Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Bakalářská práce

Polohové a metrické úlohy v programu GeoGebra

Jana Kulichová

Katedra algebry a geometrie

Olomouc 2024

Vedoucí práce:	RNDr. Marie Chodorová Ph.D.
Studijní program:	Matematika pro vzdělávání
	Anglická filologie
Forma studia:	prezenční

Bibliografické identifikační údaje

Autor:	Jana Kulichová
Název práce:	Polohové a metrické úlohy v programu GeoGebra
Typ práce:	bakalářská
Pracoviště:	KAG – Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	RNDr. Marie Chodorová Ph.D.
Rok obhajoby práce:	2023/24
Jazyk:	čeština
Anotace:	Cílem práce je sestavit sbírku zajímavých polohových a metrických úloh ve stereometrii. Úlohy se týkají zejména krychle, jehlanu, osmistěnu a pravidelných hranolů. Práce obsahuje potřebnou teorii, zadání a řešení daných úloh. Jednotlivé úlohy jsou současně řešeny v programu GeoGebra formou dynamických pracovních listů.
Klíčová slova:	stereometrie, polohové úlohy, metrické úlohy, krychle, jehlany, osmistěny, pravidelné hranoly, pracovní listy, GeoGebra
Počet stran:	50
Počet příloh:	31

Bibliographical identifications

Author:	Jana Kulichová
Title:	Positional and metric tasks in the GeoGebra program
Type of thesis:	bachelor
Department:	KAG – Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	RNDr. Marie Chodorová Ph.D.
The year of presentation:	2023/24
Language:	Czech
Abstract:	The aim of the thesis is to complete a collection of interesting positional and metric tasks in stereometry. The problems mainly concern cubes, pyramids, octahedrons and regular prisms. The thesis consists of the required theory, the assignment and the solution of the problems. Individual tasks are solved simultaneously in the GeoGebra program in the form of dynamic worksheets.
Keywords:	stereometry, positional tasks, metric tasks, cubes, pyramids, octahedrons, regular prisms, worksheets, GeoGebra
Number of pages:	50
Number of appendices:	31

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Marie Chodorové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne …………… ……………………….………

podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce RNDr. Marii Chodorové, Ph.D., za odborné vedení, poskytnuté materiály a čas věnovaný osobním konzultacím a kontrole této bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje polohovým a metrickým úlohám ve stereometrii. Stereometrie, tedy geometrie v prostoru, je z pohledu vyučujícího i studentů zajímavým a důležitým tématem, především z důvodu prostorové představivosti. Právě prostorová představivost může žákům dělat problémy. Pro některé je tato dovednost zcela přirozená, pro jiné se může jednat o problémovou oblast, proto se stereometrie často může jevit jako náročné téma. Tato práce je zpracována formou dynamických pracovních listů, které by mohly pomoct s problémy s prostorovou představivostí.

Dynamické pracovní listy jsou zpracovány v softwarovém programu GeoGebra, který je volně dostupný na webové adrese https://www.geogebra.org/. Jedná se o program, který nabízí prostředí nejen pro řešení geometrických úloh, ale také nástroje z oblasti algebry či matematické analýzy. Tato bakalářská práce využívá geometrickou oblast programu, ve které jsou zpracovány veškeré přílohy a obrázky vložené do této práce. Hlavní výhodou programu je velmi příjemné uživatelské prostředí a jednoduchost programu, práce s ním je velmi intuitivní a lehce zvládnutelná jak pro vyučující, tak pro žáky. Mnou zpracované dynamické pracovní listy jsou volně dostupné na webové adrese https://www.geogebra.org/u/kulija.

Tato práce společně se svými přílohami se dá považovat za sbírku řešených úloh, která se věnuje polohovým a metrickým úlohám řešeným především na tělesech jako jsou krychle, jehlan, osmistěn a pravidelný šestiboký hranol. V první části práce je uvedena teorie potřebná k řešení daných úloh a jedna ukázková úloha. V druhé části práce je zadáno a vyřešeno celkem třicet příkladů, které jsou doplněny o zmíněné dynamické pracovní listy.

1 Stereometrie

Stereometrie neboli prostorová geometrie je odvětví matematiky, které se zabývá problematikou prostorových geometrických útvarů. Teoretická část této bakalářské práce se věnuje popisu vztahů mezi základními útvary stereometrie. Těmito útvary jsou bod, přímka a rovina. Následující text čerpá z pramenů číslo [1], [2], [3] a [4] uvedených v Seznamu použité literatury.

1.1 Polohové vlastnosti

Mezi polohové vlastnosti útvarů v prostoru řadíme ty věty, které popisují vzájemnou polohu jednotlivých elementů (či útvarů). Jedna ze základních polohových vlastností je incidence. V případě, že bod leží na přímce, či v rovině, nazveme ho incidentním s přímkou či s rovinou. Stejný termín se používá pro přímku, která leží v rovině, tedy řekneme, že přímka je incidentní s rovinou. V prostoru platí následující axiomy:

Axiom 1 Dva různé body A, B určují právě jednu přímku p.

Axiom 2 Přímkou p a bodem A, který na přímce p neleží, prochází právě jedna rovina ρ.

Axiom 3 Leží-li bod A na přímce p a přímka p v rovině ρ, leží i bod A v rovině ρ.

Axiom 4 Mají-li dvě různé roviny ρ a σ společný bod A, pak mají společnou právě jednu přímku (tato přímka prochází daným bodem).

Axiom 5 Ke každé přímce p lze bodem A, který na ní neleží, vést právě jednu přímku, jež s danou přímkou p leží v rovině a nemá s ní společný bod (tj. je s přímkou p rovnoběžná).

Z těchto axiomů vyplývají následující věty:

Věta 1 Rovina je určena:

- třemi různými body, které neleží na přímce (nejsou kolineární);
- přímkou a bodem, který na přímce neleží;
- dvěma různoběžkami, nebo dvěma různými rovnoběžkami.

Věta 2 Přímka leží v rovině, jestliže v rovině leží její dva různé body.

O vzájemné poloze přímek a rovin rozhodujeme podle jejich společných bodů.

1.1.1 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

Přímky a, b v prostoru nazveme:

- totožné, jestliže mají všechny body společné;
- různoběžné, jestliže mají společný právě jeden bod a leží v jedné rovině (tento společný bod nazveme průsečík);
- rovnoběžné, jestliže nemají žádný společný bod a leží v jedné rovině;
- mimoběžné, jestliže nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině.

Dvě přímky v prostoru mají právě jednu ze čtyř uvedených vzájemných poloh.

Pro práci s mimoběžnými přímkami definujeme pojmy:

- příčka mimoběžek, což je přímka protínající obě mimoběžky;
- osa mimoběžek, což je příčka, která je k oběma mimoběžkám kolmá.

1.1.2 Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru

Přímka a a rovina ρ v prostoru mají vzhledem k sobě následující polohy:

- přímka leží v rovině, jestliže každý bod přímky je i bodem roviny;
- přímka je s rovinou různoběžná, jestliže má s rovinou společný právě jeden bod (tzv. průsečík);
- přímka je s rovinou rovnoběžná, jestliže nemá s rovinou společný žádný bod.

Přímka a rovina v prostoru mají právě jednu ze tří uvedených vzájemných poloh.

1.1.3 Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru

Roviny ρ, σ v prostoru nazveme:

- totožné, jestliže mají všechny body společné;
- různoběžné, jestliže mají společnou právě jednu přímku (tzv. průsečnici);
- rovnoběžné, jestliže nemají společný žádný bod.

Dvě roviny v prostoru mají právě jednu ze tří uvedených vzájemných poloh.

Pro rovnoběžnost přímek a rovin platí následující věty:

Věta 3 (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny) Přímka je rovnoběžná s rovinou tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná alespoň s jednou její přímkou.

Věta 4 (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin) Dvě roviny jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.

Věta 5 Přímka je rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, právě tehdy když je rovnoběžná s jejich průsečnicí.

1.1.4 Vzájemná poloha tří rovin v prostoru

Roviny ρ, σ, τ v prostoru mají vzhledem k sobě následující polohy:

- každé dvě roviny jsou rovnoběžné;
- dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách;
- každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny tři průsečnice splynou v jednu přímku;
- každé dvě roviny jsou různoběžné a průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné různé;
- každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny průsečnice jsou různé procházející jediným společným bodem.

Tři roviny v prostoru mají právě jednu z pěti uvedených vzájemných poloh.

1.2 Metrické vlastnosti

Mezi základní metrické vlastnosti elementů v prostoru se řadí odchylka, kolmost a vzdálenost.

1.2.1 Odchylka

Pro dvě přímky p, q platí následující:

- Odchylka dvou různoběžných přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který tyto přímky p, q svírají.
- Odchylka dvou mimoběžných přímek p, q je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými přímkami p, q.
- Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0°.
- Odchylka přímky p a roviny ρ je rovna odchylce dané přímky p od jejího pravoúhlého průmětu do dané roviny ρ (v případě, že přímka p k rovině ρ není kolmá). Je-li přímka p kolmá k rovině ρ, odchylka je rovna 90°.
- Odchylka dvou rovin ρ, σ je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

1.2.2 Kolmost

Pro kolmost platí následující:

- Dvě přímky jsou kolmé právě tehdy, když svírají pravý úhel, tedy úhel o velikosti 90°.
- Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám roviny.
- Rovina ρ je kolmá k rovině σ, jestliže svírají pravý úhel, tedy úhel o velikosti 90°.

Pro kolmost platí následující věty:

Věta 6 (Kritérium kolmosti přímky a roviny) Přímka p je kolmá k rovině ρ právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ρ.

Věta 7 (Kritérium kolmosti dvou rovin) Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Věta 8 Bodem prostoru A lze vést k dané rovině ρ právě jednu kolmici p. Průsečík této přímky p s rovinou ρ nazýváme pravoúhlý průmět bodu A do roviny ρ.

Věta 9 Přímkou p, která není k rovině ρ kolmá, prochází právě jedna rovina σ, která je k rovině ρ kolmá. Průsečnici těchto dvou rovin nazýváme pravoúhlý průmět přímky p do roviny ρ.

Věta 10 Přímky kolmé ke stejné rovině jsou navzájem rovnoběžné.

Věta 11 Roviny kolmé ke stejné přímce jsou navzájem rovnoběžné.

1.2.3 Vzdálenost

Pro vzdálenost platí následující:

- Vzdálenost dvou bodů A, B je délka úsečky, jejíž krajní body jsou dva dané body A, B.
- Vzdálenost bodu A od přímky p ($A \notin p$) je rovna vzdálenosti bodu A od přímky p v rovině Ap určené daným bodem a danou přímkou. Leží-li bod na přímce je vzdálenost rovna 0.
- Vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ρ.
- Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé.

- Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ je vzdálenost libovolného bodu roviny ρ od druhé roviny σ.
- Vzdálenost přímky p od roviny ρ s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky p od roviny ρ.
- Vzdálenost dvou mimoběžných přímek p, q je vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, v nichž mimoběžky p, q leží; nebo také velikost úsečky, kterou mimoběžky vytínají na ose mimoběžek p, q.

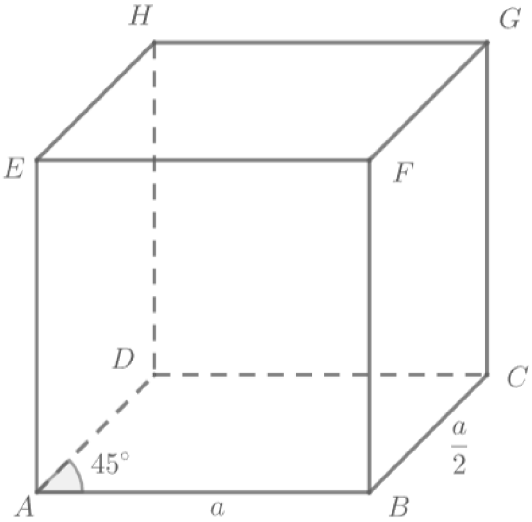
1.3 Volné rovnoběžné promítání

Promítání je zobrazení prostoru na rovinu, případně na jinou plochu (například na válcovou plochu). Rovina, do níž prostor či geometrický útvar promítáme, se nazývá průmětna. Při vyobrazování a řešení stereometrických úloh zpravidla používáme volné rovnoběžné promítání kvůli názornosti a jednoduchosti pravidel.

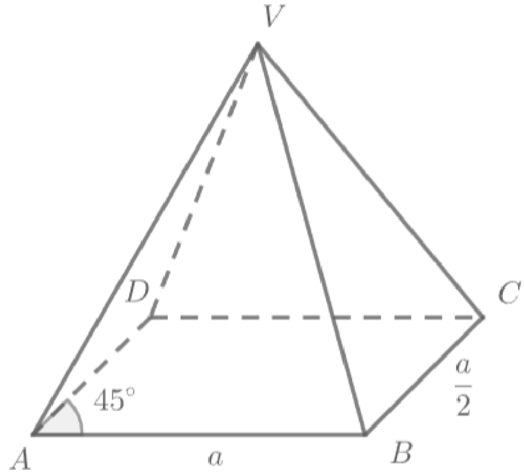
Pro volné rovnoběžné promítání platí následující pravidla:

- Bod se zobrazí jako bod.
- Přímky se zobrazí jako body nebo jako přímky.
- Incidence bodů a přímek zůstává zachována.
- Rovnoběžnost zůstává zachována.
- Poměr velikostí rovnoběžných úseček zůstává zachován.
- Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou se zobrazí ve skutečné velikosti.
- Přímky kolmé k průmětně (tzv. hloubkové přímky) zobrazujeme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel (tzv. úhel zkosení), většinou volíme úhel o velikosti 45°.
- Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

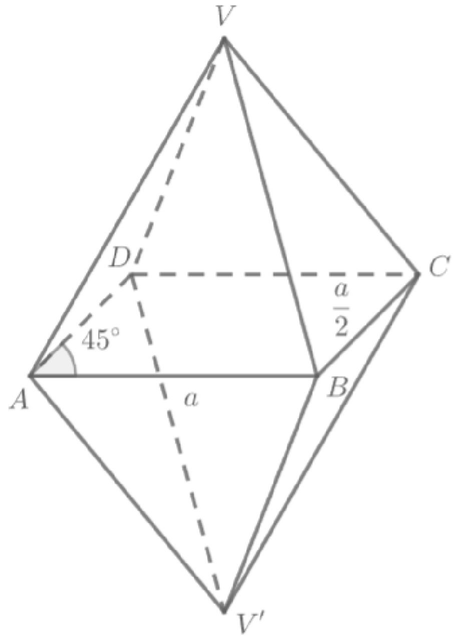
Obrázky vybraných těles ve volném rovnoběžném promítání:



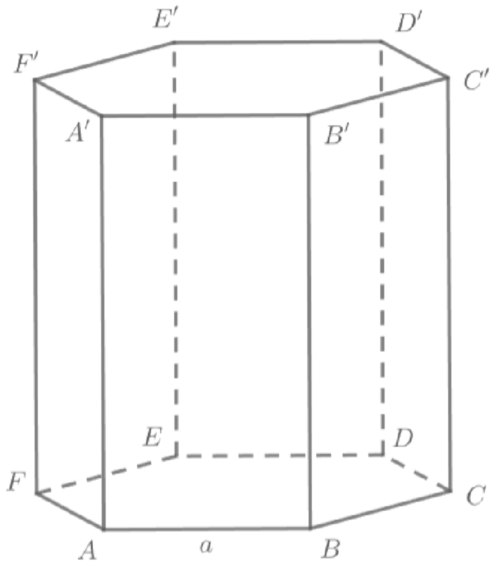
Obrázek 1: Krychle



Obrázek 2: Pravidelný čtyřboký jehlan



Obrázek 3: Osmistěn s pravidelnou podstavou



Obrázek 4: Pravidelný šestiboký hranol

1.4 Řezy těles

Průnik roviny a tělesa neboli řez tělesa rovinou je mnohoúhelník, jehož vrcholy leží na hranách tělesa a strany ve stěnách tělesa. Konstrukce řezu tělesa se řadí mezi velmi časté polohové úlohy ve stereometrii. Tyto konstrukční úlohy se řeší pomocí následujících pravidel:

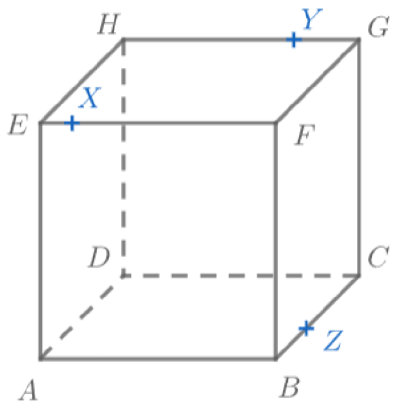
Věta 12 Stranu řezu tvoří všechny body přímky, které leží v jedné stěně mnohostěnu; tedy stranou řezu je úsečka spojující body řezu ležící na hranách tělesa v téže stěně.

