



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

**VLASTNÍ A VYNUCENÉ KMITÁNÍ KAPALINY V ROTAČNĚ
SYMETRICKÉ OBLASTI**

SELF-EXCITED AND FORCED PULSATIIONS OF LIQUID IN AXISYMMETRIC DOMAIN

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Kristýna Skopalová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. František Pochylý, CSc.

BRNO 2017

Zadání diplomové práce

Ústav:	Energetický ústav
Studentka:	Bc. Kristýna Skopalová
Studijní program:	Strojní inženýrství
Studijní obor:	Fluidní inženýrství
Vedoucí práce:	prof. Ing. František Pochylý, CSc.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vlastní a vynucené kmitání kapaliny v rotačně symetrické oblasti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jedná se o analytické a numerické řešení Navier-Stokesových rovnic. Rovnice budou linearizovány za předpokladu malých kmitů kapaliny.

Aplikaci je možno využít při řešení kluzných ložisek a hydrodynamických těsnících spár hydraulických strojů.

Cíle diplomové práce:

1. Formulace matematického modelu pro kmitání tekutiny
a) v mezikruží, b) ve válcové oblasti.
2. Návrh řešení vlastního a vynuceného kmitání pro zvolené varianty

Seznam doporučené literatury:

BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. Mechanika kontinua. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. ISBN 8020007725.

AXISA, Francois and ANTUNES, José. Modelling of mechanical systems: Fluid-Structure Interaction. Butterworth-Heinemann. Boston, 2006. ISBN 9780750668477.

KORENĚV, Boris Grigor'jevič. Úvod do teorie Besselových funkcí. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1977.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá určením vlastního a vynuceného kmitání reálné kapaliny ve válcové oblasti a v mezikruží. Zaměřuje se také na případ rezonance, jenž má nepříznivý vliv na hydraulický obvod.

Výsledkem práce jsou analytické vztahy pro určení vlastních a vynucených tvarů průtoku a tlaku v uzavřené válcové oblasti, a to pro dvě zvolené varianty kinematického buzení. V první variantě je uvažováno buzení průtokem ve tvaru sinové funkce. Druhá varianta je vyjádřena pilovitým průběhem funkce.

Pro mezikruží je popsáno kmitání kapaliny vyvolané pohybem tělesa. Dále jsou v této oblasti řešeny vlastní tvary kmitů kapaliny bez vnějšího buzení.

Summary

The diploma thesis deals with the determination of the self-excited and forced pulsation of the real fluid in the cylindrical area and in the annulus. It also focuses on a case of resonance that has an unfavorable effect on the hydraulic circuit.

The result of the thesis is the analytical relations for determination of self-excited and forced shapes of flow and pressure in the closed cylindrical area, for two selected variants of kinematic excitation. In the first variant, excitation is performed in the form of a sinus function. The second variant is expressed as a sawtooth function.

A pulsation of the fluid caused by the movement of the body is described for the annulus. Further, in this area, the shapes of fluid pulsation are solved without external excitation.

Klíčová slova

kapalina, vlastní kmitání, vynucené kmitání, kritická frekvence, rezonance

Keywords

liquid, self-excited pulsation, forced pulsation, critical frequency, resonance

SKOPALOVÁ, K. *Vlastní a vynucené kmitání kapaliny v rotačně symetrické oblasti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 80 s. Vedoucí prof. Ing. František Pochylý, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Vlastní a vynucené kmitání kapaliny v rotačně symetrické oblasti* vypracovala samostatně pod vedením prof. Ing. Františka Pochylého, CSc. a v seznamu literatury uvedla všechny použité zdroje.

Bc. Kristýna Skopalová

Chtěla bych na tomto místě poděkovat panu prof. Ing. Františku Pochylému, CSc. za vedení mé diplomové práce, ochotu a cenné rady.

Dále bych ráda poděkovala mé rodině za podporu v průběhu celého studia a nejen během něj.

Bc. Kristýna Skopalová

Obsah

1	Úvod	3
2	Matematický aparát	4
2.1	Einsteinova sumační konvence	4
2.2	Laplaceova transformace	6
2.2.1	Definice Laplaceovy transformace	6
2.2.2	Laplaceovy obrazy vybraných funkcí	6
2.2.3	Vlastnosti Laplaceovy transformace	8
2.3	Besselovy funkce	9
2.3.1	Besselovy funkce prvního druhu	9
2.3.2	Besselovy funkce druhého druhu	10
2.3.3	Modifikace Besselovy funkce	12
3	Fyzikální aparát	13
3.1	Rovnice kontinuity	13
3.1.1	Rovnice kontinuity v cylindrických souřadnicích	16
3.2	Navier-Stokesova rovnice	19
3.2.1	Navier-Stokesova rovnice v cylindrických souřadnicích	22
4	Vlnová rovnice pro tlakovou funkci	23
5	Kmitání kapaliny v rovině	27
6	Kmitání tekutiny ve válcové oblasti	36
6.1	Proudění v uzavřené trubici s buzením průtoku sinovou funkcí	36
6.1.1	Kmitání kapaliny v konkrétní trubici	46
6.2	Kmitání kapaliny v uzavřené trubici s buzením průtoku pilovitou funkcí	51
7	Kmitání kapaliny v mezikruží	60
7.1	Kmitání kapaliny v mezikruží vyvolané pohybem tělesa	60
7.1.1	Přídavná hmotnost kapaliny	68
7.2	Vlastní tvary kmitů kapaliny v mezikruží	69
7.2.1	Mezikruží vyplněné nestlačitelnou neviskózní kapalinou	69
7.2.2	Mezikruží vyplněné stlačitelnou viskózní kapalinou	71
8	Závěr	77
9	Seznam zkratk	79

1. Úvod

V mnohých hydraulických obvodech dochází k pulzačnímu pohybu kapaliny, který následně vede k tlakovým pulzacím. Takové pulzace bývají příčinou trvalého dynamického zatížení jednotlivých prvků v obvodu, jenž mají za následek snížení životnosti a také zhoršení podmínek pro správný chod řídicích i kontrolních prvků. Dalším nechtěným jevem je nepříznivé ovlivnění těsnosti systému [14]. Z uvedených důvodů má tedy význam se pulzacemi kapaliny zabývat, a to jak jejími vlastními tvary, tak i těmi vynucenými.

Dále bude uvedena struktura diplomové práce. Ve druhé kapitole je popsán přehled základního matematického aparátu, který je dále v práci využíván. Zmíněna je zde Einsteiнова sumační konvence, Laplaceova transformace, její vlastnosti a vybrané věty. Následně jsou zde uvedeny Besselovy funkce a také jejich modifikace.

Třetí část je věnována fyzikálnímu aparátu. Popsána je rovnice kontinuity a Navier-Stokesova rovnice, a to pro kartézský souřadný systém i pro cylindrické souřadnice. V následující části je z obou zmíněných rovnic odvozena vlnová rovnice pro tlakovou funkci. Navazuje kapitola, která se zabývá kmitáním kapaliny v rovině, jenž je popsáno pomocí polárních souřadnic.

V další části práce je pozornost zaměřena na kmitání tekutiny ve válcové oblasti. Jedná se o uzavřenou trubici, kde probíhá buzení průtoku pomocí pístu. Nejprve je problém řešen pro buzení sinovou funkcí. U tohoto případu je řešení také ilustrováno na konkrétně zvolené trubici. Dále je řešen případ buzení průtoku pomocí funkce pilovitého průběhu. V obou případech je zjištěno, kdy bude docházet k rezonanci, tedy ke shodě vlastní frekvence s budící frekvencí.

Poslední část se zabývá kapalinou v mezikruží. Nejprve je zmíněna problematika kmitání kapaliny, jenž je vyvoláno pohybem tělesa. Pro tento případ je vypočítána tlaková funkce a rychlostní funkce. Zmíněna je také přídatná hmotnost kapaliny. Další podkapitoly jsou věnovány zjišťování vlastních tvarů kmitů v mezikruží, které je vyplněné neviskózní nestlačitelnou kapalinou a následně viskózní stlačitelnou kapalinou.

Poslední kapitola zahrnuje shrnutí a závěrečné komentáře.

2. Matematický aparát

Tato část bude věnována definici některých matematických pojmů, které budou v práci dále využívány. První podkapitola bude zaměřena na popis Einsteinovy sumační konvence, další se bude zabývat Laplaceovou transformací a v poslední části této kapitoly bude zmíněna Besselova funkce, její druhy, modifikace a také řešení.

2.1. Einsteinova sumační konvence

Uvedená podkapitola je zpracována na základě literatury [6], [9], [13].

Při zápisu pomocí Einsteinovy sumační symboliky bývá užíváno sčítacích indexů, které budou značeny malými písmeny abecedy (zpravidla i, j, k, \dots). Pokud se ve výrazu vyskytnou dva stejné indexy, pak přes ně sčítáme. Uvedeme příklad takového zápisu

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_N \cdot b_N = \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i = a_i \cdot b_i. \quad (2.1)$$

Dále budou zmíněny některé matematické operace, u kterých bývá Einsteinova sumační konvence využívána.

Skalární součin dvou vektorů

Máme-li dány následující vektory o N souřadnicích

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N) = a_i, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N) = b_i,$$

pak jejich skalární součin lze zapsat následovně

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_N \cdot b_N = a_i \cdot b_i. \quad (2.2)$$

Maticové násobení

Uvažujme matice \mathbf{A} a \mathbf{B} , které je možné napsat

$$\mathbf{A} = a_{ij}, \quad \mathbf{B} = b_{ij}.$$

Součin zmíněných matic pak bude

$$\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\}_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{ik} \cdot b_{kj}. \quad (2.3)$$

Volnými indexy jsou v tomto případě indexy i a j , přes které neprobíhá sčítání. Naopak přes vázané indexy se sčítá, což je index k .

Operátor divergence

Mějme následující vektor v prostoru, tedy vektor o třech souřadnicích

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_i.$$

Na výše uvedený vektor aplikujeme operátor divergence a dostáváme

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

Operátor gradient

Uvažujeme-li skalární veličinu a , pak je jeho totální derivací vektorová funkce, která je nazývána gradient

$$\operatorname{grad} a = \frac{\partial a}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2}, \frac{\partial a}{\partial x_3} \right). \quad (2.5)$$

Tento operátor je možné zapsat také pomocí Hamiltonova operátoru nabla, a to následovně

$$\operatorname{grad} a = \nabla a. \quad (2.6)$$

Kroneckerův delta operátor

Symbol δ_{ij} značí tzv. Kroneckerův delta operátor, který má tyto vlastnosti

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (2.7)$$

Laplaceův delta operátor

Posledním z operátorů, který bude v práci využíván je Laplaceův delta operátor. Budeme jej aplikovat na obecnou funkci $a(x_1, x_2, x_3)$. Jeho definice je následující

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}. \quad (2.8)$$

2.2. Laplaceova transformace

Laplaceova transformace patří mezi integrální transformace. Její počátky jsou spojené s Leonhardem Eulerem, který žil v 18. století. Na něj navázal a tuto teorii rozpracoval francouzský matematik Pierre Simon Laplace, po němž je tato transformace také pojmenována. Laplaceova transformace bývá využívána hlavně v technické praxi, zejména při řešení lineárních diferenciálních rovnic, některých parciálních diferenciálních rovnic a vybraných integrálních rovnic [7]. Zbylá část této podkapitoly vychází z [8].

2.2.1. Definice Laplaceovy transformace

Budiž $f(t)$ daná komplexní funkce reálné proměnné, nazveme ji předmětem. Nechť následující integrál (2.9) existuje a má konečnou hodnotu aspoň pro jedno komplexní číslo s . Potom k funkci $f(t)$ definujeme Laplaceův obraz $F(s)$ rovnicí

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (2.9)$$

Definičním oborem Laplaceova obrazu $F(s)$ je množina všech komplexních čísel, pro které integrál uvedený ve vztahu (2.9) konverguje. Integrál na pravé straně tohoto vztahu se nazývá definičním integrálem Laplaceovy transformace.

Často bývá využíván symbol \mathcal{L} pro značení Laplaceovy transformace. Tento symbol se používá pro obraz Laplaceovy transformace funkce, která za tímto znakem následuje. Definici Laplaceovy transformace z (2.9) můžeme tedy psát následovně

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (2.10)$$

2.2.2. Laplaceovy obrazy vybraných funkcí

V této části budou uvedeny Laplaceovy obrazy vybraných funkcí, které budou v práci využívány. Předtím je však nutné nadefinovat pojem předmět standardního typu.

Komplexní funkce $f(t)$ reálné proměnné t se nazývá předmět standardního typu, má-li tyto tři vlastnosti

1. Je po částech spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.
2. Je exponenciálního řádu.
3. Rovná se nule pro všechna $t < 0$.

Nejprve se zaměříme na Laplaceův obraz první derivace, poté na n -tou derivaci. V obou případech budou uvedeny věty o jejich obrazu. Dále budou zmíněny obrazy vybraných funkcí, které budou pro následné výpočty užitečné.

Věta o obrazu derivace

Nechť funkce $f(t)$ a její derivace $f'(t)$ jsou předměty standardního typu. Nechť dále funkce $f(t)$ je spojitá v otevřeném intervalu $(0, +\infty)$. Označme $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Budiž dále $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, tuto veličinu nazveme počáteční hodnotou funkce $f(t)$. Potom

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0+).$$

Věta o obrazu n -té derivace

Budiž n přirozené číslo. Nechť funkce $f(t)$ a všechny její derivace až do n -tého řádu včetně jsou předměty standardního typu. Nechť dále funkce $f(t)$ a všechny její derivace až do řádu $(n-1)$ včetně jsou spojitě pro všechna $t > 0$. Označme

$$f^{(k)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

kde ovšem nultá derivace je původní funkce: $f^{(0)}(t) = f(t)$. Veličiny $f^{(k)}(0+)$ nazveme počátečními hodnotami funkce a jejích derivací. Potom platí

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \cdot f^{(i-1)}(0+). \quad (2.11)$$

Laplaceovy obrazy vybraných funkcí

V Tabulce 2.1 budou dále uvedeny předměty a obrazy Laplaceovy transformace vybraných funkcí.

Tabulka 2.1: Laplaceovy obrazy vybraných funkcí

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\sin(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

2.2.3. Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta o linearitě přímé Laplaceovy transformace

Nechť $f_i(t)$ jsou předměty standardního typu a $F_i(s) = \mathcal{L}\{f_i(t)\}$ jejich obrazy, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dále nechť a_i jsou libovolné komplexní konstanty. Potom pro všechna komplexní čísla s , pro která jsou definovány současně všechny obrazy $F_i(s)$, platí

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_i(s). \quad (2.12)$$

Z uvedené věty vyplývá, že obrazem lineární kombinace konečného počtu předmětů je lineární kombinace odpovídajících obrazů, a to se stejnými koeficienty.

Věta o rozkladu

Budiž $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ racionální lomená funkce, čitatel stupně nižšího než jmenovatel. Nechť jmenovatel má právě n vesměs různých kořenů s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, takže

$$Q(s) = a_n \cdot (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n), \quad a_n \neq 0.$$

Potom

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i}, \quad (2.13)$$

kde

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} [(s - s_i) \cdot F(s)] \cdot \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)}, \quad (2.14)$$

takže

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = \sum_{i=1}^n \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} \cdot e^{s_i \cdot t}. \quad (2.15)$$

Věta o Laplaceově obrazu konvoluce

Nechť $f(t)$, $g(t)$ jsou předměty standardního typu, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

Potom

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s). \quad (2.16)$$

Obrazem konvoluce předmětů je tedy součin jejich obrazů. Nyní je ještě nutné zmínit definici konvoluce. Pokud máme dvě funkce $f(t)$ a $g(t)$, které jsou po částech spojitě v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, pak konvolucí, nebo také kompozicí funkcí $f(t)$, $g(t)$ značíme $f(t) * g(t)$ a její definici lze psát následovně

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau, \quad (2.17)$$

přičemž musí platit, že $t \geq 0$.

2.3. Besselovy funkce

Uvedená podkapitola je zpracována na základě zdrojů [1], [4].

Besselovy funkce bývají využívány při mnohých úlohách v oblastech matematické fyziky a také při řešení některých technických problémů. Často bývají spojovány s použitím cylindrických a sférických souřadnic, kde proces separace proměnných vede na diferenciální rovnici, která má následující tvar

$$z^2 \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + z \cdot \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2) \cdot u = 0. \quad (2.18)$$

Tuto rovnici nazýváme Besselovou rovnicí a její řešení cylindrickými, neboli Besselovými funkcemi. Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Její obecné řešení můžeme psát ve tvaru

$$u(z) = C_1 \cdot u_1(z) + C_2 \cdot u_2(z), \quad (2.19)$$

kde $u_1(z)$ a $u_2(z)$ jsou lineárně nezávislá partikulární řešení diferenciální rovnice (2.18). Bývá uvažováno, že z a ν mohou být libovolná komplexní čísla. V případě, že je index ν celé číslo, označuje se písmenem n . Pokud budou hodnoty argumentu z reálné, označíme je x . Řešení rovnice (2.18) bývá udáváno ve tvaru nekonečné řady.

2.3.1. Besselovy funkce prvního druhu

O Besselových funkcích prvního druhu hovoříme, pokud index ν není celým číslem. V takové případě má první řada $u_1(z)$ uvedená v obecném řešení ve vztahu (2.19) následující podobu

$$u_1(z) = J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (2.20)$$

Druhá řada určuje Besselovu funkci se záporným indexem $-\nu$

$$u_2(z) = J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(-\nu + m + 1)}. \quad (2.21)$$

Výše uvedené mocninné řady konvergují v celé rovině komplexních čísel (výjimkou může být bod $z = 0$) a mohou být také derivovány člen po členu.

Řešení Besselovy rovnice při neceločíselném indexu ν můžeme tedy zapsat

$$u(z) = C_1 \cdot J_\nu(z) + C_2 \cdot J_{-\nu}(z). \quad (2.22)$$

Ve vztazích (2.20) a (2.21) je uvedena funkce gama, která bývá také nazývána Eulerovým integrálem druhého druhu. Tato funkce je definována následujícím nevlastním integrálem

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-x} \cdot x^{z-1} \cdot dx. \quad (2.23)$$

Tento integrál konverguje pro všechny komplexní hodnoty z , jejichž reálná část je kladná.

2.3.2. Besselovy funkce druhého druhu

Dále uvedeme řešení pro celočíselné hodnoty ν , které vychází z Besselovy funkce druhého druhu, jenž bývá také označován jako Neumannova funkce, a má tuto podobu

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cdot \cos(\nu \cdot \pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu \cdot \pi)}. \quad (2.24)$$

Pokud necháme hodnotu ν konvergovat k celému číslu, které označíme n , pak pravá strana uvedené funkce nabude neurčitého tvaru. V takovém případě však můžeme využít l'Hospitalova pravidla a dostáváme tento tvar

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(z) \cdot \cos(\nu \cdot \pi) - J_{-\nu}(z)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} [\sin(\nu \cdot \pi)]}. \quad (2.25)$$

Po úpravě můžeme vyjádřit funkci následovně

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(z) \cdot \left(\ln \frac{z}{2} + C_E \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \\ - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2 \cdot m}}{m! \cdot (n+m)!} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right], \quad (2.26)$$

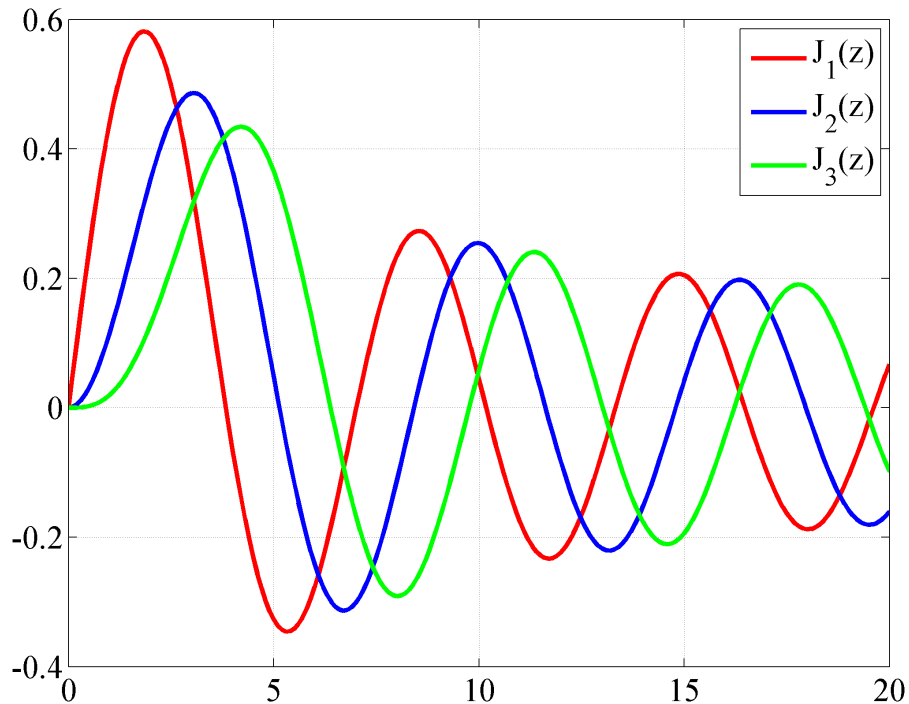
kde C_E značí Eulerovu konstantu, jejíž přibližná hodnota je 0,577 216. Uvedená Neumannova funkce společně s Besselovou funkcí ze vztahu (2.20) představuje systém řešení Besselovy rovnice (2.18), a to pro index ν roven celému číslu. Takové řešení tedy můžeme zapsat

$$u(z) = C_1 \cdot J_n(z) + C_2 \cdot Y_n(z). \quad (2.27)$$

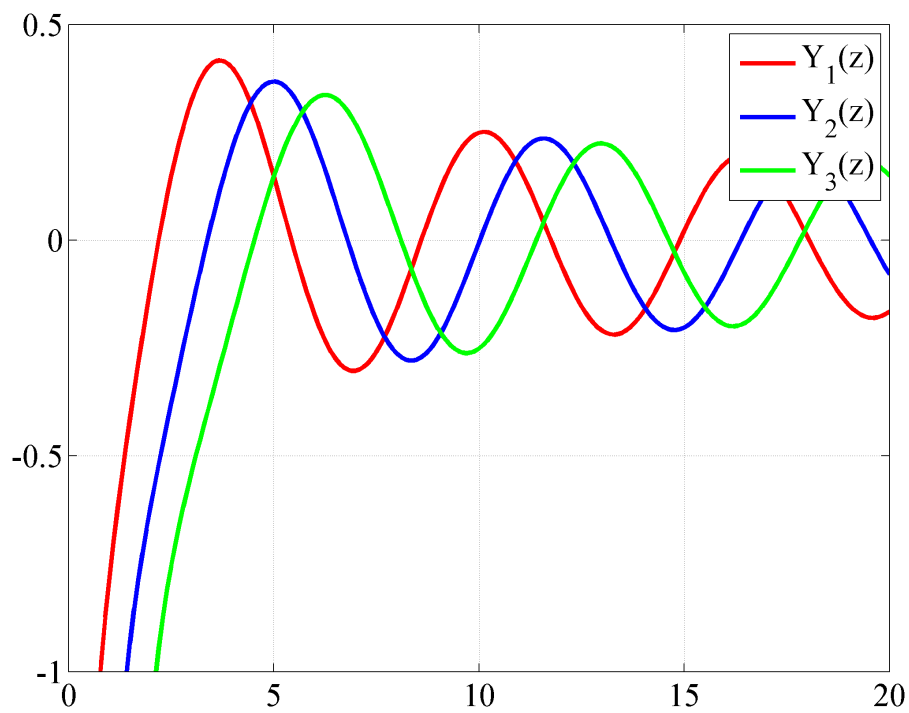
Uvedené řešení je však možné využít i pro libovolnou hodnotu ν .

