

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

**Fakulta stavební**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Brno, 2017**

**Bc. Lukáš Novák**



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY**

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ  
SMYKOVÉ ÚNOSNOSTI PŘEDPJATÝCH  
BETONOVÝCH NOSNÍKŮ: CITLIVOSTNÍ ANALÝZA  
A SEMI-PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY  
NÁVRHU**

PROBABILISTIC MODELING OF SHEAR STRENGTH OF PRESTRESSED CONCRETE  
BEAMS: SENSITIVITY ANALYSIS AND SEMI-PROBABILISTIC DESIGN METHODS

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

DIPLOMA THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Lukáš Novák**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. Ing. DRAHOMÍR NOVÁK, DrSc.**



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	N3607 Stavební inženýrství
<b>Typ studijního programu</b>	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3608T001 Pozemní stavby
<b>Pracoviště</b>	Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>Student</b>	Bc. Lukáš Novák
<b>Název</b>	Pravděpodobnostní modelování smykové únosnosti předpjatých betonových nosníků: Citlivostní analýza a semi-pravděpodobnostní metody návrhu
<b>Vedoucí práce</b>	prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
<b>Datum zadání</b>	31. 3. 2017
<b>Datum odevzdání</b>	12. 1. 2018

V Brně dne 31. 3. 2017

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA  
Děkan Fakulty stavební VUT

## PODKLADY A LITERATURA

Sborníky konferencí IABMAS, ICOSSAR a ICASP za posledních cca 5 roků.

ATENA - User´s and Theory Guides, Červenka Consulting, 2015.

FREET - User´s and Theory Guides, Brno/Červenka Consulting, V 1.5, 2016.

SARA - User´s and Theory Guides, Červenka Consulting, 2015.

Červenka, V. (2008). Global safety factor for nonlinear calculation of reinforced concrete. *Beton Stahlbet*, 103: 37-42.

Schlune, H., Giltoft, K., Plos, M. (2012). Safety formats for nonlinear analysis of concrete structures. *Mag Concrete Res*, 64:563-74.

Rosenblueth, E. (1975). Point estimates for probability moments. *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*.

Novák, D., Teplý, B., Shiraishi, N. (1993). Sensitivity analysis of structures: a review. In: *Proceedings of the fifth international conference on civil and structural engineering computing*, Scotland, Edinburgh, 201–207.

## ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Téma je zaměřeno na modelování předpjatých betonových střešních nosníků na základě stochastického nelineárního modelování. Využívat se bude MKP software nelineární lomové mechaniky ATENA 3D - v tomto bodě práce navazuje na bakalářskou práci. Bude však realizována podrobněji citlivostní analýza. Podstatným rozšířením ve srovnání s bakalářskou prací bude virtuální numerická simulace náhodné únosnosti ve smyslu plně pravděpodobnostního návrhu. Předpokládá se rovněž ocenění semi-pravděpodobnostních přístupů a normových předpisů na základě deterministických výpočtů a plně pravděpodobnostního přístupu. Práce bude realizována ve spolupráci s praxí (rakouská firma Oberndorfer) a rovněž v rámci projektu GAČR PROMOSS.

## STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí diplomové práce

## **ABSTRAKT**

Diplomová práce se zaměřuje na pokročilou spolehlivostní analýzu konstrukcí řešených nelineární formou metody konečných prvků. Jedná se konkrétně o polo–pravděpodobnostní metody návrhu pro stanovení návrhové hodnoty únosnosti, citlivostní analýzu a tvorbu náhradní plochy odezvy ve formě polynomiálního chaosu. Popsané metody jsou aplikovány na střešní předpjatý železobetonový nosník.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Spolehlivost, nelineární analýza, metoda konečných prvků, citlivostní analýza, semi–pravděpodobnostní návrh, formáty bezpečnosti, metamodel, polynomiální chaos, Sobolovy indexy

## **ABSTRACT**

Diploma thesis is focused on advanced reliability analysis of structures solved by non–linear finite element analysis. Specifically, semi–probabilistic methods for determination of design value of resistance, sensitivity analysis and surrogate model created by polynomial chaos expansion are described in the diploma thesis. Described methods are applied on prestressed reinforced concrete roof girder.

## **KEYWORDS**

Reliability, nonlinear analysis, finite element method, sensitivity analysis, semi–probabilistic design, safety formats, surrogate model, polynomial chaos, Sobol indices

*Pravděpodobnostní modelování smykové únosnosti předpjatých betonových nosníků:  
Citlivostní analýza a semi-pravděpodobnostní metody návrhu : Diplomová práce.*  
Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky,  
2017. 75 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.

## **Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Brno .....

.....

Bc. Lukáš Novák  
(podpis autora)

## **Poděkování:**

Na tomto místě bych rád poděkoval především prof. Ing. Drahomíru Novákovi, DrSc, za vstřícný přístup a poskytnuté rady v průběhu mé práce. Dále bych také rád poděkoval Ing. Ondřeji Slowikovi za poskytnutí deterministického MKP modelu. V neposlední řadě také mé rodině za podporu v průběhu celého studia.



# OBSAH

Úvod	12
<b>1 Úvod do teorie spolehlivosti</b>	<b>13</b>
<b>2 Návrhové metody</b>	<b>16</b>
2.1 Deterministické metody	16
2.1.1 Dílčí součinitelé bezpečnosti (PSF)	16
2.1.2 Metoda dle EN 1992-2	17
2.2 Polo-pravděpodobnostní metody	17
2.2.1 ECoV dle Červenky	18
2.2.2 ECoV dle Schlune et al.	18
2.2.3 Numerická kvadratura dle Rosenblueth	19
2.3 Návrhové body ve 2D prostoru	20
<b>3 Citlivostní analýza</b>	<b>22</b>
3.1 Neparametrická pořadová korelace	22
3.2 ANOVA	23
3.2.1 Forma variačních koeficientů	23
3.2.2 Sobolovy indexy	24
<b>4 Metody náhradní plochy odezvy</b>	<b>25</b>
4.1 Polynomiální chaos (PCe)	26
4.1.1 Základní informace	26
4.1.2 Transformace náhodných veličin	27
4.1.3 Výpočet souřadnic PCe	29
4.1.4 Stanovení kvality PCe	30
4.1.5 Vyhodnocení PCe	33
4.2 Implementace do SW nástroje	35
4.2.1 Pre-processing	36
4.2.2 Processing	37
4.2.3 Post-processing	39
4.2.4 Benchmark	40
<b>5 Techniky typu Monte Carlo</b>	<b>43</b>
5.1 Klasická metoda Monte Carlo	43
5.2 Latin Hypercube Sampling	45

<b>6</b>	<b>Použitý software</b>	<b>47</b>
6.1	FReET . . . . .	47
6.2	ATENA . . . . .	48
6.3	MATLAB . . . . .	49
6.4	IO-SUPPORT . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Praktická aplikace</b>	<b>51</b>
7.1	MKP model . . . . .	52
7.2	Stochastický model . . . . .	52
7.3	Stanovení návrhové hodnoty únosnosti . . . . .	54
7.3.1	Metoda dílčích součinitelů bezpečnosti . . . . .	55
7.3.2	Metoda dle EN 1992-2 . . . . .	56
7.3.3	Metoda ECoV dle Červenky . . . . .	57
7.3.4	Metoda ECoV dle Schlune et al. . . . .	58
7.3.5	Numerická kvadratura dle Rosenblueth . . . . .	59
7.4	Sestavení metamodelu ve formě PCe . . . . .	61
7.5	Porovnání návrhových hodnot únosnosti . . . . .	63
7.6	Citlivostní analýza pomocí PCe . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>68</b>
	<b>Literatura</b>	<b>70</b>
	<b>Seznam symbolů, veličin a zkratk</b>	<b>74</b>

# SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Index spolehlivosti $\beta$ . . . . .	14
2.1	2D znázornění kvadratury dle Rosenblueth . . . . .	20
2.2	Návrhové body ve 2D prostoru . . . . .	21
3.1	Citlivostní analýza ve formě variačních koeficientů . . . . .	23
4.1	Ukázka náhradní plochy odezvy . . . . .	25
4.2	Natafova transformace . . . . .	29
4.3	Přefitování metamodelu . . . . .	31
4.4	Křížová validace metamodelu . . . . .	32
4.5	Vývojový diagram . . . . .	35
4.6	Nastavení SW . . . . .	36
4.7	Schéma řešiče . . . . .	37
4.8	Schéma prostého nosníku . . . . .	42
5.1	Generace jedné realizace metodou Monte Carlo . . . . .	44
5.2	Výpočet $p_f$ pro 2D případ . . . . .	44
5.3	Metoda Latin Hypercube Sampling . . . . .	45
6.1	Prostředí SW FReET . . . . .	47
6.2	Prostředí SW ATENA [převzato z <a href="http://www.cervenka.cz">www.cervenka.cz</a> ] . . . . .	48
6.3	Prostředí MATLAB . . . . .	49
6.4	Prostředí SW IO-SUPPORT . . . . .	50
7.1	a) lomově-mechanické experimenty; b) experiment nosníku v měřítku 1:6; c) matematický MKP model - trhliny při smykovém porušení . . . . .	51
7.2	Schéma namodelované výztuže . . . . .	52
7.3	Pracovní diagram výztuže . . . . .	53
7.4	Stanovení vstupních hodnot pomocí IO-SUPPORT . . . . .	55
7.5	L-D křivky metod 1. úrovně . . . . .	57
7.6	Znázornění numerické kvadratury 3D . . . . .	59
7.7	Histogram mezního stavu únosnosti získaný pomocí PCe . . . . .	62
7.8	Odhad střední hodnoty dle jednotlivých metod . . . . .	63
7.9	Odhad variačního koeficientu dle jednotlivých metod . . . . .	64
7.10	Návrhové hodnoty únosnosti dle jednotlivých metod . . . . .	64
7.11	Totální Sobolovy indexy dle PCe . . . . .	66

# SEZNAM TABULEK

1.1	Hodnoty součinitele $\beta$ dle [11] . . . . .	14
4.1	Stochastický model prostého nosníku . . . . .	41
4.2	Porovnání momentů PCe a LHS na prostém nosníku . . . . .	42
4.3	Porovnání $p_f$ PCe a LHS na prostém nosníku . . . . .	42
5.1	Tabulka náhodných permutací . . . . .	46
7.1	Náhodné veličiny betonu C50/60 . . . . .	53
7.2	Náhodné veličiny oceli BST550 . . . . .	53
7.3	Materiálové charakteristiky předpínacích kabelů pro stochastický model	54
7.4	Nejistota výpočtu ztrát předpětí . . . . .	54
7.5	Statistická závislost veličin betonu C50/60 . . . . .	54
7.6	Statistická závislost veličin oceli BST550 a předpínacích kabelů . . .	55
7.7	Vstupní vektor materiálových charakteristik dle PSF . . . . .	56
7.8	Vstupní vektor materiálových charakteristik dle EN1992-2 . . . . .	56
7.9	Vstupní vektor materiálových charakteristik dle ECoV . . . . .	57
7.10	Redukce materiálových charakteristik dle ECoV Schlune . . . . .	58
7.11	Vstupní vektor materiálových charakteristik dle ECoV Schlune . . . .	58
7.12	Vstupní vektor materiálových charakteristik dle Rosenblueth . . . . .	60
7.13	Porovnání momentů stanovených PCe a LHS na praktické úloze . . .	61
7.14	Sobolovy indexy . . . . .	67

## ÚVOD

V posledních letech se vzrůstajícím výpočetním výkonem a přísnějšími požadavky na ekonomický návrh konstrukcí projektanti často využívají nelineární analýzu pro přesnější návrh. Při využití metody konečných prvků se zohledněním materiálové a geometrické nelinearity však dochází k několika problémům se stanovením návrhové hodnoty únosnosti. V tomto případě totiž neplatí princip superpozice a nelze korektně využít běžnou metodu návrhu, konkrétně dílčí součinitele bezpečnosti. Bylo proto vyvinuto několik tzv. polo-pravděpodobnostních metod pro splnění požadavku bezpečného návrhu.

Pro konstrukce významné, popřípadě pro sériové prefabrikované prvky, je vhodné využít sofistikovanějších, ale výpočtově náročnějších spolehlivostních metod. Mezi takové metody patří plně-pravděpodobnostní přístup a metody náhradní plochy odezvy. Cílem je stanovit návrhovou hodnotu únosnosti zaručující požadovanou úroveň bezpečnosti definovanou v normativních dokumentech. Pro optimalizaci návrhu i výroby konstrukcí je také vhodné provést citlivostní analýzu, na tomto poli je v posledních letech řada nových přístupů a zdokonalených metod vhodných právě pro nelineární analýzu.

Diplomová práce pojednává o tématu stanovení návrhové hodnoty únosnosti při využití nelineární analýzy konstrukce s využitím normových i alternativních spolehlivostních metod. Dále se také podstatná část zabývá citlivostní analýzou a tvorbou náhradní plochy odezvy ve formě polynomiálního chaosu. Právě různé typy náhradní plochy odezvy velmi redukuje výpočetní náročnost pokročilých spolehlivostních analýz. Popsané poznatky a principy byly implementovány do obecně použitelného softwarového nástroje využitého v praktické části diplomové práce.

Praktickou aplikaci představených přístupů představuje citlivostní analýza a stanovení návrhové hodnoty únosnosti na střešním předpjatém železobetonovém nosníku porušovaném smykem. V této části diplomová práce navazuje na bakalářskou práci a využívá její poznatky.

Závěry této práce budou dále využity pro návrh a analýzu dalších typů nosníků firmy Franz Oberndorfer GmbH & Co KG, která se významně účastnila výzkumu tohoto tématu a poskytla podklady pro analýzu nosníků.

# 1 ÚVOD DO TEORIE SPOLEHLIVOSTI

Obecně jsou vstupní veličiny při posudku konstrukce považovány za náhodné. Při využití aktuálních deterministických návrhových metod jsou vstupní veličiny reprezentovány jejich návrhovou hodnotou zpravidla upravenou pomocí součinitelů bezpečnosti. Základní myšlenkou pravděpodobnostního přístupu je stanovení náhodné veličiny pro zatížení konstrukce  $E$  a odolnost konstrukce  $R$ , které jsou reprezentovány přímo určitou hustotou pravděpodobnosti  $f$  [38].

Podmínku pro ověření spolehlivosti konstrukce u pravděpodobnostních metod, lze stanovit jako:

$$R - E > 0 \quad (1.1)$$

Hodnotu na levé straně nerovnice můžeme považovat za *rezervu spolehlivosti*  $Z$ . Pravděpodobnost, že nastane mezní stav konstrukce lze stanovit následovně:

$$p_f = P(R - E < 0) = P(Z < 0) \quad (1.2)$$

Pro určení hustoty  $f_R(r)$  a  $f_E(e)$  vstupních veličin musíme znát jejich charakteristiky, které stanovíme pomocí teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Jelikož jsou vstupní veličiny považovány jako náhodné, pravděpodobnost poruchy nemůže být nulová, proto musíme připustit určitou míru rizika.

*Pravděpodobnost poruchy* můžeme stanovit pomocí přímé integrace. V obecném integrálním vztahu představuje  $D_f$  oblast poruchy, kde rezerva spolehlivosti  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0$  a  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  představuje funkci sdružené hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin  $X$  [38].

$$p_f = \int_{D_f} f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1, dX_2, \dots, dX_n \quad (1.3)$$

Analytické řešení výsledných integrálů je velice složité a u komplikovanějších případů nemožné. Proto bylo vyvinuto několik numerických metod. Nejvyužívanější jsou simulační metody typu Monte Carlo.

Nevýhodou simulačních technik je však potřeba velkého množství opakování řešení funkce poruchy  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  vždy s jiným náhodně generovaným vektorem vstupních veličin. Tato nevýhoda se stává často nepřekonatelným problémem v případech, kdy využíváme pro modelování chování konstrukce metodu konečných prvků (MKP), zvláště pak nelineární analýzu pomocí metody konečných prvků (NLMKP). Z tohoto důvodu je předmětem aktuálního výzkumu redukce výpočetní náročnosti.

V normativních dokumentech se často nevyužívá teoretická pravděpodobnost poruchy jako ukazatel spolehlivosti konstrukce ale je zaveden tzv. *Index spolehlivosti*  $\beta$ . Přesněji řečeno jedná se o index spolehlivosti definovaný s předpokladem normálního rozdělení veličiny  $Z$  jako obrácená hodnota variačního koeficientu, viz Obr. 1.1.

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \quad (1.4)$$

Vztah mezi pravděpodobností poruchy  $p_f$  a indexem spolehlivosti  $\beta$  je následující:

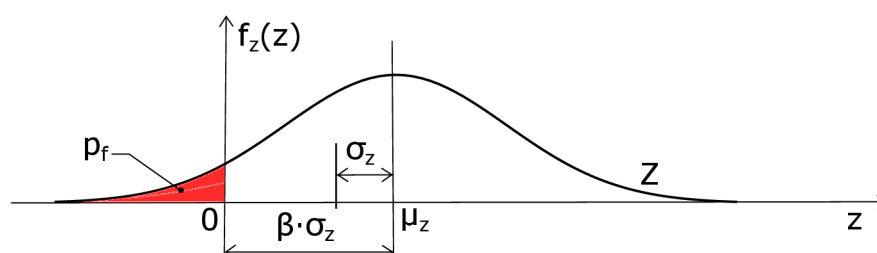
$$p_f = \phi(-\beta) \quad (1.5)$$

kde  $\phi$  představuje distribuční funkci standardního normálního rozdělení.

Závazné hodnoty pro Českou republiku lze nalézt v normě ČSN EN 1990 [11]. Liší se v závislosti na typu mezního stavu, referenční době a třídě spolehlivosti. V Tab.1.1 jsou zobrazeny minimální hodnoty indexu spolehlivosti pro mezní stav únosnosti.

Tab. 1.1: Hodnoty součinitele  $\beta$  dle [11]

Třída spolehlivosti	Minimální hodnoty součinitele $\beta$	
	Referenční doba 1 rok	Referenční doba 50 let
RC3 (velké důsledky)	5,2	4,3
RC2 (střední důsledky)	4,7	3,8
RC1 (malé důsledky)	4,2	3,3



Obr. 1.1: Index spolehlivosti  $\beta$

Dodejme, že ve spojení s indexem spolehlivosti je v polo-pravděpodobnostních metodách využíván citlivostní součinitel  $\alpha_R$ , který je dle EC pro odolnost konstrukce aproximován na pevnou hodnotu  $\alpha_R \approx 0,8$ . Tento součinitel se využívá v případě

stanovení návrhové hodnoty únosnosti konstrukce, pokud nemáme k dispozici náhodnou veličinu zatížení  $E$ , představuje tedy zohlednění separace  $R$  a  $E$ . Více informací o této technice je uvedeno v kap. 2.2.

Součinitele  $\alpha$  a  $\beta$  jsou využívány také v metodě dílčích součinitelů bezpečnosti pro stanovení návrhových hodnot vstupních materiálových charakteristik. V tomto případě je pro dominantní veličiny  $\alpha \approx 0,8$  a  $\alpha \approx 0,4 \cdot 0,8 \approx 0,32$  pro nedominantní veličiny, více detailů o odvození lze nalézt v normě [11].

Při návrhu konstrukce pomocí NLMKP je jednou z hlavních úloh projektanta stanovit návrhovou hodnotu únosnosti konstrukce. Mimo normové postupy, v literatuře existuje i několik alternativních přístupů s cílem odhadnout odezvu konstrukce a stanovit návrhovou hodnotu únosnosti se zaručenou požadovanou mírou bezpečnosti.

Teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí obecně dělí návrhové metody do 3 úrovní dle komplexnosti (náročnosti) výpočtu:

1. úroveň zahrnuje metody využívající pouze jednu „charakteristickou“ hodnotu k popisu náhodné veličiny, viz kap. 2
2. úroveň již vyjadřuje náhodně veličiny pomocí statistických parametrů, patří sem metody aproximující plochu odezvy konstrukce explicitně vyjádřenou jednoduchou funkcí, viz kap. 4
3. úroveň popisuje vstupní náhodné proměnné pomocí vhodného rozdělení pravděpodobnosti (plně-pravděpodobnostní přístup). Samotná návrhová hodnota únosnosti nebo pravděpodobnost poruchy se řeší pomocí simulačních metod typu Monte Carlo, viz kap. 5

Pokročilé metody návrhu (2. a 3. úroveň) jsou časově náročné a navíc vyžadují znalosti z různých odvětví matematické statistiky a pravděpodobnosti, teorie spolehlivosti a často i numerické matematiky. Jejich použití tedy není v praxi příliš běžné.

Typickým problémem bývá závislost výpočetní náročnosti na velikost stochastického modelu. V praktických úlohách je totiž často stochastický model konstrukce značně rozsáhlý a kritickým bodem se tedy stává citlivostní analýza, která nám může pomoci v jeho redukcii.

Z důvodu komplikací, často i čistě matematické/numerické povahy, při práci s pokročilými metodami jsou projektanty preferované metody návrhu 1. úrovně. Nicméně i zde může citlivostní analýza značně zefektivnit návrh i výpočet, a je tedy důkladněji popsána v kapitole 3.



## 2 NÁVRHOVÉ METODY

Obecně se zde popisované metody liší v počtu a umístění tzv. návrhových bodů. Ty lze definovat jako body v  $n$ -dimenzionálním prostoru, jejichž souřadnice reprezentují hodnoty vstupních náhodných veličin.

### 2.1 Deterministické metody

Deterministické metody využívají ke stanovení návrhové hodnoty únosnosti pouze jeden výpočet pomocí metody konečných prvků (MKP). Jsou tedy časově nejméně náročné, tento způsob je vhodný pro lineární výpočty. Aktuálně normové dokumenty obsahují dvě běžně užívané metody výpočtu.

#### 2.1.1 Dílčí součinitelé bezpečnosti (PSF)

Nejjednodušší z popisovaných přístupů je metoda dle EN 1990 [7]. K výpočtu je potřeba pouze jedna simulace s návrhovými hodnotami materiálových charakteristik. V diplomové práci nejsou využity tabelované dílčí součinitele bezpečnosti dle EN 1990, ale návrhová hodnota materiálových charakteristik je stanovena níže popsaným postupem v závislosti na požadované úrovni bezpečnosti. V tomto případě návrhová hodnota únosnosti modelu je rovna výsledku MKP redukováného součinitelem modelové nejistoty  $\gamma_{Rd} = 1.06$ .

