



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ELASTOPLASTICKÁ ANALÝZA NAPĚTÍ A DEFORMACE A  
STANOVENÍ LOMOVÝCH PARAMETRŮ PŘI TAHOVÉM  
NAMÁHÁNÍ TĚLES S KONCENTRÁTORY NAPĚTÍ**

ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF STRESS AND DEFORMATION AND DETERMINATION OF FRACTURE  
PARAMETERS OF BODIES WITH STRESS CONCENTRATORS UNDER TENSILE LOADING

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Kristián Dubravec**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.**

**BRNO 2021**



# Zadaní diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Kristián Dubravec</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Elastoplastická analýza napětí a deformace a stanovení lomových parametrů při tahovém namáhání těles s koncentrátoři napětí**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Stanovení mezních hodnot plastické deformace při různých typech namáhání s využitím diagramu mezní plasticity.

### **Cíle diplomové práce:**

Vytvoření numerického modelu válcového vzorku s koncentrátoři napětí v programovém prostředí ANSYS. Numerické řešení pole napětí, deformace a výpočet triaxiality u válcových vzorků bez vrubu, s vrubem a s obvodovou trhlinou v průběhu tahových zkoušek do okamžiku lomu definovaného experimentálně. Stanovení středních hodnot z průběhu maximální triaxiality a konstrukce diagramu závislosti lomového přetvoření na triaxialitě napětí pro daný materiál.

### **Seznam doporučené literatury:**

POKLUDA, J. a ŠANDERA, P.: Micromechanisms of Fracture and Fatigue.

ANDERSON, T. L.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications, CRC Press, 2010, ISBN--8493-4260-0.

Ansys® Academic Research Mechanical, Release 2020 R2, Help System, ANSYS, Inc.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty





## Abstrakt

Cieľom práce je zostrojenie lomového diagramu pre vysokopevnú oceľ OCHN3MFA a jeho využitie pre odhad lomovej húževnatosti tohoto materiálu. Prvá časť práce obsahuje potrebnú teóriu pre výpočtové modelovanie ťahových skúšok rôznych skúšobných telies - hladkého telesa, telesa s vrubom a telesa s obvodovou trhlinou, popisuje vplyv triaxiality na lom telies a možnosti zostrojenia lomového diagramu. Následne je pre takéto telesá vytvorený výpočtový model využívajúci metódu konečných prvkov (MKP). Je prevedený nelineárny elastoplastický výpočet. Lom je určený porovnaním krivky skutočného napätia v závislosti na skutočnom pretvorení zo skúšok s výsledkami z konečnoprvkovej analýzy. Z výpočtového modelu je vyhodnotený deformačne-napätový stav telies v okamihu lomu. Je zostrojený lomový diagram, ktorý je následne využitý pre odhad lomovej húževnatosti telesa s trhlinou. Nakoniec je porovnaný lokálny prístup využívajúci lomový diagram a klasický prístup lomovej mechaniky, teda faktor intenzity napätia.

## Summary

The aim of this thesis is the construction of a diagram of fracture strain for high strength steel OCHN3MFA and its application for the estimation of fracture toughness of this material. The first part of the thesis contains the necessary theoretical framework for numerical modelling of tensile tests of various specimens - smooth specimen, specimen with a notch and specimen with a circumferential crack, it describes the influence of triaxiality on the fracture of bodies and the possibilities of construction of the diagram of fracture strain. Subsequently, a numerical model of these specimens is created using the finite element method (FEM). A non-linear, elastoplastic calculation is performed. Fracture is identified by means of comparing the true stress versus the strain obtained from tests with the finite element analysis results. Stress-strain states of specimens at the moment of fracture are obtained from a numerical model. A diagram of fracture strain is constructed, and it is used to estimate the fracture toughness of a cracked body. Finally, a local approach, which uses the diagram of fracture strain, and a classical approach of fracture mechanics, especially the stress intensity factor, are compared.

## Klíčová slova

lomový diagram, ťahová skúška, vrub, trhlina, lomová mechanika, triaxialita napätia, lomová deformácia, tvárny lom, metóda konečných prvkov (MKP)

## Keywords

diagram of fracture strain, tensile test, notch, crack, fracture mechanics, stress triaxiality, fracture strain, ductile fracture, finite element method (FEM)

DUBRAVEC, K. *Elastoplastická analýza napětí a deformace a stanovení lomových parametrů při tahovém namáhání těles s koncentrátory napětí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 68 s. Vedoucí doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Prehlasujem, že som diplomovú prácu na tému *Elastoplastická analýza napätí a deformácie a stanovenie lomových parametrov pri ťahovom namáhaní telies s koncentrátormi napätí* vypracoval samostatne pod vedením doc. Ing. Jany Horníkovej, Ph.D. s použitím odbornej literatúry a zdrojov uvedených v zozname v tejto práci.

Bc. Kristián Dubravec



Na tomto mieste by som rád poďakoval mojej školiteľke doc. Ing. Jane Horníkovej, PhD. za cenné rady a ochotný prístup, ktoré mi umožnili vypracovať túto diplomovú prácu aj napriek prekážkam, ktoré prinieslo toto náročné obdobie.

Bc. Kristián Dubravec



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
1.1	Vymedzenie problémovej situácie . . . . .	4
1.2	Formulácia problému . . . . .	4
1.3	Ciele riešenia problému . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Nelinearity v ťahových skúškach</b>	<b>5</b>
2.1	Teória veľkých deformácií . . . . .	5
2.1.1	Einsteinova sčítacia symbolika . . . . .	5
2.1.2	Tenzory pretvorení pri veľkých deformáciách . . . . .	5
2.1.3	Tenzory napätí pri veľkých deformáciách . . . . .	7
2.2	Cauchyho tenzor napätia . . . . .	7
2.2.1	Invarianty Cauchyho tenzoru napätia . . . . .	7
2.2.2	Gulová a deviátorová zložka tenzoru . . . . .	8
2.2.3	Haighov priestor . . . . .	8
2.3	Plasticita . . . . .	10
2.3.1	Inkrementálna teória plasticity . . . . .	10
2.4	Ťahové skúšky hladkých vzoriek . . . . .	14
2.4.1	Ťahový diagram materiálu . . . . .	14
2.4.2	Aproximácia ťahového diagramu . . . . .	15
2.4.3	Ťahový diagram vo výpočtových programoch . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Vplyv triaxiality na lomové vlastnosti</b>	<b>17</b>
3.1	Typy mechanizmov lomu . . . . .	17
3.1.1	Mechanizmus tvorby, rastu a prepájania dutín . . . . .	17
3.1.2	Šmykový mechanizmus . . . . .	18
3.1.3	Kombinovaný mechanizmus . . . . .	19
3.2	Ťahové skúšky vzoriek s vrubom . . . . .	19
3.2.1	Popis napätostí vo vzorke s vrubom . . . . .	19
3.2.2	Miesto vzniku lomu . . . . .	22
3.2.3	Stredná hodnota maximálnej triaxiality . . . . .	22
3.2.4	Lomový diagram . . . . .	23
3.2.5	Konštrukcia lomového diagramu . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Lomová mechanika</b>	<b>25</b>
4.1	Lineárne elastická lomová mechanika . . . . .	25
4.2	Plastická zóna na čele trhliny . . . . .	27
4.3	Elastoplastická lomová mechanika . . . . .	28
4.4	Dvojparametrická lomová mechanika . . . . .	29
4.4.1	$T$ -napätie . . . . .	29
4.4.2	$Q$ -parameter . . . . .	30
4.5	Lomová mechanika vo výpočtových programoch . . . . .	31
4.5.1	Sieť konečných prvkov . . . . .	31
4.5.2	Stanovenie parametrov lomovej mechaniky . . . . .	33
4.6	Ťahové skúšky vzoriek s trhlinou . . . . .	34

4.7	Lomová deformácia vzorky s trhlinou . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Výpočtový model</b>	<b>37</b>
5.1	Cieľ riešenia numerického výpočtu . . . . .	37
5.2	System podstatných veličín . . . . .	37
5.2.1	Popis experimentu . . . . .	37
5.2.2	Geometria entity . . . . .	38
5.2.3	Materiálové vlastnosti entity . . . . .	39
5.2.4	Vyhodnotenie experimentu . . . . .	41
5.3	Modelový objekt . . . . .	42
5.3.1	Model geometrie . . . . .	42
5.3.2	Model okrajových podmienok a zataženia . . . . .	44
5.3.3	Model materiálu . . . . .	44
5.3.4	Typ elementu siete . . . . .	44
5.3.5	Sieť konečných prvkov . . . . .	45
5.3.6	Vplyv veľkosti prvku na riešenie . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Výsledky z výpočtového modelu</b>	<b>49</b>
6.1	Porovnanie s experimentom . . . . .	49
6.2	Pole napätia, deformácie a triaxiality . . . . .	51
6.3	Porovnanie s analytickým riešením . . . . .	53
6.4	Konštrukcia lomového diagramu . . . . .	56
6.5	Vyhodnotenie telesa s trhlinou . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>59</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>61</b>
	<b>Zoznam použitých skratiek a symbolov</b>	<b>65</b>



# 1. Úvod

Zlyhanie technických diel, ako sú lode, lietadlá, autá a budovy, môže viesť k strate životov a majetku. Každé predčasné zlyhanie by malo byť plne pochopené a pokiaľ je to možné, malo by mu byť zamedzené. Pre zabránenie škodám na majetku a životoch by mali byť inžinieri schopní porozumieť mechanizmom poškodzovania a mali by ich vedieť predikovať. Lom je jedným z najdôležitejších spôsobov zlyhania technických diel. Tým pádom sa predikcia lomu stáva dôležitým problémom pri návrhu spoľahlivých súčastí.

Podľa toho, či je v telese prítomná trhlina, možno prístupy k lomu rozdeliť na posudzovanie celistvých telies a telies s trhlinou.

Analýza lomových vlastností súčastí s trhlinou spočiatku spočívala hlavne v globálnom prístupe popisujúcom lomovú húževnatosť materiálu, ako je faktor intenzity napätia, hnacia sila trhliny alebo  $J$ -integrál. Tieto parametre sú však závislé na geometrii vzorky, na ktorej boli zmerané, rovnako ako aj na type namáhania tejto vzorky. Platnosť experimentálne určenej lomovej húževnatosti pre rôzne technické diela je daná normami. V praxi však v súčastiach vznikajú rôzne napätosti, ktoré sa neobmedzujú len na rovinnú napätosť a deformáciu. Preto vznikli teórie popisujúce lomovú húževnatosť v závislosti na napätosti ako  $J - T$  a  $J - Q$  teórie.

S rozvojom výpočtovej techniky a rozšírením metódy konečných prvkov (MKP) boli rozšírené možnosti podrobného vyhodnocovania poľa napätí a deformácie. Tým sa ponúka využitie lokálneho prístupu, ktorý vyhodnocuje porušenie na čele trhliny. Jeho podstata vychádza z mechanizmov známych z tvárneho porušovania celistvých telies, obzvlášť z mechanizmu tvorby, rastu a prepájania dutín. Takýto mechanizmus sa očakáva v tvárnych materiáloch aj pri čele trhliny. Lokálny prístup teda umožňuje predikciu lomu pri veľkom počte rôznych namáhaní súčastí s rôznou geometriou.

Lomový diagram zostavený na základe lokálneho prístupu sa stáva univerzálnym nástrojom pre posúdenie lomu, čo môže byť veľmi užitočné pre návrh technických diel z daného materiálu.

### 1.1. Vymedzenie problémovej situácie

Lomový diagram materiálu je potrebný pre posudzovanie a predikciu lomovej húževnatosti telies s trhlinou za rôznych teplôt. Je zostavovaný na základe lokálneho prístupu, teda posudzovania porušenia na čele trhliny. Hlavnými parametrami, ktoré ovplyvňujú tvarne porušenie, je faktor triaxiality a plastické pretvorenie.

Pri zostrojení diagramu závislosti lomovej deformácie na triaxialite napätia sa s výhodou využívajú hladké skúšobné telesá a telesá s vrubom s rôznym polomerom, ktorý zabezpečuje rôzny stupeň triaxiality. Výroba takýchto telies je jednoduchá a ťahové skúšky sú ľahko realizovateľné na bežných univerzálnych strojoch za pomoci extenzometrov. Z experimentu je však možné získať len obmedzený rozsah dát. Preto musí byť podporený výpočtovým modelovaním, keďže pomocou metódy konečných prvkov je možné podrobne určiť pole napätí a deformácie v telese a z neho odvodiť ďalšie potrebné parametre.

Tvorba lomových diagramov na základe rôznych typov telies je bežná. Je potrebné sa zoznámiť s postupmi, ktoré sa pri nej uplatňujú a následne ich využiť. Práce, ktoré sa zaoberajú lomovými diagramami, sa zväčša obmedzujú len na ich konštrukciu z ťahových skúšok celistvých telies. Následná aplikácia na telesá s trhlinou však nie je úplne obvyklá.