Věta 13 Strany řezu, které leží v rovnoběžných rovinách, jsou navzájem rovnoběžné.

Věta 14 Jestliže se dvě průsečnice tří rovin (např. stěn mnohostěnu) protínají v jednom bodě, musí tímto bodem procházet také jejich třetí průsečnice.

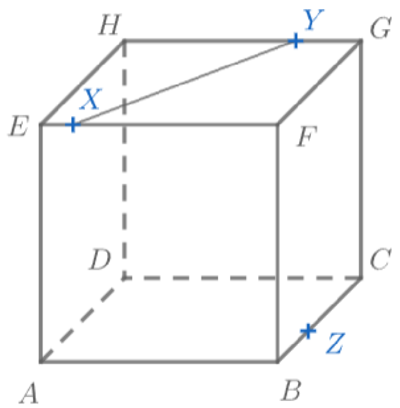
Použití vět je názorně ukázáno na následujícím příkladu:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte řez krychle rovinou určenou body X, Y, Z tak, že $X \in EF$, $Y \in GH$, $Z \in BC$.

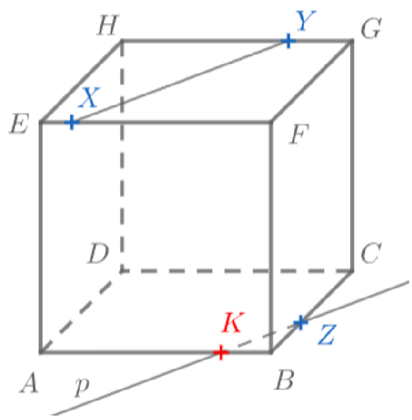


Obrázek 5: Zadání ukázkové úlohy

První krok řešení dané úlohy spočívá v užití věty 12. Sestrojíme úsečku XY, jedná se o stranu řezu, protože body X a Y jsou body řezu ležící na hranách tělesa v téže stěně (viz Obrázek 6). V dalším kroku využijeme větu 13, sestrojíme přímku p, která je rovnoběžná s úsečkou XY a zároveň $Z \in p$. Využijeme větu 12 a sestrojíme vrchol řezu $K \in p \cap AB$ (viz Obrázek 7).



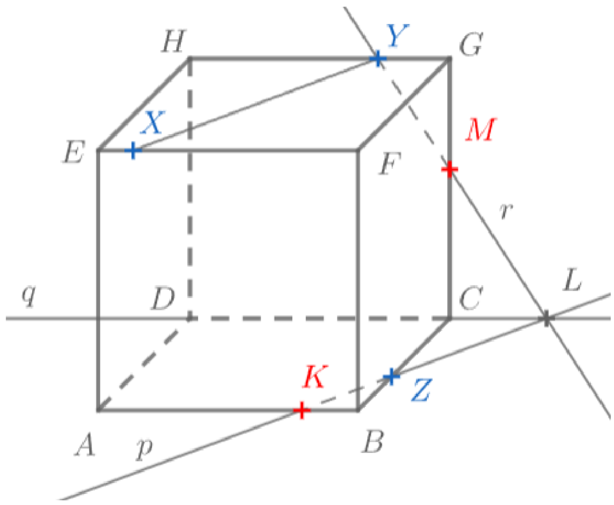
Obrázek 6



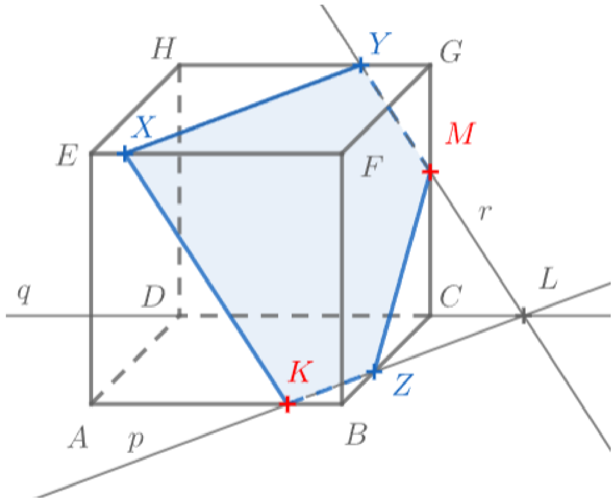
Obrázek 7

Po nalezení bodu K lze sestrojit řež, avšak pro účely ukázkové úlohy aplikujeme větu 14. Průsečnicí rovin CDG a ABC je přímka $q = CD$. Průsečnicí roviny řezu XYZ s rovinou podstavy ABC je přímka $p = KZ$. Průsečíkem přímek p, q je bod L, kterým musí procházet i průsečnice rovin CDG a XYZ. Sestrojíme přímku $r = LY$ (body L, Y leží v rovině CDG a také v rovině řezu), sestrojíme bod $M \in r \cap CG$, který je bodem řezu (viz Obrázek 8).

Po sestrojení bodu M můžeme s pomocí věty 12 konstruovat celý řez $XKZMY$ krychle rovinou XYZ. (viz Obrázek 9)



Obrázek 8



Obrázek 9: Řešení ukázkové úlohy

Daná úloha je vypracována v programu GeoGebra a přiložena k bakalářské práci pod názvem *Ukázková úloha – řez*.

2 Polohové a metrické úlohy

Praktická část této bakalářské práce se bude zabývat řešením autorských polohových a metrických úloh. Jedná se především o vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin. Součástí této bakalářské práce je rovněž příloha, která obsahuje řešení daných úloh v programu GeoGebra. Dynamické pracovní listy v programu GeoGebra obsahují posuvníky, které odhalují jednotlivé kroky řešení. Součástí některých pracovních listů jsou také posuvníky, kterými lze upravovat velikost daného tělesa.

2.1 Polohové úlohy

K řešení následujících úloh využijeme skutečností uvedených v kapitole 1.1.

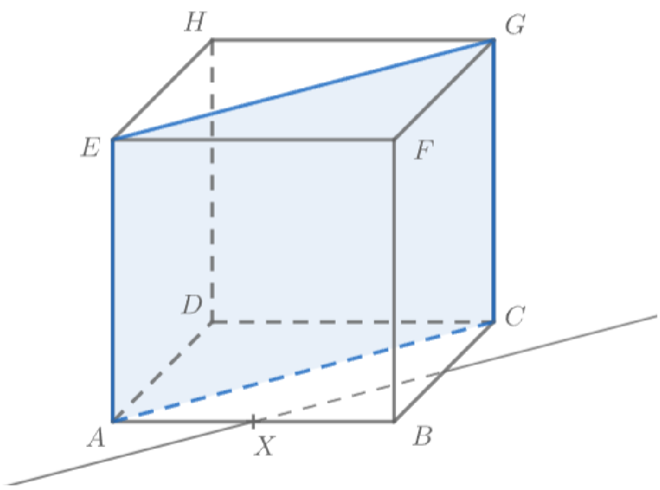
2.1.1 Vzájemná poloha čtyř bodů

Příklad č. 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda body C, E, G, X leží v jedné rovině. Bod X je středem hrany AB.

Řešení:

Podle výše uvedených pravidel sestrojíme řez krychle rovinou CEG. Dále sestrojíme rovnoběžku s EG, která prochází bodem X. Body C, E, G, X neleží v jedné rovině, protože sestrojená rovnoběžka neprochází bodem C, tudíž není součástí roviny ECG.



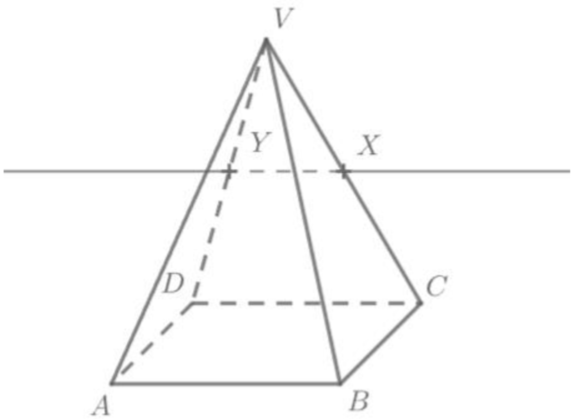
Obrázek 10: Řešení příkladu č. 1

Příklad č. 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Zjistěte, zda body A, B, X, Y leží v jedné rovině. Bod X je středem hrany CV, bod Y je středem hrany DV.

Řešení:

Sestrojíme přímku rovnoběžnou s hranou AB procházející bodem X. Tato rovnoběžka prochází také bodem Y. Body A, B, X, Y leží v jedné rovině, protože rovnoběžné přímky leží v jedné rovině.



Obrázek 11: Řešení příkladu č. 2

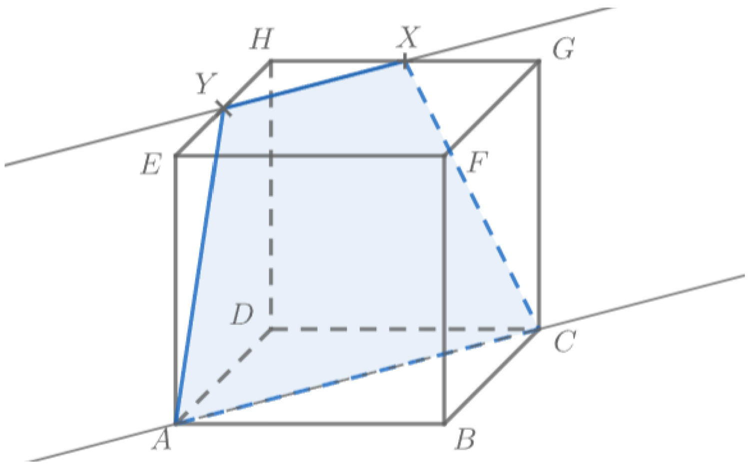
2.1.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Příklad č. 3

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu přímek AC a XY, kde X je středem hrany GH a Y je středem hrany EH.

Řešení:

Sestrojíme řez krychle rovinou ACX. Bod Y náleží tomuto řezu, tudíž přímky leží v jedné rovině, zároveň přímky nemají žádný společný bod. Přímky AC a XY jsou tedy rovnoběžné.



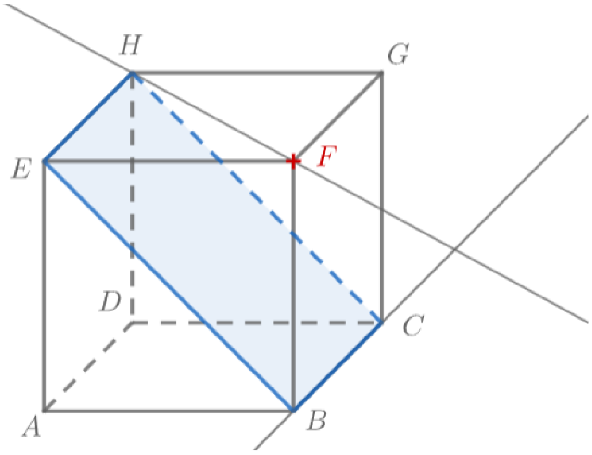
Obrázek 12: Řešení příkladu č. 3

Příklad č. 4

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete vzájemnou polohu přímek *BC* a *FH*.

Řešení:

Sestrojíme řez krychle rovinou *BCH*. Bod *F* není součástí tohoto řezu, tedy přímky neleží v jedné rovině. Zadané přímky nemají žádné společné body a zároveň neleží ve stejné rovině. Přímky *BC* a *FH* jsou tedy mimoběžné.



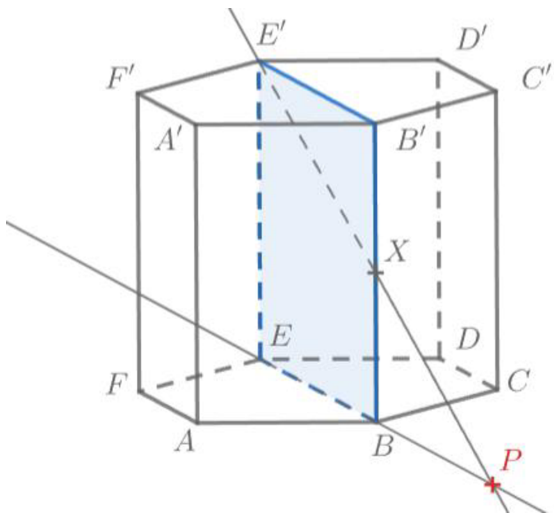
Obrázek 13: Řešení příkladu č. 4

Příklad č. 5

Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*. Určete vzájemnou polohu přímek *EB* a *E'X*, kde *X* je středem hrany *BB'*.

Řešení:

Sestrojíme řez hranolu určený rovinou *BEE'*. Bod *X* je součástí tohoto řezu, tudíž přímky *EB* a *E'X* leží v jedné rovině. Můžeme sestrojit průsečík *P* daných přímek, přímky tedy mají společný bod. Přímky *EB* a *E'X* jsou tedy různoběžné.



Obrázek 14: Řešení příkladu č. 5

2.1.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

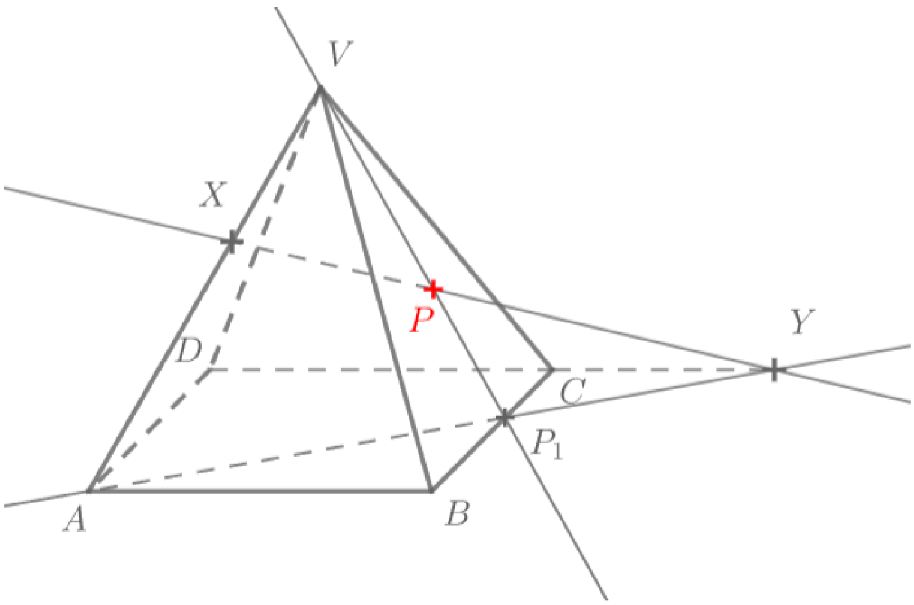
Příklad č. 6

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou BCV. Bod $X \in AV$, bod Y náleží polopřímce DC, platí vztah $|CD| < |DY|$.