Pro stanovení návrhové hodnoty vstupních veličin  $x_d$ , je nutné nejprve určit návrhovou pravděpodobnost poruchy  $p_f$  na normovaném normálním rozdělení ( $\mu_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ). Hodnotu pravděpodobnosti poruchy  $p_f$  tedy vypočteme dle vztahu 2.1, kde  $\phi$  značí distribuční funkci normalizovaného normálního rozdělení.

$$p_f = P(X < (-\alpha\beta)) = \phi(-\alpha\beta) \quad (2.1)$$

Následný výpočet návrhové hodnoty  $x_d$  pomocí  $p_f$  již na původním rozdělení náhodné veličiny ukazuje vztah 2.2, kde  $F^{-1}$  značí inverzní distribuční funkci.

$$x_d = F^{-1}(p_f) \quad (2.2)$$

Dílčí součinitel bezpečnosti materiálových parametrů  $\gamma_m$  poté lze určit jako podíl charakteristické hodnoty (5% kvantil)  $x_k$  a návrhové hodnoty  $x_d$  následovně:

$$\gamma_m = \frac{x_k}{x_d} \quad (2.3)$$

Extrémně nízké hodnoty materiálových charakteristik vstupujících do nelineárních výpočtů mohou mít však za následek nerealistické chování konstrukce a v extrémních

případech, i odlišný způsob porušení. Z tohoto důvodu byly definovány výstižnější metody využívající simulaci se středními hodnotami materiálových charakteristik a globální součinitel bezpečnosti.

### 2.1.2 Metoda dle EN 1992-2

Návrhová hodnota únosnosti dle EN 1992-2 [8] je stanovena dle následujícího vztahu:

$$R_d = \frac{R(f_{ym}, \tilde{f}_{cm}, \dots)}{\gamma_R} \quad (2.4)$$

kde  $f_{ym}$  reprezentuje střední hodnotu materiálových charakteristik výztuže,  $\tilde{f}_{cm}$  je hodnota materiálových charakteristik betonu redukováných s ohledem na větší variabilitu vlastností betonu vůči oceli dle  $\tilde{f}_{cm} = 0.843f_{ck}$ . Globální součinitel bezpečnosti je zde stanoven konstantní hodnotou  $\gamma_R = 1.27$ . Původně je metoda doporučena pouze pro případy s tlakovým porušením betonu, nicméně Červenka ve své práci [9] rozšířil využití metody i pro další typy porušení konstrukce.

## 2.2 Polo-pravděpodobnostní metody

Komplexnější přístupy uvažují závislost globálního součinitele bezpečnosti na variačním koeficientu odezvy konstrukce. Cílem takových metod, tzv. ECoV metod, je tedy odhad variačního koeficientu odezvy konstrukce. K tomu je nutné provést vyšší počet simulací MKP, z tohoto důvodu jsou následující metody časově náročnější, avšak jsou vhodnější při nelineárních výpočtech.

Princip těchto metod vychází z tzv. *polo-pravděpodobnostního přístupu*, ve kterém je návrhová hodnota únosnosti stanovena ze separované náhodné veličiny odezvy konstrukce  $R$  za předpokladu lognormálního nebo normálního rozdělení pravděpodobnosti. Návrhová hodnota je poté stanovena za pomoci návrhové pravděpodobnosti poruchy  $p_{fd}$ , která je definována v závislosti na  $\alpha$  a  $\beta$  následovně:

$$p_{fd} = \Phi(-\alpha_R \beta) \quad (2.5)$$

Výsledná hodnota návrhové únosnosti konstrukce poté odpovídá kvantilu předpokládaného rozdělení danému návrhovou pravděpodobností poruchy, tedy:

$$R_d = F^{-1}(p_{fd}) \quad (2.6)$$

### 2.2.1 ECoV dle Červenky

Za předpokladu lognormálního rozdělení pravděpodobnosti odezvy konstrukce může být variační koeficient odhadnut dle vztahu 2.7. Do vztahu vstupují výsledky dvou simulací,  $R(X_m)$  se středními hodnotami vstupních parametrů a  $R(X_k)$  s charakteristickými hodnotami (5% kvantil).

$$v_R = \frac{1}{1.65} \ln \left( \frac{R(X_m)}{R(X_k)} \right) \quad (2.7)$$

Na základě znalosti variačního koeficientu můžeme stanovit globální součinitel zaručující požadovanou míru bezpečnosti  $\gamma_R$ .

$$\gamma_R = \exp(\alpha_R \beta v_R) \quad (2.8)$$

Tato metoda je implementována do fib Model Code 2010 [16], kde výsledná hodnota  $R_d$  je navíc redukována součinitelem modelové nejistoty modelu  $\gamma_{Rd} = 1.06$  pro zvýšení bezpečnosti stanovené návrhové odolnosti konstrukce.

$$R_d = \frac{R(X_m)}{\gamma_R \gamma_{Rd}} \quad (2.9)$$

Dalším zjednodušením ECoV metod je tedy předpoklad rovnosti únosnosti simulace se středními hodnotami střední hodnotě náhodné veličiny únosnosti  $R_m$ , tedy:

$$R(X_m) \approx R_m \quad (2.10)$$

### 2.2.2 ECoV dle Schlune et al.

Rozšíření metody ECoV navrhl Schlune et al. [30], variační koeficient odezvy konstrukce ovlivňuje nejen variabilita materiálová  $v_f$  ale také variabilita geometrická  $v_g$  a variabilita samotného výpočtového modelu  $v_m$ . Výsledný variační koeficient sloužící pro stanovení globálního součinitele bezpečnosti je tedy definován dle vztahu 2.11.

$$v_R = \sqrt{v_g^2 + v_m^2 + v_f^2} \quad (2.11)$$

Hodnota variačního koeficientu geometrie je doporučena jako maximálně 5%, vyšší se doporučuje zavést přímo do modelu. Variační koeficient materiálových parametrů je stanoven za předpokladu nezávislých náhodných veličin následovně:

$$v_f = \frac{1}{R_m} \sqrt{\sum_i^n \left( \frac{R_m - R_{f_i \Delta}}{\Delta f_i} \sigma_{f_i} \right)^2} \quad (2.12)$$

Metoda tedy využívá  $N + 1$  simulací, kde  $N$  je počet náhodných vstupních proměnných. Výsledek  $N$  simulací označených  $R_{f_i\Delta}$  představuje výpočet s  $i$ -tým materiálovým parametrem redukováným dle 2.13, ostatní vstupní proměnné jsou ponechány na středních hodnotách.

$$f_{i\Delta} = \mu_i \cdot \exp(-c \cdot v_{fi}) \quad (2.13)$$

Redukce materiálového parametru je na základě koeficientu  $c = (\alpha_R \beta) / \sqrt{2}$ , který je závislý na indexu spolehlivosti, z čehož vyplývá nutnost  $2N + 1$  simulací, pokud posuzujeme konstrukci na mezní stav únosnosti i mezní stav použitelnosti. Rozšíření metody pro statisticky závislé vstupní veličiny lze nalézt v literatuře [30].

Na základě znalosti variačního koeficientu  $v_R$  je stanoven globální součinitel bezpečnosti stejně jako v předchozím případě:

$$\gamma_R = \exp(\alpha_R \beta v_R) \quad (2.14)$$

Návrhová hodnota únosnosti  $R_d$  je poté také stanovena obdobně, jen v tomto případě je již nejistota modelu zahrnuta ve variačním koeficientu  $v_R$ , tudíž chybí druhý globální součinitel bezpečnosti:

$$R_d = \frac{R(X_m)}{\gamma_R} \quad (2.15)$$

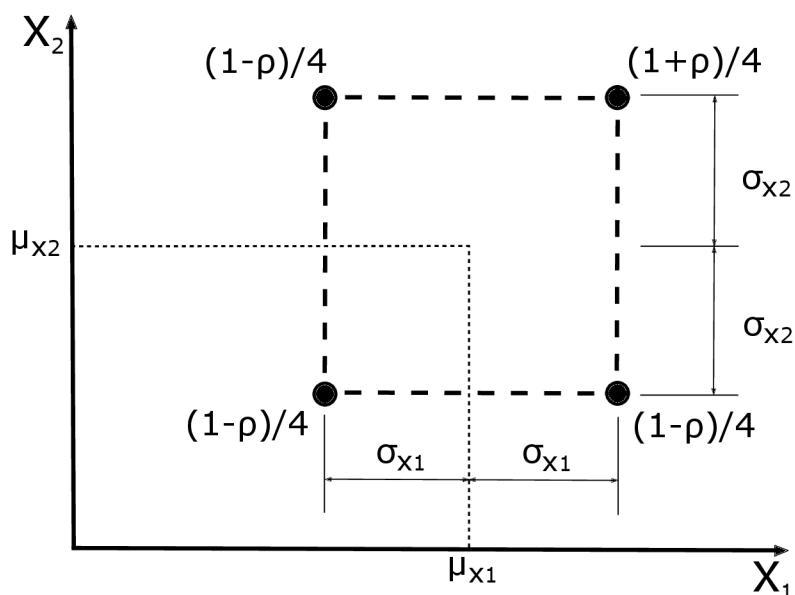
### 2.2.3 Numerická kvadratura dle Rosenblueth

Jednoduchá metoda pro odhad střední hodnoty a rozptylu náhodné veličiny byla vyvinuta již v roce 1975 [29]. Díky jednoduchému a přímému postupu výpočtu se stala velmi využívanou v praktických inženýrských úlohách, zvláště v geotechnice. Hodnota  $m$ -tého momentu náhodné veličiny může být odhadnuta dle vztahu 2.16. Navíc v [13] byl dokázán původ metody jako numerické kvadratury.

$$E(Y^m) \approx \sum_{i=1}^{2^n} P_i \cdot y_i^m \quad (2.16)$$

Do vztahu vstupuje tedy  $2^n$  simulací,  $P_i$  představuje váhový koeficient a  $y_i^m$  je realizace  $Y^m$ . Je zřejmé, že v případě většího počtu vstupních náhodných proměnných je výpočetní náročnost extrémně velká a využití této metody není efektivní.

Zobrazení souřadnic a váhových koeficientů návrhových bodů lze vidět na Obr.2.1, kde  $\rho$  představuje korelační koeficient.



Obr. 2.1: 2D znázornění kvadratury dle Rosenblueth

## 2.3 Návrhové body ve 2D prostoru

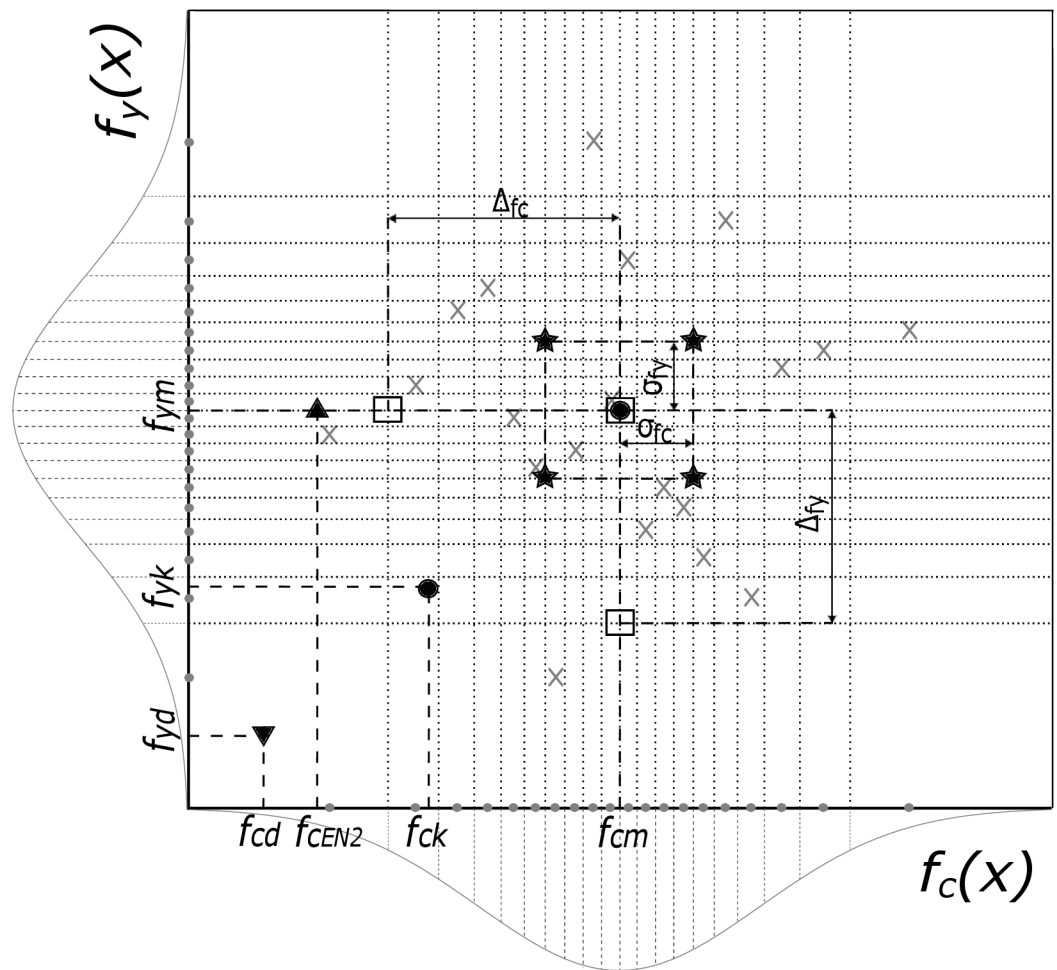
Výše popsané přístupy lze přehledně reprezentovat na dvourozměrném příkladu. Jak lze vidět na Obr. 2.2, jednotlivé metody se liší v počtu a umístění návrhových bodů, které jsou určeny hodnotami vstupních materiálových charakteristik modelu.

Deterministické metody jsou velmi úsporné – definují pouze jeden návrhový bod, nicméně dosahují uspokojivých výsledků pouze při aplikaci na lineární problémy. V grafu jsou reprezentovány trojúhelníkovými symboly (PSF a EN 1992-2).

Polo-pravděpodobnostní metody již využívají vyšší počet návrhových bodů. Metoda ECoV dle Červenky vždy využívá pouze 2 simulace – charakteristické, respektive střední hodnoty.

Výpočetní náročnost dalších metod je silně závislá na rozměru stochastického modelu. Metoda ECoV, kterou modifikoval Schlune, již pracuje s  $N+1$  simulacemi — ve 2D tedy 3 simulace. Nicméně nevýhodou metody může být uvažována odlišnost návrhových bodů dle druhu mezního stavu. Numerická kvadratura je výpočetně nejnáročnější — 4 simulace pro 2D, nicméně i přes tento fakt je často využívána pro její jednoduchost.

Pro srovnání lze v grafu nalézt také body pro plně pravděpodobnostní přístup určeny dle stratifikované simulace Latin Hypercube Sampling (LHS). Existuje několik variant metody LHS, pro odhad momentů funkce odezvy konstrukce se často využívá LHS-mean. Více o simulačních technikách bude uvedeno v kapitole 5.



n	SAMPLING POINTS
x	X Latin Hypercube Sampling
1	▼ Partial Safety Factor
1	▲ EN 1992 - 2
2	● ECoV by Červenka
3	□ ECoV by Schlune et al.
4	★ Numerical Quadrature

Obr. 2.2: Návrhové body ve 2D prostoru

### 3 CITLIVOSTNÍ ANALÝZA

Citlivostní analýza představuje velmi důležitý nástroj při návrhu a analýze konstrukce, pomocí níž můžeme zjistit, které vstupní veličiny ovlivňují nejvíce chování modelu. Následně je možné z praktického hlediska například optimalizovat výrobu nebo z teoretického pohledu redukovat stochastický model, díky čemuž lze výrazně snížit výpočetní náročnost některých návrhových metod. Redukci stochastického modelu získáme zanedbáním náhodnosti vybraných vstupních veličin a ponecháním na středních hodnotách.

Nejjednodušší variantou je tzv. deterministická citlivostní analýza, která se často označuje také jako parametrická studie. Princip je jednoduchý – postupně se mění deterministická hodnota vybrané vstupní veličiny a sleduje se změna odezvy výpočtového modelu konstrukce. V anglosaské literatuře bývá označována termínem *what-if study*.

Pokročilejší citlivostní analýzy jsou již stochastického typu. Vstupní veličiny jsou uvažovány jako náhodné a sledují se statistické parametry odezvy výpočtového modelu. Aktuálně se běžně využívá několik typů stochastické citlivostní analýzy, kdy každá poskytuje jinou informaci a využívají se tedy často jejich kombinace.

#### 3.1 Neparametrická pořadová korelace

Neparametrická pořadová korelace využívá principu dílčích korelačních koeficientů mezi vstupní náhodnou veličinou a odezvou výpočetního modelu.

Díky využití pořadí vstupních hodnot uspořádaných dle velikosti místo samotných skutečných hodnot je neparametrická pořadová korelace více robustní a nezávislá na rozdělení pravděpodobnosti. Další výhodou je velmi snadný výpočet bez větších výpočetních nároků, jakmile je provedena stochastická simulace modelu. Tato citlivostní analýza je často implementována v programových nástrojích, např. FReET [22].

Relativní vliv vstupní veličiny je tedy určen velikostí absolutní hodnoty korelačního koeficientu, často se k tomuto účelu využívá Spearmanův korelační koeficient:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n-1)(n+1)}, \quad (3.1)$$

kde  $n$  je velikost stochastického modelu a  $d_i$  představuje rozdíl mezi pořadím členů uspořádaných souborů vstupních dat a odezvou modelu.

## 3.2 ANOVA

Aktuálně nejpoužívanější metody citlivostní analýzy jsou takzvané ANOVA (ANalysis Of VAriance) metody založené na principu Hoeffding-Sobol dekompozice (např. [12]):

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^M \mathcal{M}_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq M} \mathcal{M}_{ij}(X_i, X_j) + \dots + \mathcal{M}_{12\dots M}(X_1, \dots, X_M), \quad (3.2)$$

kde  $M$  značí dimenzi náhodného prostoru, jednotlivé členy mají nulovou střední hodnotu a jsou ortogonální. Funkci  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  lze tedy, za předpokladu nezávislosti vstupních veličin, rozložit do součtu jednotlivých členů, z čehož lze také odvodit, že rozptyl funkce  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  se skládá z rozptylů jednotlivých členů.

Na základě vztahu byly odvozeny tzv. Sobolovy indexy [33], které budou podrobněji probrány v kapitole 3.2.2. Na myšlenke dekompozice rozptylu byly však popsány i další metody, např. citlivost ve formě variačních koeficientů dle [21].

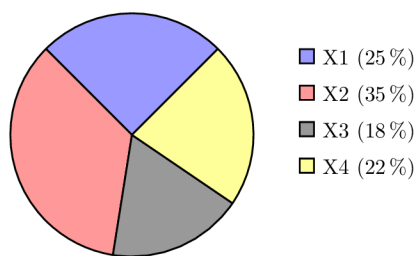
### 3.2.1 Forma variačních koeficientů

Základní myšlenkou je provedení  $M$  simulací výpočtového modelu, kdy pouze jedna vstupní veličina je považována za náhodnou a ostatní jsou reprezentovány pouze středními hodnotami. Tento postup je opakován pro všechny náhodné vstupní veličiny, popřípadě pro skupiny veličin.

Následně jsou výsledky statisticky zpracovány a jsou stanoveny dílčí variační koeficienty  $CoV_{R_i}$  pro případy, kdy je pouze  $i$ -tá veličina považována za náhodnou. Pokud je stochastický model o velikosti  $M$ , celkový variační koeficient odezvy lze přibližně stanovit jako:

$$CoV_R \cong \sqrt{\sum_{i=1}^M (CoV_{R_i})^2} \quad (3.3)$$

Výsledný vliv jednotlivých veličin lze přehledně vyjádřit pomocí procent nebo graficky ve formě výsečového diagramu. Příklad výsledku citlivostní analýzy ve formě variačních koeficientů lze vidět na Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Citlivostní analýza ve formě variačních koeficientů



Výše popsany přístup, znárodnění jedné veličiny, zatímco ostatní jsou ponechány na střední hodnotě, je v odborné literatuře označován také jako lokální citlivostní analýza [35]. Z jednoduchosti a výpočetní nenáročnosti metody také vyplývají hlavní nedostatky - zanedbání korelace mezi veličinami a vlivu jejich vzájemné interakce.

### 3.2.2 Sobolovy indexy

Sobolovy indexy jsou aktuálně považovány za nejsofistikovanější nástroj citlivostní analýzy, a tedy využívány ve všech vědních oborech pro kvantifikování důležitosti a vlivu jednotlivých vstupních náhodných veličin. Pro popis Sobolových indexů je vhodné uvést nejprve tzv. zákon totálního rozptylu (Eve's law):

$$V(\mathcal{M}) = V_{X_i} \left( E_{\mathbf{X}_{-i}} (\mathcal{M}|X_i) \right) + E_{X_i} \left( V_{\mathbf{X}_{-i}} (\mathcal{M}|X_i) \right) \quad (3.4)$$

kde  $V_{\mathbf{X}_{-i}}$  značí podmíněný rozptyl a  $E_{\mathbf{X}_{-i}}$  podmíněnou střední hodnotu funkce  $\mathcal{M}$ . Pokud první člen vztahu 3.4 normalizujeme, získáme již výraz pro Sobolův index prvního řádu:

$$S_i = \frac{V_{X_i} \left( E_{\mathbf{X}_{-i}} (\mathcal{M}|X_i) \right)}{V(\mathcal{M})} \quad (3.5)$$

S využitím vztahu 3.2 lze dále odvodit Sobolovy indexy vyšších řádů, které vyjadřují vliv spolupůsobení více veličin. Celkový počet indexů je  $2^M - 1$ , kdy  $M$  vyjadřuje dimenzi náhodného prostoru. Avšak kvůli vysoké výpočetní náročnosti se v praxi běžně využívá pouze indexů prvního řádu a totálních sobolových indexů, vyjadřujících celkový vliv jednotlivých veličin (tedy první řád a všechny interakce vyšších řádů), definovaných vztahem:

$$S_{T_i} = \frac{E_{\mathbf{X}_{-i}} (V_{X_i} (M|\mathbf{X}_{-i}))}{V(M)} \quad (3.6)$$

Navíc z jednotlivých definic vyplývají následující vlastnosti Sobolových indexů:

$$0 \leq S_i \leq S_{T_i} \leq 1 \quad (3.7)$$

$$1 = \sum_{i=1}^M S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq M} S_{ij} + \dots + S_{1,\dots,M} \quad (3.8)$$

Je vhodné dodat, že existuje několik způsobů jak Sobolovy indexy získat. V praktických aplikacích využíváme numerických metod s využitím simulačních technik typu Monte Carlo [33]. Tento přístup však často nelze využít pro výpočetně náročné funkce, jelikož je nutný obrovský počet simulací. Proto se s výhodou využívá metod náhradní plochy odezvy.