Skúmaným materiálom je nízkolegovaná vysokopevná oceľ OCHN3MFA s medzou klzu približne 1500 MPa. Z daného materiálu boli vytvorené hladké a vrubované skúšobné vzorky, na ktorých bola vyhodnotená ťahová skúška za rôznych teplôt. Zo skúšok je možné vyhodnotiť materiálovú krivku skúšaného materiálu a definovať okamih lomu.

### 1.2. Formulácia problému

Lomový diagram skúmaného materiálu nie je známy, pre jeho vytvorenie je potrebné vyhodnotiť pole napätí a deformácie.

K realizovaným skúškam je nutné vytvoriť výpočtový model v prostredí programu ANSYS. Tento model bude popisovať ťahové skúšky hladkej vzorky, vzorky s vrubom a vzorky s obvodovou trhlinou. Z prvých dvoch modelov bude možné vytvoriť diagram závislosti lomovej deformácie na triaxialite napätia.

Údaje z neho budú následne využité na simuláciu ťahovej skúšky vzorky s obvodovou trhlinou, výsledky budú porovnané s prístupom klasickej lomovej mechaniky.

### 1.3. Ciele riešenia problému

- Vytvorenie výpočtového modelu ťahových skúšok hladkej vzorky, vrubovanej vzorky a vzorky s trhlinou v programe ANSYS
- Numerické riešenie poľa napätí, deformácie a výpočet triaxiality
- Stanovenie stredných hodnôt z maximálnej triaxiality a zostrojenie diagramu závislosti lomovej deformácie na triaxialite
- Aplikácia lomového diagramu na prípad telesa s trhlinou, vyhodnotenie jeho ťahovej skúšky a porovnanie s prístupom lomovej mechaniky
- Verifikácia modelu na základe porovnania výsledkov s experimentom a s analytickým riešením (tam, kde je to možné)
- Zhodnotenie výsledkov

## 2. Nelinearity v ťahových skúškach

Výpočtové modelovanie ťahových skúšok, ktoré je hlavným cieľom tejto práce, je komplexný problém. Napriek tomu, že geometria skúšobných telies je jednoduchá, pri tvorbe výpočtového modelu sa vyskytuje niekoľko typov nelinearít. V prvom rade je potrebné uvažovať veľké posuvy a pretvorenia, keďže pri skúškach dochádza k výraznej deformácii vzoriek. Ťahové skúšky prebiehajú až do okamihu lomu, ktorému v prípade tvárneho typu predchádza rozsiahla plastická deformácia, modely musia teda využívať teóriu plasticity. Táto kapitola poskytuje náhľad na teórie, ktoré umožňujú takéto nelinearity modelovať, a ich implementáciu do výpočtových modelov ťahových skúšok.

### 2.1. Teória veľkých deformácií

Napätosť a deformácia v bode telesa je popísaná tenzorom deformácie  $T_\varepsilon$  a tenzorom napätia  $T_\sigma$ . V prípade, že pretvorenia nedosiahnu hodnoty väčšie ako približne 1%, je možné využiť teóriu malých infinitezimálnych pretvorení. V opačnom prípade je potrebné použiť pre popis niektorú z teórií konečných pretvorení.

#### 2.1.1. Einsteinova sčítacia symbolika

Kvôli kompaktnosti zápisu sa v prípade teórie veľkých deformácií často používa Einsteinovo sčítacie pravidlo a symbolika. Podľa tohto pravidla, pokiaľ sa v zápise opakuje nejaký index, automaticky sa sčíta. Napríklad zápis skalárneho súčinu vektorov  $u_i$  a  $v_i$  sa chápe ako:

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (2.1)$$

Okrem toho je využívané Kroneckerovo delta  $\delta_{ij}$  a Levi-Civitov tenzor  $\varepsilon_{ijk}$ .

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokiaľ } i = j \\ 0 & \text{pokiaľ } i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

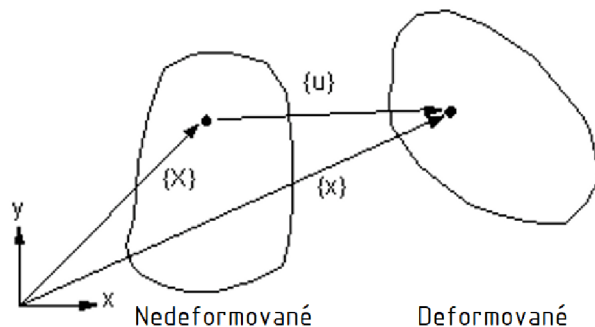
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pokiaľ } (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ alebo } (2, 3, 1) \text{ alebo } (3, 1, 2) \\ 0 & \text{pokiaľ } i = j \text{ alebo } j = k \text{ alebo } k = i \\ -1 & \text{pokiaľ } (i, j, k) = (3, 2, 1) \text{ alebo } (2, 1, 3) \text{ alebo } (1, 3, 2) \end{cases} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2. Tenzory pretvorení pri veľkých deformáciách

Tenzory pretvorení pre popis deformácie sa líšia tým, či vzťahujú deformáciu k pôvodnej alebo konečnej geometrii. Okrem tenzorov pretvorení existujú aj ďalšie tenzory popisujúce deformáciu ako napríklad Cauchy-Greenov tenzor deformácie, tenzor deformačného gradientu a tenzor pretiahnutia. Tie nie sú pre túto prácu podstatné a ďalej sa zameriava len na popis tenzorov pretvorení.

V ďalšom texte bude využité značenie  $X$  pre pôvodnú nedeformovanú geometriu a  $x$  pre konečnú deformovanú geometriu. Posuv  $u$  potom predstavuje rozdiel medzi deformovanou a nedeformovanou geometriou.

## 2.1. TEÓRIA VEĽKÝCH DEFORMÁCIÍ



Obr. 2.1: Zavedenie deformovaných a nedeformovaných súradníc [1]

### Tenzor zmluvných pretvorení

Tenzor zmluvných pretvorení je použiteľný pre malé deformácie. Vzťahuje deformáciu k pôvodnej nedeformovanej geometrii.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.4)$$

### Green-Lagrangeov tenzor pretvorení

Green-Lagrangeov tenzor taktiež vzťahuje deformáciu k pôvodnej konfigurácii, ale zároveň rešpektuje aj natáčanie elementu.

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.5)$$

### Almansi-Hamelov tenzor pretvorení

Almansi-Hamelov tenzor vzťahuje deformáciu ku konečnej deformovanej geometrii a rešpektuje natáčanie elementu. Použitie je obmedzené tým, že konečná deformácia nie je na začiatku výpočtu známa.

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.6)$$

### Cauchyho (logaritmickej) tenzor pretvorení

Cauchyho tenzor je oproti predchádzajúcim exaktnejší v tom, že vzťahuje deformácie vždy k aktuálnej geometrickej konfigurácii a nie k pôvodnej alebo konečnej, ktoré môžu byť veľmi odlišné od aktuálnej.

$$E^C = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln(l) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon), \quad (2.7)$$

kde  $l_0$  je nedeformovaná dĺžka,  $l$  je súčasná dĺžku a  $\Delta l$  je zmena dĺžky.

### 2.1.3. Tenzory napätí pri veľkých deformáciách

Existuje viacero tenzorov popisujúcich napätosť v bode telesa, ktoré sa líšia tým, či vzťahujú silu  $F_i$  na pôvodnú alebo deformovanú plochu.

#### Prvý Piola-Kirchhoffov tenzor napätia

Prvý Piola-Kirchhoffov tenzor vzťahuje skutočnú silu na pôvodnú nedeformovanú plochu elementu. Toto napätie býva tiež označované ako zmluvné.

$$\tau_{ij} = \frac{dF_i}{dX_j dX_k} \quad (2.8)$$

#### Druhý Piola-Kirchhoffov tenzor napätia

Druhý Piola-Kirchhoffov tenzor nemá jasný fyzikálny význam, je však energetický konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorom. Vzťahuje fiktívnu silu, ktorá je prepočítaná zo skutočnej, na pôvodnú nedeformovanú plochu.

$$S_i = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i}{dX_j dX_k} \quad (2.9)$$

#### Cauchyho tenzor napätia

Cauchyho tenzor vzťahuje skutočnú silu k aktuálnej deformovanej geometrii. Takéto napätie býva označované ako skutočné.

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{dx_j dx_k} \quad (2.10)$$

## 2.2. Cauchyho tenzor napätia

Vstupom do výpočtových programov je Cauchyho tenzor (skutočných) napätí. Jeho charakteristiky sú taktiež využívané na formulovanie podmienok vzniku rôznych medzných stavov. V ďalšej časti sú popísané jeho vlastnosti a charakteristiky.

### 2.2.1. Invarianty Cauchyho tenzoru napätia

Určenie hlavných napätí  $\sigma$ , to znamená normálových napätí pôsobiacich v rovine, v ktorej nepôsobia šmykové napätia, vedie na úlohu vlastných čísel tenzoru  $\sigma_{ij}$ :

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0. \quad (2.11)$$

Pre vynulovanie determinantu (2.11) je potrebné vyriešiť charakteristickú rovnicu (2.12).

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (2.12)$$

## 2.2. CAUCHYHO TENZOR NAPÄTIA

kde:

$$I_1 = \sigma_{kk}, \quad (2.13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}), \quad (2.14)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}). \quad (2.15)$$

Koeficienty  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  sú konštantné a nezávislé na natočení súradnicového systému, nazývajú sa invarianty tenzoru  $\sigma_{ij}$ . Popisujú napätosť v bode a sú využívané na formuláciu konštitutívnych vzťahov materiálu aj na vyjadrenie podmienok vzniku medzných stavov.

### 2.2.2. Guľová a deviátorová zložka tenzoru

Tenzor napätia a deformácie je často žiadúce rozdeliť na guľovú (hydrostatickú) zložku, spôsobujúcu zmenu objemu a deviátorovú zložku, ktorá ovplyvňuje zmenu tvaru telesa.

Najprv sa zavedie hydrostatické napätie:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.16)$$

a následne je odseparovaná deviátorová a guľová zložka tenzoru:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}. \quad (2.17)$$

Analogickým postupom ako v sekcii 2.2.1 sa získajú invarianty deviátorovej časti Cauchyho tenzoru napätia. Nasledujúce rovnice uvádzajú definičné vzťahy a možnosti prepočtu pomocou invariantov celkového tenzoru napätia.

$$J_1 = s_{kk} = 0 \quad (2.18)$$

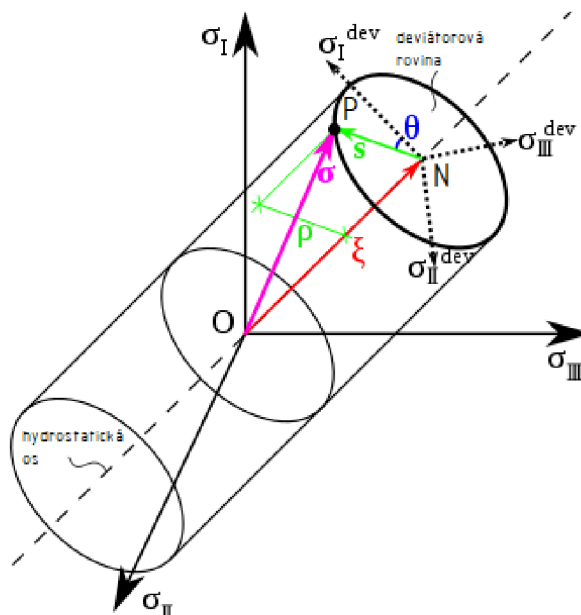
$$J_2 = \frac{1}{2} (s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) = I_2 - \frac{1}{3}I_1^2 \quad (2.19)$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + I_3 \quad (2.20)$$

### 2.2.3. Haighov priestor

Haighov priestor, nazývaný tiež priestor hlavných napätí, je trojrozmerný priestor, ktorého súradnice predstavujú veľkosť hlavných napätí, ktoré charakterizujú napätosť v bode telesa.

Všeobecné napätie v bode P je reprezentované vektorom  $\overline{OP}$ , ktorý môže byť rozložený na dve zložky: vektor  $\overline{ON}$  ležiaci na hydrostatickej ose a vektor  $\overline{NP}$  ležiaci v deviátorovej rovine, ktorá je kolmá na hydrostatickú os.



Obr. 2.2: Haighov priestor [2] (upravené)

### Haigh-Westergaardove súradnice

Haigh-Westergaardovými súradnicami sa popisuje poloha bodu v Haighovom priestore, rešpektujúc rozdelenie na hydrostatickú a deviatorovú zložku.

$$\xi = |\overline{ON}| = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_m \quad (2.21)$$

$$\rho = |\overline{OP}| = \sqrt{2J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (2.22)$$

$$\theta_L = \frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right) \quad (2.23)$$

Rovnica (2.23) je jednou z možných definícií Lodeho uhlu, ktorý charakterizuje napätosť z hľadiska polohy hlavného napätia  $\sigma_2$  voči  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$ . Lodeho uhol nadobúda hodnoty  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}$ .

Alternatívne je možné vyjadriť Lodeho uhol ako Lodeho parameter  $-1 \leq \mu_L \leq 1$ .

$$\mu_L = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.24)$$

Gulová zložka tenzoru popísaná parametrom  $\xi$  nemá významný vplyv na medzný stav pružnosti, ale významne ovplyvňuje porušovanie materiálu. Závažza sa faktor triaxiality napätia  $\eta$  ako pomer medzi hydrostatickou a deviatorovou zložkou napätia. Tomuto faktoru a jeho vplyvu na typ porušovania je venovaná kapitola 3.