Pro ilustraci průběhu Besselových funkcí prvního druhu jsou na Obrázku 2.1 její průběhy vykresleny, a to pomocí programu Matlab. Červenou barvou je zobrazena Besselova funkce pro hodnotu $n = 1$, modrou barvou pro $n = 2$ a zelená křivka zobrazuje funkci pro $n = 3$.

Dále jsou na Obrázku 2.2 vykresleny Besselovy funkce druhého druhu, tedy funkce $Y_n(z)$. Červená křivka představuje Besselovu funkci pro hodnotu $n = 1$, modrá je zobrazením $n = 2$ a zelená představuje funkci pro $n = 3$. Z průběhů je patrné, že pokud se hodnota z blíží k nule, pak funkce $Y_n(z)$ pro celočíselné hodnoty n bude konvergovat k minus nekonečnu.



Obrázek 2.1: Besselovy funkce $J_1(z)$, $J_2(z)$ a $J_3(z)$



Obrázek 2.2: Neumannovy funkce $Y_1(z)$, $Y_2(z)$ a $Y_3(z)$

2.3.3. Modifikace Besselovy funkce

Při řešení některých typů úloh jen výjimečně získáme podobu Besselovy diferenciální rovnice zapsané ve tvaru (2.18). Uvedeme tedy i další modifikaci, jejíž řešení lze také zapsat pomocí Besselových funkcí. Zaměříme se na následující tvar rovnice

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{a}{z} \cdot \frac{du}{dz} + \left(b \cdot z^k + \frac{c}{z^2} \right) \cdot u = 0, \quad (2.28)$$

kde a , b , c a k jsou konstanty. V takovém případě má tato rovnice obecné řešení

$$u(z) = z^{\frac{1-a}{2}} \cdot u_\nu \left(\frac{2 \cdot \sqrt{b}}{k+2} \cdot z^{\frac{k+2}{2}} \right). \quad (2.29)$$

Funkce u_ν představuje

$$u_\nu = C_1 \cdot J_\nu(z) + C_2 \cdot Y_\nu(z). \quad (2.30)$$

Hodnotu ν zjistíme následovně

$$\nu = \frac{[(1-a)^2 - 4 \cdot c]^{\frac{1}{2}}}{k+2}. \quad (2.31)$$

3. Fyzikální aparát

V této kapitole budou popsány dvě základní rovnice, které bývají nejčastěji využívány v oblasti mechaniky tekutin. Jedná se o rovnici kontinuity a rovnice rovnováhy, neboli Navier-Stokesovu rovnici. Pro obě budou navíc uvedeny jejich podoby v cylindrických souřadnicích.

3.1. Rovnice kontinuity

Při popisu této podkapitoly bylo čerpáno z [2], [3], [9] [11].

Rovnice kontinuity se zabývá obecně platným fyzikálním zákonem o zachování hmotnosti. Ten musí být splněn při proudění libovolné tekutiny. Stav takové pohybující se tekutiny můžeme zcela určit pěti veličinami. Tři z nich jsou rychlosti v jednotlivých směrech, což můžeme zapsat vektorem rychlosti v_i , kde $i = 1, 2, 3$. Uvažujeme totiž proudění v prostoru, tedy vektor rychlosti musí mít tři složky. Rychlosti v jednotlivých směrech jsou závislé na poloze a čase, tj. $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Zbývající dvě veličiny popisují stav tekutiny z termodynamického hlediska. Jsou jimi tlak $p(x_1, x_2, x_3, t)$ a hustota $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$.

Nyní se zaměříme na odvození rovnice kontinuity. Cílem bude vyšetřit vztah mezi uvedenými pěti veličinami při pohybu tekutiny. Pro odvození bude zvolena kontrolní plocha S , která je volena pevně a zároveň je uzavřená. Jedná se o plochu, která je hranicí nějaké omezené, jednoduše souvislé oblasti o objemu V . Uvažujeme, že přes stěny plochy S proudí dovnitř i ven tekutina. Při pohybu tekutiny se přemísťuje její hmotnost a předpokládáme její zachování. Problém vyšetříme na elementární kontrolní ploše o obsahu dS . Tímto elementárním obsahem proteče za jednotku času tekutina o hmotnosti dané tímto vztahem

$$\rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \rho \cdot v_i \cdot n_i \cdot dS, \quad (3.1)$$

přičemž ρ značí hustotu a \mathbf{v} je vektor rychlost tekutiny v místě plošky dS . Dále \mathbf{n} představuje jednotkový vektor vnější normály k ploše dS . Znaménko skalárního součinu $v_i \cdot n_i$ určuje, jakým směrem tekutina proudí. Je-li kladné, kapalina z kontrolní plochy vytéká. Pokud je záporné, tak do kontrolní plochy vtéká.

Uvedeme integrál, který platí pro celou kontrolní plochu S a vyjadřuje celkovou hmotnost tekutiny, která vytéká z objemu V plochou S za jednotku času

$$\int_S \rho \cdot v_i \cdot n_i \cdot dS. \quad (3.2)$$

Celková hmotnost tekutiny obsažené v objemu V , což je vnitřek kontrolní plochy S , je dána objemovým integrálem

$$\int_V \rho \cdot dV. \quad (3.3)$$

Úbytek hmotnosti uvnitř dané plochy S za jednotku času je určen výrazem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V \rho \cdot dV. \quad (3.4)$$

Pokud nejsou v kontrolní ploše zřídla a uvažujeme-li platnost zákona zachování hmotnosti, pak musí být výraz (3.2) v rovnosti s výrazem (3.4)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V \rho dV = \int_S \rho \cdot v_i \cdot n_i \cdot dS. \quad (3.5)$$

Výše uvedená rovnice popisuje zákon zachování hmotnosti při pohybu tekutiny v libovolně uvažované části kontinua, která je určena kontrolní plochou S . Přičemž plocha S uzavírá objem značený V , jenž je pevně zvolen. Rovnici (3.5) můžeme zapsat následovně

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_S \rho \cdot v_i \cdot n_i \cdot dS = 0. \quad (3.6)$$

Na tuto rovnici aplikujeme Gauss-Ostrogradského větu, abychom člen s plošným integrálem převedli na integrál objemový. Větu můžeme aplikovat, neboť jsou splněny všechny podmínky k jejímu využití

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_S \rho \cdot v_i \cdot n_i \cdot dS = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} \right] \cdot dV = 0. \quad (3.7)$$

Plocha S , a tedy i objem V , byla zvolena libovolně, můžeme tedy psát

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.8)$$

Rovnici je možné uvést i v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (3.9)$$

Tato rovnice popisuje zákon zachování hmotnosti v kontinuu, avšak jen lokálně. Bývá také nazývána rovnicí kontinuity. Chceme-li tuto rovnici vyjádřit pro libovolnou oblast, musíme uvažovat totální derivaci hustoty ρ podle času t . Rovnice kontinuity bude tvaru

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.10)$$

Z praktických důvodů bývá v některých případech výhodné zapsat totální derivaci hustoty pomocí tlaku. Pokud uvažujeme, že jeho změny můžeme popsat v závislosti na absolutní teplotě T a hustotě ρ , tj. $p = p(\rho, T)$, pak můžeme vyjádřit diferenci tlaku následovně

$$dp = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T \cdot d\rho + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho \cdot dT. \quad (3.11)$$

Uvažujeme-li izotermický děj, tzn. $dT = 0$, pak lze výše uvedenou rovnici zapsat

$$dp = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T \cdot d\rho. \quad (3.12)$$

Příčemž platí vztah

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T = a^2, \quad (3.13)$$

kde a značí rychlost zvuku, neboli rychlost šíření tlakové vlny ve stlačitelné tekutině. Z rovnic (3.12) a (3.13) plyne, že

$$d\rho = \frac{1}{a^2} \cdot dp. \quad (3.14)$$

Dosadíme-li (3.14) do rovnice (3.10), dostáváme tuto podobu

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.15)$$

Pokud považujeme změny hustoty za malé, je možné rovnici uvést v následujícím tvaru

$$\frac{dp}{dt} + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.16)$$

neboli s využitím zápisu pomocí operátoru divergence

$$\frac{dp}{dt} + \rho \cdot a^2 \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.17)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu s její konstantní hustotou ρ se tvar rovnice kontinuity značně zjednoduší a bude mít tuto podobu

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.18)$$

3.1.1. Rovnice kontinuity v cylindrických souřadnicích

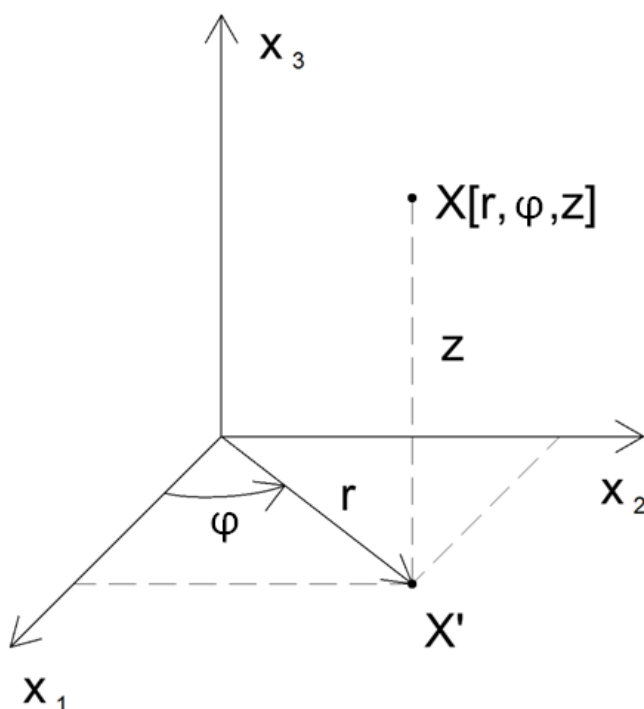
Při řešení určitých typů zadání je výhodné využít válcového, neboli cylindrického souřadného systému. Pro tento systém bude uvedena i rovnice kontinuity. Nejdříve však budou zapsány transformační vztahy mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cdot \cos \varphi, \\x_2 &= r \cdot \sin \varphi, \\x_3 &= z.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Vztahy dále doplňují následující podmínky

$$\begin{aligned}r &> 0, \\0 &\leq \varphi < 2\pi.\end{aligned}$$

Grafická podoba této transformace je ilustrována na Obrázku 3.1, kde je bod X zobrazen v kartézské soustavě souřadnic s osami označenými x_1 , x_2 a x_3 . Pokud chceme tento bod nadefinovat v cylindrických souřadnicích, bude dán souřadnicemi r , φ a z . První parametr r určuje vzdálenost bodu X' od počátku souřadného systému značeného O . Přičemž bod X' je pravoúhlým průmětem bodu X do roviny x_1x_2 . Dále bude bod X v cylindrických souřadnicích dán úhlem φ . Velikost úhlu φ je určena kladným směrem poloosy x_1 a polopřímkou s počátečním bodem O procházejícím bodem X' . Poslední souřadnicí je z , jenž určuje orientovanou vzdálenost bodu X od roviny x_1x_2 .

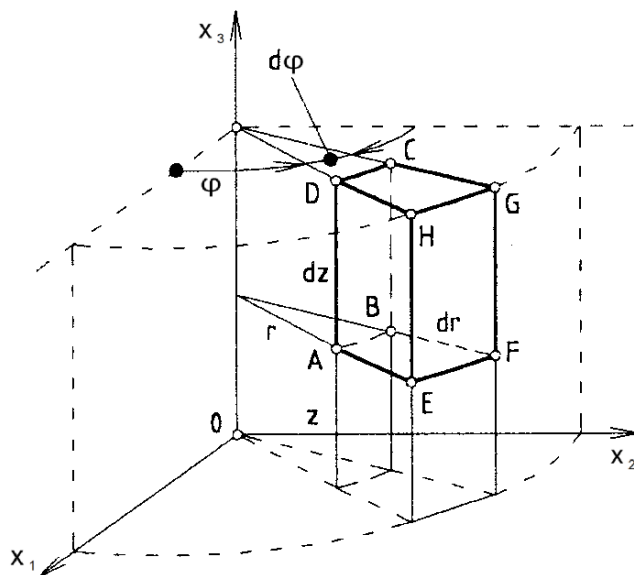


Obrázek 3.1: Cylindrické souřadnice

V této části odvodíme rovnici kontinuity pro cylindrické souřadnice. Stejně jako tomu bylo při odvození rovnice kontinuity v kartézské soustavě souřadnic, použijeme elementární objem zobrazený na Obrázku 3.2. Vektor rychlosti bude ve směru jednotlivých válcových souřadnic a bude mít tyto složky

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z),$$

přičemž v_r představuje složku rychlosti ve směru souřadnice r . Dále v_φ určuje složku rychlosti ve směru kolmém k rovině rz a složka v_z je ve směru souřadnice z .



Obrázek 3.2: Element objemu dV (upraveno dle [2])

Předpokládejme směr toku kapaliny do plochy vymezené body $ABCD$, jejíž plošný obsah je $r \cdot d\varphi \cdot dz$. Poté bude tok tekutiny touto plochou dán následovně

$$- \rho \cdot v_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz, \quad (3.20)$$

kde v_r je rychlost v libovolném bodě této plochy. Před výrazem je znaménko mínus, neboť kapalina přes tuto plochu do kontrolního objemu vtéká, tudíž skalární součin vektoru rychlosti a vnějšího jednotkového normálového vektoru je záporný.

Následně vyjádříme tok tekutiny protilehlou stěnou, tedy plochou vymezenou body $EFGH$

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot dr\right) \cdot \left(v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot dr\right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (3.21)$$

Zanedbáme veličiny vyšších řádů, neboť je v porovnání s ostatními členy můžeme považovat za velmi malé. Tento výraz pak můžeme zapsat následovně

$$\rho \cdot v_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz + \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\rho \cdot v_r \cdot r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (3.22)$$

Obdobným způsobem vyjádříme tok bočními stěnami elementárního objemu. Pro tok plochou $AEHD$ platí

$$- \rho \cdot v_\varphi \cdot dr \cdot dz. \quad (3.23)$$

Pro druhou boční plochu vymezenou body $BFGC$ bude tok

$$\rho \cdot v_\varphi \cdot dr \cdot dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\rho \cdot v_\varphi) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (3.24)$$

Zbývá zapsat toky dolní a horní plochou elementu. Nejprve zapíšeme dolní plochu $AEFB$

$$- \rho \cdot v_z \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi. \quad (3.25)$$

Pro horní plochu určenou body $DHGC$ platí

$$\rho \cdot v_z \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\rho \cdot v_z \cdot r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (3.26)$$

Úbytek hmotnosti kapaliny v elementu objemu za jednotku času bude

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (3.27)$$

Součet toků přes všechny plochy je roven úbytku hmotnosti kapaliny v tomto kontrolním objemu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\rho \cdot v_r \cdot r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\rho \cdot v_\varphi) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\rho \cdot v_z \cdot r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pokud tuto rovnici dále upravíme, dostaneme následující podobu rovnice kontinuity v cylindrických souřadnicích

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\rho \cdot v_r \cdot r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\rho \cdot v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\rho \cdot v_z) = 0. \quad (3.29)$$

Uvažujeme-li konstantní hodnotu hustoty ρ , pak je rovnice tohoto tvaru

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot (v_r \cdot r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.30)$$

3.2. Navier-Stokesova rovnice

Uvedená podkapitola je zpracována na základě literatury [2], [3], [11].

Navier-Stokesova rovnice popisuje silovou rovnováhu působící na skutečnou, tedy viskózní tekutinu, jež proudí laminárně. Rovnici popsal a odvodil Claude-Louis Navier v roce 1927 a nezávisle na něm i George Gabriel Stokes v roce 1945.

Nyní se budeme věnovat jejímu samotnému odvození. V prvním kroku zapíšeme rovnici silové rovnováhy, jež platí pro libovolnou látku

$$\rho \cdot a_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \cdot g_i, \quad (3.31)$$

přičemž ρ představuje hustotu dané látky, a_i značí její zrychlení, σ_{ij} je tenzor napětí a g_i gravitační zrychlení.

Následně rovnici (3.31) upravíme. Vyjádříme zrychlení a_i jako celkovou derivaci rychlosti v_i podle času t , čímž dostaneme tuto podobu

$$\rho \cdot \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \cdot g_i. \quad (3.32)$$

Zaměříme se na tenzor napětí σ_{ij} . Viskózní tekutina klade odpor tlaku (značenému p) stejně, jako tomu je u dokonalé tekutiny. Oproti ní však navíc klade odpor proti vzájemnému pohybu částic tekutiny vůči sobě, to znamená příslušící třecím (viskózním) napětím. Tento tenzor bývá značen Π_{ij} . Celkový tenzor napětí musí tedy mít dvě části a zapisujeme jej následovně

$$\sigma_{ij} = \Pi_{ij} - \delta_{ij} \cdot p. \quad (3.33)$$

Dosadíme-li vyjádření tenzoru napětí z (3.33) společně s uvažováním vlastností Kroneckerova delta do vztahu (3.32), pak získáme tento tvar rovnice

$$\rho \cdot \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.34)$$

Uvažujeme Eulerův popis kontinua, takže je nutné rozepsat substancionární derivaci rychlosti podle času. Učiníme-li tak, pak získáme tuto podobu Navier-Stokesovy rovnice

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.35)$$

Je patrné, že rovnice má rozměr síly působící na jednotkový objem. Přičemž její členy představují

$\frac{\partial v_i}{\partial t}$	lokální zrychlení,
$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j$	konvektivní zrychlení,
$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$	účinky viskozity,
$\frac{\partial p}{\partial x_i}$	tlakový gradient.

Nutné je zmínit, že člen týkající se účinků viskozity lze rozepsat do této podoby

$$\Pi_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot v_{ij} + b \cdot \delta_{ij} \cdot v_{kk}, \quad (3.36)$$

kde μ značí dynamickou viskozitu, v_{ij} je tenzor rychlosti deformace a b bývá nazýváno druhou (objemovou) viskozitou.