## 4 METODY NÁHRADNÍ PLOCHY ODEZVY

Návrhové metody druhé úrovně obsahují aproximační metody, tzv. metody (náhradní) plochy odezvy, které jsou v odborné literatuře označovány jako response surface, metamodely nebo surrogate modely.

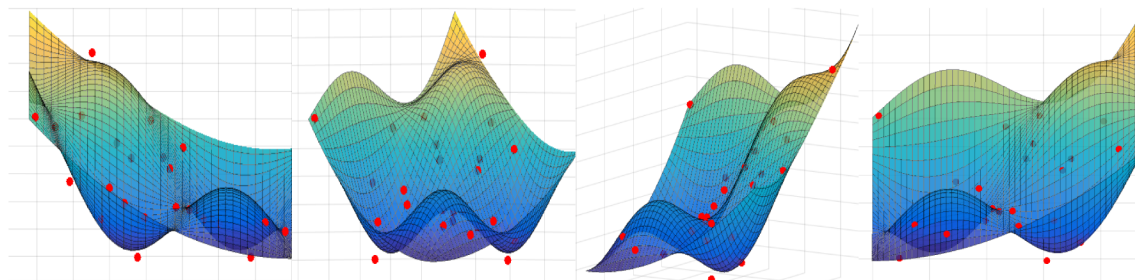
Cílem aproximace je matematický model fyzikálního systému, který často není explicitně vyjádřen (typicky model konstrukce řešený MKP). Náhradní plochu odezvy sestavujeme zpravidla kvůli mnohem nižší výpočetní náročnosti jednotlivých simulací. Poté je tedy možné provést plně pravděpodobnostní analýzu, optimalizaci a citlivostní analýzu v řádech minut.

Existuje mnoho metod pro tvorbu náhradní plochy odezvy (např. polynomiální chaos, kriging, umělé neuronové sítě), obecný postup je však pro všechny metody stejný:

1. zvolit množinu „učících“ bodů (experimental design)
2. vytvořit metamodel
3. kontrola kvality metamodelu
4. upravit množinu „učících“ bodů
5. opakovat bod 2-4 dokud není dosažena požadovaná kvalita metamodelu

Na Obr. 4.1 vidíme ukázkou funkce (plochy) aproximované metamodelem, který je využit pro stanovení několika bodů. Jak lze vidět, metamodel ve většině případů nevystihne chování funkce bezchybně, je tedy nutné ověřovat kvalitu metamodelu a zpřesňovat jeho výsledky (krok 2-4).

Tvorba náhradní plochy odezvy vyžaduje již rozsáhlejší znalosti teorie spolehlivosti a matematické pravděpodobnosti v porovnání s metodami 1. úrovně. Snahou odborníků je tedy vytvoření softwarových nástrojů, které tvorbu metamodelů automatizují. V diplomové práci je objektem zájmu náhradní plocha odezvy vytvořena s využitím polynomiálního chaosu. Popularita této metody v posledních letech roste, avšak stále je doménou spíše vědeckých pracovníků.



Obr. 4.1: Ukázkou náhradní plochy odezvy

## 4.1 Polynomiální chaos (PCE)

### 4.1.1 Základní informace

První zmínka o polynomiálním chaosu se objevila v práci Norberta Wienera [40]. Necht  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  je pravděpodobnostní prostor, kde  $\Omega$  je základní prostor,  $\mathcal{F}$  značí  $\sigma$ -algebru (všechny podmnožiny  $\Omega$ ) a  $\mathcal{P}$  je pravděpodobnostní funkce definovaná na  $\mathcal{F}$ . Výpočtový model  $\mathcal{M}$  fyzikálního problému má vstupní parametry reprezentovány náhodným vektorem  $\mathbf{X}(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  se sdruženou hustotou pravděpodobnosti. Hledaná odezva modelu je také náhodná proměnná  $Y(\omega) = \mathcal{M}(\mathbf{X}(\omega))$ .

Předpokládejme, že odezva  $Y$  má konečný druhý centrální moment (rozptyl), tudíž  $Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , kde  $\mathcal{L}_2$  značí Hilbertův prostor. Poté můžeme psát následující rozvoj polynomiálním chaosem (PCE z angl. Polynomial Chaos expansion) [34]:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (4.1)$$

kde  $M$  značí počet vstupních náhodných veličin,  $\beta_{\alpha}$  jsou neznámé deterministické koeficienty a  $\Psi_{\alpha}$  jsou báze funkce (polynomy více proměnných). Jako báze funkce se volí ortonormální polynomy vůči sdružené hustotě pravděpodobnosti, tedy:

$$\mathbb{E}[\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})\Psi_{\beta}(\mathbf{X})] = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

kde  $\delta_{\alpha\beta}$  značí Kroneckerovo delta. Originální PCE, který je využit v diplomové práci, uvažuje Hermitovy polynomy, nazývá se tedy Wiener-Hermite polynomiální chaos. Zobecněný polynomiální chaos využívá jiné ortogonální polynomy dle typu rozdělení pravděpodobnosti vstupních náhodných veličin a nazývá se Wiener-Askey polynomiální chaos [42]. Dále v práci bude pod pojmem polynomiální chaos uvažována varianta Wiener-Hermite.

Pro praktické výpočty nelze využít nekonečného množství členů rozvoje ze vztahu 4.1, je nutné definovat zkrácenou množinu  $\mathcal{A}^{M,p}$  použitých funkcí v závislosti na počtu vstupních proměnných  $M$  a maximálním stupni použitého polynomu  $p$  následovně:

$$\mathcal{A}^{M,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : |\alpha| \leq p\} \quad (4.3)$$

kde  $|\alpha| = \sum_{i=1}^M \alpha_i$ . Mohutnost množiny poté můžeme stanovit jako:

$$\text{card } \mathcal{A}^{M,p} \equiv P = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!} \quad (4.4)$$

Algoritmus pro generování báze funkce kompatibilní s tímto vztahem lze nalézt v odborné literatuře [37].

Váhová funkce Hermitových polynomů je ortogonální vzhledem k hustotě pravděpodobnosti standardní normální veličiny. Z tohoto důvodu musíme jako vstup matematického modelu použít nezávislé standardní normální veličiny, označené jako  $\boldsymbol{\xi}$ . Poté lze rovnici 4.1 upravit následovně:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) \approx \tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Transformace náhodných veličin

Předpoklad nezávislého standardního normálního prostoru vstupních veličin není v praktických úlohách běžný. Nicméně pro nezávislé nenormální veličiny lze využít jednoduchou iso-pravděpodobnostní transformaci každé ze vstupních veličin a tím dosáhnout požadovaného stavu:

$$\boldsymbol{\xi} = \Phi^{-1}(F_x(\mathbf{X})) \quad (4.6)$$

kde  $F_x$  značí distribuční funkci veličiny  $x$  a  $\Phi^{-1}$  inverzní distribuční funkci standardní normální veličiny.

Pokud se ve stochastickém modelu vyskytují závislé náhodné veličiny, je nutno zvolit komplikovanější iso-pravděpodobnostní transformace, které transformují veličiny na nekorelované. Aktuálně jsou nejpoužívanější Natafova transformace [20, 19] a Rosenblattova transformace [28]. V inženýrských úlohách zpravidla nemáme dostatek informací pro využití transformace dle Rosenblatta, která vyžaduje znalost sdružené hustoty pravděpodobnosti vstupních náhodných veličin. Proto je častěji využívána Natafova transformace, která byla také využita v diplomové práci.

V následujících odstavcích budou shrnuty základní kroky transformace dle Natafa spolu s praktickými informacemi o implementaci metody, které byly využity v průběhu diplomové práce. Natafova transformace probíhá obecně ve třech krocích:

$$\boldsymbol{\xi} = T_{Nataf}(\mathbf{X}) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(\mathbf{X}) \quad (4.7)$$

První dvě transformace  $T_1$  a  $T_2$  jsou stejné jako ve vztahu 4.6, tedy transformace na standardní normální veličiny:

$$T_1 : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{W} = F_x(\mathbf{X}) \quad (4.8)$$

$$T_2 : \mathbf{W} \mapsto \mathbf{Z} = \Phi^{-1}(\mathbf{W}) \quad (4.9)$$

Třetí transformace zajišťuje převedení náhodného vektoru  $\mathbf{Z}$  na nekorelovaný náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi}$ .  $\mathbf{X}$  je vygenerován pomocí původní korelační matice  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ , zatímco

$\mathbf{Z}$  má korelační matici  $\mathbf{R}_Z$ . Využitím Choleskeho dekompozice  $\mathbf{R}_Z$  získáme dolní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{R}_Z = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.10)$$

Poté již samotná transformace, kde využijeme inverzní matici  $\mathbf{L}$  označenou jako  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}$  probíhá dle vztahu 4.11.

$$T_3 : \mathbf{Z} \mapsto \boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{Z} \quad (4.11)$$

Hlavním problémem Natafova modelu je stanovení  $\mathbf{R}_Z$  takové, aby odpovídala po transformaci požadované  $\mathbf{R}_X$ . S využitím Natafových předpokladů lze nalézt v odborné literatuře (např. [41]) vztah mezi korelačním koeficientem  $\rho_x$  a  $\rho_z$ :

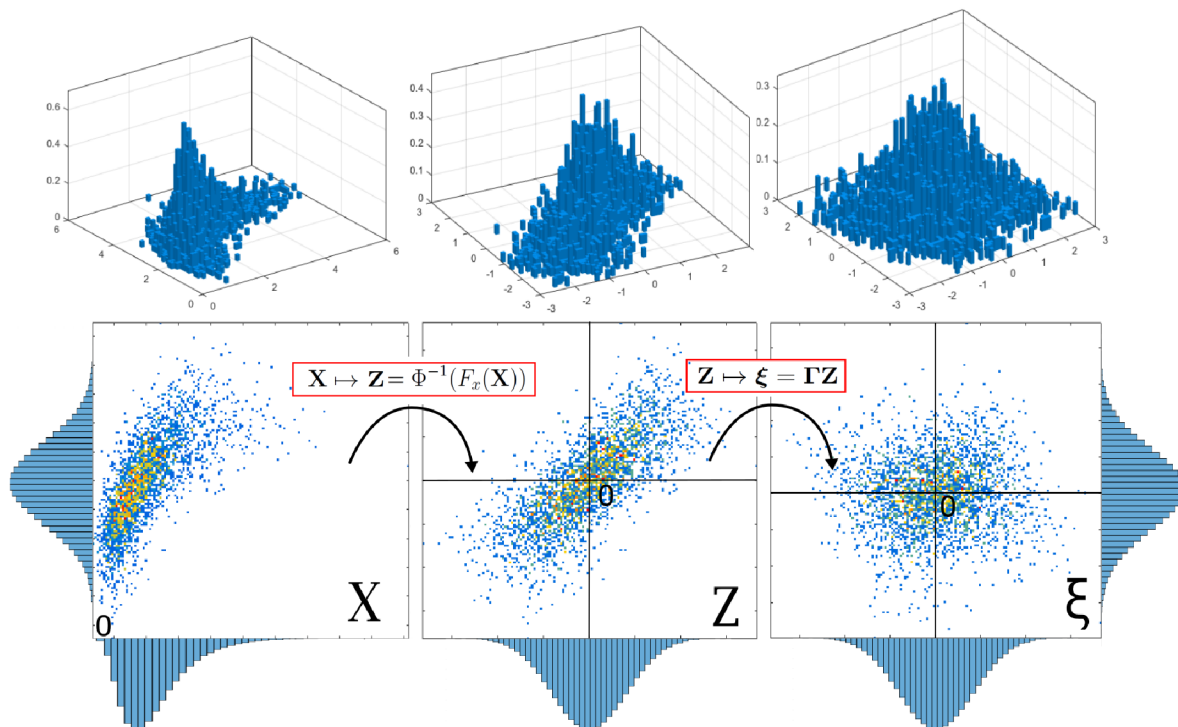
$$\rho_x = -\frac{\mu_i\mu_j}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_j} \iint F_i^{-1}[\Phi(u_i)] \cdot F_j^{-1}\left[\Phi\left(\rho_z u_i + \sqrt{1-\rho_z^2}u_j\right)\right] e^{-\frac{u_i^2+u_j^2}{2}} du_i du_j \quad (4.12)$$

kde  $\mu$  značí střední hodnotu a  $\sigma$  směrodatnou odchylku. Hledaný korelační koeficient  $\rho_z$  lze získat například bisekcí. Samotný integrál lze řešit pomocí Gauss-Hermitovy kvadratury, viz [41] appendix B. Při hledání  $\rho_z$  je vhodné využít následujících vlastností funkční závislosti:

- $\rho_z \in \langle -1, 1 \rangle$
- $\rho_z = 0$  pro  $\rho_x = 0$
- $|\rho_x| \leq |\rho_z|$

Nutno podotknout, že díky předpokladu normální kopule Natafova modelu lze tuto metodu využít pouze pro normální a lognormální rozdělení vstupních náhodných veličin. V jiných případech byly během testování algoritmu zjištěny problémy. To potvrzuje i Vořechovský a Novák: „*For some combinations of marginals of vector  $\mathbf{X}$  and target correlations  $\rho_x$ , a feasible solution may not exist...*“ (citace z [39], str. 455). Většina inženýrských úloh si s těmito předpoklady vystačí, nicméně ve speciálních případech je tedy nutno zvolit jiné postupy.

Shrnutí Natafova modelu lze vidět na Obr 4.2. Jako ilustrativní příklad slouží dvě náhodné veličiny  $X_1 \sim \mathcal{LN}(0.58, 0.47)$  a  $X_2 \sim \mathcal{N}(3, 0.5625)$  s korelačním koeficientem  $\rho_x = 0.7$ . V horní části obrázku lze vidět 3D histogram a ve spodní 2D reprezentaci s barevným odlišením bodů dle počtu vzorků (modrá nejméně, červená nejvíce) doplněnou o šipky znázorňující postup transformace.



Obr. 4.2: Natafova transformace

### 4.1.3 Výpočet souřadnic PCE

Obliba PCE vzrostla v 80. letech s využitím stochastické metody konečných prvků [17]. V tomto případě výpočet koeficientů  $\beta$  (neboli souřadnic PCE) probíhá přímo v upraveném kódu MKP. To je z praktického hlediska velmi problematické, jelikož nelze využít běžný komerční software.

V novějším pojetí je matematický model považován za „black-box“ a samotné koeficienty se stanoví pomocí několikanásobného vyčíslování modelu s různými vstupními parametry. Samotný algoritmus MKP je tedy deterministický. V této práci je využita velmi rozšířená regresní metoda.

Souřadnice PCE můžeme dle [2] získat pomocí běžné metody nejmenších čtverců. Pokud zvolíme konečnou množinu funkcí  $\mathcal{A}$  (např. dle vztahu 4.3), získáme následující vztah:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon \quad (4.13)$$

kde  $\varepsilon$  představuje chybu způsobenou vynecháním členů, které nejsou zahrnuty v  $\mathcal{A}$ . Potom metoda nejmenších čtverců představuje takové řešení rovnice aby střední

hodnota čtverce chyby  $\varepsilon$  byla co nejmenší. V praktickém výpočtu se poté střední hodnota aproximuje průměrnou hodnotou, tedy výsledný vztah vypadá následovně:

$$\beta^{L.S} = \arg \min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \beta^T \Psi(\xi^{(i)}) - \mathcal{M}(x^{(i)}) \right)^2 \quad (4.14)$$

Ve vztahu vystupuje matice  $\mathcal{X}$  o  $n$  řádcích, které reprezentují set vstupních dat neboli souřadnice bodu ve vstupním náhodném prostoru, v odborné literatuře je označována jako „experimental design (ED)“ a je získán pomocí metod typu Monte Carlo, které budou blíže popsány v kap. 5. Aby bylo možné získat řešení rovnice, je nutné nejprve provést  $n$  výpočtů matematické modelu  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  pro stanovený ED a výsledky tvoří vektor  $\mathcal{Y}$ . Tento postup se obecně nazývá metoda (náhradní) plochy odezvy. Pokud ED dosadíme do zvolených bázevých funkcí, získáme matici  $\Psi$ :

$$\Psi = \left\{ \Psi_{ij} = \Psi_j(\xi^{(i)}), i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, P - 1 \right\} \quad (4.15)$$

Řešení vztahu 4.14 můžeme poté napsat jako:

$$\beta^{L.S} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathcal{Y} \quad (4.16)$$

Matice  $\Psi^T \Psi$  se často označuje jako tzv. *informační matice*. Inverze informační matice může být poněkud problematická, v praktických úlohách může být totiž špatně podmíněná. V průběhu výpočtu je tedy vhodné kontrolovat podmíněnost matice a popřípadě je nutné použít odpovídající řešič, např. SVD rozklad (využitý v průběhu diplomové práce) nebo QR rozklad.

V této části procesu tvorby metamodelu již máme k dispozici explicitně vyjádřenou funkci PCE, která nahrazuje MKP. Nyní je tedy možné použít PCE pro rychlejší zpracování výpočtů například pro optimalizaci, plně pravděpodobnostní analýzu nebo citlivostní analýzu. Avšak výhodou PCE je možnost získání dalších informací přímo z tvaru získané funkce. Nicméně, aby byly veškeré zmíněné aplikace relevantní, je nutné zjistit přesnost aproximace. Poté je možné se rozhodnout, zda aproximaci zpřesníme, nebo je získaná úroveň přesnosti dostačující, tak jak naznačuje algoritmus v úvodu této kapitoly.

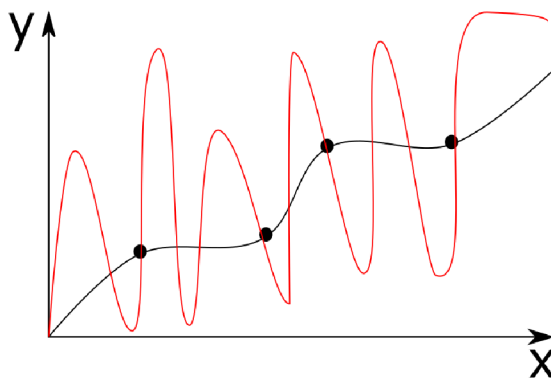
#### 4.1.4 Stanovení kvality PCE

Hlavním požadavkem metamodelů je jejich přesnost, proto v následující části budou představeny dva ukazatele kvality PCE a způsob jejich výpočtu. Nicméně motivací pro tvorbu PCE je efektivita výpočtu, proto jsou vybrány ukazatelé, které je možno získat prakticky bez dalších výpočetních nároků s využitím stávajícího ED a odpovídajících výsledků  $\mathcal{Y}$ .

Prvním ukazatelem, běžně využívaným v regresní analýze je tzv. *koeficient determinace*  $R^2$ , který je definován jako procentuální vyjádření části variability vystižené regresním modelem. Pomocí vztahu 4.14 lze  $\varepsilon$  odvodit jednoduše. Koeficient  $R^2$  získáme následnou normalizací vzhledem k rozptylu výsledků získaných MKP  $Var[\mathcal{Y}]$  následujícím způsobem:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum (\mathcal{M}(x^{(i)}) - (\mathcal{M}^{PCE}(x^{(i)}))^2}{Var[\mathcal{Y}]} \quad (4.17)$$

Jak lze vidět,  $R^2 = 1$  představuje dokonalou aproximaci, zatímco  $R^2 = 0$  velmi špatnou. I když je tento ukazatel využíván velice často, je velmi náchylný na přefitování. Tedy stav, kdy aproximace v bodech ED je vynikající, avšak v ostatních oblastech je velmi nepřesná. Přefitování nastává často, pokud se velikost ED blíží počtu neznámých koeficientů. Popsaný jev je znázorněn na Obr. 4.3, kde černá křivka představuje matematický model, červená aproximační funkci a černé body představují ED. Jak lze vidět, v tomto případě  $R^2$  blížící se jedné neodpovídá globální kvalitě metamodelu.



Obr. 4.3: Přefitování metamodelu

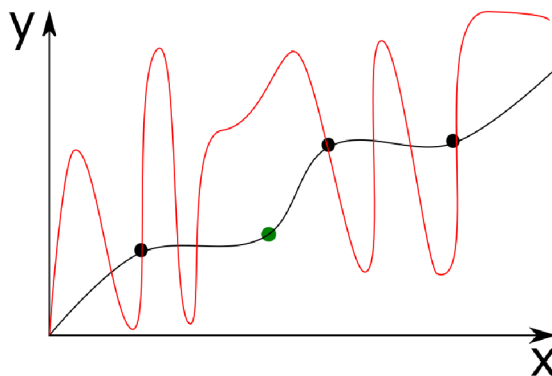
Z důvodu výše popsaného nedostatku koeficientu determinace  $R^2$  je důležité definovat ukazatel, který bude objektivně posuzovat kvalitu aproximace i v oblastech, které nejsou součástí ED. Často využívaná technika pro tento účel je *křížová validace* (cross-validation). ED je nejprve rozdělen na tréninkovou a ověřovací část, tvorba PCE je založena na části tréninkové, zatímco ověřovací část slouží pro výpočet chyby.

Speciálním typem křížové validace je tzv. *leave-one-out validace*. V tomto případě tvoří ověřovací část pouze jeden bod  $x^{(i)} \in \mathcal{X}$ , zbytek ED  $\mathcal{X} \setminus x^{(i)}$  se použije pro tvorbu PCE. Tento proces je opakován  $n$ -krát pro každý bod ED, takto sestavený PCE označíme  $\mathcal{M}_{\mathcal{X} \setminus x^{(i)}}^{PCE}$ . Chybu aproximace v bodě  $x^{(i)}$  lze poté vyjádřit jako rozdíl mezi výsledkem matematického modelu a predikcí PCE:

$$\Delta^{(i)} = \mathcal{M}(x^{(i)}) - \mathcal{M}_{\mathcal{X} \setminus x^{(i)}}^{PCE}(x^{(i)}) \quad (4.18)$$



Grafická interpretace principu je zobrazena na ilustrativním Obr. 4.4. Zeleně je vyznačen bod  $x^{(i)} \in \mathcal{X}$  využitý pro ověření přesnosti aproximace, černou barvou jsou vyznačeny body zahrnuté v tréninkové množině a červená křivka představuje aproximační funkci sestavenou na základě  $\mathcal{X} \setminus x^{(i)}$ . Jak lze vidět, křížová validace je vhodnější způsob kontroly kvality metamodelu vzhledem k možnému přefitování.



