, která je rovnoběžná s průmětnou. V Mongeově projekci promítáme na dvě průmětny, proto každá rovina má hlavní přímky dvojího typu. Hlavní přímky první osnovy, ozn. ${}^{I}h^{\rho}$, (někdy také první hlavní přímky) jsou rovnoběžné s půdorysnou, jejich půdorysy jsou rovnoběžné s půdorysnou stopou roviny a nárysy jsou rovnoběžné se základnicí (Obr. 56 - přímka d). Hlavní přímky druhé osnovy, ozn. ${}^{II}h^{\rho}$, (někdy také druhé hlavní přímky) jsou rovnoběžné s nárysnou, jejich půdorysy jsou rovnoběžné se základnicí a nárysy jsou rovnoběžné s nárysnou stopou roviny (Obr. 56 – přímka e) .

Spádové přímky jsou stejně jako hlavní přímky, dvojího typu. Spádové přímky první osnovy, ozn. ${}^{I}s^{\rho}$ (index označující rovinu, které přímka náleží, často vynecháváme), jsou kolmé k půdorysné stopě (a všem hlavním přímkám první osnovy) roviny. Spádové přímky druhé osnovy, ozn. $^{II}s^{\rho}$, jsou kolmé k nárysné stopě (a všem hlavním přímkám druhé osnovy) roviny. Sklopením spádové přímky první (druhé) osnovy do půdorysny (nárysny) získáme skutečnou odchylku roviny od příslušné průmětny. Spádových přímek je, stejně jako hlavních, v každé rovině nekonečně mnoho.



Obrázek 62 - Stopy a hlavní přímky roviny v obecné poloze

Promítací rovina se zobrazí v průmětně, k níž je kolmá, jako přímka, a v průmětně, k níž kolmá není, jako rovina. (Obr. 63)



Obrázek 63 – Stopy a hlavní přímky roviny kolmé k půdorysně

Stejně jako v kótovaném promítání si i zde uvedeme způsoby, jakými může být rovina zadána a jak sestrojit její průmět. Stereometricky jde o týž postup, proto je následující text téměř identický. Odlišnosti v konstrukci jsou na příslušném místě uvedeny.

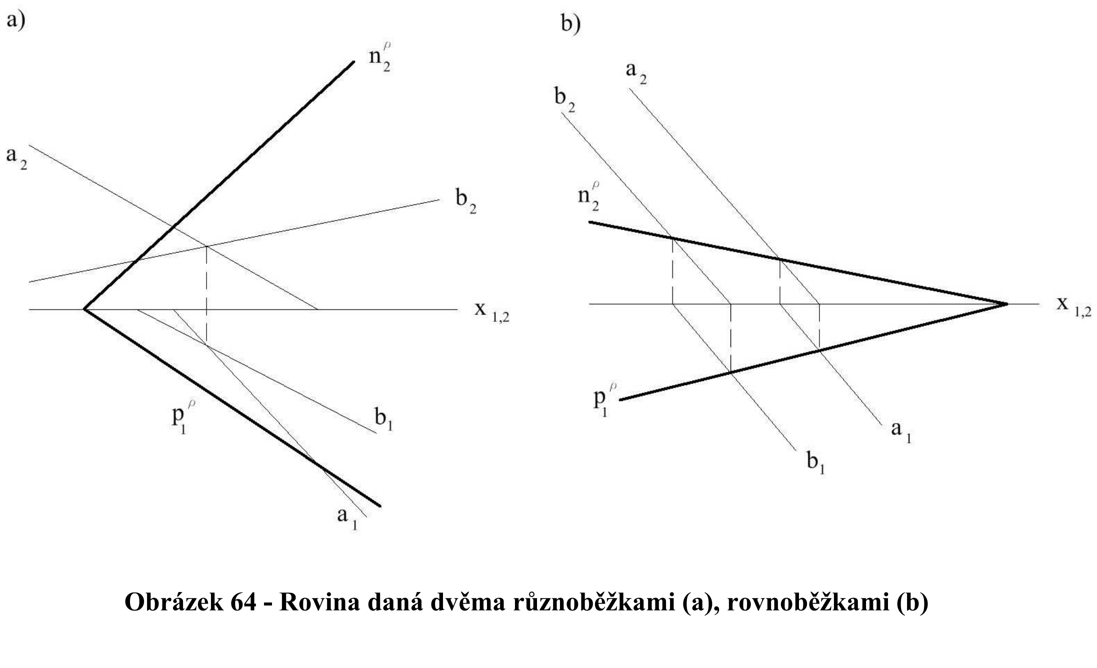
<u>Rovina může být zadána několika způsoby:</u>

a) dvěma rovnoběžnými nebo různoběžnými přímkami,
b) přímkou a bodem, který na ní neleží,
c) třemi nekolineárními body,
d) pomocí souřadnic.

<u>Konstrukce roviny ze zadaných prvků:</u>

<u>Ad a)</u> Rovina je zadána dvěma různoběžnými (Obr. 64a) nebo rovnoběžnými (Obr. 64b) přímkami *a, b*.

Určíme nárysné a půdorysné stopníky obou přímek. Spojnice nárysných (půdorysných) stopníků je nárysná (půdorysná) stopa roviny.



Obrázek 64 - Rovina daná dvěma různoběžkami (a), rovnoběžkami (b)

Ad b) Rovina určená přímkou a bodem.

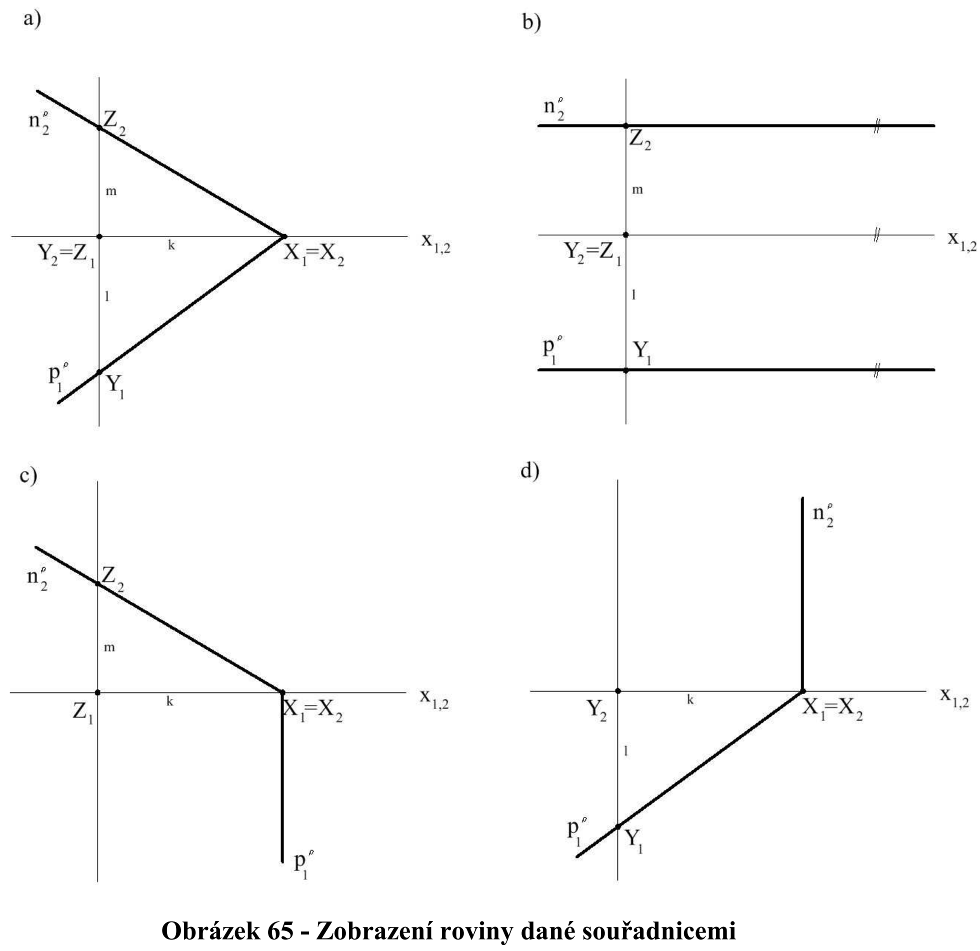
Bodem vedeme přímku rovnoběžnou nebo různoběžnou se zadanou přímkou a dále postupujeme dle bodu a).

Ad c) Rovina je zadaná třemi nekolineárními body.