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{HMH}}, \quad (2.25)$$

## 2.3. PLASTICITA

kde:

$$\sigma_{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)} \quad (2.26)$$

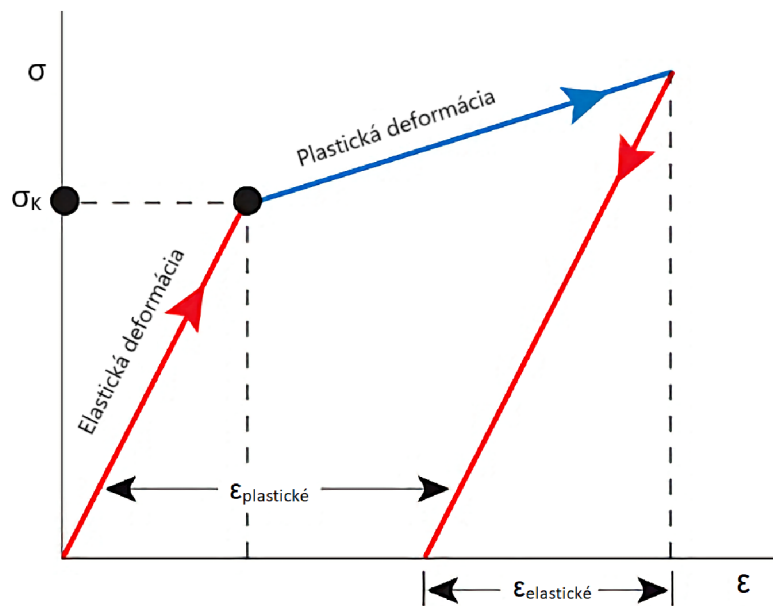
a bližšie je popísané v sekcii 2.3.1.

Triaxialita napätia a Lodeho uhol alebo parameter zohrávajú dôležitú úlohu pri posudzovaní tvárneho porušovania materiálu a vyskytujú sa aj v niektorých podmienkach plasticity.

## 2.3. Plasticita

Teória lineárnej elasticity je užitočná pre modely, kde dochádza k malým deformáciám, ktoré zaniknú po zaniknutí zaťaženia. Pri ťahových skúškach sú dosahované maximálne deformácie, ktoré je materiál schopný vydržať, kým nedôjde k lomu.

Tvárnemu lomu materiálu predchádza rozsiahla plastická deformácia. Tá je nevratná, vzniká po prekročení medze klzu a zostáva aj po odľahčení materiálu. Plasticita je teda nekonzervatívny proces. Systém nie je schopný uchovať celú energiu napätosti, ktorá sa mení na teplo alebo spôsobuje zmenu štruktúry materiálu. Odľahčovacia dráha je iná ako zaťažovacia a odľahčenie prebieha pružne. Pri plasticite výsledná napätosť a deformácia závisí na histórii zaťažovania a neplatí princíp superpozície. Preto musia byť všetky teórie plasticity dôsledne inkrementálne a musia rešpektovať postup zaťažovania.



Obr. 2.3: Zataženie a odľahčenie pri plastickej deformácii

### 2.3.1. Inkrementálna teória plasticity

Najčastejšou implementáciou teórie elastoplastických deformácií vo výpočtových programoch je inkrementálna teória plasticity. Teória je využívaná spoločne s aditívnym zákonom (2.27), ktorý rozdeľuje celkové pretvorenie v telese na elastické a plastické.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.27)$$



Teória je tvorená tromi prvkami:

1. podmienka plasticity
2. zákon plastického tečenia
3. zákon spevnenia materiálu

### Podmienka plasticity

Podmienka plasticity predstavuje medznú podmienku rozlišujúcu medzi elastickou a plastickou deformáciou. Pre všeobecnú napätosť má táto podmienka tvar:

$$F_{pl}(f(\sigma_{ij}), \sigma_k) = 0, \quad (2.28)$$

kde  $f(\sigma_{ij})$  je funkcia plasticity a  $\sigma_k$  je medza klzu. Podmienku je možné zapísať v tvare:

$$F_{pl} = f(\sigma_{ij}) - \sigma_k = 0. \quad (2.29)$$

Existuje mnoho rôznych prvotných podmienok plasticity. Najpoužívanejšou je podmienka podľa Huberta, Misesa a Henkeyho (HMH), ktorá je využívaná vo väčšine výpočtových programov. Ďalšou používanou podmienkou plasticity je podmienka maximálneho šmykového napätia ( $\max(\tau)$ ).

Podmienka HMH hovorí, že v tvárnom materiáli sa vytvoria makroplastické deformácie, pokiaľ šmykové napätie v oktaedrickej rovine dosiahne medznú hodnotu. Podmienka plasticity je vyjadrená pomocou invariantu  $J_2$ , respektíve pomocou hlavných napätí  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

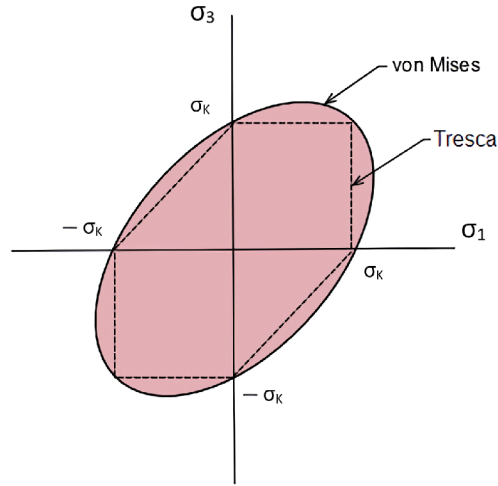
$$F_{pl} = J_2 - \frac{\sigma_k^2}{3} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \sigma_k = 0 \quad (2.30)$$

Podmienka maximálneho šmykového napätia  $\max(\tau)$  hovorí, že v materiáli dôjde ku plastickej deformácii, pokiaľ maximálne šmykové napätie dosiahne svoju kritickú hodnotu. Tento fakt je v zhode s mikromechanickým správaním kryštálov, vrátane sklzu a pohybu dislokácii. Matematicky je vyjadrená pomocou najväčšieho hlavného napätia  $\sigma_1$  a najmenšieho hlavného napätia  $\sigma_3$ :

$$F_{pl} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_k = 0 \quad (2.31)$$

Zovšeobecnením podmienky HMH na materiály, ktoré majú rozdielnu medzu klzu v ťahu a v tlaku je podmienka Drucker-Prager, podmienky  $\max(\tau)$  je podmienka Mohr-Coulomb. Okrem týchto podmienok plasticity existujú aj podmienky, ktoré vychádzajú z ďalších invariantov deviátoru tenzoru napätia, môžu obsahovať Lodeho uhol alebo triaxialitu napätia.

### 2.3. PLASTICITA



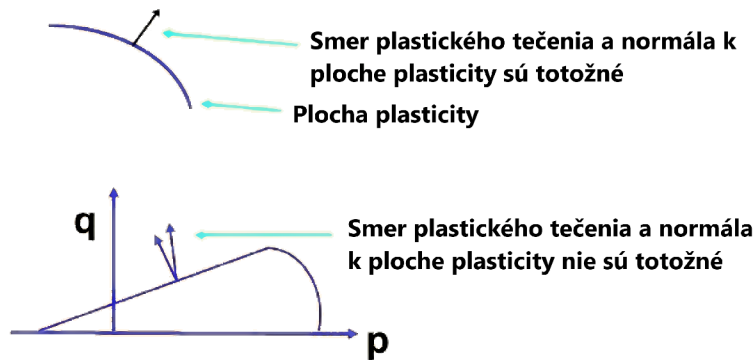
Obr. 2.4: Porovnanie podmienky HMM a  $\max(\tau)$  pre  $\sigma_2 = 0$

### Zákon tečenia

Zákon tečenia (*flow rule*) popisuje ako sa budú vyvíjať prírastky plastickej deformácie v závislosti na prírastku napätia. V prípade asociovanej teórie plasticity sa stotožňuje plastický potenciál  $Q_{pl}$  s plochou plasticity  $F_{pl}$ .

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q_{pl}}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial F_{pl}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.32)$$

kde  $d\lambda$  je plastický multiplikátor rozhodujúci o veľkosti prírastku plastickej deformácie [3].



Obr. 2.5: Porovnanie asociovaného (hore) a neasociovaného zákona tečenia (dole) [4]

Z geometrického hľadiska má prírastok plastickej deformácie smer vonkajšej normály k ploche zaťažovania. Plastický multiplikátor je možné pre všeobecnú napätosť vyjadriť pomocou intenzity plastickeho pretvorenia  $\bar{\varepsilon}^{pl}$ . Intenzita plastickeho pretvorenia pri jednoosovom namáhaní zodpovedá pretvoreniu v smere zaťaženia.

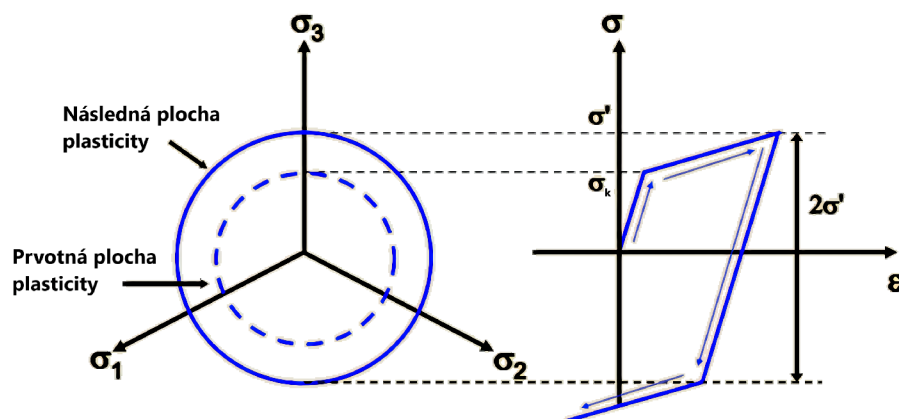
$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}^{pl} \quad (2.33)$$

$$\bar{\varepsilon}^{pl} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \quad (2.34)$$

## Zákon spevnenia materiálu

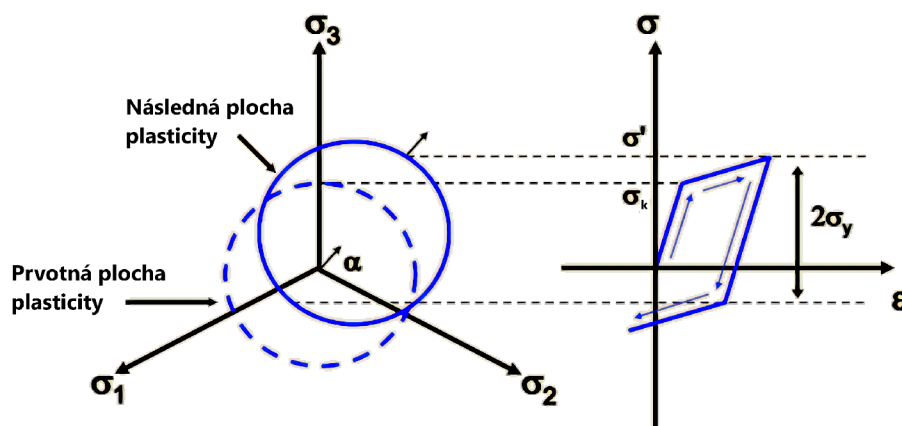
Zákon spevnenia materiálu popisuje zmenu plochy plasticity v reakcii na aktívne zaťažovanie materiálu. Ideálne elastoplastický materiál má konštantnú plochu plasticity, pri materiáloch vykazujúcich spevnenie sa môže meniť jej veľkosť, tvar aj poloha. Zákony spevnenia je možné rozdeliť na izotropné, kinematické a kombinované.

Pri **izotropnom spevnení** sa plocha plasticity rovnomerne rozširuje všetkými smermi. Izotropné spevnenie je popísané napríklad modelom podľa Voce [5]. Pri monotónnom zaťažovaní je tento model použiteľný, v prípade cyklického zaťažovania je potrebné zvážiť použitie kinematického modelu.



Obr. 2.6: Model izotropného spevnenia [4]

**Kinematické spevnenie** zavádza pojem "backstress"  $\alpha$  definujúci aktuálnu polohu stredu plochy plasticity. Plocha plasticity sa v Haighovom priestore len presúva v smere pôsobiaceho napätia. Kinematické spevnenie je popísané napríklad modelom podľa Chaboche [6].



Obr. 2.7: Model izotropného spevnenia [4]

**Kombinované spevnenie** je kombináciou izotropného a kinematického spevnenia. Vhodnou kombináciou týchto dvoch modelov je možné popísať cyklické zmäkčovanie alebo spevňovanie materiálu, ratcheting a ďalšie javy cyklickej plasticity [3].