Obr. 4.4: Křížová validace metamodelu

Poté koeficient spjatý s leave-one-out validací  $Q^2$  získáme jako průměrnou hodnotu čtverců chyby  $\Delta^{(i)}$  normalizovanou vzhledem k rozptylu výsledků  $Var[\mathcal{Y}]$  získaných MKP dle vztahu:

$$Q^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta^{(i)})^2}{Var[\mathcal{Y}]} \quad (4.19)$$

Bohužel, výpočet  $Q^2$  může být velmi časově náročný, jelikož musí být vytvořeno  $n$  metamodelů, proto se v praktických aplikacích často nevyužívá. Výhodou PCE je však možnost analytického výpočtu na základě pouze jednoho vytvořeného metamodelu dle [3] následovně:

$$Q^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum \left( \frac{\mathcal{M}(x^{(i)}) - \mathcal{M}^{PCE}(x^{(i)})}{1 - h_i} \right)^2}{Var[\mathcal{Y}]} \quad (4.20)$$

kde  $h_i$  představuje  $i$ -tý diagonální prvek matice  $\Psi(\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T$  a  $\mathcal{M}^{PCE}(x^{(i)})$  predikci dle PCE sestaveným na základě plného ED. Ze vztahu tedy vyplývá, že  $Q^2$  lze získat ve fázi postprocessingu po vytvoření PCE bez dalších výpočetních nároků.

Takto definovaný ukazatel kvality je robustnější a odolnější vůči přefitování a je tedy vhodné ho využít pro hodnocení přesnosti PCE a tedy jako rozhodovací kritérium uvnitř algoritmu uvedeném v úvodu kapitoly. Stejný princip byl využit v průběhu diplomové práce.

### 4.1.5 Vyhodnocení PCE

Jakmile je k dispozici aproximace výpočtového modelu  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$  ve formě PCE  $\tilde{Y} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ , lze s metamodelem pracovat jako s původním výpočtovým modelem (např. MKP) jen s výhodou mnohem nižší výpočtové náročnosti. Mimo to lze některé důležité informace o výpočtovém modelu získat přímo z tvaru PCE. V následujících odstavcích budou představeny nejdůležitější informace, které je takto možno získat [35, 37].

#### Momentová analýza

Hlavními údaji jsou střední hodnota a centrální momenty náhodné veličiny  $\tilde{Y}$ . Zde se projeví velká výhoda zvolených ortonormálních polynomů dle vztahu 4.2. Jelikož  $\Psi_0 \equiv 1$ , lze psát  $\mathbb{E}[\Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})] = 0 \quad \forall \alpha \neq 0$ . Z toho vyplývá, že střední hodnota  $\tilde{Y}$  je rovna prvnímu členu rozvoje:

$$\mu_{\tilde{Y}} = \mathbb{E}[\tilde{Y}] = \mathbb{E}\left[\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right] = \beta_0 \quad (4.21)$$

Podobně lze odvodit také vztah pro druhý centrální moment  $\tilde{Y}$ , tedy rozptyl:

$$\sigma_{\tilde{Y}}^2 = \text{Var}[\tilde{Y}] = \mathbb{E}\left[(\tilde{Y} - \beta_0)^2\right] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq 0}} \beta_{\alpha}^2 \quad (4.22)$$

Další centrální momenty lze také získat na základě získaných koeficientů  $\beta$ , nicméně odvození je značně složité a stanovené pouze pro Hermitovy polynomy, vztahy pro třetí a čtvrtý centrální moment lze nalézt v [36]. Střední hodnotu a první čtyři centrální momenty  $\tilde{Y}$  lze získat jednoduše zpracováním koeficientů  $\beta$  a pro jejich výpočet tedy není potřeba dalšího výpočetního výkonu.

#### Citlivostní analýza

V kap. 3.2.2 byly popsány aktuálně nejsofistikovanější citlivostní ukazatelé Sobolovy indexy. Ale také byla v závěru kapitoly zmíněna výpočetní náročnost jejich stanovení. Pokud je k dispozici jakýkoli metamodel, je možné ho využít pro jejich výpočet místo původního modelu, avšak i v tomto případě se jedná o výpočetně náročnou operaci.

Avšak pokud je k dispozici metamodel ve formě PCE, lze stanovit Sobolovy indexy analyticky na základě znalosti tvaru aproximační funkce, bližší odvození nabízí Sudret [35].

Srovnáním vztahu 3.2 s PCE 4.1 lze zjistit, že oba vztahy jsou vyjádřeny ve formě sumy ortogonálních funkcí, PCE je tedy kompatibilní s požadavky Hoeffding-Sobol dekompozice. Z tohoto důvodu lze původní tvar dekompozice upravit následovně:

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_0 + \sum_{\mathbf{u} \subset \{1, \dots, M\}} \mathcal{M}_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}}) \quad (4.23)$$

kde:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x) \quad (4.24)$$

V upraveném vztahu vystupuje množina  $\mathcal{A}_{\mathbf{u}}$ , která představuje soubor funkcí závislých pouze na vybraných veličinách (jedné nebo více) v podmnožině  $\mathbf{u} \equiv \{i_1, \dots, i_s\}$ :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{u}} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : k \in \mathbf{u} \Leftrightarrow \alpha_k \neq 0\} \quad (4.25)$$

Jelikož je tento matematický popis špatně čitelný, následuje praktické vyjádření Sobolových indexů prvního řádu:

$$S_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} \frac{\beta_{\alpha}^2}{\text{Var}[\tilde{Y}]} \quad \mathcal{A}_i = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : \alpha_i > 0, \alpha_{j \neq i} = 0\} \quad (4.26)$$

Sobolových indexů vyšších řádů:

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_s}} \frac{\beta_{\alpha}^2}{\text{Var}[\tilde{Y}]} \quad \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : k \in \{i_1, \dots, i_s\} \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0\} \quad (4.27)$$

Totálních Sobolových indexů:

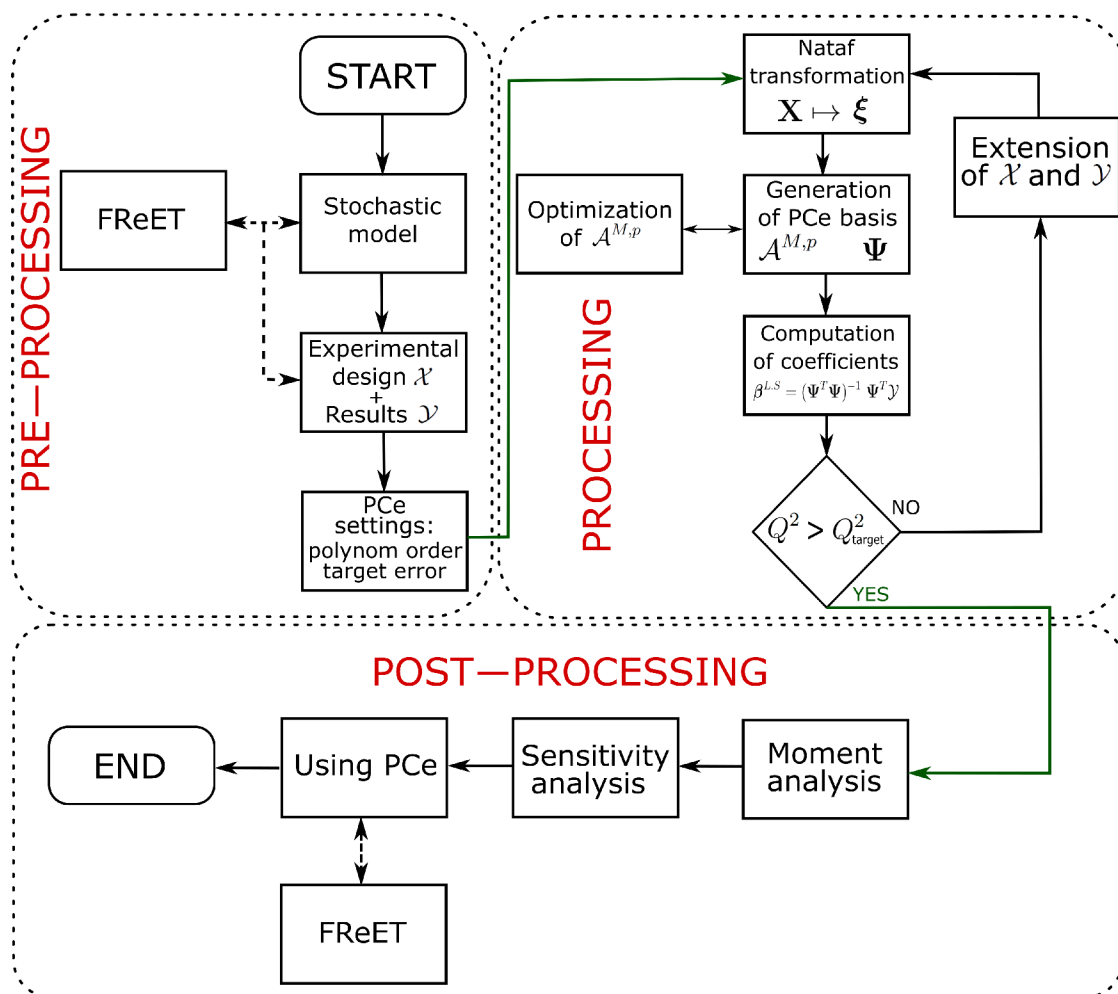
$$S_i^T = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i^T} \frac{\beta_{\alpha}^2}{\text{Var}[\tilde{Y}]} \quad \mathcal{A}_i^T = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : \alpha_i > 0\} \quad (4.28)$$

Z praktického hlediska jde pouze o výběr členů PCE, které jsou závislé na požadovaných veličinách, součet čtverců odpovídajících koeficientů a normalizaci rozptylem stanoveným dle 4.22. Výpočet tedy probíhá pomocí již známých koeficientů a základních matematických úprav, není tedy potřeba dalších simulací.

Stanovení Sobolových indexů pomocí PCE je aktuálně považováno za nejefektivnější přístup a je často využíváno v praktických aplikacích, ve kterých výpočet klasickými přístupy není možný vzhledem k výpočetní náročnosti.

## 4.2 Implementace do SW nástroje

Výše popsané metody a principy byli implementovány do SW nástroje pro tvorbu metamodelu ve formě PCe. Jedná se o samostatný program vytvořený v jazyce C#, což je jeho nespornou výhodou vůči již existujícím nástrojům vytvořeným v prostředí MATLAB. V této kapitole budou představeny jeho základní charakteristiky, algoritmus a benchmark. Nejprve je na Obr. 4.5 uveden vývojový diagram SW nástroje.



Obr. 4.5: Vývojový diagram

Celý SW je tedy rozdělen do několika imaginárních částí: příprava dat, zpracování a vyhodnocení. Jednotlivé bloky představují objekty nebo skupiny objektů, které spolu komunikují a zabezpečují chod programu. Výhodou těchto bloků je možnost jednoduchého nahrazení/vylepšení jednotlivých metod.

### 4.2.1 Pre-processing

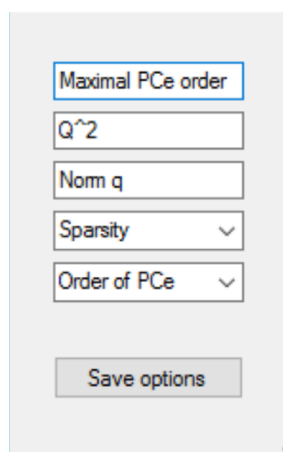
První imaginární část programu tvoří pre-processing neboli příprava dat. Jelikož je snahou běh SW co nejvíce zautomatizovat, je to jediná oblast, do které uživatel zasahuje. Nejprve je vytvořen stochastický model fyzikálního problému, k tomu je určen SW FReET [22], vyvíjený na ústavu stavební mechaniky FAST VUT.

#### Stochastický model a ED

Uživatel definuje rozdělení náhodných vstupních veličin, jejich vzájemnou korelaci a způsob vzorkování. Ukázkou takového stochastického modelu lze vidět na Obr. 6.1. Poté se vygeneruje požadovaný počet realizací, pro které je proveden výpočet zpravidla pomocí komerčního MKP programu. Poté jednotlivé realizace tvoří ED  $\mathcal{X}$  a odpovídající výsledky získané MKP vektor  $\mathcal{Y}$ .

#### Základní nastavení

V základním nastavení SW uživatel určuje použitý stupeň polynomu a cílovou přesnost metamodelu danou ukazatelem  $Q^2$ . Další nepovinné nastavení obsahuje možnost optimalizace množiny použitých funkcí a adaptivní zvyšování stupně polynomu, ty budou probrány v dalším textu. Možnosti nastavení v grafickém rozhraní SW lze vidět na Obr. 4.6.

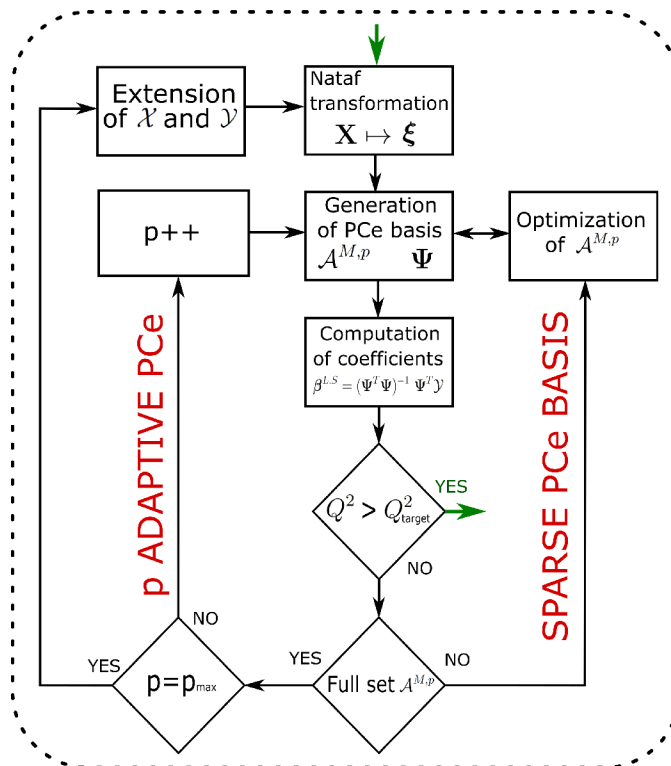


Obr. 4.6: Nastavení SW

Takto připravená data jsou následně předána samotnému řešiči, který vytvoří metamodel ve formě PCe dle nastavení. Tato činnost je uživateli skryta a není možné do ní zasahovat. Samotný proces je popsán v následující podkapitole.

### 4.2.2 Processing

Zpracování vstupních dat a samotná tvorba PCe probíhá pomocí několika bloků, které jsou popsány níže. Celý tento proces může být navíc adaptivní, jak lze vidět na Obr. 4.7.



Obr. 4.7: Schéma řešiče

#### Zpracování vstupních dat

Získaná vstupní data a nastavení jsou přijaty blokem pro tvorbu PCe. Nejprve je vytvořená ED transformován do nezávislého standardního normálního prostoru pomocí Natafovy transformace dle kap. 4.1.2. Poté jsou vygenerovány Hermitovy polynomy a je vytvořena množina bazových funkcí. Další postup závisí na volbě adaptivního režimu.

#### Výpočet koeficientů

Na základě vygenerované báze je vytvořena informační matice  $\Psi^T \Psi$ . Poté je provedena inverze této matice, na výběr je QR dekompozice nebo SVD dekompozice a následná tvorba pseudoinverzní matice. Pokud máme známe koeficienty  $\beta$  i bazové funkce  $\Psi$  je jednoduché zkontrolovat kvalitu metamodelu pomocí ukazatelů  $Q^2$  a  $R^2$ . Pro rozhodnutí o přijetí/nepřijetí modelu je důležitý  $Q^2$ .

### Adaptivní algoritmus

Adaptivita je možná dvojím způsobem v závislosti na potřebě uživatele. První adaptivní algoritmus pracuje s postupně zvyšujícím se maximálním stupněm Hermitova polynomu  $p$  dle levé části Obr. 4.7. V prvním kole je tedy vygenerována báze se stupněm polynomu  $p = 1$ , proběhne výpočet koeficientů a kontrola kvality aproximace. Pokud je přesnost dostatečná, dojde k post-processingu. V opačném případě se zvýší stupeň polynomu  $p$  o jedničku a proces se opakuje. Ukončení adaptivního procesu nastane, pokud  $p$  je rovno  $p_{max}$  zvolené v základním nastavení PCe. Výpočet se ukončí s hlášením o nutnosti zvýšit  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  spolu s dosaženou maximální kvalitou metamodelu. Uživatel má poté na výběr, zda využije nejkvalitnější metamodel, nebo zda rozšíří ED a spustí proces znovu.

Druhý adaptivní algoritmus pracuje s množinou báзовých funkcí. V praktických úlohách se totiž ukazuje, že množina  $\mathcal{A}^{M,p}$  obsahuje spoustu členů blížících se nule, tudíž jejich eliminací způsobíme pouze malou chybu. Samozřejmě čím, méně báзовých funkcí množina obsahuje, tím nižší ED je nutný pro výpočet koeficientů  $\beta$ .

Samotný výběr důležitých báзовých funkcí probíhá ve dvou krocích, první je pomocí hyperbolické normy  $q$  dle [4]. Nejprve definujme normu vektoru koeficientů jednoho členu PCe jako:

$$\|\alpha\|_0 = \sum_{i=1}^M 1_{\{\alpha_i > 0\}} \quad (4.29)$$

Poté je hyperbolická norma pro zvolené  $q$  definována následovně:

$$\|\alpha\|_q = \left( \sum_{i=1}^M \alpha_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.30)$$

Množina báзовých funkcí se s využitím této normy redukuje na následující podmnožinu:

$$\mathcal{A}^{M,p} = \{ \alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_q \leq p \} \quad (4.31)$$

Neboli, v podmnožině jsou preferovány členy, které obsahují kombinaci polynomů nižších stupňů nebo obsahují funkci závislou pouze na jedné proměnné. Se zvyšujícím se  $q$  dochází k nižší redukci množiny a pro  $q = 1$  se původní množina nezmění.

Po případné úpravě množiny  $\mathcal{A}^{M,p}$  přichází na řadu druhý krok, který využívá techniku pro výběr ideálního modelu tzv. *Least Angle Regression (LAR)*. Matematické odvození i rozsáhlou diskuzi lze nalézt v původní publikaci z roku 2004 [15]. Metoda probíhá v  $P$  krocích, kdy  $P$  představuje množství členů PCe. V každém kroku přidá do ideálního modelu jeden nejvhodnější člen z  $\mathcal{A}^{M,p}$ , po  $P$  krocích získáme původní model. Adaptivní algoritmus každý krok využívá pro sestavení PCe

a kontroly kvality metamodelu dle  $Q^2$ . Tento proces je znázorněn na pravé části Obr. 4.7. Výhodou tohoto přístupu je nalezení nejvhodnější množiny bázových funkcí na základě daného ED, není tedy nutné využívat plnou množinu  $\mathcal{A}^{M,p}$  a s ní spojený rozsáhlý ED.

Výše popsané dvě množnosti adaptivity algoritmu pro sestavení PCe lze sloučit a tím celý proces zautomatizovat, kdy výsledkem je pro zadaný ED vždy nejkvalitnější možný PCe. Efektivita tohoto přístupu je více zřetelná se zvyšujícím se stupněm použitého polynomu  $p$  a s větším rozsahem stochastického modelu, což je případ praktických úloh ve stavebním inženýrství.

### 4.2.3 Post-processing

Jakmile je sestavena aproximační funkce ve tvaru PCe, je možné analyticky zjistit základní údaje o matematickém modelu, tak jak je popsáno v kap. 4.1.5. Stejně informace se dají samozřejmě získat i pomocí metamodelů jiného typu, avšak PCe umožňuje analytické vyjádření a tím mnohem nižší výpočetní náročnost. Jedná se obecně o 3 úlohy, na Obr. 4.5 reprezentované třemi následujícími bloky.

#### Momentová analýza

Předmětem momentové analýzy je stanovení střední hodnoty a rozptylu daného výpočtového modelu. Jelikož se zpracovávají pouze stanovené koeficienty PCe, není tato operace výpočetně náročná.

#### Citlivostní analýza

Výsledkem citlivostní analýzy jsou Sobolovy indexy prvního řádu a totální Sobolovy indexy, tak jak jsou popsány v kap. 3.2.2. Opět výpočet probíhá pouze s koeficienty, práce s nimi tedy není nijak výpočetně náročná a není potřeba provádět žádné další simulace. Jedná se o nesmírnou výhodu PCe a aktuálně je tento přístup považován za nejefektivnější možnost výpočtu citlivostní analýzy ve formě Sobolových indexů.

#### Využití PCe

Využití sestaveného PCe představuje nahrazení výpočtového modelu (např. MKP) aproximační funkcí. Následně lze provést jakoukoli spolehlivostní analýzu v mnohem kratším čase a tedy efektivněji. Aktuálně je SW přizpůsoben spolupráci se SW FReET, nicméně v dohledné době bude možné funkci exportovat jako DLL (dynamicky připojená knihovna) a pracovat tak v jakémkoli SW nástroji.



### 4.2.4 Benchmark

V této podkapitole bude otestován vytvořený algoritmus (SW nástroj) na několika příkladech dokazujících správnou implementaci popsaných teoretických poznatků. Nejprve je vždy vytvořen PCe na základě vygenerovaného ED a následně je zpracován dle typu výpočtu. Stochastický model, stejně jako ED je vytvořen pomocí SW FReET. Následně je exportován do vytvořeného SW nástroje a výsledky jsou v tabulce s textovým výstupem.

#### Sobolovy indexy

Nejprve je důležité ověřit správnou implementaci výpočtu Sobolových indexů, to je provedeno na jednoduchém příkladu, u kterého je možné analytické řešení, které je dostupné v literatuře [6].

Matematický model je vyjádřen polynomiální funkcí se dvěma nezávislými náhodnými vstupními veličinami  $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  v následujícím tvaru:

$$Y = X_1 + X_2 + X_2^2 + X_1X_2 + 3 \quad (4.32)$$

Maximální stupeň polynomu  $p = 2$ , ED obsahuje 20 bodů a výsledná přesnost  $Q^2 = 1$ . Níže je zobrazen textový výstup SW nástroje. Základní nastavení PCe a údaje o vygenerované množině bazových funkcí jsou zobrazeny v levém sloupci a výsledné údaje o metamodelu v pravém sloupci:

#### PCe SETTINGS:

- Maximal order of polynomial: 2
- Q-norm for hyperbolic set: 1
- Target error estimation Leave-one-out: 1
- Sparse PCe by LARS: True
- Order-adaptive PCe: False
- Full size of polynomial chaos basis: 6
- Size of sparse hyperbolic basis: 6
- Size of experimental design: 20
- Size of sparse LAR basis: 5

#### RESPONSE SURFACE:

- Mean value: 4,0000
- Variance value: 5,0000
- Coefficient of determination R: 1
- Leave-one-out error Q: 1
- Total Sobol' indices
- Variable 1 = 0,4000
- Variable 2 = 0,7999
- First Sobol' indices
- Variable 1 = 0,2000
- Variable 2 = 0,5999

Jelikož je výpočtový model ve formě polynomu, dosáhli jsme 100% přesnosti metamodelu  $Q^2 = 1$ , k tomu byl využit algoritmus LAR, který identifikoval nutných 5 členů PCe. Sobolovy indexy jsou naprosto identické s analytickým řešením (po zaokrouhlení). Můžeme tedy prohlásit, že algoritmus pro výpočet Sobolových indexů je korektně implementovaný a lze ho využít i pro složitější případy.