Tři nekolineární body určují tři navzájem různoběžné přímky nebo tři různé dvojice rovnoběžek. Zvolíme některé dvě přímky a dál postupujeme stejně jako v případě a).

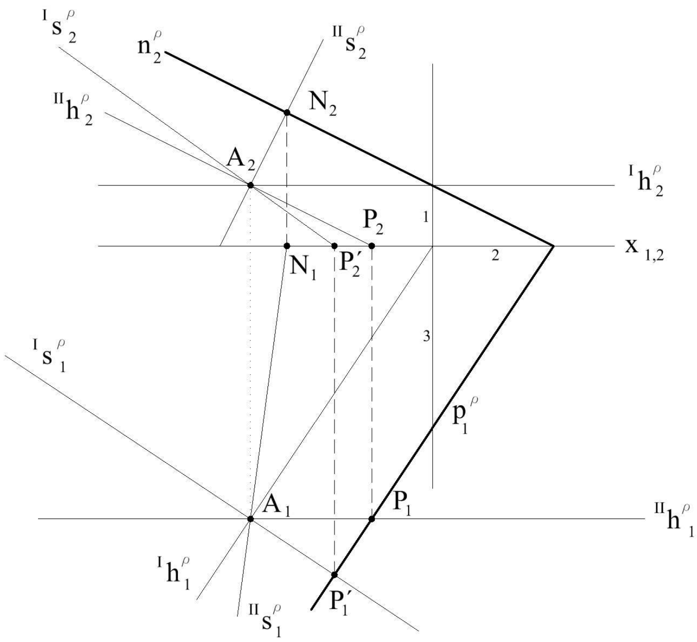
Ad d) Mějme takovéto zadání: ρ=(*k,l,m*), kde *k,l,m* jsou buď reálná čísla nebo ∞.

Postup řešení: (obr. 65) Zvolíme vhodnou soustavu souřadnic. Označíme po řadě X, Y, Z průsečíky roviny ρ s osami x, y, z, pak souřadnice těchto bodů jsou X=[*k*,0,0], Y=[0,*l*,0], Z=[0,0,*m*]. Rovina ρ je tedy dána body X, Y, Z a dál postupujeme stejně jako v případě c). Pokud jsou všechna čísla *k, l, m* reálná, sestrojíme průmět roviny dle obr. 65a), pokud je číslo *k/l/m*=∞, sestrojíme průmět roviny dle obr. 65b)/c)/d).



Obrázek 65 - Zobrazení roviny dané souřadnicemi

<u>Příklad 3.8:</u> V Mongeově promítání sestrojte rovinu ρ=(2;3;1) a jejím bodem A=[-3;?;2] veďte hlavní a spádové přímky (obou osnov) roviny ρ.



Obrázek 66 - Bod v rovině

<u>Řešení:</u> (Obr. 66) Sestrojíme průmět roviny ρ dle obr. 65. Půdorys bodu A sestrojíme pomocí hlavních přímek například druhé osnovy roviny ρ. Nárys hlavní přímky druhé osnovy - ${}^{II}h_2^{\rho}$ - prochází nárysem bodu A, je rovnoběžný s nárysnou stopou roviny a průsečík této přímky se základnicí je nárys půdorysného stopníku P. Půdorys hlavní přímky druhé osnovy je rovnoběžný s osou x a prochází půdorysem půdorysného stopníku P. Půdorys bodu A leží na půdorysu hlavní přímky druhé osnovy a na ordinále vedené nárysem bodu A. Půdorys hlavní přímky první osnovy - ${}^{I}h_1^{\rho}$ - procházející bodem A prochází půdorysem bodu A a je rovnoběžný s půdorysnou stopou roviny ρ, nárys této přímky prochází nárysem bodu A a je rovnoběžný se základnicí. Máme tedy sestrojen chybějící průmět bodu a hlavní přímky obou osnov procházející tímto bodem. Zbývá sestrojit spádové přímky obou osnov jdoucí bodem A.

Půdorys spádové přímky první osnovy je kolmý k půdorysné stopě a nárys spádové přímky druhé osnovy je kolmý k nárysné stopě roviny (viz Obr. 62). Půdorys spádové přímky druhé osnovy je určen půdorysem bodu A a půdorysem nárysného stopníku N přímky ${}^{II}s^{\rho}$ (nárys nárysného stopníku je průsečíkem nárysu spádové přímky druhé osnovy s nárysnou stopou roviny ρ). Nárys spádové přímky první osnovy určíme pomocí jejího půdorysného stopníku P´.

<u>Příklad 3.9:</u> V Mongeově promítání sestrojte rovinu ρ=(-3;3;2) a určete oba průměty bodu A=[5;1;?], který leží v rovině ρ.

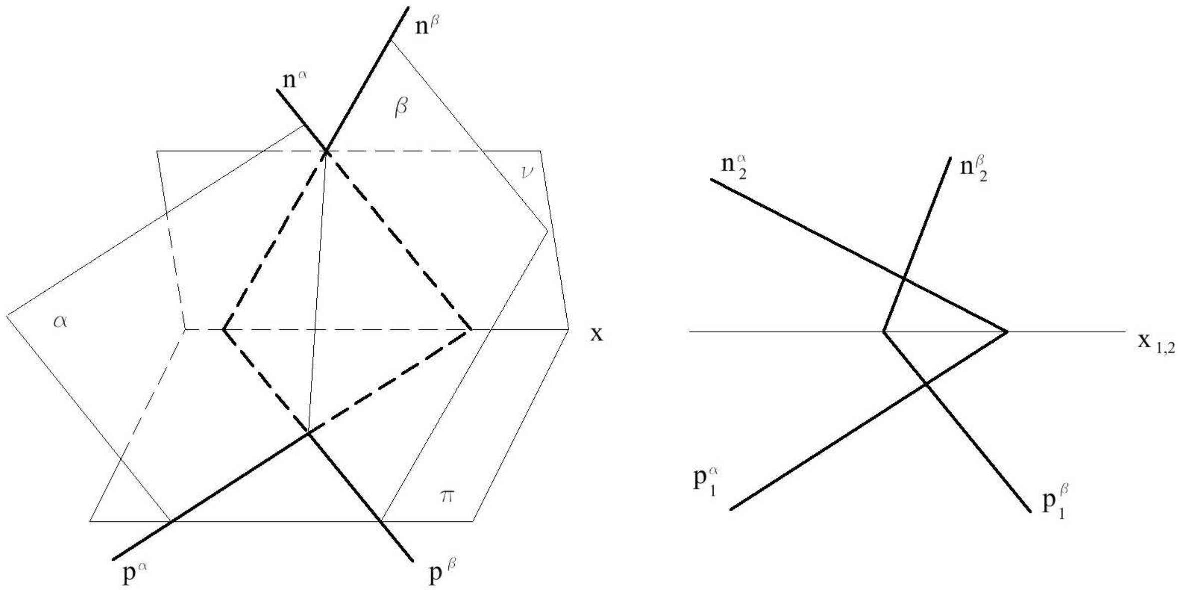
<u>Příklad 3.10:</u> V Mongeově promítání sestrojte bodem D hlavní a spádové přímky obou osnov roviny, která je určena body A,B,C. A=[-2;3;0] , B=[4;-1;-1] , C=[5;4;3] , D=[0;0;?].