Dále lze tenzor rychlosti deformace vyjádřit následovně

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.37)$$

Z výše uvedeného je patrné, že platí

$$v_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.38)$$

Provedeme dosazení vztahů (3.36), (3.37) a (3.38) do rovnice (3.35) získáme Navier-Stokesovu rovnici pro stlačitelnou kapalinu, jenž je v silovém tvaru na jednotku objemu

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.39)$$

Rovnici dále upravíme

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.40)$$

Z podoby Navier-Stokesovy rovnice je patrné, že reprezentuje tři rovnice, z nichž každá je vyjádřením pro jednu složku. Rozepsáním pro první souřadnici x_1 , tj. pro $i = 1$, získáme tento tvar

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_3} - \\ - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_3} - b \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho \cdot g_1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pro druhou souřadnici x_2 , tj. pro $i = 2$, dostáváme

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_3} - \\ - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} - b \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho \cdot g_2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pro poslední souřadnici x_3 , tj. pro $i = 3$, je následující tvar

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_3} - \\ - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_3} - b \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho \cdot g_3. \end{aligned} \quad (3.43)$$

V mnoha případech bývá také uváděna Navier-Stokesova rovnice pro stlačitelnou kapalinu v rozměru zrychlení. Tuto její podobu získáme, podělíme-li obě strany rovnice (3.40) hustotou ρ

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{b}{\rho} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i. \quad (3.44)$$

Je známo, že dynamická viskozita μ podělená hustotou ρ vyjadřuje kinematickou viskozitu ν . Tento člen je tedy možné v rovnici zaměnit. Zapišeme-li tuto závislost rovnicí

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.45)$$

Dále se zaměříme na tvar Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou a viskózní tekutinu. Z části práce popisující rovnici kontinuity je známo, že pro nestlačitelnou kapalinu je hodnota divergence rychlosti nulová. Tohoto zjištění využijeme a vztah (3.40) přepíšeme do následující podoby

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) - b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.46)$$

V závorkách této rovnice je uveden tvar pro divergenci, tudíž tyto členy budou nulové. Navier-Stokesova rovnice pro nestlačitelnou tekutinu v silovém tvaru na jednotku objemu se tak zredukuje do této podoby

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (3.47)$$

Opět můžeme rovnici rozepsat do jednotlivých složkových rovnic. Z těchto tvarů bude patrné, že pro nestlačitelnou tekutinu se tvar Navier-Stokesovy rovnice značně zjednoduší oproti variantě se stlačitelnou tekutinou. Navíc zde není vliv druhé (objemové) viskozity. Pro první souřadnici x_1 získáme tento tvar rovnice

$$\rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho \cdot g_1. \quad (3.48)$$

Pro druhou souřadnici x_2

$$\rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho \cdot g_2. \quad (3.49)$$

Pro souřadnici x_3 je tvar tento

$$\rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \cdot v_2 + \rho \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \cdot v_3 - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho \cdot g_3. \quad (3.50)$$

Provedeme-li podělení obou stran rovnice (3.47) hustotou ρ dostaneme tento tvar rovnice v rozměru zrychlení

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i. \quad (3.51)$$

Pokud se zaměříme na člen týkající se viskózních účinků, bývá uváděn i v podobě Laplaceova delta operátoru. Můžeme jej tedy zapsat následovně

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \Delta v_i. \quad (3.52)$$

3.2.1. Navier-Stokesova rovnice v cylindrických souřadnicích

V dalších částech práce budou řešeny dané problémy v cylindrických souřadnicích. Pro ně bude výhodné vyjádřit i Navier-Stokesovy rovnice. Ty budou uvedeny pro nestlačitelnou viskózní tekutinu. Nejprve zapíšeme tvar první z nich

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \rho \cdot v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} - \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \\ & - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \rho \cdot g_r. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Druhá rovnice bude mít tuto podobu

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \rho \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \cdot v_z \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \rho \cdot \frac{v_r \cdot v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \\ & - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) = \rho \cdot g_\varphi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Poslední rovnice je v tomto tvaru

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \rho \cdot v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \\ & - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \rho \cdot g_z. \end{aligned} \quad (3.55)$$

4. Vlnová rovnice pro tlakovou funkci

V této části bude hlavním cílem odvození nelineární vlnové rovnice pro tlakovou funkci, a to z vlivem druhé (objemové) viskozity značené b . Tato rovnice bude odvozena ze dvou rovnic - z Navier-Stokesovy rovnice, neboli rovnice rovnováhy, a dále z rovnice kontinuity. Při popisu tohoto odvození bude čerpáno ze zdrojů [10], [11].

Zaměříme se na Navier-Stokesovu rovnici pro stlačitelnou kapalinu, a to v silovém tvaru na jednotku objemu. Tato rovnice byla popsána ve třetí kapitole vztahem (3.40). Využijeme navíc zápisu Laplaceova operátoru ze (3.52) a tento tvar v Navier-Stokesově rovnici nahradíme. Dostáváme tak tuto podobu rovnice

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \mu \cdot \Delta v_i - \mu \cdot \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \cdot g_i. \quad (4.1)$$

Pro následné úpravy bude výhodné na tuto rovnici aplikovat operátor divergence, tedy zderivovat ji podle polohové souřadnice x_i

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial t} + \rho \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_j + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \mu \cdot \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} - \mu \cdot \frac{\partial^3 v_j}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} - \\ - b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial p^2}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Jak již bylo zmíněno, k výpočtu dále využijeme rovnici kontinuity v této podobě

$$\frac{dp}{dt} + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.3)$$

Následně ji zderivujeme podle času. Uvažujeme Eulerův popis kontinua, tudíž je nutné zepsat substancionární derivaci

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial t} + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_j = 0. \quad (4.4)$$

Z toho tvaru vyjádříme člen obsahující druhou celkovou derivaci tlaku podle času

$$-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial t} + \rho \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_j. \quad (4.5)$$

Využijeme vyjádření vztahu (4.5) a provedeme jeho náhradu v rovnici (4.2)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \mu \cdot \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} - \\ - \mu \cdot \frac{\partial^3 v_j}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} - b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial p^2}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Výše uvedenou rovnici dále upravíme a na základě vlastností Kroneckerova delta můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dt^2} - \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + a^2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + a^2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \\ + a^2 \cdot b \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) - a^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

V závorkách je uveden operátor divergence. Jeho podobu si můžeme vyjádřit z rovnice (4.3)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho \cdot a^2} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (4.8)$$

Tohoto vztahu využijeme a dosadíme jej do rovnice (4.7). Rovnici dále upravíme, čímž dostaneme její následující tvar

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dt^2} - \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - \\ - \frac{b}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - a^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Využijeme zápisu pomocí Laplaceova operátoru a nahradíme jím druhé parciální derivace v rovnici (4.9). Dále sečteme členy obsahující podíl dynamické viskozity k hustotě a získáme tuto podobu rovnice

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - \frac{b}{\rho} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - a^2 \cdot \Delta p = 0. \quad (4.10)$$

Rovnici následně upravíme

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - a^2 \cdot \Delta p = 0. \quad (4.11)$$

Uvedená rovnice představuje vlnovou rovnici pro šíření tlakové vlny. Rovnice je nelineární, a to z důvodu jejího druhého členu.

V této části se zaměříme na první člen, a to druhou celkovou derivaci rychlosti podle času, kterou se pokusíme upravit. Nejprve musíme vyjádřit první celkovou derivaci tlaku podle času. Stále uvažujeme Eulerovo pojetí kontinua, takže je nutné rozepsat substancionální derivaci

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot v_i. \quad (4.12)$$

Provedeme druhou celkovou derivaci tlaku podle času

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} \cdot v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_j} \cdot v_j + \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_i \cdot v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j. \quad (4.13)$$

Dále rovnici upravíme do této podoby

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} \cdot v_i + \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_i \cdot v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j \right). \quad (4.14)$$

Dosadíme-li do rovnice (4.11) tvary derivací vyjádřených v (4.12) a (4.14), tak dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} \cdot v_i + \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v_i \cdot v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j \right) - \\ & - \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot v_i \right) - a^2 \cdot \Delta p = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tento tvar rovnice popisuje hledanou funkci, a to i s rozepsanými celkovými derivacemi.

Vlnová rovnice se značně zjednoduší, pokud budeme uvažovat nestlačitelnou tekutinu. V takovém případě využijeme jejího následujícího zápisu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \\ & + b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) - \Delta p = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uvažujeme-li nestlačitelnou kapalinu, pak je divergence rychlosti nulová, takže všechny hodnoty v závorkách se vynulují. Navíc bude nulový první člen rovnice, neboť u nestlačitelné kapaliny se rychlost zvuku a blíží nekonečnu. Vlnová rovnice bude tedy mít tento tvar

$$\Delta p = -\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad (4.17)$$

přičemž uvažujeme tlakovou funkci v závislosti na poloze a čase, tj.

$$p = p(x_i, t). \quad (4.18)$$

Pokud lze rychlostní pole rozložit na dvě složky, a to na časově nezávislou, kterou označíme $v_{0i}(x_j)$, a časově závislou, kde zavedeme značení $w_i(x_j, t)$, pak funkci pro rychlost můžeme psát ve tvaru

$$v_i(x_j, t) = v_{0i}(x_j) + w_i(x_j, t). \quad (4.19)$$

V takovém případě platí

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}. \quad (4.20)$$

Dosadíme vztah (4.20) do (4.17)

$$\Delta p = -\rho \cdot \left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right). \quad (4.21)$$

Z výše uvedené rovnice je patrné, že členy této tlakové funkce můžeme opět rozložit na dvě části, a to na časově nezávislou část a časově závislou. Zapišeme tedy následující tvar tlakové funkce

$$p = p_0(x_j) + \sigma(x_j, t). \quad (4.22)$$

Nyní rozepíšeme člen Δp . Nejprve však musíme vyjádřit první parciální derivaci tlakové funkce podle polohy

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (4.23)$$

Zapišeme druhou derivaci

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_i} = \Delta p_0 + \Delta \sigma. \quad (4.24)$$

První, časově nezávislý člen vlnové rovnice má tuto podobu

$$\Delta p_0 = -\rho \cdot \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}. \quad (4.25)$$

Druhý, časově závislý člen vlnové rovnice je následující

$$\Delta \sigma = -\rho \cdot \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right). \quad (4.26)$$

Předpokládáme, že časově závislá složka rychlosti je v tomto tvaru

$$w_k = A_k \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t}. \quad (4.27)$$

Dosadíme-li (4.27) do (4.26)

$$\Delta \sigma = -\rho \cdot \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \Omega \cdot t} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t} \right). \quad (4.28)$$

Dále můžeme rovnici (4.28) rozdělit na dvě části

$$\sigma = \sigma_1(x_j, t) + \sigma_2(x_j, t). \quad (4.29)$$

První člen lze vyjádřit v tomto tvaru

$$\sigma_1(x_j, t) = S_1(x_j) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \Omega \cdot t}. \quad (4.30)$$

Druhý člen bude následující

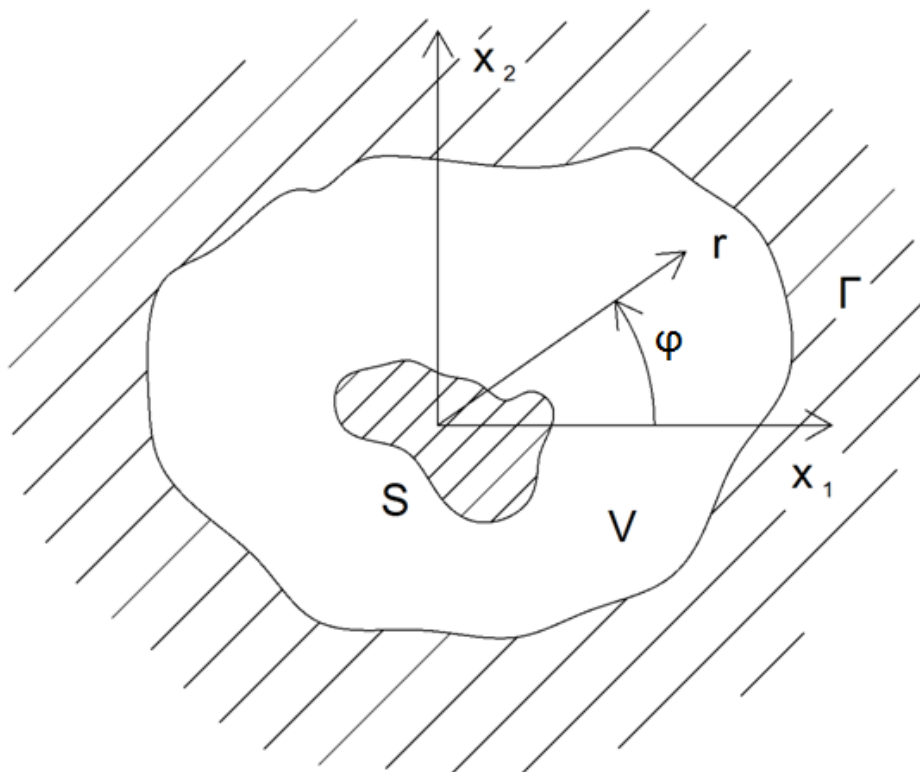
$$\sigma_2(x_j, t) = S_2(x_j) \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t}. \quad (4.31)$$

Z uvedených vztahů je patrné, že tlakové pole oproti poli rychlostnímu kmitá na dvojnásobné frekvenci.

5. Kmitání kapaliny v rovině

V této části se budeme zabývat prouděním v rovině, avšak bude popsáno v polárních souřadnicích. V takovém případě se jedná o proudění, které může být formulováno v cylindrických souřadnicích, kde proměnná z bude konstantní. Uvažujme tedy oblast o objemu V , která je vyplněna reálnou stlačitelnou kapalinou. Tento objem je omezený povrchy S a Γ . Uvažovaná oblast je zobrazena na Obrázku 5.1.

Kapitola vychází ze zdrojů [10] a [11].



Obrázek 5.1: Rovinná oblast (upraveno dle [10])

K výpočtu využijeme vlnovou rovnici v cylindrických souřadnicích uvedenou v (4.11), avšak zanedbáme nelineární člen na základě předpokladu, že se jedná pouze o malé kmity

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right) - a^2 \cdot \Delta p = 0. \quad (5.1)$$

Úlohu bude výhodné řešit v cylindrických souřadnicích. Pro ně je však nutné vyjádřit i Laplaceův operátor, neboť ten se v rovnici (5.1) vyskytuje

$$\Delta = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (5.2)$$

Jak bylo zmíněno výše, proměnnou z budeme považovat za konstantní. Z toho plyne, že i parciální derivace tlaku podle této souřadnice bude nulová, tudíž bude nulová i její druhá parciální derivace. Rovnice tak bude mít následující podobu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t \partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial r} \right) - \\ - a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Partikulární řešení, které vyhovuje rovnici (5.3), můžeme uvažovat v tomto tvaru

$$p = K - \frac{A(r, \varphi, t)}{r^n}, \quad (5.4)$$

kde K představuje konstantu a funkce $A(r, \varphi, t)$ je funkce o třech proměnných, a to čase t a souřadnicích polohy r a φ .

Pro snazší zápis zavedeme následující značení - pro parciální derivaci podle času t tečku a pro parciální derivaci podle souřadnice r čárku. Nejprve provedeme parciální derivaci tlaku podle polohy r

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{A' \cdot r^n - n \cdot A \cdot r^{n-1}}{r^{2 \cdot n}}. \quad (5.5)$$

Úpravou dostaneme tento tvar

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{A' - n \cdot A \cdot r^{-1}}{r^n}. \quad (5.6)$$

Vyjádríme druhou parciální derivaci tlaku podle polohy r

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = - \frac{(A'' - n \cdot A' \cdot r^{-1} + n \cdot A \cdot r^{-2}) \cdot r^n - (A' - n \cdot A \cdot r^{-1}) \cdot n \cdot r^{n-1}}{r^{2 \cdot n}}. \quad (5.7)$$

Po úpravě získáváme následující podobu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = - \frac{A'' - 2 \cdot A' \cdot n \cdot r^{-1} + n \cdot (n+1) \cdot A \cdot r^{-2}}{r^n}. \quad (5.8)$$

Dosadíme do Laplaceova operátoru tlaku derivace z výrazů (5.6) a (5.8)

$$\Delta p = - \frac{1}{r^n} \cdot [A'' - 2 \cdot A' \cdot n \cdot r^{-1} + n \cdot (n+1) \cdot A \cdot r^{-2}] - \frac{1}{r^{n+2}} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^{n+1}} \cdot (A' - n \cdot A \cdot r^{-1}). \quad (5.9)$$

Rovnici dále upravíme

$$\Delta p = \frac{1}{r^n} \cdot \left[-A'' + A' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{1}{r} - A \cdot n^2 \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right]. \quad (5.10)$$

Dále dosadíme (5.10) do rovnice (5.3) a budeme uvažovat značení derivací pomocí tečky a čárky, jak bylo uvedeno již dříve

$$\begin{aligned} - \ddot{A} \cdot \frac{1}{r^n} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \left[- \dot{A}'' + \dot{A}' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{1}{r} - \dot{A} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \cdot \frac{1}{r^n} - \\ - a^2 \cdot \left[-A'' + A' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{1}{r} - A \cdot n^2 \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \cdot \frac{1}{r^n} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tvar této rovnice ještě upravíme

$$\begin{aligned} \ddot{A} - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[\dot{A}'' \cdot r^2 - \dot{A}' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r + \dot{A} \cdot n^2 + \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \varphi^2} \right] - \\ - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[A'' \cdot r^2 - A' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r + A \cdot n^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Obecné řešení rovnice pro tlakovou funkci lze psát ve tvaru

$$p = K - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(r, \varphi, t)}{r^n}. \quad (5.13)$$

Pro vyjádření A_n tedy platí analogická rovnice s rovnicí (5.12), která bude v tomto tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{A}_n - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[\dot{A}_n'' \cdot r^2 - \dot{A}_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r + \dot{A}_n \cdot n^2 + \frac{\partial^2 \dot{A}_n}{\partial \varphi^2} \right] - \\ - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[A_n'' \cdot r^2 - A_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r + A_n \cdot n^2 + \frac{\partial^2 A_n}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Uvažujme následující řešení

$$A_n = a_n(r, t) \cdot \cos(n \cdot \varphi) + b_n(r, t) \cdot \sin(n \cdot \varphi). \quad (5.15)$$

Rovnici (5.15) můžeme rozdělit na dvě části. Dosadíme do nich i příslušné derivace. Zde je první část rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[\dot{a}_n'' \cdot r^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) - \dot{a}_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \cdot \cos(n \cdot \varphi) - \right. \\ \left. - \dot{a}_n \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \dot{a}_n \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) \right] - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[a_n'' \cdot r^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) - \right. \\ \left. - a_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \cdot \cos(n \cdot \varphi) + a_n \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) - a_n \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Odečteme příslušné členy a rovnici upravíme. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[\dot{a}_n'' \cdot r^2 - \dot{a}_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] - \\ - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[a_n'' \cdot r^2 - a_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Stejný postup provedeme u druhé rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{b}_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[\dot{b}_n'' \cdot r^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) - \dot{b}_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \cdot \sin(n \cdot \varphi) - \right. \\ \left. - \dot{b}_n \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) + \dot{b}_n \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right] - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[b_n'' \cdot r^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) - \right. \\ \left. - b_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \cdot \sin(n \cdot \varphi) - b_n \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) + b_n \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Opět odečteme příslušné členy, rovnici upravíme a získáme tento tvar

$$\begin{aligned} \ddot{b}_n - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[b_n'' \cdot r^2 - b_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] - \\ - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[b_n'' \cdot r^2 - b_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pokud stanovíme a_n a b_n řešením rovnic (5.17) a (5.19), můžeme vzhledem ke vztahům (5.13) a (5.15) pro tlakovou funkci zapsat tuto podobu

$$p = K - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n(r, t)}{r^n} \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \frac{b_n(r, t)}{r^n} \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right]. \quad (5.20)$$

Vlnové rovnice (5.17) a (5.19) vyřešíme pomocí Laplaceovy transformace, a to za předpokladu nulových počátečních podmínek. Zavedeme tedy Laplaceovy obrazy. Pro a_n budeme mít tuto podobu

$$\mathcal{L}\{a_n(t)\} = \Phi_n(s), \quad (5.21)$$

pro hodnotu b_n

$$\mathcal{L}\{b_n(t)\} = \Psi_n(s), \quad (5.22)$$

kde s je parametr Laplaceovy transformace podle času t . Nejprve se zaměříme na rovnici (5.17). Dosadíme do ní vyjádřenou Laplaceovu transformaci

$$\begin{aligned} s^2 \cdot \Phi_n - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r^2} \cdot \left[s \cdot \Phi_n'' \cdot r^2 - s \cdot \Phi_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] - \\ - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left[\Phi_n'' \cdot r^2 - \Phi_n' \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot r \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Následně rovnici upravíme

$$\begin{aligned} s^2 \cdot \Phi_n - \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot s \cdot \Phi_n'' + \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho \cdot r} \cdot s \cdot \Phi_n' \cdot (2 \cdot n - 1) - \\ - a^2 \cdot \Phi_n'' + \frac{a^2}{r} \cdot \Phi_n' \cdot (2 \cdot n - 1) = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Získáme tak kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot s + a^2\right) \cdot \Phi_n'' + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot s + a^2\right) \cdot (1 - 2 \cdot n) \cdot \Phi_n' - s^2 \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.25)$$

Tuto rovnici dále upravíme

$$r \cdot \Phi_n'' + (1 - 2 \cdot n) \cdot \Phi_n' - \frac{s^2}{\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot s + a^2} \cdot r \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.26)$$

Pro zjednodušení zavedeme následující substituci

$$\kappa^2 = -\frac{s^2}{\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot s + a^2}. \quad (5.27)$$

Výše uvedenou substituci dosadíme do rovnice (5.26), čímž získáme příznivější podobu této rovnice

$$r \cdot \Phi_n'' + (1 - 2 \cdot n) \cdot \Phi_n' + \kappa^2 \cdot r \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.28)$$

Zavedeme další substituci

$$r = \frac{\xi}{\kappa}. \quad (5.29)$$

Vyjádříme parciální derivaci funkce Φ_n podle proměnné ξ . Jedná se o složenou funkci, takže bude mít tento tvar

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi}. \quad (5.30)$$

Je zřejmé, že upravíme-li vztah pro substituci z rovnice (5.29), tak dostaneme

$$\frac{r}{\xi} = \frac{1}{\kappa}. \quad (5.31)$$

Tuto podobu využijeme při dosazení do (5.30)

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \cdot \frac{1}{\kappa}. \quad (5.32)$$

Nyní jsme schopni vyjádřit parciální derivaci funkce Φ_n podle polohy r , a to úpravou rovnice (5.32)