### Prostě podepřený nosník

Druhým analytickým případem pro ověření funkčnosti SW nástroje je prostě podepřený nosník s rovnoměrným zatížením po celé délce dle Obr. 4.8 na konci podkapitoly. Výpočtový model obsahuje 5 nezávislých náhodných vstupních veličin s lognormálním rozdělením (LN) a charakteristikami dle tabulky 4.1.

Tab. 4.1: Stochastický model prostého nosníku

Veličina	Stř. hodnota	Směrodat. odch.	CoV
$b$ (LN)	0.15 m	0.075 m	5 %
$h$ (LN)	0.3 m	0.015 m	5 %
$E$ (LN)	30000 Mpa	4500 Mpa	15 %
$q$ (LN)	10 kN/m	2 kN/m	20 %
$L$ (LN)	5 m	0.05 m	1 %

Samotná funkce průhybu uprostřed rozpětí prostého nosníku je poté následující:

$$v_{(L/2)} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.33)$$

Výstup SW nástroje v textové podobě jako v předchozím příkladu:

PCe SETTINGS:

- Maximal order of polynomial: 4
- Q-norm for hyperbolic set: 1
- Target error estimation Leave-one-out : 1
- Sparse PCe by LARS : True
- Order-adaptive PCe : False
- Full size of polynomial chaos basis:126
- Size of sparse hyperbolic basis: 126
- Size of experimental design: 100
- Size of sparse LAR basis: 98

RESPONSE SURFACE:

- Mean value: 8,3665
- Variance value: 6,4293
- Coeff. of determination R: 0,9999
- Leave-one-out error Q: 0,9999
- Total Sobol' indices
- b = 0,0292
- h = 0,2630
- L = 0,0193
- E = 0,2623
- q = 0,4563
- First Sobol' indices
- b = 0,0269
- h = 0,2461
- L = 0,0175
- E = 0,2453
- p = 0,4341

V tomto případě již není možné docílit  $Q^2 = 1$ , nicméně dle výsledků jsme dosáhli velmi dobré aproximace při vstupním ED o velikosti 100 bodů.

Cílem tohoto příkladu je ověřit tvar sestavené funkce PCe a tedy odpovídající momenty matematické funkce. Referenční hodnoty jsou získány pomocí SW nástroje FReET, metodou LHS s počtem vzorků  $10^4$ . Výsledky jsou shrnuty v tab. 4.2.

Tab. 4.2: Porovnání momentů PCe a LHS na prostém nosníku

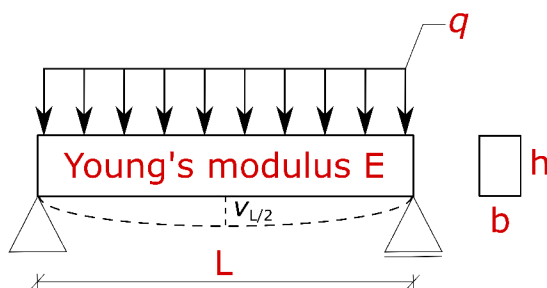
Charakteristika	PCe (ED=100)	LHS (reference)
Stř. hodnota	8.3666	8.3687
Rozptyl	6.4294	6.4468

Z tabulky je patrná velmi dobrá shoda výsledků momentové analýzy. Dále byla provedena plně-pravděpodobnostní analýza simulační technikou LHS opět s počtem vzorků  $10^4$  pro různé limitní hodnoty průhybu, hledanou veličinou byla pravděpodobnost poruchy  $p_f$  pro funkci poruchy  $g(X) = v_{limit} - v_{l/2}$ , která byla stanovena SW FReET pomocí simulačních technik. V tomto případě tedy šlo o využití PCe jako metamodelu, na kterém byl proveden výpočet místo původní funkce. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

Tab. 4.3: Porovnání  $p_f$  PCe a LHS na prostém nosníku

Limitní hodnota	PCe (ED=100)	LHS (reference)
15 mm	1.716E-2	1.719E-2
20 mm	1.017E-3	1.015E-3
25 mm	6.25E-5	6.18E-5
30 mm	4.3E-6	4.2E-6

Zhodnocením výsledků lze konstatovat, že implementace PCe do softwarového nástroje je bezchybná a je možné jej využít pro praktické aplikace. Byla ověřena funkčnost momentové analýzy, citlivostní analýzy i spolupráce se SW FReET.



Obr. 4.8: Schéma prostého nosníku

## 5 TECHNIKY TYPU MONTE CARLO

Simulační techniky typu Monte Carlo jsou založeny na principu opakovaného numerického řešení matematického modelu  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ , vždy s jiným vektorem vstupních náhodných veličin  $\mathbf{X}$ . Stochastická úloha je tím tedy převedena na sérii deterministických výpočtů. Náhodné veličiny jsou generované dle svého teoretického pravděpodobnostního rozdělení s využitím vygenerovaných (pseudo)náhodných čísel na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

První popsanou aplikací simulační techniky je nejspíše tzv. problém Buffonovy jehly z roku 1777. Francouzský matematik Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon se snažil odhadnout hodnotu čísla  $\pi$  náhodným vrháním jehly na linkovaný papír a sledováním, zda po dopadu protíná linku. Po statistickém vyhodnocení výsledků hodů obdržel odhad  $\pi$ . Samozřejmě, se zvyšujícím se množstvím opakování pokusů roste i přesnost odhadu. V dnešní době již nepoužíváme fyzikální generátory náhodných čísel (hrací kostka), ale tzv. generátory pseudonáhodných čísel ve formě SW algoritmu. Pojem pseudonáhodný představuje skutečnost, že čísla jsou generována dle určitého algoritmu a po několika milionech výpočtů se opakují.

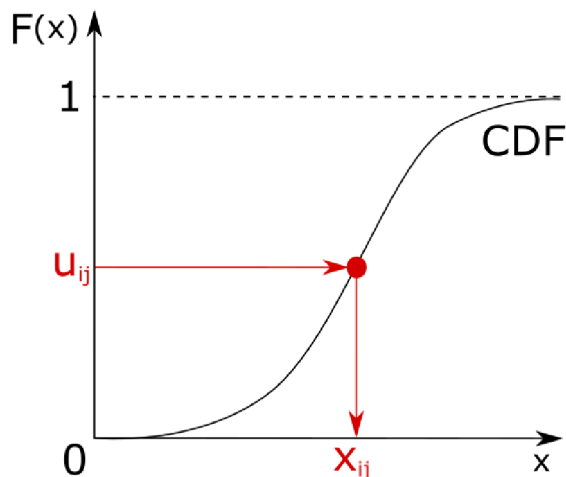
Systematické využití simulačních metod pomocí počítače bylo provedeno až kolem roku 1930, kdy je Enrico Fermi využil pro výpočet vlastnosti neutronu. Stejný postup byl poté aplikován také v projektu Manhattan při vývoji atomové bomby.

Na konci 70. let se simulační techniky začaly více rozvíjet společně s rozvojem výpočetní techniky. Vznikla metoda Latin Hypercube Sampling s několika modifikacemi. Vybrané simulační techniky typu Monte Carlo budou popsány v následujících podkapitolách.

### 5.1 Klasická metoda Monte Carlo

Původní podoba simulační metody Monte Carlo (MC) představuje velmi názorný proces, který určitým způsobem simuluje reálné chování modelu. Klasická metoda Monte Carlo generuje vektor vstupních náhodných veličin v každém kroku zcela náhodně pomocí generátoru pseudonáhodných čísel. Jednotlivé kroky výpočtu jsou následující:

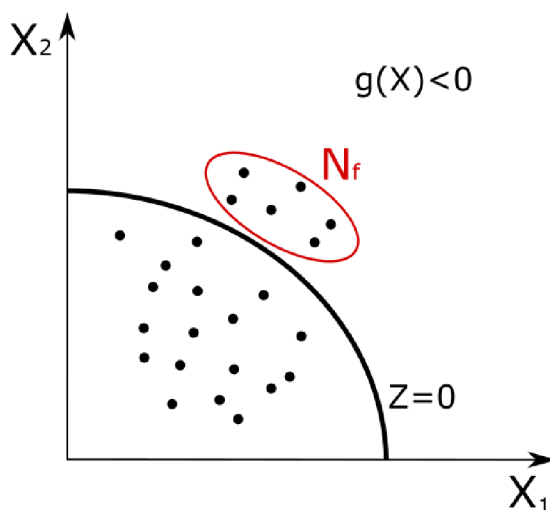
- generace  $j$  realizací  $i$ -té náhodné veličiny  $X_i$  dle vztahu  $x_{i,j} = F_i^{-1}(u_{i,j})$ , kde  $F^{-1}(X)$  označuje odpovídající inverzní distribuční funkci a  $u_{i,j}$  pseudonáhodné číslo, viz Obr. 5.1
- opakovaný výpočet matematického modelu  $Y_j = \mathcal{M}(\mathbf{X}_j)$  s  $j$  různými vektory vstupních náhodných veličin
- statistické zpracování výsledků náhodné veličiny  $Y$  a odhad střední hodnoty, rozptyl a vyšších statistických momentů



Obr. 5.1: Generace jedné realizace metodou Monte Carlo

Velmi častá aplikace metody Monte Carlo v oboru spolehlivosti stavebních konstrukcí je pro výpočet pravděpodobnosti poruchy [38]. Matematický model v tomto případě představuje funkce poruchy  $g(\mathbf{X})$  a pomocí jejího vyčíslení získáváme rezervu spolehlivosti  $Z$  definovanou v kap. 1. V případě že  $z_j \leq 0$  nastává porucha konstrukce, celkový počet takových případů označme  $N_f$  a počet provedených simulací  $N$ , tento princip je zobrazen na 2D příkladu na Obr. 5.2. Poté pravděpodobnost poruchy lze odhadnout následovně:

$$p_f = \frac{N_f}{N} \quad (5.1)$$

Obr. 5.2: Výpočet  $p_f$  pro 2D případ

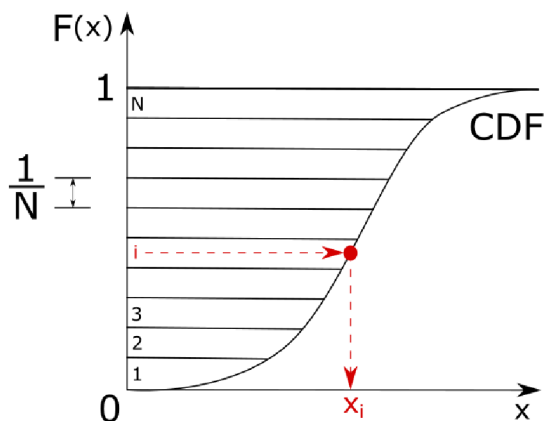
Z popsaného principu vyplývá závislost přesnosti odhadu pravděpodobnosti poruchy na celkovém počtu simulací  $N$  a také na řádu odhadované pravděpodobnosti, abychom získali dostatečný počet realizací v oblasti poruchy. Zmíněnou závislost popisuje následující vztah pro výpočet variačního koeficientu pravděpodobnosti poruchy:

$$v_{p_f} = \frac{1}{\sqrt{N p_f}} \quad (5.2)$$

Je zřejmé, že pro velmi malé pravděpodobnosti poruchy, jako v případě stavebních konstrukcí, je nutný obrovský počet simulací, z tohoto důvodu byly vyvinuty další metody typu Monte Carlo jako například Latin Hypercube Sampling.

## 5.2 Latin Hypercube Sampling

Metody Latin Hypercube Sampling (LHS) jsou modifikované simulační techniky Monte Carlo, kdy  $N$  jednotlivých realizací je vybíráno z  $N$  intervalů definičního oboru distribuční funkce (CDF)  $F(X)$  každé náhodné veličiny  $X_i$ . Každý takový interval má stejnou pravděpodobnost  $1/N$ . Z každého takového intervalu je vybrána právě jedna realizace náhodné proměnné, tím LHS zajišťuje rovnoměrné pokrytí prostoru náhodných proměnných s mnohem menším počtem realizací ve srovnání s klasickou metodou MC. Princip LHS je zobrazen na Obr. 5.3.



Obr. 5.3: Metoda Latin Hypercube Sampling

Podle způsobu vybírání realizace uvnitř intervalu existuje několik variant LHS. LHS-Medián volí pro realizaci střed intervalu, což vede k problémům s generací realizací z okrajových částí funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF), které zásadně ovlivňují šikmost a špičatost rozdělení náhodných veličin. LHS-Random dle názvu

vybírání realizací uvnitř intervalu pomocí pseudonáhodného čísla. Poslední často využívanou variantou je LHS-Mean, která volí pro realizaci střední hodnotu intervalu. Poslední zmíněná metoda je v praktických úlohách nejvyužívanější díky eliminaci nevýhody LHS-Medián.

Po vygenerování jednotlivých realizací všech náhodných veličin je třeba sestavit vektory vstupních náhodných veličin ( $X_j$ ), k tomu se využívá tzv. tabulka náhodných permutací. Řádky tabulky odpovídají jednotlivým simulacím a každý sloupec reprezentuje vstupní náhodnou veličinu. Ilustrativní příklad lze vidět na Tab. 5.1, která je vytvořena dle [38].

Tab. 5.1: Tabulka náhodných permutací

Náhodné veličiny					
1	2	3	4	5	6
9	1	10	4	1	1
4	5	3	7	10	2
8	3	9	10	8	5
6	2	8	9	3	10
10	4	4	8	9	6
7	10	5	1	2	4
5	9	6	5	4	7
2	6	7	2	6	3
1	7	1	6	7	8
3	8	2	3	8	9

Simulační techniky typu Monte Carlo jsou rozsáhlou vědní disciplínou a různé jejich modifikace lze nalézt v další odborné literatuře. Výše popsané metody jsou implementovány v softwarovém nástroji FReET a byly využity při zpracování této diplomové práce.

## 6 POUŽITÝ SOFTWARE

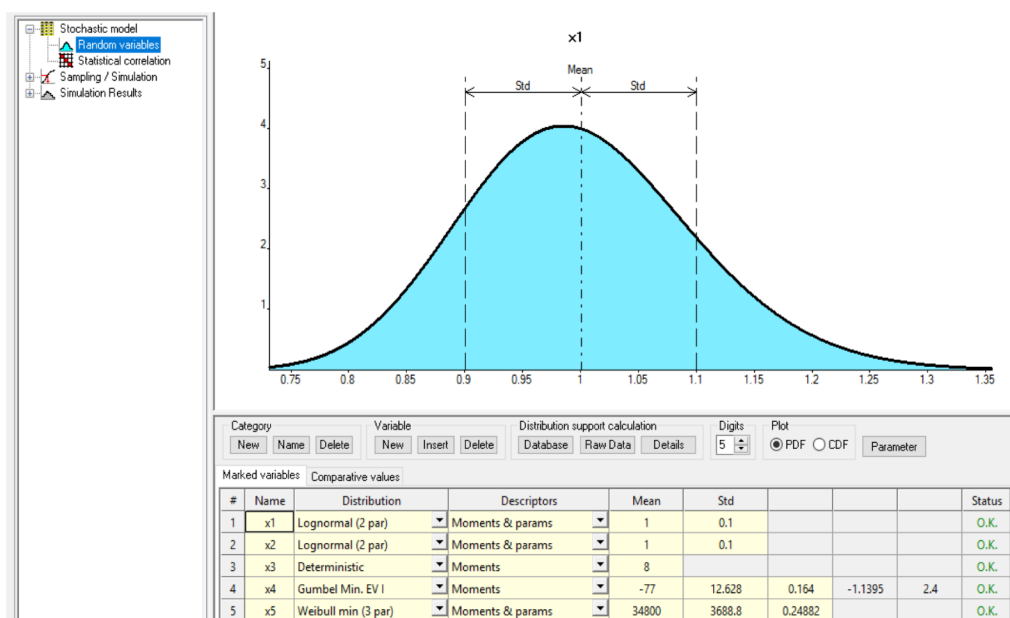
### 6.1 FReET

FReET (**F**easible **R**eliability **E**ngineering **T**ool) je softwarový nástroj pro statistickou, pravděpodobnostní a citlivostní analýzu vyvíjený na Ústavu stavební mechaniky Fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně [22]. FReET představuje víceúčelový program sdružující spoustu technik z oboru spolehlivosti a matematické teorie pravděpodobnosti.

Tento software nachází uplatnění i při praktických aplikacích ve stavebnictví, díky možnosti propojení s MKP programem ATENA. Pro takové propojení je navržen softwarový nástroj SARA – **S**tructural **A**nalysis and **R**eliability **A**ssessment.

SARA nám umožňuje předat stochastický model konstrukce, řešený dále programem ATENA pomocí metody konečných prvků s implementovanými principy nelineární lomové mechaniky. Stochastický přístup je velice vhodný právě při řešení cementových kompozitů, jelikož naměřené hodnoty vykazují vysokou proměnlivost.

V diplomové práci je FReET využit nejen pro propojení s MKP programem ATENA a provedení několika desítek výpočtů, ale také s nově vytvořeným nástrojem pro tvorbu metamodelu ve formě PCe, díky tomu bylo možné ověřit jeho kvalitu bez nutnosti implementace dalších funkcí.



Obr. 6.1: Prostředí SW FReET



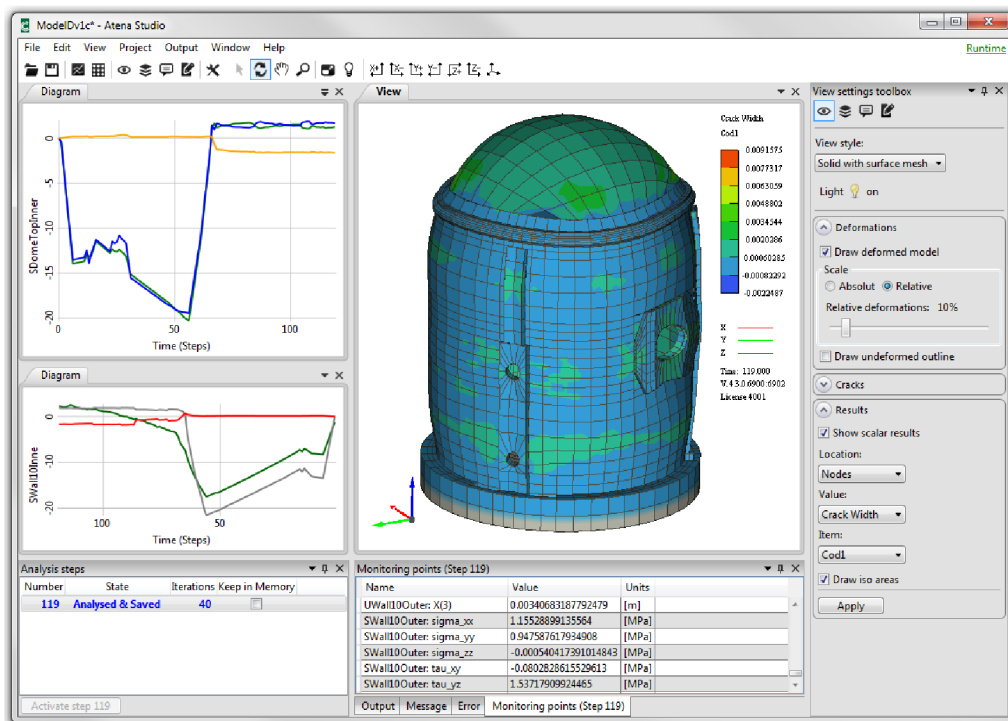
## 6.2 ATENA

Software ATENA vytvořený firmou Červenka Consulting [10] představuje komplexní řešení inženýrských úloh pomocí metody konečných prvků. Zvláště pak je velmi vhodný pro analýzu železobetonových konstrukcí díky implementaci velmi detailních materiálových modelů, které zahrnují i vznik a šíření trhlin dle zásad nelineární lomové mechaniky.

Nesmírnou výhodou programu je jeho možné propojení se SW FReET a následné provedení spolehlivostní analýzy. V průběhu diplomové práce byl SW ATENA takto využit pro řešení nelineární analýzy střešních předpjatých nosníků.

Aktuálně existuje několik produktů ATENA, v diplomové práci byla využita aplikace ATENA Science, která jako preprocessor využívá SW třetí strany GiD. Následně vytvoří vstupní soubor, který je předán řešiči. Výhodou tohoto přístupu je možnost úpravy vstupního souboru a provést tak znáhodnění modelu, tímto postupem pracuje také SW SARA.

Pomocí programu lze řešit statickou i dynamickou analýzu a navíc i problematiku požárního zatížení konstrukce. Navíc má ATENA Science moderní a přehledný post-processor, viz Obr. 6.2. Získané výsledky lze tedy velmi jednoduše vizualizovat a prezentovat.



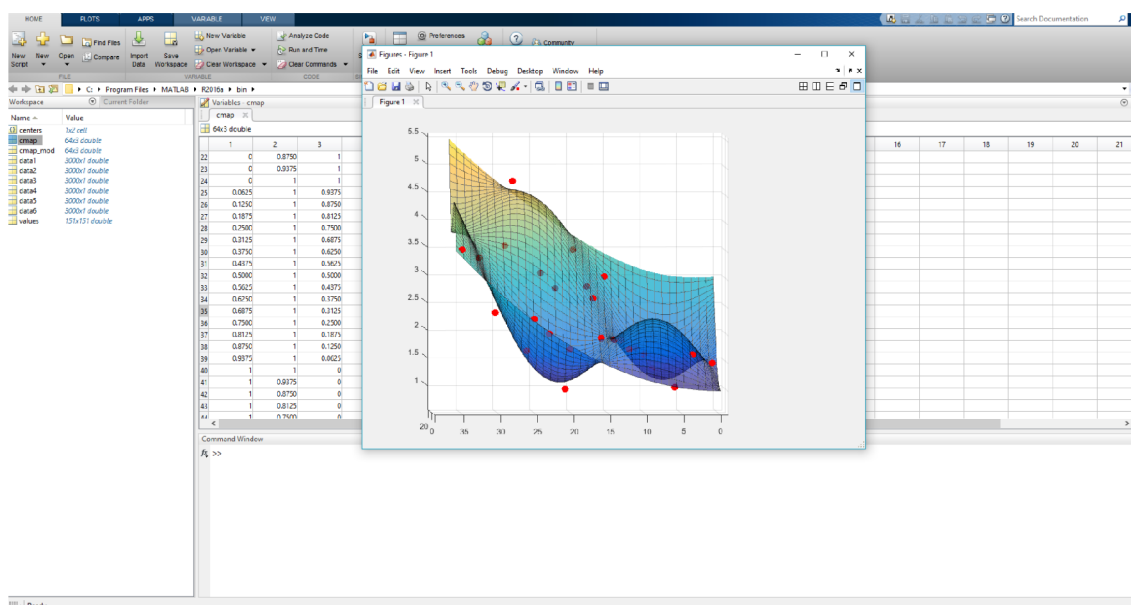
Obr. 6.2: Prostředí SW ATENA [převzato z [www.cervenka.cz](http://www.cervenka.cz)]

## 6.3 MATLAB

Interaktivní programové prostředí MATLAB představuje skriptovací programovací jazyk vytvořený pro technické a vědecké účely. Samotný název vychází ze slov **MAT**rix **LAB**oratory, tedy maticová laboratoř, což odpovídá jednomu ze základních rysů jazyka – základní datovou strukturou je matice.