## 2.4. Ťahové skúšky hladkých vzoriek

V predchádzajúcom texte je uvedená teória nelineárnych javov, ako sú veľké deformácie a plasticita. Po ich všeobecnom popise sa ďalšia časť práce zameriava na ich využitie a implementáciu do výpočtového modelovania ťahových skúšok.

### 2.4.1. Ťahový diagram materiálu

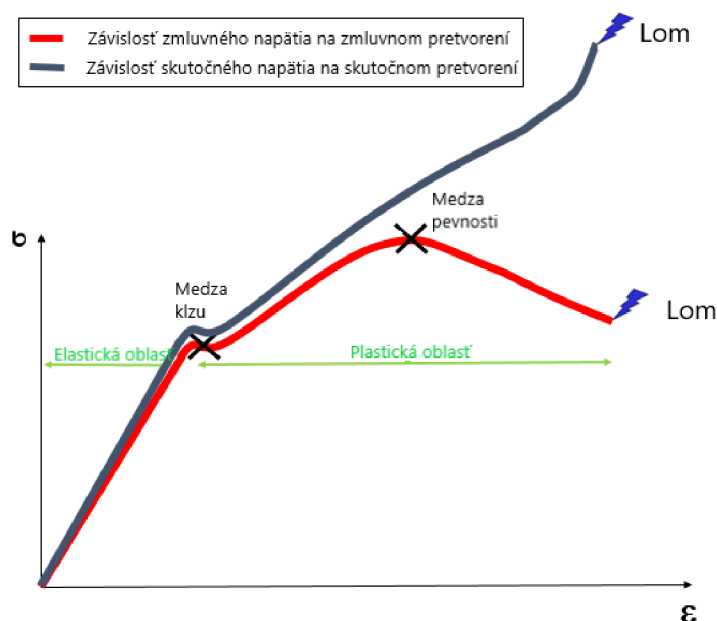
Prvým krokom vyhodnocovania materiálových vlastností je ťahová skúška hladkej vzorky. Z nej je získaná závislosť sily  $F$  na predĺžení  $\Delta l$ . Pre získanie základných materiálových vlastností je potrebné túto závislosť prepočítať na závislosť zmluvného napätia  $\sigma$ <sup>1</sup> na zmluvnom pretvorení  $\varepsilon$  pomocou vzťahov:

$$\sigma = \frac{F}{S_0}, \quad (2.35)$$

kde  $S_0$  je plocha nedeformovaného prierehu vzorky a:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.36)$$

kde  $l_0$  je dĺžka nedeformovanej vzorky.



Obr. 2.8: Zmluvné a skutočné veličiny ťahového diagramu [7]

(upravené)

<sup>1</sup>V sekcii 2.1.3 je pre zmluvné napätie zavedený symbol  $\tau$  a  $\sigma$  označuje skutočné napätia. Tento spôsob označovania je zaužívaný pri popise rôznych druhov tenzorov napätia. Pri vyhodnocovaní ťahových skúšok je však obvyklejšie zapisovať zmluvné napätia ako  $\sigma$  a skutočné napätia ako  $\sigma_{tr}$ .

Tieto veličiny popisujú napätie aj pretvorenie vzhľadom k pôvodným rozmerom skúšobného telesa. Vstupom aj výstupom z výpočtových programov sú skutočné hodnoty napätia a pretvorenia, ktoré sa vzťahujú k aktuálnej deformovanej geometrii. Pre malé deformácie je rozdiel medzi nimi zanedbateľný. S rastom deformácie je potrebné zohľadniť zmenu geometrie. Prepočet zo zmluvných veličín na skutočné je možný pomocou nasledujúcich vzťahov. <sup>2</sup>

$$\sigma_{tr} = \sigma(1 + \varepsilon) \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_{tr} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.38)$$

### 2.4.2. Aproximácia ťahového diagramu

Ak majú byť dáta z ťahovej skúšky využité vo výpočtovom modelovaní, musia byť popísané matematickým modelom. Lineárna oblasť je jednoznačne popísaná svojou smernicou - Youngovým modulom pružnosti  $E$ . Krivku skutočné napätie - skutočné pretvorenie v oblasti od medze klzu do medze pevnosti popisuje Hollomonov vzťah [8]:

$$\sigma_{tr} = K \left( \varepsilon_{tr}^{pl} \right)^n, \quad (2.39)$$

kde  $K$  je koeficient deformačného spevnenia a  $n$  je exponent deformačného spevnenia.

Rozšírením tohoto vzťahu aj na elastickú oblasť je Rambergov-Osgoodov (R-O) vzťah [9], ktorý predpokladá, že elastická časť deformácie môže byť popísaná lineárnou funkciou a plastická časť deformácie mocninou funkciou. R-O vzťah má tvar:

$$\varepsilon_{tr} = \frac{\sigma_{tr}}{E} + \left( \frac{\sigma_{tr}}{K} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.40)$$

kde  $E$ ,  $K$  a  $n$  majú rovnaký význam ako v Hollomonovom vzťahu.

Pri dosiahnutí medze pevnosti prestáva byť deformácia rovnomerná, vzniká kĺčok a v ňom všeobecná trojosová napätosť. Hollomonov a R-O vzťah tento efekt nerešpektujú. Existujú korekcie na prítomnosť kĺčku podľa Bridgmana [10] alebo podľa Mirone [11].

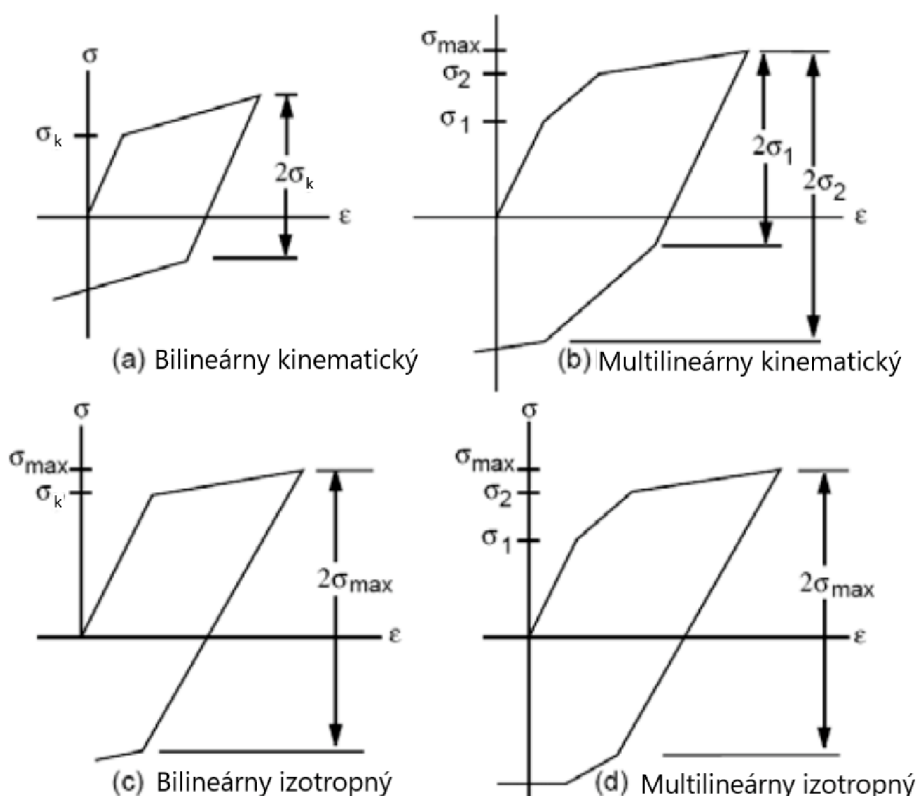
---

<sup>2</sup>Podobne ako pri napätiach, Cauchyho pretvorenie  $E^C$  je ďalej označované ako  $\varepsilon_{tr}$ .

## 2.4.3. Ťahový diagram vo výpočtových programoch

Hollomonov a R-O vzťah popisujú závislosť  $\sigma_{tr} - \varepsilon_{tr}$  spojitou matematickou funkciou. Vo výpočtových programoch je nutné k popisu tejto závislosti využiť implementované modely.

V programe ANSYS je možné zadať experimentálnu krivku ako model zložený z dvoch lineárnych kriviek (bilineárny model). Parametrami tejto aproximácie je počiatočný modul pružnosti v lineárnej oblasti  $E$ , medza klzu  $\sigma_k$  a tangenciálny modul pružnosti  $E_t$ . Pre  $E_t = 0$  dáva tento model model ideálne elastoplastického materiálu. Multilineárny model je zložený z viacerých lineárnych kriviek, zadaných bodmi experimentálnej krivky  $\sigma_{tr} - \varepsilon_{tr}$ . Oba tieto modely môžu využívať kinematické alebo izotropné spevnenie materiálu.



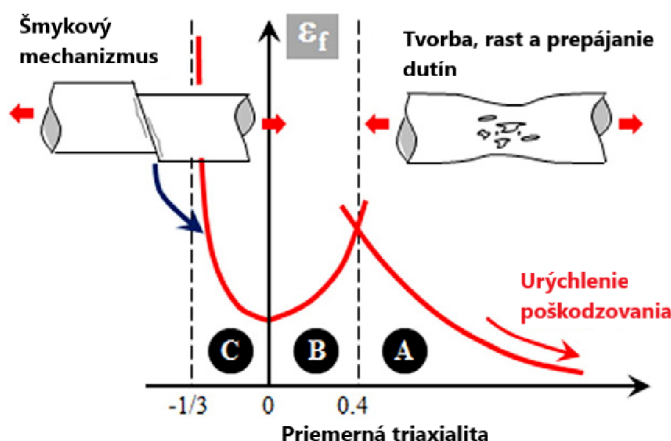
Obr. 2.9: Porovnanie bilineárneho a multilineárneho modelu využívajúceho kinematické a izotropné spevnenie [12]

## 3. Vplyv triaxiality na lomové vlastnosti

Informácie uvedené v predchádzajúcej kapitole slúžia na správny popis napätosti a deformácie. Ďalším krokom v analýze funkčnosti súčasti je vyhodnotenie medzných stavov. Táto kapitola sa zameria na lom a na vplyv triaxiality a plastického pretvorenia na jeho vznik.

### 3.1. Typy mechanizmov lomu

V závislosti na hodnote triaxiality dochádza k rôznym mechanizmom lomu. Tieto mechanizmy (na obr. 3.1) je možné rozdeliť na mechanizmus tvorby, rastu a prepájania dutín (A) vyskytujúci sa za vysokých hodnôt triaxiality a šmykový mechanizmus (C) vyskytujúci sa za záporných hodnôt triaxiality. Pokiaľ sa triaxialita pohybuje medzi hodnotami ohraničujúcimi tieto mechanizmy, dochádza ku kombinovanému lomu (B), v ktorom sa prejavujú oba. Bao poukázal, že existuje oblasť, v ktorej k lomu vôbec nedochádza [13]. V prípadoch, ktoré skúmal bola táto oblasť sprava ohraničená triaxialitou  $\eta \leq -1/3$ . Neskôr sa však ukázalo, že táto oblasť nie je jednoznačne vymedzená a jej existencia a poloha musí byť overená experimentami.



Obr. 3.1: Vplyv triaxiality na typ lomu [14]

#### 3.1.1. Mechanizmus tvorby, rastu a prepájania dutín

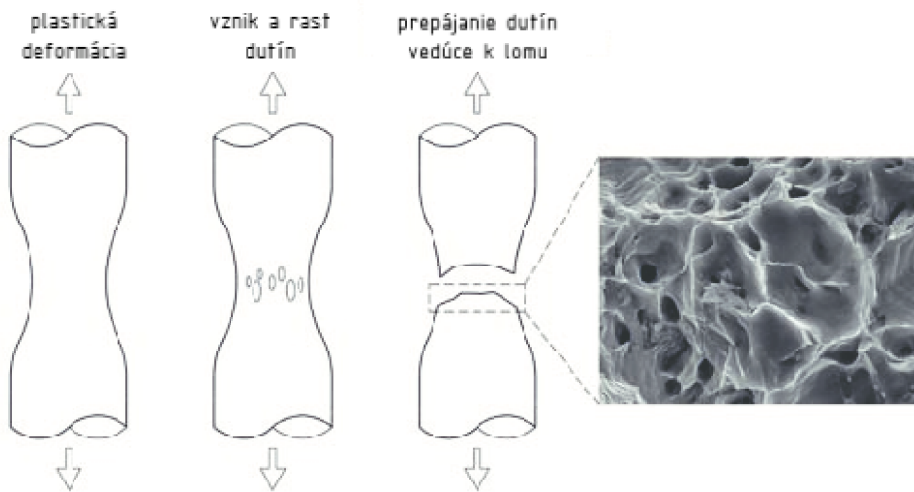
Tento mechanizmus je význačný pre vysoké hodnoty triaxiality ( $\eta > 0,4$ ). Typickým predstaviteľom sú ťahovo namáhané vzorky s vrubom. Lomová plocha býva drsná s rozoznateľnými jamkami, ktoré sú pozostatkom dutín [15]. Dutiny sa obvykle tvoria na rozhraní väčších tvrdých inklúzií a matrice. Na rozhraní dochádza vplyvom rozdielnej tuhosti ku koncentrácii napätia.