3.4 Vzájemná poloha dvou rovin

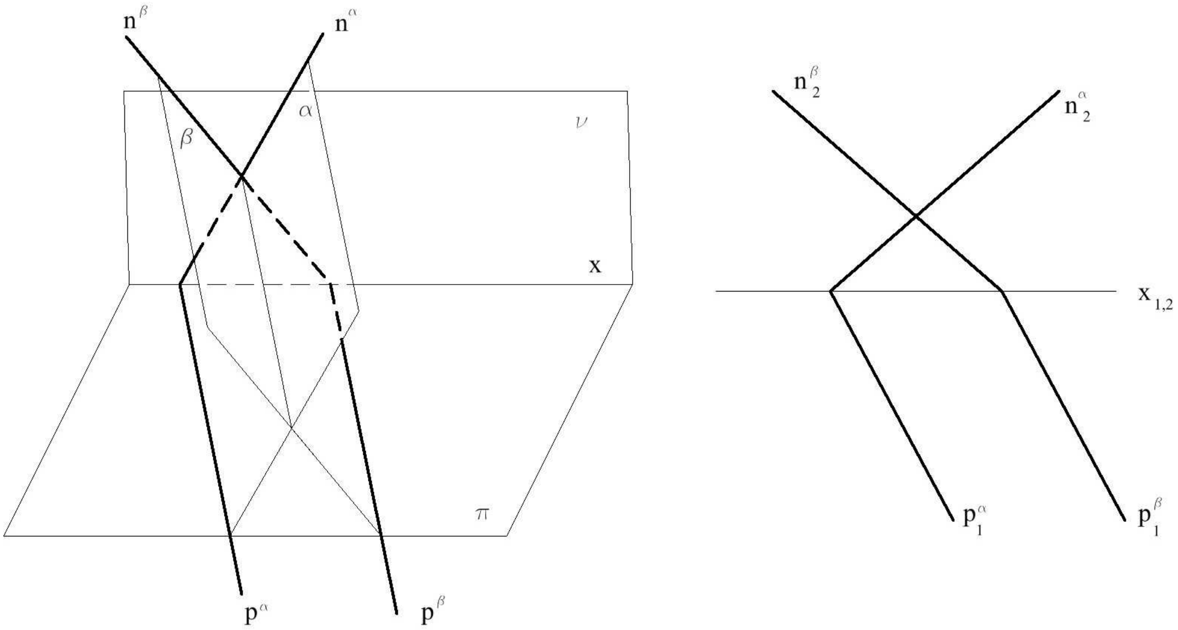
Jak už víme ze stereometrie a kótovaného promítání, dvě roviny jsou buď rovnoběžné, nebo různoběžné. V Mongeově promítání určujeme vzájemnou polohu dvou rovin z polohy jejich nárysných a půdorysných stop.

Jsou-li dvě roviny a, b různoběžné, pak obě dvojice jejich stop jsou různoběžné přímky (Obr. 68), nebo jejich půdorysné (nárysné) stopy jsou různoběžné přímky a jejich nárysné (půdorysné) stopy jsou rovnoběžné přímky (Obr. 69). Zvláštním případem jsou roviny, jejichž všechny stopy se protínají na základnici v jednom bodě (obrázek si sestrojte v rámci procvičování).

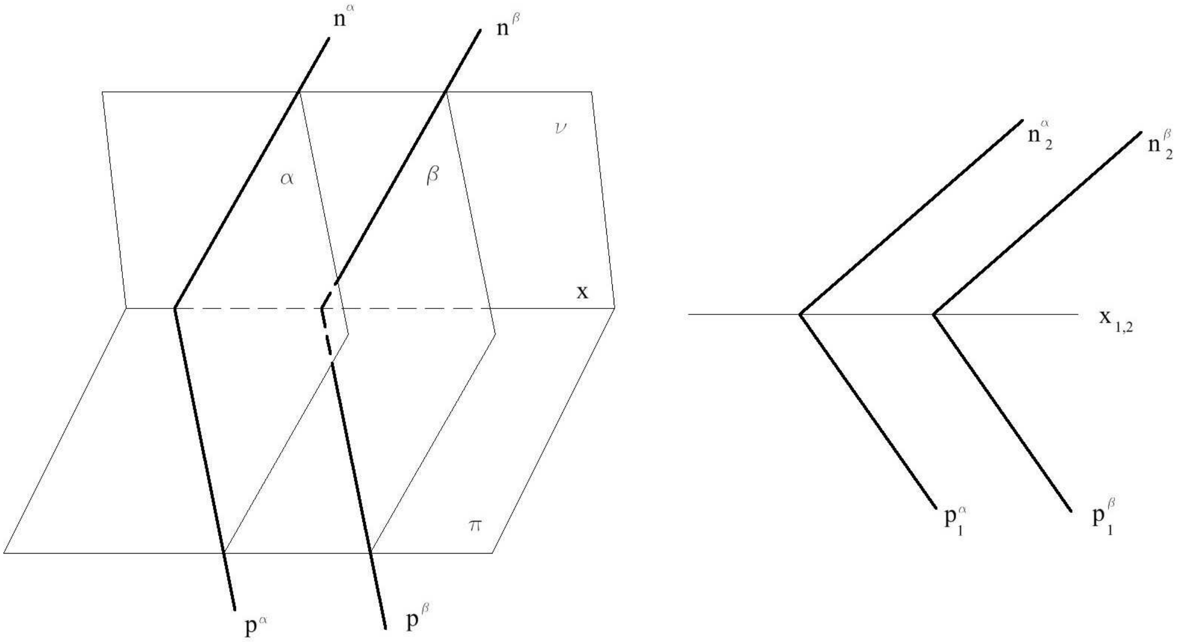
Roviny a, b jsou rovnoběžné (Obr.70), proto obě dvojice jejich stop jsou rovnoběžné přímky.



Obrázek 67 - Dvě různoběžné roviny, jejichž stopy jsou různoběžné přímky

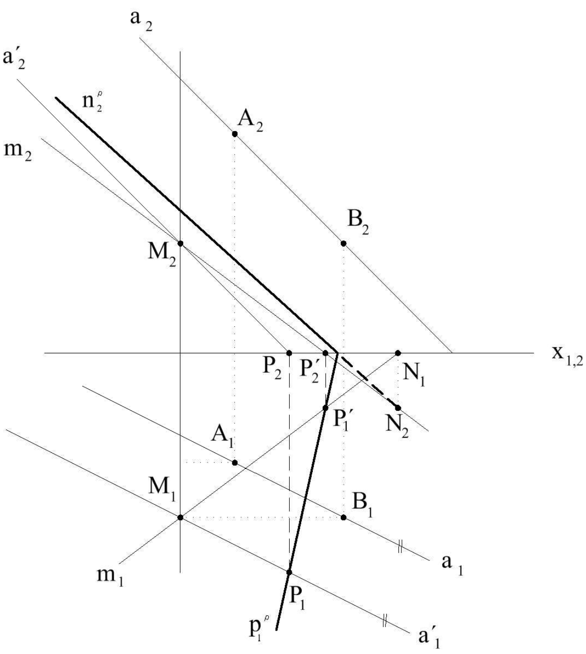


Obrázek 688 - Dvě různoběžné roviny, jejichž stopy jsou rovnoběžné přímky



Obrázek 69 - Rovnoběžné roviny

<u>Příklad 3.11:</u> V Mongeově promítání přímkou *m*=MN proložte rovinu ρ rovnoběžnou s přímkou *a*=AB. A=[1;2;4], B=[3;3;2], M=[0;3;2], N=[4;0;-1].

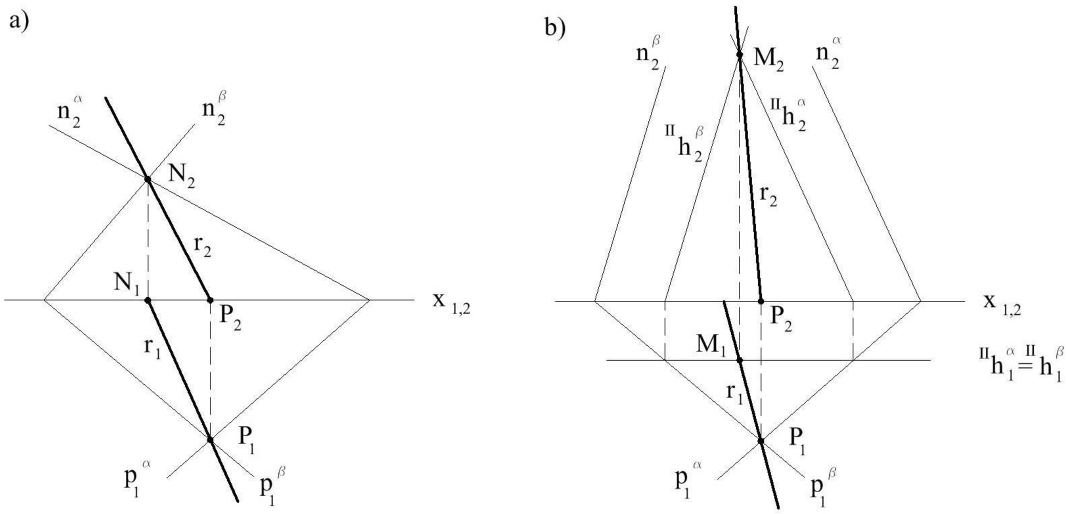


Obrázek 70 – K příkladu 3.11

<u>Řešení:</u> (Obr. 70) Ze stereometrie víme, že je-li přímka rovnoběžná s některou přímkou roviny, pak je s touto rovinou rovnoběžná. Některým bodem přímky *m* tedy vedeme rovnoběžku *a´* s přímkou *a* (v tomto příkladu využijeme bodu M). Hledaná rovina ρ je přímkami *m,a´* určena a její stopy jsou spojnice příslušných stopníků.