Díky tomu, že není nutné vytvářet vlastní funkce pro běžné matematické úkony, hodí se prostředí velmi dobře pro vytváření a testování nových algoritmů, popřípadě i tvoření aplikací. MATLAB má rozsáhlou uživatelskou komunitu po celém světě a je tedy možné nalézt spoustu užitečných algoritmů. Další velmi využívanou funkcí prostředí MATLAB je tvorba 2D i 3D grafů.

V diplomové práci byl MATLAB využit pro testování jednotlivých funkcí nově vytvořeného SW a pro vizualizaci některých výsledků. Samotné prostředí lze vidět na Obr. 6.3.

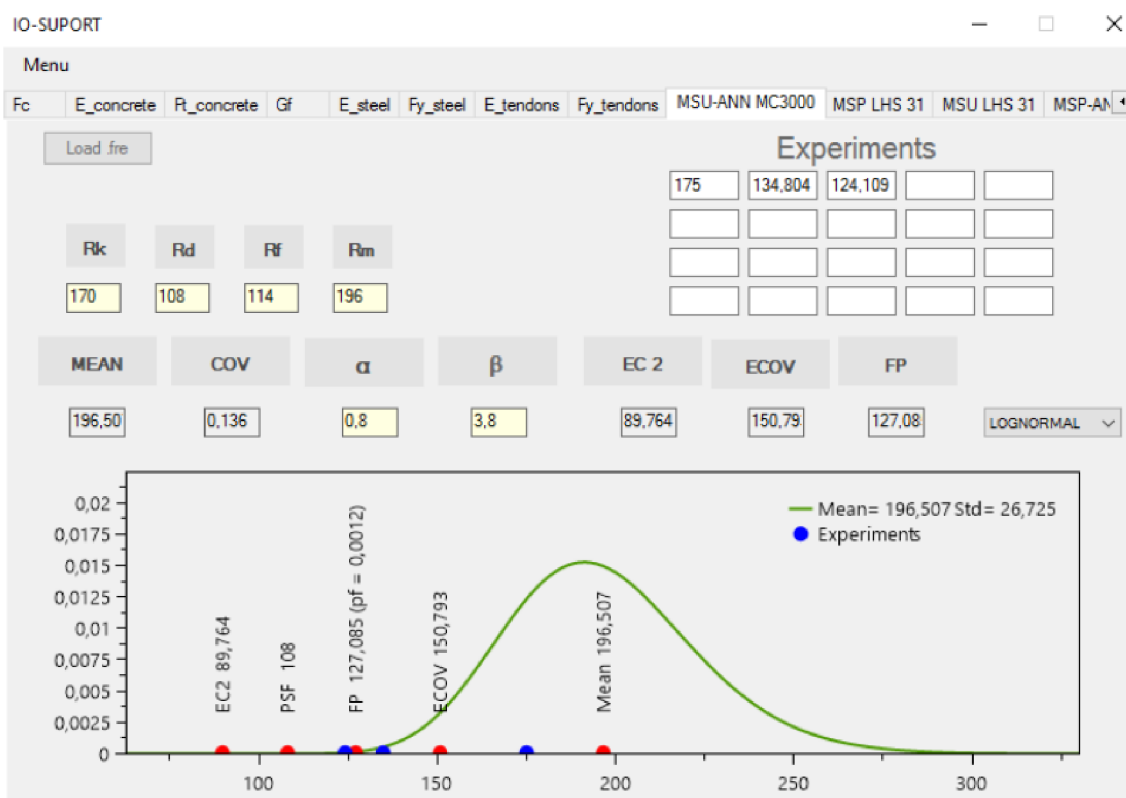


Obr. 6.3: Prostředí MATLAB

## 6.4 IO-SUPPORT

IO-SUPPORT představuje podpůrný program pro spolehlivostní výpočty, zvláště pak polo-pravděpodobnostní metody. SW nástroj je rozdělen na dvě části, první se zabývá vstupními daty stochastického modelu tzn. stanovení charakteristických a návrhových hodnot a ve druhé části lze stanovit návrhovou hodnotu únosnosti a vytvořit její vizualizaci. IO-SUPPORT byl vytvořen jako součást bakalářské práce autora, více informací lze tedy nalézt přímo v bakalářské práci nebo webových stránkách SW nástroje [14].

V diplomové práci byly využity obě části IO-SUPPORT. Nejprve byly stanoveny charakteristické a návrhové hodnoty vstupních materiálových charakteristik v záložce Inputs a následně výsledky MKP simulací zpracovány v záložce Response, kterou lze vidět na Obr. 6.4.



Obr. 6.4: Prostředí SW IO-SUPPORT

## 7 PRAKTICKÁ APLIKACE

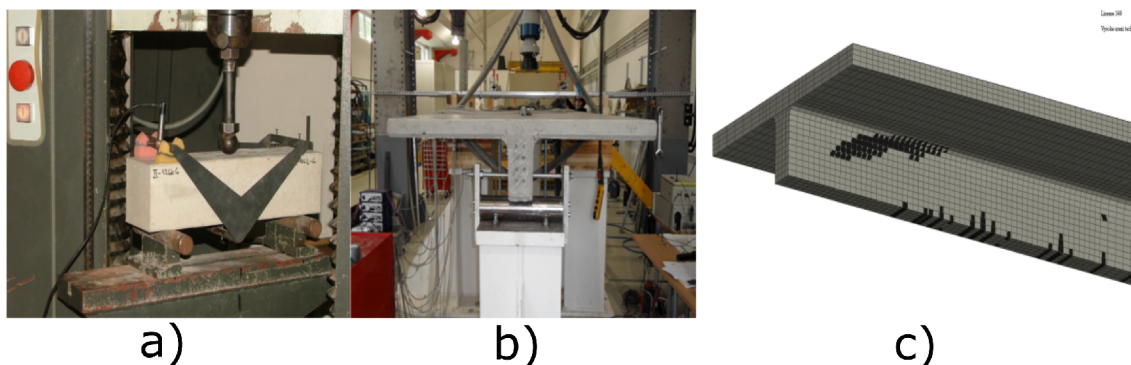
Cílem diplomové práce byla aplikace zmíněných přístupů na reálný problém, konkrétně střešní železobetonový předpjatý nosník, který je předmětem rozsáhlého výzkumu. Na projektu spolupracovaly FAST VUT v Brně a IKI BOKU University Wien za podpory rakouské firmy Franz Oberndorfer GmbH & Co KG. Cílem výzkumu bylo co nejpřesnější namodelování smykového porušení střešního nosníku a získání informací o jeho působení.

První částí projektu bylo rozsáhlé testování betonových vzorků provedeného na FAST VUT [23], na jehož základě vznikla databáze lomově-mechanických parametrů [24, 27]. Databáze implementovaná do softwaru FReET byla následně využita při tvorbě stochastického modelu střešního nosníku.

Ve druhé části byly testovány již reálné střešní nosníky. Výsledky zkoušek sloužily jako data pro ověření vytvořeného nelineárního modelu konstrukce v konečné prvkostním softwaru ATENA.

Posledním krokem bylo již samotné stochastické matematické modelování nosníku pomocí metod první a druhé úrovně. Během procesu bylo publikováno několik odborných článků, viz [32, 25]. A vytvořen autorský software IO-SUPPORT [14], blíže popsáný v bakalářské práci autora. V následujících kapitolách je uveden souhrn nejdůležitějších zjištění.

Je vhodné dodat, že zmíněný nosník je zmenšený v poměru 1:6 vzhledem k originální konstrukci. Zjištění a zkušenosti získané v průběhu výzkumu budou v následujících měsících aplikovány na reálný nosník. Následně budou stejné postupy aplikovány i na další předpjaté nosníky jiných průřezů z produkce firmy Franz Oberndorfer GmbH & Co KG. Na Obr. 7.1 jsou znázorněny ilustrativně 3 prvky výše popsaneho komplexního přístupu celého výzkumu.

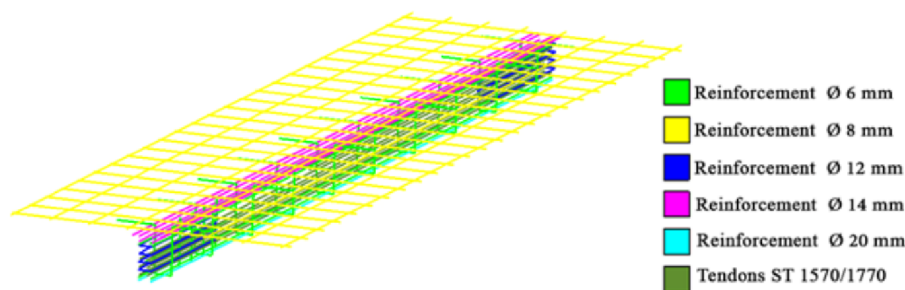


Obr. 7.1: a) lomově-mechanické experimenty; b) experiment nosníku v měřítku 1:6; c) matematický MKP model - trhliny při smykovém porušení

## 7.1 MKP model

Výpočtový model destruktivní zkoušky zmenšeného předpjatého betonového T nosníku byl vytvořen na ÚSTM FAST VUT v Brně Ing. Slowikem v programu ATENA Science. V této podkapitole bude tedy pouze popis finálního modelu po vyladění, více detailů o postupu modelování a dalších detailech lze nalézt v odborném článku [31].

Geometrie zmenšených nosníků byla modelována dle poskytnuté výkresové dokumentace: délka 5 m, výška 0,3 m, šířka příruby 1,5 m a její tloušťka 0,07 m. Stojina je široká 0,14 m a vysoká 0,23 m. Dále byla namodelována výztuž nosníku včetně předpínacích kabelů, viz Obr.7.2.



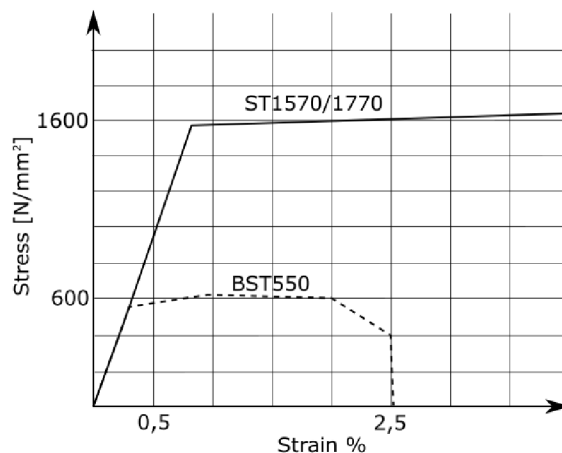
Obr. 7.2: Schéma namodelované výztuže

Materiálový model pro beton byl zvolen jako CC3DNonLinCementitious2, který vykazuje velmi dobré chování pro úlohy nelineární lomové mechaniky. Betonářská výztuž BST550 je modelována pomocí 1D prvků se zvoleným materiálem 1D Reinforcement, definovaný multilineárním diagramem napětí-deformace. Předpínací kabely ST1570/1770 jsou modelovány obdobně, jen diagram napětí-deformace je bilineární. Schéma křivek je zobrazeno na Obr. 7.3.

## 7.2 Stochastický model

Následně byl pomocí softwaru FReET vytvořen stochastický model, ve kterém jsou využity informace z databáze lomově-mechanických parametrů betonu vytvořené na základě laboratorních zkoušek. Nicméně po závěrech z bakalářské práce byla navýšena variabilita náhodných veličin betonu s ohledem na laboratorní podmínky testovaných vzorků. Statistické parametry oceli jsou převzaty z JCSS [18]. Charakteristiky jednotlivých náhodných veličin jsou uvedeny v Tab. 7.1 a Tab. 7.2.

Kromě parametrů betonu a oceli bylo nutné stanovit také parametry předpínacích kabelů. Jelikož tato data nebyla známa, musely být použity hodnoty z literatury.



Obr. 7.3: Pracovní diagram výztuže

Tab. 7.1: Náhodné veličiny betonu C50/60

Prameter	Mean	CoV [%]	PDF	Unit	Material model Coment:
$f_c$	77	16,4	GMB min EV I	[MPa]	
$f_t$	3,9	20,6	GMB max EV I	[MPa]	
$E$	34,8	20,6	WBL min (3 par)	[GPa]	3D Nonlinear Cementitious 2
$G_f$	219,8	32,8	GMB max EV I	[J · m <sup>-2</sup> ]	
Density	0,0023	4	Normal	[kton/m <sup>3</sup> ]	

Statistické parametry předpínacích kabelů byly stanoveny dle JCSS [18] a jsou zobrazeny v Tab. 7.3. Navíc je zde také uvažována i předpínací síla  $P$  jako náhodná veličina.

V průběhu testování se ukázalo, že velkou roli hraje také ztráta předpětí, která je stanovena analyticky dle JCSS [16] a aplikována ve formě zatížení teplotou. Abychom zohlednili zjednodušení výpočtu pomocí analytického vztahu, byla aplikována nejistota dle následující tabulky, kde I.L. značí nejistotu okamžitých ztrát a L.T.L. dlouhodobých ztrát.

Při sestavování stochastického modelu byla uvažována statistická závislost veličin použitého betonu C50/60 dle Tab. 7.5 a oceli BST550 dle Tab. 7.6. Korelace

Tab. 7.2: Náhodné veličiny oceli BST550

Prameter	Mean	Cov [%]	PDF	Unit	Material model Coment:
$E$	200	2	Normal	[GPa]	Multilinear diagram
$f_y$	610	4	Normal	[MPa]	

Tab. 7.3: Materiálové charakteristiky předpínacích kabelů pro stochastický model

Prameter	Mean	Cov [%]	PDF	Unit	Material model Coment:
$E$	195	2,5	Normal	[ $GPa$ ]	Bilinear diagram with hardening
$f_y$	1387,88	2	Normal	[ $MPa$ ]	
$P$	0,0835	6	Normal	[ $MN$ ]	Initial strain for reinforcement line

Tab. 7.4: Nejistota výpočtu ztrát předpětí

Prameter	Mean	Cov [%]	PDF	Unit
$I.L.$	1	10	Normal	[–]
$L.T.L.$	1	10	Normal	[–]

materiálových charakteristik předpínacích kabelů byla uvažována také dle Tab. 7.6 a nejistota výpočtu ztrát byla korelována korelačním koeficientem 0,5.

Tab. 7.5: Statistická závislost veličin betonu C50/60

	$E$	$f_t$	$f_c$	$G_f$
$E$	1	0,5	-0,8	0,5
$f_t$	0,5	1	-0,7	0,8
$f_c$	-0,8	-0,7	1	-0,6
$G_f$	0,5	0,8	-0,6	1

S využitím vytvořeného deterministického modelu byly tedy, pomocí softwarového balíku FReET/SARA, vytvořeny jednotlivé simulace, jejichž celkový počet je 31. Jelikož je naší snahou odhadnout statistické momenty smykové únosnosti, lze tento počet považovat za dostatečný.

Každá simulace obsahuje materiálové charakteristiky stanoveny pomocí softwaru FReET (simulační technika LHS-Mean). Jednotlivé simulace byly zpracovány řešičem ATENA a následně byla pro každou simulaci vyhodnocena křivka zatížení-posun. Výsledky byly statisticky zpracovány pro získání statistických momentů náhodné veličiny maximální únosnosti (vrchol křivky zatížení-posun).

### 7.3 Stanovení návrhové hodnoty únosnosti

Cílem analýzy střešního předpjatého nosníku je stanovení návrhové hodnoty únosnosti pro indexy spolehlivosti  $\beta = 3, 8$  dle metod uvedených v kap. 2 a jejich porov-

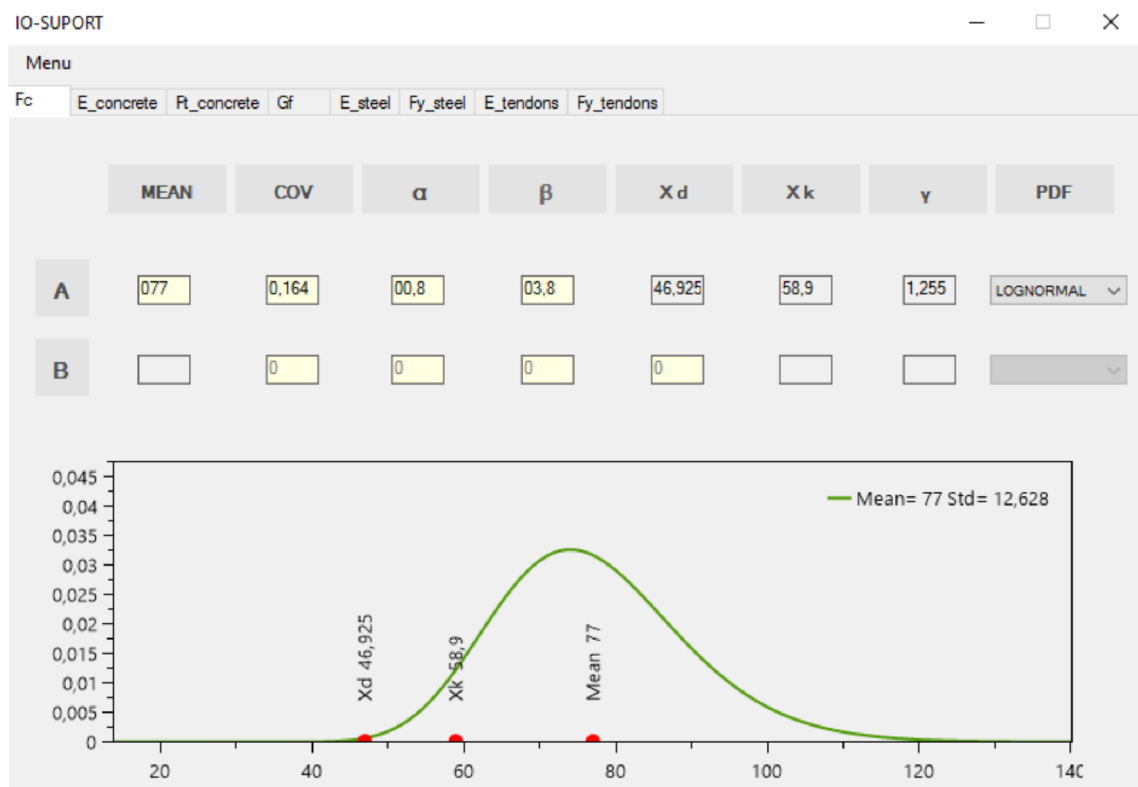
Tab. 7.6: Statistická závislost veličin oceli BST550 a předpínacích kabelů

	$E$	$f_y$
$E$	1	0,6
$f_y$	0,6	1

nání s hodnotou stanovenou pomocí simulačních technik typu Monte Carlo.

### 7.3.1 Metoda dílčích součinitelů bezpečnosti

Pro stanovení návrhové hodnoty únosnosti  $R_d$  dle metody dílčích součinitelů bezpečnosti (PSF) je nutná pouze jedna simulace MKP. Vstupní hodnoty materiálových charakteristik odpovídají návrhovým hodnotám  $x_d$ , určených na základě předpokladu lognormálního rozdělení s momenty převzatými ze stochastického modelu. Citlivostní součinitel byl stanoven na hodnotu  $\alpha = 0,8$  pro všechny vstupní veličiny. K účelu výpočtu odpovídajícího kvantilu byl využit SW IO-SUPPORT, viz Obr.7.4.



Obr. 7.4: Stanovení vstupních hodnot pomocí IO-SUPPORT

Na středních hodnotách byly ponechány nejistoty výpočtu ztrát předpětí, objemová hmotnost betonu a hodnota předpínací síly. Takto stanovené návrhové hodnoty



vstupních materiálových charakteristik jsou uvedeny v Tab. 7.7, jednotky jsou identické jako v kapitole 7.2. Index  $b$  značí výztuž BST550 a index  $t$  představuje označení pro předpínací kabely.

Tab. 7.7: Vstupní vektor materiálových charakteristik dle PSF

	$f_c$	$f_t$	$E$	$G_f$	$Density$	$E_b$	$f_{yb}$	$E_t$	$f_{yt}$	$P$
$x_d$	46,9	2,1	16519	83,17	0,0023	188	540	180	1306	0,0835

Hodnota návrhové únosnosti je stanovena jako vrchol křivky zatížení-posun (L-D křivka), která byla získána MKP analýzou SW ATENA Science, viz Obr. 7.5. Výsledná hodnota únosnosti je navíc dále redukována součinitelem modelové nejistoty  $\gamma_{Rd} = 1.06$ .

### 7.3.2 Metoda dle EN 1992-2

Pro stanovení návrhové hodnoty únosnosti  $R_d$  dle metody uvedené v EN1992-2 je opět nutná pouze jedna simulace s upravenými vstupními hodnotami a výsledek MKP analýzy je navíc redukován globálním součinitelem bezpečnosti.

Hodnoty vstupních materiálových charakteristik betonu jsou stanoveny na základě charakteristických hodnot vypočtených pomocí IO-SUPPORT za předpokladu lognormálního rozdělení jako v metodě dílčích součinitelů bezpečnosti. Navíc jsou redukovány dle kap 2.1.2.

Hodnoty ostatních vstupních materiálových charakteristik jsou ponechány na středních hodnotách, vektor vstupních veličin je v Tab.7.8.

