UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kooperativní hry více hráčů

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Jaroslav Marek, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Markéta Švecová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení Mgr. Jaroslava Marka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2011

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu bakalářské práce Mgr. Jaroslavovi Markovi, Ph.D. za obětavou spolupráci, připomínky a rady. Také bych ráda poděkovala své rodině, která mě po celou dobu studia podporovala.

Obsah

Úvod

Teorie her je velice zajímavá disciplína aplikované matematiky, která se zabývá analýzou konfliktních rozhodovacích situací. Každý den se v běžném životě setkáváme se střetem zájmů a nutností učinit rozhodnutí. Ovšem jsou i situace, kdy k úspěšnému řešení konfliktu potřebujeme spolupráci a pomoc jiného účastníka. A právě z tohoto důvodu jsem si vybrala téma "Kooperativní hry více hráčů" jakožto důležitou součást teorie her.

Významnou osobností historie teorie her se stal matematik John von Neumann (1903 – 1958), který položil její základy. Nejprve v roce 1928 definoval základní pojmy a o několik let později, v roce 1944 spolu s ekonomem Otakarem Morgensternem (1902 – 1977) vydal první rozsáhlejší dílo o teorii her *Theory of Games and Economic Behavior* (Teorie her a ekonomické chování). Další důležitou osobností pro moji práci je matematik John Forbes Nash (1928), který získal za přínos do teorie her Nobelovu cenu za ekonomii. Teorii her obohatil o rozlišení pojmů kooperativních a nekooperativních her a o objev rovnováhy nekooperativních her, dnes známé jako Nashova rovnováha. K získání dalších informací o historii teorie her může posloužit např. [3].

Hlavním cílem práce bude seznámit čtenáře s teorií kooperativních her nejprve pro dva hráče a následně pro více hráčů. Pro srovnání kooperativních her s nekooperativními je čtenářům přiblížena i problematika nekooperativních her. Dalším cílem je ilustrování teorie na konkrétních příkladech.

V první kapitole je čtenář nejprve seznámen se základními pojmy teorie her. Druhá část kapitoly pojednává o klasifikaci her, kde jsou uvedeny různé pohledy na hry a jejich základní odlišnosti. Druhá kapitola nastíní teorii nekooperativních her pro dva i více hráčů a zavede pojem rovnovážný bod a rovnovážná strategie. Ve třetí, zároveň nejdůležitější, kapitole jsou uvedeny kooperativní hry pro dva a pro více hráčů. Tato kapitola řeší problémy týkající se dohod a možností dělení výhry.

V poslední části práce se budeme zabývat analýzou konkrétní kooperativní deskové hry, kde budeme řešit otázku spolupráce a možnost aplikace teorie grafů.

Abstrakt

Obsahem práce je seznámit čtenáře se základy teorie her. Po uvedení základních pojmů bude čtenáři vysvětlena teorie kooperativních her a pro srovnání také teorie her nekooperativních. Práce pro názornost obsahuje několik příkladů, ve kterých se teorie her aplikuje do praxe. Dále se problematika kooperace rozebere na konkrétní deskové hře Pandemic.

Abstract

Substance of the work is to introduce basics of games theory. After introduction of basic concepts will be cooperative games theory explain and for comparison also non-cooperative games theory. For visualisation, there are several examples in this bachelor thesis in which is the theory into practice applied. Further the issue of cooperative will be take into parts in particular tabular game called Pandemic.

1 Teorie her

Teorie her je velmi často studovaná matematická disciplína. Touto problematikou se zabývá mnoho publikací. Při tvorbě této kapitoly jsem čerpala zejména z literatury [3], [4], [5] a [6]. Ze studijních textů dostupných na internetových stránkách o pojmech a klasifikacích v teorii her pojednávají např. [7] a [9].

1.1 Seznámení se základními pojmy

Teorie her se zabývá situacemi, kdy nastane jakýkoliv střet zájmů jednotlivých účastníků, přičemž účastníkem nemusí vždy být pouze jednotlivec, nýbrž i nějaká organizovaná skupina lidí. Každý účastník je nazýván **hráčem**. Jednotliví hráči se snaží, v rámci dané konfliktní situace, pro sebe zajistit co nejlepší výsledek. Významnou roli zde hraje také **inteligence** jednotlivých hráčů. Inteligentní hráč si volí svá rozhodnutí tak, aby co nejvíce maximalizoval svoji možnou výhru. Takového hráče můžeme také nazvat racionálním. Oproti tomu neinteligentní hráč nahodile vybírá strategie, aniž by mu záleželo na výši možné výhry, kterou by mohl v důsledku svého rozhodnutí získat. Pokud je hráči výsledek lhostejný, jedná se o indiferentního hráče. V praxi často nastane situace, při které se nemusí zcela zdát, že se hráč chová jako inteligentní účastník. Proto se setkáváme s označením p-inteligentního hráče, který se s pravděpodobností p chová jako inteligentní a s pravděpodobností *1-p* jako neinteligentní účastník hry.

Hrou rozumíme rozhodovací situaci, do které se hráči dostali. Nemusí se vždy jednat pouze společenskou hru, jako jsou např. karty, dáma. Rozhodovací situace může stejně tak nastat ve sportu, ekonomii či jiné oblasti. Hra je popsána systémem pravidel, kterými se jednotlivý hráči řídí.

Varianty rozhodnutí, které jsou hráči ochotni přijmout, označujeme jako **strategie**. Tyto varianty si jednotliví hráči vybírají z **prostoru strategií**, což je jejich množina všech přípustných řešení. Strategií je tedy jakékoliv chování hráče. Každý hráč může pomocí své strategie ovlivnit průběh hry i postavení jednotlivých hráčů. Každý hráč se snaží najít svoji **optimální strategii**, čímž je myšlena situace, kdy žádná jiná alternativa mu nepřinese větší užitek, než ta právě zvolená strategie.

Hráči svoji strategii realizují pomocí jednotlivých **tahů**. Co se v jednotlivých hrách považuje za tah, bývá uvedeno v pravidlech. Obecně tahem můžeme nazvat volbu jedné alternativy z množiny všech možných alternativ, které můžeme uskutečnit v určitém momentu hry. Jsou dva druhy tahů – osobní a náhodné. **Osobní tah** je volba jedné alternativy, pro kterou se sám hráč rozhodne. **Náhodný tah** je také realizace jedné alternativy, ale zde to není rozhodnutí hráče, nýbrž náhodný mechanismus. Jako příklad osobního tahu můžeme uvést každý tah při dámě. Oproti tomu náhodný tah je například ve hře Člověče, nezlob se, kdy házíme kostkou a máme ve hře pouze jednu figurku (v případě více nasazených figurek jedním hráčem, se již může po hodu kostkou rozhodnout, kterou figurkou bude hrát). Pravděpodobnost výběru kterékoliv alternativy je zde 1/6.

Každý hráč volí svoji optimální strategii podle hodnoty **výplatní funkce**. Výplatní funkcí hráče nazveme přepis, který udává, jaký důsledek bude mít pro hráče zvolená strategie. Hodnotou této funkce je výhra resp. prohra.

Pokud ve hře dvou hráčů má každý z nich konečný počet strategií, můžeme sestavit **výplatní matici hry**. Tuto matici tvoří pole tabulky, která charakterizují výhry či prohry hráčů při zvolení jednotlivých strategií, které jsou uvedeny pro prvního hráče v záhlaví řádků, pro druhého hráče v záhlaví sloupců.

Příklad 1.1. *Máme dva hráče A a B, každý hráč drží v ruce 2 karty. Hráč A má jednu kartu v hodnotě 5 a druhou v hodnotě 7. Hráč B má k dispozici kartu s hodnotou 10 a s hodnotou 2. Oba zároveň vyloží jednu kartu na stůl. Vyhrává hráč, který vyložil kartu vyšší hodnoty a to částku, která udává rozdíl hodnot vyložených karet.*

A/B	***Karta 10***	***Karta 2***
Karta 5	*-5*	*3*
Karta 7	*-3*	*5*

Výplatní matice hry z pohledu hráče A

Jelikož hráč A má zaručenou minimální výhru -5 pro strategii Karta 5 a minimální výhru -3 pro strategii Karta 7, je pro něj nejvýhodnější zvolit strategii Karta 7, při níž je toto minimum maximální. Jinak řečeno hráč A volí takovou strategii, při které je, v případě prohry, jeho ztráta co nejmenší.

1.2 Klasifikace her podle jednotlivých kritérií

Někdy je na první pohled zřejmé, že jednotlivé konfliktní situace se od sebe liší a díky tomu je můžeme seskupit do několika skupin podle jejich charakteristik. Běžně u jednotlivých her zjišťujeme, kolik máme protihráčů, zda s nimi můžeme spolupracovat či nikoliv. Také nás zajímá, jaké možnosti máme při svém tahu apod. Abychom se mohli dopracovat k nějakému konkrétnímu návodu, jak se chovat v jednotlivých situacích, dělíme konfliktní rozhodovací situace a jejich modely dle několika hledisek (viz. názvy následujících podsekcí).

1.2.1 Počet hráčů

Jednoduchým kritériem pro dělení her je počet jejich účastníků. Je evidentní, že spor vyžaduje nejméně 2 účastníky. Proto hry podle tohoto hlediska dělíme na:

- hry dvou hráčů;
- hry n hráčů, kde $n > 2$;
- hry s nekonečným počtem hráčů.

Přitom ve hře n hráčů se mohou tvořit koalice. Koalice je skupina hráčů spolupracujících při volbě strategií, které použijí k vytvoření lepší pozice v daném konfliktu. Koalice většinou tvoří účastníci hry s podobnými zájmy.

V případě her nekonečně mnoha hráčů se jedná o konflikt, ve kterém je tak velký počet účastníků, že by bylo téměř nemožné vytvořit seznam všech hráčů.

1.2.2 Inteligence hráčů

Při volbě strategií by hráči měli brát v úvahu inteligenci jednotlivých účastníků.[1]

- Hry inteligentních hráčů;
- hry s neinteligentním hráčem (hry proti přírodě);
- hry s p-inteligentním hráčem.

Poznámka 1.1. *U her proti přírodě, která je zde náhodným mechanismem, rozlišujeme dvě varianty rozhodování. Pokud inteligentní účastník zná rozdělení pravděpodobností tahů náhodného mechanismu, například na základě předchozích zkušeností, jedná se o rozhodování při riziku. Pokud tato informace není známá, mluvíme o rozhodování při neurčitosti.*

1.2.3 Součet výher

Významné dělení konfliktních situací je podle charakteristiky součtu výher. Tuto charakteristiku tvoří celková hodnota výhry, o kterou se jednotliví hráči podělí. Podle tohoto kritéria dělíme hry na dvě skupiny. A to na:

- hry s konstantním součtem;
- hry s proměnným součtem.

O hrách s konstantním součtem hovoříme tehdy, pokud je součet výher pevně dán a volba strategií jednotlivých účastníků jej nijak neovlivní. Zvláštním případem hry s konstantním součtem je hra s nulovým součtem. Jedná se o situaci, kdy suma výher je rovna nule. Například u hry dvou účastníků platí, že pokud jeden hráč vyhraje určitou částku, musí druhý hráč stejnou částku prohrát.

U hry s proměnným součtem výher není tato suma zisků jednotlivých hráčů pevně dána, ale mění se podle zvolených strategií těchto hráčů.

[1] Pojmu inteligence hráčů jsme se věnovali v podkapitole 1.1

1.2.4 Prostor strategií

Jak již bylo napsáno, hráči si svá rozhodnutí volí ze skupiny různých variant, které tvoří prostor strategií. Toto dělení bude tedy z pohledu počtu alternativ jejich rozhodnutí. Jsou to:

- hry konečné;
- hry nekonečné.

Již z názvu je zřejmé, že konečné hry nám nabízejí pouze určitý počet alternativ řešení dané situace. Tedy prostor strategií je konečný. Pokud hráči mohou přijímat nekonečně mnoho strategií, jedná se o hry nekonečné.

1.2.5 Informovanost

Toto rozdělení závisí na dostupnosti informací. Každý hráč by si jistě přál získat co nejúplnější informace o hře. Bohužel se v běžném životě s hrou s úplnými informacemi nesetkáváme moc často, ale i přes to je toto rozdělení důležité.

- Hry s dokonalou informací;
- hry s nedokonalou informací.

Pokud hráči znají všechny tahy svých protihráčů a jejich výsledky, hrají hru s dokonalou informací. Pokud by jim chyběla informace týkající se pohybu některého hráče, jednalo by se o hru s nedokonalou informací.

1.2.6 Zájem hráčů

Při rozhodování každý z účastníků sleduje své vlastní zájmy. Někdy mohou být zájmy jednotlivých hráčů v přímém rozporu, jindy mohou někteří hráči sledovat podobné či společné cíle. Podle tohoto hlediska máme hry rozdělené do dvou skupin:

- antagonistické hry;
- neantagonistické hry.

Do první skupiny her, kdy jde o přímý rozpor hráčů a vyšší výhra pro jednoho hráče znamená pokles výhry jiných hráčů, řadíme výše zmíněné hry s konstantním součtem výher. Druhá skupina tedy charakterizuje situace, kdy jednotliví hráči nemusí mít úplně opačné zájmy. Do této skupiny spadají hry s proměnným součtem výher.

Jelikož u neantagonistických her může být někdy výhodné, když hráči mezi sebou uzavřou smlouvu o společném postupu při volbě svých strategií, odlišujeme v této skupině hry:

- kooperativní;
- nekooperativní.

V případě nekooperativní hry každý hráč sleduje pouze svůj prospěch a podle toho volí svoji strategii. Oproti tomu hry kooperativní jsou založeny na spolupráci mezi jednotlivými hráči.

1.2.7 Důsledky volby

- Hry deterministické;
- hry stochastické.

Toto dělení závisí na informovanosti, jaké důsledky hráči přinese jím zvolená strategie. V prvním případě hráč přesně ví, co získá nebo ztratí v závislosti na volbě strategie. Ve druhém případě má výplata nějaké pravděpodobnostní rozdělení.

2 Nekooperativní hry

Tato kapitola byla vytvořena převážně za pomocí literatury [4] a skript [2], [7], [8].

V tomto druhu hry se hráči rozhodují o volbě strategie bez předchozí domluvy, ale i tak se na ní mohou shodnout. Jelikož každý hráč chce maximalizovat svůj zisk, volí optimální strategii. Za vyhovující se považuje ta strategie, která sama nutí hráče k její volbě. Je to z toho důvodu, že její jednostranné porušení vede k poškození hráče, který ji porušil.

Definice 2.1. *Mějme dánu hru dvou hráčů s nekonstantním součtem*

$$\{Q = \{1, 2\}; X, Y; f_1(x, y), f_2(x, y)\}. \tag{1}$$

Dvojici strategií x^*, y^* nazveme ***rovnovážným bodem*** *této hry, jestliže platí současně*

$$f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*),$$

$$f_2(x^*, y) \leq f_2(x^*, y^*)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. Strategie x^* se nazývá ***rovnovážná strategie hráče 1*** *a y^* se nazývá* ***rovnovážná strategie hráče 2****.*

U her s nekonstantním součtem hráč špatnou volbou strategie nemusí poškodit jen sám sebe. Pokud hráč nezvolí rovnovážnou strategii, získá méně a zároveň může způsobit nižší výhru hráče, který rovnovážnou strategii sám zvolil. Oproti tomu při hře s konstantním součtem hráč při volbě špatné strategie zajistí druhému hráči výhru vyšší (a to o hodnotu, kterou první hráč volbou své strategie ztratil).

Potíže mohou vzniknout v případě, že rovnovážných bodů je více než jeden. Pro každého hráče může být výhodný jiný a stane se, že jejich strategie se sejdou mimo rovnovážný bod.

Definice 2.2. *Nechť* x^*, y^* *je rovnovážným bodem hry (1) s vlastností*

$$f_1(x^*, y^*) \geq f_1(\hat{x}, \hat{y}),$$

$$f_2(x^*, y^*) \geq f_2(\hat{x}, \hat{y}),$$

kde $\hat{x}$, $\hat{y}$ *je libovolný rovnovážný bod hry (1).Potom řekneme, že* x^*, y^* *je* ***dominujícím rovnovážným bodem*** *hry (1).*

Dominující rovnovážný bod je tedy takový rovnovážný bod, pro který neexistuje jiný rovnovážný bod, který by byl pro oba hráče výhodnější. Samozřejmě pokud hra má jediný rovnovážný bod, je tento bod zároveň dominujícím.

Příklad 2.1. *Dvě firmy, z nichž jedna prodává uhlí a druhá dřevo, se rozhodují o změně ceny. K dispozici jsou 3 strategie. Cenu sníží (strategie 1), cenu zvýší (strategie 2) nebo cenu ponechají na stejné úrovni (strategie 3). U zastupitelných výrobků je známo, že změna ceny jednoho produktu, vede k přesunu zákazníků k druhému produktu. Například pokud se zvýší cena uhlí, část zákazníků (kteří mohou topit i dřevem) se přesune a začnou kupovat dřevo. V následující tabulce je uvedeno, jaké tržby budou mít naše firmy při různých kombinacích zvolených strategií. (Strategie i firmy prodávající uhlí, strategie j firmy prodávající dřevo.)*

	Tržby uhlí			*Tržby dřevo*				
i/j	***1***	***2***	***3***	***1***	***2***	***3***	max_j	*(i,j)*
1	*9*	*11,5*	*10,5*	*9*	*7,5*	*8,5*	***9***	***(1,1)***
2	*6*	*12*	*8*	*12*	*13*	*11*	***13***	***(2,2)***
3	*7*	*11*	*10*	*10*	*8*	*9,5*	***10***	***(3,1)***
max_i	***9***	***12***	***10,5***					
(i,j)	***(1,1)***	***(2,2)***	***(1,3)***					

Jak nám ukazuje tabulka, příklad má dva rovnovážné body (1,1) a (2,2). Pro firmu prodávající uhlí je dominující kombinace strategií (2,2), protože

$$f_1(2,2) = 12 > f_1(1,1) = 9.$$

Pro firmu prodávající dřevo je výhodnější také bod (2,2), kde

$$f_2(2,2) = 13 > f_2(1,1) = 9.$$

Hra má tedy jeden dominující rovnovážný bod (2,2).

Poznámka 2.1. *Známé příklady nekooperativních her jako je Vězňovo dilema, Manželský spor, konflikt typu Kuřata najdete například v [7].*

Do této doby jsme se zabývali pouze nekooperativními konflikty 2 účastníků. Ovšem tyto případy můžeme zobecnit i pro N účastníků, kde je hra dána následujícím tvarem:

$$\{Q = \{1, \ldots, N\}; X_1, \ldots, X_N; f_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, \ldots, x_N)\}, \qquad (2)$$

kde budeme uvažovat případ $N > 2$ a účastníky, kteří mají za cíl maximalizovat své konečné výhry.

Definice 2.3. *Mějme hru N hráčů v normálním tvaru (2). N-tici strategií $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ nazveme **rovnovážným bodem** této hry, jestliže platí současně*

$$f_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_N^*) \leq f_i(x_1^*, \ldots, x_N^*)$$

*pro $i = 1, \ldots, N$ a všechna $x_i \in X_i$. Složka x_i^* se nazývá **rovnovážná strategie** i-tého hráče.*

Obdobně jako u hry dvou hráčů, pokud hra (2) má více než jeden rovnovážný bod, musíme zavést pojem dominující rovnovážný bod.

Definice 2.4. *Nechť x^* je rovnovážným bodem hry (2) s vlastností*

$$M_i(x^*) \geq M_i(\hat{x}), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

*kde $\hat{x}$ je libovolný rovnovážný bod hry (2). Potom říkáme, že x^* je **dominujícím rovnovážným bodem** hry (2).*

3 Kooperativní hry

Kooperativní hry jsou velmi často zmiňovanou kapitolou teorie her. Informace obsažené v této pasáži najdeme v publikacích [1], [3], [4] a ve studijních textech [2], [7], [8], [9]. Za pomocí těchto zdrojů jsem utvořila i následující text.

3.1 Kooperativní hry dvou hráčů

Pokud to konfliktní situace dovolí, může být pro hráče výhodné spolupracovat. Hráči se tedy před volbou strategií mohou domlouvat, a to nejen o postupu při hře, ale případně i o rozdělení možné výhry. Pokud se hráči pro tuto spolupráci rozhodnou, nejprve analyzují situaci, ve které se nachází a poté uzavírají smlouvu o volbě strategii, popřípadě i smlouvu o přerozdělení výhry. Pro hráče je výhodné uzavřít dohodu o spolupráci v situaci, kdy jim spolupráce zaručí lepší výsledek, než by získal při hře, kterou by hrál sám za sebe.

3.1.1 Hry s přenosnou výhrou

Pokud se hráči na spolupráci dohodnou, uzavírají před zahájením hry jak smlouvu o volbě strategie, tak i smlouvu o přerozdělení. Hráče budou zajímat zejména tři otázky.

- Kdy je výhodné uzavřít smlouvu?
- Jakou strategii zvolit?
- Jak rozdělit případnou výhru?

Na první otázku jsme si již odpověděli. Pro hráče je výhodné spolupracovat, pokud tím získá více. Každý hráč bude jistě požadovat minimálně svoji zaručenou výhru. Tedy takový výsledek, který by získal i bez spolupráce s ostatními hráči. Hodnotu zaručené výhry prvního hráče $v(1)$ a druhého hráče $v(2)$ zjistíme jako

$$v(1) = \max_x \min_y \mathrm{f}_1(x, y), \tag{3}$$

$$v(2) = \max_y \min_x \mathrm{f}_2(x, y). \tag{4}$$

Pro maximální společnou výhru $v(1,2)$ platí vztah

$$v(1,2) = \max_{x,y} \left[\mathrm{f}_1(x,y) + \mathrm{f}_2(x,y) \right]. \tag{5}$$

Kde f_1 je výplatní funkce prvního hráče a f_2 je výplatní funkce druhého hráče.

Je tedy zřejmé, že hráči budou uzavírat dohodu o spolupráci v případě, že platí

$$v(1,2) > v(1) + v(2). \tag{6}$$

Hráči si tímto zaručí svoji jistou výhru a mohou získat i něco navíc.