<u>Příklad 3.12:</u> V Mongeově promítání přímkou *d*=CD proložte rovinu α rovnoběžnou s přímkou *q*=QR. C=[-1;3;1], D=[2;1;3], Q=[0;1;3], R=[2;5;1].

Jsou-li dvě roviny různoběžné, je často třeba určit jejich průsečnici *r*. V kótovaném promítání jsme si řekli, že stopník průsečnice *r* (Obr. 71a) je průsečíkem stop obou rovin. V Mongeově promítání je rovina zpravidla určena dvojicí stop a můžeme tedy najít dva stopníky hledané průsečnice. Nárysný stopník je průsečíkem nárysných stop, půdorysný stopník průsečnice je průsečíkem půdorysných stop obou rovin. Pokud nelze nalézt průsečík nárysných (půdorysných) stop např. z důvodu nedostatku místa, určíme bod průsečnice pomocí hlavních přímek druhé (první) osnovy těchto rovin (Obr. 71b).



Obrázek 71 - Průsečnice dvou rovin

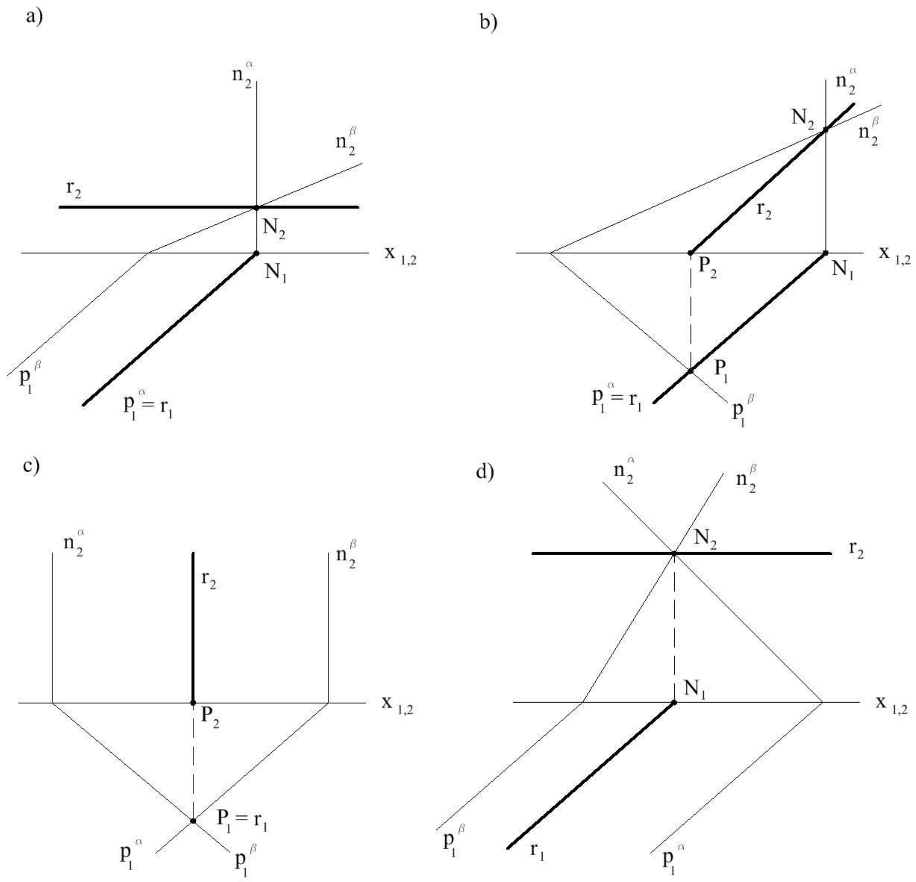
Určení průsečnice dvou rovin α, β, které jsou ve speciální poloze vzhledem k některé průmětně nebo k sobě navzájem, bývá v Mongeově promítání mnohem jednodušší než v kótovaném promítání.

Jestliže α je první (druhá) promítací rovina a rovina β je v obecné poloze, přičemž půdorysné (nárysné) stopy daných rovin jsou rovnoběžné přímky, pak půdorys (nárys) průsečnice splývá s půdorysnou (nárysnou) stopou roviny α a nárys (půdorys) průsečnice je přímka rovnoběžná s osou *x* (Obr. 72a).

Jestliže α je první (druhá) promítací rovina a rovina β je v obecné poloze, přičemž žádná dvojice odpovídajících si stop nejsou rovnoběžné přímky, pak půdorys (nárys) průsečnice splývá s půdorysnou (nárysnou) stopou roviny α a nárys (půdorys) průsečnice je přímka (Obr. 72b).

Jestliže jsou obě roviny α, β první (druhé) promítací roviny, půdorysem (nárysem) jejich průsečnice je bod a nárysem (půdorysem) je přímka rovnoběžná s nárysnými (půdorysnými) stopami těchto rovin (Obr. 72c).

Jestliže jsou roviny α, β různoběžné, ale jejich půdorysné (nárysné) stopy jsou rovnoběžné přímky, půdorys průsečnice je přímka rovnoběžná s půdorysnými (nárysnými) stopami těchto rovin a nárys (půdporys) průsečnice je přímka rovnoběžná s osou *x* (Obr. 72d).



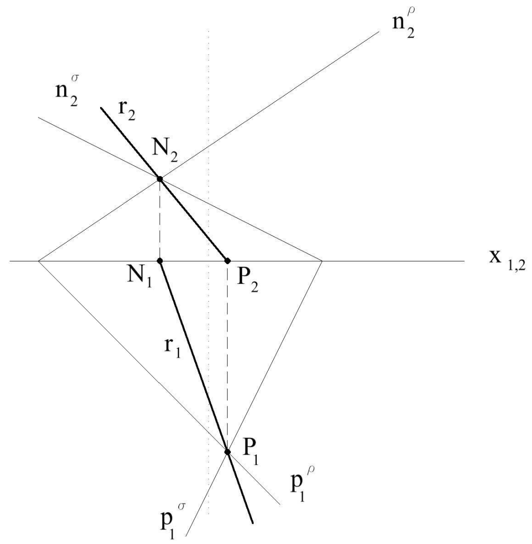
Obrázek 72 - Průsečnice dvou rovin, které jsou ve speciální poloze

Jestliže jsou dvě různoběžné roviny α, β rovnoběžné se základnicí, jejich průsečnici *r* sestrojíme tak, že obě roviny α, β protneme rovinou λ, která není rovnoběžná se základnicí (její stopy jsou se stopami obou rovin různoběžné). Určíme průsečnice *s, t* rovin α, β s rovinou λ a půdorys (nárys) hledané průsečnice *r* prochází půdorysem (nárysem) průsečíku přímek *s, t* (a je rovnoběžný s osou *x*).

Jestliže se stopy dvou různoběžných rovin α, β protínají na základnici v bodě Q, jejich průsečnici *r* sestrojíme tak, že obě roviny α, β opět protneme pomocnou rovinou λ, jejíž stopy neprochází bodem Q, a určíme průsečnice *s, t* rovin α, β s rovinou λ. Půdorys (nárys) hledané průsečnice *r* prochází půdorysem (nárysem) průsečíku přímek *s,t* a bodem Q.

Tyto postupy vychází ze stereometrie a jsou pro kótované i Mongeovo promítání téměř stejné.

<u>Příklad 3.13:</u> V Mongeově promítání sestrojte průsečnici *r* rovin ρ=(-3;3;2) a σ=(2;4;1).



Obrázek 73 - Průsečnice dvou rovin v Mongeově promítání

<u>Řešení:</u> (Obr. 73) Sestrojíme roviny ρ, σ dle zadání. Půdorysný stopník P hledané průsečnice *r* je průsečíkem půdorysných stop. Nárysný stopník N přímky *r* je průsečíkem nárysných stop rovin ρ, σ. Hledaná průsečnice *r* je dána svými stopníky P,N.

<u>Příklad 3.14:</u> V Mongeově promítání sestrojte průsečnici dvou rovin ρ, σ. ρ=ABC, σ=KLM. A=[0;1;2], B=[1;2;1], C=[0,5;0;1], K=[-1;1;1], L=[0;2;0], M=[2;-2;1].