Tab. 7.8: Vstupní vektor materiálových charakteristik dle EN1992-2

	$f_c$	$f_t$	$E$	$G_f$	$Density$	$E_b$	$f_{yb}$	$E_t$	$f_{yt}$	$P$
$x_{\bar{m}}$	49,7	2,35	19603	109,5	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835

Návrhová hodnota únosnosti je poté stanovena redukcí výsledku MKP analýzy dle vztahu 2.4. L-D křivka získaná MKP analýzou je zobrazena na Obr. 7.5.

První dvě metody byly deterministické, ke stanovení návrhové hodnoty únosnosti  $R_d$  vyžadovaly pouze jednu simulaci MKP. Dále uvedené polo-pravděpodobnostní metody budou vyžadovat větší počet simulací, ale získáme také více informací o náhodně veličině  $R$ .

### 7.3.3 Metoda ECoV dle Červenky

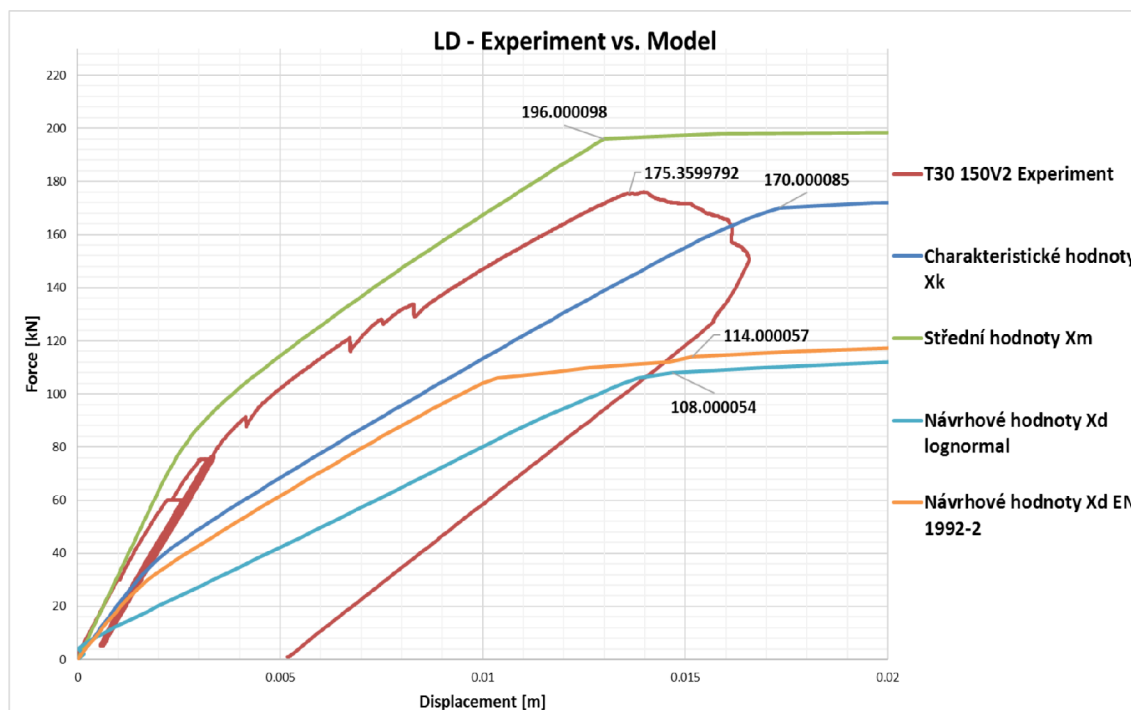
První z polo-pravěpodobnostních metod je ECoV dle Červenky. K výpočtu jsou třeba 2 simulace MKP bez ohledu na rozsah stochastického modelu, což je velmi výhodné. Opět je zaveden předpoklad lognormálního rozdělení vstupních materiálových charakteristik, ale tentokrát také samotné veličiny  $R$ .

Vstupní vektory představují charakteristické hodnoty a střední hodnoty materiálových charakteristik, oba jsou uvedeny v Tab.7.9. Opět předpínací síla  $P$  i nejistoty výpočtu ztrát předpětí byly ponechány na středních hodnotách.

Tab. 7.9: Vstupní vektor materiálových charakteristik dle ECoV

	$f_c$	$f_t$	$E$	$G_f$	$Density$	$E_b$	$f_{yb}$	$E_t$	$f_{yt}$	$P$
$x_m$	77	3,9	34800	219,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835
$x_k$	58,9	2,78	23250	129,9	0,0023	194	571	187	1343	0,0835

Následně byly provedeny dvě MKP simulace, jejichž výsledky představující vrchol L-D diagramu byly použity pro odhad variačního koeficientu a následně pro stanovení globálního součinitele bezpečnosti. Výsledné L-D křivky jsou zobrazeny na Obr. 7.5.



Obr. 7.5: L-D křivky metod 1. úrovně

### 7.3.4 Metoda ECoV dle Schlune et al.

Náročnost výpočtu následujících dvou metod je závislá na velikosti stochastického model. Aby bylo možné tuto studii provést v co nejkratším čase, byla nejprve provedena citlivostní analýza ve formě variačních koeficientů pomocí umělých neuronových sítí, viz [25].

Na základě citlivostní analýzy byly vybrány pouze 3 náhodné veličiny:  $G_f$ ,  $f_t$  a  $E$ . Ostatní veličiny z původního stochastického modelu jsou uvažovány jako deterministické reprezentovány jejich středními hodnotami.

S využitím vztahů uvedených v kap. 2.2.2 byly stanovené redukované vstupní materiálové charakteristiky  $G_f$ ,  $f_t$  a  $E$  uvedené v Tab. 7.10, ostatní byly ponechány na středních hodnotách.

Tab. 7.10: Redukce materiálových charakteristik dle ECoV Schlune

	$f_c$	$f_t$	$E$	$G_f$	$Density$	$E_b$	$f_{yb}$	$E_t$	$f_{yt}$	$P$
$f_{i\Delta}$	77	2,5	27560	106,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835

Celkem v této metodě byly tedy provedeny 3 simulace MKP analýzou, kdy v každé byla právě jedna materiálová charakteristika redukována na hodnotu z Tab.7.10 a zbytek ponechán na středních hodnotách. Navíc byla provedena jedna simulace se středními hodnotami.

Shrnutí lze vidět v Tab. 7.11, ve které každý řádek reprezentuje jednu simulaci MKP. Ovšem tento počet je získán pouze díky citlivostní analýze a následné redukci stochastického modelu.

Tab. 7.11: Vstupní vektor materiálových charakteristik dle ECoV Schlune

	$f_c$	$f_t$	$E$	$G_f$	$Density$	$E_b$	$f_{yb}$	$E_t$	$f_{yt}$	$P$
$MKP_{mean}$	77	3,9	34800	219,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835
$MKP_1$	77	2,5	34800	219,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835
$MKP_2$	77	3,9	27560	219,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835
$MKP_3$	77	3,9	34800	106,8	0,0023	200	610	195	1387,88	0,0835

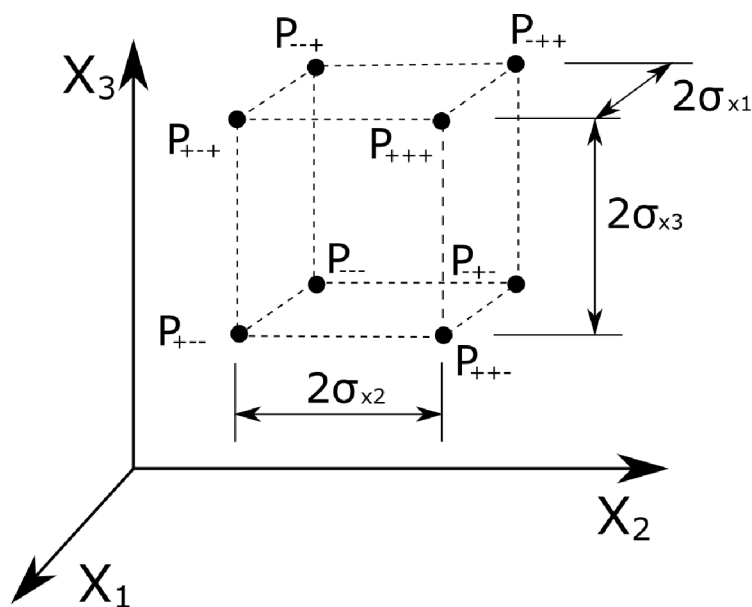
Variabilita modelu je reprezentována pomocí variačního koeficientu  $v_m = 0,1$ , variabilita geometrie je uvažována nulová. Na základě stanoveného celkového variačního koeficientu odezvy konstrukce je stanovena únosnost  $R_d$  dle vztahu 2.15.

### 7.3.5 Numerická kvadratura dle Rosenblueth

Poslední běžně užívanou návrhovou metodou 1. úrovně představuje numerická kvadratura dle Rosenblueth popsaná v kap. 2.2.3. Tato metoda je výpočetně zdaleka nejnáročnější z důvodu vysoké závislosti počtu návrhových bodů vzhledem k velikosti stochastického modelu. Opět tedy byla k redukci stochastického modelu využita citlivostní analýza ve formě variačních koeficientů zpracována pomocí umělé neuronové sítě jako v předchozím případě.

Pro stanovení návrhové hodnoty únosnosti je v tomto případě numerická kvadratura využita pro odhad střední hodnoty a rozptylu únosnosti konstrukce. Samotná návrhová hodnota je poté určena dle vztahu 2.6.

Celkem bylo provedeno 8 simulací MKP, které jsou pro 3 rozměrný prostor vrcholy kvádrů o stranách  $2\sigma_{X_i}$ , dle Obr.7.6.



Obr. 7.6: Znázornění numerické kvadratury 3D

Váhové koeficienty  $P$  odpovídající jednotlivým bodům jsou stanoveny dle indexů následovně:

$$P_{\pm\pm\pm} = \frac{1}{8}(1 \pm \rho_{12} \pm \rho_{23} \pm \rho_{31}) \quad (7.1)$$

kde  $\rho$  představují korelační koeficienty. Suma všech takto stanovených váhových koeficientů je rovna  $\sum_{i=1}^8 P_i = 1$ .

V následující tabulce jsou uvedeny vstupní materiálové charakteristiky jednotlivých simulací spolu s váhovými koeficienty. Náhodné veličiny neuvedené v tabulce jsou ponechány na středních hodnotách.

Tab. 7.12: Vstupní vektor materiálových charakteristik dle Rosenblueth

simulation	$G_f$	$F_t$	$E$	index	weight coefficient
1	291,9	4.7	43460	$P_{+++}$	0,35
2	291,9	4.7	26140	$P_{++-}$	0,1
3	291,9	3.1	43460	$P_{+--}$	0,025
4	147,7	4.7	43460	$P_{+-+}$	0,025
5	147,7	4.7	26140	$P_{-+-}$	0,025
6	147,7	3.1	43460	$P_{--+}$	0,1
7	291,9	3.1	26140	$P_{+--}$	0,025
8	147,7	3.1	26140	$P_{---}$	0,35

Výsledky získané MKP analýzou jsou následně zpracovány pro stanovení střední hodnoty a rozptylu únosnosti konstrukce dle vztahu 2.16. Odhad střední hodnoty  $E(Y)$  je poté dán vztahem:

$$E(Y) \approx \sum_{i=1}^8 P_i \cdot y_i \quad (7.2)$$

Rozptyl únosnosti  $\sigma^2$  lze následně stanovit jako:

$$\sigma^2 \approx \left[ \sum_{i=1}^8 P_i \cdot y_i^2 \right] - [E(Y)]^2 \quad (7.3)$$

## 7.4 Sestavení metamodelu ve formě PCE

Pro sestavení metamodelu ve formě PCE byl využit nově vytvořený software popsany v kapitole 4.2. Cílem je vytvořit analytickou aproximační funkci ve formě PCE, kterou bychom mohli využít dále pro momentovou a citlivostní analýzu.

Množinu tréninkových bodů (ED) tvoří 31 simulací generovaných LHS pomocí SW nástroje FReET a odpovídající výsledky získané MKP analýzou provedenou v SW ATENA Science. Dodejme, že výsledky jsou po kroku 2  $kN$ . Pro co nejlepší pokrytí návrhového prostoru byla zvolena metoda vzorkování LHS-Mean. Je vhodné dodat, že jedna simulace MKP probíhá zhruba 6 hodin, proto je využití metamodelu velmi vhodné.

Základní nastavení tvorby PCE bylo provedeno ve dvou variantách, nejprve s plnou množinou bazových funkcí  $\mathcal{A}^{M,p}$ . Dle doporučení literatury [4] je vhodné stanovit maximální stupeň použitého polynomu  $p = 3 - 5$ , pro tento konkrétní příklad byl zvolen jako  $p = 3$ . Množina  $\mathcal{A}^{M,p}$  obsahuje v tomto případě  $P = 455$  členů. Abychom mohli provést regresní výpočet koeficientů, je nutné, aby ED obsahoval minimálně tolik bodů jako počet členů  $P = 455$ . Není tedy možné tímto postupem sestavit PCE, to bylo také původní motivací k sestavení adaptivního algoritmu tak, jak je popsán v kap. 4.2.2.

V aplikaci byl využit algoritmus LAR a vzhledem k nízkému maximálnímu stupni polynomu nebyl použit adaptivní algoritmus pro jeho postupné zvyšování. V tomto případě nejvhodnější množina  $\mathcal{A}^{M,p}$  pro daný ED obsahuje pouze 9 členů. To znamená, že některé veličiny do výpočtu vůbec nevstupují, což znamená jistou aproximační chybu. Více detailů o využitých členech bude zřejmé z citlivostní analýzy. Pro lepší výsledek by bylo nutné navýšit počet trénovacích/učících bodů.

První využití PCE metamodelu je k odhadu střední hodnoty a směrodatné odchylky únosnosti nosníku, to lze provést jednoduchým post-processingem tak, jak je popsáno v kap. 4.2.3. Pro porovnání jsou v Tab.7.13 uvedeny hodnoty získané referenční analýzou metodou LHS-Mean, jak byla popsána výše. Jak lze vidět z porovnání, metamodel dosáhl velmi podobných výsledků, které jsou v tabulce zaokrouhleny na celé  $kN$ . Vzhledem k malému počtu simulací LHS budou charakteristiky stanoveny pomocí PCE využity jako referenční hodnoty k porovnání s návrhovými metodami 1. úrovně.

Tab. 7.13: Porovnání momentů stanovených PCE a LHS na praktické úloze

Charakteristika	PCE	LHS (reference)
Stř. hodnota [ $kN$ ]	196	198
Směrodat. odchylka [ $kN$ ]	25	26

Následuje textový výpis SW nástroje, ve kterém lze zjistit všechny potřebné údaje o vytvořeném metamodelu. Sobolovy indexy zde zobrazeny nejsou, budou rozebrány zvláště v kap. 7.6.

#### PCe SETTINGS:

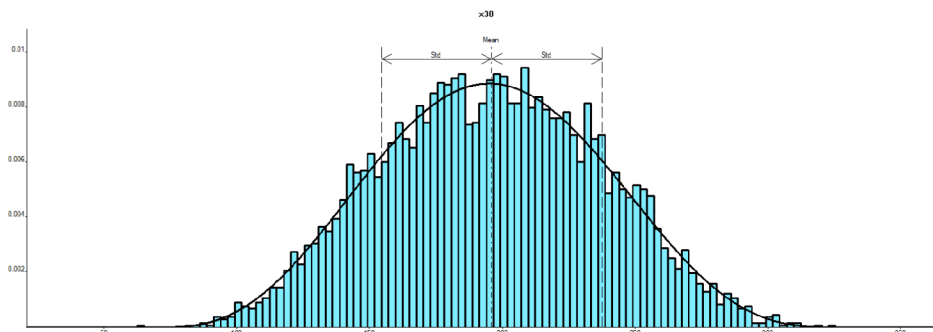
- Maximal order of polynomial: 3
- Q-norm for hyperbolic set: 1
- Target error estimation Leave-one-out: 0,95
- Sparse PCe by LARS: True
- Order-adaptive PCe: False
  
- Full size of polynomial chaos basis: 455
- Size of sparse hyperbolic basis: 455
- Size of experimental design: 31
- Size of sparse LAR basis: 9

#### SURROGATE MODEL:

- Mean value: 195,8303
- Variance value: 699,8746
- Coefficient of determination R: 0,9630
- Leave-one-out error Q: 0,9093

Jak lze vidět, kvalita metamodelu dle křížové validace je 91%. Což není požadovaných 95% ale pro účely odhadu momentů a citlivostní analýzu je to postačující. Pokud bychom zvyšovali počet básových funkcí, objevuje se fenomén přefitování, kdy koeficient  $R^2$  roste a blíží se jedné ale  $Q^2$  prudce klesá.

PCe byl využit pro výpočet 5000 simulací vygenerovaných LHS-Mean. Výsledný tvar rozdělení pravděpodobnosti únosnosti nosníku se blíží normálnímu rozdělení, což lze vidět na Obr. 7.7. Je zajímavé dodat, že výpočet proběhl v řádech minut.



Obr. 7.7: Histogram mezního stavu únosnosti získaný pomocí PCE

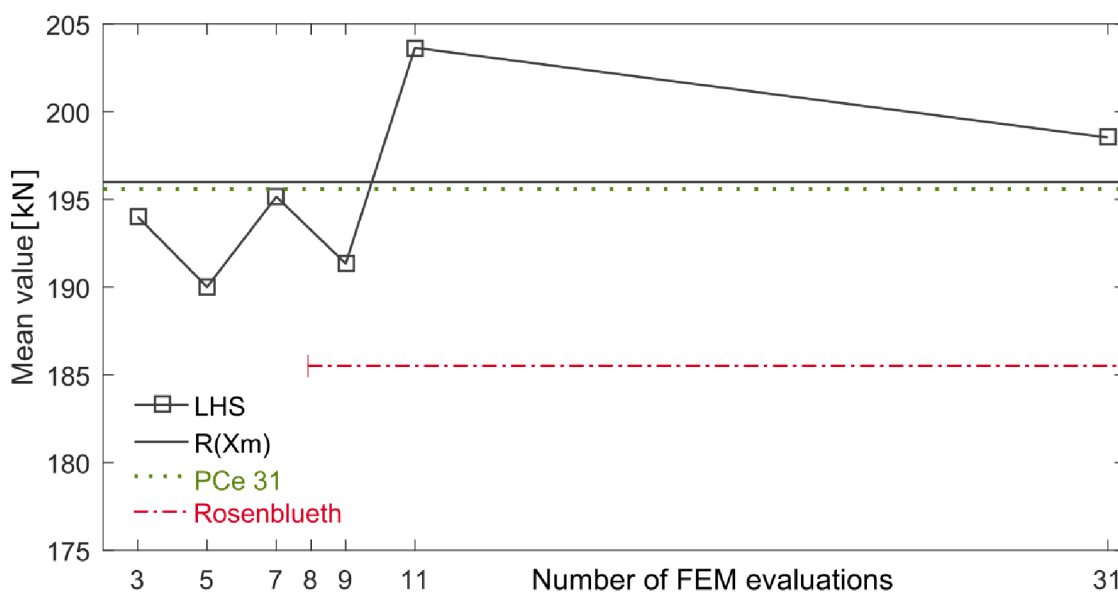
## 7.5 Porovnání návrhových hodnot únosnosti

Cílem diplomové práce je stanovení návrhových hodnot únosnosti střešního předpjatého nosníku pomocí polo-pravděpodobnostních metod a jejich srovnání.

Jelikož polo-pravděpodobnostní metody jsou závislé na korektním odhadu střední hodnoty a variačním koeficientu, nejprve je uvedena studie, která porovnává právě odhady těchto dvou veličin vzhledem k počtu nutných simulací.

Navíc je pro porovnání uveden také odhad pomocí metody LHS-Mean s různým počtem simulací.

Na Obr. 7.8 je zobrazen vývoj střední hodnoty v závislosti na počtu potřebných simulací a s tím spjatou výpočetní náročností.



Obr. 7.8: Odhad střední hodnoty dle jednotlivých metod

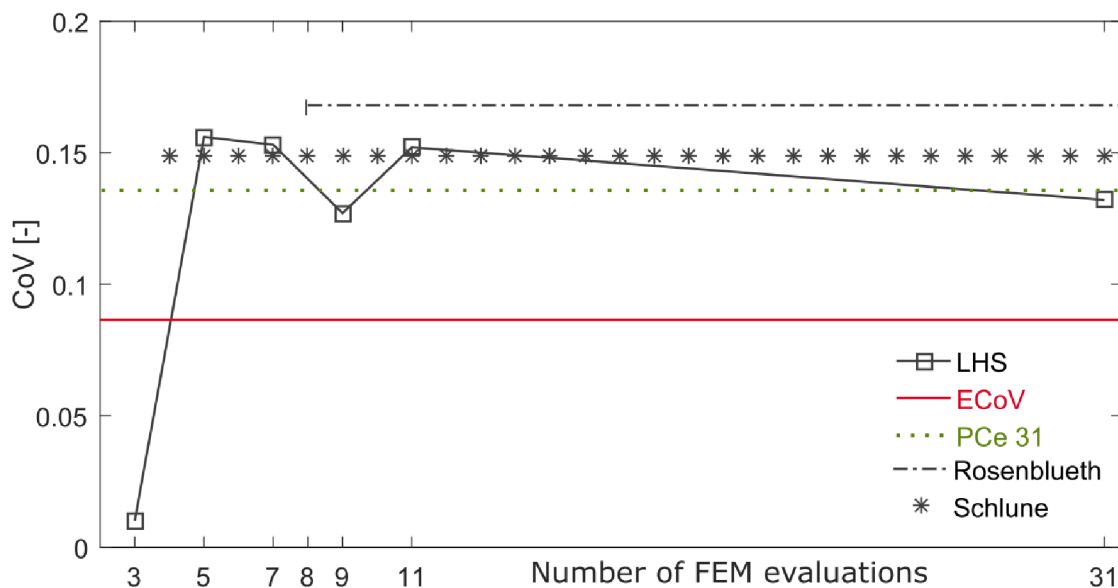
Jako referenční hodnota byla stanovena střední hodnota získaná pomocí meta-modelu ve formě PCe dle kap. 7.4, nicméně tato hodnota také odpovídá metodě LHS se 31 simulacemi dle kap. 7.2.

Důležitým závěrem je špatný odhad numerické kvadratury dle Rosenbluetha, který by se dal pravděpodobně odstranit zvýšením počtu návrhových bodů, s čím by se ale také zvyšovala výpočetní náročnost.

Velmi zajímavý je výsledek simulace se středními hodnotami vstupních náhodných veličin. Ukázalo se tedy, že předpoklad ECoV metod o rovnosti výsledku simulace se středními hodnotami a střední hodnoty odezvy je v tomto případě správný.