Definice 3.1. *Nechť pro hru dvou hráčů s přenosnou výhrou existují čísla (3),(4) a (5). Potom tuto hru nazveme podstatnou, jestliže platí vztah (6) a nepodstatnou, jestliže platí* $v(1,2) = v(1) + v(2)$.

Poznámka 3.1. *Možnost* $v(1,2) < v(1) + v(2)$ *nemůže nastat.*

Nyní si můžeme odpovědět i na druhou otázku. V podstatné hře si hráči zvolí takové strategie, v nichž nastává extrém (5).

Příklad 3.1. *Dva výrobci cukrovinek A (strategie i) a B (strategie j) se rozhodují o místě, kde na tržišti umístí své stánky se sladkostmi. Na výběr mají ze třech míst. Mohou svůj stánek umístit k radnici (strategie 1), k muzeu (strategie 2) nebo ke kašně (strategie 3). Volba strategie ovlivňuje vzájemně i jejich tržby, což udává následující tabulka.*

	Tržby A			*Tržby B*				
i/j	***1***	***2***	***3***	***1***	***2***	***3***	max_j	*(i,j)*
1	*5*	*10*	*19*	*8*	*10*	*8*	***10***	***(1,2)***
2	*11*	*9*	*10*	*14*	*10*	*20*	***20***	***(2,3)***
3	*5*	*9*	*12*	*10*	*14*	*13*	***14***	***(3,2)***
max_i	***11***	***10***	***19***					
(i,j)	***(2,1)***	***(1,2)***	***(1,3)***					

Z tabulky je zřejmé, že hra má jediný sedlový bod (1,2), kde výrobce A bude prodávat u radnice a výrobce B u muzea. Každý při tržbě 10 jednotek. Ale pokud *by se výrobci domluvili, mohli by si zajistit tržby v celkové výši* $10 + 20 = 30$ *jednotek při strategii (2,3).*

Dále se hráči musí domluvit, jak si výhru rozdělí. Samozřejmě každý hráč bude požadovat minimálně takovou část výhry, kterou by si zajistil, pokud by hrál za sebe. Pro hru se dvěma hráči zavedeme číslo a_1, které udává konečnou výplatu prvního hráče a číslo a_2 udávající konečnou výplatu druhého hráče. Vektor (a_1, a_2) nazveme rozdělením. Pro čísla a_1 a a_2 platí současně

$$a_1 + a_2 = v(1,2) \tag{7}$$

$$a_1 \geqq v(1) \tag{8}$$

$$a_2 \geqq v(2) \tag{9}$$

Vztah (7) říká, že se musí mezi hráče rozdělit celá společná výhra. Vztahy (8) a (9) vyjadřují, že každý z hráčů musí získat alespoň takovou výhru, kterou je schopen si zajistit sám bez spolupráce.

Definice 3.2. *Množinu všech rozdělení, která splňují vztahy (7), (8) a (9), nazýváme **jádro hry**. Při hře dvou hráčů jádro hry tvoří body úsečky, která má tvar*

$$a_2 = v(1,2) - a_1$$

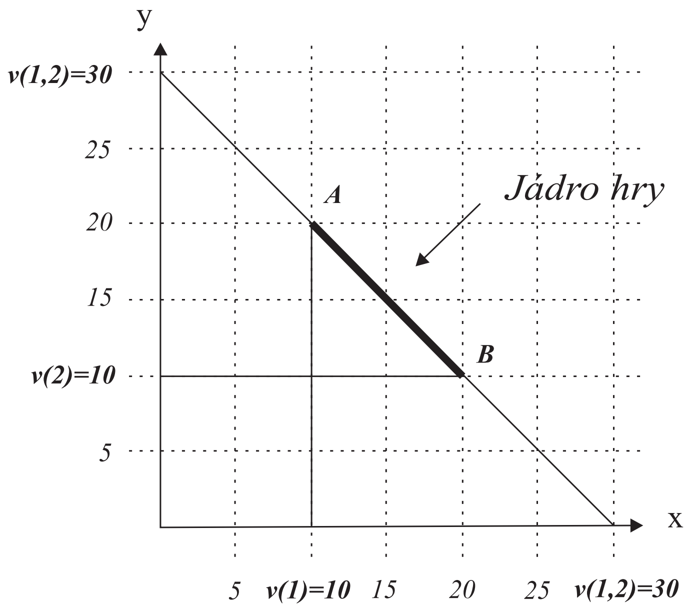
Jádro hry můžeme graficky znázornit (Obrázek 1), kde osa x bude představovat výhru prvního hráče a osa y výhru druhého hráče. Úsečka AB je jádrem hry a na ní leží všechny kombinace, jak si mohou hráči hru rozdělit.

Možná rozdělení

- **Charitativní rozdělení** – hráči si celkovou výhru rozdělí rovnoměrně.

$$a_1 = a_2 = \frac{v(1,2)}{2} \tag{10}$$

  Rozdělení (10) mnohdy není pro hráče přijatelné. Často nemusí ani splňovat podmínku, že každý z hráčů dostane svou zaručenou výhru.



Obrázek 1: Jádro hry z Příkladu 3.1

- **Spravedlivé rozdělení** – celková výhra se rozdělí mezi hráče v poměru jejich přínosů do společné výhry

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v(1,2) - v(2)}{v(1,2) - v(1)}.$$

Poznámka 3.2. *Jiné dělení dle přínosu je přínos ze zbytku, kdy si hráči ponechají svoji jistou výhru a v poměru* $\frac{a_1}{a_2}$ *si rozdělí částku* $v(1,2) - v(1) - v(2)$*. Pro konečné výplaty dvou hráčů bude tedy platit*

$$a_1 = v(1) + [v(1,2) - v(1) - v(2)] \cdot \frac{v(1,2) - v(2)}{v(1,2) - v(1)},$$

$$a_2 = v(2) + [v(1,2) - v(1) - v(2)] \cdot \frac{v(1,2) - v(2)}{v(1,2) - v(1)}.$$

- **Optimální rozdělení** - tuto variantu dělení výhry můžeme definovat jako rozdělení (a_1^*, a_2^*), kde čísla a_1^* a a_2^* udávají souřadnice těžiště jádra. Pro tato čísla platí

$$a_1^* = \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2}, \tag{11}$$

$$a_2^* = \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2}. \qquad (12)$$

Pokud přepíšeme vztahy (11) a (12) jako

$$a_1^* = v(1) + \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2},$$

$$a_2^* = v(2) + \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2},$$

můžeme o tomto rozdělení říci, že každý hráč si ponechá svoji zaručenou výhru a zbytek si rozdělí rovným dílem.

Příklad 3.2. *Vraťme se k příkladu 3.1. Hodnoty výher hráčů při rovnovážných strategií jsou* $v(1) = 10$ *a* $v(2) = 10$*, při spolupráci* $v(1,2) = 30$*. Pokud bychom řešili rozdělení výhry, zjistíme, že při stejných zaručených výhrách nebude záležet na způsobu dělení. Při charitativním rozdělení získají oba výplatu 15 jednotek. Stejnou částku získají i při dělení spravedlivém, kdy se společná výhra v tomto případě dělí v poměru* $1:1$*. Stejně tak při dělení optimálním, kde se k zaručené výhře hráče připočítává polovina rozdílu* $v(1,2) - v(1) - v(2)$*.*

Definice 3.3. *V podstatné hře dvou hráčů s nekonstantním součtem nazveme strategie* x_1^**,* x_2^* *optimálními, jestliže pro ně platí*

$$v(1,2) = f_1(x^*, y^*) + f_2(x^*, y^*).$$

Optimálním rozdělením nazveme dvojici a_1^**,* a_2^**, pro kterou platí (11), (12). Řešením podstatné hry potom rozumíme čtveřici* x^**,* y^**,* a_1^**,* a_2^**.*

Poznámka 3.3. *Pokud neexistuje některý z extrémů (3), (4) nebo (5), neexistuje ani řešení hry.*

3.1.2 Hry s nepřenosnou výhrou

V případě nepřenosné výhry mohou hráči uzavírat závazné dohody pouze o volbě strategie. Smlouvu o přerozdělení výhry hráči nemohou uzavřít, protože přenos výhry by měl povahu úplatku. Hráče nyní budou zajímat pouze první dvě otázky:

- kdy má smysl spolupráce na volbě strategie,
- jakou strategii zvolit.

Uzavření dohody o volbě strategie má smysl jen tehdy, pokud tím alespoň jeden z hráčů získá vyšší výhru, než je jeho zaručená. V kooperativní hře s nepřenosnou výhrou se tedy sledují výhry jednotlivých hráčů odděleně.

Definice 3.4. *Uvažujeme hru* $\{Q = 1,2; X, Y; f_1(x,y) + f_2(x,y)\}$ *s nepřenosnou výhrou. Dvojici čísel* (a_1, a_2) *nazveme* ***dosažitelným rozdělením****, jestliže* $a_1 \geq v(1)$*,* $a_2 \geq v(2)$ *a jestliže existují strategie* $x \in X$ *a* $y \in Y$ *tak, že* $a_1 = f_1(x,y)$*,* $a_2 = f_2(x,y)$*. Množinu všech dosažitelných rozdělení označíme* D*.*

Dohoda je tedy výhodná, pokud platí

$$(a_1, a_2) \neq (v(1), v(2))$$

Definice 3.5. *Dosažitelné rozdělení* $(b_1, b_2) \in D$ *nazveme* ***paretovským****, jestliže neexistuje rozdělení* $(a_1, a_2) \in D$*, s vlastností* $a_1 \geq b_1$ *a* $a_2 > b_2$ *nebo* $a_1 > b_1$ *a* $a_2 \geq b_2$*. Množinu všech paretovských rozdělení označíme* P*.*

Jde tedy o takové dosažitelné rozdělení, kdy neexistuje jiné dosažitelné rozdělení, ve kterém by jeden z hráčů dosáhl vyšší výhry a druhý by přitom netratil.

Definice 3.6. *Nechť* $b^* = (b_1^*, b_2^*)$ *je střední hodnota rozložení pravděpodobností s nejmenším obsahem informace na množině* P *(pokud existuje). Rozdělení* $a^* = (a_1^*, a_2^*) \in P$ *nazveme* ***optimálním****, jestliže má vlastnost*

$$\rho(a^*, b^*) = \min_{a \in P} \rho(a, b^*),$$

kde ρ *je (euklidovská) metrika v* E_2*.* ***Optimálními strategiemi*** *nazveme ty strategie* $x^* \in X$*,* $y^* \in Y$*, pro které platí* $a_1^* = f_1(x^*, y^*)$*,* $a_2^* = f_2(x^*, y^*)$*.*

3.2 Kooperativní hry N hráčů

V kooperativní teorii s více jak dvěma hráči nám přibývá ještě jedna otázka. S kým uzavřít dohodu o spolupráci při volbě strategie? Klíčovými pojmy jsou koalice a koaliční struktura.

Definice 3.7. *Mějme hru v normálním tvaru (2) s množinou hráčů* $Q = \{1, \ldots, N\}$. *Skupinu hráčů* $K \subseteq Q$*, kteří spolupracují při volbě strategií, nazveme* ***koalicí****. Množinu koalic hráčů téže hry nazveme* ***koaliční strukturou****.*

V případě, že by spolupracovali všichni hráči z množiny Q, utvoří tzv. **plnou koalici**. Možností, s kým uzavřít koalici, je při hře N hráčů celkem $2^N - 1$. V rámci kooperativní hry může být přínosné uvažovat i zvláštní druhy koalic, kdy koalice nemusí být tvořena pouze spoluprací dvou a více hráčů.

- **Jednoprvkové koalice**, které tvoří jednotliví hráči. Tito hráči nakonec s nikým nespolupracují a zůstanou osamoceni.
- **Prázdné koalice**, které nemají žádné členy. Zavedení tohoto pojmu je výhodné, pokud hledáme koalici s určitou vlastností a zjistíme, že taková koalice není. Potom prohlásíme, že koalice existuje, ale je prázdná.

Protikoalicí ke koalici $K \subseteq Q$ nazýváme množinu hráčů $K^c = Q \setminus K$.

Poznámka 3.4. *Pokud ve hře uvažujeme i prázdnou koalici, je všech možných koalic* 2^N.

Dále si uvedeme, jaké koaliční struktury jsou v konfliktu přípustné. Pokud hráči mohou vytvářet libovolné koalice pouze s cílem maximalizace konečné výhry, jedná se o **konflikt s volnou koaliční strukturou**. O **konfliktech s omezenou koaliční strukturou** mluvíme v případě vyloučení některých koalic, jež jsou pro nás nepřípustné z jiného důvodu, než je nevýhodnost konečné výhry.

Hry dělíme i z pohledu, zda je přípustné, aby se hráči vyskytovali ve více koalicích. Pokud ano, nazveme koaliční strukturu **nedisjunktní**. Jestliže žádný hráč nesmí být současně ve více koalicích, mluvíme o **disjunktní** koaliční struktuře.

V reálných konfliktech se nejčastěji vyskytují hry s nedisjunktní koaliční strukturou. Ovšem tento konflikt je velmi těžké dovést do konce. Pokud hráčů je větší počet, je mnoho i koaličních struktur. Další problém se nachází také v popisu chování hráčů. Jestliže je hráč členem více koalic, je těžké přesně popsat, jak je ochoten hájit zájmy jednotlivých koalic. Tento problém odstraníme, když hru s volnou nedisjunktní koaliční strukturou převedeme na hru s volnou disjunktní koaliční strukturou tak, že u každého hráče budeme jednu z koalic považovat za dominantní. Členství v ostatních koalicích nebudeme brát při řešení konfliktu v úvahu. Dále tedy budeme řešit pouze hry s volnou disjunktní koaliční strukturou.

Při analýze těchto her se není třeba zabývat činností jednotlivých hráčů, kteří tvoří koalici. Pro řešení nám stačí znát charakteristiku síly celé koalice. Sílu jednotlivých koalic udává hodnota charakteristické funkce v.

Definice 3.8. *Nechť $Q = \{1, \ldots, N\}$. **Charakteristickou funkcí** hry nazveme reálnou funkci v definovanou na množině všech koalic, která má tyto vlastnosti:*

$$v(\emptyset) = 0;$$

$$v(K) + v(L) \leq v(K, L), \quad \forall K, L \subseteq Q, K \cap L = \emptyset. \tag{13}$$

Vlastnost (13) značí **superaditivitu**. To znamená, že tvorbou větší koalice se získá více (nebo přinejmenším stejně), než je součet výher menších koalic, na které se větší koalice může rozdělit. Pokud ve (13) nastane rovnost, nazveme funkci **aditivní**. Dvojici (Q, v) nazveme kooperativní hrou N hráčů ve tvaru charakteristické funkce.

Při hledání řešení hry nás bude zajímat hodnota zaručené výhry koalice K bez ohledu na ostatní hráče. V nejhorším případě zbylí hráči utvoří protikoalici $Q \setminus K = \{j_1, \ldots, j_{N-k}\}$. Výše zaručené výhry pro koalici K je dána vztahem

$$v(K) = \max_{X(K)} \min_{X(Q \setminus K)} \sum_{i \in K} f_i(x_1, \ldots, x_N), \tag{14}$$

kde $X(K) = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_{N-1}}$ je množina strategií koalice K a $X(Q \setminus K) = X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_{N-1}}$ množina strategií protikoalice $Q \setminus K$.

V případě spolupráce všech hráčů, kdy koalici tvoří celá množina Q a kde $\Omega = X_1 \times \cdots \times X_N$, je zaručená výhra

$$v(Q) = \max_{x \in \Omega} \sum_{i \in Q} f_i(x_1, \ldots, x_N).$$

Poznámka 3.5. *Jestliže by existovalo všech $2^N - 1$ koalic, můžeme sílu koalice K určit pomocí rovnovážné strategie. Postup je uveden například v [8].*

3.2.1 Přenosná výhra

Hráči utvoří koalice, pokud je hra podstatná. Tedy v případě, že smlouva o spolupráci přinese hráčům lepší výsledek. Pokud zvolíme čísla $v(1), \ldots, v(N)$ libovolně a pro každou koalici určíme

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(i),$$

dostaneme jednoduchou charakteristickou funkci v, která je potom aditivní.

Definice 3.9. *Nechť pro hru (2) existuje charakteristická funkce v. Je-li v aditivní, nazveme hru nepodstatnou, je-li superaditivní, ale nikoli aditivní, nazveme hru podstatnou.*

Koalice u nepodstatné hry nemá smysl, protože utvoření koalic neovlivní výši výhry jednotlivých členů. Následně se tedy budeme zabývat pouze podstatnou hrou, ve které nás budou zajímat odpovědi na následující otázky.

- Kterou koalici má hráč zvolit?
- Jakou strategii zvolit v koalici?
- Jak si mezi členy koalice rozdělit případnou výhru?

Koalici bude hráč volit podle toho, jaký užitek mu přinese účast v dané koalici. Největší výhra, kterou si hráči mohou mezi sebe rozdělit, se získá utvořením velké koalice, kdy spolupracují všichni hráči. Poté budou volit ty strategie $x^* \in \Omega$, které splňují

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x^*) = \max_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} f_1(x) = v(Q) \tag{15}$$

Návrh na rozdělení výhry nám dá vektor $a = (a_1, \ldots, a_N)$, kde a_i udává částku, kterou dostane *i-tý* hráč. Aby hráči na rozdělení a přistoupili, musí mít určité vlastnosti. Rozdělení musí být **kolektivně racionální**, tj. hráči si mezi sebou musí rozdělit celou výhru, tedy

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q). \tag{16}$$

Dále musí platit, že žádný hráč nezíská méně, než by získal sám bez účasti v koalici.

$$a_i \geq v(i), i = 1, \dots, N. \tag{17}$$

Rozdělení, které splňuje vlastnost (17), označíme za **individuálně stabilní**. Následně není přijatelné, aby nějaká skupina hráčů $K \subset Q$ měla k rozdělení méně, než by si mohli zajistit, pokud by společně utvořili koalici. Tito hráči by jistě opustili koalici Q, utvořili koalici K a rozdělili by si výhru $v(K)$. Proto tedy musí pro všech $2^N - 1$ možných koalic platit vztah

$$\sum_{i \in K} a_i \geq v(K). \tag{18}$$

Vlastnost dána vztahem (17) je obsažena i ve vlastnosti obsažené ve vztahu (18), kde je brána jako jednoprvková koalice. Pokud pro rozdělení vyhovuje vztah (18), nazveme jej **skupinově stabilní**.

Definice 3.10. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce.* ***Jádrem hry*** *nazveme množinu rozdělení splňující vztahy (16) a (18).*

Příklad 3.3. *Modelujme následující konflikt jako kooperativní hru. Tři vedoucí prodejen dostali od ředitele prodeje za úkol dohodnout se, na kterou prodejnu budou použity finanční prostředky na rozšíření prodejní plochy. Pokud se nedohodnou, budou jim zkráceny prémie a odměny. K rozhodnutí řediteli prodeje stačí dohoda dvou vedoucích.*

Máme tedy množinu hráčů Q={1,2,3}. Z hlediska spolupráce je 7 možných koalic. Sílu jednotlivých koalic oceníme charakteristickou funkcí.

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -5,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 2.$$

Pro tyto funkce je nutné ověřit superaditivitu:

$v(\{1\}) + v(\{2\}) = -10 < 0 = v(\{1,2\})$, *stejně tak pro dvojice koalic* $\{1\}$,$\{3\}$ *a* $\{2\}$,$\{3\}$.

$v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = -5 < 2 = v(\{1,2,3\})$, *také i pro dvojice koalice* $\{1,3\}$,$\{2\}$ *a* $\{2,3\}$,$\{1\}$.

Jelikož ve vztazích nenastává rovnost, není funkce v aditivní.

Rozdělení jádra hry pro koaliční strukturu tvořenou všemi hráči $\{Q\}$ *získáme dosazením do vztahů (16), (17), (18). Prvky vektoru* $a = (a_1, a_2, a_2)$ *budeme požadovat v celých jednotkách.*[2]

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2,$$
$$a_1 + a_2 \geq 0,$$
$$a_1 + a_3 \geq 0,$$
$$a_2 + a_3 \geq 0,$$
$$a_1 \geq -5,$$
$$a_2 \geq -5,$$
$$a_3 \geq -5.$$

Hra má několik rozdělení: $(-2,2,2)$, $(-1,1,2)$, $(-1,2,1)$, $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(0,2,0)$, $(1,-1,2)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,2,-1)$, $(2,-2,2)$, $(2,-1,1)$, $(2,0,0)$, $(2,1,-1)$, $(2,2,-2)$.

Definice 3.11. *Nechť hra (2) má neprázdné jádro. Za* ***optimální strategie*** *v této hře označíme strategie* x^* *splňující (15).* ***Optimálním rozdělením*** *nazveme střední hodnotu* a^* *rovnoměrného rozložení pravděpodobností definované na jádře. Řešením hry potom rozumíme dvojici* (x^*, a^*).

Nejspravedlivější rozdělení společné výhry v koalici pro hráče bude, pokud si každý z nich ponechá tu část, kterou by si zajistil i bez spolupráce a zbytek je mezi hráče rozdělen rovným dílem.

[2] řešení soustavy pomocí programu Mathematica

V běžných konfliktech často nastává situace, kdy všichni hráči neutvoří jen jednu velkou koalici. V tomto případě neplatí pro všechny hráče vztahy (16) a (18). Vzniklý problém vyřešíme tak, že budeme hledat maximální stabilní koalici hry, pro kterou platí zároveň

$$\sum_{i \in K} a_i = v(K),$$
$$\sum_{i \in L} a_i \geq v(L), \qquad L \subset K.$$

Postupujeme tak, že zkoušíme, zda tyto vztahy vyhovují postupně pro koalici s $(N-1)$ členy, poté s $(N-2)$ členy, atd. Po nalezení maximální stabilní koalice, budou její hráči volit takové strategie $({x_{i_1}}^*, \ldots, {x_{i_k}}^*) \in X(K)$, kde spolu s nějakými strategiemi $(\tilde{x}_{j_1}, \ldots, \tilde{x}_{j_{N-k}}) \in X(Q \setminus K)$ nastává extrém (14).