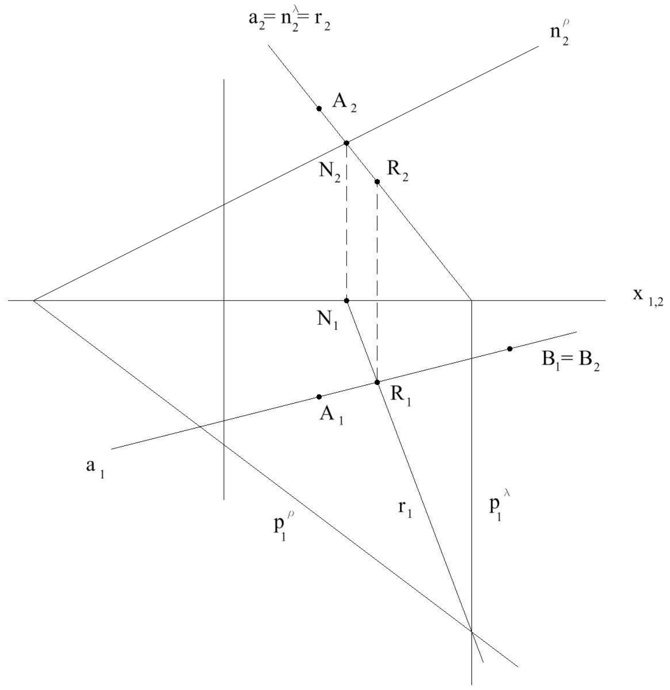
3.5 Průsečík přímky s rovinou

Postup konstrukce průsečíku přímky s rovinou jsme už v kapitole o kótovaném promítání rozložili do tří základních kroků (pro připomenutí je zde uvedeme znovu):

1. přímkou proložíme libovolnou pomocnou rovinu,
2. najdeme průsečnici pomocné roviny se zadanou rovinou,
3. průsečík průsečnice se zadanou přímkou je hledaný bod.

Nejprve si přímkou *p* proložíme libovolnou rovinu λ. V Mongeově promítání volíme rovinu λ promítací, takže jeden průmět přímky *p* je nárysem/půdorysem roviny λ. Roviny λ a ρ jsou vždy různoběžné, protože mají alespoň jeden společný bod – hledaný průsečík R, a můžeme najít jejich průsečnici *r*. Protože víme, že bod R leží na průsečnici rovin λ a ρ a na přímce *p*, tak stačí nalézt jejich průsečík.

<u>Příklad 3.15:</u> V Mongeově promítání sestrojte průsečík R roviny ρ=(-4;3;2) s přímkou *a*=AB, A=[2;2;4], B=[6;1;-1].



Obrázek 74 - Průsečík přímky s rovinou

Řešení: (Obr. 74) Přímkou *a* proložíme promítací rovinu λ tak, že nárys roviny λ splývá s nárysem přímky *a*. Určíme průsečnici *r* rovin λ a ρ. Hledaný bod R je průsečíkem průsečnice *r* s přímkou *a*.

Příklad 3.16: V Mongeově promítání sestrojte průsečík R roviny ρ=(3;3;2) s přímkou *t*=TU, T=[-1;1;2], U=[3;2;1].

3.6 Otáčení roviny

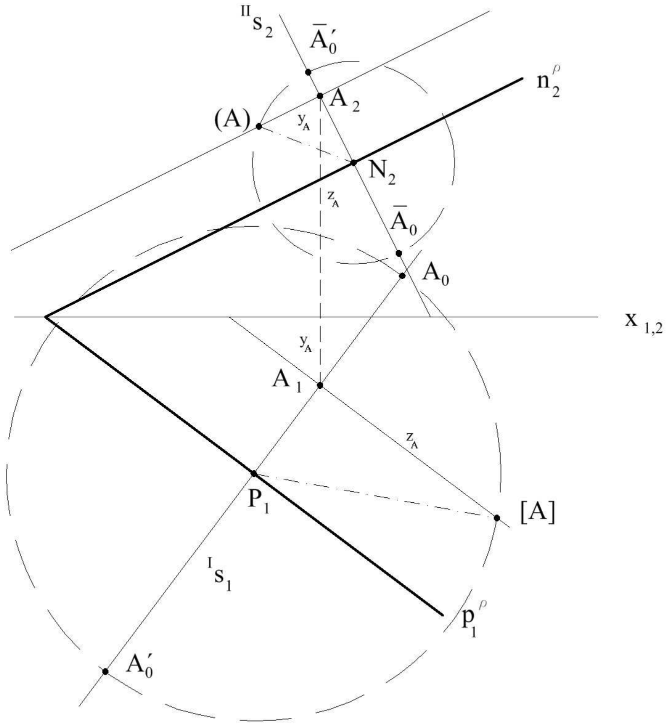
Stejně jako v kótovaném promítání je i v Mongeově projekci často třeba zobrazit útvar obecné roviny ve skutečné velikosti, proto si i zde zavedeme konstrukci zvanou otáčení. I zde budeme otáčet rovinu kolem její stopy do průmětny, přesněji budeme rovinu otáčet kolem její půdorysné stopy do půdorysny anebo kolem její nárysné stopy do nárysny (případně do roviny rovnoběžné s některou průmětnou, kde otáčíme kolem příslušné hlavní přímky). Úlohu číselných kót bodů (z kótovaného promítání) při otáčení v Mongeově projekci nahrazují orientované vzdálenosti průmětů bodů od základnice, tedy jejich y-ové (při otáčení do nárysny) nebo z-ové (při otáčení do půdorysny) souřadnice.

V Mongeově promítání rovněž platí prostorová afinita popsaná u kótovaného promítání a jejím zobrazením do průmětny, do které jsme otáčeli, získáme afinitu v rovině. Osa afinity je příslušná stopa roviny (nebo průmět příslušné hlavní přímky), směr afinity je určen průmětem bodu a otočeným bodem.

Konstrukce otáčení roviny ρ v Mongeově promítání (Obr. 75):

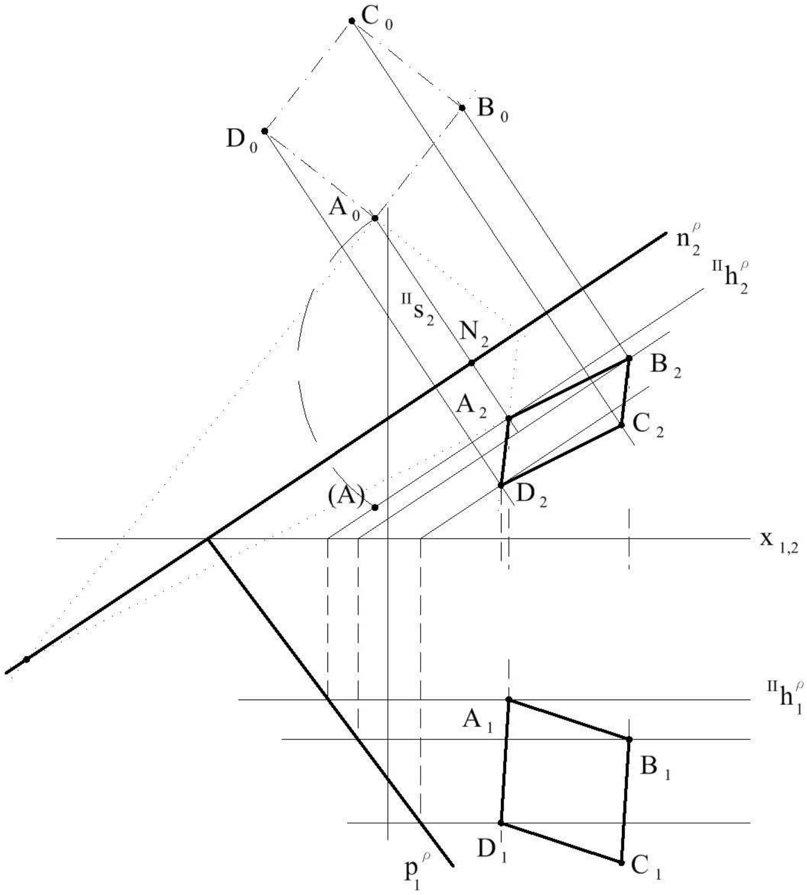
1. otáčení do půdorysny – konstrukci provedeme téměř stejně jako v kótovaném promítání tak, že půdorysem bodu A prochází půdorys spádové přímky ^{I}s roviny ρ, kterou proložíme první promítací rovinu α (α je kolmá k půdorysné stopě roviny ρ - k ose otáčení). Půdorysný stopník P přímky ^{I}s je střed otáčení bodu A, poloměr *r* otáčení bodu A je roven vzdálenosti bodu A od bodu P (tuto vzdálenost získáme sklopením přímky ^{I}s). Otočený bod A, tedy A_0 nebo A_0' (můžeme otáčet dvěma směry, pro názornost byl jeden z bodů označen čárkou), leží na průmětu přímky ^{I}s ve vzdálenost *r* od průmětu středu otáčení P_1.