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = \kappa \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}. \quad (5.33)$$

Obdobným způsobem provedeme druhou parciální derivaci hodnoty Φ_n podle polohy r a dostáváme

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} = \kappa^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2}. \quad (5.34)$$

Dosadíme vztahy (5.33) a (5.34) do rovnice (5.28) s využitím (5.29)

$$\frac{\xi}{\kappa} \cdot \kappa^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + (1 - 2 \cdot n) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \kappa^2 \cdot \frac{\xi}{\kappa} \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.35)$$

Rovnici dále upravíme

$$\xi \cdot \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + (1 - 2 \cdot n) \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \xi \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.36)$$

Naším cílem je uvedenou diferenciální rovnici zapsat ve tvaru Besselovy funkce. Pokusíme se ji převést na modifikovaný tvar Besselovy funkce uvedený v části 2.3.3, konkrétně rovnicí (2.28). Musíme tedy tvar (5.36) podělit hodnotou ξ

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + \frac{(1 - 2 \cdot n)}{\xi} \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \Phi_n = 0. \quad (5.37)$$

Nyní tuto rovnici zapíšeme v obdobném tvaru jako rovnicí (2.28)

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + \frac{a}{\xi} \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \left(b \cdot \xi^k + \frac{c}{\xi^2} \right) \cdot \Phi_n = 0. \quad (5.38)$$

V našem případě jsou konstanty následující

$$a = 1 - 2 \cdot n, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad k = 0. \quad (5.39)$$

Obecné řešení bude tedy dle (2.29) mít tuto podobu

$$\Phi_n(\xi) = \xi^{\frac{1-a}{2}} \cdot \Phi_{n\nu} \left(\frac{2 \cdot \sqrt{b}}{k+2} \cdot \xi^{\frac{k+2}{2}} \right). \quad (5.40)$$

Do výše uvedeného řešení dosadíme hodnoty konstant z (5.39), čímž obdržíme

$$\Phi_n(\xi) = \xi^n \cdot \Phi_{n\nu}(\xi), \quad (5.41)$$

kde funkce značená $\Phi_{n\nu}$ má následující tvar

$$\Phi_{n\nu}(\xi) = C_1 \cdot J_\nu(\xi) + C_2 \cdot Y_\nu(\xi). \quad (5.42)$$

Po dosazení je nutné zjistit hodnotu ν . K tomu využijeme tvaru rovnice (2.31), tudíž

$$\nu = \frac{[(1-a)^2 - 4 \cdot c]^{\frac{1}{2}}}{k+2}.$$

Dosadíme-li konstanty z (5.39), tak dostáváme

$$\nu = n. \quad (5.43)$$

Z toho je patrné, že hodnota ν bude celočíselná, takže využijeme Besselovy funkce druhého druhu. Tvar funkce Φ_n bude následující

$$\Phi_n(\xi) = \xi^n \cdot \left[C_1 \cdot J_n(\xi) + C_2 \cdot Y_n(\xi) \right]. \quad (5.44)$$

Dále zapíšeme podobu funkce J_n , kde vycházíme z tvaru popsaného v (2.20). Tentokrát však bude funkce uvedena pro proměnnou ξ

$$J_n(\xi) = \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n+m+1)}. \quad (5.45)$$

Pro druhou Neumannovu funkci Y_n z (2.26) bude platit

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(\xi) \cdot \left(\ln \frac{\xi}{2} + C_E \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{n+2 \cdot m}}{m! \cdot (n+m)!} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right]. \quad (5.46)$$

Následně můžeme dosadit do rovnice (5.44) členy vyjádřené v (5.45) a (5.46), čímž obdržíme toto řešení

$$\begin{aligned} \Phi_n(\xi) = & \xi^n \cdot \left\{ C_{1n} \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n+m+1)} + \right. \\ & + C_{2n} \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n+m+1)} \cdot \left(\ln \frac{\xi}{2} + C_E \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\xi}{2} \right)^{n+2 \cdot m}}{m! \cdot (n+m)!} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right] \right\}. \quad (5.47) \end{aligned}$$

Dále v tomto řešení nahradíme hodnotu ξ , kterou si vyjádříme ze substituce (5.29) a následně ji dosadíme do výše uvedené rovnice, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} \Phi_n(\kappa \cdot r) = & r^n \cdot \left\{ C'_{1n} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n+m+1)} + \right. \\ & + C'_{2n} \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n+m+1)} \cdot \left(\ln \frac{\kappa \cdot r}{2} + C_E \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{n+2 \cdot m}}{m! \cdot (n+m)!} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right] \right\}. \quad (5.48) \end{aligned}$$

Případně lze tuto rovnici zapsat bez rozepsání Besselových funkcí, a to následovně

$$\Phi_n(\kappa \cdot r) = C'_{1n} \cdot r^n \cdot J_n(\kappa \cdot r) + C'_{2n} \cdot r^n \cdot Y_n(\kappa \cdot r). \quad (5.49)$$

V rovnici se vyskytují konstanty C'_{1n} a C'_{2n} , jejichž podobu jsme schopni zjistit z okrajových podmínek.

Obdobným způsobem vyjádříme Laplaceův obraz funkce b_n , jenž byl zapsán v (5.22)

$$\begin{aligned} \Psi_n(\kappa \cdot r) = & r^n \cdot \left\{ K'_{1n} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} + \right. \\ & + K'_{2n} \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} \cdot \left(\ln \frac{\kappa \cdot r}{2} + C_E \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot r}{2} \right)^{n + 2 \cdot m}}{m! \cdot (n + m)!} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Tuto rovnici můžeme uvést i v tomto tvaru

$$\Psi_n(\kappa \cdot r) = K'_{1n} \cdot r^n \cdot J_n(\kappa \cdot r) + K'_{2n} \cdot r^n \cdot Y_n(\kappa \cdot r). \quad (5.51)$$

Dále zapíšeme Laplaceovu transformaci tlakové funkce podle času, kde zavedeme parametr s a označíme ji \bar{p} . Můžeme tedy uvést

$$\mathcal{L}\{p\} = \bar{p}(s). \quad (5.52)$$

Pro vyjádření Laplaceova obrazu tlaku vycházíme z rovnice (5.20)

$$\bar{p} = \frac{K}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Phi_n}{r^n} \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \frac{\Psi_n}{r^n} \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right]. \quad (5.53)$$

Po dosazení (5.49) a (5.51) máme tento tvar

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{K}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[C'_{1n} \cdot J_n(\kappa \cdot r) + C'_{2n} \cdot Y_n(\kappa \cdot r) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \right. \\ \left. + \left[K'_{1n} \cdot J_n(\kappa \cdot r) + K'_{2n} \cdot Y_n(\kappa \cdot r) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Následně se zaměříme na parametr s , pomocí něhož zjistíme vlastní hodnoty. Podobu tohoto parametru vyšetříme z tvaru (5.27), jehož úpravou získáme následující kvadratickou rovnici

$$s^2 + \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \kappa^2 \cdot s + \kappa^2 \cdot a^2 = 0. \quad (5.55)$$

Zapíšeme nulové body rovnice

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \cdot \kappa^2 \pm \frac{\kappa}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho} \right)^2 \cdot \kappa^2 - 4 \cdot a^2}. \quad (5.56)$$

Veličina κ představuje velikost vlnového vektoru. Pokud bude výraz pod odmocninou kladný, tak budou vlastní kmitý asymptoticky tlumeny, neboť vlastní hodnoty s_1 a s_2

budou mít pouze reálnou část, která bude záporná. Takový případ nastane, bude-li splněna tato podmínka

$$\left(\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho}\right)^2 \cdot \kappa^2 \geq 4 \cdot a^2. \quad (5.57)$$

Podmínku můžeme dále upravit

$$\kappa \geq \frac{2 \cdot a \cdot \rho}{2 \cdot \mu + b}. \quad (5.58)$$

Nastane-li, že výraz pod odmocninou v (5.56) bude záporný, pak výsledné hodnoty s_1 a s_2 budou komplexní čísla. Taková varianta vznikne, pokud bude splněna podmínka

$$\kappa < \frac{2 \cdot a \cdot \rho}{2 \cdot \mu + b}. \quad (5.59)$$

Tlumení pak bude určeno reálnou částí těchto hodnot s_1 a s_2 , a ta bude následující

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \mu + b}{\rho}.$$

Opět je tato hodnota záporná, takže bude docházet k tlumení kmitů. Vlastní úhlová rychlost bude určena komplexní částí

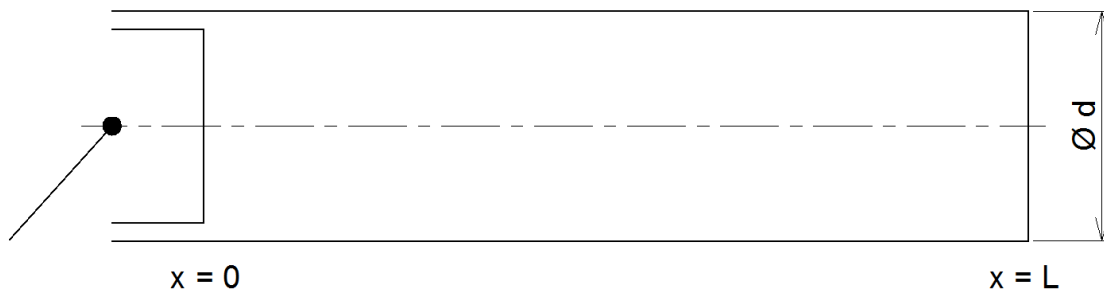
$$\omega = \frac{\kappa}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - \left(\frac{2 \cdot \mu + b}{\rho}\right)^2 \cdot \kappa^2}. \quad (5.60)$$

Z uvedeného je patrné, že vlastní frekvence, jenž můžeme vypočítat z úhlové rychlosti, je ovlivněna druhou viskozitou kapaliny.

6. Kmitání tekutiny ve válcové oblasti

6.1. Proudění v uzavřené trubici s buzením průtoku sinovou funkcí

Tato část práce bude věnována proudění v uzavřené trubici. Cílem bude zjistit průběhy tlaku a průtoku uvnitř trubice vyplněné stlačitelnou neviskózní kapalinou, a to při daných počátečních a okrajových podmínkách. Schéma této trubice je dáno na Obrázku 6.1, přičemž její délka je značena L a průměr d . Průtok je vyvolán pístem, který je zobrazen v levé části obrázku.



Obrázek 6.1: Uzavřená trubice

Dále budou zadány počáteční podmínky pro průtok a tlak, přičemž obě funkce jsou závislé na poloze x , jenž je ve směru osy trubice, a na čase t . Pro nulový čas je zadáno

$$Q(x, 0) = 0, \quad (6.1)$$

$$p(x, 0) = 0. \quad (6.2)$$

Dány jsou také okrajové podmínky. V nulové pozici, tedy na počátku trubice, bude průtok určen následující funkcí, která popisuje pohyb pístu

$$Q(0, t) = Q_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (6.3)$$

V této podmínce je Ω , jenž představuje úhlovou rychlost. Amplituda průtoku je značena Q_0 . Druhá okrajová podmínka je zadána na konci trubice, tedy v poloze L , kde je stěna, tudíž zde kapalina neprotéká a průtok je v tomto místě nulový

$$Q(L, t) = 0. \quad (6.4)$$

Výpočet bude vycházet z Navier-Stokesovy rovnice, konkrétně ze vztahu (3.35). Nebudeme však brát v úvahu vnější objemové zatížení, takže pravá strana rovnice bude nulová

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (6.5)$$

Proudění bude jednorozměrné a rychlost jen ve směru osy x_1 (tj. ve směru značeném x), takže vektor rychlosti bude mít pouze první složku, tzn. $v_i = (v_1, 0, 0)$. Pro tuto složku Navier-Stokesovu rovnici rozepíšeme

$$\rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot v_1 - \frac{\partial \Pi_{1j}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0. \quad (6.6)$$

Budeme uvažovat předpoklad, že časová změna rychlosti je větší než délková změna rychlosti. Na základě toho zanedbáváme člen s konvektivním zrychlením. Jak již bylo zmíněno, v trubici je neviskózní tekutina, takže člen týkající se viskozity Π_{ij} bude také nulový. Rovnice se zjednoduší do této podoby

$$\rho \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0. \quad (6.7)$$

Složku rychlosti ve směru osy x_1 nahradíme střední rychlostí, kterou označíme v_s . Střední hodnota rychlosti se vypočítá pomocí následujícího rovnice

$$Q = v_s \cdot S, \quad (6.8)$$

kde S představuje plochu průřezu trubice, která je konstantní, neboť budeme brát v úvahu tuhé potrubí. Nyní nahradíme rychlost ve směru x_1 střední hodnotou rychlosti v_s a dosadíme ji do rovnice (6.7)

$$\rho \cdot \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0. \quad (6.9)$$

V našem případě nás zajímá závislost na průtoku, neboť pro něj jsou zadány počáteční i okrajové podmínky. Z tohoto důvodu ve výše uvedené rovnici zaměníme střední rychlost poměrem průtoku a plochy průřezu trubice. Také zaměníme značení x_1 za x . Tvar rovnice (6.9) pak bude

$$\frac{\rho}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (6.10)$$

Následně k výpočtu využijeme rovnici kontinuity uvedenou vztahem (3.16), avšak s rozepsanými celkovými derivacemi tlaku podle času

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot v_i + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.11)$$

Rovnice kontinuity pro dané zadání bude v tomto tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot v_1 + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0. \quad (6.12)$$

Zanedbáme konvektivní člen, neboť budeme uvažovat, že časová změna je větší než délková změna. Stejně jako v případě Navier-Stokesovy rovnice provedeme v rovnici (6.12) náhradu rychlosti střední rychlostí

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot a^2 \cdot \frac{\partial v_s}{\partial x_1} = 0. \quad (6.13)$$

V rovnici je nutné získat závislost na průtoku, musíme tedy opět nahradit střední rychlost průtokem. K tomu využijeme vyjádření průtoku z (6.8) a dosadíme jej do (6.13)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho \cdot a^2}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 0. \quad (6.14)$$

Rovnici upravíme do této podoby a provedeme změnu značení x_1 za x

$$\frac{S}{\rho \cdot a^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (6.15)$$

Rovnice (6.10) a (6.15) tvoří soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, kde se vyskytují neznámé funkce, a to pro průtok $Q(x, t)$ a pro tlak $p(x, t)$. Tvary těchto funkcí je nutné vyřešit. V prvním kroku provedeme u obou rovnic Laplaceovu transformaci podle času t , kde novým parametrem bude s a zavedeme značení těchto funkcí pruhem. Nejprve se zaměříme na rovnici (6.10) a uvažujeme nulovou počáteční podmínku pro průtok dle zadání. Rovnice pak bude ve tvaru

$$\frac{\rho}{S} \cdot s \cdot \bar{Q} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0. \quad (6.16)$$

Dále provedeme Laplaceovu transformaci podle času t u rovnice kontinuity z (6.15), a to opět s nulovou počáteční podmínkou, v tomto případě ale pro tlak

$$\frac{S}{\rho \cdot a^2} \cdot s \cdot \bar{p} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = 0. \quad (6.17)$$

Rovnice (6.16) a (6.17) přepíšeme podoby maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{s \cdot \rho}{S} \\ \frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Provedeme druhou Laplaceovu transformaci, avšak podle polohy, kde zavedeme nový parametr ε . Tuto transformaci budeme značit čarou. Předtím je však potřeba vyjádřit Laplaceův obraz okrajové podmínky pro průtok na počátku trubice

$$\mathcal{L}\{Q_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)\} = Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}. \quad (6.19)$$

Maticová rovnice bude následující

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{Q}' \end{pmatrix} \cdot \varepsilon + \begin{pmatrix} 0 & \frac{s \cdot \rho}{S} \\ \frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{Q}' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Rovnici upravíme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{s \cdot \rho}{S} \\ \frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2} & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{Q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Osamostatníme vektor neznámých

$$\begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{Q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{s \cdot \rho}{S} \\ \frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2} & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Inverzní matici na pravé straně označíme P a bude mít tento tvar

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{s \cdot \rho}{S} \\ \frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2} & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - (\frac{s}{a})^2} & \frac{-\frac{s \cdot \rho}{S}}{\varepsilon^2 - (\frac{s}{a})^2} \\ \frac{\frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2}}{\varepsilon^2 - (\frac{s}{a})^2} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - (\frac{s}{a})^2} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci jednotlivých členů matice P , a to podle polohy x . Prvky na hlavní diagonále jsou totožné a jejich tvar je následující

$$P_{11} = P_{22} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right\} = \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right). \quad (6.24)$$

Určíme i zbývající členy matice, nejprve

$$P_{12} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{\rho \cdot s \cdot a}{S \cdot a}}{\varepsilon^2 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right\} = -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right). \quad (6.25)$$

Poslední člen matice P je

$$P_{21} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{s \cdot S}{\rho \cdot a^2}}{\varepsilon^2 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right\} = -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right). \quad (6.26)$$

Dosadíme do (6.22) zpětné Laplaceovy transformace matice značené P , což jsou vztahy (6.24), (6.25) a (6.26)

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) & \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Potřebujeme zjistit tvar tlakové funkce v počáteční poloze, tj. v poloze, kde $x = 0$. Ten získáme, pokud výše uvedenou maticovou rovnici vyjádříme pro polohu $x = L$, čímž dostáváme

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{x=L} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) & \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Nyní využijeme tvar následující rovnice, abychom zjistili podobu zmíněné tlakové funkce na počátku trubice

$$-\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) \cdot \bar{p}_{x=0} + \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right) \cdot Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} = 0. \quad (6.29)$$

Z rovnice (6.29) vyjádříme neznámý Laplaceův obraz tlakové funkce na počátku tyče, což je neznámá okrajová podmínka

$$\bar{p}_{x=0} = \frac{\Omega \cdot Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)}. \quad (6.30)$$

Tuto okrajovou podmínku dosadíme do tvaru rovnice (6.27)

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) & \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Omega \cdot Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \\ Q_0 \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Cílem je zjistit tvary tlakové a průtokové funkce. Nejprve z výše uvedené rovnice vyjádříme Laplaceův obraz pro tlakovou funkci

$$\bar{p}(x, s) = \frac{\Omega \cdot Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \left[\frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2 + \Omega^2} \right]. \quad (6.32)$$

Zlomek před závorkou představuje konstantu, jí se tedy zabývat nebudeme. Zaměříme se nejprve na první člen v závorce

$$\frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}. \quad (6.33)$$

Zde můžeme využít věty o rozkladu, která byla popsána v části 2.2.3 této práce. Z ní je patrné, že musíme vyjádřit derivaci jmenovatele podle proměnné s

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \right] = 2 \cdot s \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) + \frac{L}{a} \cdot (s^2 + \Omega^2) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right). \quad (6.34)$$

Dále je nutné vyřešit nulové kořeny jmenovatele. První dvojice kořenů je následující

$$s = \pm i \cdot \Omega. \quad (6.35)$$

Výše uvedené kořeny budou určovat vynucené tvary kmitání. To jsou takové kmity, které vznikly v důsledku sinového buzení pístem. Zaměříme se také na další kořeny, které popisují vlastní tvary kmitání. Pro ně musí být splněno

$$\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) = 0. \quad (6.36)$$

Řešení této rovnice budeme uvažovat v komplexní rovině, pro proměnnou s tedy obecně platí

$$s = \alpha + i \cdot \omega, \quad (6.37)$$

přičemž α je reálná část, ω představuje imaginární část a i je imaginární jednotka. Dosadíme-li (6.37) do rovnice (6.36), pak dostáváme tvar

$$\sinh\left(\frac{\alpha + i \cdot \omega}{a} \cdot L\right) = 0. \quad (6.38)$$

Ze známého vztahu pro funkci hyperbolický sinus můžeme tuto podobu rozepsat

$$\frac{e^{\alpha \cdot \frac{L}{a}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \frac{L}{a}} - e^{-\alpha \cdot \frac{L}{a}} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \frac{L}{a}}}{2} = 0. \quad (6.39)$$

Rovnice bude splněna, pokud se čitatel bude rovnat nule. Je patrné, že hodnota reálné části α musí být nulová. Následně ze znalosti Eulerovy identity můžeme tvar zapsat následovně

$$\cos\left(\omega \cdot \frac{L}{a}\right) + i \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{L}{a}\right) - \left[\cos\left(\omega \cdot \frac{L}{a}\right) - i \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{L}{a}\right) \right] = 0. \quad (6.40)$$

Po úpravě dostáváme

$$i \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{L}{a}\right) = 0. \quad (6.41)$$

Řešením je

$$\omega = \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.42)$$

Pro nulové body jmenovatele z (6.36), jenž budou značeny s_k , bude platit

$$s_k = i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.43)$$

kde k značí vlastní tvar kmitu. Nulovou hodnotu k neuvažujeme, neboť by se jednalo o statiku. Stabilita v bodech s_k je určena jejich reálnou částí. V našem případě je reálná část těchto hodnot nulová, jedná se tedy o ryze imaginární hodnotu. Řešení bude stabilní, avšak nebude asymptoticky stabilní. Z uvedeného plyne, že nebude docházet k poklesu amplitudy, a to z důvodu, že uvažujeme neviskózní kapalinu.