Řešení:

1. Pro sestrojení průsečíku proložíme přímkou XY vhodnou rovinu, v našem případě proložíme rovinu vrcholovou AYV. Sestrojíme přímku AY, která náleží dané rovině.
2. Sestrojíme průsečnici roviny AYV s rovinou BCV. Touto průsečnicí je přímka VP_1, kde $P_1 \in BC \cap AY$.
   (AY náleží AYV, BC náleží BCV, V je společný bod obou rovin).
3. Sestrojíme průsečík P přímky XY s přímkou VP_1.

Bod P je hledaným průsečíkem přímky XY s rovinou BCV.



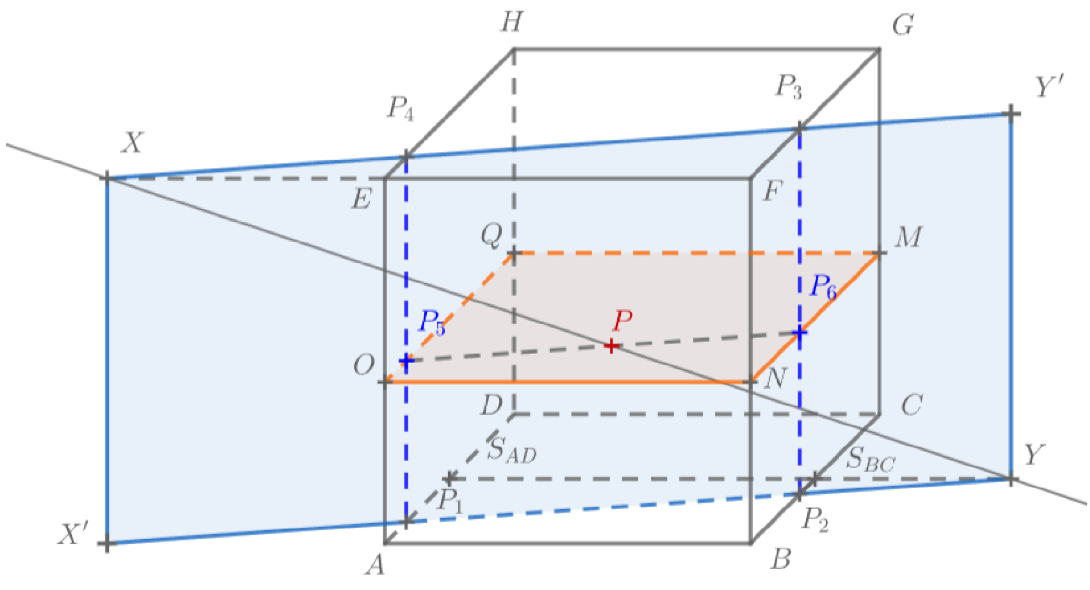
Obrázek 15: Řešení příkladu č. 6

Příklad č. 7

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou ρ. Rovina ρ prochází bodem $M \in CG$ a je rovnoběžná s rovinou ABC, bod X náleží polopřímce FE a platí vztah $|EF| < |FX|$, bod Y náleží polopřímce $S_{AD}S_{BC}$ a platí vztah $|S_{AD}S_{BC}| < |S_{AD}Y|$.

Řešení:

1) Sestrojíme řez krychle rovinou ρ, řezem je čtyřúhelník $MNOQ$. Platí, že $N \in BF$, $NM \,||\, BC$; $O \in AE$, $OM \,||\, AC$; $Q \in DH$, $QM \,||\, DC$.
2) Přímkou XY proložíme vhodnou rovinu, konkrétně směrovou rovinu $XX'Y$, kde X' je pravoúhlý průmět bodu X do roviny ABC.
3) Sestrojíme řez $P_1P_2P_3P_4$ krychle touto rovinou $XX'Y$.
4) Sestrojíme průsečnici rovin ρ a roviny $XX'Y$. Touto průsečnicí je spojnice bodů P_5, P_6, které jsou průsečíky stran řezů $MNOQ$ a $P_1P_2P_3P_4$, tedy $P_5 \in OQ \cap P_1P_4$ a $P6 \in MN \cap P_2P_3$.
5) Sestrojíme průsečík P přímky XY s úsečkou P_5P_6. Bod P je hledaným průsečíkem přímky XY s rovinou ρ.



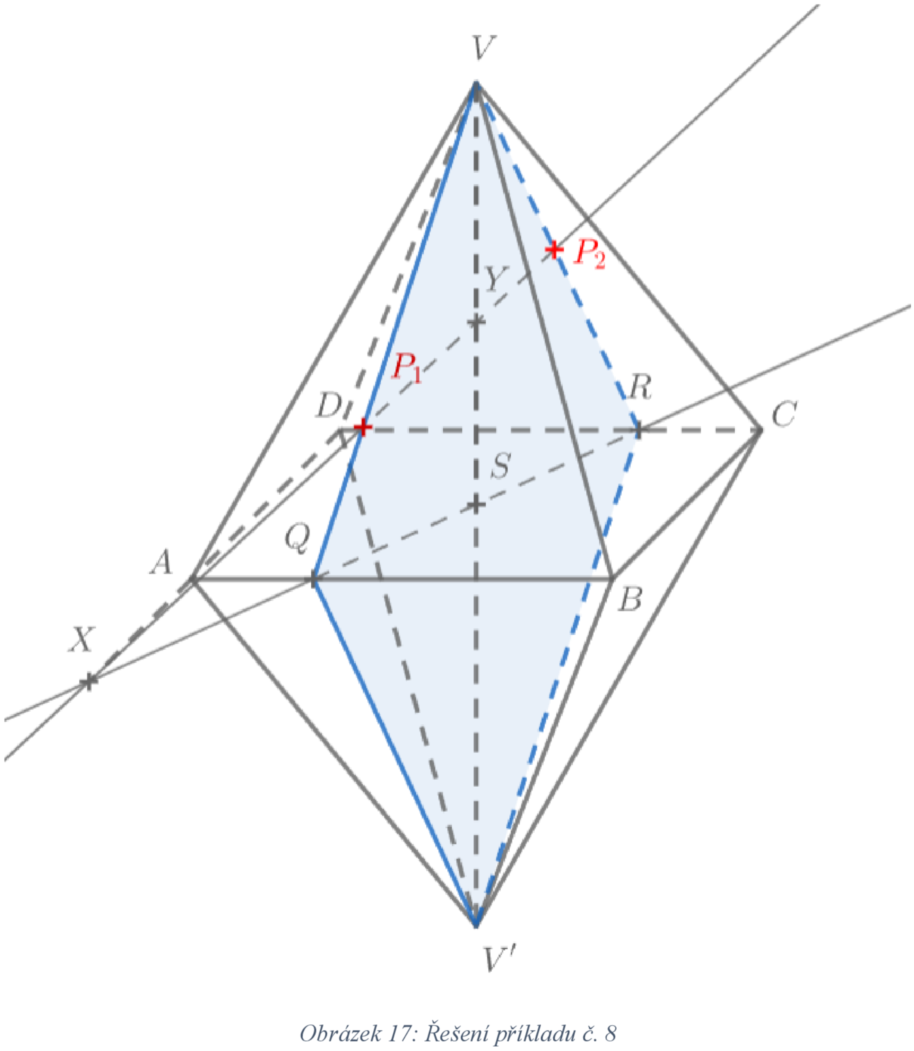
Obrázek 16: Řešení příkladu č. 7

Příklad č.8

Je dán osmistěn *ABCDVV'* s pravidelnou podstavou. Sestrojte průsečíky přímky *XY* s hranicí tělesa. Bod *X* náleží polopřímce *DA* a platí vztah $|DA| < |DX|$, bod *Y* náleží úsečce *SV*, bod *S* je střed podstavy *ABCD*.

Řešení:

1) Přímkou *XY* proložíme vrcholovou rovinu.
   a. Přímka *XS* je průsečnicí vrcholové roviny *XYV* s rovinou podstavy *ABC*, jelikož bod *S* je průsečíkem přímky *VY* s rovinou podstavy *ABC*.
   b. Označíme po řadě *Q*, *R* průsečíky přímky *XS* s hranami *AB*, *CD*.
2) Sestrojíme řez *VQV'R*, který je řezem tělesa rovinou *XYV*.
3) Průsečíky P_1, P_2 přímky *XY* s hranicí řezu *VQV'R* jsou hledanými průsečíky přímky *XY* s hranicí tělesa.



Obrázek 17: Řešení příkladu č. 8

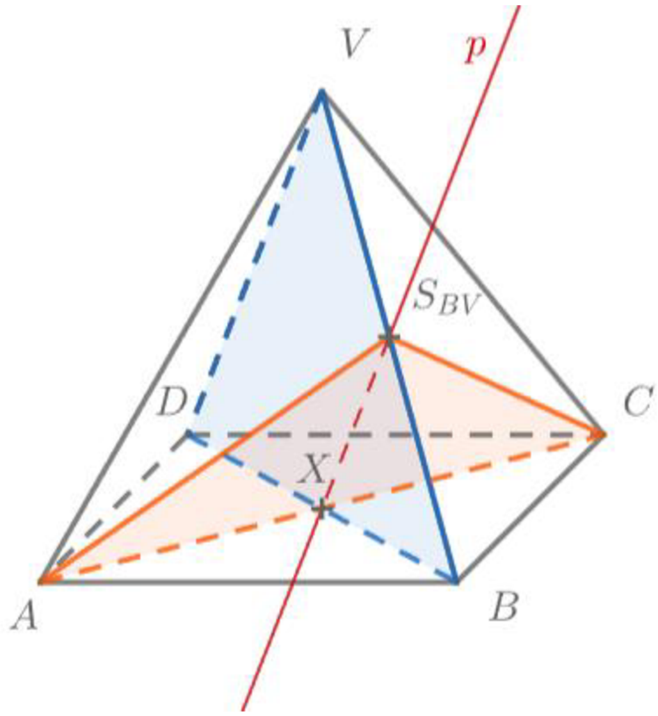
2.1.4 Vzájemná poloha rovin

Příklad č. 9

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete vzájemnou polohu rovin ACS_{BV} a BDV. V případě různoběžnosti sestrojte jejich průsečnici.

Řešení:

Roviny jsou navzájem různé a bod S_{BV} náleží oběma rovinám. Jedná se o různoběžné roviny. Bod S_{BV} je společným bodem, proto je bodem průsečnice. Přímky BD a AC leží ve stejné rovině a jsou různoběžné, tudíž existuje bod $X \in BD \cap AC$. Hledaná průsečnice p je dána body $S_{BV}X$.



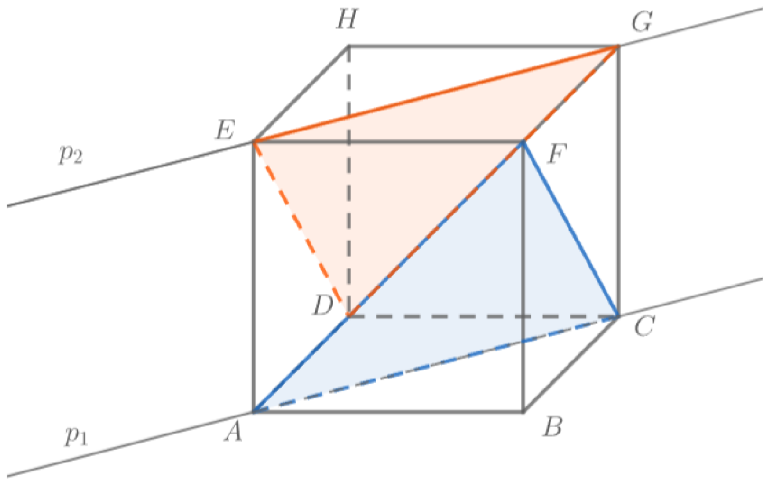
Obrázek 18: Řešení příkladu č. 9

Příklad č. 10

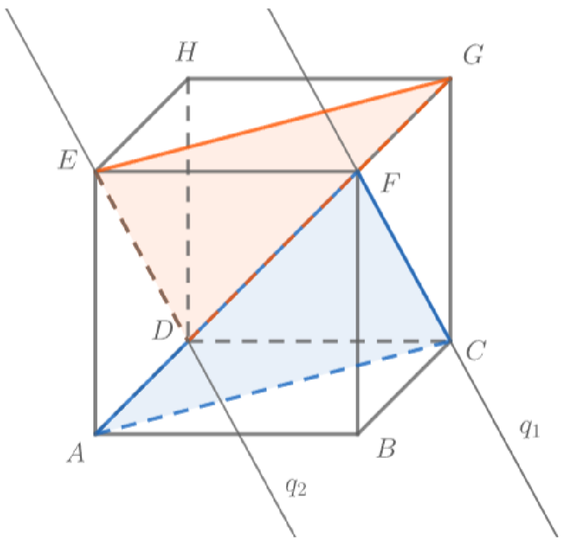
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu rovin ACF a DEG. V případě různoběžnosti sestrojte jejich průsečnici.

Řešení:

Přímka $p_1 = AC$ je rovnoběžná s přímkou $p_2 = EG$ (viz Obrázek 19). Přímka $q_1 = CF$ je rovnoběžná s přímkou $q_2 = DE$ (viz Obrázek 20). Různoběžné přímky $p_1, q_1 \in ACF$ jsou rovnoběžné s rovinou DEG, podle kritéria pro rovnoběžnost dvou rovin platí, že roviny ACF a DEG jsou rovnoběžné.



Obrázek 19



Obrázek 20

Příklad č. 11

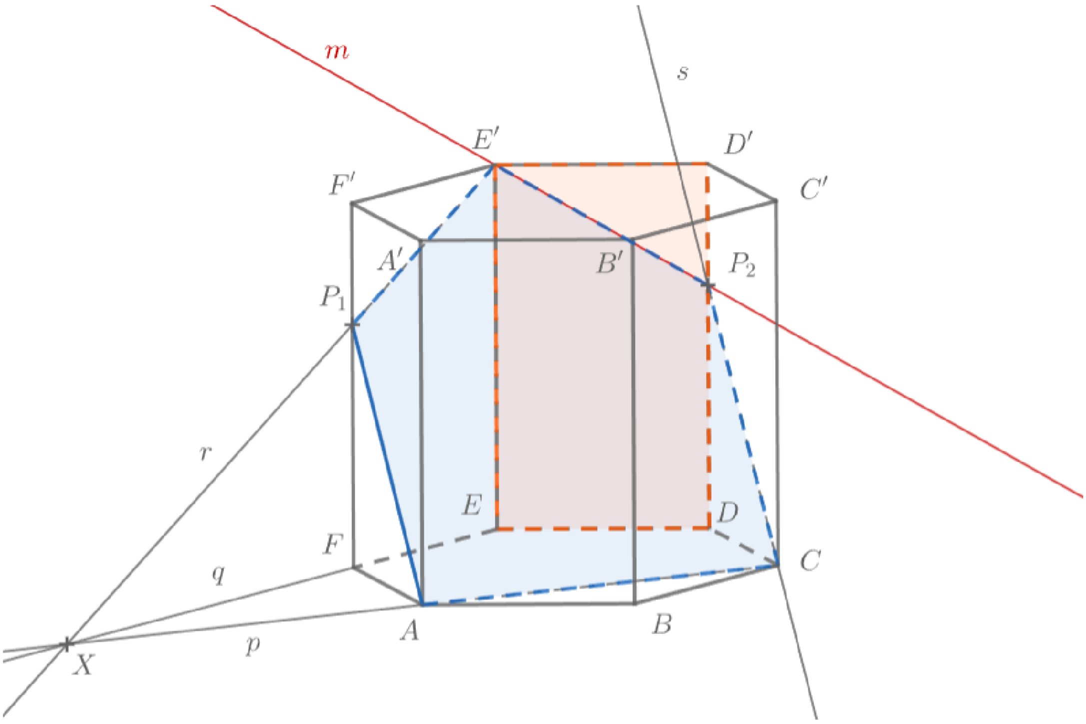
Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA’B’C’D’E’F‘*. Určete vzájemnou polohu rovin *ACE‘* a *DEE‘*. V případě různoběžnosti sestrojte jejich průsečnici.