2. otáčení do nárysny – konstrukci provedeme stejně jako při otáčení do půdorysny s tím rozdílem, že otáčíme kolem nárysu nárysné stopy roviny ρ, využijeme nárysu bodu A a jím jdoucího nárysu spádové přímky ${}^{II}s$ roviny ρ. Střed otáčení bodu A je nárysný stopník N přímky ${}^{II}s$.



Obrázek 75 - Konstrukce otočení bodu A v kótovaném promítání

Příklad 3.17: V Mongeově promítání sestrojte v rovině ρ čtverec ABCD, znáte-li jeho dva sousední vrcholy. ρ=(-3;4;2), A=[2;?;2], B=[4;?;3].



Obrázek 76 - Sestrojení čtverce v obecné rovině

Řešení: (Obr. 76) Pomocí hlavních přímek určíme chybějící průměty bodů A, B (dle příkladu 3.8). Chceme-li rovinu otočit do nárysny (jako na obrázku), najdeme spádovou přímku ^{II}s roviny ρ, která prochází bodem A, a tuto sklopíme. Nárys nárysného stopníku N spádové přímky ^{II}s je středem otáčení bodu A, poloměr otáčení je, jak už víme, vzdálenost nárysu bodu N od nárysu bodu A. Otočíme tedy bod A a získáme bod A_0. Bod B_0 můžeme sestrojit stejně nebo pomocí osové afinity, která je dána osou n_2^ρ a dvojicí odpovídajících si bodů A_2, A_0 (viz příklad 2.16). Nyní můžeme sestrojit čtverec $A_0B_0C_0D_0$ (na obrázku je pro přehlednost sestrojeno jen jedno ze dvou možných řešení). K získání nárysů bodů C,D – tedy C_2, D_2 využijeme opět výše zmíněné osové afinity.

Zbývá sestrojit půdorys zadaného čtverce ABCD. K nalezení půdorysu bodu D využijeme hlavních přímek roviny ρ (v obrázku bylo použito hlavní přímky druhé osnovy). Půdorys bodu C můžeme určit také pomocí hlavní přímky nebo jako chybějící vrchol rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$.

<u>Příklad 3.18:</u> V Mongeově promítání sestrojte v rovině ρ rovnoramenný trojúhelník TUV, znáte-li jeho dva vrcholy. ρ=(2;2;2), T=[-2;1;?], U=[0;?;1].

<u>Příklad 3.19:</u> V Mongeově promítání sestrojte v rovině β pravidelný šestiúhelník ABCDEF, znáte-li jeho dva vedlejší vrcholy C, D. β =(-3;2;3), C=[2;?;1], D=[3;2;?].

<u>Příklad 3.20:</u> V Mongeově promítání určete odchylku přímek *l,m*, jestliže *l*=KL a *m*=ML. K=[-3;2;3], L=[1;1;1], M=[3;3;2].

<u>Příklad 3.21:</u> V Mongeově promítání sestrojte čtverec EFGH, znáte-li bod E a víte, že strana FG leží na přímce *t*=TU. E=[-2;3;1], T=[-1;1;3], U=[1;3;2].

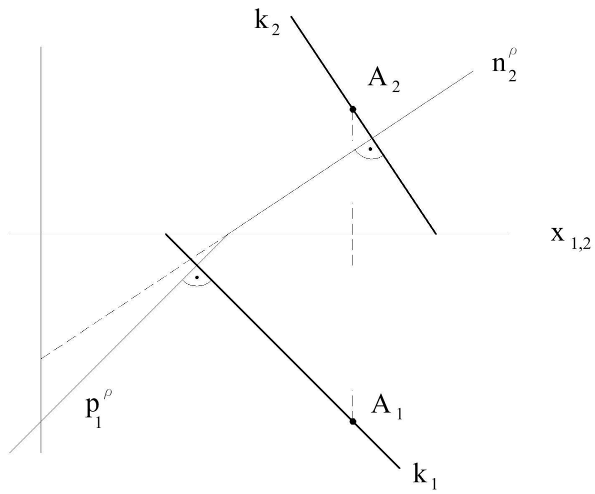
<u>Příklad 3.22:</u> V kótovaném promítání sestrojte střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. A=[0;1;2], B=[2;0;2], C=[1;3;3].

3.7 Přímka kolmá k rovině, rovina kolmá k přímce

V této kapitole si ukážeme hlavně příklady a teorií se příliš zabývat nebudeme, protože již byla popsána v kapitolách 1.2 a 2.7. Zejména si připomeňte větu o průmětu pravého úhlu a tvrzení o kolmosti přímek a rovin (viz kapitola 1.2). Navíc budeme využívat následující <u>tvrzení</u>:

Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když její půdorys je kolmý na půdorys půdorysné stopy roviny (nebo hlavní přímky první osnovy) a zároveň nárys přímky je kolmý na nárys nárysné stopy (nebo hlavní přímky druhé osnovy). Jestliže je rovina rovnoběžná s půdorysnou (nárysnou), půdorys (nárys) hledané kolmice je bod a její nárys (půdorys) je kolmý k základnici.

Příklad 3.23: Daným bodem A veďte přímku k kolmou k rovině ρ. A=[5;4;2], ρ=(3;3;-2).



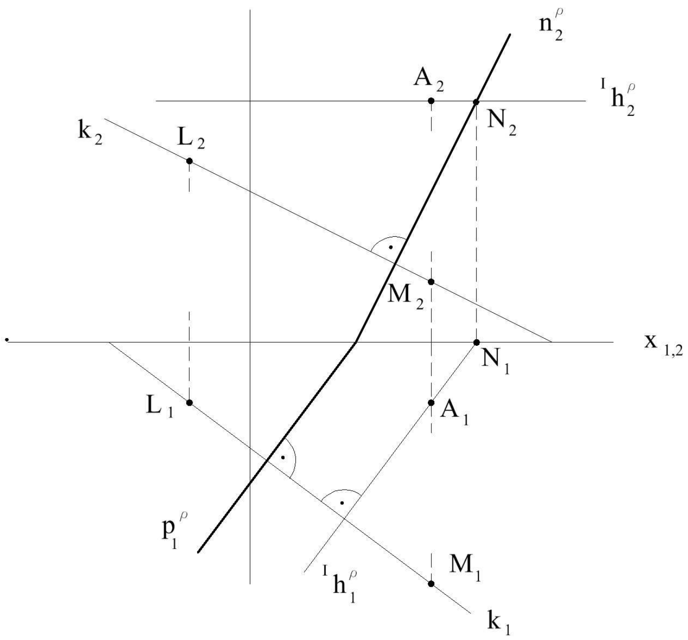
Obrázek 777 - Přímka kolmá k rovině v Mongově promítání

Řešení: (Obr. 77) Půdorys (nárys) kolmice *k* bude procházet půdorysem (nárysem) bodu A a bude kolmý na půdorysnou (nárysnou) stopu roviny ρ. Kolmice *k* je určena svými sdruženými průměty. Postup je přímou aplikací tvrzení uvedeného výše.

Příklad 3.24: Daným bodem Q veďte přímku q kolmou k rovině ρ. Q=[0;2;1], ρ=(-4;3;2).

Příklad 3.25: Daným bodem H veďte přímku *e* kolmou k rovině ρ=DEF. D=[-2;2;1], E=[1;1;3], F=[3;3;1], H=[5;2;2].

Příklad 3.26: Daným bodem A veďte rovinu kolmou k přímce *k*=LM. A=[3;1;4], L=[-1;-1;6], M=[3;6;-1].



Obrázek 78 - Rovina kolmá k přímce v Mongeově promítání

Řešení: (Obr. 78) Sestrojíme průměty hlavní přímky např. první osnovy $^I h$ hledané roviny ρ, která prochází bodem A. Půdorys přímky $^I h$ prochází půdorysem bodu A a je kolmý k půdorysu přímky *k*. Nárys přímky $^I h$ je přímka, která prochází nárysem bodu A a je rovnoběžná se základnicí. Dále určíme nárysný stopník N přímky $^I h$. Nárysná stopa roviny ρ je kolmá k nárysu přímky *k* a prochází bodem N, půdorysná stopa roviny ρ je kolmá k půdorysu přímky *k* a obě stopy téže roviny se protínají na základnici.