Nyní již můžeme vyjádřit zpětnou Laplaceovu transformaci členu (6.33)

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right\} = \\ & = \frac{\cosh\left(\frac{i\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{i\Omega}{a} \cdot L\right)}{2 \cdot i \cdot \Omega \cdot \sinh\left(\frac{i\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{i\Omega t} + \frac{\cosh\left(\frac{-i\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{-i\Omega}{a} \cdot L\right)}{-2 \cdot i \cdot \Omega \cdot \sinh\left(\frac{-i\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{-i\Omega t} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{i\frac{a}{L}k\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{i\frac{a}{L}k\pi}{a} \cdot L\right)}{\left(\left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi\right)^2 + \Omega^2\right) \cdot \frac{L}{a} \cdot \cosh\left(\frac{i\frac{a}{L}k\pi}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{i\frac{a}{L}k\pi t}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Tvar této zpětné transformace dále upravíme

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right\} = -\frac{\cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)}{2 \cdot \Omega \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot \left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\left(\left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi\right)^2 + \Omega^2\right) \cdot \frac{L}{a}} \cdot e^{i\frac{a}{L}k\pi t}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Poslední úpravou dostaneme konečnou podobu

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right\} = \\ & = -\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i\frac{a}{L}k\pi t}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Ve vyjádření Laplaceova obrazu tlaku z rovnice (6.32) se zaměříme na druhý člen v závorce, a to tento

$$\frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2 + \Omega^2}. \quad (6.47)$$

Můžeme na něj také aplikovat větu o rozkladu. Nejprve je však nutné zapsat derivaci jmenovatele podle proměnné s

$$\frac{\partial}{\partial s}(s^2 + \Omega^2) = 2 \cdot s. \quad (6.48)$$

Dále musíme zjistit kořeny jmenovatele, ty však budou shodné s kořeny uvedenými v (6.35). Můžeme rovnou zapsat zpětnou Laplaceovu transformaci členu (6.47)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2 + \Omega^2}\right\} = \frac{\sinh\left(\frac{i\Omega}{a} \cdot x\right)}{2 \cdot i \cdot \Omega} \cdot e^{i\Omega \cdot t} + \frac{\sinh\left(\frac{-i\Omega}{a} \cdot x\right)}{-2 \cdot i \cdot \Omega} \cdot e^{-i\Omega \cdot t}. \quad (6.49)$$

Následnou úpravou získáváme tvar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2 + \Omega^2}\right\} = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right)}{2 \cdot \Omega} \cdot \left(e^{i\Omega \cdot t} + e^{-i\Omega \cdot t}\right) = \frac{1}{\Omega} \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos(\Omega \cdot t). \quad (6.50)$$

Již můžeme vyjádřit podobu samotné tlakové funkce

$$p(x, t) = \frac{Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \left[-\frac{\cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \right. \\ \left. + \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} - \sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]. \quad (6.51)$$

Tuto rovnici můžeme rozdělit na dvě části, a to na část, která vznikla v důsledku vynuceného kmitání a tu, která vznikla v důsledku vlastního kmitání. Část s vynuceným kmitáním označíme indexem 1 a bude následující

$$p_1(x, t) = -\frac{Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)} + \sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \right] \cdot \cos(\Omega \cdot t). \quad (6.52)$$

Část týkající se vlastního kmitání označíme indexem 2

$$p_2(x, t) = \frac{\Omega \cdot Q_0 \cdot \rho \cdot a}{S} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \quad (6.53)$$

Zaměříme se ještě na tvar rovnice (6.51). Člen před závorkou můžeme upravit. Uvažovali jsme trubici konstantního průřezu, je tedy možné poměr průtoku k ploše trubice nahradit rychlostí, jež označíme v_0 . Rovnice tak bude mít následující podobu

$$p(x, t) = \rho \cdot a \cdot v_0 \cdot \left[- \frac{\cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \right. \\ \left. + \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} - \sin\left(\frac{\Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]. \quad (6.54)$$

Výraz před závorkou je analogický se Žukovského rovnicí, která je tohoto tvaru [12]

$$\Delta p = \rho \cdot a \cdot v_0. \quad (6.55)$$

Zmíněná rovnice popisuje tzv. úplný, neboli totální ráz. Při něm dochází k zastavení proudu tekutiny, což způsobí pokles kinetické energie, v jejímž důsledku se zvýší tlaková energie. Totální ráz může nastat například při zavírání uzávěru v potrubí. V našem případě může dojít k navýšení tlaku, jež bude mít vyšší hodnotu než jaká by byla v případě totálního rázu. Tato situace nastane, pokud velikost členu v závorce rovnice (6.54) bude větší než jedna.

Dále je našim cílem zjistit řešením průtokové funkce. Vyjádříme Laplaceův obraz průtoku z maticové rovnice (6.31)

$$\bar{Q}(x, s) = \Omega \cdot Q_0 \cdot \left[- \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2 + \Omega^2} \right]. \quad (6.56)$$

Výraz před závorkou představuje součin konstant, zaměříme se tedy na výraz v závorce. Na oba členy můžeme aplikovat větu o rozkladu, neboť je u nich splněna podmínka, že čitatelé jsou nižšího stupně než jmenovatelé. Derivace jmenovatelů byly již řešeny u vyjádření tlakové funkce, stejně tak i kořeny jmenovatelů. Můžeme zapsat zpětné Laplaceovy transformace obou členů. Nejprve první z nich

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right\} = \\ = \frac{\sinh\left(\frac{i \cdot \Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{i \cdot \Omega}{a} \cdot L\right)}{2 \cdot i \cdot \Omega \cdot \sinh\left(\frac{i \cdot \Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t} + \frac{\sinh\left(\frac{-i \cdot \Omega}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{-i \cdot \Omega}{a} \cdot L\right)}{-2 \cdot i \cdot \Omega \cdot \sinh\left(\frac{-i \cdot \Omega}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{-i \cdot \Omega \cdot t} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi}{a} \cdot L\right)}{\left[\left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \right)^2 + \Omega^2 \right] \cdot \frac{L}{a} \cdot \cosh\left(\frac{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \quad (6.57)$$

Následně výše uvedený tvar upravíme

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right) \cdot \cosh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \right\} = \\
& = i \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)}{2 \cdot \Omega \cdot \sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)} \cdot \left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L} \right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right] = \\
& = i \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)}{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)} \cdot \sin \left(\Omega \cdot t \right) + \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L} \right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right]. \quad (6.58)
\end{aligned}$$

Provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci druhého členu v závorce výrazu (6.56)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right)}{s^2 + \Omega^2} \right\} = \frac{\cosh \left(\frac{i\Omega}{a} \cdot x \right)}{2 \cdot i \cdot \Omega} \cdot e^{i\Omega t} + \frac{\cosh \left(\frac{-i\Omega}{a} \cdot x \right)}{-2 \cdot i \cdot \Omega} \cdot e^{-i\Omega t}. \quad (6.59)$$

Po úpravě získáme konečnou podobu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot x \right)}{s^2 + \Omega^2} \right\} & = -i \cdot \frac{\cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right)}{2 \cdot \Omega} \cdot \left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t} \right) = \\
& = -i \cdot \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \sin \left(\Omega \cdot t \right). \quad (6.60)
\end{aligned}$$

Dosazením obou zpětných Laplaceových transformací dostáváme následující tvar průtokové funkce

$$\begin{aligned}
Q(x, t) & = i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)}{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)} \cdot \sin \left(\Omega \cdot t \right) - \right. \\
& \left. - \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L} \right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} - \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \sin \left(\Omega \cdot t \right) \right]. \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Opět průtokovou funkci rozdělíme na dvě části, a to na část vzniklou v důsledku vynuceného kmitání (index 1) a v důsledku vlastního kmitání (index 2). Průtoková funkce vzniklá buzením je následující

$$Q_1(x, t) = i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)}{\sin \left(\frac{\Omega}{a} \cdot L \right)} - \cos \left(\frac{\Omega}{a} \cdot x \right) \right] \cdot \sin \left(\Omega \cdot t \right). \quad (6.62)$$

Část vzniklá v důsledku vlastního kmitání je tato

$$Q_2(x, t) = -i \cdot \Omega \cdot Q_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\frac{L}{a} \cdot \Omega^2 - \frac{a}{L} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \quad (6.63)$$

Dále je nutné zjistit, kdy bude docházet k rezonanci. Ta nastane v případě, že bude shodná frekvence buzení s vlastní frekvencí kapaliny. V této úloze se tak stane, pokud se budou kořeny (6.35) a (6.43) shodovat. Úhlová rychlost bude tedy následující

$$\Omega = \pm \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi. \quad (6.64)$$

Vztah mezi frekvencí a úhlovou rychlostí je tento

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f. \quad (6.65)$$

Kritické frekvence, kterým je nutné se vyvarovat, jsou následující

$$f_{krit} = \pm \frac{a}{2 \cdot L} \cdot k. \quad (6.66)$$

6.1.1. Kmitání kapaliny v konkrétní trubici

V této části se pokusíme vyšetřit průběhy tlaku a průtoku v uzavřené trubici při buzení průtoku sinovou funkcí. Zadány jsou tyto hodnoty

- $L = 10 \text{ m}$ - délka trubice,
- $d = 0,1 \text{ m}$ - průměr trubice,
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ - hustota kapaliny obsažené v trubici,
- $a = 1400 \text{ m/s}$ - rychlost šíření tlakové vlny v kapalině,
- $Q_0 = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ - amplituda průtoku,
- $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ - úhlová rychlost.

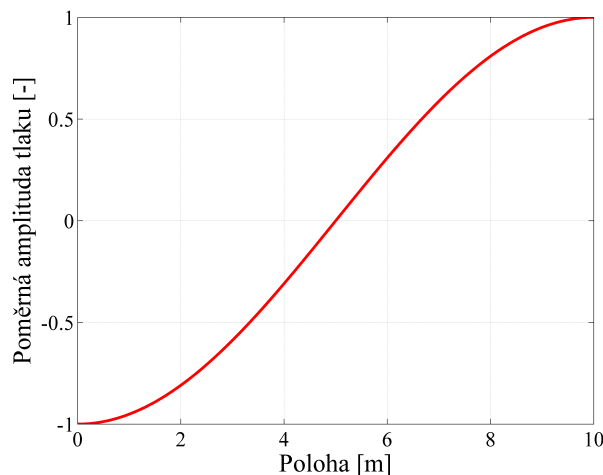
Zaměříme se na vlastní kmitání v trubici. Nejprve vyjádříme tvar pro tlakovou funkci z rovnice (6.53). Pro konkrétní vlastní tvar k bude po dosazení zadaných hodnot tlaková funkce následující

$$p_2(x, t) = \frac{1400}{0,0079} \cdot \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{10}\right)}{0,7143 - 140 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot 140 \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \quad (6.67)$$

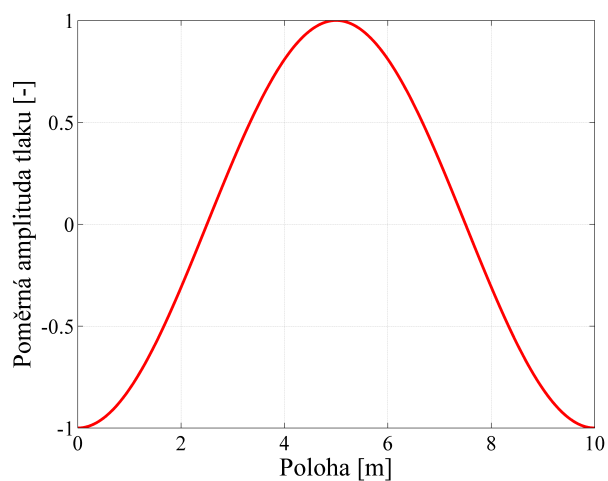
Provedeme následující označení

$$A_{p2} = \frac{1400}{0,0079} \cdot \frac{\cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{10}\right)}{0,7143 - 140 \cdot k^2 \cdot \pi^2}, \quad (6.68)$$

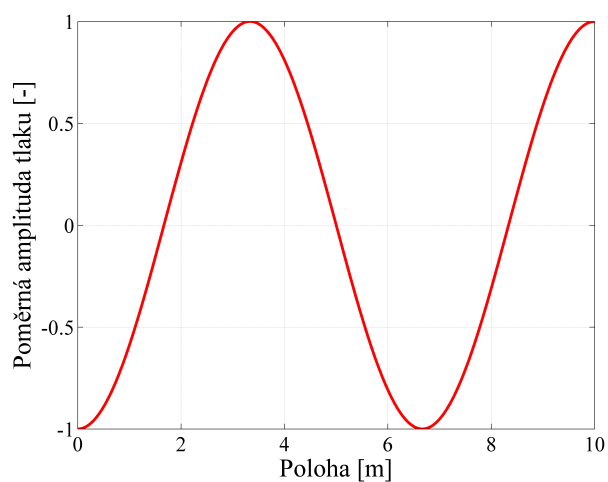
což je amplituda tlaku při k -tém vlastním tvaru kmitu. Je-li $k = 1$, pak se jedná o první vlastní tvar kmitu. Pro ilustraci průběhů těchto kmitů je na Obrázcích 6.2 až 6.5 vykreslena poměrná amplituda tlaku v závislosti na poloze v trubici, a to pro první čtyři tvary.



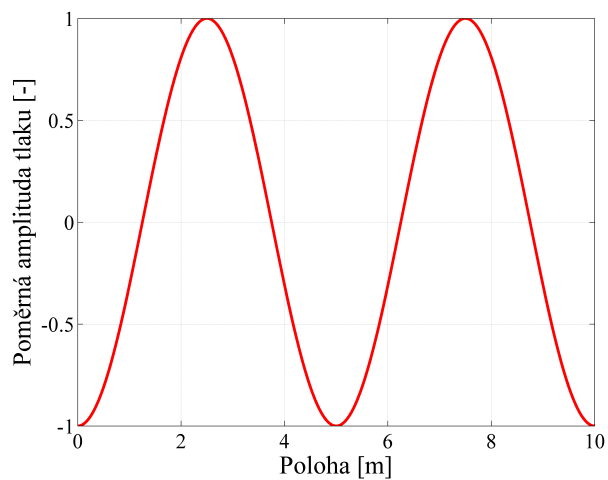
Obrázek 6.2: První vlastní tvar kmitu tlaku



Obrázek 6.3: Druhý vlastní tvar kmitu tlaku



Obrázek 6.4: Třetí vlastní tvar kmitu tlaku



Obrázek 6.5: Čtvrtý vlastní tvar kmitu tlaku

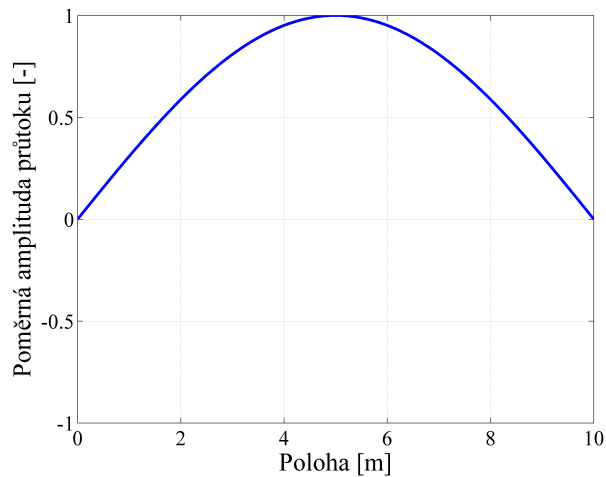
Dále zjistíme průběh pro průtokovou funkci. Dosadíme opět zadané hodnoty do tvaru rovnice (6.63), čímž získáme podobu průtokové funkce pro k -tý vlastní tvar kmitu

$$Q_2(x, t) = -i \cdot 0,01 \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{10}\right)}{0,7143 - 140 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{i \cdot \frac{\omega}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \quad (6.69)$$

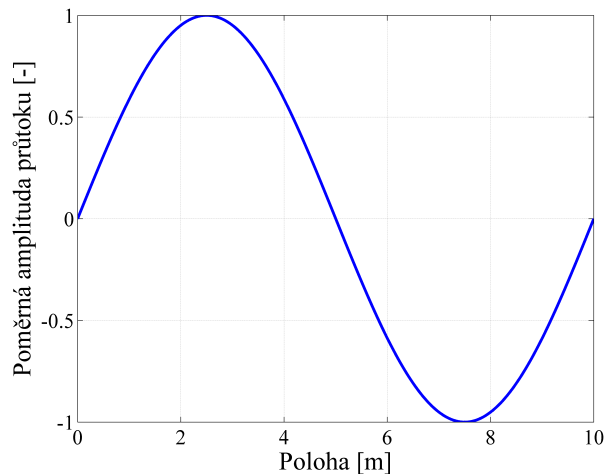
Stejně jak tomu bylo v případě průtokové funkce, tak si označíme amplitudu průtoku následovně

$$A_{Q2}(x, t) = -0,01 \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{10}\right)}{0,7143 - 140 \cdot k^2 \cdot \pi^2}. \quad (6.70)$$

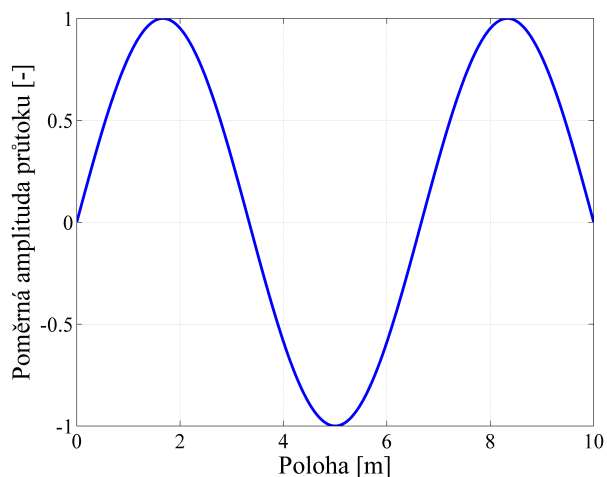
Na Obrázcích 6.6 až 6.9 jsou zobrazeny závislosti poměrné amplitudy průtoku na poloze v tyči. Vykreslení průběhů průtoků na těchto obrázcích je uvedeno pro první čtyři vlastní tvary kmitů.



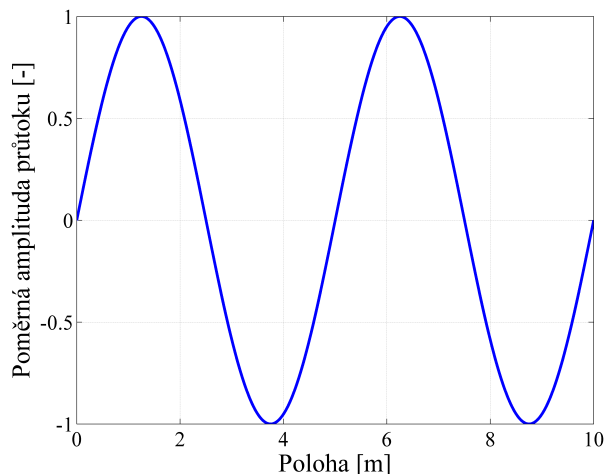
Obrázek 6.6: První vlastní tvar kmitu průtoku



Obrázek 6.7: Druhý vlastní tvar kmitu průtoku



Obrázek 6.8: Třetí vlastní tvar kmitu průtoku



Obrázek 6.9: Čtvrtý vlastní tvar kmitu průtoku

Porovnáme-li průběhy tlakové a průtokové funkce pro stejný tvar kmitu, pak je z nich patrné, že jsou oproti sobě fázově posunuty o 90° . Navíc vyplývá, že pro sudé tvary kmitů je celkový průtok i tlak v trubici nulový.

Jak již bylo zmíněno, k rezonanci bude docházet v případě, že bude platit vztah (6.64). U zvolené trubice, by k rezonanci docházelo, pokud bychom zvolili úhlovou rychlostí Ω o velikosti

$$\Omega = 140 \cdot k \cdot \pi \quad [rad/s], \quad (6.71)$$

přičemž hodnoty k musí být lichá čísla. Následně můžeme zjistit kritickou frekvenci, která odpovídá této úhlové rychlosti

$$f_{krit} = 70 \cdot k \quad [Hz], \quad (6.72)$$

a to opět jen pro liché hodnoty k . Je patrné, že její velikost závisí také na hodnotě k , tedy na tvaru vlastního kmitu. V Tabulce 6.1 jsou uvedeny kritické hodnoty frekvencí a jejich příslušné úhlové rychlosti, a to pro první čtyři liché tvary kmitu. Těmto frekvencím a také jejich blízkým hodnotám je nutné se vyvarovat.