3.2.2 Nepřenosná výhra

V kooperativních hrách N hráčů s nepřenosnou výhrou nám opět odpadá otázka, jak si výhru hráči rozdělí.

Definice 3.12. *Uvažujeme hru v normálním tvaru (2). Vektor čísel* $(a_1, \ldots, a_N)$ *nazveme* ***dosažitelným rozdělením****, jestliže pro* $i \in Q$ *platí* $a_i \geq v(i)$ *a jestliže* $x \in \Omega$ *tak, že* $a_i = f_i(x)$*. Množinu dosažitelných rozdělení označíme* D*.*

Stejně jako v případě hry dvou hráčů je spolupráce výhodná, pokud hráči vstoupením do koalice získají více, nebo přinejmenším to, co by získali samotní.

Definice 3.13. *Nechť* E *je nějaké množina vektorů* $a = (a_1, \ldots, a_N)$*.* ***Paretovským vektorem*** *na* E *nazveme vektor* $b = (b_1, \ldots, b_N) \in E$*, jestliže neexistuje vektor* a *z množiny* E*, pro který platí* $a_i \geq b_i$ *pro všechna* $i \in Q$ *a* $a_j > b_j$ *pro aspoň jedno* $j \in Q$*. Množinu všech paretovských rozdělení značíme* P*.*

Definici optimálního rozdělení dostaneme také zobecněním definice pro 2 hráče.

Definice 3.14. *Nechť* $b^* = (b_1^*, \ldots b_N^*)$ *je střední hodnota rozložení pravděpodobností s nejmenším obsahem informace na množině* P *(pokud existuje). Rozdělení*

*$a^* = (a_1^*, \dots a_N^*) \in P$ nazveme **optimálním**, jestliže má vlastnost*

$$\rho(a^*, b^*) = \min_{a \in P} \rho(a, b^*),$$

*kde ρ je (euklidovská) metrika v E_N. **Optimálními strategiemi** nazveme ty strategie $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$, po které platí $a_i^* = f_(x^*)$ pro všechny $i \in Q$.*

4 Pandemic

Pandemic je kooperativní hra, kterou vydala jako jednu ze svých strategických her firma ALBI Česká republika a.s.. Tato hra je určena pro 1-4 hráče, kteří mají za úkol společnými silami bojovat proti čtyřem nemocím, které se šíří celým světem. Hráči spolupracují na vynalézání léků a zabraňují dalšímu šíření chorob. Každý hráč k tomu využívá svoji roli se speciálními schopnostmi.

4.1 Shrnutí pravidel

Podrobná pravidla lze najít v [10], nebo na webových stránkách www.albi.cz.

4.1.1 Herní Materiál

Obrázek 2: Karty rolí

Hra obsahuje herní plán, na kterém je zobrazena mapa světa s městy. Mezi městy jsou spojnice, po kterých můžeme pohybovat figurkami pomocí tahů a v jednotlivých městech stavíme výzkumné stanice, které jsou důležité pro vynalézání léků. Těchto stanic máme pouze šest. Do měst se umísťují kostky nemocí, které signalizují, jak je nemoc v dané lokalitě rozšířena. Jelikož máme čtyři nemoci, jsou přiloženy čtyři barvy kostek nemocí s celkovým počtem 96.

Důležitým prvkem jsou karty, kterých je hned několik druhů. Pět karet rolí dává jejich majitelům speciální schopnosti. Dále máme balíček hracích karet, který obsahuje 48 karet měst, které jsou používány k akcím, pět karet speciálních událostí a šest karet epidemie. V neposlední řadě je 48 infekčních karet, které udávají, kam se nemoci budou šířit a 4 referenční karty, jež jsou vodítkem, jak hráči mají při hře postupovat.

Obrázek 3: Ukázka Hracích karet s kartou epidemie

Na herním plánu jsou vyhrazena místa pro žetony – žeton infekce, žeton pandemie a žetony léků a vymýcení nemocí. Přičemž žeton infekce se pohybuje po ukazateli míry infekce, který nám udává počet infikovaných měst při jednotlivých tazích (posuny na tomto ukazateli způsobují karty epidemie). Žeton pandemie se pohybuje po počítadlu pandemie, kde se musíme vyvarovat posunutí na poslední pozici v počítadlu, kterým by hra skončila.

4.1.2 Příprava hry

Každý hráč dostane jednu kartu rolí a figurku odpovídající barvy umístí do města Atlanta, což je výchozí sídlo týmu. Zde postavíme jednu výzkumnou stanici.

Na herní plán umístíme žeton pandemie na první pozici počítadla pandemie

Obrázek 4: Ukázka Infekčních karet

a žeton infekce na první pole ukazatele míry infekce.

Každý hráč dále dostane hrací karty. Počet těchto karet je různý podle počtu hráčů (2 hráči po 4 kartách, 3 hráči po 3 kartách a 4 hráči po 2 kartách). Poté do balíčku hracích karet přimícháme karty epidemie. Pokud zvolíme jednoduchou variantu, vložíme 4 karty epidemie. Při středně náročné hře 5 karet a při velmi náročné hře všech 6 karet epidemie. Tyto karty vmícháme tak, že nejprve rovnoměrně rozdělíme hrací karty na stejný počet částí balíčku, jako je počet karet epidemie a poté do každé části zamícháme jednu kartu epidemie. Karty opět poskládáme do dobíracího balíčku hracích karet, který umístíme na herní plán.

Na herní plán uložíme i zamíchaný balíček infekčních karet a pomocí něj rozmístíme počáteční kostky nemocí tak, že infikujeme prvních 9 měst. První tři města třemi kostkami, další tři města dvěma kostkami a poslední tři města pouze jednou kostkou. Barvy kostek musí odpovídat barvě infikovaného města.

4.1.3 Průběh hry

Hráč má v každém tahu 4 akce, kdy může využít nějakou kombinaci základních nebo speciálních akcí.

Základní akce

- Přejezd – přesun mezi městy, která jsou propojena červenou spojnicí.
- Přímý let – přesun do města, jehož kartu drží hráč v ruce (po zahrání ji odloží).
- Charterový let – přesun do libovolného města z města, jehož kartu drží hráč v ruce (po zahrání ji opět odloží).
- Let raketoplánem – přesun mezi městy, ve kterých jsou postavené výzkumné stanice.
- Vynechání akce – hráč se rozhodne akci nevyužít (nemůže si ji uschovat do dalšího kola).

Speciální akce

- Stavba výzkumné stanice – hráč může stanici postavit ve městě, ve kterém právě stojí a jehož kartu drží v ruce (po zahrání kartu odloží). Operační expert může postavit výzkumnou stanici v rámci jedné akce a nepotřebuje kartu města.
- Vynalezení léku – pokud hráč stojí ve městě s výzkumnou stanicí a má v ruce 5 karet stejné barvy (po vynalezení léku karty odloží). Vědci stačí pouze 4 karty.
- Léčení nemocí – odstranění jedné kostky z města, ve kterém hráč právě stojí. Pokud byl již vynalezený lék, může v rámci jedné akce sebrat všechny kostky odpovídající nemoci v daném městě. Medik může odstranit všechny kostky v rámci jedné akce, i když nebyl dosud vynalezený lék a po vynalezení léku může vzít všechny kostky z daného města bez spotřeby akce. Pokud se podaří odstranit všechny kostky dané barvy z herního plánu, dosáhli hráči vymýcení nemoci a infekční karty dané barvy nebudou mít na hru žádný vliv.
- Sdílení znalostí – přemístění karet od jednoho hráče k druhému. Hráč za cenu jedné akce předá kartu města, ve kterém oba hráči stojí. Výzkumník

může předat jakoukoliv kartu (není omezen městem, ve kterém oba hráči stojí).

Dalším krokem je braní karet. Hráči si po odehrání čtyř akcí vezme 2 karty z balíčku hracích karet. Přičemž v ruce může mít maximálně 7 karet, ostatní musí odhodit.

Balíček hracích karet obsahuje 5 speciálních karet – karty speciálních událostí. Pokud hráč při braní karet získá speciální akci, může ji použít kdykoli během hry (i při tahu spoluhráče). Při využití těchto karet hráči následují instrukce na ní, které jim dávají nějakou výhodu při hře.

V případě, že mezi sejmutými karty je karta epidemie, událost epidemie hráč zahraje hned. V prvním kroku hráč zvýší úroveň infekce o 1 stupeň na ukazateli míry infekce. Dále infikuje třemi kostkami město, které je zobrazeno na spodní kartě dobíracího balíčku infekcí. Tato karta je pak umístěna na odkládací balíček infekcí. Nakonec hráč zvýší intenzitu infekce tak, že zamíchá odkládací balíček infekcí a položí jej na dobírací balíček infekcí.

Posledním krokem je hraní infektora. Hráč sejme z dobíracího balíčku tolik karet, jakou má hodnotu míra infekce a přidá jednu kostku odpovídající barvy do každého města na sejmutých kartách. Pokud město již obsahuje 3 kostky nemoci stejné barvy, další kostku nemůže hráč přidat a dojde k pandemii.

Pandemie značí, že se nemoc šíří do okolních měst tak, že se přidá jedna kostka do každého sousedního města. Jestliže sousední město obsahuje také již tři kostky stejné barvy, nastane pandemická řetězová reakce. Přičemž každé město, které prochází touto reakcí, může být infikováno pouze jednou. Po zahrání se posune žeton pandemie na počitadle pandemií.

4.1.4 Konec hry

Hra končí porážkou, pokud nastane situace, kdy hráč musí infikovat kostkou město, ale v zásobě už žádné kostky nejsou. Prohranou hru způsobí i případ, když se žeton pandemie dostane na počítadle pandemií na symbol lebky, což je osmý a poslední stupeň pandemie. Poslední situací, která způsobí konec hry, je vyčerpání všech karet v balíčku hracích karet a hráč musí sejmout.

Naopak vítězství nastává, pokud se hráčům podaří vynalézt lék na všechny nemoci. V tomto případě hráči nemusí ani vyléčit všechna města a hru mají vyhranou.

4.2 Základní předpoklady

4.2.1 Příprava hry

Zde budeme předpokládat, že jde o jednoduchou hru, kterou hrají 4 hráči. Během přípravy hry jsme hráčům rozdali celkem 8 hracích karet $(4 \cdot 2)$ z 53 (karty epidemie jsou uloženy prozatím zvlášť).

Dále jsme zbylých 45 karet rozdělili na 4 části, protože v rámci jednoduché hry budeme přimíchávat 4 karty epidemie. Jedna hromádka bude po 12 a ostatní po 11 kartách, do každé části přimícháme jednu kartu epidemie a poskládáme na sebe.

V rámci přípravy hry můžeme také jednoduchými výpočty určit pravděpodobnosti infikování jednotlivých měst. Z kapitoly Shrnutí pravidel víme, že se na počátku hry infikuje celkem 9 měst z celkového počtu 48 měst na herním plánu. Pravděpodobnost jakéhokoli infikování města je $p = \frac{9}{48}$. Tuto pravděpodobnost můžeme určit i pro jednotlivé stupně infekcí. První tři města infikujeme třemi kostkami z celkového počtu 48 měst. Tedy je to náhodný výběr a pravděpodobnost je rovna $p = \frac{3}{48}$. U infikování dvěma kostkami jde o náhodný výběr 3 měst z počtu zbylých 45 měst. Proto $p = \frac{3}{45}$. Při posledním výběru, kdy infikujeme 3 města jednou kostkou, již je měst pouze 42 a $p = \frac{3}{42}$.

Při přípravě hry jsme tedy použili celkem $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 18$ kostek. V balíčku 48 infekčních karet nám pro tuto chvíli zůstalo 39 karet.

4.2.2 První kolo

Nejdříve hráč odehraje akcí a poté si hráč vezme 2 karty z balíčku hracích karet. Jelikož jsou hráči 4, je v prvním kole odebráno z balíčku celkem 8 hracích karet. Zde můžeme vyjádřit pravděpodobnost, s níž nastane epidemie v prvním kole. Protože v prvním kole hráči mohou odebrat jen 8 hracích karet, bude nás zajímat pouze vrchní část dobíracího balíčku, která je tvořena 12 hracími kartami a jednou kartou infekce. Jaké pořadí má karta infekce nevíme, ale v prvním kole může být tažena s pravděpodobností $p = \frac{8}{13}$. Celkový stav hracích karet po prvním kole bude 41.

V prvním kole si také uvedeme, kolik kostek může být přidáno. Jelikož jsou čtyři hráči a každý hráč bere dvě karty infekcí, je počet kostek uložených na herní plán v prvním kole $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$, pokud by nastala epidemie, zvýší se počet o 3. Snížit počet kostek může speciální akce. Pokud by některý z hráčů držel a následně použil akci Klidná noc, která by opravňovala dalšího hráče vynechat proces infikování. Ale jak zjistíme později, použití této karty je výhodné převážně v určitých situacích. Stav infekční karet, pokud v prvním kole nebyla epidemie, bude $39 - 4 \cdot 2 = 31$.

4.2.3 Druhé kolo

Pokud v prvním kole nenastala epidemie, v druhém kole nastane určitě, tedy s pravděpodobností $p = 1$. Je to z toho důvodu, že již při tahu třetího hráče se vyčerpá vrchní část dobíracího balíčku, kde tato karta je právě jednou. Nicméně, zde může epidemie nastat i podruhé, protože hráči odeberou ještě 3 karty z druhé části (v každém kole hráči vezmou celkem 8 hracích karet, z minulého kola zbylo v horní části pouze 5 karet z (12+1)). Víme, že v druhé části je celkem 12 karet i s kartou epidemie a pravděpodobnost, že vezmeme právě tuto kartu je $p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Po druhém kole můžeme říct, že pokud nebude požita akce Klidná noc, bude počet umístěných kostiček minimálně 37 (18 kostek při přípravě, 8 v prvním kole, 8 v druhém kole, 3 za epidemii). Tento počet se může navýšit o 3 v důsledku druhé epidemie.

Po první epidemii nastává možnost pandemie, protože již použité infekční karty po zamíchání přidáme zpět na balíček infekčních karet. Tato možnost se týká měst, která jsou infikována třemi kostkami. Pravděpodobnost vzniku pandemie můžeme určit:

$$p = \frac{\textit{počet měst obsahujících tři kostky}}{\textit{celkový počet měst infikovaných do doby epidemie včetně přípravy hry}}$$

Pokud bychom se zaměřili na hrací karty, po druhém kole bude v dobíracím balíčku pouze 41 karet. Během každého kola nám jejich počet opět o 8 klesne, z čehož vyplývá, že hra může mít jen 7 kol a v osmém kole skončí, protože hned první hráč si nemůže vzít dvě hrací karty.

4.2.4 Odebírání kostek

Jak je zřejmé ze hry, hráči mají za úkol také zabránění šíření nemocí. Je tedy třeba odebírání kostek jednotlivými hráči – tzv. léčení. V rámci svého tahu (vzhledem ke čtyřem akcím) může běžný hráč obvykle odebrat maximálně 3 kostky. Může nastat situace, kdy je město infikováno více než třemi kostkami (ovšem počet kostek jedné barvy nesmí přesáhnout 3) a hráč odebere v rámci čtyřech akcí celkem čtyři kostky. Toto je ale maximální možný počet odebraných kostek jedním hráčem při jednom tahu, pokud nebyl vynalezen lék. Daleko častější je odebrání jedné nebo dvou kostek a jsou i situace, kdy hráč všechny své akce v rámci jednoho tahu využije pouze na přesuny, popřípadě stavbu výzkumné stanice nebo vynalezení léku. Daleko lepší situaci má hráč, který při přípravě hry obdržel kartu role medika. Tento hráč v rámci jedné akce může ve městě posbírat všechny kostky jedné barvy. Teoreticky, pokud by město, ve kterém se medik nachází, bylo infikováno od každé barvy třemi kostkami, může jich posbírat až 12. Tento případ se ve hře téměř nestává.

5 Apendix

Pro hráče bude velice výhodné znát základy teorie grafů. Je to z toho důvodu, že herní plán hry Pandemic, je tvořen síťovým grafem, kde města tvoří uzly grafu a spojnice mezi městy tvoří hrany grafu. Každá spojnice mezi dvěma městy je ohodnocena spotřebou jedné akce Přejezd (pokud se hráč nepřesouvá mezi městy pomocí jiné akce).

5.1 Floyd-Warshallův algoritmus

Základním problémem k řešení je spotřeba co nejméně akcí na přesun mezi dvěma městy. Jedním z prostředků, jak nalézt nejkratší cestu mezi všemi dvojicemi uzlů grafu s reálnými hodnotami grafu, je Floyd-Warshallův algoritmus. Při psaní této kapitoly jsem převážně čerpala z [11].

Tento algoritmus má na vstupu matici délek $D^{(0)}$, kde její prvky označují informace o hranách mezi dvěma uzly. Pokud mezi uzly (i,j) existuje hrana, bude v matici uvedena ohodnocením její hrany. Pokud hrana mezi těmito uzly neexistuje, je v matici dána jako nekonečno. Na hlavní diagonále budou samé nuly. Postupně se tato matice přepočítává tak, že prvky budou vyjadřovat délku cesty přes stále zvětšující se k-počet prostředníků. Algoritmus lze zapsat

$$d_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} w_{i,j} & k = 0 \\ \min(d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}) & k \geq 1 \end{cases}$$

FLOYD-WARSHALL(W)

$D^{(0)}$:=W

for k := *1* to n do

  for i := *1* to n do

    for j := *1* to n do

      $d_{i,j}^{(k)} := min(d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)})$

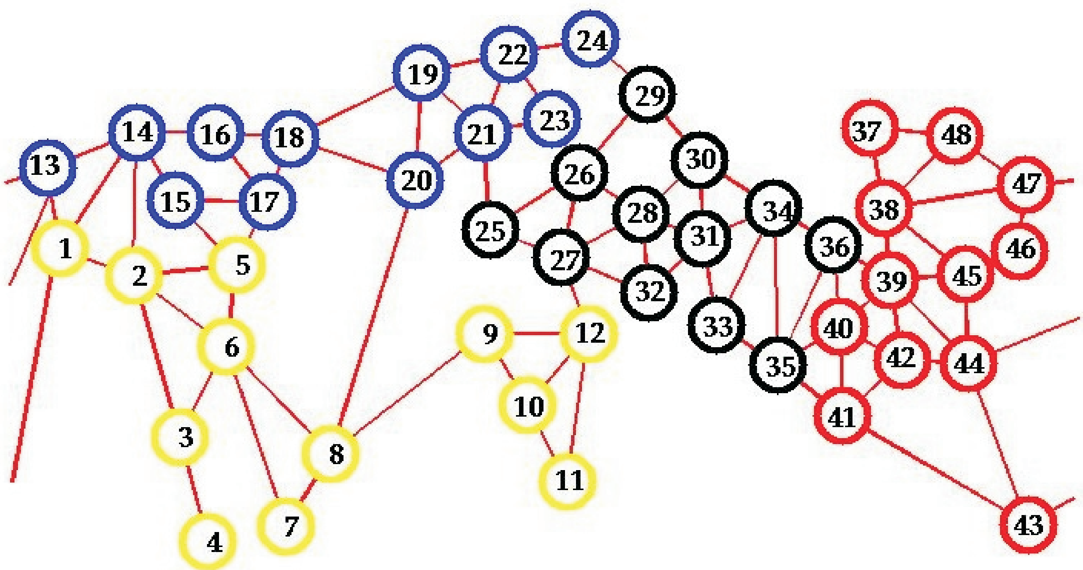
return $D^{(n)}$

6 Matice vzdáleností

Pro zjednodušení si k jednotlivým městům přiřadíme čísla. Toto přiřazení nám zobrazuje tabulka.

	žlutá		modrá		černá		červená
01	Los Angeles	13	San Francisko	25	Alžír	37	Peking
02	Mexico City	14	Chicago	26	Istanbul	38	Šanghaj
03	Lima	15	Atlanta	27	Káhira	39	Hong Kong
04	Santiago	16	Toronto	28	Bagdád	40	Bangkok
05	Miami	17	Washington	29	Moskva	41	Jakarta
06	Bogota	18	New York	30	Teherán	42	Ho Či M. M.
07	Buenos Aires	19	Londýn	31	Karáčí	43	Sydney
08	Sao Poulo	20	Madrid	32	Rijád	44	Manila
09	Lagos	21	Paříž	33	Bombaj	45	Taipei
10	Kinshasa	22	Essen	34	Dillí	46	Ósaka
11	Johannesburg	23	Milán	35	Čennaj	47	Tokio
12	Chartúm	24	Petrohrad	36	Kalkata	48	Soul

Rozestavení měst na herním plánu můžeme znázornit pomocí obrázku 5. Zde jsou zakreslena města pomocí kružnice příslušné barvy odpovídající barvě daného města. Uvnitř kružnice jsou městům přiřazena čísla z předchozí tabulky.



Obrázek 5: Číslovaní měst a spojnice mezi městy

Pomocí přiřazených čísel můžeme sepsat výčet měst, mezi kterými na herním plánu existuje spojnice. Tj. přímá cesta, po které se můžeme pomocí jedné akce přejezd či převoz lodí dostat z jednoho města do druhého.

Zavedeme si předpis $a_{i,j}$, který je dán následovně.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = j, \\ 1 & \text{pokud } \textit{mezi městy i a j spojnice existuje a } i \neq j, \\ \infty & \text{pokud } \textit{mezi městy i a j spojnice neexistuje a } i \neq j, \end{cases}$$

kde $i, j \in 1, 2, \ldots, 48$.

Nyní můžeme sestavit tabulku, která obsahuje informace, mezi jakými městy existuje přímá cesta. U ostatních dvojic měst spojnice neexistuje a pro přesun mezi těmito městy budeme potřebovat více než jednu akci přejezd či přesun lodí nebo některý z letů. Samozřejmě nutno předpokládat, že pokud existuje přímá cesta z města i do města j, existuje i cesta v opačném směru. Tedy $a_{i,j} = a_{j,i}$.