Příklad 3.27: Daným bodem Q veďte rovinu ρ kolmou k přímce *k*=AB. Q=[1;0;1], A=[-2;3;1], B=[2;1;2].

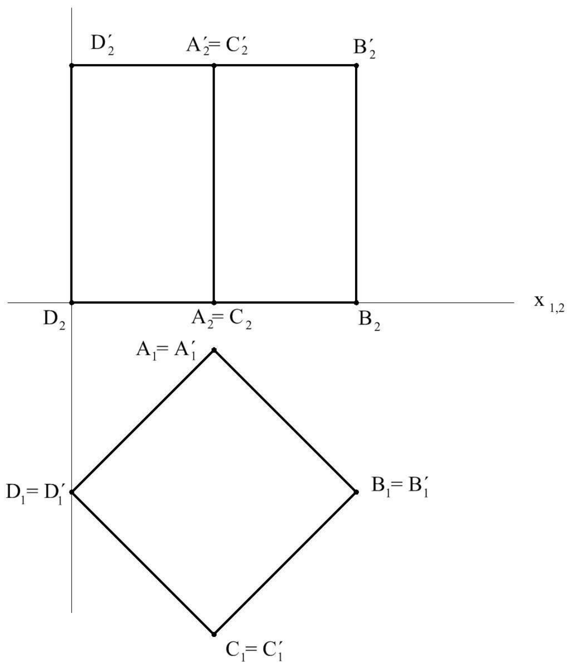
Příklad 3.28: Daným bodem S veďte rovinu kolmou k přímce *s*=ST. S=[-1;1;3], T=[2;2;1].

3.8 Zobrazení těles

V této kapitole si ukážeme, jak narýsovat průmět libovolného hranolu či jehlanu. Všechny potřebné konstrukce a úvahy známe z předchozích kapitol Mongeovy projekce a z kapitoly 1.2.8, určování viditelnosti hran tělesa si vysvětlíme na příkladech.

Viditelné hrany rýsujeme (stejně jako ve všech jiných projekcích) plnou čarou, neviditelné čárkovaně.

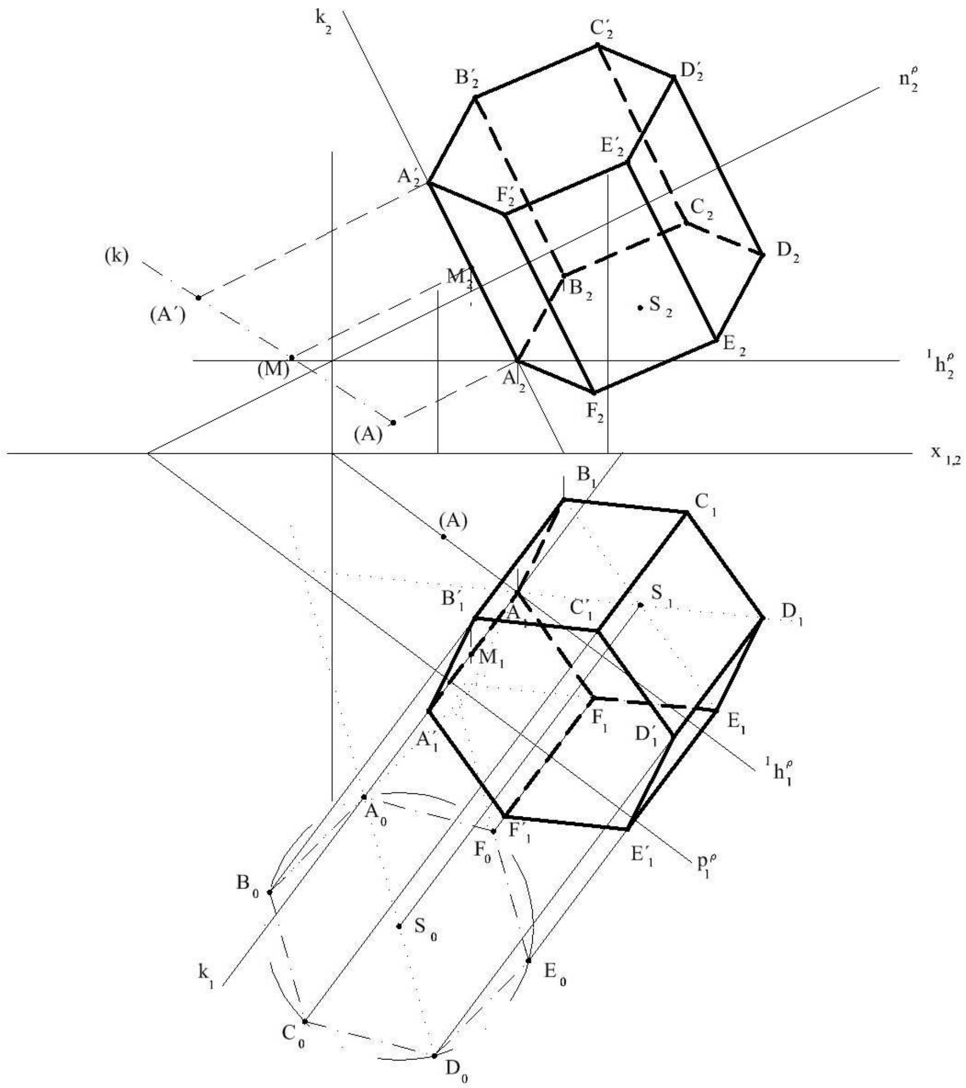
<u>Příklad 3.29:</u> V Mongeově promítání sestrojte pravidelný čtyřboký hranol ABCDA´B´C´D´, který má podstavu v půdorysně a výšku v=5. A=[3;1;0], B=[6;4;0].



Obrázek 79 - Pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v půdorysně

Řešení: (Obr. 79) Spodní podstava hranolu leží v půdorysně, tedy podstava (čtverec) ABCD se zobrazí ve skutečné velikosti v půdorysně na čtverec A_1 B_1 C_1 D_1 a v nárysně jako úsečka na základnici. Dále hledáme přímky, na nichž leží boční hrany hranolu. Tyto přímky prochází body A, B, C, D a jsou kolmé k podstavě, tedy v půdorysně se zobrazí jako body a v nárysně jako přímky kolmé k základnici. Na boční hrany naneseme výšku v – půdorysy bodů A´, B´, C´, D´ splynou po řadě s půdorysy bodů A ,B ,C ,D a nárysy bodů A´, B´, C´, D´ leží na přímce rovnoběžné se základnicí ve vzdálenosti v (celá horní podstava leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti v). Půdorysem celého hranolu je čtverec, nárysem je obdélník. Protože nárys hrany AA´ splývá s nárysem hrany CC´, neviditelné hrany nevyznačujeme.

<u>Příklad 3.30:</u> V Mongeově promítání sestrojte pravidelný šestiboký hranol ABCDEF A´B´C´D´E´F´, který má podstavu v rovině ρ dánu body A, B a výšku v=5. ρ=(-4;3;2), A=[4;3;?], B=[5;1;?] .



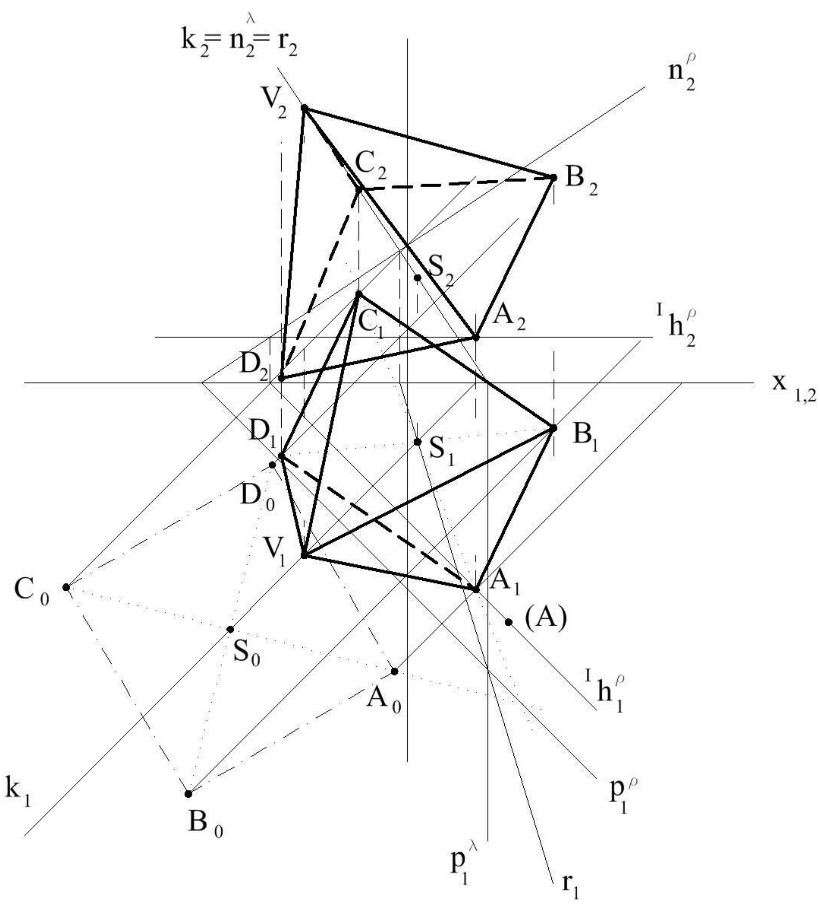
Obrázek 780 - Pravidelný šestiboký hranol v Mongeově promítání