Řešení:

Roviny jsou různé a mají společný bod *E‘*, jedná se o různoběžné roviny. Pro sestrojení průsečnice využijeme řez tělesa rovinou *ACE‘*.

1) Sestrojíme přímku *p* = *AC*, tato přímka náleží podstavě a rovině *ACE‘*.
2) Sestrojíme přímku *q* = *EF*, tato přímka náleží podstavě a rovině *EFE‘*. Sestrojíme průsečík $X \in p \cap q$, ten náleží i rovině *ACE‘*.
3) Sestrojíme přímku *r* = *XE‘*. Průsečík $P_1 \in r \cap FF‘$ náleží hledanému řezu.
4) Sestrojíme strany řezu AP_1, $P_1E‘$.
5) Pomocí přímky *s* rovnoběžné s AP_1, která prochází bodem *C*, nalezneme vrchol řezu P_2, tedy $P_2 \in s \cap DD‘$.
6) Zbývající strany řezu sestrojíme pomocí spojení bodů, které leží ve stejné stěně mnohostěnu.

Řez tělesa rovinou *DEE‘* je stěna tělesa určená těmito body. Body *E‘* a P_2 náleží oběma daným rovinám. Přímka *m* procházející body $E’P_2$ je hledanou průsečnicí rovin *ACE‘* a *DEE*.



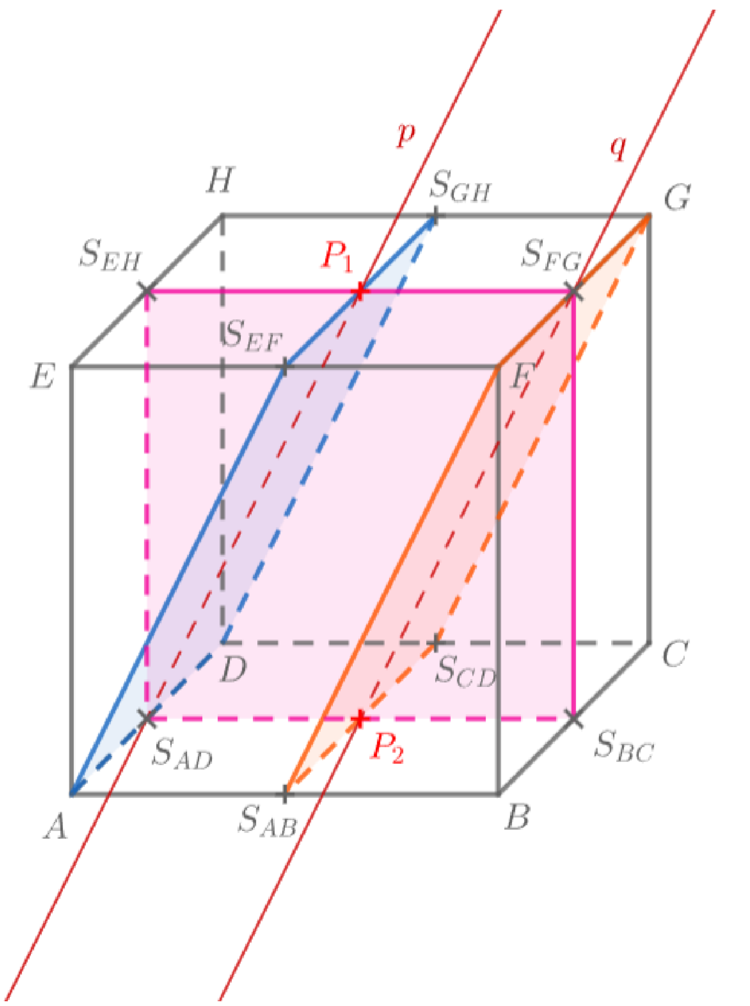
Obrázek 21: Řešení příkladu č. 11

Příklad č. 12

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete vzájemnou polohu tří rovin ADS_{EF}, FGS_{AB} a $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$. V případě různoběžnosti sestrojte jejich průsečnice, popřípadě průsečík.

Řešení:

Platí, že $AD \parallel FG$ a $AS_{EF} \parallel S_{AB}F$, tedy v rovině ADS_{EF} leží dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou FGS_{AB}, z čehož vyplývá, že roviny jsou rovnoběžné. Rovina $S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ je protíná ve dvou různých rovnoběžkách, které označíme p a q. Tyto rovnoběžky sestojíme pomocí společných bodů, přímka $p = ADS_{EF} \cap S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ je určena body S_{AD} a P_1, kde $P_1 \in S_{EF}S_{GH} \cap S_{EH}S_{FG}$; přímka $q = FGS_{AB} \cap S_{AD}S_{BC}S_{FG}$ je určena body S_{FG} a P_2, kde $P_2 \in S_{AD}S_{BC} \cap S_{AB}S_{CD}$.



Obrázek 22: Řešení příkladu č. 12

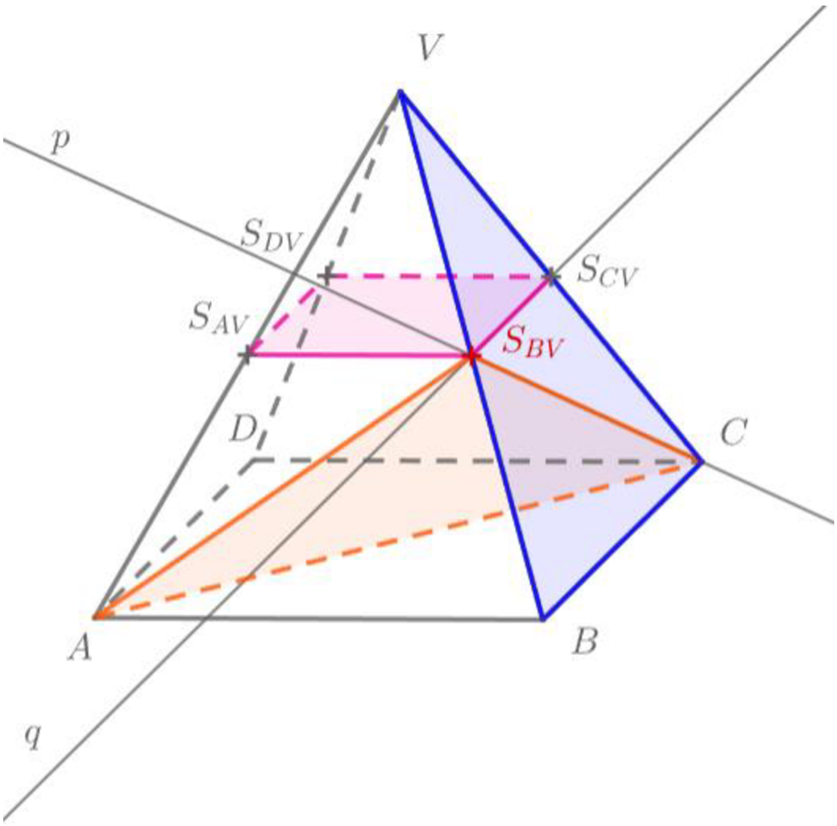
Příklad č. 13

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete vzájemnou polohu tří rovin ACS_{BV}, BCV a $S_{AV}S_{CV}S_{DV}$. V případě různoběžnosti sestrojte jejich průsečnice, popřípadě průsečík.

Řešení:

Roviny ACS_{BV} a BCV jsou různoběžné, jejich průsečnicí je přímka p určená body C, S_{BV}. Roviny BCV a $S_{AV}S_{CV}S_{DV}$ jsou různoběžné, jejich průsečnicí je přímka q procházející body $S_{BV}S_{CV}$. Jedná se o tři navzájem různoběžné roviny.

Bod S_{BV} je průsečíkem přímek p a q, jedná se o hledaný průsečík rovin ACS_{BV}, BCV a $S_{AV}S_{CV}S_{DV}$.



Obrázek 23: Řešení příkladu č. 13

2.1.5 Příčka mimoběžek

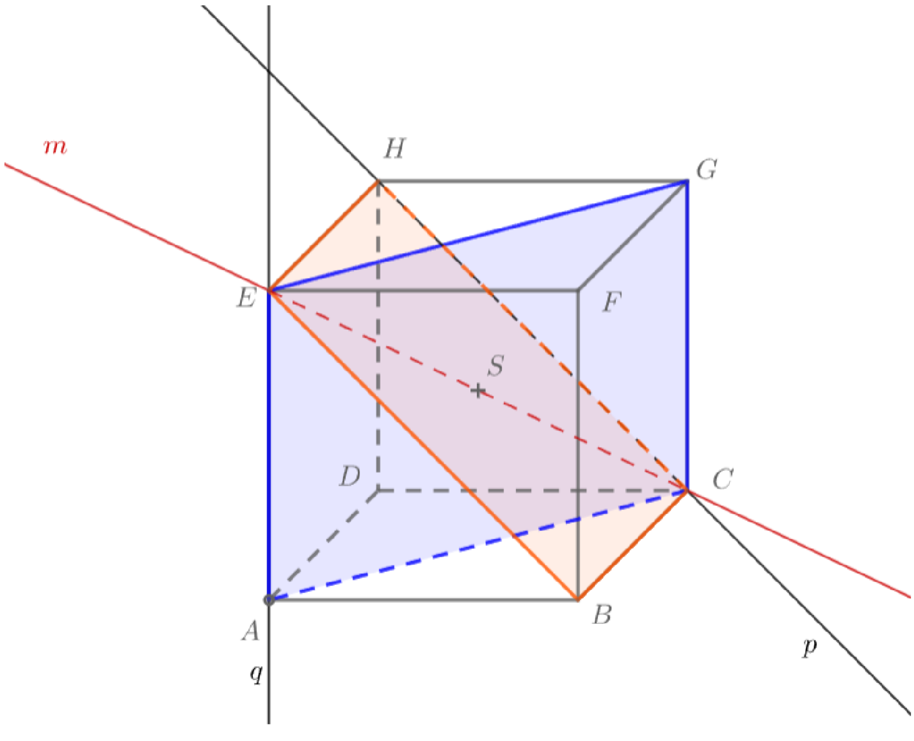
Příklad č. 14

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte příčku mimoběžek $p = CH$ a $q = AE$, která prochází středem krychle *S*.

Řešení:

Hledaná příčka mimoběžek prochází bodem *S* a protíná přímky *p* a *q*. Jedná se tedy o průsečnici dvou rovin takových, že první rovina je určena přímkou *p* a bodem *S*, druhá rovina je určena přímkou *q* a bodem *S*.

1) Přímka *p* a bod *S* určují rovinu, která protíná krychli v řezu *BCHE*, tento řez sestrojíme.
2) Přímka *q* a bod *S* určují rovinu, která protíná krychli v řezu *ACGE*, tento řez sestrojíme.
3) Hledaná příčka mimoběžek je průsečnice *m* těchto rovin, tedy $m = EC$.



Obrázek 24: Řešení příkladu č. 14

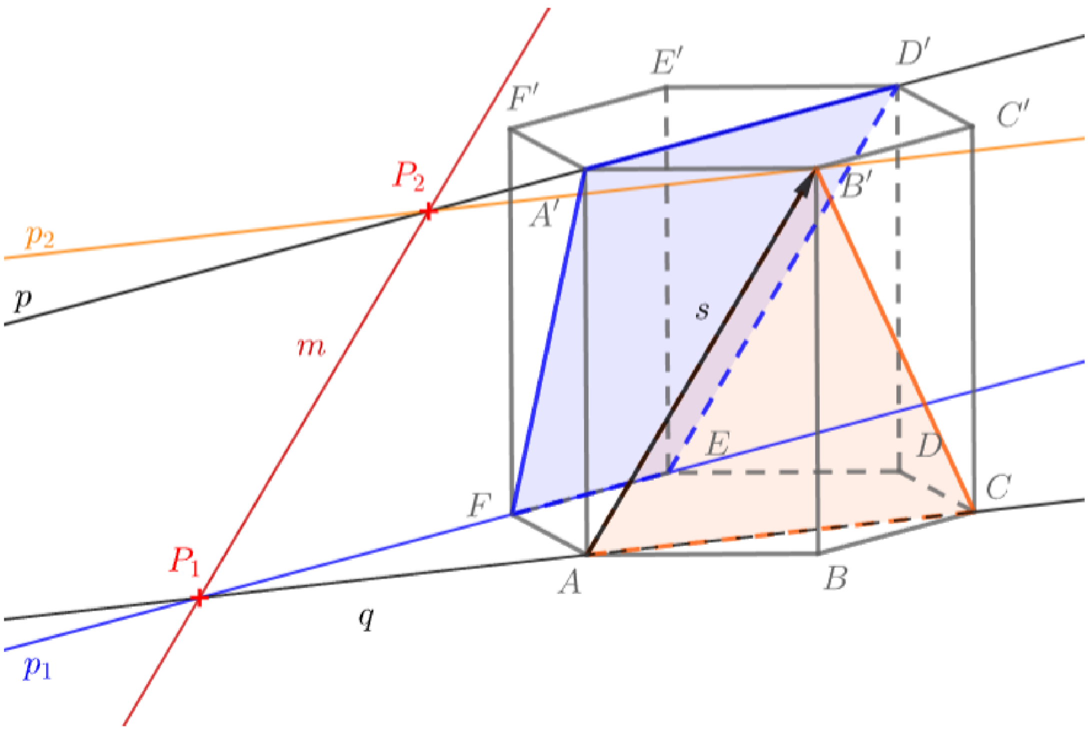
Příklad č. 15

Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*. Sestrojte příčku mimoběžek $p = A'D'$ a $q = AC$ daného směru **s**. Směr **s** je určený přímkou *AB'*.

Řešení:

Příčka mimoběžek je průsečnicí rovin ρ a σ, rovina ρ je určená přímkou p a je rovnoběžná s přímkou *AB'*, rovina σ je určená přímkou q a je rovnoběžná s přímkou *AB'*.

1) Sestrojíme řez rovinou ρ, která je určená přímkou p a je rovnoběžná s přímkou *AB'*, jedná se o čtyřúhelník *A'D'EF*.
2) Sestrojíme řez rovinou σ, která je určená přímkou q a je rovnoběžná s přímkou *AB'*, jedná se o trojúhelník *ACB'*.
3) Hledáme průsečnici těchto rovin. Sestrojíme přímku $p_1 = EF$. Přímky p_1 a q leží v rovině dolní podstavy *ABCDEF*, můžeme sestrojit jejich průsečík P_1.
4) Sestrojíme přímku p_2 tak, že $B' \in p_2$ a zároveň $q \parallel p_2$. Přímky p_2 a p leží v rovině horní podstavy *A'B'C'D'E'F'*, můžeme sestrojit jejich průsečík P_2.
5) Průsečnice m rovin ρ a σ je určena body P_1 a P_2. Přímka m je hledaná příčka mimoběžek p a q.