Následující Obr. 7.9 zobrazuje stejným způsobem vývoj variačního koeficientu odezvy konstrukce  $v_R$  dle jednotlivých metod.



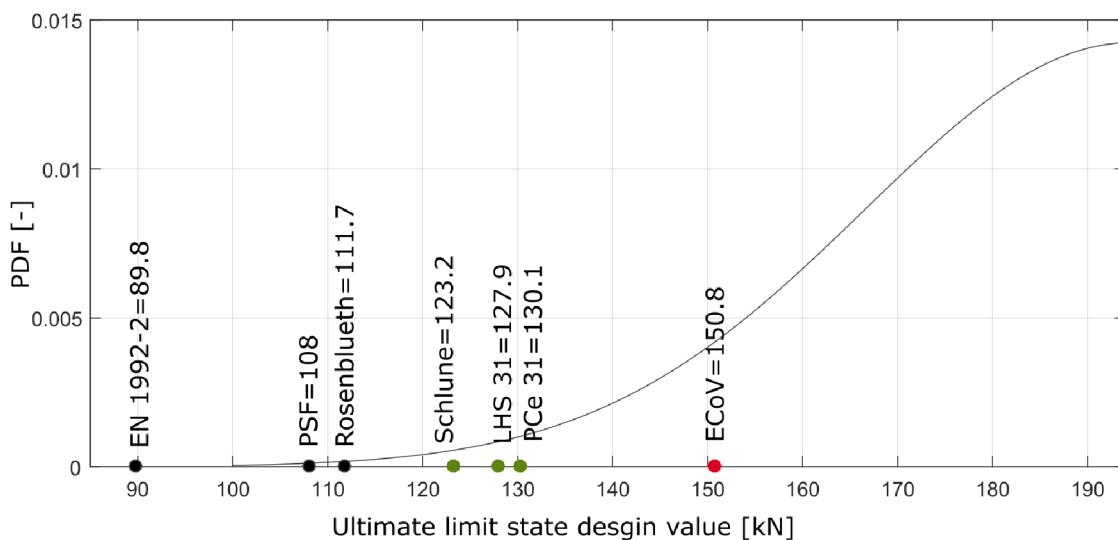


Obr. 7.9: Odhad variačního koeficientu dle jednotlivých metod

Opět odhad dle PCe je v souladu s hodnotou stanovenou pomocí LHS-Mean s 31 simulacemi a může být tedy považován za referenční.

Jak lze vidět, metoda ECoV dle Červenky, ačkoliv měla správný odhad střední hodnoty, vysoce podhodnotila variabilitu únosnosti konstrukce. Naopak metoda ECoV dle Schlune vykazuje velmi dobrou shodu s referenční hodnotou.

Důsledek výše zmíněných zjištění jde vidět na stanovené návrhové hodnotě únosnosti dle jednotlivých metod na Obr. 7.10.



Obr. 7.10: Návrhové hodnoty únosnosti dle jednotlivých metod

Podle očekávání jsou deterministické metody dle EN 1992-2 a Metoda dílčích součinitelů bezpečnosti (PSF) velmi konzervativní. Numerická kvadratura dle Rosenbluetha je ze všech zmíněných polo-pravděpodobnostních metod nejvíce výpočetně náročná, avšak výsledek je také velmi konzervativní.

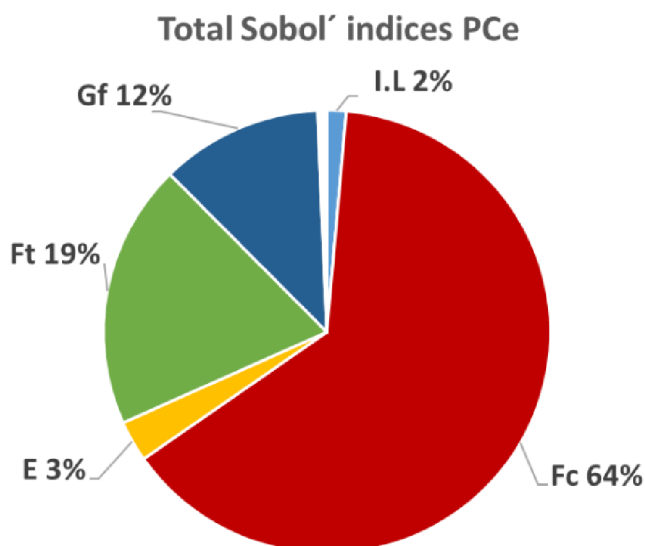
Metoda ECoV dle Schlune je naopak ideálním poměrem mezi výpočetní náročností a přesností stanovené návrhové hodnoty únosnosti. Nicméně pro větší stochastické modely je vhodnější využít metod náhradní plochy odezvy, popřípadě vzorkovací metodu LHS-Mean. Je vhodné dodat, že v souladu s předpokladem ECoV je pro metody PCe a LHS předpokládáno lognormální rozdělení pravděpodobnosti únosnosti konstrukce.

Velmi překvapivý výsledek je stanovený často využívanou metodou ECoV dle Červenky. Vzhledem k silnému podhodnocení variability únosnosti stanovila velmi vysokou návrhovou hodnotu únosnosti. Tento závěr se dá nalézt také v několika odborných článcích [1, 5]. Výsledky diplomové práce byly publikovány ve formě odborného článku [26] a budou sloužit pro další diskuzi ohledně vývoje metod ECoV.

## 7.6 Citlivostní analýza pomocí PCE

Vzhledem k vytvořenému metamodelu ve formě PCE je velmi vhodné zpracovat také citlivostní analýzu. Přesněji se jedná o citlivostní analýzu pomocí Sobolových indexů tak, jak je popsána v kap. 3.2.2. Tento proces nevyžaduje žádné další výpočetní nároky, jedná se pouze o post-processing aproximační funkce. Samotný algoritmus lze nalézt v kap. 4.1.5.

Výsledné totální Sobolovy indexy lze vidět ve formě výšečového diagramu na Obr. 7.11. Je vhodné poznamenat, že tyto výsledky neodpovídají provedené citlivostní analýze ve formě variačních koeficientů s využitím umělé neuronové sítě. Po kontrolním výpočtu pomocí MKP se sníženou tlakovou pevností betonu lze odhadnout, že umělá neuronová síť chybně zanedbala vliv tlakové pevnosti betonu  $f_c$ .



Obr. 7.11: Totální Sobolovy indexy dle PCE

V následující Tab. 7.14 lze vidět textový výstup SW nástroje, ze kterého lze jasně vidět, které bazové funkce byly vybrány pro tvorbu PCE pomocí algoritmu LAR. Z textového výpisu sestaveného metamodelu v kap. 7.4 bylo vidět, že aproximační funkce se skládá pouze z 9 členů a stochastický model má 12 veličin. Z toho vyplývá, že některé členy byly buď zanedbány, a nebo byly vyjádřeny pomocí členů, které obsahovaly více veličin najednou. Odpověď na tuto otázku lze získat přímo výpisem funkce PCE nebo u větších modelů vhodnějším přístupem pomocí Sobolových indexů. Sobolovy indexy prvního řádu vyjadřují vliv členů, které obsahují pouze určitou veličinu a Totální Sobolovy indexy vyjadřují vliv všech členů, které obsahují

určitou veličinu, tedy i interakci s jinými. Na základě Tab. 7.14 můžeme říci, že zanedbán byl vliv variability předpínací síly a nejistoty výpočtu dlouhodobých ztrát. Veličiny, které mají nulový Sobolův index prvního řádu, ale Totalní Sobolův index již nulový není, jsou ve výpočtu zohledněny vlivem interakce s jinými veličinami.

Tab. 7.14: Sobolovy indexy

	Total Sobol	First Sobol
<i>I.L.</i>	0,014	0,014
<i>L.L.</i>	0	0
<i>f<sub>c</sub></i>	0,641	0,641
<i>E</i>	0,030	0,030
<i>P</i>	0	0
<i>f<sub>t</sub></i>	0,194	0,194
<i>G<sub>f</sub></i>	0,117	0,117
<i>Density</i>	0,002	0
<i>E<sub>b</sub></i>	0,002	0
<i>f<sub>yb</sub></i>	0,0002	0
<i>E<sub>t</sub></i>	0,002	0,002
<i>f<sub>yt</sub></i>	0,0002	0

## 8 ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývá pokročilým návrhem konstrukcí s využitím spolehlivostních metod. Konkrétně se jedná o použití polo–pravděpodobnostních metod a náhradní plochy odezvy pro určení návrhové hodnoty únosnosti. Dalším významným tématem souvisejícím s pokročilým návrhem konstrukcí je citlivostní analýza, proto jí je v práci věnována také větší pozornost.

Nejprve jsou představeny základní metody teorie spolehlivosti a návrhové metody 1. úrovně pro stanovení návrhové hodnoty únosnosti při využití nelineární formy metody konečných prvků. Jedná se o aktuální shrnutí běžně využívaných i méně známých metod z normativních dokumentů a vědeckých publikací. V závěru teoretické kapitoly je uvedeno srovnání jednotlivých metod s ohledem na výpočetní náročnost, tedy počet nutných výpočtů pomocí MKP.

Následující kapitola se zabývá citlivostní analýzou využívanou pro pokročilé analýzy konstrukcí. Jsou zde představeny tradiční metody pomocí Spearmanova korelačního koeficientu a metody založené na principu Hoeffding-Sobol dekompozice.

Ve čtvrté kapitole je popsána metodologie metod náhradní plochy odezvy, která je často využívána při spolehlivostních výpočtech pomocí MKP, vzhledem k její výpočetní náročnosti. Zvláštní pozornost je věnována aktuální technice pro tvorbu metamodelu ve formě polynomiálního chaosu. V kapitole jsou popsány jak základní teoretické principy, tak i implementace do nově vytvořeného SW nástroje. Je zde ukázáno, že metamodel ve formě PCe je velmi efektivní pro momentovou a citlivostní analýzu, díky čemuž je využití této metody na vzestupu. Navržený SW nástroj navíc pracuje do značné míry automaticky a je tedy využitelný i pro méně zkušené uživatele.

Poslední teoretická kapitola obsahuje popis základních technik typu Monte Carlo hojně využívaných v pravděpodobnostních výpočtech.

Praktická aplikace popsaných metod je ukázána na úloze stanovení návrhové hodnoty únosnosti střešního předpjatého železobetonového nosníku porušovaného smykem. Jedná se o součást dlouhodobého výzkumu s firmou Franz Oberndorfer GmbH & Co KG. Tvorba stochastického modelu a některé polo-pravděpodobnostní výpočty byly provedeny již během bakalářské práce, nicméně na základě výsledků bylo rozhodnuto o zvýšení variability vstupních veličin. Diplomová práce v tomto místě navazuje a pracuje již s upraveným stochastickým modelem. Nejprve byly stanoveny návrhové hodnoty únosnosti dle normových a polo-pravděpodobnostních metod definovaných pro nelineární analýzu. V práci je popsána praktická aplikace a stanovení vektorů vstupních náhodných veličin pro MKP dle jednotlivých metod.

Následuje praktická tvorba metamodelu ve formě PCe využitím nově vytvořeného SW nástroje. Učící množina obsahuje 31 simulací vygenerovaných pomocí

metody LHS-Mean a odpovídající únosnost získaná MKP. Statistické zpracování výsledků učící množiny zároveň slouží jako kontrolní hodnota jak metamodelu, tak i stanovené návrhové únosnosti.

Porovnání možných přístupů tedy obsahuje polo-pravděpodobnostní metody, metamodel a plně-pravděpodobnostní přístup metodou LHS-Mean. Ze srovnání stanovených návrhových hodnot únosnosti střešního předpjatého nosníku lze vyvodit několik závěrů. Nejprve byla ověřena funkčnost SW nástroje pro tvorbu metamodelu ve formě PCe pro praktické využití díky možnosti porovnání získaných výsledků s referenční hodnotou. Srovnáním odhadů střední hodnoty a variačního koeficientu jednotlivých metod a metody LHS-Mean s ohledem na výpočetní náročnost lze konstatovat, že nejefektivnějším přístupem je metoda ECoV dle Schlune. Naopak odhad variačního koeficientu metodou ECoV dle Červenky v tomto případě nevede ke stanovení bezpečné návrhové hodnoty, což lze vidět ze srovnání stanovených hodnot.

Závěrem je provedena citlivostní analýza ve formě Sobolových indexů. Jelikož je tato metoda často realizována pomocí metod typu Monte Carlo a je tedy velmi časově náročná, není pro praktické úlohy běžně využívána. Z tohoto důvodu v této práci byl využit aktuálně nejefektivnější způsob výpočtu, a to pomocí metamodelu ve formě PCe. Výsledky citlivostní analýzy odpovídají předpokladu o důležitosti materiálových charakteristik betonu.

Diplomová práce uceleně prezentuje možnosti stanovení návrhové hodnoty únosnosti při využití nelineární analýzy MKP. Získané závěry lze využít při dalším rozvoji polo-pravděpodobnostních metod a při pokročilé výpočetně náročné analýze konstrukcí pomocí metamodelu ve formě PCe.

## LITERATURA

- [1] BELLETTI, B.; CECILIA, D.; UIJL, J.; aj.: Shear resistance evaluation of prestressed concrete bridge beams: fib Model Code 2010 guidelines for level 4 approximations. *Structural Concrete*, 2013, DOI: 10.1002/suco.201200046.
- [2] BERVEILLER, M.; SUDRET, B.; LEMAIRE, M.: Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In *Proc. 9th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, 2004, albuquerque, USA.
- [3] BLATMAN, G.; SUDRET, B.: An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25:183-197.
- [4] BLATMAN, G.; SUDRET, B.: Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 2011, iSSN: 0021-9991.
- [5] BLOMFORS, M.; ENGEN, M.; PLOS, M.: Evaluation of safety formats for non-linear finite element analyses of statistically indeterminate concrete structures subjected to different load paths. *Structural Concrete*, 2016, DOI: 10.1002/suco.201500059.
- [6] CANIOU, Y.; SUDRET, B.; MICOL, A.: Global sensitivity analysis for models with correlated input parameter.  
URL [www.gdr-mascotnum.fr/media/mascot12caniou.pdf](http://www.gdr-mascotnum.fr/media/mascot12caniou.pdf)
- [7] CEN: *EN 1990 - Eurocode: basis of structural design*. Brussels: European Committee for Standardization, 2002.
- [8] CEN: *EN 1992 - Eurocode: design of concrete structures*. Brussels: European Committee for Standardization, 2005.
- [9] ČERVENKA, V.: Reliability-based non-linear analysis according to fib Model Code 2010. *Struct Concr J fib*, 2013, 14:19-28.
- [10] ČERVENKA, V.; JENDELE, L.; ČERVENKA, J.: *ATENA Program Documentation – Part 1: Theory*. Cervenka Consulting, Prague, Czech Republic, 2007.
- [11] Český normalizační institut: *ČSN EN 1990 Zásady navrhování konstrukcí*. 2003.
- [12] CHASTAING, G.; GAMBOA, F.; PRIEUR, C.: Generalized Hoeffding-Sobol decomposition for dependent variables- application to sensitivity analysis. *El Journal of Statistics*, 2012, iSSN: 1935-7524.

- [13] CHRISTIAN, J.; BAECHER, G.: Point estimate method as numerical quadrature. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 1999, 125:779-86.
- [14] DOLEŽEL, J.; NOVÁK, L.; NOVÁK, D.: IO-SUPPORT.  
URL <http://www.fce.vutbr.cz/stm/lehky.d/io-support/io-support.html>
- [15] EFRON, B.; HASTIE, T.; JOHNSTONE, I.; aj.: Least angle regression. *The Annals of Statistics*, 2004, 32: 407-499.
- [16] fib: *Model Code for Concrete Structures 2010*. Lausanne: fib, 2013, iSBN: 978-3-433-03061-5.
- [17] GHANEM, R.; SPANOS, P.: Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of applied mechanics*, 1990, 197-202.
- [18] JCSS: *JCSS Probabilistic Model Code*. Joint Committee on Structural Safety, 2001, iSBN 978-3-909386-79-6.
- [19] LEBRUN, R.; DUTFOY, A.: A generalization of the Nataf transformation to distributions with elliptical copula. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24:172-8. doi:10.1016/j.probengmech.2008.05.001.
- [20] NATAF, A.: Détermination des distributions de probabilité dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1962, 225: 42-43.
- [21] NOVÁK, D.; TEPLÝ, B.; SHIRAIISHI, N.: Sensitivity analysis of structures: a review. *Proceedings of the fifth international conference on civil and structural engineering computing*, 1993: s. 201–207.
- [22] NOVÁK, D.; VOŘECHOVSKÝ, M.; TEPLÝ, B.: FReET: Software for the statistical and reliability analysis of engineering problems and FReET-D: Degradation module. *Advances in Engineering Software*, 2014.
- [23] NOVÁK, D.; KERŠNER, Z.; LEHKÝ, D.; aj.: Fracture tests of concrete specimens series I (C50/60) and II (C40/50). Research report, Brno University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics and Institute of Building Testing, 2014.
- [24] NOVÁK, D.; ŘOUTIL, L.; NOVÁK, L.; aj.: Database of Fracture-Mechanical Concrete Parameters and its Implementation into Reliability Software Freet. In *Proc. of the 13th International Probabilistic Workshop (IPW 2015)*, iSBN 978-981-09-7963-8, Liverpool, UK, 2015.



- [25] NOVÁK, D.; SLOWIK, O.; NOVÁK, L.; aj.: Statistical and sensitivity analysis of prestressed concrete girders failing in shear. In *12th International Conference on Structural Safety and Reliability*, ISBN: 978-3-903024-28-1, Vienna, 2017.
- [26] NOVÁK, L.; NOVÁK, D.: Shear Strength Design by Stochastic Simulation and Semi-probabilistic Methods. In *AIP Proc. of Intern. conf. of numerical analysis and applied mathematics 2017*, 2018, in press.
- [27] NOVÁK, L.; ŘOUTIL, L.; NOVÁK, D.: Implementace databáze lomově-mechanických parametrů vybraných betonů do softwaru Freet. In *Modelování v mechanice 2015*, ISBN 978-80-248-3756-7, Ostrava, 2015.
- [28] ROSENBLATT, M.: Remarks a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23 (3): 470-472.
- [29] ROSENBLUETH, E.: Point estimates for probability moments. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1975, 72:3812-4.
- [30] SCHLUNE, H.; GYLLTOFT, K.; PLOS, M.: Safety formats for non-linear analysis of concrete structures. *Mag Concrete Res*, 2012, 64:563-74.
- [31] SLOWIK, O.; NOVÁK, D.; KRUG, B.; aj.: Shear failure of pre-stressed concrete T-shaped girders: Experiment and nonlinear modeling. In *IABSE 2015 conference of International Association for Bridge and Structural Engineering*, DOI: <https://doi.org/10.2749/222137815818358411>, Geneva, Switzerland, 2015.
- [32] SLOWIK, O.; NOVÁK, D.; NOVÁK, L.; aj.: Shear Resistance of Prestressed Girders: Probabilistic Design. In *14th International Probabilistic Workshop*, ISBN 978-3-319-47886-9, 2017.
- [33] SOBOLEW, I.: Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Math and Comput in Simulation* 55, 2001, p. 271-280.
- [34] SOIZE, C.; GHANEM, R.: Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure. *J. Sci. Comput* 26(2), 395-410, 2004.
- [35] SUDRET, B.: Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliab Eng and System Safety*, 2008, 93: p. 964-979.
- [36] SUDRET, B.; BERVEILLER, M.; LEMAIRE, M.: A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis. *Europ journal of Comput mechanics*, 2012, 15:7-8, 825-866.

- 
- [37] SUDRET, B.; KIUREGHIANN, A.: *Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report*. 2000.
- [38] TEPLÝ, B.; NOVÁK, D.: *Spolehlivost stavebních konstrukcí*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 1999.
- [39] VOŘECHOVSKÝ, M.; NOVÁK, D.: Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations I: A Simulated Annealing approach. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, iSSN 0266-8920.
- [40] WIENER, N.: The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, 1938: s. 897–936.
- [41] XIAO, Q.: Evaluating correlation coefficient for Nataf transformation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, iSSN: 0266-8920.
- [42] XIU, D.; KARNIADAKIS, G.: The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *J Sci. Comput.*, 2002, 24(2):619-44.

## SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$R$	náhodná veličina odolnosti konstrukce
$E$	náhodná veličina zatížení konstrukce
$p_f$	pravděpodobnost poruchy
$Z$	náhodná veličina rezervy spolehlivosti konstrukce
$F$	distribuční funkce náhodné veličiny
$\phi$	distribuční funkce normalizovaného normalního rozdělení
$F^{-1}$	inverzní distribuční funkce náhodné veličiny
$\phi^{-1}$	inverzní distribuční funkce normalizovaného normalního rozdělení
$\beta$	index spolehlivosti dle Cornella
$\alpha$	váhový součinitel (citlivostní součinitel)
$\mu$	střední hodnota náhodné veličiny
$\sigma^2$	rozptyl náhodné veličiny
$\sigma$	směrodatná odchylka náhodné veličiny
MKP	metoda konečných prvků
PSF	metoda dílčích součinitelů bezpečnosti (partial safety factor)
$\gamma$	součinitel bezpečnosti
$x_m$	střední hodnota pro ECoV metody
$x_k$	charakteristická hodnota
$x_d$	návrhová hodnota
$R_d$	návrhová hodnota únosnosti
ECoV	odhad variačního koeficientu (estimation of coefficient of variation)
$R_m$	střední hodnota únosnosti konstrukce
$R(X_m)$	výsledek simulace se středními hodnotami materiálových charakteristik

- $R(X_k)$  výsledek simulace s charakteristickými hodnotami materiálových charakteristik
- $v_R$  celkový variační koeficient odezvy konstrukce
- $v_f$  variační koeficient odezvy způsobený materiálem
- $v_g$  variační koeficient odezvy způsobený geometrií
- $v_m$  variační koeficient odezvy způsobený modelem
- $E(Y^m)$  odhad  $Y$ -tého momentu náhodné veličiny
- $\rho$  korelační koeficient dle Spearmana
- PCe rozvoj ve formě polynomiálního chaosu (Polynomial Chaos expansion)
- $\xi$  náhodná veličina v nezávislém standardním normálním prostoru
- ED množina tréninkových bodů pro metamodel (Experimental Design)
- $S_i$  Sobolův index prvního řádu
- $S_{Ti}$  Totalní Sobolův index
- SW software
- MC metoda Monte Carlo
- LHS metoda Latin Hypercube Sampling
- $f_t$  tahová pevnost betonu
- $f_c$  tlaková pevnost betonu
- $\rho_v$  objemová hmotnost
- $G_f$  lomová energie
- $E$  modul pružnosti
- $f_y$  tahová pevnost oceli