<u>Řešení:</u> (Obr. 80) Průměty podstavy (pravidelného šestiúhelníku) v rovině ρ sestrojíme otočením podle příkladu 3.17. Dále hledáme přímky, na nichž leží boční hrany hranolu. Tyto přímky prochází body A, B, C, D, E, F a jsou kolmé k rovině podstavy. K jejich určení

využijeme dříve popsané konstrukce přímky kolmé k rovině (příklad 3.23). Sklopíme některou z přímek, na nichž leží boční hrany, v obrázku sklápíme do nárysny přímku k=AA´ (pomocí zvoleného bodu M), na sklopeném průmětu přímky k nalezneme bod (A´) ve vzdálenosti v od bodu (A), určíme nárys bodu A´ a pomocí hlavních přímek i jeho půdorys. Kolmice k rovině podstavy, které procházejí všemi body podstavy, jsou navzájem rovnoběžné, takže půdorysy (nárysy) bodů B´ ... F´ nalezneme tak, že od půdorysů (nárysů) bodů B_1 ... F_1 naneseme na kolmice ke stopě, které jimi prochází, vzdálenost půdorysu (nárysu) bodu A od půdorysu (nárysu) bodu A´. Našli jsme průmět zadaného hranolu, zbývá jen určit viditelnost.

Viditelný je celý vnější obrys tělesa. O viditelnosti půdorysů (nárysů) ostatních hran rozhodneme z nárysu (půdorysu) porovnáním z-ových (y-ových) souřadnic bodů, jejichž půdorysy (nárysy) splývají (viz příklad 2.29). V půdorysu je tedy viditelná hrana DD´ a půdorys hrany EF viditelný není. Viditelnost dalších hran v půdoryse stanovíme s využitím prostorové představivosti nebo můžeme použít výše popsané úvahy. Z půdorysu určíme viditelnost hran v nárysu, využijeme k tomu „pohledu zepředu“ (nárys hrany BB´ není viditelný, nárys hrany E´F´ je viditelný), nebo úvahy ekvivalentní úvahám vedoucím k určení viditelnosti v půdorysu.

<u>Příklad 3.31:</u> V Mongeově promítání sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, který má podstavu v rovině ρ. Dále známe bod A podstavy a vrchol V jehlanu. ρ=(-3;3;2), A=[1;3;?], V=[-1,5;2,5;4] .



Obrázek 79 - Průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu

<u>Řešení:</u> (Obr. 81) Pravidelný čtyřboký jehlan má výšku na přímce k jdoucí bodem V a kolmé k rovině ρ podstavy (kolmici k rovině daným bodem sestrojíme dle příkladu 3.23). Pata této kolmice je středem S podstavy (bod S nalezneme jako průsečík kolmice *k* s rovinou ρ dle příkladu 3.15). V rovině ρ známe vrchol A a střed S podstavy, takže ji můžeme otočením sestrojit (dle příkladu 3.17). Sestrojili jsme zadaný jehlan, zbývá určit viditelnost v půdoryse a v nárysе.

Viditelný je opět v obou průmětnách celý vnější obrys tělesa. Další viditelné hrany určíme podle postupu z příkladu 3.30 (např. v půdoryse hrana DV bude viditelná, hrana AD nikoli).

Příklad 3.32: V Mongeově promítání sestrojte trojboký kvádr ABCDEF, znáte-li body A, B, C podstavy a víte, že jeho výška v=4. A=[0;1;2], B=[3;2;1], C=[1;3;4].

Příklad 3.33: V Mongeově promítání sestrojte pravidelný šestiboký jehlan ABCDEFV, který má podstavu v rovině ρ, znáte-li střed S podstavy a vrchol A. ρ=(2;-1;3), A=[-1;1;?], S=[1;2;?].

Příklad 3.34: V Mongeově promítání sestrojte pravidelný pětiboký jehlan ABCDEV. Rovina podstavy je určena body ABT a výška v=6. A=[-4;2;3], B=[-3;4;1], T=[1;4;5].

Příklad 3.35: V Mongeově promítání sestrojte krychli ABCDEFGH, která má podstavu v rovině ρ=(-2;∞;3), znáte-li body tělesové úhlopříčky AG. A=[0;2;?], G=[4;1;3].

4 ZÁVĚR

Cílem práce bylo vytvořit vhodnou pomůcku pro žáky studující deskriptivní geometrii na střední škole. Existuje celá řada poznatků, které v práci uvedeny nejsou nebo jsou jen okrajově zmíněny. Je ponecháno na vůli učitele, aby podle možností svých a jeho žáků rozhodl, kolik z těchto mezer zaplní svým výkladem. Tato práce mu poskytuje dostatek přehledně zpracované a vysvětlené učební látky, na níž se může odkazovat bez vážných obav, že by žáci neporozuměli danému problému.

Pravděpodobně nejznatelnější z těchto mezer je absence řešených a neřešených úloh zabývajících se speciální polohou prvků vzhledem k některé průmětně, ose... Je bezesporu, že takové úlohy jsou z pravidla konstrukčně daleko méně náročné než úlohy řešené v obecné poloze, které jsou v práci podrobně vysvětlovány. V teoretických částech případy prvků ve speciální poloze opomenuty nejsou a předpokládá se, že učitel se svými žáky úlohy k tomuto tématu probere dle vlastního uvážení.

Případnou další námitkou by mohl být nedostatek příkladů k procvičení daného učiva, zejména v kótovaném a Mongeově promítání. Protože jsou však kapitoly kótovaného promítání a Mongeovy projekce tvořené identicky, žák může využít k procvičení daného tématu neřešených úloh z příslušných podkapitol obou kapitol.

Závěrem je vhodné ještě zmínit, že práce může pomoci začínajícímu učiteli s tvorbou příprav k vyučovacím hodinám a poskytuje mu návod, jak žákům přijatelnou a srozumitelnou formou vysvětlit novou látku.

POUŽITÁ LITERATURA A INFORMAČNÍ ZDROJE

1. PISKA, R., MEDEK, V. *Deskriptivní geometrie I.* Bratislava: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. 336s. Bez ISBN.
2. URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. 368s. Bez ISBN.
3. HARANT, M., LANTA, O. *Deskriptivní geometrie pro II. a III.ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. 284s. Bez ISBN.
4. POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia - Stereometrie.* Praha: Prometheus, 1998. 223s. ISBN 80-7196-079-9.
5. FIŠER, A., JOZÍFEK, V., KRAEMER, E., VYČICHLO, F. *Rýsování pro třetí a čtvrtou třídu středních škol.* Praha: Státní nakladatelství v Praze, 1950. 132s. Bez ISBN.
6. DRS, L. *Deskriptivní geometrie pro střední školy I.* Praha: Prometheus, 2005. 131s. ISBN 80-7196-321-6.
7. MACHALA, F., SEDLÁŘOVÁ, M., SROVNAL, J. *Konstrukční geometrie*. Olomouc : skriptum UP, 2002. 166s. ISBN 80-244-0399-4.
8. ZGODOVÁ, A., *Volné rovnoběžné promítání* [online]. 2011 [cit. 2013-04-16]. 55 l. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/324385/prif_b/Volne_rovnobezne_promitani.pdf Masarykova univerzita. Vedoucí práce RNDr. Jan Vondra, Ph.D.