Obrázek 25: Řešení příkladu č. 15

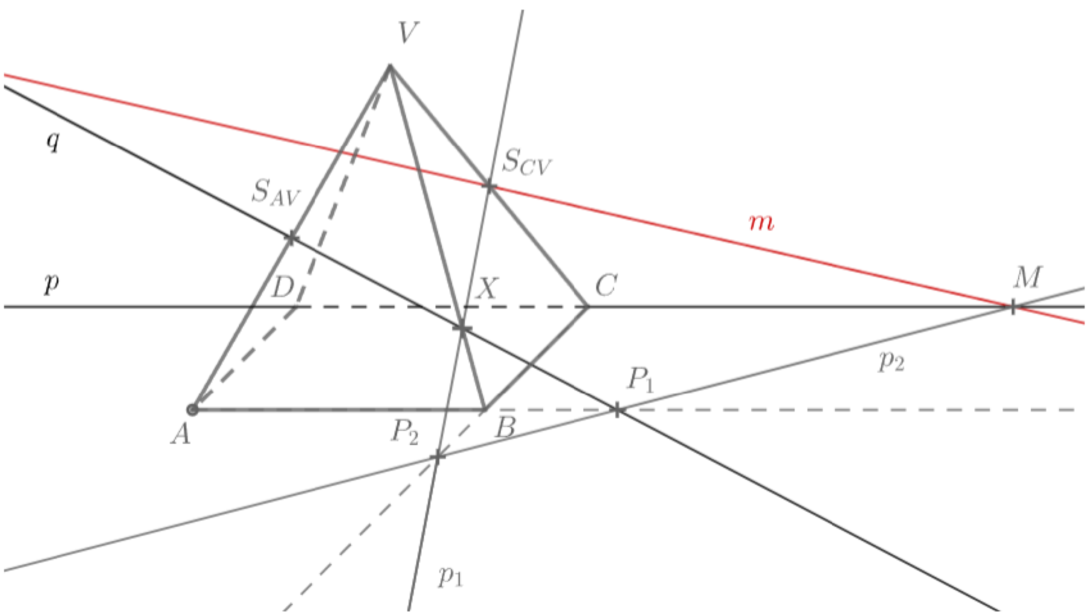
Příklad č. 16

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte příčku mimoběžek $p = CD$ a $q = S_{AV}X$, která prochází bodem S_{CV}. Bod X leží na hraně BV a platí vztah $|XB| < |XV|$.

Řešení:

Známe bod S_{CV}, kterým příčka mimoběžek prochází. Dalším jejím bodem je průsečík přímky p s rovinou σ, která je určena přímkou q a bodem S_{CV}.

1) Sestrojíme bod P_1, který je průsečíkem přímky q s přímkou AB.
2) Sestrojíme přímku $p_1 = XS_{CV}$ a její průsečík P_2 s přímkou CB.
3) Body P_1, P_2 náleží jak rovině podstavy, tak rovině σ, můžeme sestrojit přímku p_2, danou body P_1, P_2. Vzhledem k tomu, že přímka p také leží v rovině podstavy, můžeme sestrojit bod $M \in p \cap p_2$.
4) Bod M náleží přímce p a rovině σ, jedná se tedy o bod hledané příčky mimoběžek. Sestrojíme přímku m, která je dána body M, S_{CV}. Přímka m je hledanou příčkou mimoběžek p a q.



Obrázek 26: Řešení příkladu č. 16

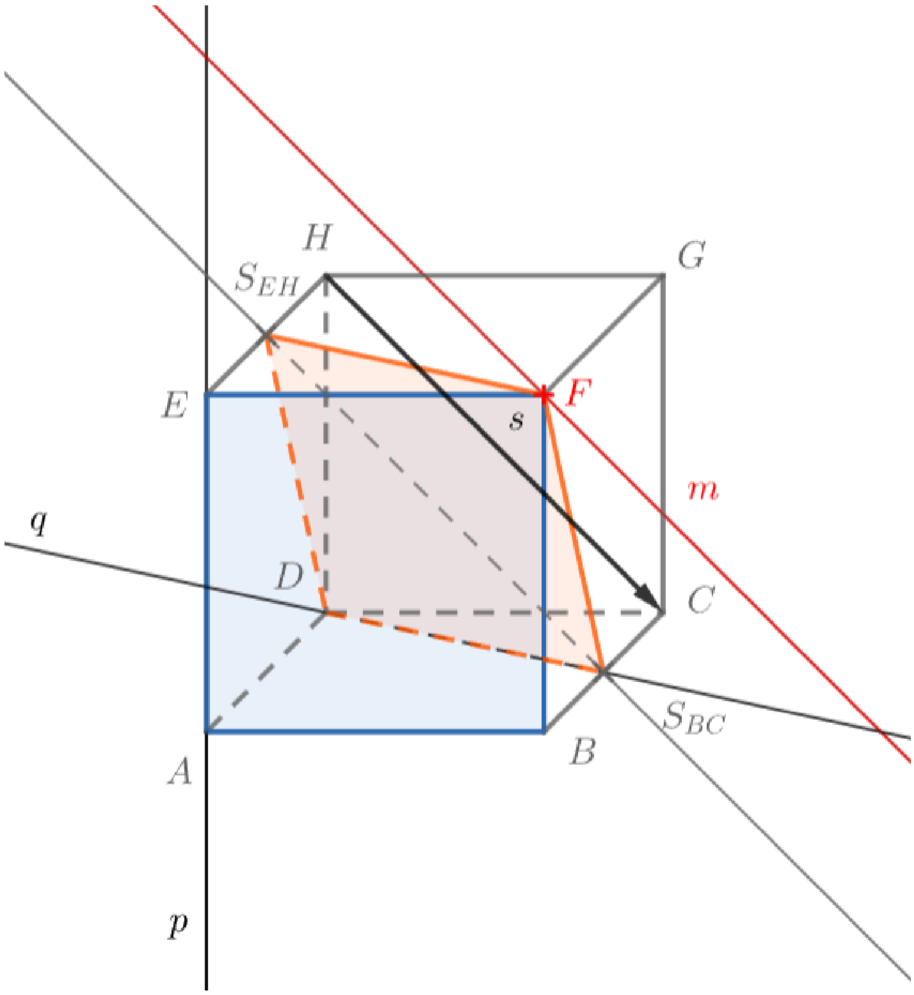
Příklad č. 17

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte příčku mimoběžek $p = AE$ a $q = DS_{BC}$ daného směru $\boldsymbol{s}$. Směr $\boldsymbol{s}$ je určený přímkou HC.

Řešení:

Příčka mimoběžek bude průsečnicí rovin ρ a σ, kde ρ je určená přímkou p a je rovnoběžná s přímkou HC, rovina σ je určená přímkou q a je rovnoběžná s přímkou HC.

1) Stěna $ABFE$ je řez tělesa rovinou ρ.
2) Řezem krychle rovinou σ bude čtyřúhelník $DS_{EH}FS_{BC}$, neboť rovnoběžka s přímkou HC vedená bodem S_{BC} protíná hranu EH v bodě S_{EH}.
3) Oba řezy mají společný bod F.
4) Bodem F vedeme přímku m rovnoběžnou s přímkou HC, tato přímka je hledanou příčkou mimoběžek p a q.



Obrázek 27: Řešení příkladu č. 17

2.1.6 Body, přímky a roviny daných vlastností

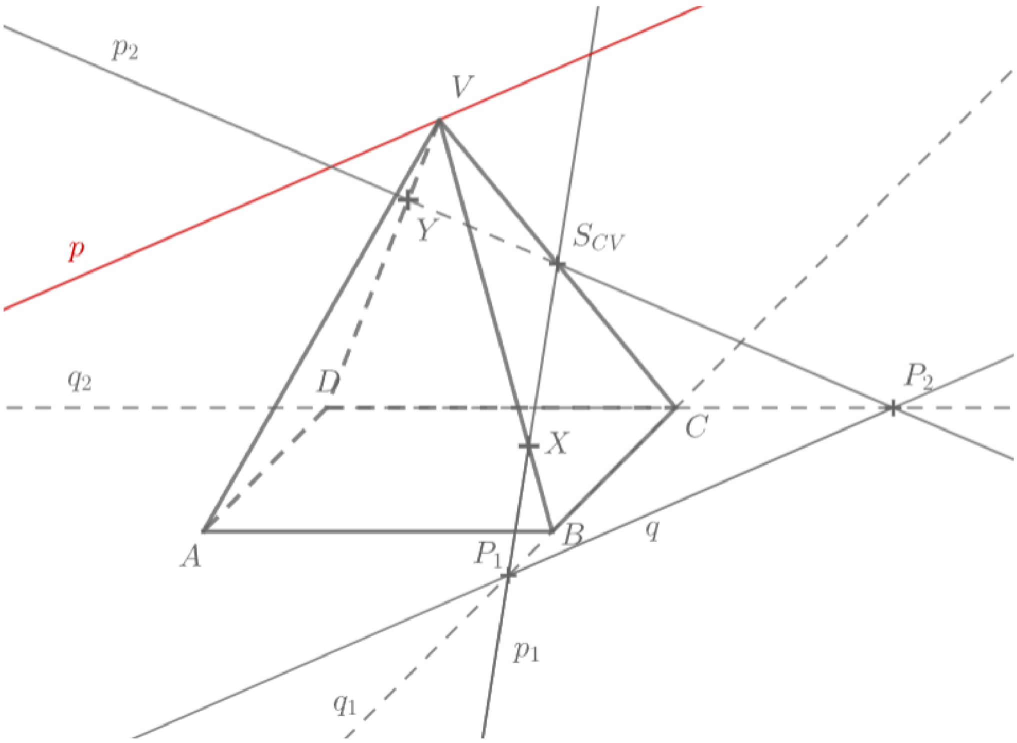
Příklad č. 18

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Bodem *V* veďte přímku *p*, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin ρ, σ. Rovina $\rho = ABC$, rovina $\sigma = XYS_{CV}$, bod *X* leží na hraně *BV* a platí vztah $|XB| < |XV|$, bod *Y* leží na hraně *DV* a platí vztah $|YV| < |YD|$.

Řešení:

Pro nalezení průsečnice rovin ρ, σ využijeme toho, že rovina $\rho = ABC$ je rovinou podstavy tělesa.

1) Sestrojíme přímku p_1, která je určena body S_{CV}, *X*. Dále sestrojíme přímku q_1, která je určena body *B*, *C*. Obě tyto přímky leží v rovině *BCV*.
2) Sestrojíme průsečík $P_1 \in p_1 \cap q_1$.
3) Analogicky sestrojíme přímku p_2, která je určena body S_{CV}, *Y*. Dále sestrojíme přímku q_2, která je určena body *D*, *C*. Obě tyto přímky leží v rovině *CDV*.
4) Sestrojíme průsečík $P_2 \in p_2 \cap q_2$.
5) Body P_1, P_2 náleží rovině podstavy i rovině určené body XYS_{CV} tedy určují průsečnici *q* daných rovin, platí $q = \rho \cap \sigma$.
6) Sestrojíme hledanou přímku *p*, která prochází bodem *V* a je rovnoběžná s přímkou *q*.



Obrázek 28: Řešení příkladu č. 18

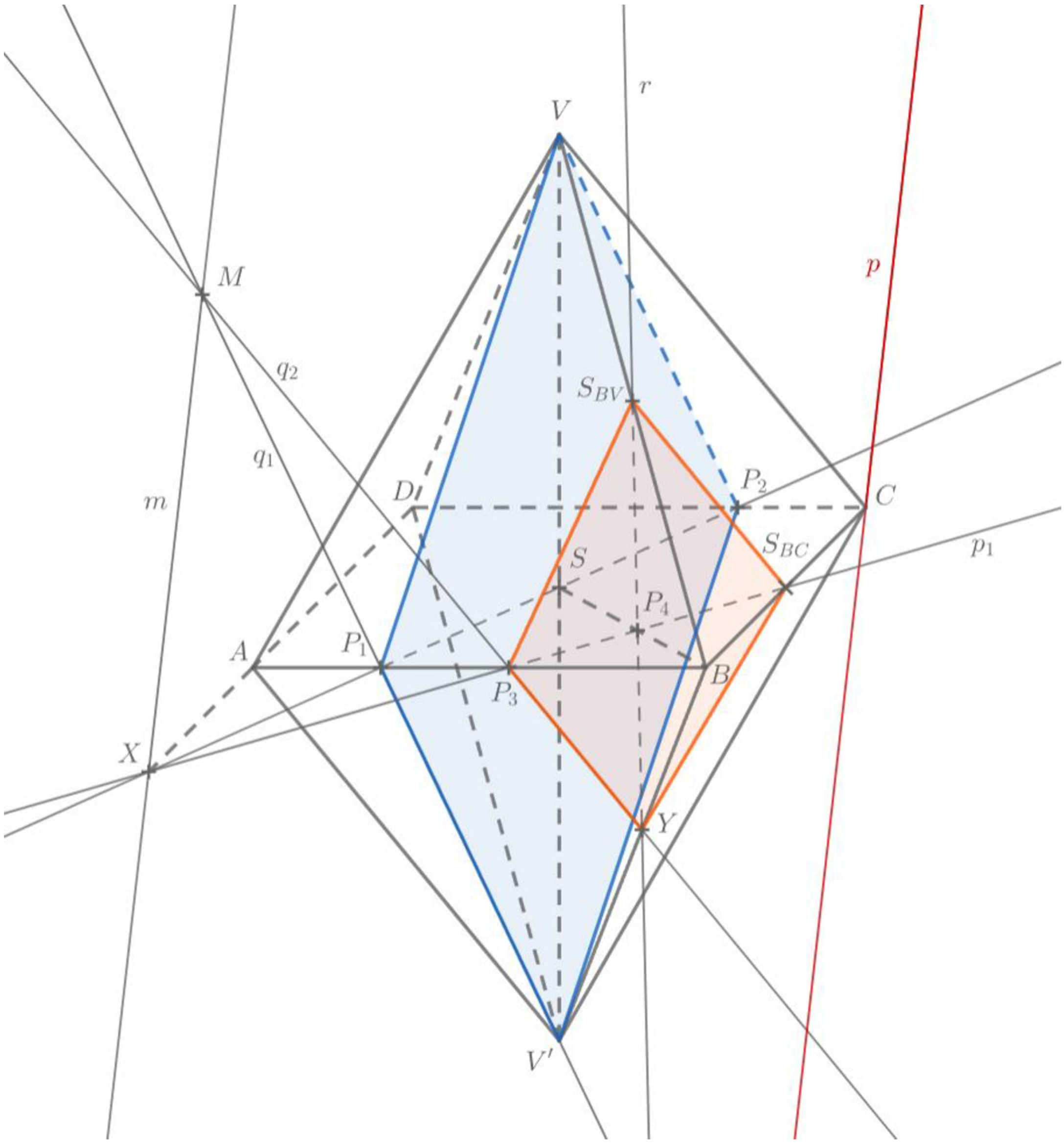
Příklad č. 19

Je dán osmistěn $ABCDVV'$ s pravidelnou podstavou. Bodem C veďte přímku p, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin ρ, σ. Rovina $\rho = XSV$, rovina $\sigma = XS_{BC}S_{BV}$, bod X náleží polopřímce DA a platí vztah $|AD| < |XD|$, bod S je střed úsečky AC.

Řešení:

K sestrojení přímky p je nutno nalézt průsečnici q rovin ρ a σ. Bod X je společným bodem obou rovin, hledáme tedy jejich další společný bod.

1) Sestrojíme řez tělesa rovinou ρ. Označíme po řadě P_1, P_2 průsečíky přímky XS s hranami tělesa AB, CD. Řezem tělesa rovinou ρ je čtyřúhelník $VP_1V'P_2$.
2) Dále sestrojíme řez tělesa rovinou σ. Sestrojíme přímku $p_1 = XS_{BC}$. Označíme průsečík P_3 této přímky s hranou tělesa AB.
3) Hledáme bod, který náleží hraně tělesa BV' a zároveň rovině σ. Tento bod náleží rovině SBV, sestrojíme pomocný bod $P_4 \in p_1 \cap SB$. (Bod P_4 je průsečíkem rovin σ, SBV a ABC.)
4) Sestrojíme přímku r, která je dána body S_{BV}, P_4. Platí $r = SBV \cap \sigma$.
5) Sestrojíme bod $Y \in BV' \cap r$. Čtyřúhelník $S_{BV}S_{BC}P_3Y$ je řez tělesa rovinou σ.
6) Sestrojíme přímky $q_1 = V'P_1$ a $q_2 = YP_3$. Obě tyto přímky leží v rovině ABV'.
7) Přímky q_1 a q_2 jsou různoběžné a jejich průsečíkem je bod M.
8) Sestrojíme přímku $m = XM$. Tato přímka je průsečnicí rovin ρ, σ.
9) Sestrojíme hledanou přímku p, která prochází bodem C a je rovnoběžná s přímkou m.