Tabulka 6.1: Kritické hodnoty frekvencí

k	1	3	5	7
Ω [rad/s]	440	1319	2199	3079
f_{krit} [Hz]	70	210	350	490

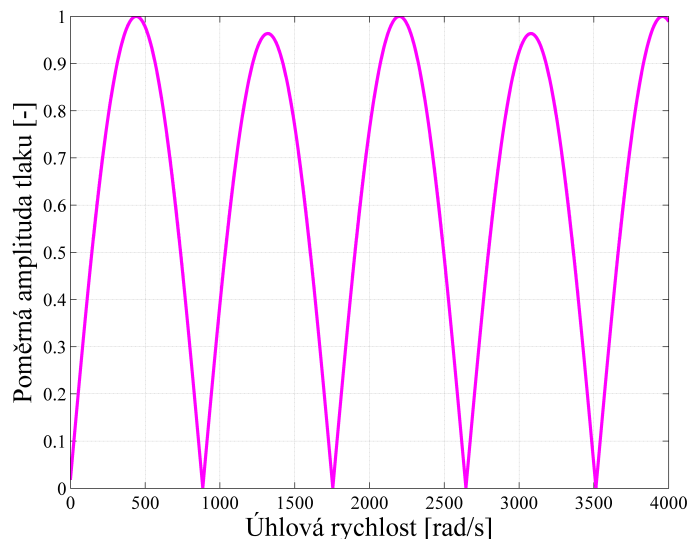
Také je možné zjistit hodnoty úhlových rychlostí při nichž bude docházet k rezonanci z tlakové funkce pro vynucené tvary kmitání. Zvolíme si polohu, kde budeme tento průběh sledovat, a to například v polovině trubice, tedy v poloze, kde $x = 5 \text{ m}$. Vykreslíme závislost tlaku na úhlové rychlosti. Nejprve však dosadíme do tvaru funkce (6.52) zadané hodnoty

$$p_1(x, t) = -178\,254 \cdot \left[\frac{\cos\left(\Omega \cdot \frac{1}{280}\right) \cdot \cos\left(\Omega \cdot \frac{1}{140}\right)}{\sin\left(\Omega \cdot \frac{1}{140}\right)} + \sin\left(\Omega \cdot \frac{1}{280}\right) \right] \cdot \cos(\Omega \cdot t). \quad (6.73)$$

Amplitudu tlaku si označíme následovně

$$A_{p1}(x, t) = -178\,254 \cdot \left[\frac{\cos\left(\Omega \cdot \frac{1}{280}\right) \cdot \cos\left(\Omega \cdot \frac{1}{140}\right)}{\sin\left(\Omega \cdot \frac{1}{140}\right)} + \sin\left(\Omega \cdot \frac{1}{280}\right) \right]. \quad (6.74)$$

Na Obrázku 6.10 je vykreslena závislost poměrné amplitudy tlaku na úhlové rychlosti. Maxima představují hodnoty úhlových rychlostí, při nichž bude docházet k rezonanci. Tyto hodnoty odpovídají hodnotám uvedeným v Tabulce 6.1. Oblasti, kde dosahuje poměrná amplituda nulových hodnot jsou úhlové rychlosti, které vzniknou při sudých tvarech vlastních kmitů.



Obrázek 6.10: Závislost poměrné amplitudy na úhlové rychlosti

6.2. Kmitání kapaliny v uzavřené trubici s buzením průtoku pilovitou funkcí

Budeme se zabývat stejnou trubicí, jako tomu bylo v předchozím případě dle Obrázku 6.1. Rozdíl však bude v budící funkci. Cílem bude opět zjistit tvar tlakové a průtokové funkce, jenž jsou závislé na poloze x a čase t . Úloha vychází z počátečních podmínek, které jsou zadány pro nulový čas

$$Q(x, 0) = 0, \quad (6.75)$$

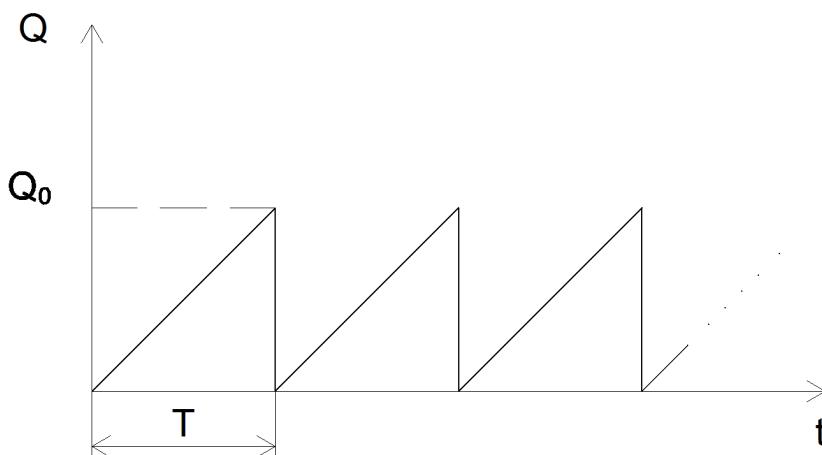
$$p(x, 0) = 0. \quad (6.76)$$

Okrajová podmínka pro počátek trubice bude dána pilovitým průběhem průtoku. Tento průběh je zobrazen na Obrázku 6.11 a popisuje jej následující funkční předpis

$$Q(0, t) = \frac{Q_0}{T} \cdot \left[t \cdot H(t) - \sum_{m=1}^{\infty} H(t - m \cdot T) \right], \quad (6.77)$$

přičemž funkce $H(t)$ představuje Heavisideovu funkci, která bývá také nazývána jednotkovým skokem. Tato funkce je zadána následovně

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (6.78)$$



Obrázek 6.11: Průběh pilovité funkce pro průtok

Druhá okrajová podmínka bude uvedena na konci trubice. Trubicí kapalina nemůže protékat, tudíž

$$Q(L, t) = 0. \quad (6.79)$$

Postup výpočtu bude obdobný jako v případě, kde buzení průtoku probíhalo pomocí sinové funkce. Nutné je zapsat Laplaceovu transformaci okrajové podmínky, a to podle času v poloze $x = 0$. Zde bude zaveden parametr s [1]

$$\mathcal{L}\{Q(0, t)\} = \frac{Q_0}{T} \cdot \frac{e^{sT} - s \cdot T - 1}{s^2 \cdot (e^{sT} - 1)}. \quad (6.80)$$

Rovnice pro řešení daného problému jsou shodné s případem sinového buzení, takže přenosová matice P bude stejná. Můžeme tedy vycházet z maticové rovnice (6.27), avšak nahradíme počáteční podmínku pro průtok jejím Laplaceovým obrazem z (6.80)

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) & \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ \frac{Q_0}{T} \cdot \frac{e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1}{s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} \end{pmatrix}. \quad (6.81)$$

Neznáme však okrajovou podmínku pro tlak na počátku trubice, tj. v poloze, kde $x = 0$. Abychom ji získali, tak maticovou rovnici vyjádříme pro konec trubice, tedy pro polohu $x = L$

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) & \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_{x=0} \\ \frac{Q_0}{T} \cdot \frac{e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1}{s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} \end{pmatrix}. \quad (6.82)$$

Nyní zapíšeme rovnici

$$0 = -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot \bar{p}_{x=0} + \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot \frac{Q_0}{T} \cdot \frac{e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1}{s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)}. \quad (6.83)$$

Z této rovnice vyjádříme Laplaceův obraz tlaku v počátku trubice

$$\bar{p}_{x=0} = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot (e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)}. \quad (6.84)$$

Uvedený tvar dosadíme do maticové rovnice (6.81)

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) & -\frac{\rho \cdot a}{S} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \\ -\frac{S}{\rho \cdot a} \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) & \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot (e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} \\ \frac{Q_0}{T} \cdot \frac{e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1}{s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} \end{pmatrix}. \quad (6.85)$$

Již můžeme zapsat vztah pro Laplaceův obraz tlakové funkce

$$\bar{p}(x, s) = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \left[\frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot (e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} - \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot (e^{s \cdot T} - s \cdot T - 1)}{s^2 \cdot (e^{s \cdot T} - 1)} \right]. \quad (6.86)$$

Výše uvedený tvar však bude výhodné ještě upravit

$$\bar{p}(x, s) = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \left[-\frac{T \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s \cdot (e^{sT} - 1)} + \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{s^2 \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} + \frac{T \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s \cdot (e^{sT} - 1)} - \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right)}{s^2} \right]. \quad (6.87)$$

Dále převedeme členy na společné jmenovatele

$$\bar{p}(x, s) = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \left[T \cdot \frac{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) - \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s \cdot (e^{sT} - 1)} + \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) - \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot x\right) \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)}{s^2 \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right]. \quad (6.88)$$

Následně ještě upravíme čitatele jednotlivých zlomků s využitím rozepsání funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus pomocí exponenciálních funkcí, čímž dostaneme tento tvar

$$\bar{p}(x, s) = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{T \cdot S} \cdot \left[-T \cdot \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot (x - L)\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right) \cdot s \cdot (e^{sT} - 1)} + \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot (x - L)\right)}{s^2 \cdot \sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right]. \quad (6.89)$$

Nyní se budeme zabývat pouze prvním členem v závorce. Využijeme větu o Laplaceově obrazu konvoluce a tento tvar si rozdělíme následovně

$$T \cdot \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot (x - L)\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \cdot \frac{1}{e^{sT} - 1} \cdot \frac{1}{s}. \quad (6.90)$$

Nejprve provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci prvního zlomku. Zde můžeme využít větu o rozkladu uvedenou v části 2.2.3, neboť čítec je nižšího stupně než jmenovatel. Toto tvrzení je patrné, pokud uvedené funkce rozepíšeme do tvaru nekonečné řady. Nutné je zjistit nulové body jmenovatele. Pro výraz $\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)$ byl kořen již vyřešen u předchozího problému. Jeho řešením je

$$s_k = i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.91)$$

Uvedené kořeny představují řešení pro vlastní tvary kmitů a k značí pořadí vlastního kmitu. Kořeny mají opět reálnou část nulovou, takže řešení bude stabilní, ale nikoli asymptoticky stabilní.

Dále můžeme vyjádřit zpětnou Laplaceovu transformaci tohoto výrazu

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{s}{a} \cdot (x - L)\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a} \cdot L\right)} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{s_k}{a} \cdot (x - L)\right)}{\frac{L}{a} \cdot \cosh\left(\frac{s_k}{a} \cdot L\right)} \cdot e^{s_k t}. \quad (6.92)$$

Do uvedeného tvaru dosadíme kořeny z (6.91) a dostáváme

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot (x - L) \right)}{\sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right)}{\frac{L}{a} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \right)} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} = \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}. \end{aligned} \quad (6.93)$$

V druhém kroku provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci druhého zlomku ve výrazu (6.90). Nulový kořen jmenovatele je následující

$$e^{s \cdot T} = 1. \quad (6.94)$$

Pokud budeme uvažovat řešení v komplexní rovině, pak dostaneme

$$s_n = i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.95)$$

Provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci zmíněného zlomku. Je patrné, že i zde je číselník nižšího stupně než jmenovatel, tudíž je možné využít větu o rozkladu

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{e^{s \cdot T} - 1} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T \cdot e^{s_n \cdot T}} \cdot e^{s_n \cdot t}. \quad (6.96)$$

Po dosažení kořene (6.95) bude zpětná Laplaceova transformace tohoto výrazu následující

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{e^{s \cdot T} - 1} \right\} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t}. \quad (6.97)$$

U posledního zlomku výrazu (6.90) byl již obraz Laplaceovy transformace uveden v kapitole týkající se Laplaceových obrazů vybraných funkcí, a to v Tabulce 2.1. Můžeme tedy uvést

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1. \quad (6.98)$$

Ve výrazu (6.90) se vyskytuje součin Laplaceových obrazů, takže bude nutné použít větu o Laplaceově obrazu konvoluce. Nejprve vyjádříme zpětnou Laplaceovu transformaci těchto dvou součinitelů

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{e^{s \cdot T} - 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} * 1 = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot \tau} \cdot d\tau. \quad (6.99)$$

V tomto případě můžeme integrál zaměnit se sumou a výraz vyřešit

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{e^{s \cdot T} - 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot \tau} \cdot d\tau = -i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - 1). \quad (6.100)$$

Dále provedeme druhou konvoluci, čímž získáme konečnou podobu zpětné Laplaceovy transformace hledaného výrazu (6.90)

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot (x - L) \right)}{\sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \cdot \frac{1}{e^{sT} - 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \\
& = \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} * \left(-i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (e^{i \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - 1) \right) = \\
& = -i \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot (t - \tau)} \cdot (e^{i \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot \tau} - 1) \cdot d\tau.
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Opět můžeme zaměnit pořadí sum a integrálu

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot (x - L) \right)}{\sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \cdot \frac{1}{e^{sT} - 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = -i \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \\
& \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \cdot \int_0^t \left(e^{i \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{T} - \frac{a}{L} \cdot k \right) \cdot \tau} - e^{-i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot \tau} \right) \cdot d\tau = \\
& = -i \cdot \frac{a}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{T \cdot L}{i \cdot \pi \cdot (2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T)} \cdot (e^{i \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{T} - \frac{a}{L} \cdot k \right) \cdot t} - 1) + \frac{L}{i \cdot \pi \cdot a \cdot k} \cdot (e^{-i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} - 1) \right] = \\
& = -\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \\
& \cdot \left[\frac{T}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot (e^{i \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}) + \frac{1}{a \cdot k} \cdot (1 - e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t}) \right] \cdot \\
& = -\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot n \cdot L}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + \frac{1}{a \cdot k} \right). \tag{6.102}
\end{aligned}$$

Zaměříme se na zpětnou Laplaceovu transformaci druhého členu v závorce z (6.89). Využijeme větu o obrazu konvoluce a opět si rozdělíme tvar na dva součinitele, a to

$$\frac{\cosh \left(\frac{s}{a} \cdot (x - L) \right)}{\sinh \left(\frac{s}{a} \cdot L \right)} \cdot \frac{1}{s^2}. \tag{6.103}$$

Tvar zpětné Laplaceovy transformace máme již vyjádřený v (6.93). Zbývá zpětná Laplaceova transformace druhého členu. Ta je uvedena v Tabulce 2.1 a je následující

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t. \quad (6.104)$$

Na součin těchto zpětných transformací aplikujeme větu o konvoluci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\left(\frac{s}{a}\cdot(x-L)\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a}\cdot L\right)}\cdot\frac{1}{s^2}\right\} &= t * \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} = \\ &= \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \int_0^t (t - \tau) \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot \tau} \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Můžeme zaměnit pořadí sumy a integrálu a následný tvar vyřešíme pomocí integrační metody per partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\left(\frac{s}{a}\cdot(x-L)\right)}{\sinh\left(\frac{s}{a}\cdot L\right)}\cdot\frac{1}{s^2}\right\} &= \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \int_0^t (t - \tau) \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot \tau} \cdot d\tau = \\ &= \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \left[t \cdot \int_0^t e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot \tau} \cdot d\tau - \int_0^t \tau \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot \tau} \cdot d\tau \right] = \\ &= \frac{a}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \left(\frac{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + 1}{\frac{a^2}{L^2} \cdot k^2 \cdot \pi^2} \right) = \\ &= \frac{L}{a \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + 1 \right). \end{aligned} \quad (6.106)$$

Následně jsme schopni vyjádřit hledanou tlakovou funkci závislou na poloze a čase

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{S} \cdot \left[\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \right. \\ &\cdot \left(\frac{T}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot n \cdot L}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + \frac{1}{a \cdot k} \right) + \\ &\left. + \frac{L}{a \cdot \pi^2 \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \cdot \left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Stejně, jako tomu bylo v případě tlakové funkce u trubice se sinovým buzením průtoku, tak můžeme první člen této funkce upravit. Jedná se o trubici s konstantním průřezem, tudíž je možné zaměnit podíl průtoku a plochy průřezu trubice za hodnotu rychlosti, jenž označíme v_0 . Rovnice tedy bude mít následující podobu

$$p(x, t) = \rho \cdot a \cdot v_0 \cdot \left[\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot n \cdot L}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + \frac{1}{a \cdot k} \right) + \frac{L}{a \cdot \pi^2 \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} + 1 \right) \right]. \quad (6.108)$$

První člen tlakové funkce představuje Žukovského vztah pro úplný ráz. Z tvaru funkce je patrné, že může dojít k tlaku vyššímu než jaký je u totálního rázu, a to pokud výraz v závorce za tímto členem bude mít hodnotu větší než jedna.

Nutné je zjistit tvar průtokové funkce. Můžeme postupovat stejným způsobem, jako tomu bylo u výpočtu tlakové funkce. Druhou variantou je, že využijeme tvaru rovnice kontinuity z (6.14), z níž si vyjádříme parciální derivaci průtoku podle polohy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{S}{\rho \cdot a^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.109)$$

Vyjádříme derivaci tlakové funkce ze vztahu (6.107) podle času

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho \cdot a \cdot Q_0}{S} \cdot \left[\frac{a}{2 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(i \cdot \frac{T}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - i \cdot \frac{2 \cdot n \cdot L}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot \frac{a \cdot k \cdot \pi}{L} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + \frac{L}{a \cdot \pi^2 \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi - i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) \right]. \quad (6.110)$$

Dále tvar této derivace dosadíme do vztahu (6.109)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot a \cdot k \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + \frac{1}{a \cdot \pi \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(1 - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) \right]. \quad (6.111)$$

Tuto rovnici budeme integrovat podle polohy, abychom získali průtokovou funkci

$$\begin{aligned}
Q(x, t) = & -i \cdot Q_0 \cdot \int \left[\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot a \cdot k \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + \\
& \left. + \frac{1}{a \cdot \pi \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(1 - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) \right] \cdot dx. \quad (6.112)
\end{aligned}$$

Po integraci získáváme tento tvar rovnice

$$\begin{aligned}
Q(x, t) = & -i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{L}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - \frac{2 \cdot a \cdot k \cdot n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + \\
& \left. + \frac{1}{a \cdot \pi \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{L}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(1 - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + C \right]. \quad (6.113)
\end{aligned}$$

Uvedenou podobu dále upravíme

$$\begin{aligned}
Q(x, t) = & -i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \right. \\
& \cdot \frac{n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot \left(e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - a \cdot k \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + \\
& \left. + \frac{L}{a \cdot \pi^2 \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(1 - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) + C \right]. \quad (6.114)
\end{aligned}$$

Ve vyjádření průtokové funkce je i integrační konstanta C , jejíž podobu získáme, dosadíme-li do rovnice (6.114) počáteční podmínku pro průtok z (6.75)

$$\begin{aligned}
0 = & -i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \right. \\
& \cdot \frac{n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot \left(1 - a \cdot k \right) + C \left. \right]. \quad (6.115)
\end{aligned}$$

Konstanta bude tohoto tvaru

$$C = -\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \frac{n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot (1 - a \cdot k). \quad (6.116)$$

Dosadíme-li vyjádření konstanty C do rovnice (6.114), pak získáme konečnou podobu hledané průtokové funkce

$$\begin{aligned} Q(x, t) = & -i \cdot Q_0 \cdot \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{n}{2 \cdot n \cdot L - a \cdot k \cdot T} \cdot \left(e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot t} - a \cdot k \cdot e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} - 1 + a \cdot k \right) + \\ & \left. + \frac{L}{a \cdot \pi^2 \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \sin \left(k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right) \cdot \left(1 - e^{i \cdot \frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi \cdot t} \right) \right]. \quad (6.117) \end{aligned}$$

Důležité je zjistit, kdy bude docházet k rezonanci. Ta nastane v případě, že budou kořeny z rovnice (6.91) v rovnosti s kořeny (6.95). Musí tedy platit

$$\frac{a}{L} \cdot k \cdot \pi = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (6.118)$$

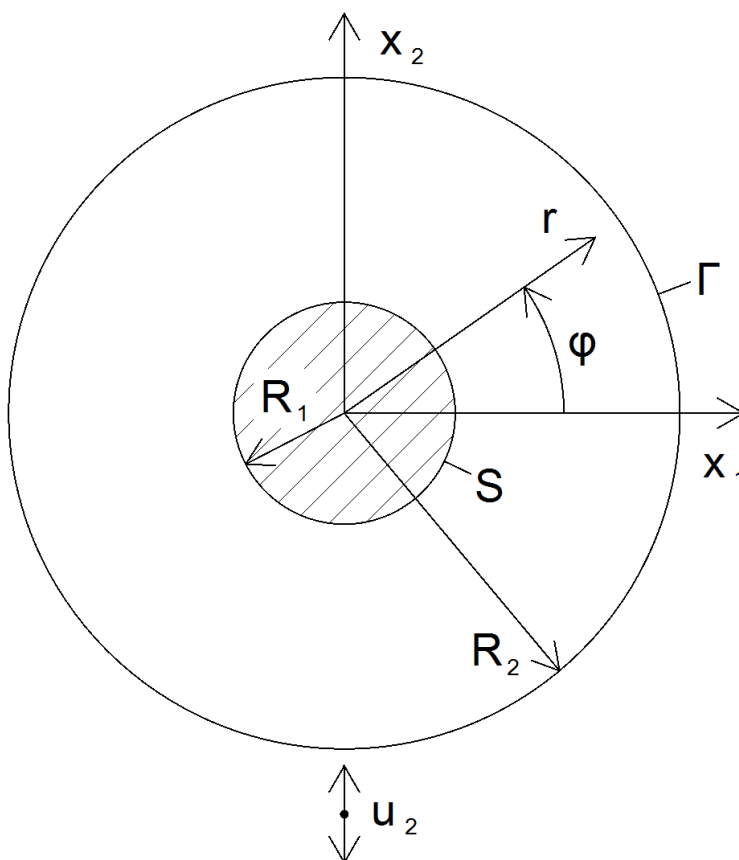
Rezonance bude nastávat, pokud perioda pilovité funkce T bude následující

$$T = \frac{2 \cdot n \cdot L}{a \cdot k}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (6.119)$$

7. Kmitání kapaliny v mezikruží

7.1. Kmitání kapaliny v mezikruží vyvolané pohybem tělesa

Budeme se zabývat kmitáním kapaliny v mezikruží. Uvažujeme problém dle Obrázku 7.1, přičemž R_1 značí poloměr vnitřní kružnice a R_2 poloměr vnější kružnice. Kapalina vyplňující tento prostor je ideální, tedy nestlačitelná a neviskózní. Také je ohraničená plochami Γ a S , což jsou nepropustné oblasti. Dané těleso vykonává pouze translační pohyb, a to ve směru osy x_2 , vektor posunutí bude tedy následující $u_i = (0, u_2, 0)$. Úlohu budeme řešit jako rovinnou, neboť posunutí probíhá pouze ve směru osy x_2 . Zdrojem literatury při tomto výpočtu jsou [5], [9], [11].