žlutá	modrá	černá	červená	kombinace
$a_{1,2}$	$a_{13,14}$	$a_{25,26}$	$a_{37,38}$	$a_{1,13}$
$a_{2,3}$	$a_{14,15}$	$a_{25,27}$	$a_{38,39}$	$a_{1,14}$
$a_{3,4}$	$a_{14,16}$	$a_{26,27}$	$a_{39,40}$	$a_{1,43}$
$a_{2,5}$	$a_{15,17}$	$a_{26,28}$	$a_{40,41}$	$a_{2,14}$
$a_{2,6}$	$a_{16,17}$	$a_{27,28}$	$a_{39,42}$	$a_{5,15}$
$a_{3,6}$	$a_{16,18}$	$a_{26,29}$	$a_{40,42}$	$a_{5,17}$
$a_{5,6}$	$a_{17,18}$	$a_{28,30}$	$a_{41,42}$	$a_{8,20}$
$a_{6,7}$	$a_{18,19}$	$a_{29,30}$	$a_{41,43}$	$a_{12,27}$
$a_{6,8}$	$a_{18,20}$	$a_{28,31}$	$a_{39,44}$	$a_{13,47}$
$a_{7,8}$	$a_{19,20}$	$a_{30,31}$	$a_{42,44}$	$a_{13,44}$
$a_{8,9}$	$a_{19,21}$	$a_{27,32}$	$a_{43,44}$	$a_{21,25}$
$a_{9,10}$	$a_{20,21}$	$a_{28,32}$	$a_{38,45}$	$a_{23,26}$
$a_{10,11}$	$a_{19,22}$	$a_{31,32}$	$a_{39,45}$	$a_{24,29}$
$a_{9,12}$	$a_{21,22}$	$a_{31,33}$	$a_{44,45}$	$a_{35,40}$
$a_{10,12}$	$a_{21,23}$	$a_{30,34}$	$a_{45,46}$	$a_{35,41}$
$a_{11,12}$	$a_{22,23}$	$a_{31,34}$	$a_{38,47}$	$a_{36,39}$
	$a_{22,24}$	$a_{33,34}$	$a_{46,47}$	$a_{36,40}$
		$a_{33,35}$	$a_{37,48}$	
		$a_{34,35}$	$a_{38,48}$	
		$a_{34,36}$	$a_{47,48}$	
		$a_{35,36}$		

Nejkratší vzdálenosti všech měst získáme pomocí Floyd-Warshallova algoritmu. Na vstupu bude matice, která bude mít na diagonále nuly. Ostatní prvky matice budou jedničky, pokud mezi městy přímá cesta existuje (prvky dány tabulkou) a nekonečna, pokud mezi městy přímá cesta neexistuje (ostatní prvky, které tabulka neobsahuje mimo diagonální).

Matice vzdáleností mezi městy je[3] (písmena Y, C, K a R označují barvy yellow, cyan, black, red):

$$\begin{pmatrix} V_{YY} & V_{YC} & V_{YB} & V_{YR} \\ V_{CY} & V_{CC} & V_{CB} & V_{CR} \\ V_{BY} & V_{BC} & V_{BB} & V_{BR} \\ V_{RY} & V_{RC} & V_{RB} & V_{RR} \end{pmatrix}$$

$$V_{YY} = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & - & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & - & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & - & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & - & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & - & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & - & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & - & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & - & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & - & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & - \end{pmatrix}$$

$$V_{YC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[3] Matice získaná pomocí programu Matlab

$$V_{YB} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 7 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$V_{YR} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 7 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 7 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 8 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$V_{CY} = V'_{YC}$$

$$V_{CC} = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & - & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & - & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & - & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & - & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & - & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$V_{CB} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 & 7 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 5 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_{CR} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$V_{BY} = V'_{YB}$$

$$V_{BC} = V'_{CB}$$

$$V_{BB} = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & - & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & - & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & - & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & - & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & - & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & - & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & - & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & - \end{pmatrix}$$

$$V_{BR} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V_{RY} = V'_{YR}$$

$$V_{RC} = V'_{CR}$$

$$V_{RB} = V'_{BR}$$

$$V_{RR} = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & - & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & - & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & - & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & - & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & - & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & - & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & - & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & - & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & - & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & - \end{pmatrix}$$

7 Moje hra s vedoucím práce

Stanovili jsme jednoduchou hru 4 hráčů, vedoucí práce i já budeme zastávat dvě role hráčů. Po rozdání karet rolí, kde role vedoucího práce jsou výzkumník a vědec a mé role dispečer a medik, rozestavíme výchozí situaci.

Pro propojení s teorií kooperativních her si musíme zavést nějakou funkci výplaty, kterou hráči mohou při hře získat. Jelikož společnou schopností všech hráčů je léčení nemocí, budeme posuzovat zisk hráče z tohoto hlediska. Hodnota výhry pro k-tého hráče po jeho tahu je tedy dána:

$v(k) =$*počet odebraných kostek*$-$*počet přidaných kostek*,

kde $k \in \{1, 2, 3\}$ v pořadí výzkumník, vědec, dispečer.

Pro roli medika funkci výplat upravíme, protože je jako jediný v léčení zvýhodněn svými schopnostmi.

$v(4) =$*počet vyléčených měst*$-$*počet přidaných kostek*.

Výplatní matice pro k-tého hráče je (x je počet kostek přidaných, y je počet kostek odebraných)

x/y	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	-1	0	1	2	3
2	-2	-1	0	1	2
3	-3	-2	-1	0	1
4	-4	-3	-2	-1	0
5	-5	-4	-3	-2	-1
6	-6	-5	-4	-3	-2

Pro medika bude výplatní matice stejného tvaru, se změněným y na počet vyléčených měst.

Matice strategií pro běžného hráče je ve tvaru:

x/y	0	1	2	3	4
0	-2	-1	0	1	2
1	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
2	-1	0	1	2	3
3	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
4	0	1	2	3	4
lék	6	6	6	6	6

Pro hráče s rolí medika bude matice strategií s tvarem:

x/y	0	1	2	3	4
0	0	2	4	6	8
stanice	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5
lék	6	6	6	6	6

V obou maticích x značí využití speciální akce a y odebírání kostek.

Pro hráče bude výhodné spolupracovat jak na vynalézání léků, tak i při přepravování. Po vynalezení léků všichni hráči budou moci získat vyšší výhry, protože v rámci jedné akce mohou posbírat ve městě všechny kostky. Pro medika to také bude výhodné, protože po vynalezení léku stačí být ve městě, aby ho vyléčil, a nespotřebuje na to akci, kterou může použít na přesun do dalšího města s kostkami. Hráči si tedy uvědomují, že jejich cílem není jen léčení nemocí, ale i přeprava mezi městy, předávání karet a stavba výzkumných stanic. Také se hráči musí snažit pomocí společných sil eliminovat města se třemi kostkami, což prospěje také všem hráčů. Tímto se sníží nebezpečí pandemie, která by hráčům mohla snížit výhru, aniž by se o to přičinili oni sami. Pro hráče je tedy přijatelné pomoci jinému hráči v přesunu, aby odebral kostky v některých z měst, kde by pandemie hrozila.

Další strategií, kterou budeme řešit, je volba umístění výzkumných stanic. K tomu využijeme matici vzdáleností uvedené v kapitole 7. Nejprve vybereme města, která se nachází nejdál od Atlanty, kde stojí první výzkumná stanice. Hledáme tedy

$$\max_j a_{15,j},$$

kde $j \in \{1, 2, \ldots, 14, 16, \ldots, 48\}$. Toto maximum nastává pro $a_{15,28} = a_{15,30} = a_{15,31} = a_{15,32} = 7$. Podle tohoto návodu by se hráči měli snažit stavět výzkumné stanice v některém z měst Bagdád, Teherán, Karáčí, Rijád.

Následně je nutno uvážit i stupeň uzlu v grafu. Optimální pro hru bude postavit stanici ve městě s největším počtem odchozích tras. Tímto městem je Bagdád a Karáčí, kde je stupeň uzlu roven pěti. Z města Teherán vedou 4 cesty a z Rijádu pouze 3.

Po umístění stanice najdeme město, jehož součet vzdáleností od obou měst s výzkumnou stanicí je největší. Pokud bychom postavili výzkumnou stanici např. v Bagdádu, budeme hledat

$$\max_j (a_{15,j} + a_{28,j}).$$

Ovšem v naší hře jsou hráči při stavbě výzkumných stanic omezeni nutností zahrát kartu odpovídající městu, ve kterém chtějí stanici postavit (ve hře není role operačního experta). Proto se někdy nelze přiklonit k strategickému rozmístění stanic a stavba se realizuje dle karet v držení. V lepším případě jsou to města v blízkosti strategického rozmístění.

Následně se budeme zabývat konkrétním rozestavením a volbou strategií, které se budou jevit za vhodné. Volba strategie se odvíjí od našich předchozích zkušeností s hrou.

Počáteční rozložení hry je znázorněno pomocí v příloze 0. Zde je uvedeno, jaké karty hráči obdrželi a počáteční infikování měst. Infekce ve městě (počet kostek ve městě) je znázorněna číslem v kružnici příslušného města.

Hrací karty:

- Výzkumník – Sydney, Essen;
- Vědec – San Francisco, Soul;
- Dispečer – Karta zvláštní události Vládní grant, Mexico City;
- Medik – Manila, Káhira.

Infikování měst:

- 3 kostky – Londýn, Teherán, Milán;
- 2 kostky – Washington, Kalkata, Alžír;

- 1 kostka – Lima, Káhira, Bombaj.

Hráči budou své tahy realizovat v pořadí Výzkumník – Vědec – Dispečer – Medik. Přitom se budou snažit využívat speciální schopnosti role, kterou obdrželi.

7.1 1. kolo

Průběh prvního kola je znázorněn pomocí příloh 1.A, 1.B, 1.C a 1.D. Tyto přílohy vždy udávají stav po odehrání jednotlivých hráčů (v pořadí, ve kterém realizovali své tahy). Výskyty hráčů jsou zakresleny pomocí vlajek.

Výzkumník

Na počátku hry se hráči domluvili, že Výzkumník se bude zabývat léčením žlutých kostek. Vědec se vydá léčit modré kostky a po tahu obou hráčů se bude řešit další postup podle toho, jak se hra v průběhu kola vyvine.

- **Akce:** Předání karty Sydney vědci; předání karty Essen vědci; přesun do Miami; přesun do Bogoty.
- **Hrací karty:** Bagdád, Rijád.
- **Infikování měst:** Santiago, Bogota.

Vědec

- **Akce:** Přesun do města Washington; léčení jedné kostky ve městě Washington; léčení druhé modré kostky ve městě Washington; přesun do města New York.
- **Hrací karty:** Buenos Aires, Hong Kong.
- **Infikování měst:** Karáčí, Čennaj.

Dispečer

Jelikož hráči chtějí co nejefektivněji využívat své schopnosti, vyzkouší hráči v následujících tazích spolupráci dispečera s medikem. Myšlenka plyne z toho, že medik zbytečně své akce spotřebuje na přesuny a poté neposbírá dostatek kostek.

- **Akce:** Přesune vědce do Londýna; přesune medika do Londýna za vědcem; přesune vědce do Bogoty za výzkumníkem; přesune vědce do Buenos Aires.

Poslední dvě akce by se mohly zdát jako zbytečné plýtvání akcí, ale hráči přemýšleli nad tím, že brzy bude mít vědec moc karet a nějaké by se měl zbavit. Aby kartu nemusel odhodit, využije ji v dalším kole na stavbu výzkumné stanice v Buenos Aires. Na léčení modrých kostek zatím nebude třeba, protože tuto úlohu má v dalším kole plnit medik.

- **Hrací karty:** Kalkata, Taipei.
- **Infikování měst:** Šanghaj, Peking.

Medik

- **Akce:** Posbírá všechny kostky v Londýně; přesun do města Essen; přesun do města Milán; posbírá všechny kostky v Miláně.
- **Hrací karty:** Alžír, New York.
- **Infikování měst:** Ósaka, Essen.

Po první kole hráči posbírali celkem 8 kostek z původního počtu 18-ti umístěných kostek. Na herní plán nově umístili 8 kostek, tedy dle počtu kostek jsou na stejné pozici. Karta epidemie v prvním kole nenastala, můžeme ji tedy očekávat s jistotou v kole druhém.

7.2 2. kolo

Jednotlivé stavy hry pro druhé kolo jsou uvedeny v přílohách 2.A, 2.B, 2.C a 2.D. Obdobně jsou znázorněny i průběhy hry v následujících kolech, kde číslo přílohy udává číslo kola a písmena jednotlivé hráče.

Výzkumník

- **Akce:** Posbírá jednu kostku v Bogotě; přesun do města Lima; přesun do města Santiago; posbírá kostku v Santiagu.
- **Hrací karty:** Epidemie, karta zvláštní události - Odolná populace.

Při epidemii hráč infikoval Sao Paulo a zamíchal karty. Následně můžeme tedy očekávat ohrožení pandemií u měst Teherán a Sao Paulo, kde je po třech kostkách.

Jelikož medik je v blízkosti Teheránu a vědec u Sao Paula, hráči použijí kartu Odolné populace na město s dvěma kostkami, a to na Alžír.

- **Infikování měst:** Šanghaj, Kalkata.

Vědec

- **Akce:** Stavba výzkumné stanice ve městě Buenos Aires; přesun do Sao Paulo; posbírání kostky v Sao Paulo; přesun zpět do Buenos Aires.

Poslední krok je z toho důvodu, že se chce vědec dostat do červené části. K tomu mu dopomůže dispečer, který ho potom přesune v rámci letu raketoplánem mezi dvěma výzkumnými stanicemi do Atlanty a poté se Vědec sám přesune pomocí tří akcí do Manily.

- **Hrací karty:** Lagos, Chicago.
- **Infikování měst:** Washington, Milán.

Dispečer

Hráči se dohodli, že pomocí karty dispečera Vládní grant postaví výzkumnou stanici v některém z černých měst. Hráči vybrali Čennaj i přes to, že poloha tohoto města není dle strategického rozmístění výzkumných stanic. Město se vybralo na základě počtu vycházejících cest z tohoto města a polohy blízko červeným městům pro rychlý přesun. Ve svých tazích se dispečer rozhodl nadále spolupracovat s medikem.

- **Akce:** Přesune vědce do Atlanty; přesune medika do Istanbulu; přesune medika do Bagdádu; přesune medika do Teheránu.
- **Hrací karty:** Istanbul, Londýn.
- **Infikování měst:** Čennaj, Karáčí.

Medik

- **Akce:** Posbírá všechny kostky v Teheránu; přesun do města Dillí; přesun do města Kalkata; posbírá všechny kostky v Kalkatě.

- **Hrací karty:** Milán, Bombaj.
- **Infikování měst:** Bogota, Santiago.

Hráči opět v tomto kole posbírali 8 kostek, na herní plán umístili 11, přičemž žádné město nemá po třech kostkách. V dalších kolech by hráči chtěli řešit nejen léčení ale i tvorbu léků. Strategie se teď bude formulovat na základě předávání karet, aby hráči mohli lék vynalézt.

7.3 3. kolo

Hráči si před tímto kolem naplánovali jeho možný průběh. Plán spočíval v tom, že by dispečer mohl postavit výzkumnou stanici v červeném městě Taipei. Vědec by mohl skončit po odehrání akcí v Manile pro případ, že bude potřebovat předání červené karty Manila od medika. Vědec má za úkol v co nejbližší době vynalézt lék na některou z nemocí (dle jeho karet to bude buď červený, nebo modrý). Výzkumník bude prozatím léčit kostky, protože čeká, jakou kartu obdrží. Jelikož v tomto kole hráči až na jednu kartu doberou druhou část balíčku hracích karet, hráči budou počítat s epidemií.

Jak následně uvidíme, průběh hry se neustále mění a plány stanovené na počátku kola nemusí být zcela naplněny.

Výzkumník

- **Akce:** Odebere kostku v Santiagu; přesune se do Limy; odebere kostku v Limě; přesune se do Mexico city.
- **Hrací karty:** Ósaka, Ho Či Minovo Město.
- **Infikování měst:** Bombaj, Káhira.

V důsledku předchozích událostí se hráči rozhodli změnit plán. Výzkumník dostal červené karty, proto předávání červených karet vědci bude lepší ve 4. kole nechat na něm (pokud vědec karty nezíská sám). Medik se raději bude zabývat léčením kostek, což bude pro hru výhodnější. Dalším nápadem je, že předat modrou kartu vědci by mohl dispečer ještě v tomto kole, protože jejich figurky jsou blízko sebe. Vynalezení modrého léku by tak bylo zajištěno.

Vědec

- **Akce:** Přesun do Washingtonu; odebere kostku ve Washingtonu; přesun do New Yorku; přesun do Londýna, kde bude čekat na dispečera.
- **Hrací karty:** Miami, Bogota.

Jelikož má vědec nadbytek karet, musí některé odhodit. Prozatím nepotřebné jsou karty žluté – Lagos, Bogota. Odhození těchto karet nebude pro hru problémem, protože ve hře bylo dosud celkem 5 žlutých karet a v dobíracím balíčku je tedy ještě dostatek karet pro vynalezení žlutého léku.

- **Infikování měst:** Lima, Sao Paulo.

Hráči mají vymyšleno, jak vynaleznou modrý a červený lék (oba léky vynalezne medik). Dále budou řešit problém vynalezení černého léku. Černé karty by mohl předat výzkumník dispečerovi. Z původního plánu postavení červené výzkumné stanice bylo prozatím upuštěno.

Dispečer

- **Akce:** Přesun do Londýna za vědcem; předá kartu Londýn vědci; přenese výzkumníka do Bogoty, aby byl blíže Sao Paulu; přesune se za výzkumníkem, aby ten mu v příštím kole dal černé karty.
- **Hrací karty:** Epidemie, Čennaj.

V rámci epidemie byl infikován třemi kostkami Istanbul.

- **Infikování měst:** Milán, Káhira.

Po epidemii se můžeme obávat nového infikování Istanbulu. Medik se vydává tedy léčit černé. U Sao Paulo není takový problém, protože při pandemii budou infikována jen 3 města.

Medik

- **Akce:** Použije kartu Káhira a letí do ní; odebere všechny kostky v Káhiře; přesune se do Istanbulu; odebere všechny v Istanbulu.
- **Hrací karty:** Moskva, Klidná noc.
- **Infikování měst:** Karáčí, Čennaj.

7.4 4. kolo

Výzkumník

- **Akce:** Předá kartu Bagdád dispečerovi; předá kartu Rijád dispečerovi; přesune se do Sao Paulo; odebere jednu kostku v Sao Paulu.
- **Hrací karty:** Lima, Karáčí.
- **Infikování měst:** Kalkata, Bogota.

Vědec

- **Akce:** Přesun do New Yorku; přesun do Washingtonu; přesun do Atlanty; vynalezení modrého léku.
- **Hrací karty:** Jakarta, Šanghaj.
- **Infikování měst:** Santiago, Washington.

Dispečer dále má za úkol vynalézt černý lék a vědec by se měl dostat do červených měst. Pomoci mu může dispečer.

Dispečer

- **Akce:** Přesun do Atlanty za vědcem; přesun do Čennaje (let mezi stanicemi); vynalezne černý lék; přesune vědce do Čennaje za ním.
- **Hrací karty:** Peking, Bangkok.
- **Infikování měst:** Šanghaj, Sao Paulo.

Medik

Medik může vyléčit černá měst bez spotřeby akce. Postačující je, když se nachází v daném městě.

- **Akce:** Přesun do Bagdádu; přesun do Karáčí + léčení všech kostek; přesun do Bombaj + léčení všech kostek; přesun do Čennaje + léčení všech kostek.
- **Hrací karty:** Epidemie, Madrid.

V rámci epidemie infikování Buenos Aires.

- **Infikování měst:** Kalkata, Čennaj, Buenos Aires - pandemie(Bogota, Madrid, Lagos).

7.5 5. kolo

V tomto kole vědec vynalezne červený lék (vědec si postaví i stanici). Ostatní hráči budou léčit a čekat na příchod žlutých karet.

Výzkumník

- **Akce:** Sběr kostky v Sao Paulu; sběr kostky v Sao Paulu; přesun do Bogoty; sběr kostky v Bogotě.
- **Hrací karty:** Teherán, Petrohrad.
- **Infikování měst:** Milán, Sao Paulo, Šanghaj – pandemie (Peking, Soul, Tokio, Taipei, Hong Kong).

Vědec

- **Akce:** Přesun do Jakarty; stavba výzkumné stanice; vynalezení léku na červené; přesun do Ho či Minova Města.
- **Hrací karty:** Los Angeles, Santiago.
- **Infikování měst:** Káhira, Bogota, Santiago.

Jelikož vědci přišly žluté karty, hráči ho pověřili vynalezením žlutého léku. Po domluvě se rozhodli, že dispečer předá vědci Mexico a v příštím kole mu předá výzkumník Limu. Hned poté může vědec vynalézt žlutý lék.

Dispečer

- **Akce:** Přesun do Bogoty za výzkumníkem; přesun do Mexica; přesune vědce do Mexica za ním; předá kartu Mexico vědci.
- **Hrací karty:** Kinshasa, Washington.
- **Infikování měst:** Washington, Karáčí, Istanbul.

Medik

Medik se nachází ve městě Čennaj, kde může odebrat kostky bez spotřeby akce.

- **Akce:** Přesun do Kalkaty + léčení všech kostek; přesun do Hong Kongu + léčení všech kostek; přesun do Šanghaje + léčení všech kostek; přesun do Pekingu + léčení všech kostek.
- **Hrací karty:** Dillí, Johannesburg.
- **Infikování měst:** Bombaj, Lima, Teherán.

7.6 6. kolo

Výzkumník

- **Akce:** Sběr kostky v Bogotě; sběr kostky v Bogotě; přesun do Mexica; předání karty Lima vědci.
- **Hrací karty:** Toronto, Chartúm.
- **Infikování měst:** Londýn, Ósaka, Essen.