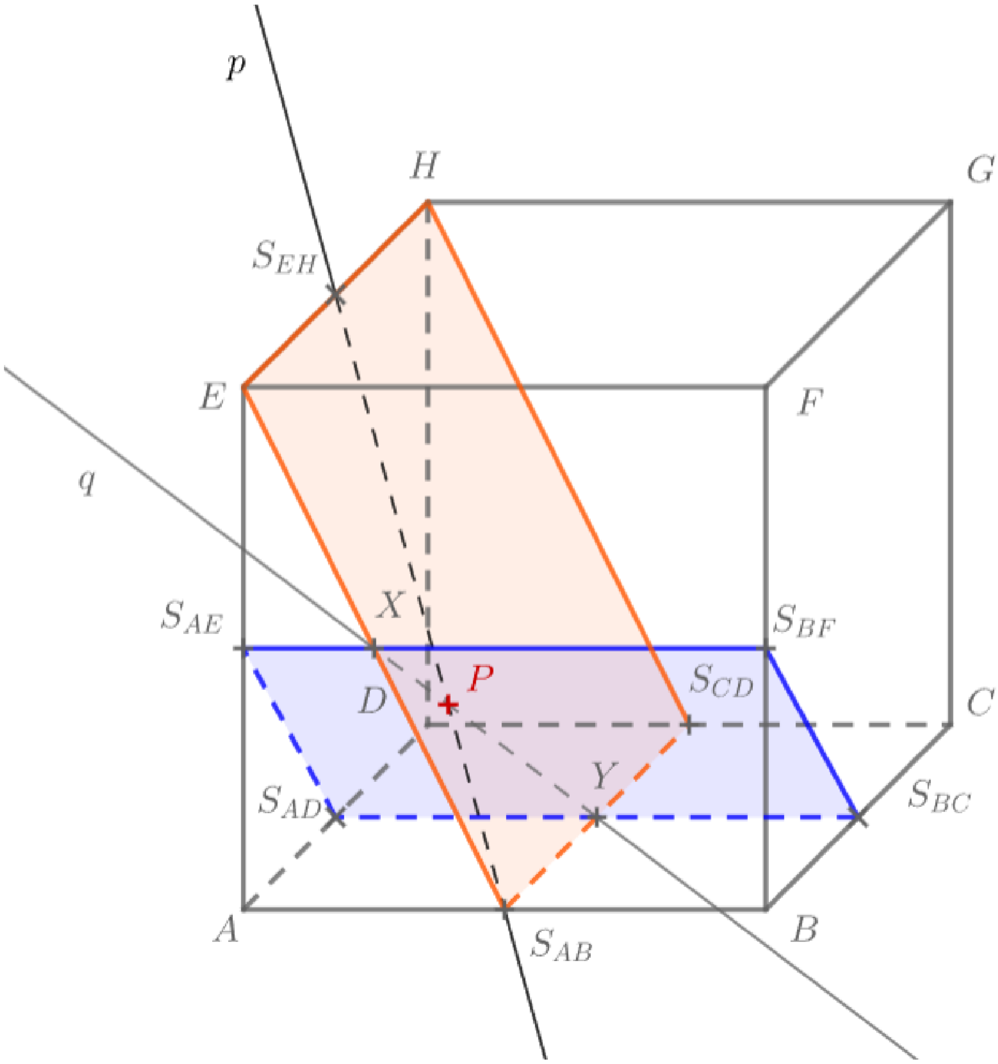
Obrázek 29: Řešení příkladu č. 19

Příklad č. 20

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky $p = S_{AB}S_{EH}$ s rovinou ρ, která prochází bodem S_{BF} a je rovnoběžná s rovinou CDE.

Řešení:

1) Rovina ρ je určená body $S_{BC}S_{BF}S_{AE}$, sestrojíme řez krychle rovinou ρ.
2) Přímkou p proložíme rovinu EHS_{AB}. Sestrojíme řez krychle touto rovinou, kterým je čtyřúhelník $ES_{AB}S_{CD}H$.
3) Průsečnice q rovin ρ a EHS_{AB} je určena body X, Y. Bod $X \in ES_{AB} \cap S_{AE}S_{BF}$ a bod $Y \in S_{AB}S_{CD} \cap S_{BC}S_{AD}$.
4) Protože přímky p a q leží v rovině EHS_{AB}, můžeme sestrojit jejich průsečík P. Bod P je hledaným průsečíkem přímky p s rovinou ρ.



Obrázek 30: Řešení příkladu č. 20

Příklad č. 21

Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*. Sestrojte řez tělesa rovinou ρ, která prochází hranou *BC* a je rovnoběžná s přímkou *p*, která je průsečnicí rovin *E'F'X* a *ABB'*. Bod *X* náleží hraně *BB'*.

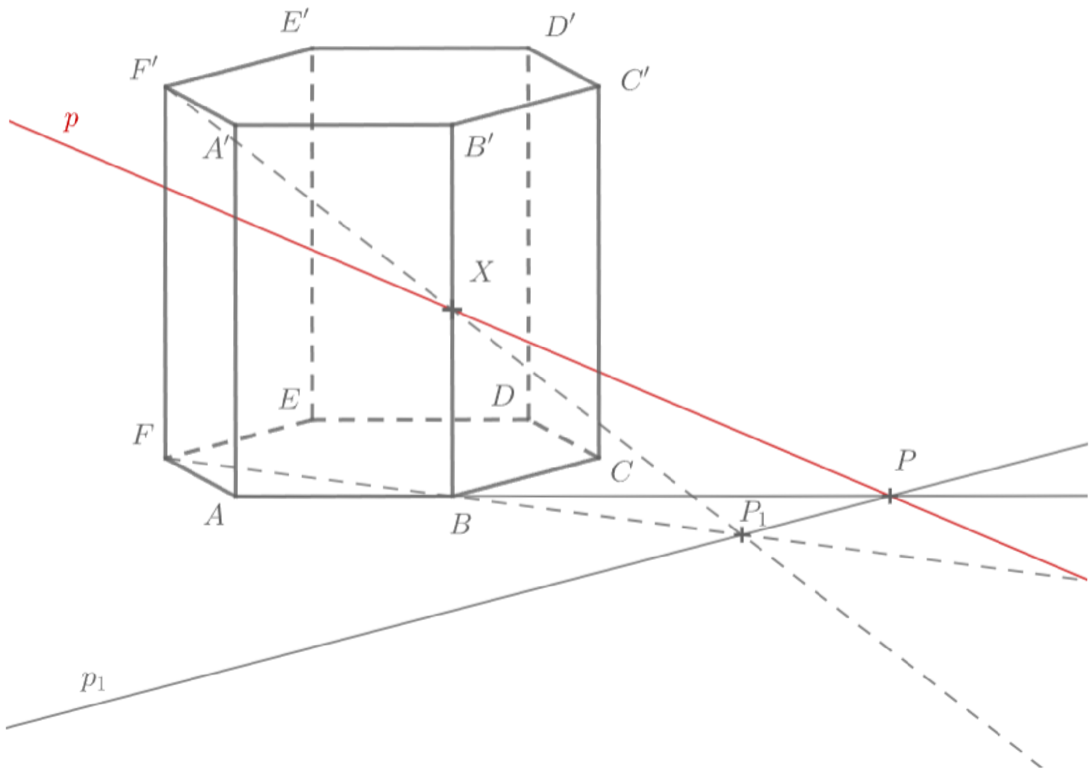
Řešení:

Nejprve sestrojíme průsečnici *p* rovin *E'F'X* a *ABB'*.

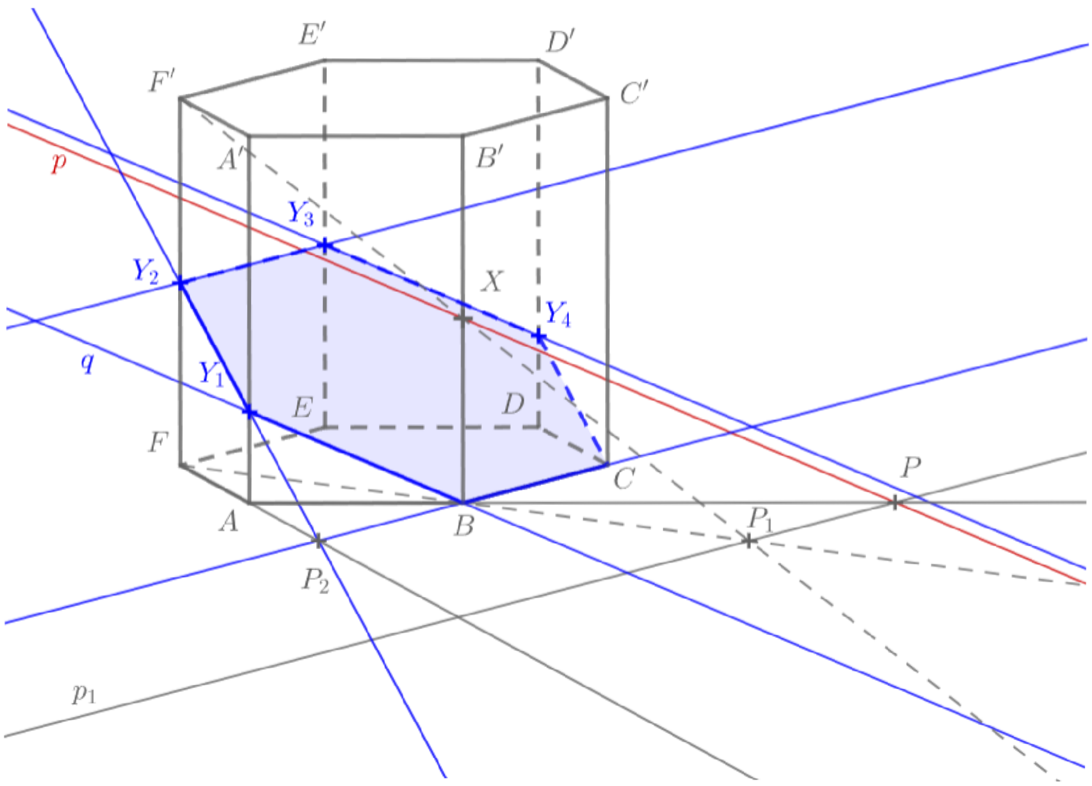
1) Sestrojíme bod P_1, který je průsečíkem přímky *F'X* s rovinou podstavy, tedy $P_1 \in F'X \cap FB$.
2) Sestrojíme přímku p_1, která prochází bodem P_1 a je rovnoběžná s *F'E'*. Tato přímka je průsečnicí roviny *E'F'X* s rovinou podstavy.
3) Sestrojíme polopřímku *AB*. Ta náleží rovině podstavy a zároveň rovině *ABB'*.
4) Sestrojíme průsečík *P* přímky p_1 s polopřímkou *AB*.
5) Body *P* a *X* leží v rovině *ABB'* i v rovině *E'F'X*, přímka $p = PX$ je hledaná průsečnice rovin *E'F'X* a *ABB'*. (viz Obrázek 31)

Dále sestrojíme řez tělesa rovinou ρ.

6) Sestrojíme přímku *q*, která prochází bodem *B* a je rovnoběžná s přímkou *p*. Její průsečík s hranou tělesa *AA'* označíme Y_1.
7) Sestrojíme přímku *BC*, která je průsečnicí roviny podstavy *ABC* s hledanou rovinou ρ. Dále sestrojíme pomocnou přímku *FA*, která náleží rovině podstavy *ABC*.
8) Sestrojíme průsečík P_2 přímky *BC* a přímky *FA*.
9) Body Y_1 a P_2 leží v rovině *AFF'*, jejich spojnice protne hranu *FF'* v bodě Y_2, což je další vrchol hledaného řezu.
10) Sestrojíme zbylé body řezu; bod $Y_3 \in EE'$ náleží přímce rovnoběžné s přímkou *BC*, která prochází bodem Y_2; bod $Y_4 \in DD'$ náleží přímce rovnoběžné s přímkou *q*, která prochází bodem Y_3.
11) Hledaným řezem je šestiúhelník $BY_1Y_2Y_3Y_4C$.



Obrázek 31: Příklad č. 21, sestrojení přímky p



Obrázek 32: Řešení příkladu č. 21

2.2 Metrické úlohy

2.2.1 Odchylka

K řešení následujících úloh využijeme skutečností uvedených v kapitole 1.2.1.

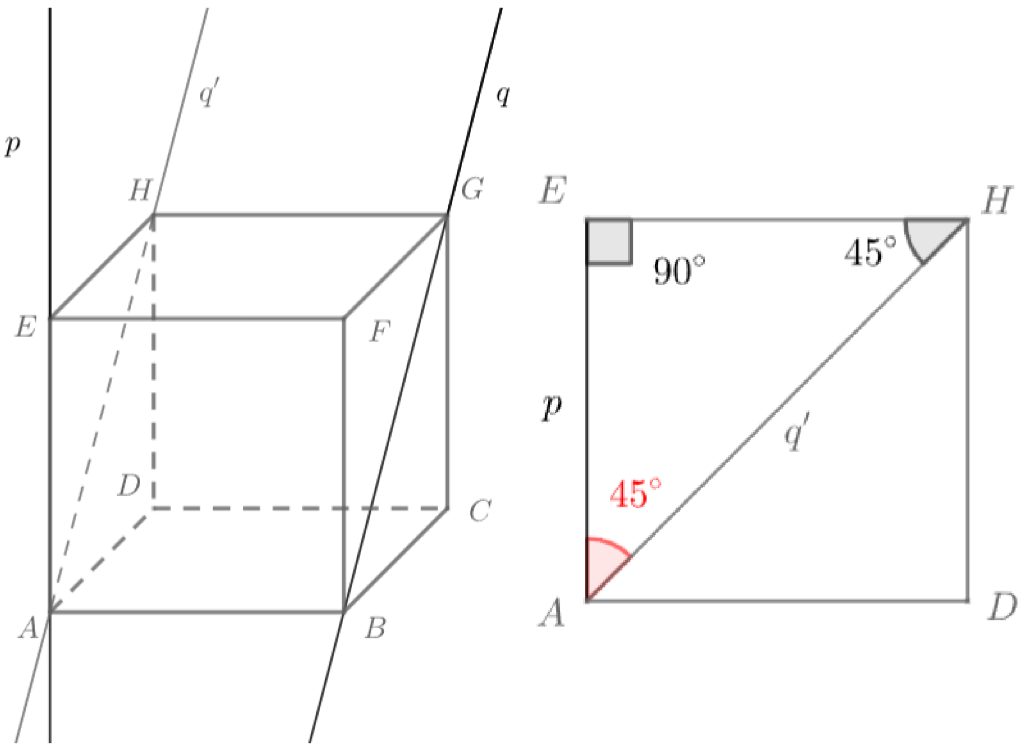
Příklad č. 22

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímek $p = AE$ a $q = BG$.

Řešení:

Přímky p a q jsou mimoběžné, musíme tedy sestrojit dvě různoběžné přímky procházející jedním bodem, které jsou rovnoběžné s danými přímkami. Za tento bod zvolíme bod A.

1) Bodem A vedeme přímku q', která je rovnoběžná s přímkou q.
2) Přímky p a q' jsou v rovině ADE a jsou různoběžné, můžeme zjistit jejich odchylku. Stěnu $ADHE$ zobrazíme ve skutečné velikosti.
3) Všimneme si rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku AEH' s pravým úhlem při vrcholu E. Z vlastností rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku vyplývá, že strany AE a AH svírají úhel o velikosti 45°. Hledaná odchylka přímek p a q je 45°.