Obrázek 7.1: Oblast mezikruží

Nutné je doplnit počáteční podmínky, které budou uvedeny pro posunutí, rychlost a tlak v nulovém čase. Všechny tyto veličiny jsou závislé na poloze \mathbf{x} a čase t

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (7.1)$$

$$v_i(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (7.2)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (7.3)$$

Okrajové podmínky budou uvedeny pro jednotlivé oblasti. Oblast Γ je nehybná. Podmínka bude udána pro normálovou rychlost v_n , kterou je možné také vyjádřit jako skalární součin vektoru rychlosti a vektoru normály, tedy

$$\Gamma : v_n = v_i \cdot n_i = 0. \quad (7.4)$$

Druhá okrajová podmínka bude pro oblast S . V mezikruží uvažujeme ideální kapalinu, takže nemá význam podmínka ulpívání v důsledku smykových napětí. V takovém případě musí být v rovnosti normálové složky rychlosti tekutiny v_n a rychlosti tělesa \dot{u}_n na povrchu S , tj.

$$S : v_i \cdot n_i = \dot{u}_i \cdot n_i. \quad (7.5)$$

K řešení využijeme Navier-Stokesovu rovnici v silovém tvaru na jednotku objemu, avšak vynecháme složky týkající se viskozity a zanedbáme vliv vnějšího zatížení. Rovnice bude tvaru

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (7.6)$$

Jak již bylo uvedeno, uvažujeme pouze translační pohyb tělesa a tedy i malé kmity kolem rovnovážné polohy. Z tohoto důvodu můžeme druhý člen zanedbat a rovnice bude následující

$$\rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (7.7)$$

K výpočtu dále užijeme rovnici kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, která je uvedena ve tvaru (3.18)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Kvůli dalším úpravám bude výhodné tuto rovnici zderivovat podle času

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.8)$$

Z Navier-Stokesovy rovnice uvedené v (7.7) vyjádříme parciální derivaci rychlosti podle času a tento tvar dosadíme do (7.8), čímž dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (7.9)$$

Po úpravě obdržíme Laplaceovu rovnici pro tlakovou funkci

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (7.10)$$

Uvažovaný problém tak popisuje pouze jedna diferenciální rovnice druhého řádu, kde je neznámou tlaková funkce, jež je závislá na poloze a čase. Je tedy nutné okrajové podmínky modifikovat tak, abychom v nich získali závislost na tlaku. Nejprve se zaměříme na oblast Γ , zde je rychlost ve směru normály nulová, tuto podmínku zapsanou pomocí skalárního součinu zderivujeme podle času

$$\Gamma : \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot n_i + v_i \cdot \frac{\partial n_i}{\partial t} = 0. \quad (7.11)$$

Druhý člen bude nulový, neboť při translačním pohybu bude vektor rychlosti kolmý na vektor normály. Následně parciální derivaci rychlosti podle času vyjádříme z Navier-Stokesovy rovnice (7.7), dosadíme do tvaru uvedeného výše a upravíme. Okrajová podmínka pro oblast Γ bude mít tuto podobu

$$\Gamma : \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot n_i = 0. \quad (7.12)$$

Zapsáno pomocí operátoru gradient

$$\Gamma : \text{grad } p \cdot n_i = 0. \quad (7.13)$$

Z této okrajové podmínky pro plochu Γ vyplývá, že gradient tlaku je kolmý na jednotkový směr normály k této ploše, což znamená, že tlak se šíří podél stěny.

Druhou okrajovou podmínku (7.5) také zderivujeme podle času

$$S : \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot n_i = \ddot{u}_i \cdot n_i, \quad (7.14)$$

kde \ddot{u}_i značí zrychlení tělesa. Dosadíme za derivaci rychlosti podle času

$$S : -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot n_i = \ddot{u}_i \cdot n_i, \quad (7.15)$$

po úpravě

$$S : \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot n_i = -\rho \cdot \ddot{u}_i \cdot n_i. \quad (7.16)$$

Laplaceovu rovnici (7.10) jsme schopni vyřešit v případě, že známe zrychlení tělesa \ddot{u}_i . Pro zjištění tvaru tlakové funkce využijeme následující substituci, která vyhovuje okrajovým podmínkám

$$p(x_i, t) = -\rho \cdot A_j(x_i) \cdot \ddot{u}_j(t). \quad (7.17)$$

Dosadíme tuto substituci do rovnice (7.16), čímž získáme

$$S : -\rho \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot n_i \cdot \ddot{u}_j = -\rho \cdot \ddot{u}_j \cdot n_j. \quad (7.18)$$

Podmínku na ploše S ještě dále upravíme

$$S : \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot n_i - n_j \right) \cdot \ddot{u}_j = 0. \quad (7.19)$$

Neuvažujeme-li nulové zrychlení, pak musí platit

$$S : \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot n_i - n_j \right) = 0. \quad (7.20)$$

Vektor posunutí má pouze složku ve směru osy x_2 . Okrajová podmínka pro oblast S tedy bude

$$S : \frac{\partial A_2}{\partial x_i} \cdot n_i = n_2. \quad (7.21)$$

Vyjádřeno pomocí operátoru gradient

$$S : \text{grad } A_2 \cdot n_i = n_2. \quad (7.22)$$

Tvar tlakové funkce (7.17) dosadíme do podmínky pro oblast Γ

$$\Gamma : -\rho \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot n_i \cdot \ddot{u}_j(t) = 0. \quad (7.23)$$

Pokud opět uvažujeme známé nenulové zrychlení, pak má pro dané posunutí tělesa u_2 okrajová podmínka tuto podobu

$$\Gamma : \frac{\partial A_2}{\partial x_i} \cdot n_i = 0. \quad (7.24)$$

Uvedenou podmínku lze zapsat pomocí operátoru gradient

$$\Gamma : \text{grad } A_2 \cdot n_i = 0. \quad (7.25)$$

Do rovnice (7.10) dosadíme za substituci z (7.17) a při nenulovém zrychlení tělesa dostaneme

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (7.26)$$

Nyní je nutné zjistit podobu funkce A_2 . Pro zadanou úlohu je výhodné zvolit pro řešení válcový souřadný systém. Musíme tedy vyjádřit operátor gradient, Laplaceův operátor a vnější jednotkové normálové vektory k plochám Γ a S v těchto souřadnicích. Nejprve operátor gradient, ten má ve válcovém souřadném systému tuto podobu

$$\text{grad } A_2 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}, \frac{\partial A_2}{\partial z} \right). \quad (7.27)$$

Pro naše zadání bude platit

$$\text{grad } A_2 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}, 0 \right). \quad (7.28)$$

Dále Laplaceův operátor, což je tvar samotné Laplaceovy rovnice

$$\Delta A_2 = \frac{\partial^2 A_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial r}. \quad (7.29)$$

V našem případě však řešíme rovinný problém, takže poslední člen bude nulový a rovnice bude následujícího tvar

$$\Delta A_2 = \frac{\partial^2 A_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial r}. \quad (7.30)$$

Zbývá zápis normálových vektorů pomocí válcových souřadnic, v tomto případě pomocí úhlu φ

$$\Gamma : n_\Gamma = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (7.31)$$

$$S : n_S = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0). \quad (7.32)$$

Okrajová podmínka ve válcových souřadnicích pro oblast Γ bude

$$\Gamma : \frac{\partial A_2}{\partial r} = 0, \quad (7.33)$$

a pro oblast S

$$S : \frac{\partial A_2}{\partial r} = \sin \varphi. \quad (7.34)$$

Uvažováním polárních souřadnic je funkce A_2 závislá na souřadnicích r a φ , tj. $A_2(r, \varphi)$. U této funkce můžeme provést náhradu, kde ji rozložíme na součin dvou funkcí, z nichž každá má závislost pouze na jedné složce polárních souřadnic, tedy

$$A_2 = Z(r) \cdot V(\varphi). \quad (7.35)$$

Dále tuto funkci zderivujeme podle souřadnice r , a to z důvodu, abychom zjistili okrajovou podmínku po substituci této funkce

$$S : \frac{\partial Z}{\partial r} \cdot V(\varphi) = \sin \varphi. \quad (7.36)$$

Funkce Z je závislá pouze na souřadnici r , tudíž

$$V(\varphi) = \sin \varphi. \quad (7.37)$$

Funkce A_2 je tvaru

$$A_2 = Z(r) \cdot \sin \varphi. \quad (7.38)$$

Nyní je nutné zjistit podobu funkce Z . Tu získáme dosazením substituce (7.38) do rovnice (7.30)

$$\Delta A_2 = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \cdot \sin \varphi + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial r} \cdot \sin \varphi - \frac{1}{r^2} \cdot Z \cdot \sin \varphi = 0. \quad (7.39)$$

Upravíme-li rovnici, pak dostaneme

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial Z}{\partial r} - Z = 0. \quad (7.40)$$

Tvar této lineární diferenciální rovnice druhého řádu je shodný s tvarem takzvané Euler-Cauchyho rovnice. Její řešení je možné zavedením následující substituce

$$Z = r^m. \quad (7.41)$$

Dále vyjádříme první parciální derivaci podle proměnné r

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = m \cdot r^{m-1}. \quad (7.42)$$

a druhou parciální derivaci podle proměnné r

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} = m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2}. \quad (7.43)$$

Momentálně do diferenciální rovnice (7.40) dosadíme substituci (7.41) společně s derivacemi z (7.42) a (7.43)

$$r^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2} + r \cdot m \cdot r^{m-1} - r^m = 0. \quad (7.44)$$

Po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici s jedinou neznámou m

$$m^2 - 1 = 0. \quad (7.45)$$

Kořeny této rovnice budou

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1. \quad (7.46)$$

Řešení rovnice (7.40) je tedy následující

$$Z = c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r}, \quad (7.47)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které zjistíme z okrajových podmínek. Pro oblast Γ je poloměr této kružnice R_2 a pro oblast S je poloměr R_1 . Po dosazení do okrajových podmínek dostáváme konstantu

$$c_1 = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (7.48)$$

a druhou konstantu

$$c_2 = -\frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (7.49)$$

Po dosazení konstant do rovnice (7.47) obdržíme její konečný tvar

$$Z(r) = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (7.50)$$

Hledaná funkce A_2 je tohoto tvaru

$$A_2(r, \varphi) = -\left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \sin \varphi. \quad (7.51)$$

Výsledná podoba tlakové funkce při známém zrychlení tělesa $\ddot{u}_2(t)$ závisící na poloměru r , úhlu φ a čase t je následující

$$p(r, \varphi, t) = -\rho \cdot \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{u}_2(t). \quad (7.52)$$

Tvar tlakové funkce již známe, zbývá zjistit podobu rychlostních funkcí v_r a v_φ . Opět bude výhodné daný problém řešit v cylindrických souřadnicích. Pro tyto souřadnice máme již vyjádřeny Navier-Stokesovy rovnice ve vztazích (3.53), (3.54) a (3.55). V našem případě neuvažujeme žádné vnější zatížení, takže tento vektor má nulové složky, tj. $\mathbf{g} = (0, 0, 0)$. Řešíme problém pouze v rovině, tudíž vektor rychlosti bude mít pouze první dvě složky, tj. $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, 0)$. Jak bylo řečeno, neuvažujeme viskozitu kapaliny, z čehož plyne, že tyto členy budou nulové. První Navier-Stokesova rovnice se tak zredukuje do tohoto tvaru

$$\rho \cdot \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (7.53)$$

Druhá rovnice bude následující

$$\rho \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \rho \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \cdot \frac{v_r \cdot v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.54)$$

Uvažujeme konstantní hustotu kapaliny, takže k výpočtu můžeme využít rovnici kontinuity v cylindrických souřadnicích uvedenou v (3.30), která pro daný problém bude mít tuto podobu

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot (v_r \cdot r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.55)$$

Předpokládáme řešení rovnic ve tvaru

$$p(r, \varphi, t) = Z(r, t) \cdot \sin \varphi. \quad (7.56)$$

$$v_r(r, \varphi, t) = U(r, t) \cdot \sin \varphi. \quad (7.57)$$

$$v_\varphi(r, \varphi, t) = V(r, t) \cdot \cos \varphi. \quad (7.58)$$

Tvar tlakové rovnice je již vyjádřený, tudíž víme, že

$$Z(r, t) = -\rho \cdot \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \ddot{u}_2(t). \quad (7.59)$$

kde $\ddot{u}_2(t)$ představuje známé zrychlení.

Nejprve se zaměříme na rovnici kontinuity vyjádřenou v (7.55), kterou upravíme

$$r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \cdot \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.60)$$

Dále do této rovnice dosadíme tvary funkcí (7.56), (7.57) a (7.58), čímž obdržíme tuto podobu rovnice

$$r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \sin \varphi + U \cdot \sin \varphi - V \cdot \sin \varphi = 0. \quad (7.61)$$

Z daného tvaru je možné vyjádřit funkci V následovně

$$V = U + r \cdot \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (7.62)$$

Nyní se budeme zabývat Navier-Stokesovými rovnicemi. Nejprve se budeme věnovat první z nich. Opět tedy dosadíme tvary funkcí z (7.56), (7.57) a (7.58) do rovnice (7.53)

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \sin \varphi + \rho \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \sin^2 \varphi + \rho \cdot U \cdot V \cdot \frac{1}{r} \cdot n \cdot \cos^2 \varphi - \\ - \rho \cdot V^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{\partial Z}{\partial r} \cdot \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Na základě předpokladu malých kmitů tělesa můžeme nelineární členy zanedbat, čímž se rovnice zjednoduší do podoby

$$\rho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial Z}{\partial r} \cdot \sin \varphi = 0. \quad (7.64)$$

Uvedenou rovnici můžeme dále upravit a dosadíme derivaci funkce Z podle proměnné r

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.65)$$

Cílem je získat podobu funkce U . Rovnici tedy budeme integrovat podle času

$$U(r, t) = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{u}_2(t), \quad (7.66)$$

kde $\dot{u}_2(t)$ představuje známou rychlost, se kterou těleso kmitá. Následně můžeme zjistit podobu funkce V , a to dosazením do rovnice (7.62). Nejprve však musíme zapsat derivaci funkce U podle proměnné r

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{2}{r^3} \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.67)$$

Výše uvedenou derivaci dosadíme do rovnice (7.62), a to společně s dosazením funkce U z (7.66)

$$V(r, t) = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{u}_2(t) + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.68)$$

Následně tento tvar upravíme a dostaneme konečnou podobu funkce V

$$V(r, t) = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.69)$$

Již můžeme uvést tvar řešení pro hledané složky rychlosti. Pro rychlost ve směru souřadnice r je tato funkce následující

$$v_r(r, \varphi, t) = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.70)$$

Pro složku rychlosti ve směru φ dostáváme tento tvar funkce

$$v_\varphi(r, \varphi, t) = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{u}_2(t). \quad (7.71)$$

7.1.1. Přídavná hmotnost kapaliny

U daného problému kmitání kapaliny v mezikruží se pokusíme zjistit přídavné účinky kapaliny, konkrétně její přídavnou hmotnost. Ta se připojuje k tělesu v důsledku nestacionárního pohybu, který nastává v tekutině. Tato část bude zpracována dle [9].

Přídavné účinky budou odvozeny z rovnováhy sil působící na těleso. Budeme uvažovat těleso v inerciální soustavě, na něž působí v jeho těžišti setrvačná síla $m \cdot \ddot{\mathbf{u}}$. Přičemž m představuje hmotnost těla a $\ddot{\mathbf{u}}$ značí jeho zrychlení. Tato síla je v rovnováze s účinky vnějších povrchových sil, které budou značeny \mathbf{F}^s a se silami, které jsou vyvolány působením vnějšího prostředí, ty budou značeny \mathbf{F}^p . Zapsáno rovnicí

$$m \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^s + \mathbf{F}^p. \quad (7.72)$$

Elementární sílu, která působí na elementární povrch tělesa dS můžeme vyjádřit pomocí tenzoru napětí

$$dF_i^s = \sigma_{ij} \cdot m_j \cdot dS, \quad (7.73)$$

kde m_j je vnější jednotkový normálový vektor k ploše tělesa. Dosadíme podobu tenzoru napětí z rovnice (3.33), přičemž kapalina vyplňující prostor mezikruží je neviskózní, tudíž člen týkající se viskozity bude nulový. Pak samotná elementární síla bude mít následující podobu

$$dF_i^s = -p \cdot m_i \cdot dS. \quad (7.74)$$

Při řešení daného problému jsme neuvažovali vnější působení, takže rovnice (7.72) s dosazením tvaru tlakové funkce z (7.52) bude tohoto tvaru

$$m \cdot \ddot{u}_2 = \rho \cdot \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{u}_2 \cdot m_2 \cdot dS. \quad (7.75)$$

Vektor vnější normály k tělesu v polárních souřadnicích je tento

$$m_i = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0). \quad (7.76)$$

Element plochy S můžeme v polárních souřadnicích zapsat

$$dS = R_1 \cdot d\varphi. \quad (7.77)$$

Přídavná hmotnost bude vypočítána pomocí plošného integrálu přes plochu S , jenž je kružnice o poloměru R_1

$$m = \rho \cdot \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot R_1 + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot R_1 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi. \quad (7.78)$$

Přídavná hmotnost má tedy tuto hodnotu

$$m = \rho \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (7.79)$$

Jedná se o přídavnou hmotnost na jednotku délky tyče. O tuto hodnotu bude hmotnost tělesa navýšena. Z toho lze vyvodit, že kmitá-li těleso v kapalině, jeví se hmotnějším než je ve skutečnosti, což má vliv při určování vlastních frekvencí a také při zjišťování, kdy bude docházet k rezonanci, a to například u rotorů čerpadel.

7.2. Vlastní tvary kmitů kapaliny v mezikruží

7.2.1. Mezikruží vyplněné nestlačitelnou neviskózní kapalinou

Dále budeme uvažovat problém kmitání kapaliny v mezikruží shodný s předchozím, uvedeným na Obrázku 7.1. V tomto případě však nebude pohyb kapaliny způsoben tělesem. Nyní se však zaměříme na vlastní tvary kmitů. Opět uvažujeme nestlačitelnou a neviskózní kapalinu.

Úlohu doplňují okrajové podmínky, a to pro tlak. Nejprve bude uvedena podmínka pro vnitřní kružnici s poloměrem R_1 , tedy pro oblast S

$$S : p = 0. \quad (7.80)$$

Druhá podmínka bude dána pro oblast Γ , což je vnější kružnice o poloměru R_2

$$\Gamma : p = 0. \quad (7.81)$$

Jak bylo uvedeno v předchozí části, pro nestlačitelnou a neviskózní kapalinu získáme řešení tlakové funkce z Laplaceovy rovnice, jenž je následující

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x_i \partial x_i} = 0.$$

Vzhledem k tvaru oblasti bude výhodné řešit úlohu v cylindrických souřadnicích. V nich tuto rovnici zapíšeme

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7.82)$$

Uvedené rovnici vyhovuje toto řešení

$$p = A(r, t) \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}. \quad (7.83)$$

Do rovnice (7.82) můžeme dosadit podobu tlakové funkce z tvaru (7.83). Avšak je ještě nutné vyjádřit druhou derivaci tlakové funkce podle proměnné φ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = -A \cdot n^2 \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}. \quad (7.84)$$

Nyní můžeme Laplaceovu rovnici zapsat následovně

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot A \cdot n^2 \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = 0. \quad (7.85)$$

Rovnici dále upravíme

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial A}{\partial r} - A \cdot n^2 = 0. \quad (7.86)$$

Tento tvar představuje Euler-Cauchyovu rovnici, kde můžeme předpokládat řešení v následujícím tvaru [5]

$$A = r^m. \quad (7.87)$$

První a druhá derivace této funkce již byly vyjádřeny v (7.42) a (7.43). Můžeme je tedy dosadit a rovnice bude tohoto tvaru

$$r^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot r^{m-2} + r \cdot m \cdot r^{m-1} - n^2 \cdot r^m = 0. \quad (7.88)$$

Po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici

$$m^2 - n^2 = 0. \quad (7.89)$$

Její kořeny budou následující

$$m_1 = n, \quad m_2 = -n. \quad (7.90)$$

Řešení pro funkci A pak bude tohoto tvaru

$$A = c_1 \cdot r^n + \frac{c_2}{r^n}. \quad (7.91)$$

Dosadíme-li podobu funkce A do rovnice (7.83), pak získáme tvar tlakové funkce

$$p = \left(c_1 \cdot r^n + \frac{c_2}{r^n} \right) \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}. \quad (7.92)$$

Konstanty c_1 a c_2 vypočítáme z okrajových podmínek (7.80) a (7.81). Nejprve dosadíme podmínku pro oblast S

$$S : \left(c_1 \cdot R_1^n + \frac{c_2}{R_1^n} \right) \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = 0. \quad (7.93)$$

Druhou rovnici pro výpočet konstant c_1 a c_2 získáme dosazením do podmínky pro oblast Γ , kde je poloměr vnější kružnice roven R_2

$$\Gamma : \left(c_1 \cdot R_2^n + \frac{c_2}{R_2^n} \right) \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = 0. \quad (7.94)$$

Okrajové podmínky (7.93) a (7.94) budou splněny pouze v případě, že bude hodnota n nulová. Pak bude vycházet řešení tlakové funkce nulové, tj.

$$p(r, t, \varphi) = 0. \quad (7.95)$$

V daném případě se jedná o statickou úlohu, tudíž nemá význam se vlastními hodnotami zabývat, neboť v kapalině nedochází k žádným změnám.