Vědec

- **Akce:** Přesun do Bogoty; přesun do Buenos Aires; vynalezení žlutého léku; odebrání všech kostek v Buenos Aires.
- **Hrací karty:** Sao Paulo, Přeprava.
- **Infikování měst:** Peking, Moskva, Sydney.

Tímto hráči vyhráli. Dále mohou sbírat kostky, aby si maximalizovali svoji výplatu.

Ve hře jsme ukázali, že je velice přínosná spolupráce dispečera s medikem. Dále je žádoucí, aby si hráči předávali karty pro vynalézání léku. Předání karet je důležité především při hře více než dvou hráčů, protože hráči na počátku obdrží méně karet a je pro ně složitější svépomocí nasbírat požadovaný počet karet jedné barvy. Na průběhu hry je vidět, že karty zvláštních událostí nejsou nezbytné pro úspěšné dokončení hry.

Závěr

Díky této práci jsem se přesvědčila, že teorie her má široké uplatnění v mnoha oborech a že získané poznatky mohu využít i v každodenních situacích, kde je nutné činit rozhodnutí. Načerpané znalosti jsem se snažila předat čtenáři v co nejsrozumitelnější formě.

Čtenář se v práci seznámil nejen se základními pojmy teorie her, ale převážně byl uveden do problematiky možné spolupráce mezi hráči. Řešili jsme otázku, kdy má smysl uzavírat dohodu o spolupráci a jakou strategii pak zvolit. Z mnoha zdrojů jsme jistili, že hráč bude vybírat takové řešení situace, které mu přinese největší užitek. Při hře více než dvou hráčů jsme rozebrali problém tvorby koalic a v neposlední řadě byly čtenářům přiblíženy varianty možného dělení případné výhry při spolupráci.

Na uvedených příkladech bylo znázorněno, že teorie her má uplatnění i v ekonomickém a hospodářském sektoru. Pomocí těchto příkladů jsem se snažila čtenáři více osvětlit znění některých pojmů a definic.

Následně jsme si ukázali, že teorie her může být vedena i zábavnou formou. Právě teorie kooperativních her dala podnět k sestavení několika nových deskových her. V této práci jsme analyzovali hru Pandemic. Uvedli jsme, na které situace musí hráči brát ohled a jak při hře spolupracovat. Dále jsme na hře demonstrovali, že v teorii her můžeme aplikovat i teorii grafů.

Literatura

[1] Gross I., Kvantitativní metody v manažerském rozhodování, Grada Publishing, a.s., Praha 2003

[2] Šlechta J., Optimální rozhodování a řízení, ČVUT v Praze, Praha 1999

[3] Maňas M., Teorie her a konflikt zájmů, Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica, Praha 2002

[4] Maňas M., Teorie her a optimální rozhodování, Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha 1974

[5] Blackwell D. a Girshick M.A., Teorie her a statistického rozhodování, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1964

[6] Říha O., Základy teorie her, JČSMF, Praha 1973

[7] Friebelová J., Teorie her [online], dostupné z

http://www2.ef.jcu.cz/j̃frieb/rmp/data/teorie_oa/TEORIE%20HER.pdf, [citováno 11. 10. 2011]

[8] Peško Š., Teória hier [online], dostupné z

http://frcatel.fri.utc.sk/p̃esko/TH/th2.pdf, [citováno 21. 3. 2011]

[9] Friebelová J., Teorie her [online], dostupné z

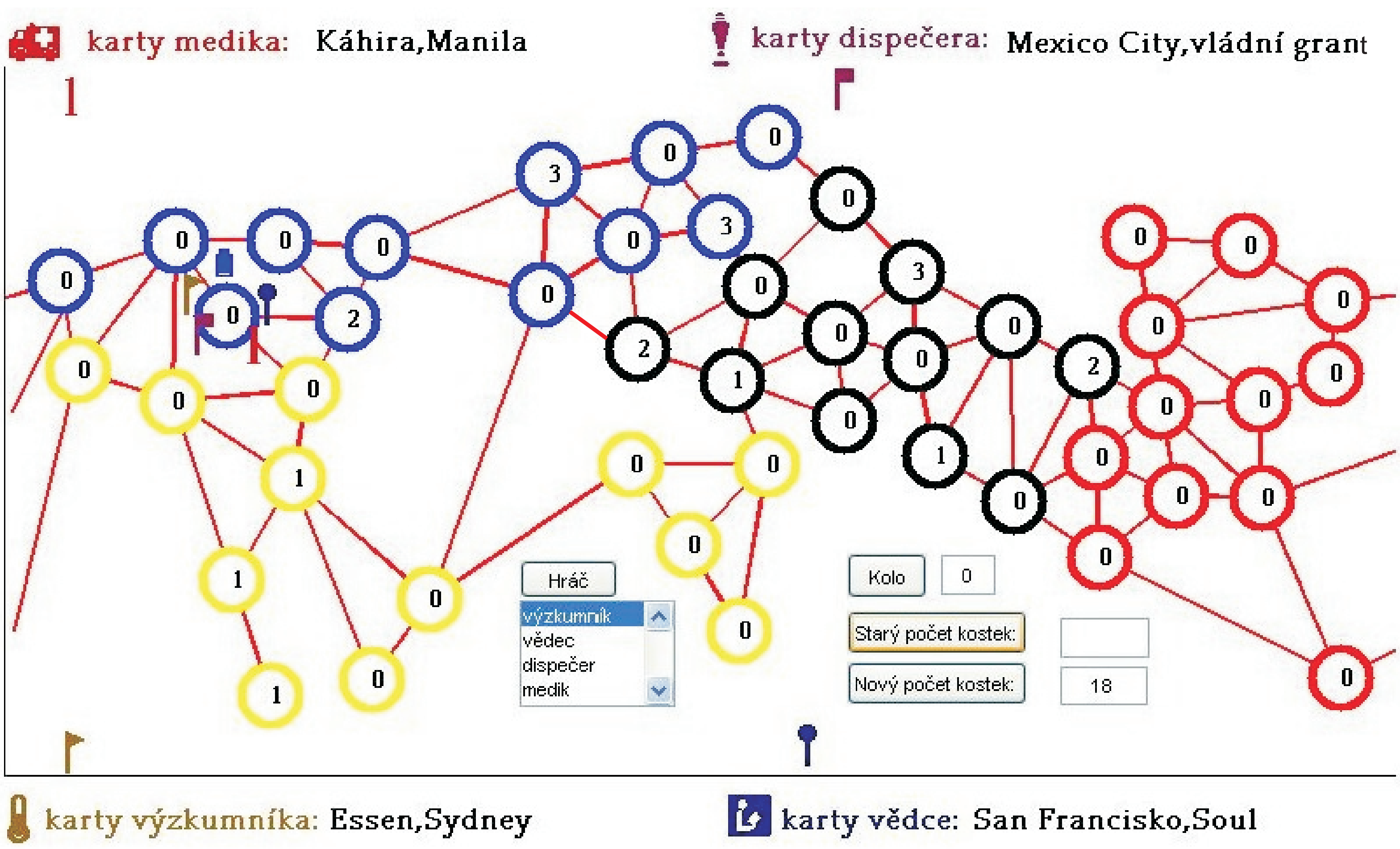
http://www2.ef.jcu.cz/j̃frieb/prednasky_komplet/skriptaRM_TH.pdf, [citováno 19. 3. 2011]

[10] Matt Leacock, Pravidla hry Pandemic, ALBI Česká republika a.s., 2. vydání

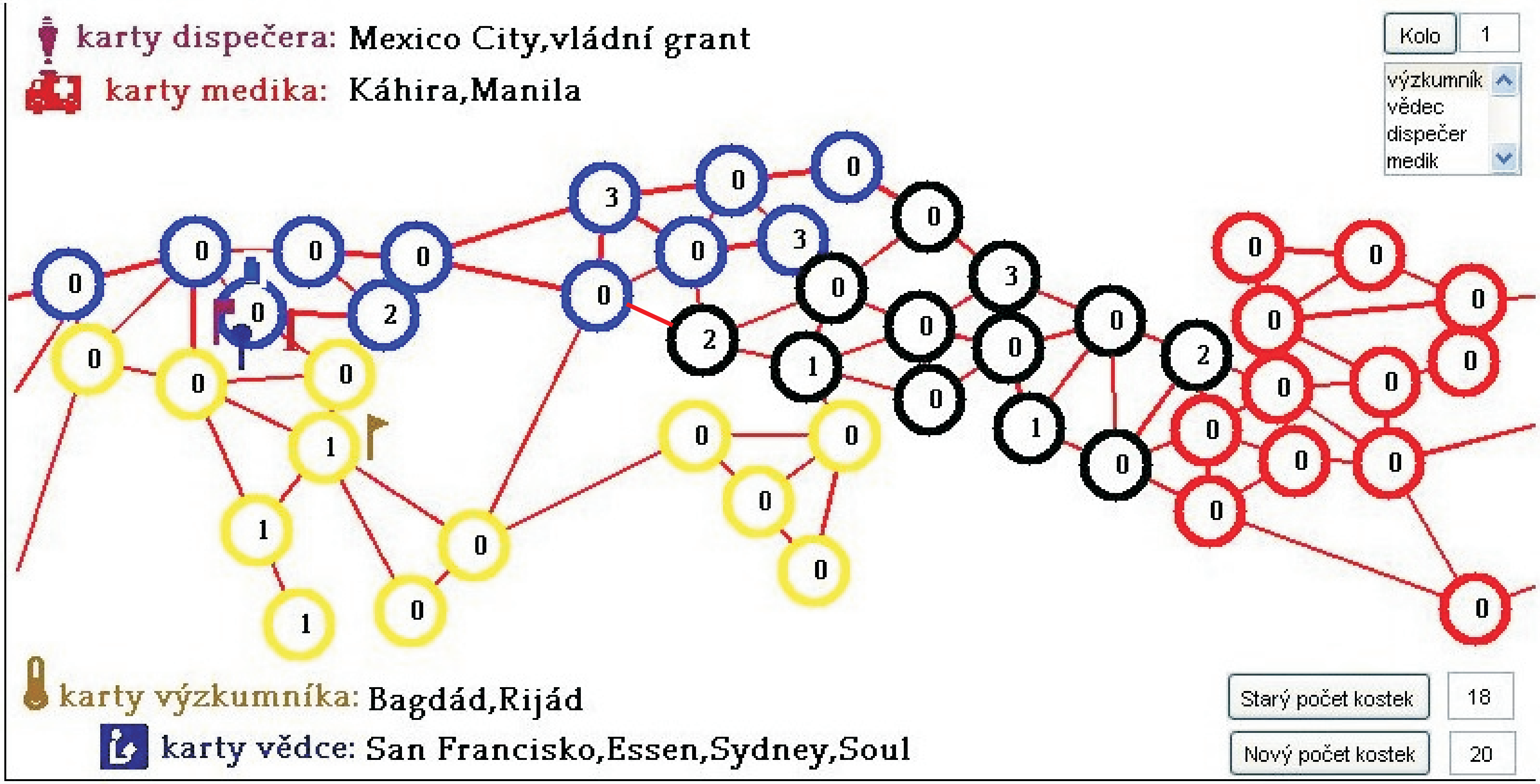
[11] Floyd-Warshallův algoritmus [online], dostupné z

http://www.algoritmy.net/article/5207/Floyd-Warshalluv-algoritmus, [citováno 6. 4. 2011]