Obrázek 33: Řešení příkladu č. 22

Příklad č. 23

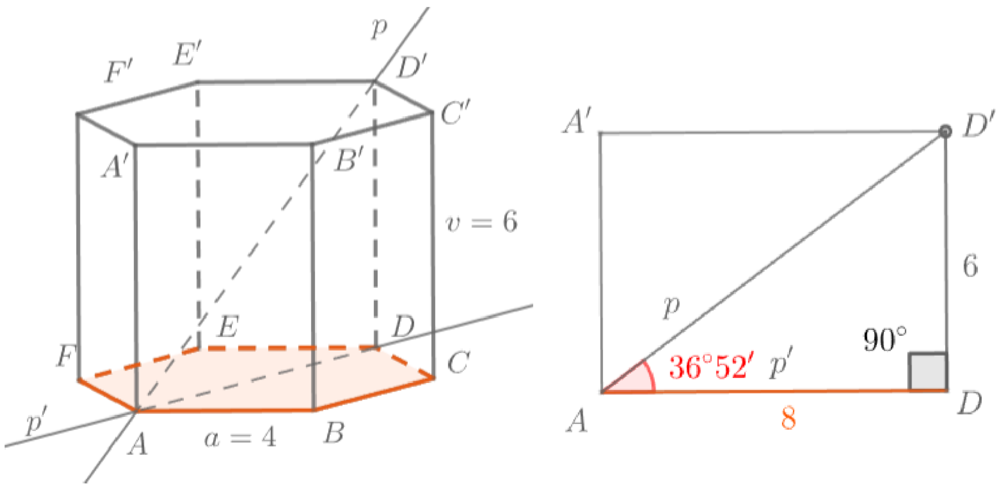
Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*, ve kterém platí $|AB| = 4$ *jednotky*, $|AA'| = 6$ *jednotek*. Určete odchylku přímky $p = AD'$ od roviny $\rho = ABC$.

Řešení:

Odchylkou přímky a roviny rozumíme odchylku přímky od jejího pravoúhlého průmětu do roviny.

1) Sestrojíme přímku p', která je pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ρ. Přímka p' je určena body A, D ($DD' \perp \rho$, bod D' se kolmě promítne na D).
2) Přímky p a p' leží v rovině ADD' a mají společný bod A, můžeme určit jejich odchylku jako velikost úhlu $\measuredangle DAD'$.

   Řez $ADD'A'$ zobrazíme ve skutečné velikosti. Vzhledem k vlastnostem podstavy pravidelného šestibokého hranolu je délka $|AD| = 2 \cdot |AB|$, tedy $|AD| = 8$ *jednotek*.
3) Trojúhelník ADD' je pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu D, známe délku $|AD| = 8$ *jednotek* a délku $|DD'| = 6$ *jednotek*. Známe tedy protilehlou a přilehlou odvěsnu vůči úhlu $\measuredangle DAD'$, pomocí cyklometrické funkce arkus tangens vypočítáme velikost daného úhlu: $arctan\frac{6}{8} = |\measuredangle DAD'|$, tedy $|\measuredangle DAD'| = 36° 52'$. Tato hodnota je hledaná odchylka přímky p a roviny ρ.



Obrázek 34: Řešení příkladu č. 23

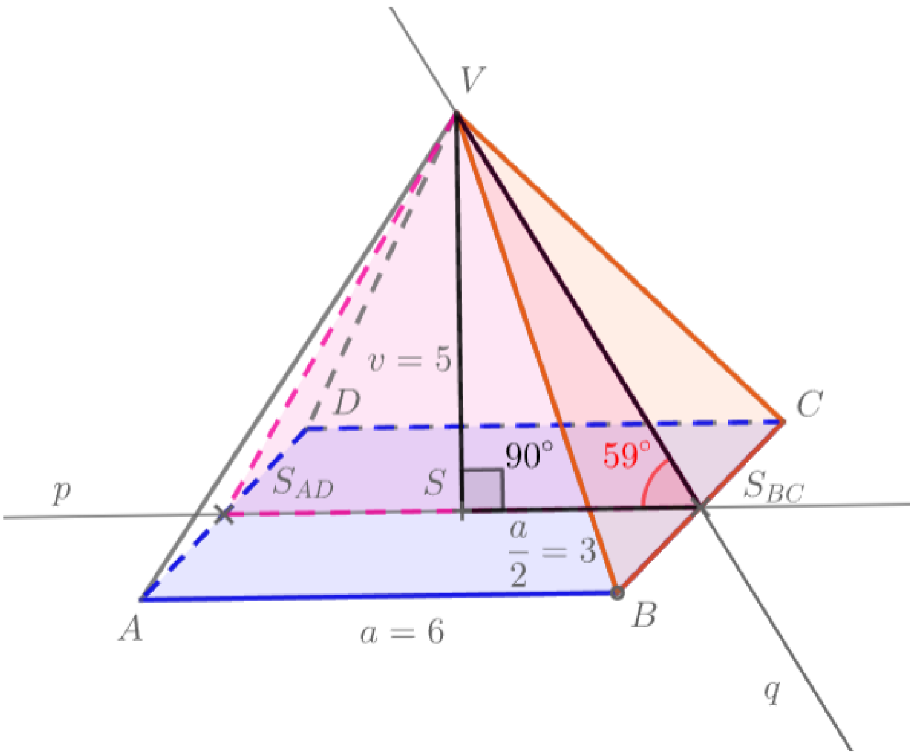
Příklad č. 24

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, ve kterém platí $|AB| = 6$ *jednotek*, $|SV| = 5$ *jednotek*, bod S je střed podstavy. Určete odchylku rovin $\rho = ABC$ a $\sigma = BCV$.

Řešení:

Odchylka dvou rovin je odchylka průsečnic daných rovin s rovinou, která je kolmá k oběma rovinám.

1) Sestrojíme řez tělesa rovinou, která je kolmá k rovině ρ a k rovině σ. Tímto řezem je trojúhelník $S_{BC}S_{AD}V$.
2) Sestrojíme přímku $p = \rho \cap S_{BC}S_{AD}V$, tato přímka je dána body S_{BC}, S_{AD}. Dále sestrojíme přímku $q = \sigma \cap S_{BC}S_{AD}V$, tato přímka je dána body S_{BC}, V.
3) Přímky p a q jsou různoběžné, můžeme zjistit jejich odchylku pomocí trojúhelníku $SS_{BC}V$, který má pravý úhel u bodu S.
4) V pravoúhlém trojúhelníku $SS_{BC}V$ známe délku $|SS_{BC}| = 3$ *jednotky* (jedná se o poloviční délku podstavy) a délku $|SV| = 5$ *jednotek*. Známe tedy protilehlou a přilehlou odvěsnu vůči úhlu $\measuredangle SS_{BC}V$; pomocí cyklometrické funkce arkus tangens vypočítáme velikost daného úhlu: $arctan\,\frac{5}{3} = |\measuredangle SS_{BC}V|$, tedy $|\measuredangle SS_{BC}V| = 59°$. Tato hodnota je hledaná odchylka rovin ρ a σ.



Obrázek 35: Řešení příkladu č. 24

2.2.2 Kolmost

K řešení následujících úloh využijeme skutečností uvedených v kapitole 1.2.2.

Příklad č. 25

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka CE je kolmá k rovině BDG.

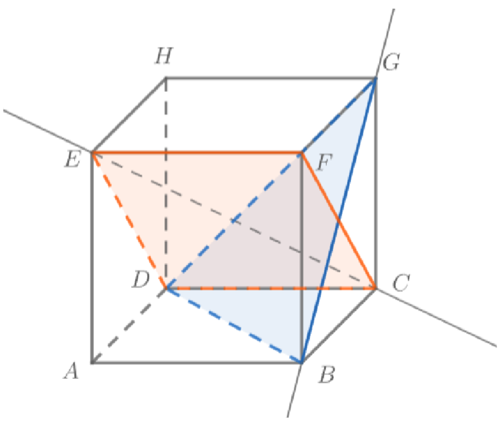
Řešení:

Podle věty 6 (Kritérium kolmosti přímky a roviny) ukážeme, že rovina BDG obsahuje dvě různoběžky, které jsou kolmé k přímce CE.

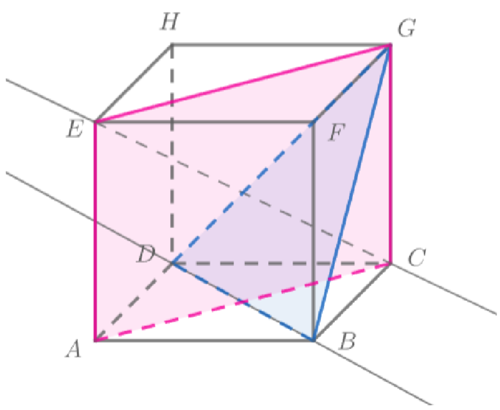
1) Přímka CE leží v rovině CDE, která je kolmá k přímce BG, protože v ní existují dvě různoběžky CF a EF, které jsou kolmé k přímce BG.
    a. Přímky BG a CF jsou navzájem kolmé, neboť jim náleží uhlopříčky ve čtverci $BCGF$.
    b. Přímky BG a EF jsou navzájem kolmé, neboť na přímce EF leží hrana krychle, která je kolmá ke stěně $BCGF$ úhlopříčky BG.

    Přímka BG je kolmá k rovině CDE, tedy i k přímce CE. (viz Obrázek 36)
2) Přímka CE leží v rovině ACG, která je kolmá k přímce BD, protože v ní existují dvě různoběžky AC a AE, které jsou kolmé k přímce BD.
    a. Přímky BD a AC jsou navzájem kolmé, neboť jim náleží uhlopříčky ve čtverci $ABCD$.
    b. Přímky BD a AE jsou navzájem kolmé, neboť na přímce AE leží hrana krychle, která je kolmá ke stěně $BCDA$ úhlopříčky BD.

    Přímka BD je kolmá k rovině ACG, tedy i k přímce CE. (viz Obrázek 37)
3) Našli jsem dvě různoběžky roviny BDG, které jsou kolmé k přímce CE, Jedná se o přímky BD a BG. Z věty 6 vyplývá, že přímka CE je kolmá k rovině BDG.



Obrázek 36



Obrázek 37

2.2.3 Osa mimoběžek

K řešení následujících úloh využijeme skutečností uvedených v kapitole 1.1.1.

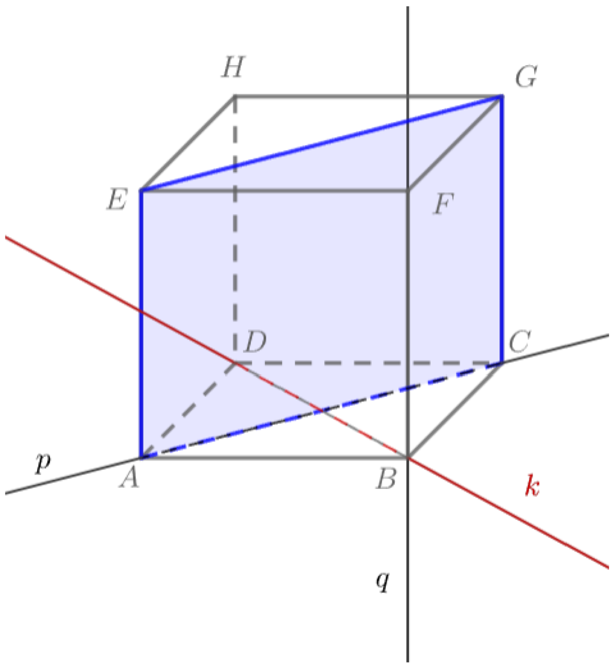
Příklad č. 26

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte osu mimoběžek $p = AC$ a $q = BF$.

Řešení:

Osa mimoběžek je příčka, která je k oběma mimoběžkám kolmá, úlohu tedy převedeme na hledání příčky mimoběžek daného směru, který je kolmý k přímce p a současně k přímce q.

1) Přímkou p proložíme rovinu, která je rovnoběžná s přímkou q, sestrojíme řez *ACGE* krychle touto rovinou.
2) Sestrojíme přímku, která je kolmá k rovině *ACG* a zároveň prochází libovolným bodem přímky p. Jedná se například o přímku k určenou body D, B. Přímka k je kolmá k rovině *ACG*, protože je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ($k \perp AC$ a $k \perp CG$).
3) Přímka k určuje směr hledané příčky mimoběžek, zároveň protíná přímku p a přímku q. Přímka k je tedy hledaná osa mimoběžek p a q.



Obrázek 38: Řešení příkladu č. 26

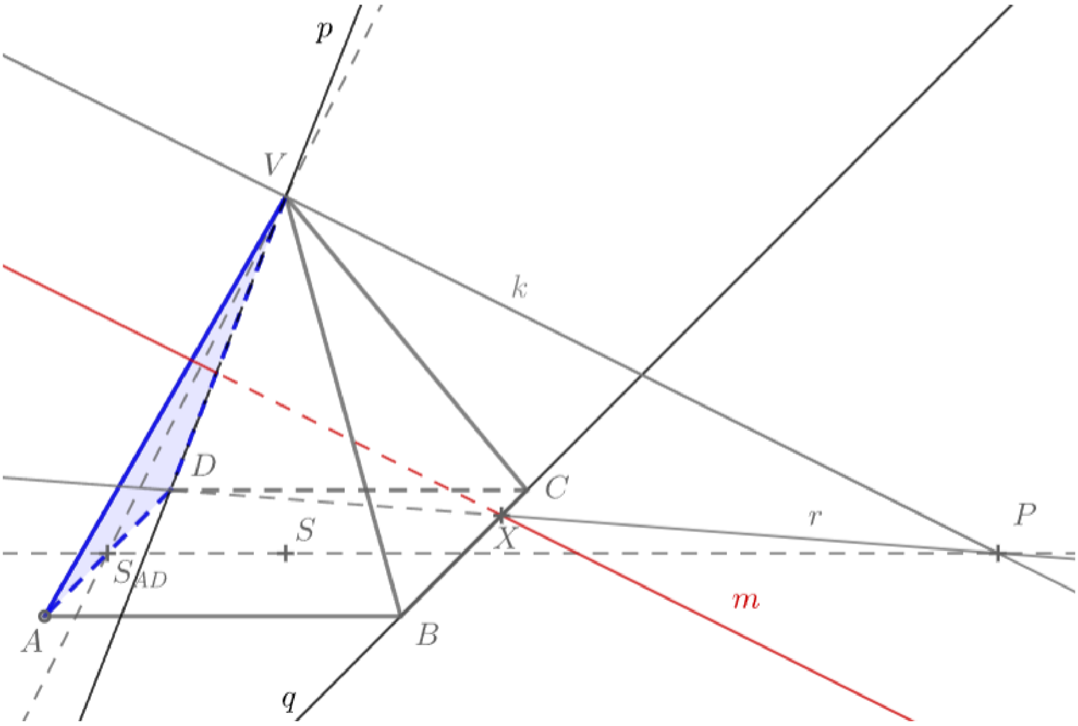
Příklad č. 27

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte osu mimoběžek $p = DV$ a $q = BC$.

Řešení:

Osa mimoběžek je příčka, která je k oběma mimoběžkám kolmá, úlohu tedy převedeme na hledání příčky mimoběžek daného směru, který je kolmý k přímce p a k přímce q.