Rice a Tracey poukázali, že pokiaľ je materiál pod veľmi veľkým hydrostatickým napätím, teda triaxialita je veľmi vysoká, hydrostatická zmena má na rast dutín väčší vplyv ako zmena tvaru [16]. Thomason si všimol, že pri nižších hodnotách triaxiality dochá-



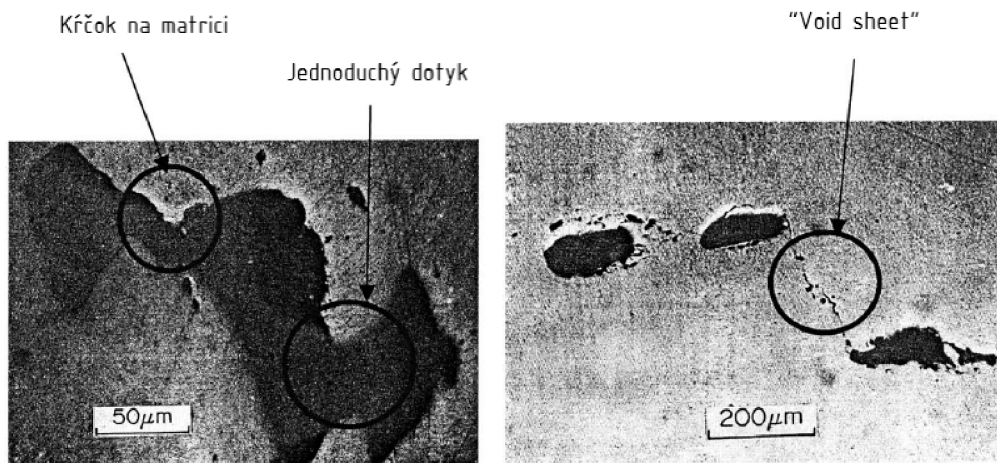
### 3.1. TYPY MECHANIZMOV LOMU

dza k lomu kvôli deviátorovej zmene ovplyvňujúcej rast dutín a hydrostatická zmena má relatívne malý vplyv [17].



Obr. 3.2: Schematické zobrazenie tvorby, rastu a prepájania dutín spoločne s pohľadom na mikroštruktúru [18]

Po vzniku dutín dochádza pri ďalšom zatažovaní k ich prepájaniu, ktoré môže vzniknúť vytvorením kĺčku na matrici medzi dvomi dutinami, jednoduchým dotykom dvoch dutín alebo vytvorením pásu dutín (tzv. "void sheet") [15].

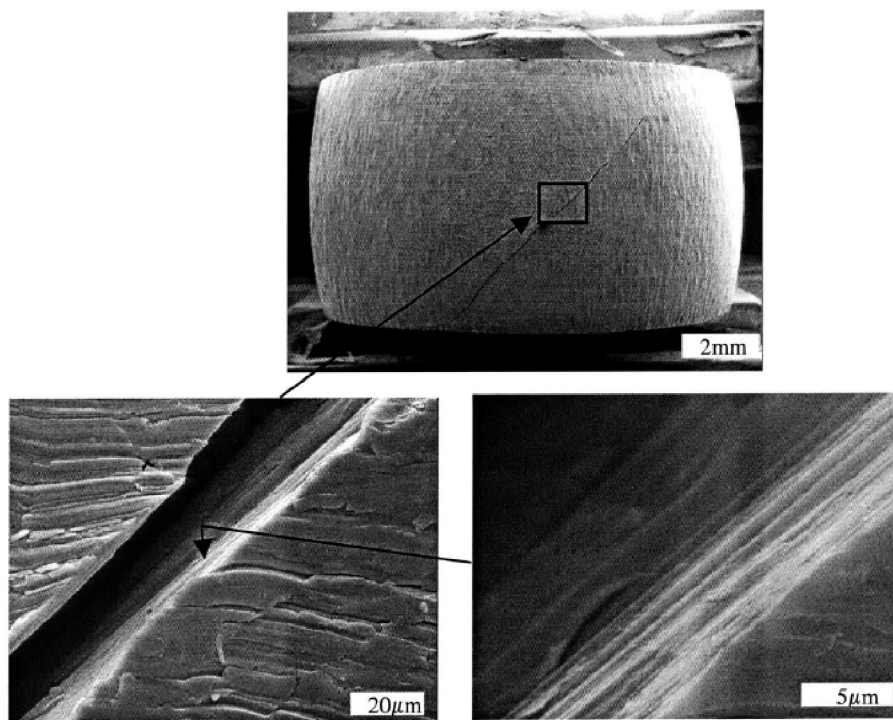


Obr. 3.3: Obvyklé typy mechanizmov prepájania dutín [19]

#### 3.1.2. Šmykový mechanizmus

V oblasti záporných hodnôt triaxiality ( $-\frac{1}{3} \leq \eta \leq 0$ ) dochádza ku šmykovému mechanizmu lomu. Vedomosti o tomto type lomu sú veľmi obmedzené. Typickým predstaviteľom sú tlakové skúšky vzoriek na hydraulickom lise. Lomové plochy sú relatívne rovné a nevykazujú prítomnosť jamiek po dutinách. Lom prebieha po najhustejšie obsadených sklzových rovinách [15].





Obr. 3.4: Fraktografia lomovej plochy, ktorá vznikla šmykovým mechanizmom [15]

### 3.1.3. Kombinovaný mechanizmus

Pokiaľ sa triaxialita nachádza v rozmedzí  $0 \leq \eta \leq 0,4$  dochádza ku kombinácii dvoch vyššie popísaných lomov. Týmto javom sa zaoberali French a Weinrich [20], ktorí uskutočňovali ťahové skúšky v tlakovej komore. Najprv skúška prebiehala bez pridaného tlaku a lomová plocha vykazovala jamky súvisiace s dutinovým mechanizmom. V prípade s prídavným tlakom bol na lomovej ploche nájdený len obmedzený počet jamiek a pri ďalšom zvyšovaní tlaku bol lom podobný šmykovému mechanizmu.

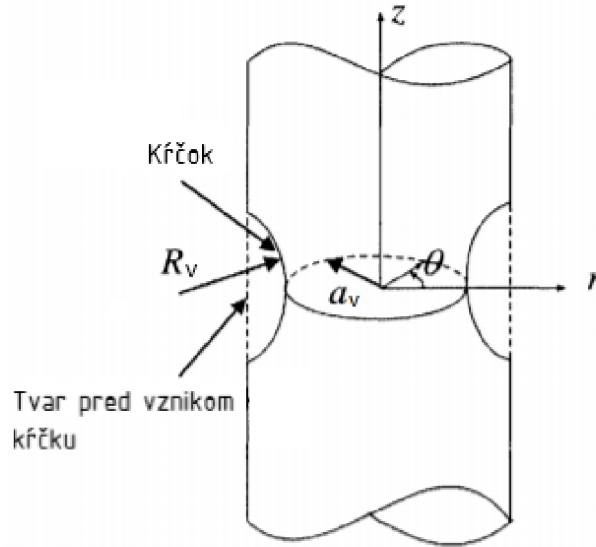
## 3.2. Ťahové skúšky vzoriek s vrubom

Výhodou ťahových skúšok kruhových vzoriek s vrubom je jednoduché dosiahnutie rôznych stupňov triaxiality len pomocou zmeny polomeru vrubu vzorky. Pre zostavenie diagramu závislosti lomového pretvorenia na triaxialite napätia tak postačuje vykonať ťahové skúšky niekoľkých vzoriek s rôznym polomerom vrubu.

### 3.2.1. Popis napätosti vo vzorke s vrubom

Bridgman sa ako prvý zaoberal vplyvom triaxiality na tvárny lom a vo svojej práci odvodil semi-empirické vzťahy pre napätie a pretvorenie pre vzorky s vrubom [10].

### 3.2. ŤAHOVÉ SKÚŠKY VZORIEK S VRUBOM



Obr. 3.5: Geometria vzorky s vytvoreným krčkom [15]

Bridgmanov model využíva osovú symetriu a aj symetriu vzhľadom k rovine  $r - \theta$ . Následne vyjadruje napätia v kruhovej vzorke s vrubom v závislosti na polomere vrubu  $R_v$  a polomere minimálneho prierečného prierezu  $a_v$ . Považuje redukované pretvorenie a napätie v tomto prierečnom priereze za konštantné a platí pre ne:

$$\varepsilon_{red} = 2 \ln \left( \frac{a_{v0}}{a_v} \right), \quad (3.1)$$

kde  $a_{v0}$  je polomer minimálneho prierečného prierezu nedeformovanej vzorky a:

$$\sigma_{red} = \frac{F}{\pi a_v^2}. \quad (3.2)$$

Pre jednotlivé zložky napätia, teda radiálne  $\sigma_{rr}$ , tangenciálne  $\sigma_{\theta\theta}$  a axiálne  $\sigma_{zz}$  platí [10]:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{red} \left[ 1 + \ln \left( \frac{a_v^2 + 2a_v R_v - r^2}{2a_v R_v} \right) \right], \quad (3.3)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{red} \ln \left( \frac{a_v^2 + 2a_v R_v - r^2}{2a_v R_v} \right), \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{red} \ln \left( \frac{a_v^2 + 2a_v R_v - r^2}{2a_v R_v} \right). \quad (3.5)$$

Dosadením týchto vzťahov do rovníc (2.16), (2.26) a (2.25) sa obdrží vzťah popisujúci rozloženie triaxiality v minimálnom priechnom priereze pod vrubom v závislosti na vzdialenosti  $r$  od osi symetrie.

$$\eta = \frac{1}{3} + \ln \left( \frac{a_v^2 + 2a_v R_v - r^2}{2a_v R_v} \right) \quad (3.6)$$

Najväčšia hodnota triaxiality sa nachádza na osi symetrie vzorky s vrubom a je rovná:

$$\eta_{max} = \frac{1}{3} + \ln \left( \frac{a_v}{2R_v} + 1 \right). \quad (3.7)$$

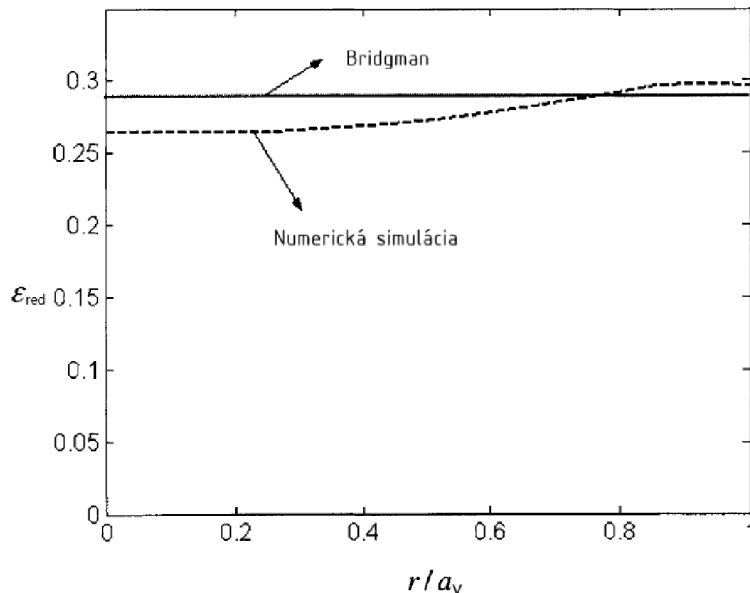
Tieto vzťahy sú použiteľné nielen pre vzorky s predpripraveným vrubom, ale je možné ich použiť aj pre hladkú vzorku po vytvorení kĺčku.

Problémom môže byť určenie polomeru krivosti kĺčku  $R_v$ . Bridgman [10] zistil empirický vzťah, pomocou ktorého je možné vyhnúť sa priamemu zisťovaniu polomeru  $R_v$ :

$$\frac{a_v}{R_v} = \varepsilon_{red} - \varepsilon_u, \quad (3.8)$$

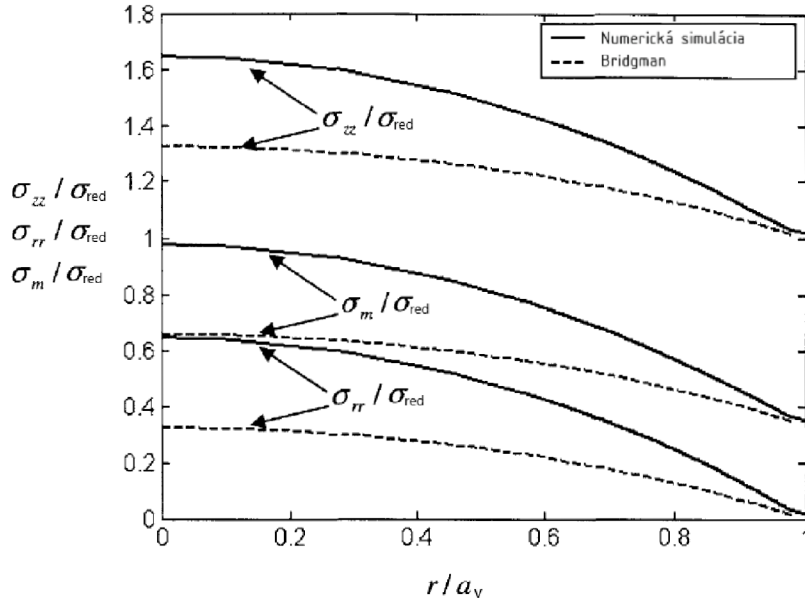
kde  $\varepsilon_u$  je jednoosové pretvorenie na medzi pevnosti.