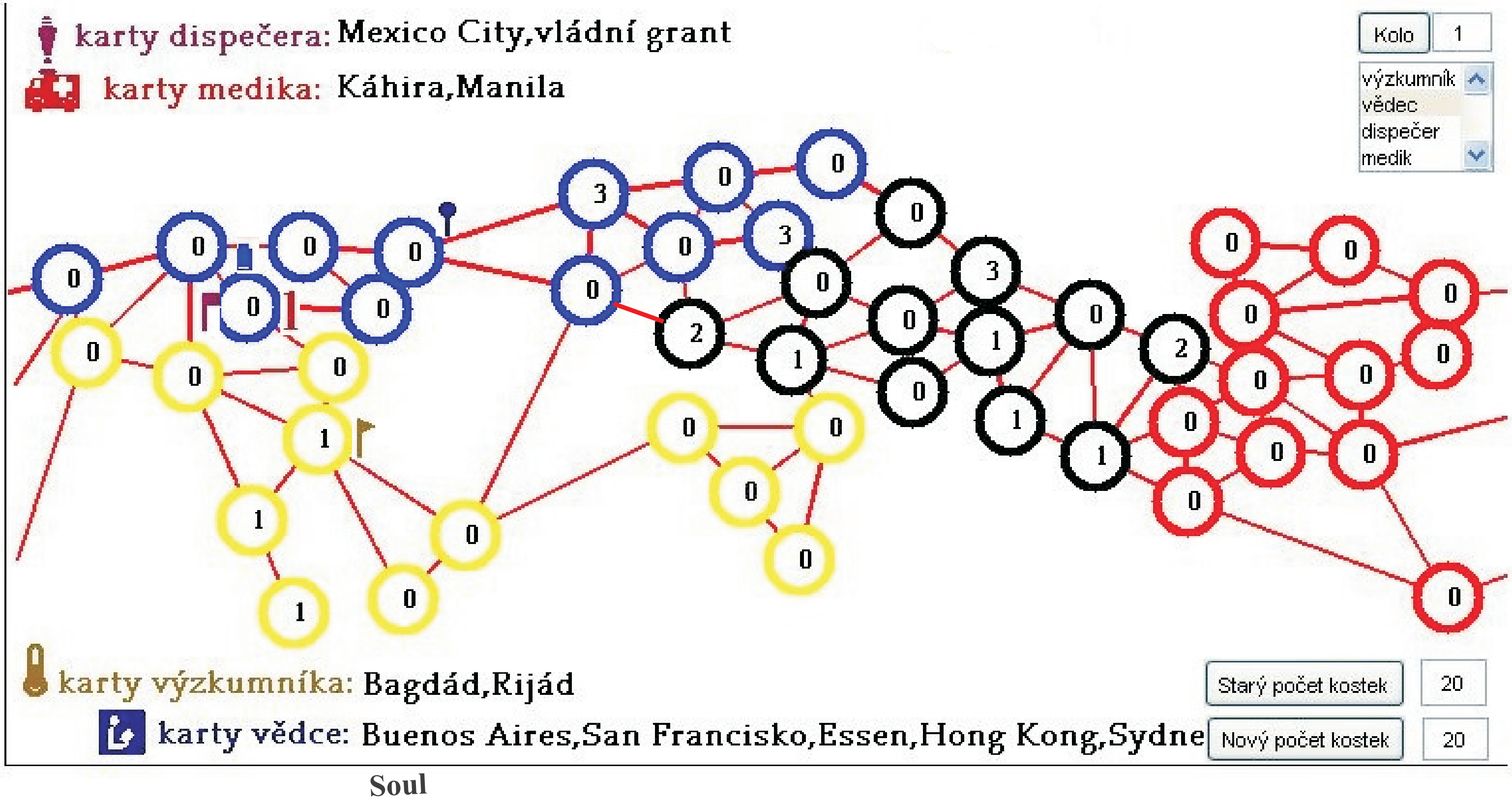
Seznam příloh



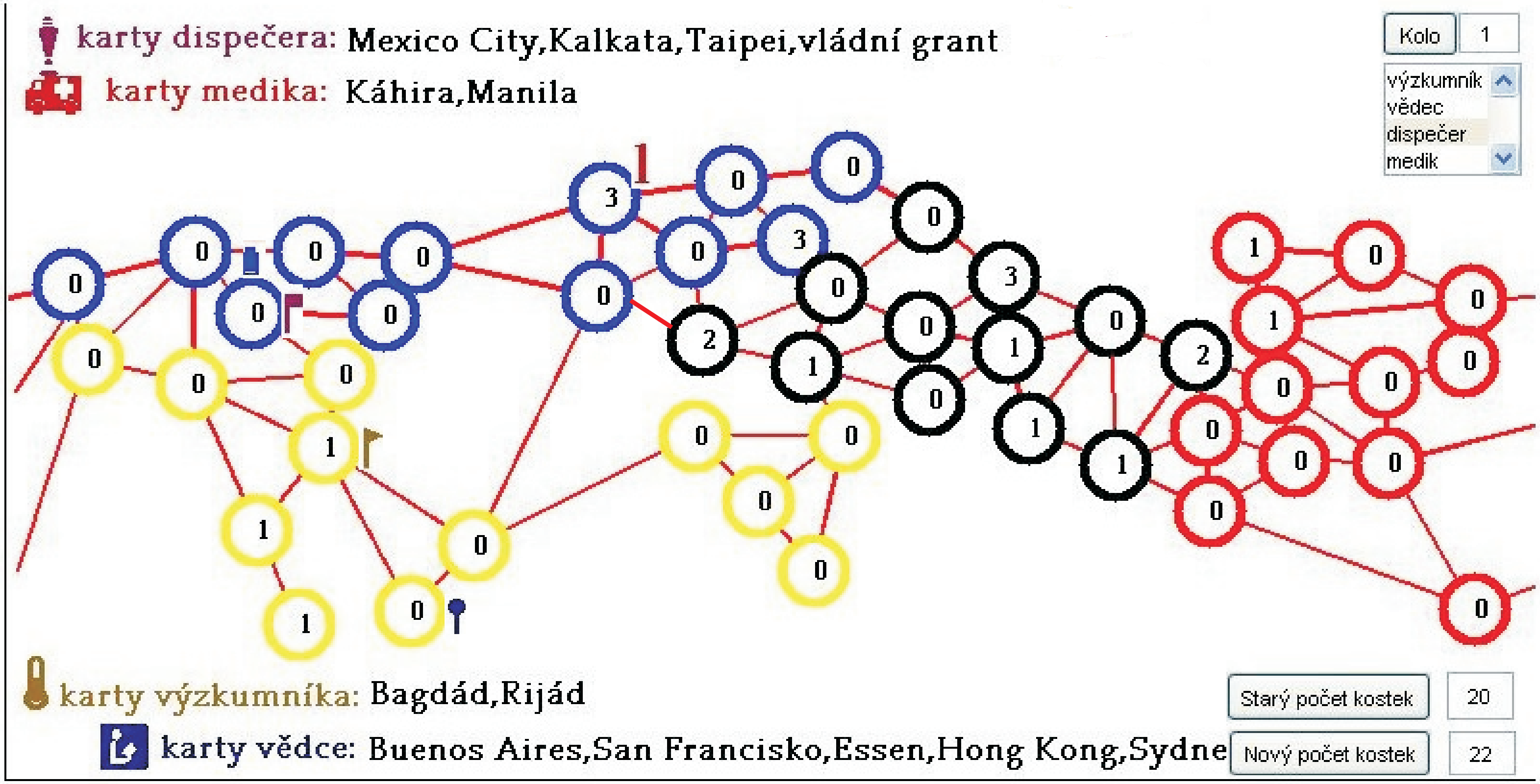
Příloha 0: Situace na počátku hry



Příloha 1.A: Situace v 1. kole po odehrání výzkumníka

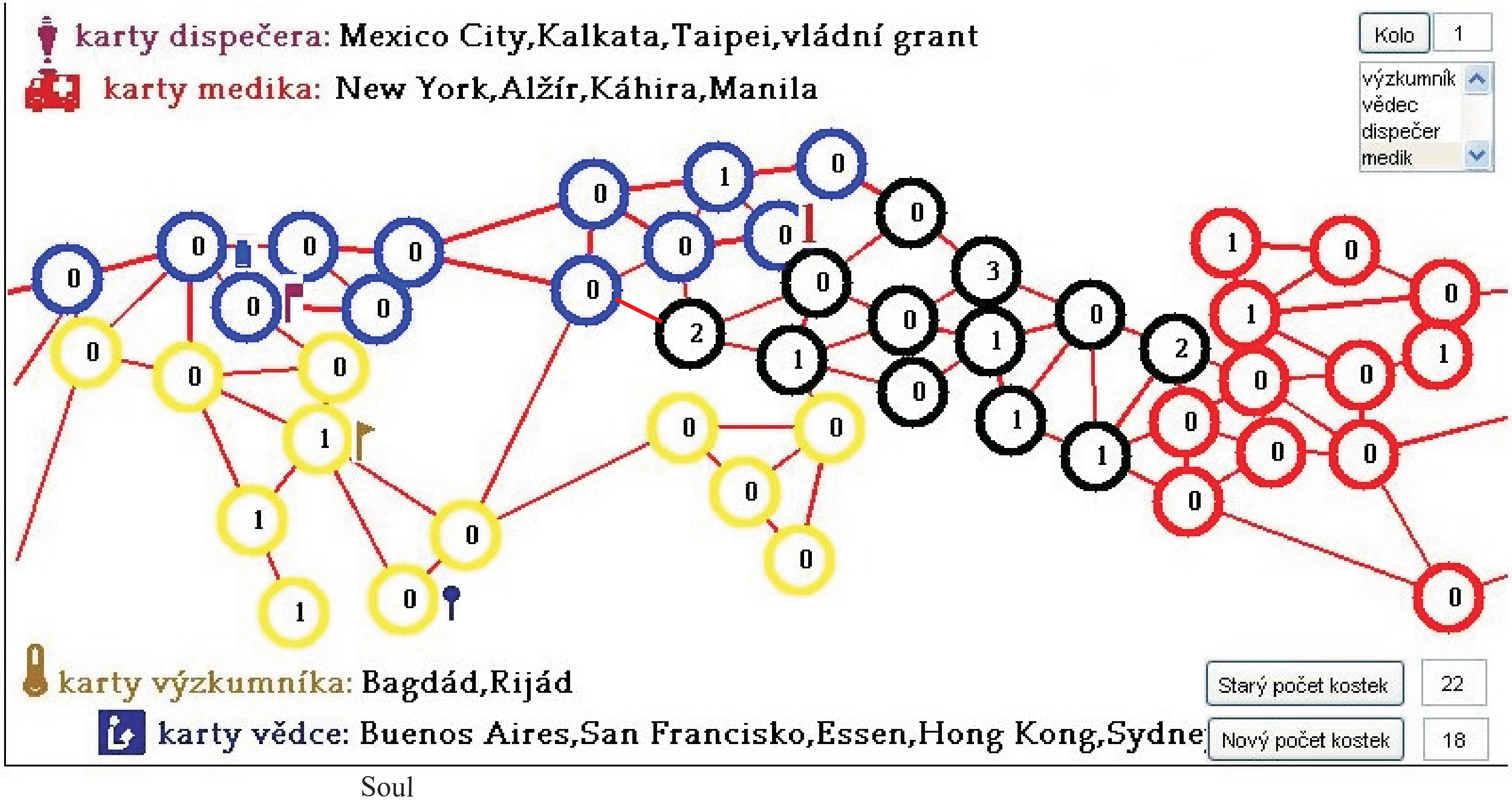


Příloha 1.B: Situace v 1. kole po odehrání vědce

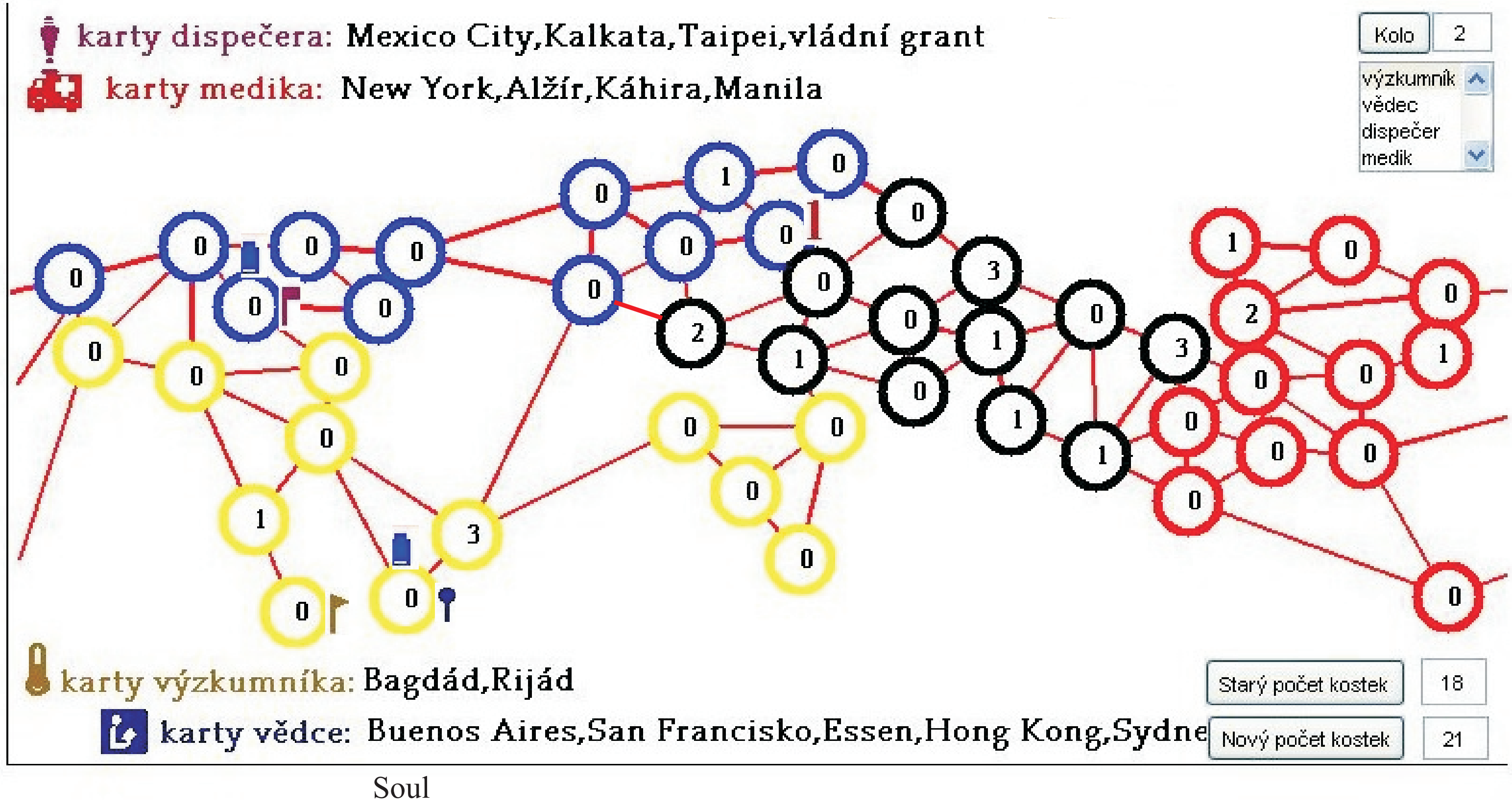


Soul

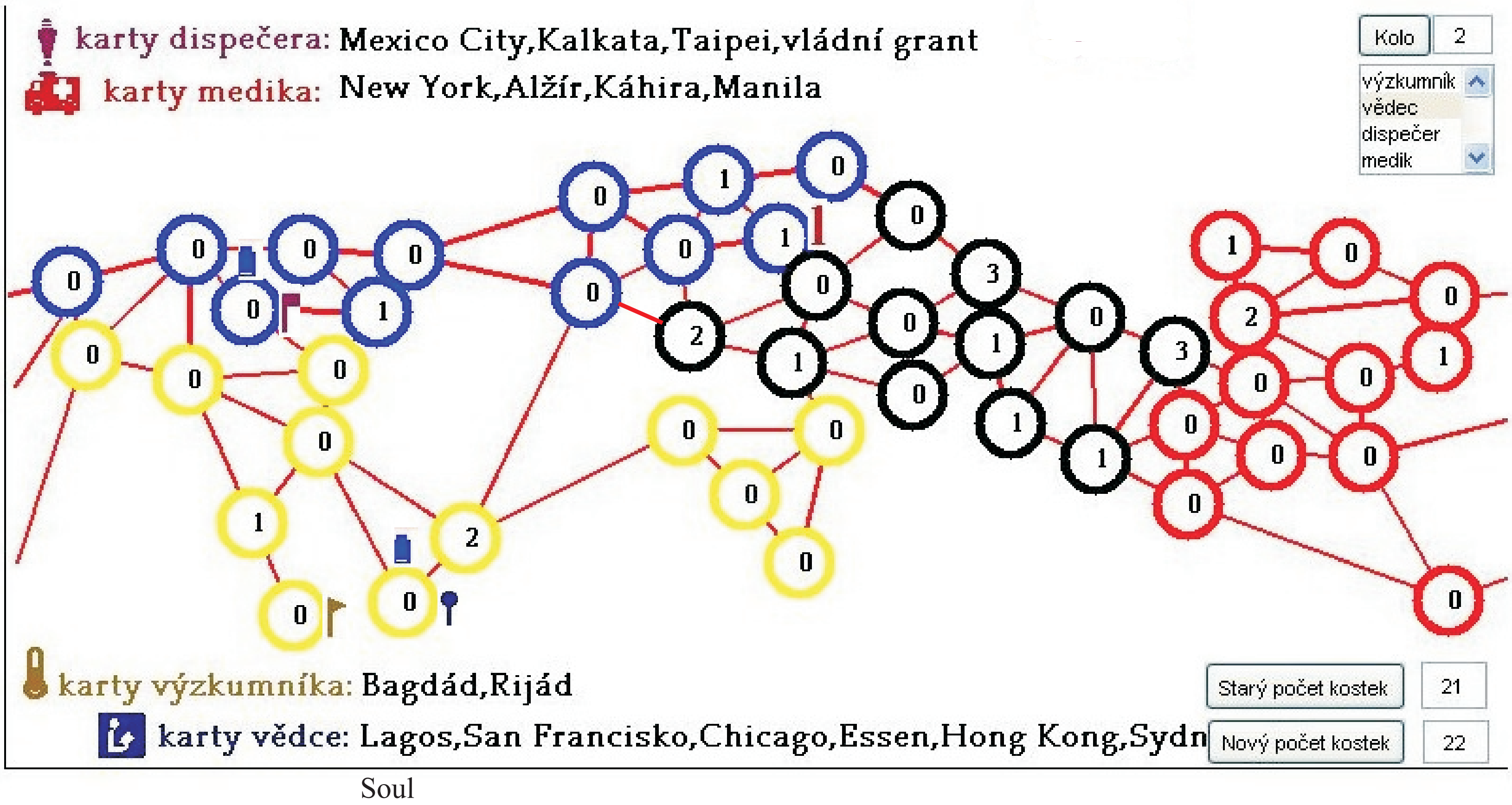
Příloha 1.C: Situace v 1. kole po odehrání dispečera



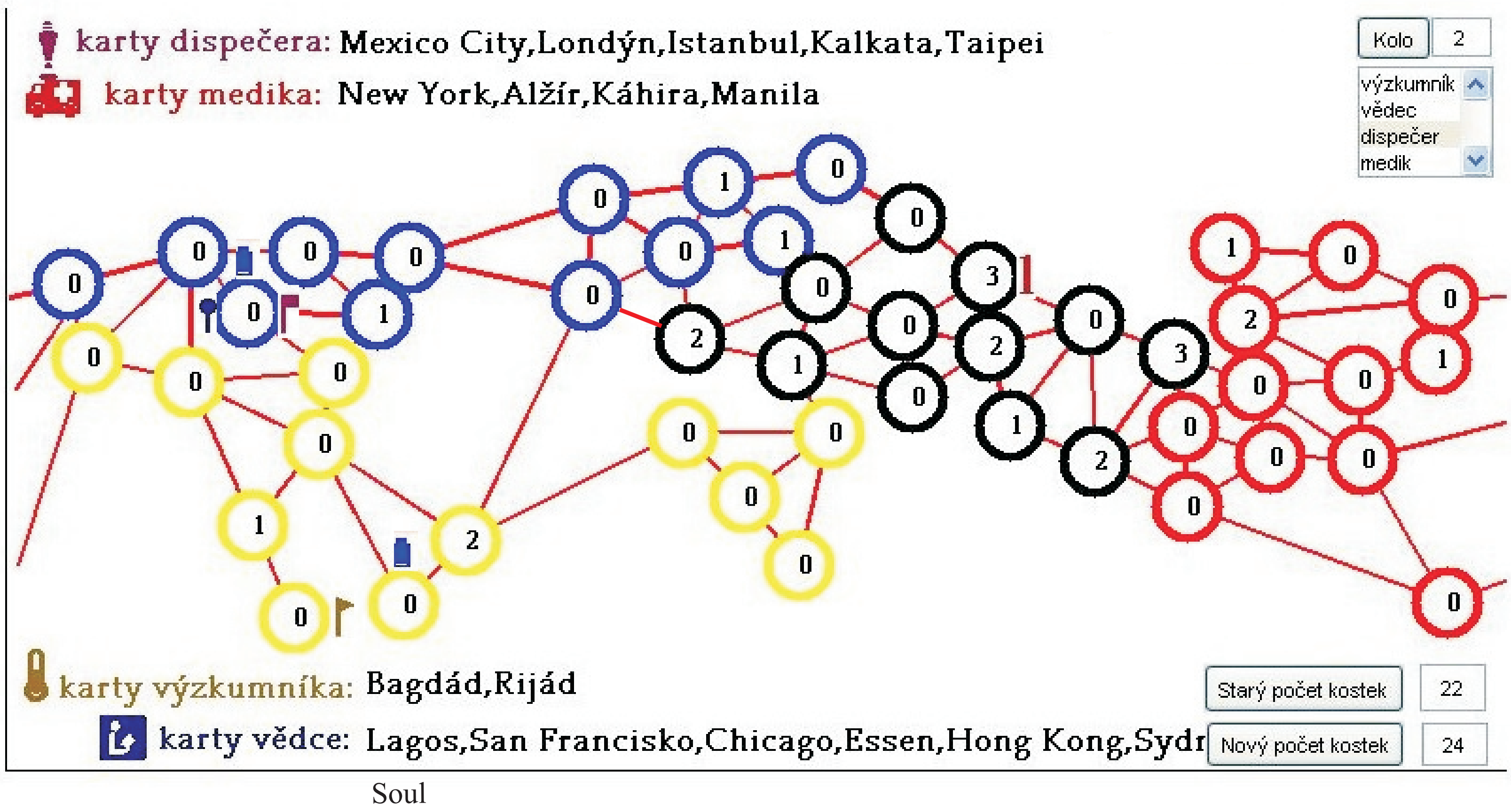
Příloha 1.D: Situace v 1. kole po odehrání medika



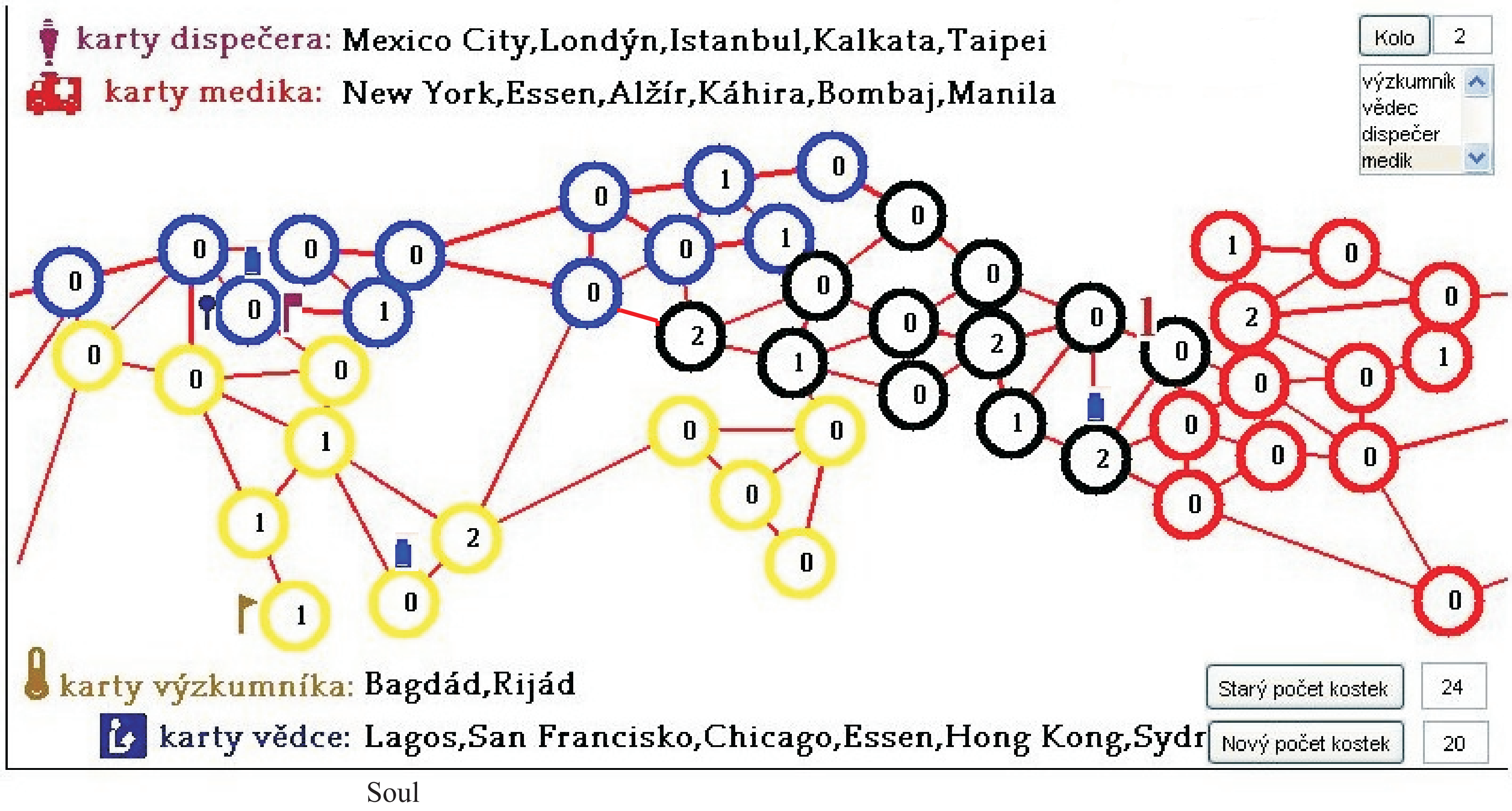
Příloha 2.A: Situace ve 2. kole po odehrání výzkumníka



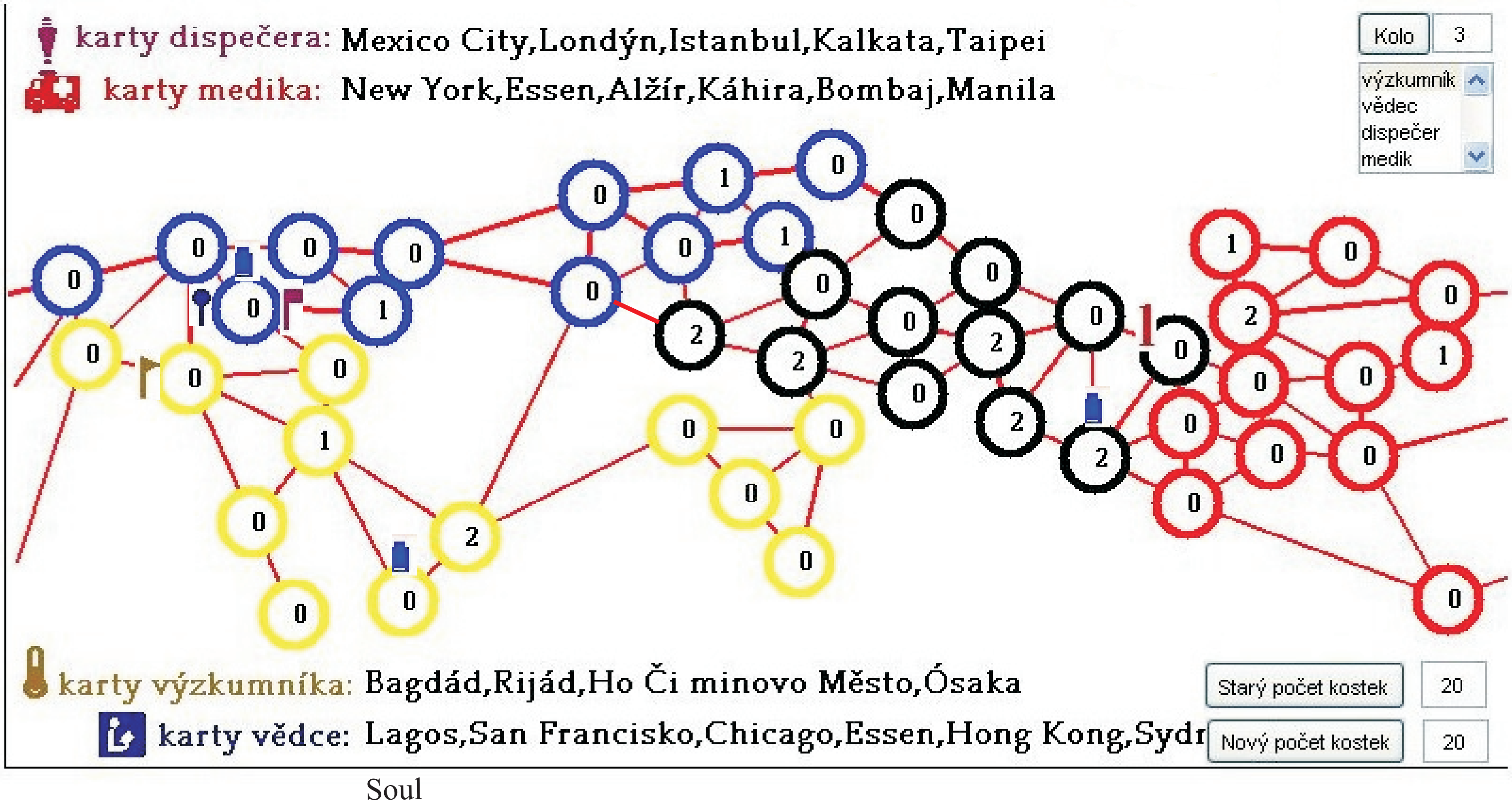
Příloha 2.B: Situace v 2. kole po odehrání vědce



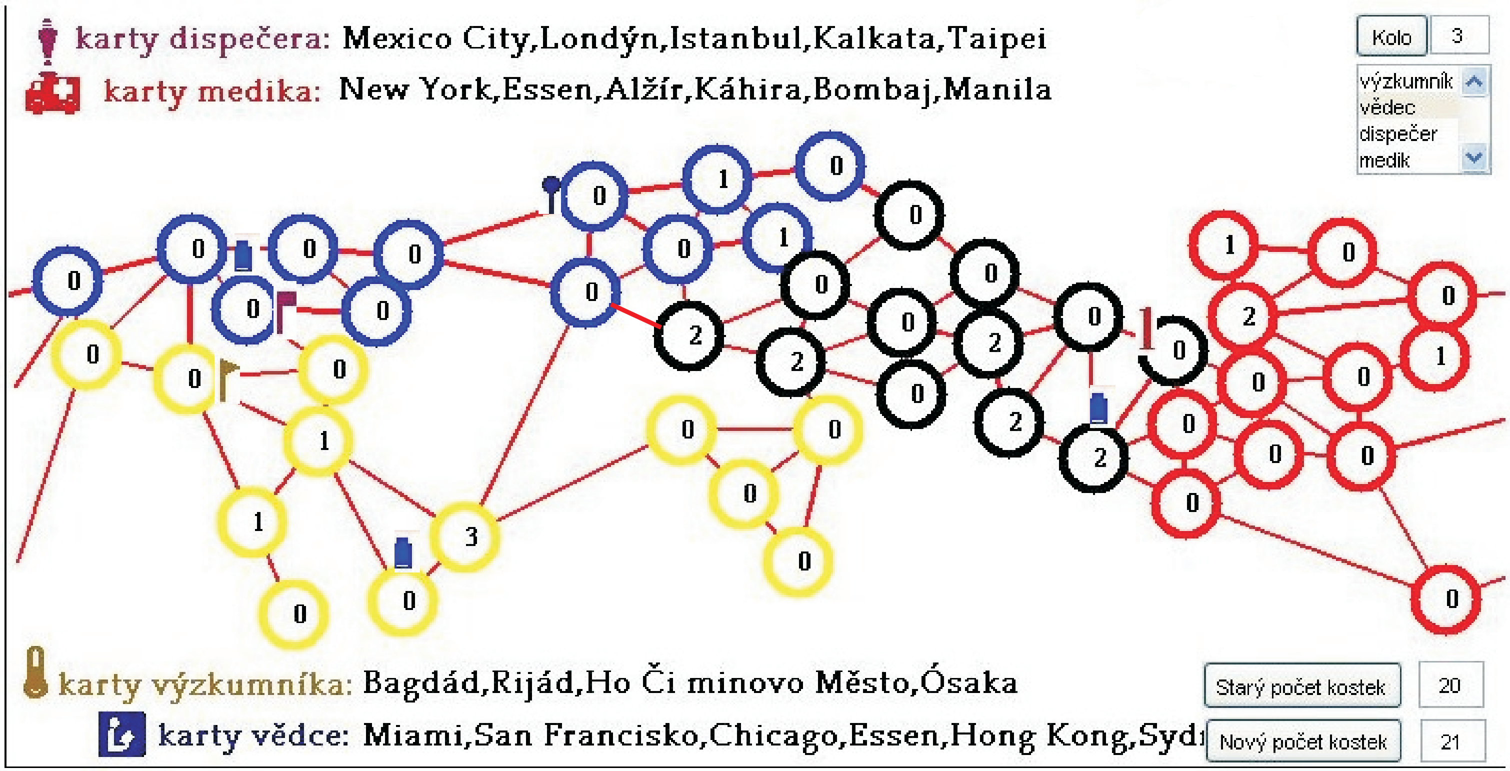
Příloha 2.C: Situace v 2. kole po odehrání dispečera