7.2.2. Mezikruží vyplněné stlačitelnou viskózní kapalinou

V této části vyřešíme vlastní kmity kapaliny v mezikruží, ale tentokrát pro stlačitelnou viskózní kapalinu. Při zjišťování vlastních hodnot budeme vycházet z rovnice pro Laplaceův obraz tlaku, jenž byla odvozena v části práce týkající se rovinného kmitání. Vycházíme z následujícího tvaru uvedeného v (5.54)

$$\bar{p} = \frac{K}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot r) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot r) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right\}, \quad (7.96)$$

přičemž n představuje tvar vlastního kmitu. Pro statiku bude tato hodnota rovna nule. Nás však zajímá pouze dynamika pohybu, takže podíl konstanty K k hodnotě s je nepodstatný. K řešení tedy máme tuto rovnici

$$\bar{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot r) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot r) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right\}. \quad (7.97)$$

Zadání dále doplňují okrajové podmínky. Ty budou uvedeny pro Laplaceův obraz tlaku, a to na hranicích oblastí S a Γ , kde jsou poloměry kružnic R_1 a R_2 . Zmíněné můžeme zapsat následovně

$$r = R_1 : \quad \bar{p} = 0, \quad (7.98)$$

$$r = R_2 : \quad \bar{p} = 0. \quad (7.99)$$

Nejprve dosadíme do rovnice (7.97) okrajovou podmínku (7.98). Pro n -tý tvar kmitu bude rovnice následující

$$\begin{aligned} & \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \\ & + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Následně dosadíme do rovnice (7.97) druhou okrajovou podmínku (7.99) a pro n -tý tvar kmitu bude

$$\begin{aligned} & \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \\ & + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Získali jsme tak dvě rovnice pro vyřešení čtyř konstant. Abychom si tvar zjednodušili, tak nejprve vynásobíme rovnici (7.100) hodnotou $\cos(n \cdot \varphi)$ a následně ji budeme integrovat v mezích od hodnoty 0 do π

$$\begin{aligned} & \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \int_0^\pi \cos^2(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi + \\ & + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \int_0^\pi \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.102)$$

Integrály uvedené v této rovnici nyní vyřešíme. Začneme prvním z nich. Dle [11] platí

$$\int_0^\pi \cos^2(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi = \left[\frac{1}{2} \cdot \varphi + \frac{1}{4 \cdot n} \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \varphi) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \cdot \pi. \quad (7.103)$$

Druhý integrál bude tohoto tvaru [11]

$$\int_0^\pi \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi = \left[\frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sin^2(n \cdot \varphi) \right]_0^\pi = 0. \quad (7.104)$$

Dosazením vypočtených integrálů do (7.102) a následnou úpravou rovnice dostaneme tuto podobu

$$C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) = 0. \quad (7.105)$$

Stejný postup bychom provedli i u rovnice (7.101), čímž získáme druhou rovnici pro výpočet konstant C_{1n} a C_{2n}

$$C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) = 0. \quad (7.106)$$

Jedná se o lineárně závislá řešení dané soustavy. V takovém případě můžeme jednu z konstant zvolit a následně druhou dopočítat. Provedeme volbu první z nich, tedy

$$C_{1n} = 1. \quad (7.107)$$

Konstantu C_{2n} zjistíme dosadíme-li podobu konstanty C_{1n} do rovnice (7.105)

$$C_{2n} = -\frac{J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}{Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}. \quad (7.108)$$

Zbývá získat dvě rovnice pro výpočet konstant K_{1n} a K_{2n} . V tomto případě rovnici (7.100) vynásobíme funkcí $\sin(n \cdot \varphi)$ a také ji budeme integrovat v mezích od hodnoty 0 do π

$$\begin{aligned} & \left[C_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + C_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \int_0^\pi \cos(n \cdot \varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi + \\ & + \left[K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \right] \cdot \int_0^\pi \sin^2(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Integrál pro součin funkcí sinus a kosinus je již zapsán ve vztahu (7.104). Zbývá tedy vypočítat [11]

$$\int_0^{\pi} \sin^2(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi = \left[\frac{1}{2} \cdot \varphi - \frac{1}{4 \cdot n} \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \varphi) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \pi. \quad (7.110)$$

Po dosazení vypočtených integrálů a následné úpravě získáme

$$K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) = 0. \quad (7.111)$$

Pro druhou rovnici máme tento tvar

$$K_{1n} \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) + K_{2n} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) = 0. \quad (7.112)$$

Opět se jedná o lineárně závislé rovnice, takže zvolíme jednu z konstant

$$K_{1n} = 1. \quad (7.113)$$

Druhou konstantu dopočítáme dosazením K_{1n} do rovnice (7.111)

$$K_{2n} = -\frac{J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}{Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}. \quad (7.114)$$

Nahrazením konstant z (7.107), (7.108), (7.113) a (7.114) v původní rovnici (7.97), získáme její konečnou podobu

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \left[J_n(\kappa_{mn} \cdot r) - \frac{J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}{Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \\ & + \left[J_n(\kappa_{mn} \cdot r) - \frac{J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)}{Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1)} \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot r) \right] \cdot \sin(n \cdot \varphi). \end{aligned} \quad (7.115)$$

Řešením je také varianta, kdy by byly konstanty C_{1n} a C_{2n} rovny nule a konstanty K_{1n} a K_{2n} nenulové. V takovém případě by funkce (7.115) obsahovala jen sinovou část. Možná je i další varianta, že nulové budou konstanty K_{1n} a K_{2n} a nenulové C_{1n} a C_{2n} . Pak zůstane jen část s kosinovou funkcí.

Dále se zaměříme na výpočet vlastních hodnot. Ty zjistíme pomocí výpočtu determinantu soustavy, který položíme roven nule

$$J_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \cdot Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) - Y_n(\kappa_{mn} \cdot R_1) \cdot J_n(\kappa_{mn} \cdot R_2) = 0. \quad (7.116)$$

Uvažujeme viskózní kapalinu, avšak zanedbáme vliv druhé (objemové) viskozity. Pro hodnotu κ vyjádřenou v (5.27) pak bude platit

$$\kappa^2 = -\frac{s^2}{\frac{2 \cdot \mu}{\rho} \cdot s + a^2}. \quad (7.117)$$

Hodnoty s vyhovující této rovnici představují vlastní hodnoty.

Problém však nastává při řešení nulových bodů rovnice (7.116). Rozepíšeme-li Besselovy funkce J_n a Y_n , pak dostaneme následující tvar

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} \cdot \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_2}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} \right. \\
& \cdot \left(\ln \frac{\kappa \cdot R_2}{2} + C_E \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_2}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_2}{2} \right)^{n + 2 \cdot m}}{m! \cdot (n + m)!} \\
& \cdot \left[\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right] \left. \right\} - \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} \cdot \left(\ln \frac{\kappa \cdot R_1}{2} + C_E \right) - \right. \\
& - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^{2 \cdot m - n} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_1}{2} \right)^{n + 2 \cdot m}}{m! \cdot (n + m)!} \\
& \cdot \left[\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right] \left. \right\} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_2}{2} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\kappa \cdot R_2}{2} \right)^{2 \cdot m}}{m! \cdot \Gamma(n + m + 1)} = 0. \tag{7.118}
\end{aligned}$$

Z uvedené podoby je patrné, že explicitní vyjádření proměnné κ není možné. Z tohoto důvodu se tyto hodnoty zjišťují numericky pro konkrétní úlohu.

Kmitání kapaliny v konkrétním mezikruží

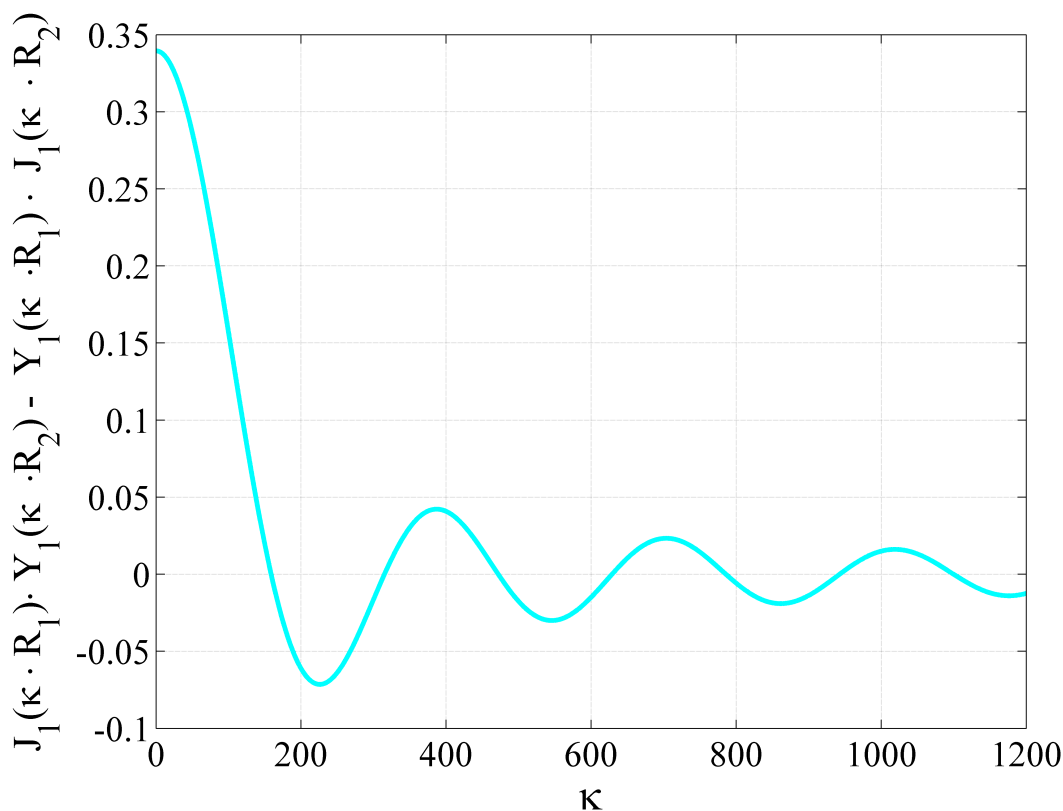
Uvedeme postup řešení pro zjištění vlastních tvarů kmitů v konkrétním mezikruží, jenž je vyplněno viskózní stlačitelnou tekutinou. Máme zadány tyto hodnoty

- $R_1 = 0,03 \text{ m}$ - vnitřní průměr,
- $R_2 = 0,05 \text{ m}$ - vnější průměr,
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ - hustota kapaliny,
- $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ - dynamická viskozita kapaliny,
- $a = 1400 \text{ m/s}$ - rychlost šíření tlakové vlny v kapalině.

Jak již bylo zmíněno výše, analytické řešení vlastních hodnot není možné. Hodnoty κ vyřešíme pouze numericky. Budeme se zabývat prvním vlastním tvarem kmitu, na němž budeme postup výpočtu ilustrovat, tedy podobou rovnice (7.116) pro $n = 1$

$$J_1(\kappa \cdot R_1) \cdot Y_1(\kappa \cdot R_2) - Y_1(\kappa \cdot R_1) \cdot J_1(\kappa \cdot R_2) = 0. \quad (7.119)$$

Hodnot κ splňujících tuto podmínku bude nekonečně mnoho. Pro ukázkou postupu výpočtu se zaměříme na splnění rovnice (7.119) v intervalu od 0 do 1200. Průběh funkce zapsané na levé straně této rovnice je vykreslen na Obrázku 7.2



Obrázek 7.2: Průběh funkce $J_n(\kappa \cdot R_1) \cdot Y_n(\kappa \cdot R_2) - Y_n(\kappa \cdot R_1) \cdot J_n(\kappa \cdot R_2)$

V našem případě vyřešíme vlastní hodnoty kmitů pro zmíněný interval. V Tabulce 7.1 jsou uvedeny hodnoty κ , pro něž je splněna podmínka (7.119). Následně jsme schopni vypočítat samotná vlastní čísla. Vztah pro ně byl již vyjádřen v (5.56). V zadání však neuvažujeme druhou viskozitu, tudíž tento člen bude nulový. Pro vlastní hodnoty pak bude platit rovnost

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \mu}{\rho} \cdot \kappa^2 \pm \frac{\kappa}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \mu}{\rho}\right)^2 \cdot \kappa^2 - 4 \cdot a^2}. \quad (7.120)$$

V Tabulce 7.1 jsou ve druhém sloupci také uvedeny dvojice vlastních hodnot příslušící dané hodnotě κ .

Tabulka 7.1: Vlastní hodnoty

κ	$s_{1,2}$
158,6	$-2,5 \cdot 10^{-2} \pm i \cdot 2,2 \cdot 10^5$
314,9	$-9,9 \cdot 10^{-2} \pm i \cdot 4,4 \cdot 10^5$
471,8	$-2,2 \cdot 10^{-1} \pm i \cdot 6,6 \cdot 10^5$
628,7	$-3,9 \cdot 10^{-1} \pm i \cdot 8,8 \cdot 10^5$
787,7	$-6,2 \cdot 10^{-1} \pm i \cdot 1,1 \cdot 10^6$
942,7	$-8,9 \cdot 10^{-1} \pm i \cdot 1,3 \cdot 10^6$
1099,8	$-1,2 \pm i \cdot 1,5 \cdot 10^6$

Výsledné hodnoty s_1 a s_2 jsou ve sledovaném intervalu komplexně sdružená čísla. Jejich reálná část je záporná, tudíž můžeme usoudit, že bude docházet k tlumení kmitů. Dále můžeme zmínit, že komplexní části těchto hodnot určují vlastní úhlovou rychlost ω příslušící prvnímu tvaru kmitu.

Obdobným způsobem bychom postupovali při zjišťování vlastních hodnot v rozsáhlejším intervalu, případně i při vyhodnocení dalších tvarů kmitů.

8. Závěr

Cílem práce byla formulace matematického modelu kmitání kapaliny ve válcové oblasti a také v mezikruží.

V rámci řešeršní části byl popsán matematický a fyzikální aparát, který byl následně v práci využíván. Dále byla odvozena vlnová rovnice pro tlakovou funkci.

Následující část byla věnována kmitání kapaliny v rovině, které bylo popsáno pomocí polárních souřadnic. Kapalína byla uvažována viskózní a stlačitelná. Řešení tohoto zadání vedlo na Besselovy funkce druhého druhu. Následně byla zjištěna hodnota vlastní frekvence kmitů, z níž vyplynulo, že je značně ovlivněna druhou (objemovou) viskozitou kapaliny.

Pozornost byla dále zaměřena na válcovou oblast. Jednalo se o uzavřenou trubici, kde budící průtok byl realizován pístem. V prvním případě byla uvažována budící funkce ve tvaru sinu, kde byl vyřešen tvar tlakové a průtokové funkce. Následně byl popsán princip rezonance a určeny kritické frekvence. K rezonanci docházelo, pokud frekvence pohybujícího se pístu byla rovna celočíselnému násobku rychlosti šíření tlakové vlny v kapalině podělené dvojnásobkem délky trubice.

V dalším případě bylo proudění ve válcové oblasti realizováno buzením průtoku pilotou funkcí. Opět byl zjištěn tvar tlakové i průtokové funkce a popsán stav, kdy bude docházet k rezonanci.

Poslední část práce se zabývala kmitáním kapaliny v mezikruží. Nejprve byl řešen problém, kdy bylo kmitání kapaliny způsobeno pohybem tělesa. Vypočítán byl tvar průtokové funkce a následně i tvary složek rychlosti. Také byla vložena podkapitola, v níž je zmíněna přídavná hmotnost kapaliny. Z tohoto výpočtu vyplynulo, že pokud kmitá těleso v kapalině, pak se jeví hmotnější než jaké je ve skutečnosti.

V případě mezikruží byly zjišťovány vlastní tvary kmitů. Nejdříve bylo řešení provedeno pro nestlačitelnou neviskózní kapalinu. Zde však průtoková funkce byla nulová. V takovém případě nemělo význam se kmitáním zabývat, neboť v kapalině nedocházelo k žádným změnám. Následně byl proveden výpočet pro zjištění vlastních kmitů pro stlačitelnou viskózní kapalinu. Vlastní hodnoty však bylo možné zjistit pouze numericky.

V této práci by bylo možné pokračovat několika směry. Při popisu kapaliny ve válcové oblasti by bylo přínosné zpracovat další budící funkce, případně i uvažovat viskózní kapalinu. Jiná varianta výpočtu by také vznikla, pokud bychom daný problém řešili pro pružné potrubí, kde využitelnost spočívá například při popisu proudění krve v žilách.

Literatura

- [1] ANGOT, André. *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. 2., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1971. Teoretická knižnice inženýra.
- [2] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika tekutin*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická. ISBN 80-200-1344-X.
- [3] GRODA, Bořivoj. *Mechanika tekutin a suspenzí*. V Brně: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2002. ISBN 80-7157-576-3.
- [4] KORENĚV, Boris Grigorjevič. *Úvod do Besselových funkcí*. Praha, 1977. Nakladatelství technické literatury.
- [5] KREYSZIG, Erwin., Herbert. KREYSZIG a E. J. NORMINTON. *Advanced engineering mathematics*. 10th ed. Hoboken, NJ: John Wiley, c2011. ISBN 978-0-470-45836-5.
- [6] KULHÁNEK, Petr. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*. Praha: AGA, 2016. ISBN 978-80-904582-8-4.
- [7] NECHVÁTAL, Luděk. *Laplaceova transformace a stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic* [online]. Ústav matematiky FSI VUT Brno, 2014 [cit.18.2.2017]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Laplaceova-transformace/sc-1247-sr-1-a-264/default.aspx>
- [8] PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. *Laplaceova transformace: Základy teorie a užití v elektrotechnice: vysokoškolská učebnice*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1970.
- [9] POCHYLÝ, František. *Dynamika tekutinových systémů*. Praha: Československá redakce VN MON, 1990. Učební texty vysokých škol.
- [10] POCHYLÝ, František, Vladimír HABÁN. *Nelineární vlnová rovnice pro tlakovou funkci*. VUT v Brně, FSI: ČKD Blansko Engineering, a.s., 2005.
- [11] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 4., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Česká matice technická.
- [12] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3578-0.
- [13] VLČEK, Jaroslav. *Vektorová a tenzorová analýza funkcí* [online]. VŠB-TU Ostrava, 2016 [cit. 20.11.2016]. Dostupné z: <http://homen.vsb.cz/vlc20/VTA16.pdf>
- [14] ZYMÁK, Václav. *Dynamika pulsujícího průtoku: teorie, měření, aplikace, zkušenosti*. Brno: PC-DIR, 1994. ISBN 80-85895-00-5

9. Seznam zkratk

Symbol	Jednotka	Popis
a	$[m/s]$	rychlost šíření tlakové vlny ve stlačitelné tekutině
b	$[Pa \cdot s]$	druhá (objemová) viskozita
d	$[m]$	průměr
i	$[-]$	imaginární jednotka
f	$[Hz]$	frekvence
m	$[kg]$	hmotnost
p	$[Pa]$	tlak
r	$[m]$	poloměr
s	$[-]$	parametr Laplaceovy transformace podle času
t	$[s]$	čas
u	$[m]$	posunutí tělesa
\dot{u}	$[m/s]$	rychlost tělesa
\ddot{u}	$[m/s^2]$	zrychlení tělesa
v	$[m/s]$	rychlost
v_n	$[m/s]$	rychlost ve směru normály
v_s	$[m/s]$	střední rychlost v daném průřezu
A_p	$[-]$	amplituda tlaku
A_Q	$[-]$	amplituda průtoku
C	$[-]$	integrační konstanta
C_E	$[-]$	Eulerova konstanta
F^S	$[N]$	vnější povrchová síla
F^P	$[N]$	síla vyvolaná působením vnějšího prostředí
J_ν	$[-]$	Besselova funkce prvního druhu
L	$[m]$	délka
P	$[-]$	přenosová matice
Q	$[m^3/s]$	průtok
S	$[m^2]$	plocha
T	$[K]$	absolutní teplota
V	$[m^3]$	objem
Y_ν	$[-]$	Besselova funkce druhého druhu

\mathbf{a}, a_i	$[m/s^2]$	vektor zrychlení
\mathbf{g}, g_i	$[m/s^2]$	vektor gravitačního zrychlení
\mathbf{m}, m_i	$[-]$	vnější jednotkový vektor normály k ploše tělesa
\mathbf{n}, n_i	$[-]$	vnější jednotkový vektor normály k ploše vyplněné tekutinou
\mathbf{v}, v_i	$[m/s]$	vektor rychlosti
dS	$[m^2]$	elementární plocha
dV	$[m^3]$	elementární objem
$d\varphi$	$[^\circ]$	elementární úhel
ε	$[-]$	parametr Laplaceovy transformace podle polohy
Ω	$[rad/s]$	úhlová rychlost
ρ	$[kg/m^3]$	hustota
φ	$[^\circ]$	úhel
μ	$[Pa \cdot s]$	dynamická viskozita
ν	$[m^2/s]$	kinematická viskozita
Γ	$[-]$	funkce gama
v_{ij}	$[1/s]$	tenzor rychlosti deformace
δ_{ij}	$[-]$	Kroneckerovo delta
σ_{ij}	$[Pa]$	tenzor napětí
Π_{ij}	$[Pa]$	tenzor (třecích) viskózních napětí
∇	$[-]$	Hamiltonův operátor
Δ	$[-]$	delta operátor
$*$	$[-]$	konvoluční součin
\mathbb{N}	$[-]$	množina přirozených čísel
\mathcal{L}	$[-]$	Laplaceova transformace