Bridgmanove vzťahy boli odvodené pred vytvorením a rozšírením metódy konečných prvkov, ktorá umožnila bližšie určiť rozloženie napätia a deformácie vo vzorke. Predpoklad, že redukované pretvorenie je konštantné po priereze, sa ukázal ako nepravdivý. Namiesto toho sa podľa modelov využívajúcich MKP mierne líši [15]. Porovnanie napätí získaných z Bridgmanových vzťahov a numerickou simuláciou odhalilo rozdiely až do veľkosti 50% [15].



Obr. 3.6: Porovnanie redukovaného pretvorenia po priereze pre analytické riešenie a riešenie pomocou MKP [15]

### 3.2. ŤAHOVÉ SKÚŠKY VZORIEK S VRUBOM



Obr. 3.7: Porovnanie napätí po priereze pre analytické riešenie a riešenie pomocou MKP [15]

#### 3.2.2. Miesto vzniku lomu

Existuje mnoho lomových kritérií, ktoré hovoria, že lom nastane v bode telesa, keď akumulované plastické pretvorenie dosiahne svoju kritickú hodnotu. Táto kritická hodnota môže byť závislá na parametri triaxiality, Lodeho uhle alebo aj ďalších charakteristikách napätosti.

Pomocou týchto kritérií môže byť predikované miesto vzniku lomu. Li vo svojej práci [21] skúmal lomové plochy elektrónovým mikroskopom, aby našiel miesto vzniku lomu. Na povrchu prechádzajúceho koreňom vrubu bol prítomný tvárny aj krehký lom. Je známe, že tvárny lom predchádza krehkému a oblasť tvárneho lomu je zároveň miestom jeho iniciácie. Miesto vzniku lomu sa vždy nachádzalo v strede vzoriek.

#### 3.2.3. Stredná hodnota maximálnej triaxiality

V priebehu zaťažovania sa vo vzorkách výrazne mení triaxialita. Tento efekt je výrazný hlavne pri hladkých vzorkách [21], v ktorých dochádza k vzniku a rozvoju krčku. Zmena triaxiality v závislosti na polomere krčku je zjavná z rovnice (3.7). Bola preto navrhnutá stredná hodnota triaxiality v priebehu zaťažovania [22], definovaná vzťahom:

$$\eta_{av} = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} \eta(\varepsilon_{red}^{pl}) d\varepsilon_{red}^{pl}, \quad (3.9)$$

kde  $\varepsilon_f$  je lomová deformácia.

### 3.2.4. Lomový diagram

Lomový diagram, nazývaný tiež diagram medznej plasticity, zachytáva fakt, že k porušeniu materiálu dôjde pri rôznej deformácií v závislosti na napätosti. Diagram bol po prvýkrát použitý ruskými vedcami na začiatku 50. rokov minulého storočia [23] a je široko využívaný v teórii tváriteľnosti. Pre popis napätosti sa používa triaxialita napätia a zodpovedajúci medzný stav je charakterizovaný hodnotou lomovej deformácie.

Takýto diagram môže byť skonštruovaný z 2 bodov určených triaxialitou napätia a lomovou deformáciou, ktoré sú získané zo skúšky krutom a skúšky jednoosovým ťahom [23]. Môžu byť taktiež využité tlakové skúšky. Skúška krutom môže byť nahradená ťahovou skúškou vzorky s vrubom. V priebehu ťahových skúšok s narastajúcim zaťažением narastá aj triaxialita.

### 3.2.5. Konštrukcia lomového diagramu

Samotný postup konštrukcie lomového diagramu (obr. 3.1) pozostáva z niekoľkých krokov [22]:

1. Uskutoční sa séria skúšok a získa sa závislosť sily na posunutí  $F - u$ .
2. Paralelne sa uskutočnia numerické simulácie.
3. Zo skúšok sa vyhodnotí miesto lomu a posunutie  $u_f$ , pri ktorej došlo k lomu.
4. Vypočíta sa priebeh redukovaného plastického pretvorenia  $\varepsilon_{red}^{pl}$  v závislosti na  $u$  a triaxiality  $\eta$  v závislosti na  $\varepsilon_{red}^{pl}$  v mieste vzniku lomu.
5. Určí sa lomová deformácia  $\varepsilon_f$  a priemerná triaxialita  $\eta_{av}$ .
6. Výsledky z kroku 5 sa vynesú do osí  $\eta_{av} - \varepsilon_f$  a zostrojí sa krivka limitnej lomovej deformácie.

Závislosť z kroku 6 je monotónne klesajúca funkcia. Väčšina kalibračných dát, vyskytujúcich sa v literatúre, je získaná z ťahových skúšok hladkých a vrubovaných telies, čo zodpovedá triaxialite  $\eta > 1/3$ . Extrapolovanie takto získanej funkcie do nižších, nulových alebo záporných hodnôt je riskantné a môže viesť ku vzniku veľkých chýb [22].



## 4. Lomová mechanika

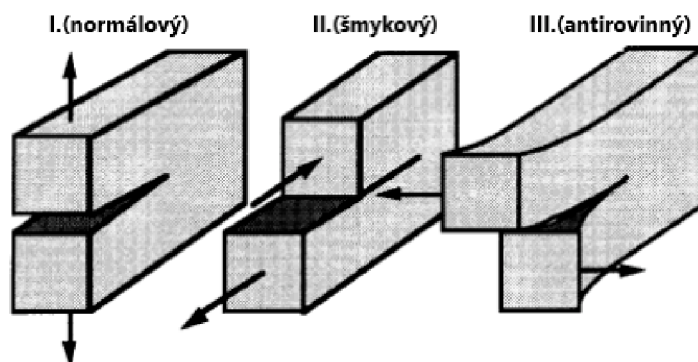
V predchádzajúcich kapitolách boli zhrnuté dôležité teoretické znalosti potrebné pre vyhodnotenie vzniku lomu v súčasti. Táto teória sa primárne zameriava len na celistvé súčasti bez trhlín. Pre posúdenie telesa s trhlinou je nutné sa zoznámiť ešte s jedným vedným odborom - lomovou mechanikou.

Existujú dva základné prístupy k posudzovaniu telies s trhlinou - energetický a napätový. Energetický prístup býva často označovaný ako globálny, zaoberá sa energiou uloženou vo veľkom objeme materiálu. Napätový prístup vyhodnocuje napätosť na čele trhliny a býva označovaný ako lokálny. Cieľom tejto práce je vytvorenie lomového diagramu na základe lokálneho porušenia na čele trhliny a bude sa ďalej zaoberať napätovým prístupom.

### 4.1. Lineárne elastická lomová mechanika

Pole napätí a posuvov na čele trhliny popísal Westegaard, jeho riešenie obsahuje faktor intenzity napätia definovaný Irwinom [24]. Táto veličina je základnou charakteristikou využívanou v lineárne elastickej lomovej mechanike (LELM). Ako prvý sa zadefinuje faktor intenzity napätia a z neho budú odvodené vzťahy pre popis poľa napätí a posuvov.

Odvedenie takýchto vzťahov pre ľubovoľne zataženú trhlinu môže byť veľmi komplikované. Irwin ukázal, že ľubovoľné zataženie môže byť vyjadrené superpozíciou troch základných zatažových módov [24]. Pri móde I je trhlina zatažením roztváraná, módy II a III namáhajú trhlinu šmykovo. Trhliny zatažované šmykovo sa odkláňajú do módu I, v ktorom sa ďalej primárne šíria. Teória správania trhlín v móde I je oveľa prepracovanejšia ako u zvyšných módov. Aj výpočtový model ťahovej skúšky telesa s trhlinou uvažuje, že trhlina je zatažená v móde I. Táto práca sa ďalej zaoberá len ním.



Obr. 4.1: Módy zataženia trhliny [25]

Súčiniteľ intenzity napätia  $K_I$  je narozdiel od napätia vhodným parametrom pre posudzovanie šírenia trhliny. Irwin tento parameter definoval ako:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0), \quad (4.1)$$

kde je význam jednotlivých členov zjavný z obr. 4.2.



#### 4.1. LINEÁRNE ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

Tomuto parametru je možné priradiť fyzikálny význam jeho porovnaním s energiou potrebnou pre predĺženie dĺžky trhliny  $G_I$ , tzv. hnacou silou trhliny [24].

$$G_I = \frac{1 - \mu^2}{E} K_I^2, \quad (4.2)$$

kde  $E$  je Youngov modul pružnosti a  $\mu$  je Poissonov pomer.

$K_I$  sa stanovuje z nominálneho napätia  $\sigma_{nom}$ , veľkosti trhliny  $a$  a geometrie súčasti (ktorá je daná šírkou súčasti  $W$  a korekčnou funkciou  $f(a/W)$ ). Pre daný tvar súčasti, dĺžku trhliny a zaťaženie môže byť faktor intenzity napätia určený podľa príručky [26]. Pre rovinné geometrie s konštantnou hrúbkou má  $K_I$  obvykle tvar:

$$K_I = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right), \quad (4.3)$$

kde  $f(a/W)$  je funkcia upravujúca riešenie pre  $K_I$  v nekonečne širokom páse na konečnú šírku.

Nestabilné šírenie trhliny nastane, keď  $K_I$  dosiahne svoju kritickú hodnotu  $K_{IC}$ , ktorá je materiálovou charakteristikou. V niektorých prípadoch je nestabilný rast trhliny predchádzaný stabilným.

Westegaardovo riešenie popisuje elastické napätie pred čelom trhliny v tvare využívajúcim  $K_I$  [25]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} &= \begin{cases} 0 & \text{pre rovinnú napätosť} \\ \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pre rovinnú deformáciu,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pole posuvov má tvar:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ u_y &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde  $G$  je modul pružnosti v šmyku a

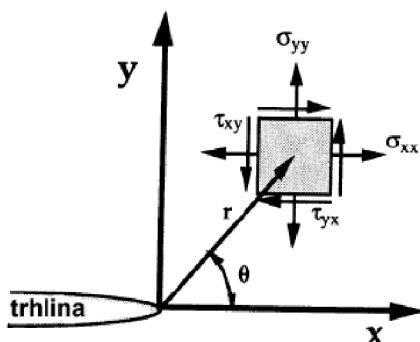
$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\mu}{1+\mu} & \text{pre rovinnú napätosť} \\ 3 - 4\mu & \text{pre rovinnú deformáciu.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Pozdĺž roviny pred trhlinou (pre  $\theta = 0$ ) pre jednotlivé napätia platí:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$



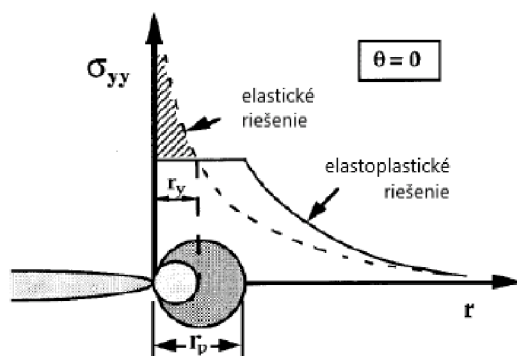
Napätia sú úmerné  $r^{-1/2}$  a blížia sa nekonečnu, ako sa  $r$  blíži 0. Napätia pre všetky problémy popísané módmi I majú tvar daný rovnicou (4.4) bez ohľadu na okrajové podmienky.



Obr. 4.2: Napätia pôsobiace pred čelom trhliny [25]

## 4.2. Plastická zóna na čele trhliny

Predchádzajúci prístup uvažuje na čele trhliny singularitu typu  $r^{-1/2}$ . Skutočný materiál však nie je schopný vydržať nekonečné veľké napätia. Keď je pred čelom trhliny dosiahnutá medza klzu, vytvorí sa plastická oblasť o obmedzenej veľkosti.



Obr. 4.3: Plastická zóna pred čelom trhliny [25]

Irwin [24] sa zaoberal aj touto otázkou a odvodil približný vzťah prvého rádu, ktorý rešpektuje elastické riešenie. Nahradením  $\sigma_{yy}$  za medzu klzu  $\sigma_k$  získal veľkosť plastickej oblasti  $r_y$  pre rovinnú napätosť:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_k} \right)^2 \quad (4.8)$$

a pre rovinnú deformáciu, kde zložka napätia  $\sigma_{zz}$  spomaľuje plastizáciu a znižuje plastickú zónu:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_k} \right)^2 \quad (4.9)$$

### 4.3. ELASTOPLASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

Približný vzťah druhého rádu rešpektujúci elastoplastické riešenie redistribuuje napätie od čela trhliny po plastickú zónu prvého rádu:

$$\sigma_k r_p = \int_0^{r_y} \sigma_{yy} dr, \quad (4.10)$$

čo vedie na výsledok:

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_k} \right) = 2r_y. \quad (4.11)$$

LELM je platná, pokiaľ je veľkosť plastickej zóny o rád menšia ako dĺžka trhliny.