Příloha 2.D: Situace ve 2. kole po odehrání medika

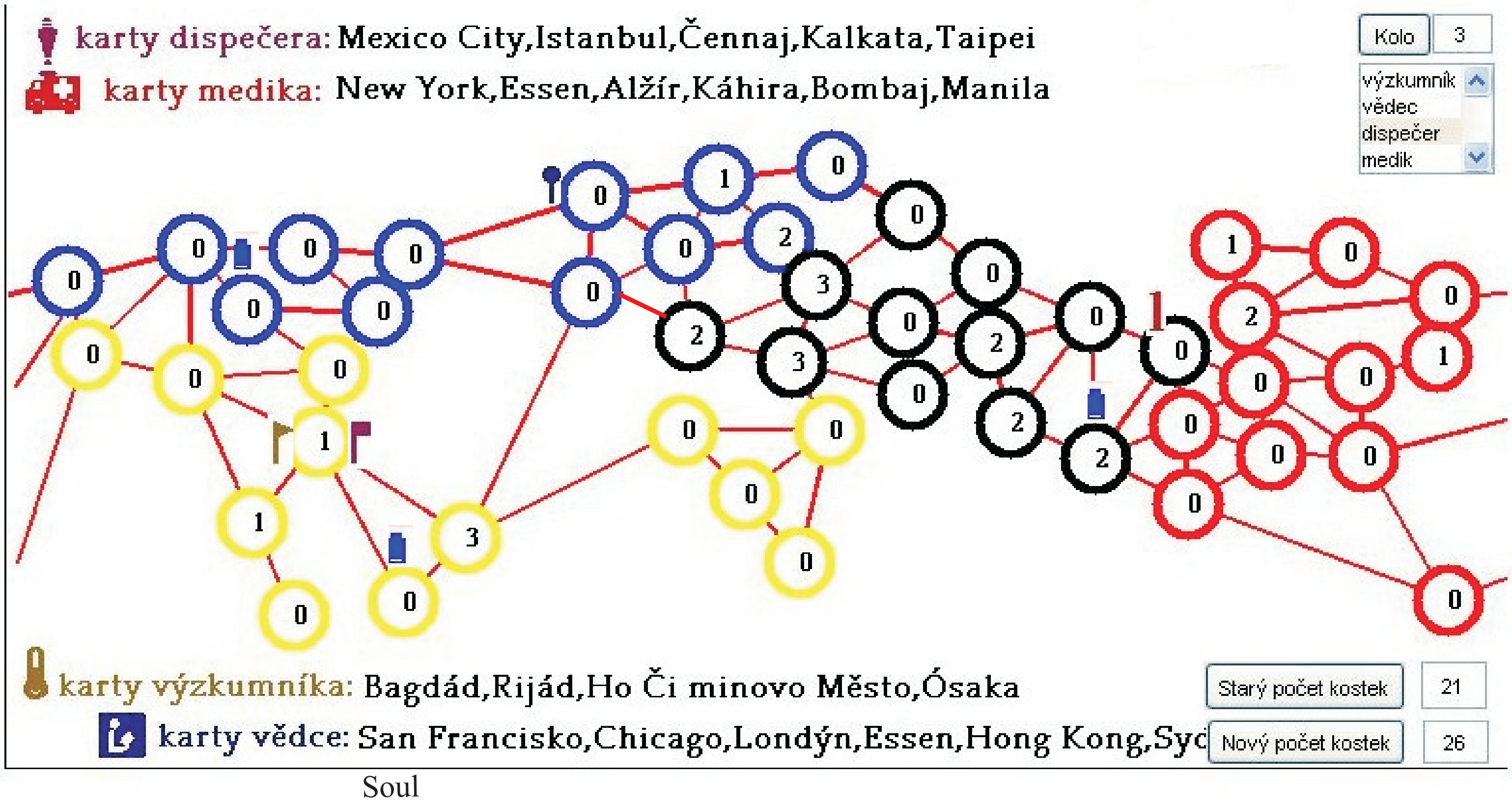


Příloha 3.A: Situace ve 3. kole po odehrání výzkumníka

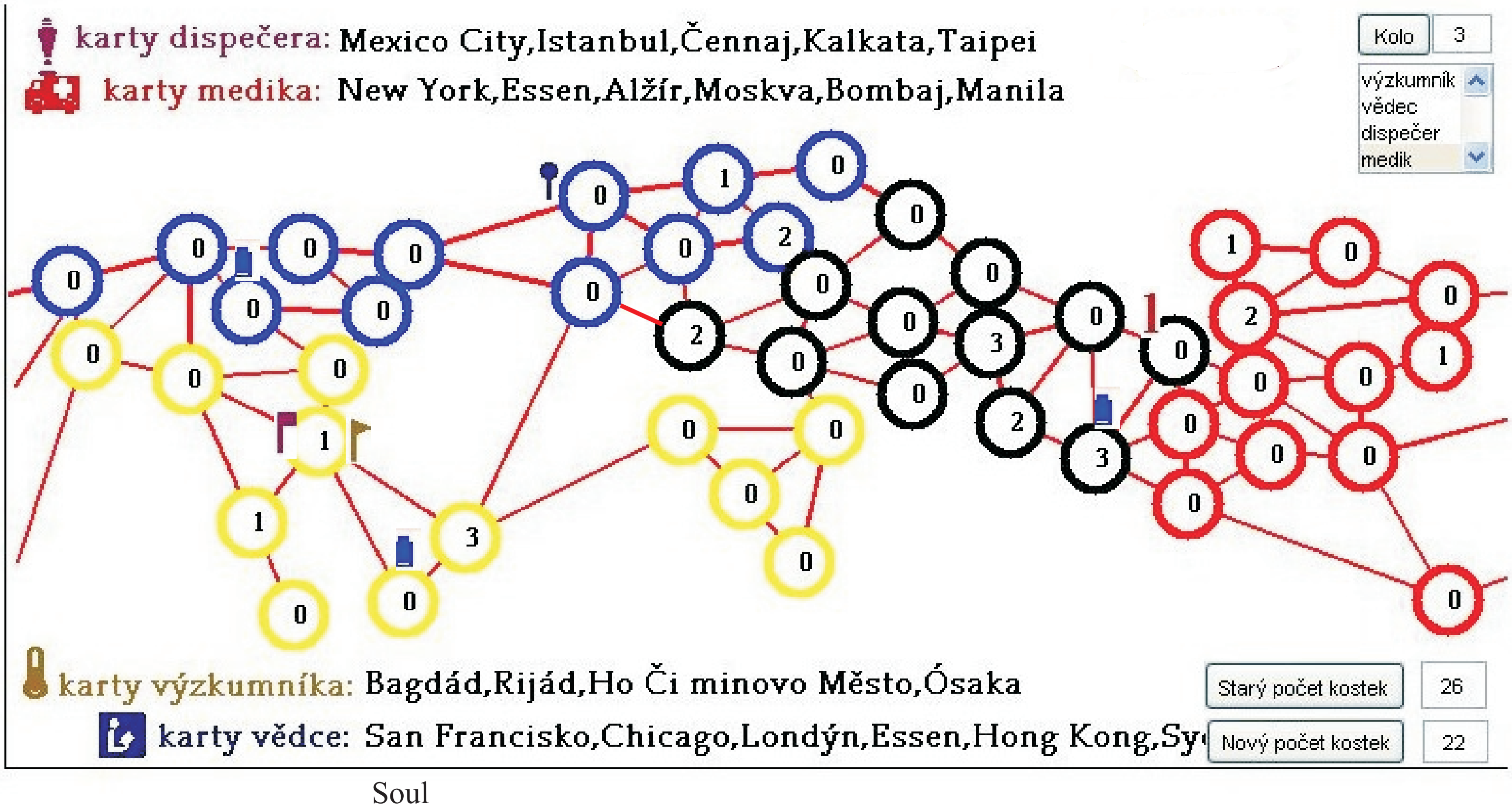


Soul

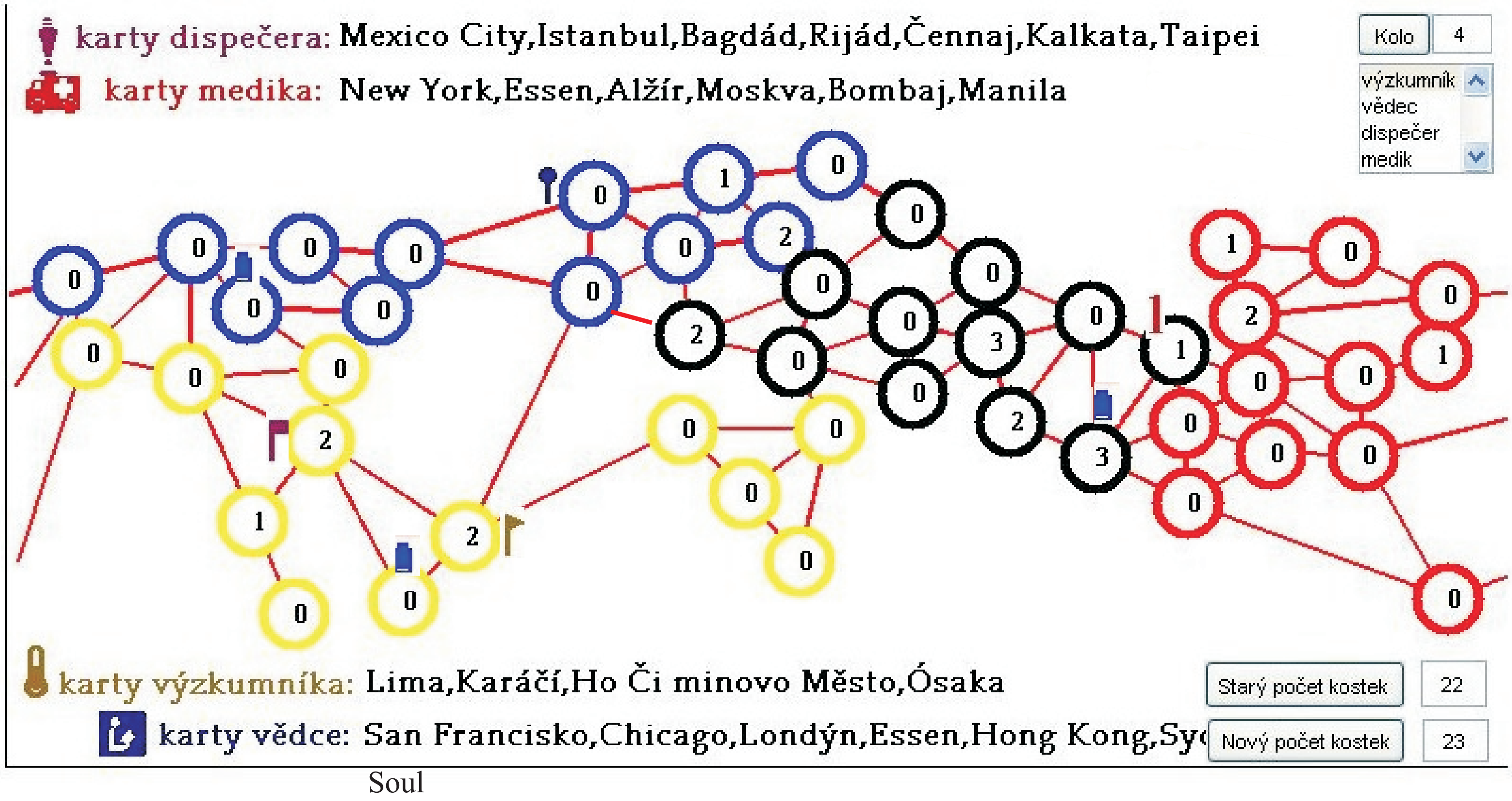
Příloha 3.B: Situace ve 3. kole po odehrání vědce



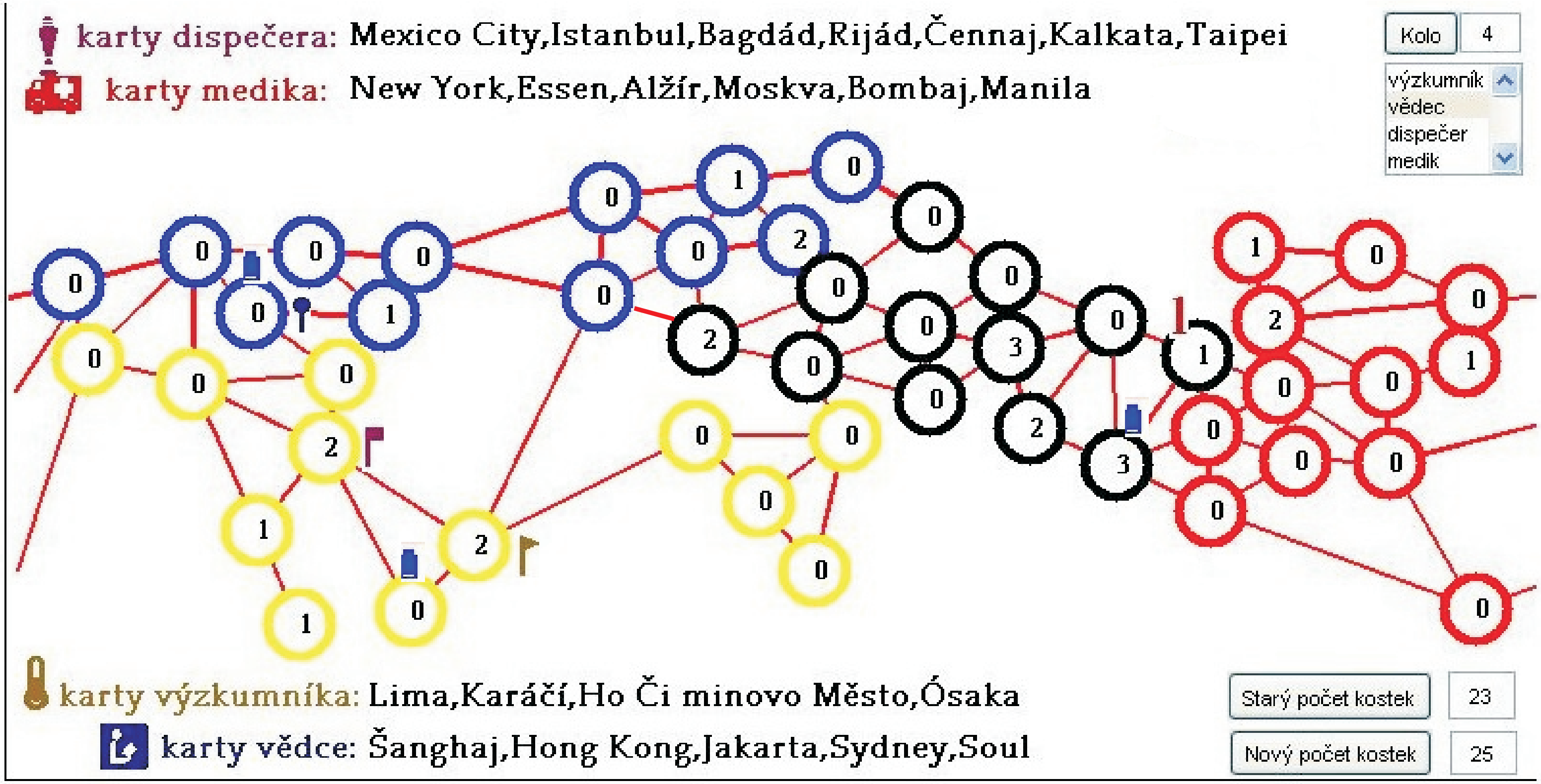
Příloha 3.C: Situace ve 3. kole po odehrání dispečera



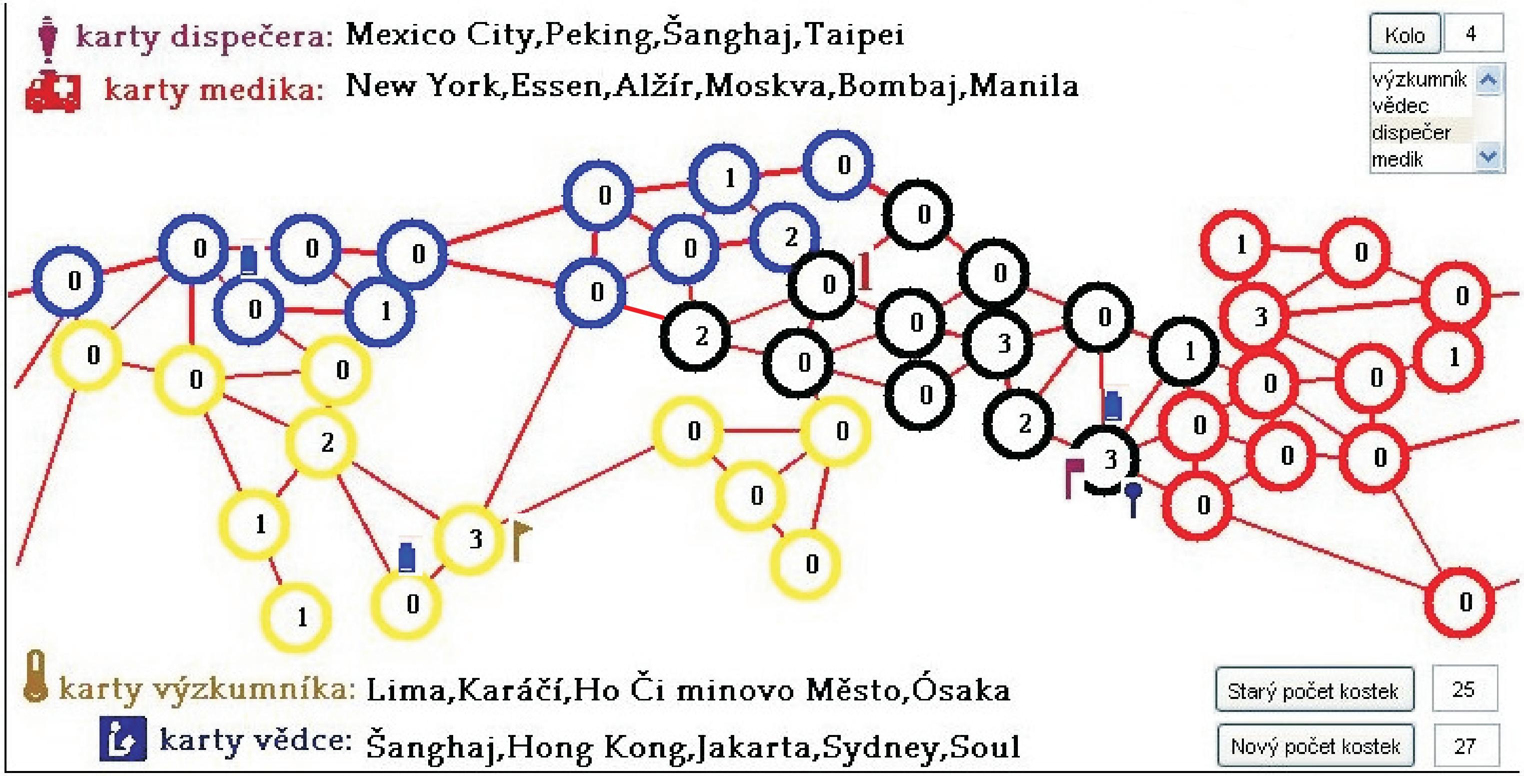
Příloha 3.D: Situace ve 3. kole po odehrání medika