1) Přímkou p proložíme rovinu, která je rovnoběžná s přímkou q, hledanou rovinou je stěna ADV.
2) Sestrojíme přímku, která je kolmá k rovině ADV a zároveň prochází libovolným bodem přímky p. K jejímu sestrojení použijeme pomocné přímky VS_{AD} a $S_{AD}S$, kde S je středem podstavy tělesa.
3) Sestrojíme přímku k, která prochází bodem V a zároveň je kolmá k přímce VS_{AD}. Pracujeme v rovině $VS_{AD}S$, která je rovnoběžná s průmětnou, tedy pravý úhel se zobrazí ve skutečné velikosti; kolmici sestrojíme jako přímku svírající s přímkou VS_{AD} úhel o velikosti 90°. Dále vyznačíme bod $P \in k \cap S_{AD}S$.
4) Přímka k je kolmá k rovině ADV, je tedy kolmá k přímce p ($p \in ADV$); je kolmá také k přímce q ($q \parallel ADV$). Přímka k určuje směr hledané příčky mimoběžek. Přímkou p proložíme rovinu rovnoběžnou s přímkou k, jedná se o rovinu PDV. Průsečík této roviny s přímkou q označíme X (platí, že $X \in q \cap r$, kde $r = PD$).
5) Hledaná osa mimoběžek prochází bodem X a je rovnoběžná s k. Sestrojíme přímku m daných vlastností.



Obrázek 39: Řešení příkladu č. 27

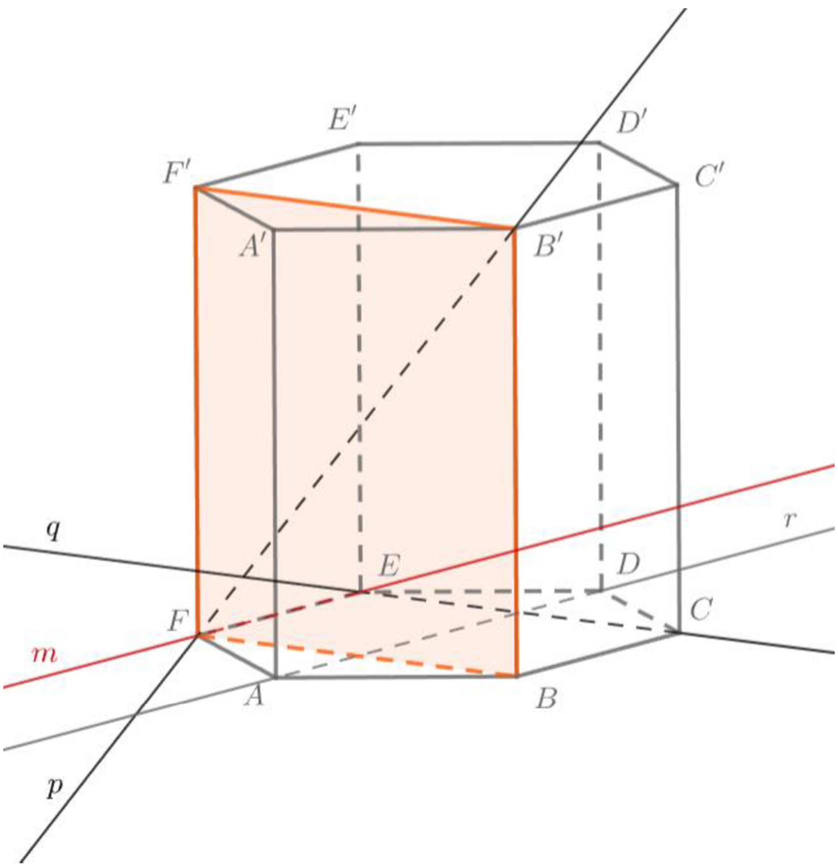
Příklad č. 28

Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*. Sestrojte osu mimoběžek $p = FB'$ a $q = CE$.

Řešení:

Osa mimoběžek je příčka, která je k oběma mimoběžkám kolmá, úlohu tedy převedeme na hledání příčky mimoběžek daného směru, který je kolmý k přímce p a k přímce q.

1) Přímkou p proložíme rovinu, která je rovnoběžná s přímkou q. Sestrojíme řez hranolu touto rovinou, kterým je čtyřúhelník $BB'F'F$.
2) Sestrojíme kolmici r k rovině BFF', která prochází body A, D. Jedná se o kolmici, neboť platí $AD \perp FB$ a $AD \perp BB'$.
3) Přímka r určuje směr hledané příčky mimoběžek. Sestrojíme přímku m, která prochází bodem F a je rovnoběžná s přímkou r. Přímka m je hledaná osa mimoběžek p a q.



Obrázek 40: Řešení příkladu č. 28

2.2.4 Vzdálenost

K řešení následujících úloh využijeme skutečností uvedených v kapitole 1.2.3.

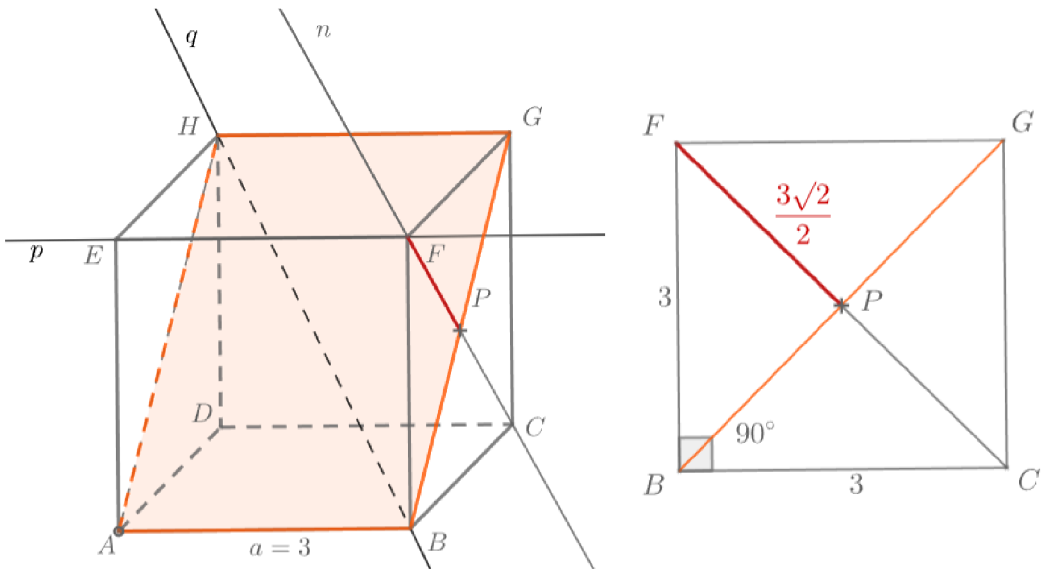
Příklad č. 29

Je dána krychle *ABCDEFGH* s délkou hrany 3 *jednotky*. Určete vzdálenost přímky $p = EF$ a přímky $q = BH$.

Řešení:

Přímky p a q jsou mimoběžné, využijeme poznatku, že vzdálenost dvou mimoběžných přímek se rovná vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin, které danými přímkami prochází. Přímkou q proložíme rovinu ρ rovnoběžnou s přímkou p a určíme vzdálenost přímky p od roviny ρ, což je hledaná vzdálenost.

1) Sestrojíme řez *ABGH* krychle rovinou ρ.
2) K zjištění vzdálenosti přímky p od roviny ρ potřebujeme sestrojit pravoúhlý průmět libovolného bodu přímky p do roviny ρ. Sestrojíme přímku n, pro kterou platí $F \in n$ a zároveň $n \perp \rho$, přímka $n = CF$.
3) Sestrojíme pravoúhlý průmět bodu F do roviny ρ, jedná se o bod $P \in n \cap \rho$.
4) Stěnu *BCGF* zobrazíme ve skutečné velikosti. Všimneme si pravoúhlého trojúhelníku *BDF* s pravým úhlem u vrcholu B, kde platí $|BF| = |BD| = 3$ *jednotky*.
5) Vzdálenost $|FP|$ spočítáme pomocí Pythagorovy věty. Platí rovnice $3^2 + 3^2 = (2 \cdot |FP|)^2$, tedy $|FP| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ *jednotek*, což je hledaná vzdálenost přímek p a q.



Obrázek 41: Řešení příkladu č. 29

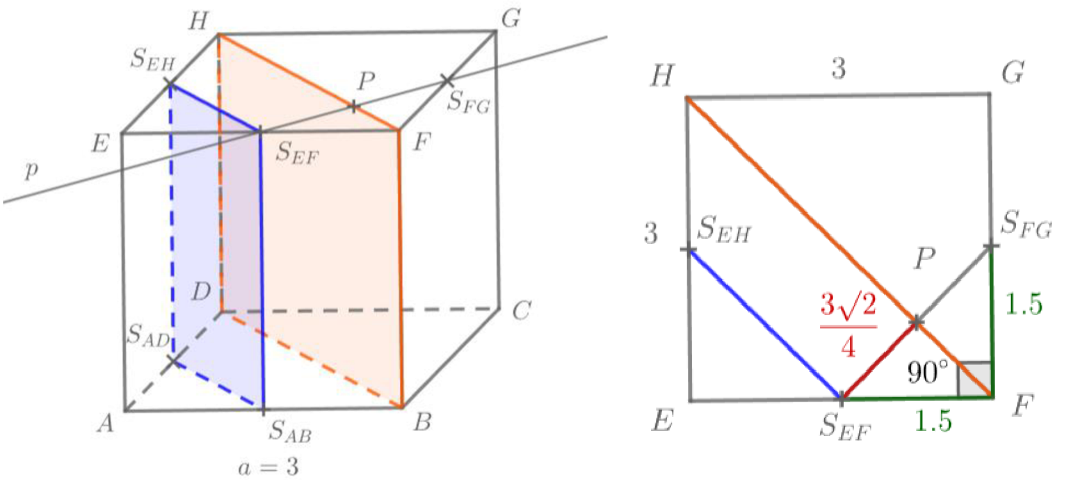
Příklad č. 30

Je dána krychle *ABCDEFGH* s délkou hrany 3 *jednotky*. Určete vzdálenost rovin $\rho = BDH$ a $\sigma = S_{AD}S_{AB}S_{EF}$.

Řešení:

Roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jejich vzdálenost je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny. Zvolíme bod $S_{EF} \in \sigma$ a budeme zjišťovat jeho vzdálenost od roviny ρ. Tuto vzdálenost zjistíme pomocí pravoúhlého průmětu bodu S_{EF} do roviny ρ.

1) Sestrojíme přímku p, která prochází bodem S_{EF} a je kolmá k rovině ρ, taková přímka $p = S_{EF}S_{FG}$.
2) Pravoúhlým průmětem bodu S_{EF} do roviny ρ je průsečík P přímky p s rovinou ρ.
3) Pro lepší představu si stěnu *EFGH* zobrazíme ve skutečné velikosti.
4) Všimneme si pravoúhlého trojúhelníku $S_{EF}S_{FG}F$ s pravým úhlem u bodu F, kde platí $|S_{EF}F| = |S_{FG}F| = 1{,}5$ *jednotek.*
5) Vzdálenost $|S_{EF}P|$ spočítáme pomocí Pythagorovy věty. Platí rovnice $1{,}5^2 + 1{,}5^2 = (2 \cdot |S_{EF}F|)^2$, tedy $|S_{EF}F| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ *jednotek*, což je hledaná vzdálenost rovin ρ a σ.



Obrázek 42: Řešení příkladu č. 30

Závěr

V této bakalářské práci bylo uvedeno a vyřešeno celkem třicet jedna stereometrických úloh, přičemž první z nich je vedena jako ukázková úloha. Úlohy jsou zaměřeny na polohové a metrické vlastnosti geometrických útvarů a týkají se především krychle, jehlanu, osmistěnu a pravidelného šestibokého hranolu.

Práce je rozdělena na dvě části. V první části práce je uvedena teorie potřebná k řešení zadaných úloh. Jedná se o základní axiomy, definice a věty související se stereometrií, jsou v ní uvedeny vzájemné polohy geometrických útvarů a jejich metrické vlastnosti, jako je odchylka, kolmost a vzdálenost. V této části práce je dále uvedena teorie volného rovnoběžného promítání, ve kterém jsou všechny zadané úlohy řešeny. Poslední část teorie se zabývá řezy tělesa danou rovinou, v této části je uvedena jedna ukázková úloha.

Druhá část bakalářské práce se skládá z celkem třiceti autorských úloh, je zde uvedeno jejich řešení a ke každé úloze je přiložen dynamický pracovní list. Úlohy jsou pro lepší přehlednost doplněny o obrázky, které jsou převzaty ze zmíněných pracovních listů.

K bakalářské práci je přiloženo celkem třicet jedna příloh, jedná se o dynamické pracovní listy, které zahrnují jednu ukázkovou úlohu a třicet řešených autorských úloh. Pracovní listy jsou vypracované a volně dostupné v softwarovém programu GeoGebra. Tyto přílohy slouží jako materiály vhodné k výuce stereometrie jak pro vyučující, tak pro žáky.

Seznam použitých symbolů

A, B	body A, B
a, b	přímky a, b
ρ, σ	roviny ρ, σ
úsečka AB	úsečka určená body A, B
přímka AB	přímka určená body A, B
rovina ABC	rovina určená body A, B, C
rovina Ap	rovina určená bodem A a přímkou p
rovina pq	rovina určená přímkami p, q
$p = AB$	přímka p je určena body A, B
$\rho = ABC$	rovina ρ je určena body A, B, C
S_{AB}	střed úsečky AB
$A \in p$	incidence bodu A s přímkou p
$A \notin p$	bod A není incidentní s přímkou p
$A \in ABC$	incidence bodu A s rovinou ABC
$P \in p \cap q$	průsečík P přímek p, q
$P \in p \cap \rho$	průsečík P přímky p a roviny ρ
$P \in \rho \cap \sigma$	průsečík P rovin ρ, σ
$p \in ABC$	incidence přímky p s rovinou ABC
$p = \rho \cap \sigma$	průsečnice p rovin ρ, σ
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \parallel ABC$	přímka p je rovnoběžná s rovinou ABC
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \perp ABC$	přímka p je kolmá k rovině ABC
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB; vzdálenost bodů A, B
$\boldsymbol{s}$	směr daný vektorem $\boldsymbol{s}$
$\measuredangle ABC$	konvexní úhel ABC
$\lvert \measuredangle ABC \rvert$	velikost konvexního úhlu ABC

Seznam použité literatury

[1] Chodorová, Marie. *Výukové materiály k předmětům Konstrukční geometrie 1 a Konstrukční geometrie 2.* nedatováno.

[2] Kreamer, Emil. *Zobrazovací metody II.* Praha: SPN, 1991.

[3] Pomykalová, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2010.

[4] Urban, Alois. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

Seznam příloh

Příloha č. 1	Ukázkový příklad – řez
Příloha č. 2	Příklad č. 1
Příloha č. 3	Příklad č. 2
Příloha č. 4	Příklad č. 3
Příloha č. 5	Příklad č. 4
Příloha č. 6	Příklad č. 5
Příloha č. 7	Příklad č. 6
Příloha č. 8	Příklad č. 7
Příloha č. 9	Příklad č. 8
Příloha č. 10	Příklad č. 9
Příloha č. 11	Příklad č. 10
Příloha č. 12	Příklad č. 11
Příloha č. 13	Příklad č. 12
Příloha č. 14	Příklad č. 13
Příloha č. 15	Příklad č. 14
Příloha č. 16	Příklad č. 15
Příloha č. 17	Příklad č. 16
Příloha č. 18	Příklad č. 17
Příloha č. 19	Příklad č. 18
Příloha č. 20	Příklad č. 19
Příloha č. 21	Příklad č. 20
Příloha č. 22	Příklad č. 21
Příloha č. 23	Příklad č. 22
Příloha č. 24	Příklad č. 23
Příloha č. 25	Příklad č. 24
Příloha č. 26	Příklad č. 25
Příloha č. 27	Příklad č. 26
Příloha č. 28	Příklad č. 27
Příloha č. 29	Příklad č. 28
Příloha č. 30	Příklad č. 29
Příloha č. 31	Příklad č. 30