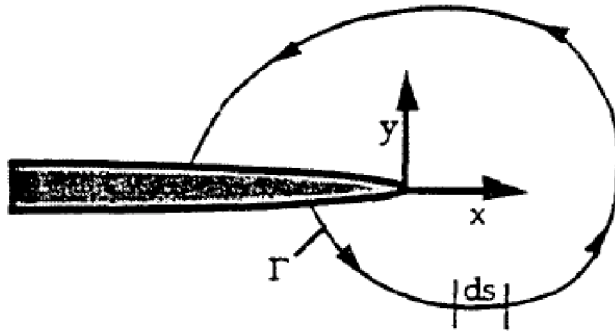
### 4.3. Elastoplastická lomová mechanika

Pokiaľ je plastická zóna v porovnaní s rozmermi telesa nezanedbateľná, LELM prestáva platiť a musí byť použitá elastoplastická lomová mechanika (EPLM).

Využitím nelineárnej elasticity Rice [27] našiel krivkový integrál, ktorý bol síce pôvodne zavedený ako energetické kritérium, ale neskôr sa ukázalo, že jednoznačne charakterizuje napätosť pred čelom trhliny a je možné ho považovať za napätový parameter.

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (4.12)$$

kde  $W$  je merná energia napätosti  $W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ,  $T_i$  je vektor povrchových síl,  $u_i$  je vektor posuvov kolmý na krivku a  $ds$  je element dĺžky pozdĺž uzavretej krivky.



Obr. 4.4: Krivka okolo čela trhliny [25]

Hutchinson, Rice a Rosengren [28] nezávisle na sebe ukázali, že  $J$ -integrál je faktorom intenzity napätia v nelineárnom elastickom materiáli popísanom R-O vzťahom (2.40). Pokiaľ má  $J$ -integrál zostať nezávislý na integračnej ceste, potom musia byť napätia a deformácie v elastoplastickom materiáli závislé na vzdialenosti od čela trhliny  $\approx 1/r$ . V blízkej vzdialenosti od čela trhliny dominuje plastická deformácia nad elastickou. Z týchto predpokladov bolo odvodené HRR riešenie, ktoré popisuje napätie a deformáciu ako mocninné funkcie.

$$\sigma_{ij} = k_1 \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{1+s}} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{ij} = k_2 \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{s}{1+s}}, \quad (4.14)$$

kde  $k_1$  a  $k_2$  sú konštanty úmernosti a  $s = 1/n$ , kde  $n$  je exponent deformačného spevnenia v R-O vzťahu. V oblasti LELM je  $s = 1$  a rovnice tak popisujú elasticú singularitu  $1/\sqrt{r}$ .

$J$ -integrál jednoznačne charakterizuje elastoplastické pole napätí v okolí čela trhliny, presne ako  $K_I$  jednoznačne popisuje elasticé pole napätí. Rovnako tak dôjde k nestabilnému šíreniu trhliny pokiaľ  $J$  dosiahne svoju kritickú hodnotu  $J_C$ .

## 4.4. Dvojparametrická lomová mechanika

Podmienky pri plasticite malého rozsahu (SSY), kde je pole jednoznačne popísané  $J$ -integrálom, sú označované ako podmienky dominancie  $J$ -integrálu alebo jednoparametrický popis poľa okolo čela trhliny. Použitelnosť tohto prístupu je obmedzená na takzvané geometrie s vysokým stiesnením. V prípade geometrií s nízkym stiesnením je nutné použiť dvojparametrickú lomovú mechaniku pre popis splastizovanej oblasti pred čelom trhliny.

Dve zaužívané dvojparametrické teórie sú  $J-T$  a  $J-Q$ .  $J$ -integrál je v týchto teóriách využitý pre popis deformácie a druhý parameter je pridaný pre úplný popis stavu na čele trhliny. Prvý prístup  $J-T$  je založený na zavedení elastickeho  $T$ -napätia.  $J-Q$  teória má pre túto prácu obzvlášť veľký význam, pretože  $Q$ -parameter je definovaný ako charakteristika triaxiality.

### 4.4.1. $T$ -napätie

Westegaardovo riešenie poľa napätí (4.4), ktoré bolo pôvodne odvodené pre dvojsovú napätosť, bolo neskôr využité aj pre popis napätosti v súčastiach zaťažených jednoosovým namáhaním. Toto riešenie dáva nenulové hodnoty napätia  $\sigma_{xx}$  v rovine pred čelom trhliny pre čisté jednoosové namáhanie. To je očakávateľné, keďže pôvodne bolo riešenie odvodené pre dvojsové namáhanie. Pre odstránenie tohoto priečneho napätia Irwin navrhol použitie priečnej zložky napätia a nazval ho  $T$ -napätie [24]. V prípade rovinnej deformácie vzniká aj napätie  $\sigma_{zz} = \mu T$ . Dnes je  $T$ -napätie chápané ako napätie pôsobiace pozdĺžne k čelu trhliny v smere osi  $x$ .

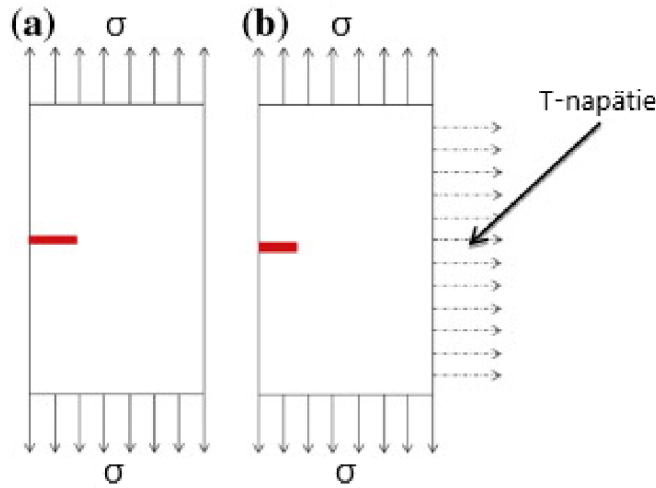
$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - T \quad (4.15)$$

Tlakové  $T$ -napätie vyskytujúce sa u plytkých trhlín znižuje veľkosť ťahového napätia pri čele trhliny, znižuje hydrostatické napätie a mieru triaxiality a stiesnenie. Kritické hodnoty  $J_C$  narastajú. Iným vysvetlením je, že pri nízkej triaxialite je väčšia časť privádzanej energie spotrebovaná na plastizáciu, pre vznik lomu zostáva menšia časť. V prípade ťahových  $T$ -napätí nie je ovplyvnenie napätosti  $T$ -napätím významné. Veľkosť  $T$ -napätia nie je dôležitá a  $J_C$  nadobúdajú minimálnych hodnôt.

V praxi sa využíva pre charakteristiku stiesnenia bezrozmerný faktor biaxiality:

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} = \frac{T\sqrt{\pi a}}{\sigma\sqrt{\pi a}f\left(\frac{a}{W}\right)} = \frac{T}{\sigma f\left(\frac{a}{W}\right)}. \quad (4.16)$$

#### 4.4. DVOJPARAMETRICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA



Obr. 4.5: Porovnanie vzorky s neuvažovaným a uvažovaným T-napätím

##### 4.4.2. $Q$ -parameter

V oblasti EPLM sa ako druhý parameter začal používať tzv.  $Q$ -parameter.

Prístup  $J - Q$  normalizuje vzdialenosti pred čelom trhliny podľa  $J/\sigma_k$  a zavádza hodnotu  $Q$ -parametru [29] ako:

$$Q = \frac{\sigma_{yy} - (\sigma_{yy})_{HRR}}{\sigma_k} \text{ pre } \theta = 0 \text{ a } r = \frac{2J}{\sigma_k}, \quad (4.17)$$

kde  $r$  a  $\theta$  sú polárne súradnice (ako na obrázku 4.2),  $(\sigma_{yy})_{HRR}$  je hodnota napätia  $\sigma_{yy}$  podľa teórie HRR a  $\sigma_{yy}$  je skutočná hodnota napätia vyhodnotená numerickou metódou. Hodnota  $Q$ -parametru je pre určitost vyjadrovaná vo vzdialenosti  $2J/\sigma_k$ . V tejto vzdialenosti už nie sú pomery napätí ovplyvňované plastizáciou súvisiacou s otupením na čele trhliny a parameter triaxiality tu zväčša dosahuje svojho maxima.

Diferenčné pole môže byť taktiež vyjadrené pomocou riešenia uvažujúceho malú plastickú oblasť  $(\sigma_{yy})_{SSY;T=0}$ , pri ktorom dominuje faktor intenzity napätia  $K_I$ :

$$Q = \frac{\sigma_{yy} - (\sigma_{yy})_{SSY;T=0}}{\sigma_k} \text{ pre } \theta = 0 \text{ a } r = \frac{2J}{\sigma_k}. \quad (4.18)$$

V súlade s tou teóriou je možné definovať  $Q$ -parameter pomocou stredných (hydrostatických) napätí. Z tejto definície je jasné, že  $Q$ -parameter je charakteristikou triaxiality.

$$Q = \frac{\sigma_m - (\sigma_m)_{SSY;T=0}}{\sigma_k} \text{ pre } \theta = 0 \text{ a } r = \frac{2J}{\sigma_k} \quad (4.19)$$

Záporné  $Q$ -hodnoty znamenajú že hydrostatické napätie je nižšie než referenčný stav, kde  $Q = 0$ . Naopak kladné  $Q$ -hodnoty znamenajú, že hydrostatické napätie je vyššie než referenčný stav. Geometrie so zápornou  $Q$ -hodnotou vykazujú nižšie hodnoty triaxiality a pokles  $J$ -dominancie, kým geometrie s  $Q > 0$  vykazujú vysoké hodnoty triaxiality a dobrú zhodu s HRR-riešením.  $Q$ -parameter umožňuje popis vývinu stiesnenia, ako sa plastická deformácia mení z malej na plne rozvinutú.

Keďže  $Q$ -parameter popisuje normálové aj hydrostatické napätie vo vzťahu k referenčnému stavu napätosti, Shih a O'Dowd navrhli, aby bol využitý na charakterizovanie typu lomu [29].

## 4.5. Lomová mechanika vo výpočtových programoch

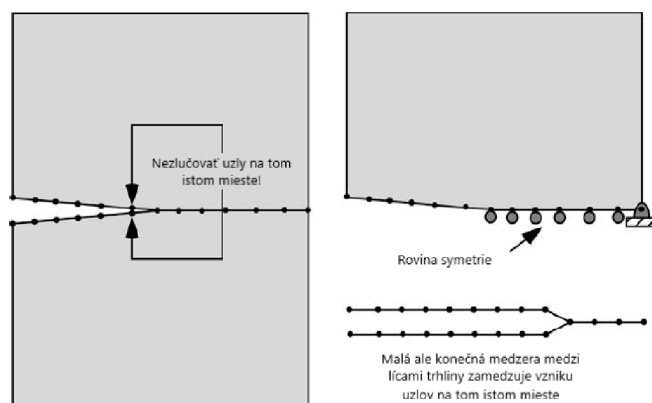
Predchádzajúce prístupy uvádzajú možnosti analytického riešenia poľa napätí a deformácie v uzavretom tvare v telese s trhlinou. Analytické riešenie je obmedzené na rovinnú napätosť alebo rovinnú deformáciu v izotropnom lineárne elasticom materiáli. Vo väčšine prípadov riešenie v uzavretom tvare nie je možné a napätosť musí byť vyhodnocovaná numericky.

Cieľom tejto práce je vyhodnocovanie lomových vlastností na základe lokálneho prístupu, ktorý zohľadňuje napätosť (vo forme faktoru triaxiality napätia) a deformáciu (vo forme plastického pretvorenia) a je nutné poznať prístupy k tvorbe siete konečných prvkov, ktorá umožní správne vyhodnotenie poľa týchto veličín. Nie je však korektným prístupom automaticky brať výsledky z numerického modelu za správne, vždy je vhodné porovnanie s analytickým riešením. Okrem popisu poľa napätia a deformácie umožňujú výpočtové programy aj vyhodnotenie faktoru intenzity napätia  $K_I$  a  $J$ -integrálu, tieto parametre môžu byť využité na verifikáciu skúmaného modelu.

### 4.5.1. Sieť konečných prvkov

Napriek tomu, že väčšina komerčne dostupných výpočtových programov umožňuje automatickú tvorbu siete konečných prvkov, bývajú takto vygenerované siete častokrát nevhodné na riešenie daného problému a vyžadujú od užívateľa menšie alebo väčšie úpravy. To je obzvlášť pravdivé pri modelovaní trhlín.