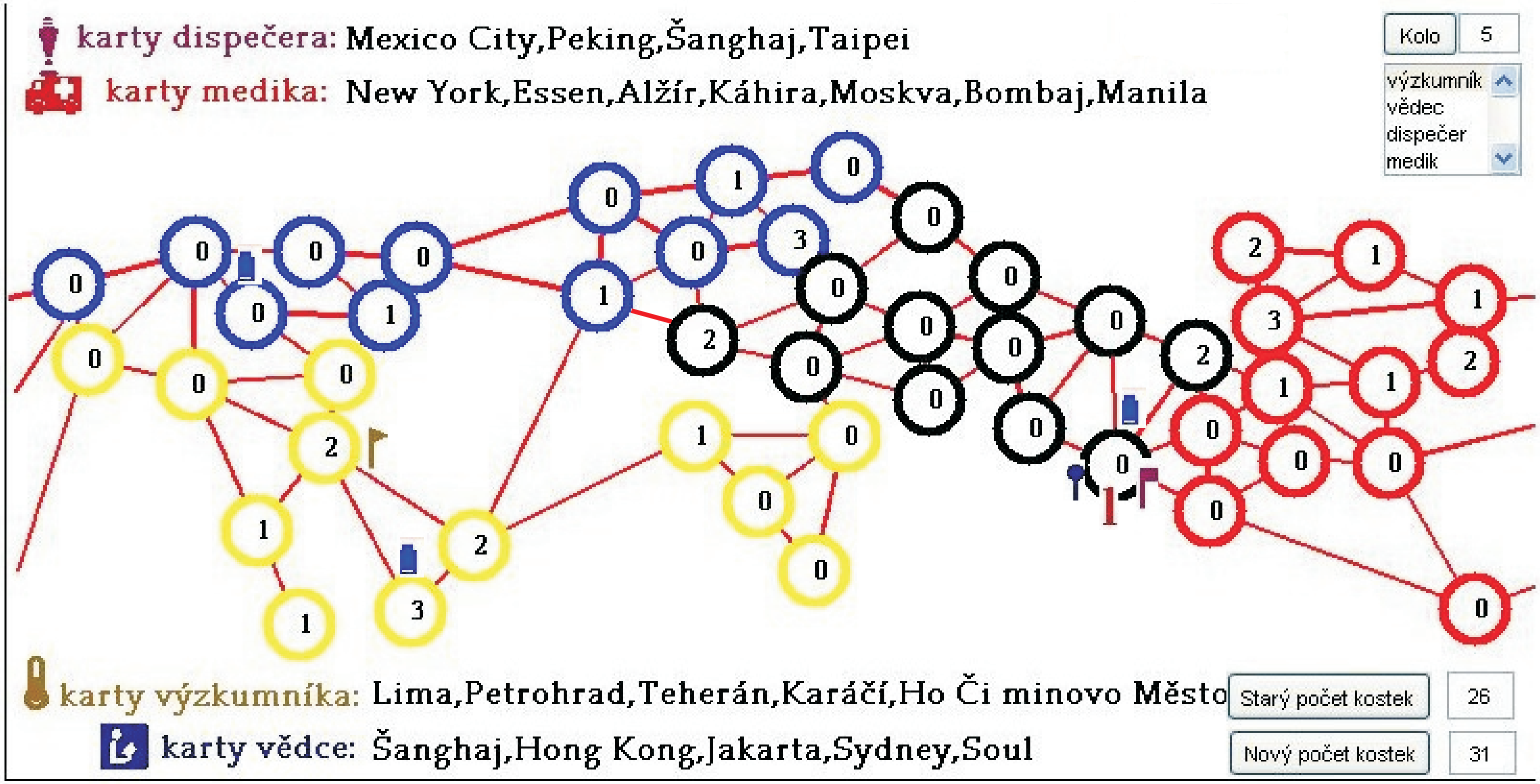
Příloha 4.A: Situace ve 4. kole po odehrání výzkumníka



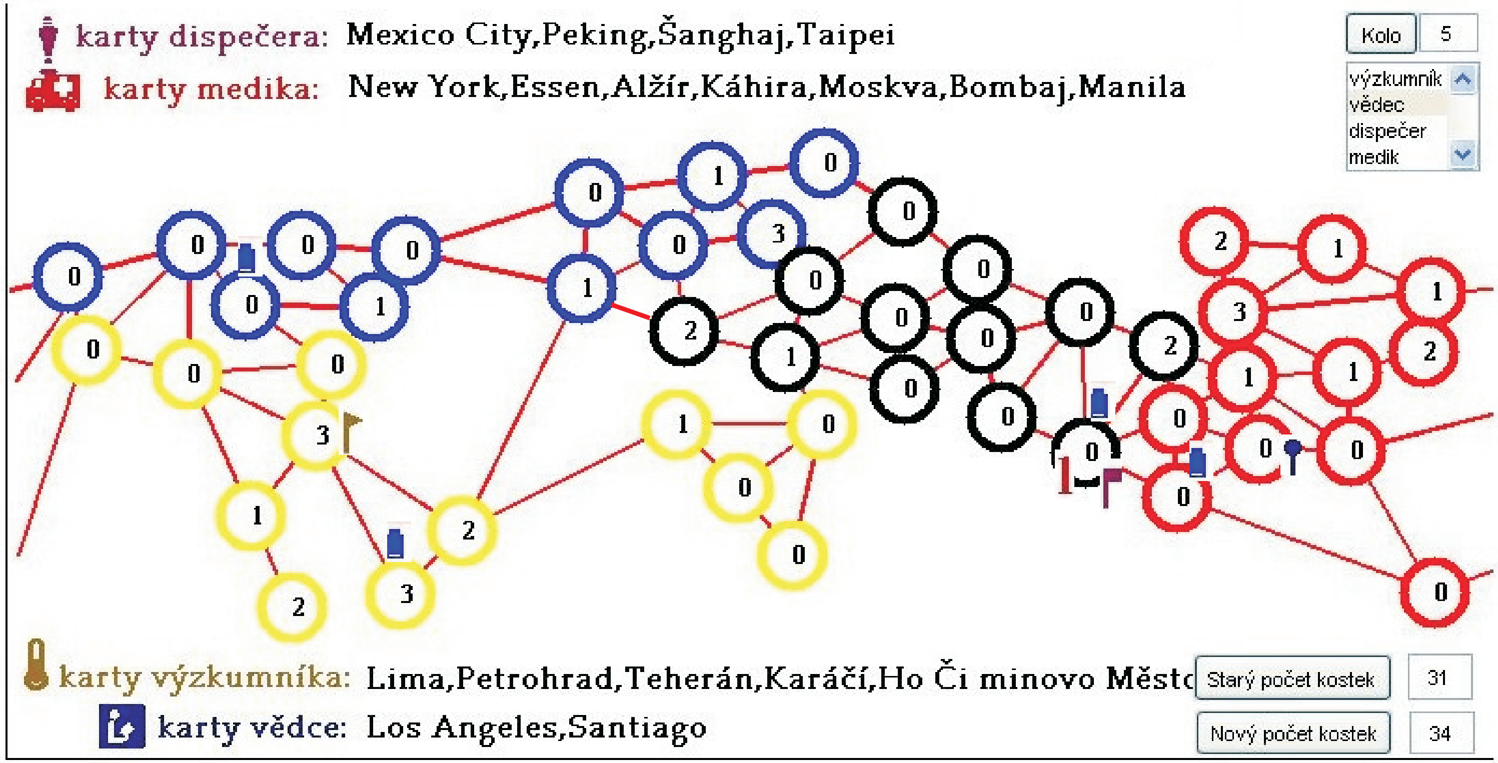
Příloha 4.B: Situace ve 4. kole po odehrání vědce



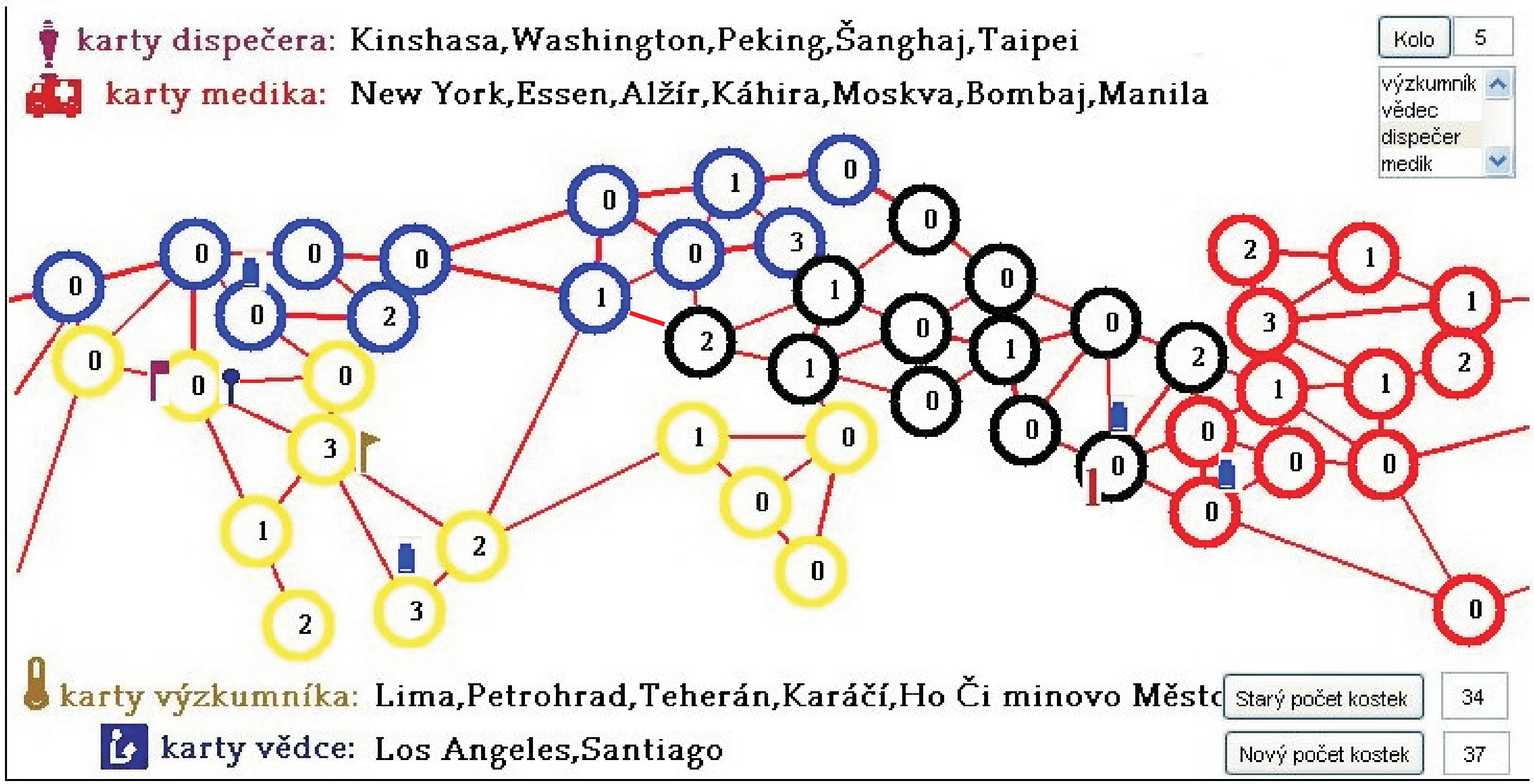
Příloha 4.C: Situace ve 4. kole po odehrání dispečera



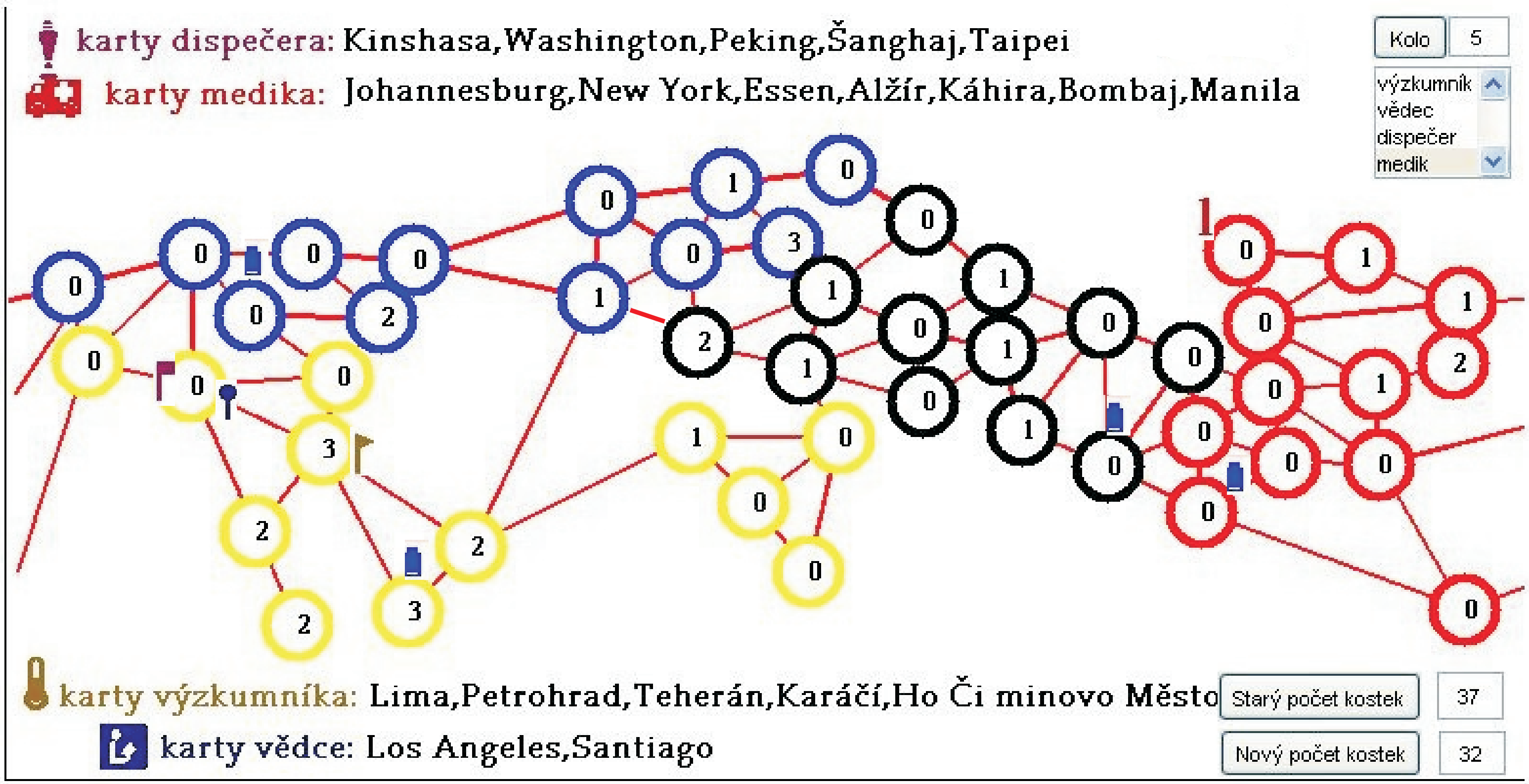
Příloha 5.A: Situace v 5. kole po odehrání výzkumníka



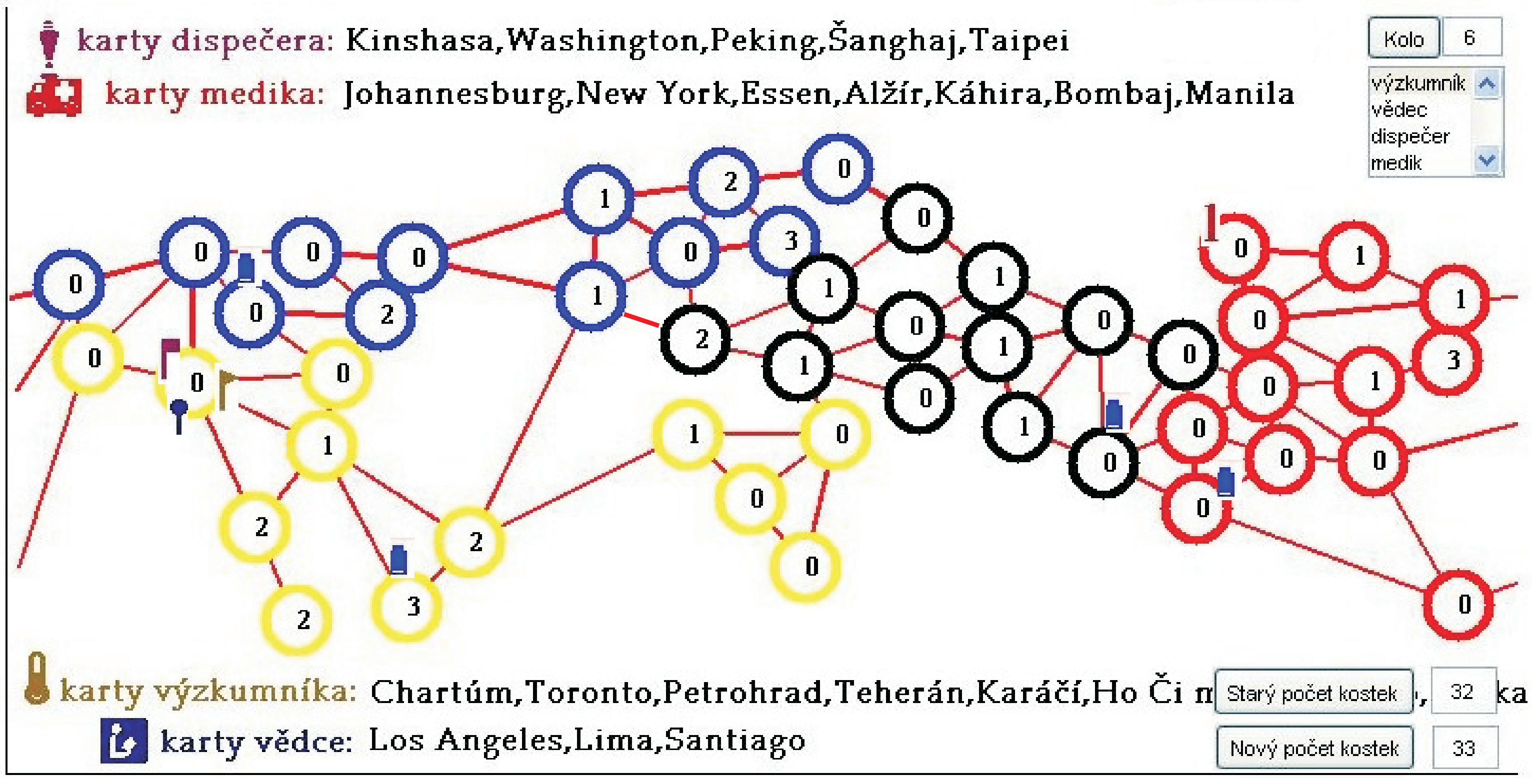
Příloha 5.B: Situace v 5. kole po odehrání vědce



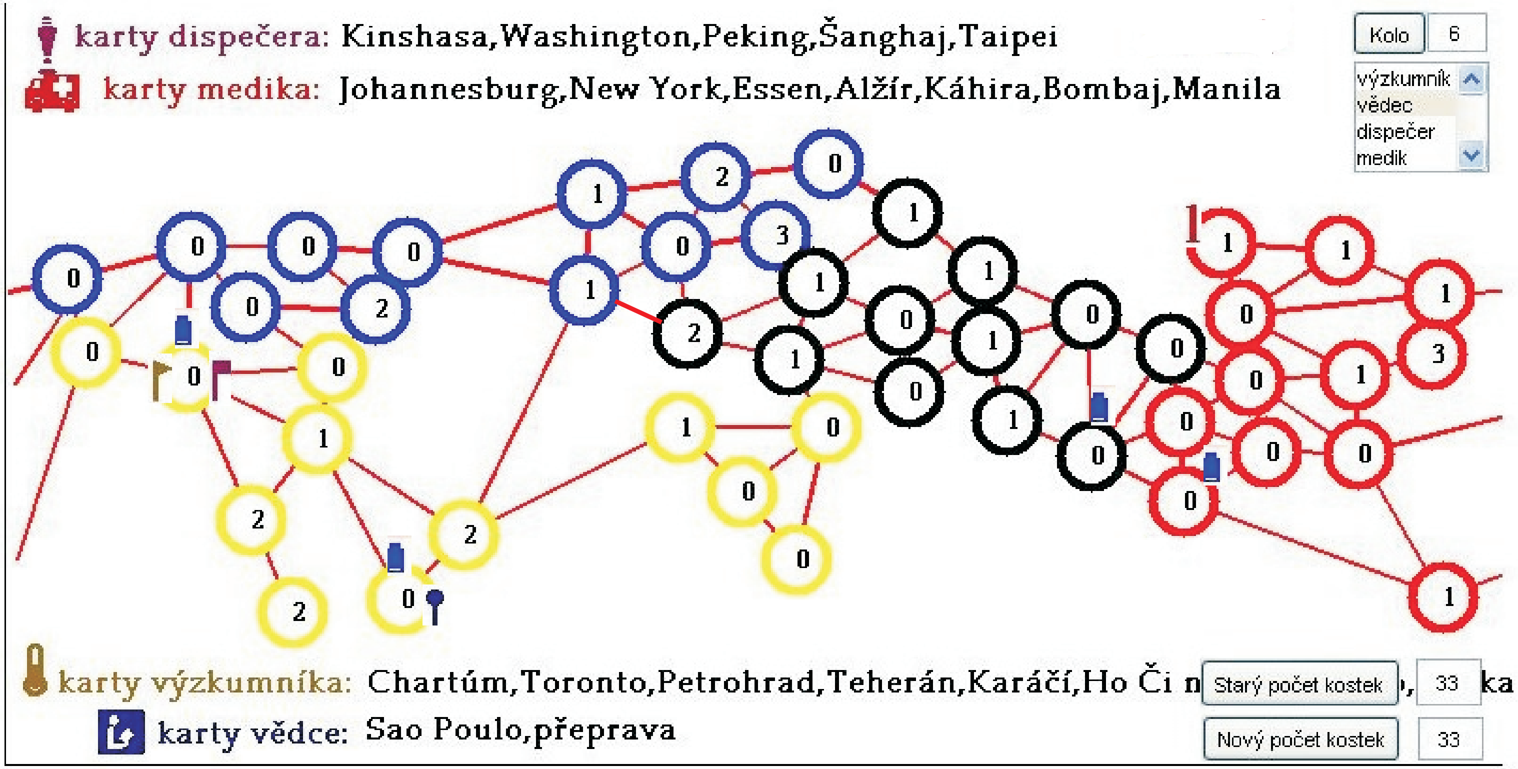
Příloha 5.C: Situace v 5. kole po odehrání dispečera



Příloha 5.D: Situace v 5. kole po odehrání medika



Příloha 6.A: Situace v 6. kole po odehrání výzkumníka



Příloha 6.B: Situace v 6. kole po odehrání vědce