V prípade, že sú modelované obe líca trhliny, nachádzajú sa ich uzly na spoločnom mieste. Väčšina výpočtových programov má tendenciu uzly nachádzajúce sa na rovnakom mieste spojiť do jedného, čo by spôsobilo uzavretie trhliny a nevedlo by na riešenie skúmaného problému. Preto je odporúčané vytvoriť medzi uzlami medzeru, ktorá je oveľa menšia ako dĺžka trhliny. Väčšina trhlín v móde I sa správa symetricky, čo umožňuje využitie roviny symetrie - modeluje sa len polovica trhliny a zaniká problém so spájaním uzlov. Okrajová podmienka symetrie sa predpíše na časť telesa bez trhliny, samotná trhlina nebýva zaväzbená.



Obr. 4.6: Príklad umiestnenia uzlov na čele trhliny a okrajových podmienok symetrie [25]

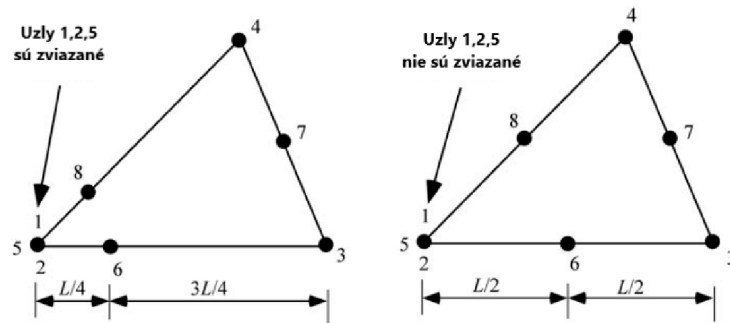
Po určení okrajových podmienok sa prechádza k tvorbe samotnej siete. Ako bolo popísané v sekcii 4.1 a 4.3 pole napätí v elastickej, respektíve elastoplastickej oblasti vykazuje singularitu  $1/\sqrt{r}$ , respektíve  $1/r$ . Je snaha takúto singularitu vytvoriť aj pomocou metódy konečných prvkov.



#### 4.5. LOMOVÁ MECHANIKA VO VÝPOČTOVÝCH PROGRAMOCH

To je dosiahnuté využitím kvadratických elementov, ktorých stredový uzol je posunutý do  $1/4$  ich dĺžky, čím sa vytvorí singularita typu  $1/\sqrt{r}$ . Tieto elementy sú navyše degenerované na trojuholníkové, tým je zabezpečený požadovaný priebeh singularity nad celým elementom. Pokiaľ by elementy neboli degenerované, singularita by sa vytvorila len na hranách elementu.

Pri vytvorení plastickej zóny singularitu typu  $1/\sqrt{r}$  nahrádza singularita typu  $1/r$ . Elastické singulárne elementy preto nie sú vhodné pre modelovanie elastoplastických úloh. Využívajú sa singulárne elementy, ktoré vykazujú singularitu zodpovedajúcu plastickým podmienkam na čele trhliny. Podobne ako elastické elementy sú aj tieto degenerované do trojuholníkov, ale nemajú posunutý stredový uzol a uzly na čele trhliny nie sú zviazané, čo umožňuje modelovanie otupenia trhliny vplyvom plastizácie.



Obr. 4.7: Prvok vhodný pre elastickú (vľavo) a elastoplastickú (vpravo) analýzu [25]

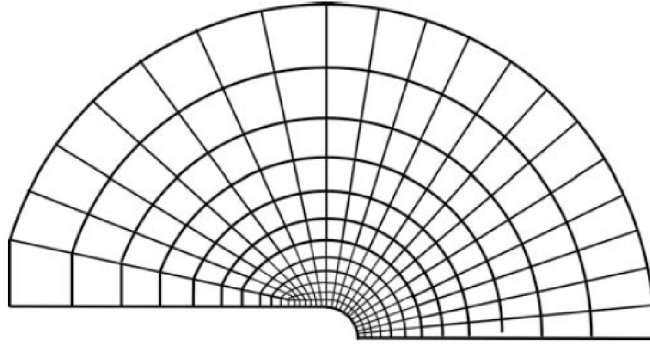
Pre väčšinu úloh je najvhodnejšie vytvoriť sieť v tvare "pavúcej siete", ktorá je tvorená kvadratickými elementami umiestnenými v kruhoch so spoločným stredom na čele trhliny. Elementy v najmenšom kruhu sú degenerované na trojuholníky. Pred čelom trhliny je veľký gradient napätia a pretvorenie a zjemnenie siete by tu malo byť najväčšie. Takýto typ siete prirodzene umožňuje prechod od menších prvkov pri čele trhliny k väčším prvkom vo väčšej vzdialenosti. Navyše takéto rozmiestnenie elementov tvorí hladké krivky so spoločným stredom, ktoré sú vhodné na vyhodnocovanie  $J$ -integrálu.

Zjemnenie siete závisí od účelu analýzy. Kým pre elastické úlohy postačuje aj relatívne hrubá sieť, pre elastoplastické úlohy je ju potreba vhodne zjemniť v miestach, kde sa očakáva plastizácia, ktorá významne prispieva k hodnote  $J$ -integrálu.

Prítomnosť singulárnych elementov nemusí byť vždy potrebná. Kým pre vyhodnocovanie faktoru intenzity napätia  $K_I$  sú singulárne elementy dôležité, výpočet  $J$ -integrálu môže prebiehať po krivke obsahujúcej menšiu alebo väčšiu oblasť. Pri väčších oblastiach nie sú singulárne elementy nutné, keďže k celkovej hodnote  $J$ -integrálu prispievajú v tomto prípade len málo.

Pri analýze napätia a deformácie musí byť zjemnenie siete veľmi vysoké. Všeobecne je vhodné mať minimálne 10 elementov v radiálnom smere v oblasti záujmu.

Singulárne elementy nie sú vhodné pre analýzy uvažujúce veľké deformácie. V takých prípadoch je matica tuhosti prvku prepočítavaná po každom kroku. Degenerované elementy sa stávajú veľmi zdeformované pri otupovaní trhliny, čo vedie k chybám a numerickej nestabilite. Pre teóriu malých deformácií nie je deformácia elementu problémom, keďže matica tuhosti je počítaná z pôvodnej geometrickej konfigurácie. V prípade veľkých deformácií je zvykom začať úlohu počítať s konečným rádiusom na čele trhliny, na ktorom je vytvorená sieť nedegenerovaných konečných prvkov.



Obr. 4.8: Oblasť okolo čela trhliny pre úlohu uvažujúcu veľké deformácie [25]

### 4.5.2. Stanovenie parametrov lomovej mechaniky

#### Faktor intenzity napätia $K_I$

Určenie faktoru intenzity napätia  $K_I$  v programe ANSYS pomocou príkazu *KCALC* vychádza z rovnice (4.5), ktorá je vyhodnotená pre  $\theta = \pm 180^\circ$  [30]. Reorganizáciou členov sa získa vzťah pre  $K_I$ :

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1 + \kappa} \frac{|u_y|}{\sqrt{r}}, \quad (4.20)$$

kde z výsledného poľa posuvov je vyhodnotený člen  $\frac{|u_y|}{\sqrt{r}}$  v troch uzloch, z ktorých je určený výsledný faktor intenzity napätia  $K_I$ .

#### $J$ -integrál

Určenie  $J$ -integrálu v programe ANSYS pomocou príkazu *CINT* vychádza z integračnej metódy podľa Shiha [31]. Táto metóda je univerzálna, použiteľná pre rôzne druhy analýz. V rovinných úlohách metóda vychádza z Greenovej vety, prevádza integrál po uzavretej krivke na plošný integrál, integruje sa cez plochu ohraničenú touto krivkou.

V najjednoduchšom prípade táto metóda prevedie integráciu po uzavretej krivke  $\Gamma$  na plošný integrál cez plochu  $\Omega$ , ktorá je krivkou ohraničená:

$$J = \int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega, \quad (4.21)$$

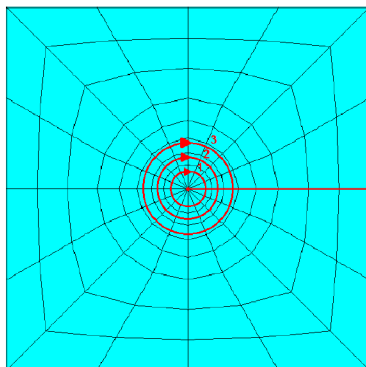
kde  $\sigma_{ij}$  je tenzor napätia,  $u_j$  je vektor posuvov,  $W$  je hustota deformačnej energie,  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta,  $x_i$  sú osi súradnicového systému a  $q$  je tzv. vektor posuvu trhliny.

V diskretizovanej podobe má tento vzťah tvar:

$$J = \sum_{ie=1}^{ne} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} w_{iw} \Omega_{ie}, \quad (4.22)$$

kde  $ne$  je počet integrovaných elementov,  $w_{iw}$  je váhová funkcia a  $\Omega_{ie}$  je plocha prvku  $ie$ .

#### 4.6. ŤAHOVÉ SKÚŠKY VZORIEK S TRHLINOU



Obr. 4.9: Príklad kriviek, pozdĺž ktorých sa počíta J-integrál [32]

$J$ -integrál je v programe ANSYS vyhodnocovaný po viacerých krivkách. Prvá z nich obsahuje prvky, ktorých uzlom je vrchol trhliny. Druhá krivka obsahuje prvky priľahlé k prvej a tak ďalej. Tieto krivky však nesmú dosiahnuť povrch telesa.

### 4.6. Ťahové skúšky vzoriek s trhlinou

Ťahové skúšky kruhových tyčí s trhlinou (*cracked round bars - CRB*) sú dobre popísané analytickými vzťahmi pre vyhodnocovanie  $K_I$  a  $J$ -integrálu (viď. napr. [33]).

#### Faktor intenzity napätia

Vzťah pre faktor intenzity napätia vo vzorke s trhlinou namáhanej ťahom je podľa príručky [26] rovný:

$$K_I = \sigma_{nom} \sqrt{\pi(R-r)} f\left(\frac{r}{R}\right), \quad (4.23)$$

kde  $R$  je polomer prierezu tyče v mieste bez trhliny,  $r$  je minimálny polomer prierezu tyče v mieste s trhlinou a:

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{\pi r^2} \quad (4.24)$$

a:

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{R} + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 0.363 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + 0.731 \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right). \quad (4.25)$$

#### $J$ -integrál

Analytické vyhodnocovanie  $J$ -integrálu vyžaduje záznam pôsobiacej sily a posunutia, ktoré spôsobila. Pre ich získanie je potrebné vykonať experiment alebo ich vyhodnotiť pomocou výpočtového modelovania.

Elastická časť  $J$ -integrálu  $J_{el}$  sa určí priamo z faktoru intenzity napätia:

$$J_{el} = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (4.26)$$



kde

$$E' = \begin{cases} E & \text{pre rovinnú napätosť} \\ E/(1 - \mu^2) & \text{pre rovinnú deformáciu.} \end{cases} \quad (4.27)$$

Plastická časť  $J$ -integrálu  $J_{pl}$  má pre materiál popísaný R-O vzťahom tvar [33]:

$$J_{pl} = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{2n-1}{n+1} F u_{pl}, \quad (4.28)$$

kde  $n$  je exponent deformačného spevnenia v R-O vzťahu,  $F$  je pôsobiaca sila a  $u_{pl}$  je plastický posuv v mieste pôsobenia sily v dôsledku prítomnosti trhliny. Celková hodnota  $J$ -integrálu je súčtom elastickej a plastickej časti.

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad (4.29)$$

## 4.7. Lomová deformácia vzorky s trhlinou

Možnosťou určiť lomovú deformáciu pre vzorku s trhlinou sa zaoberal Pokluda a Šandera [23]. Konštatujú, že v prípade vysokopevných ocelí a zliatin hliníku dochádza pred nestabilným šírením trhliny k tvárnemu poškodeniu. Kvôli vysokej hodnote triaxiality v plastickej oblasti pred čelom trhliny dochádza k výraznému rastu dutín. Takmer všetka energia dodávaná vonkajšími silami a elasticou relaxáciou je spotrebovaná v plastickej zóne behom tvárneho porušovania predchádzajúceho nestabilnému šíreniu trhliny. To je možné zapísať vzťahom pre kritickú hodnotu hnacej sily trhliny [23]:

$$G_{IC} = 2\delta \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon^{pl}) d\varepsilon^{pl}, \quad (4.30)$$

kde sa pre šírku plastickej zóny v materiáli popísanom R-O vzťahom použije približný vzťah [34]:

$$\delta = Bn^2, \quad (4.31)$$

kde  $B \approx 0,025$  m a  $n$  je exponent deformačného spevnenia z R-O vzťahu. Následne sa dá na základe porovnania energií získať vzťah medzi lomovou deformáciou a lomovou húževnatosťou, kde sa lomová húževnatosť získa pomocou vzťahu:

$$K_{IC} = \left[ \frac{2KBE\varepsilon_f^{n+1}}{(1-\mu^2)(n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} n, \quad (4.32)$$

kde  $K$  je koeficient deformačného spevnenia z R-O vzťahu,  $E$  je Youngov modul pružnosti a  $\mu$  Poissonov pomer.

Pokiaľ je známa hodnota lomovej húževnatosti je možné vyjadriť  $\varepsilon_f$  vzťahom:

$$\varepsilon_f = \sqrt[n+1]{\left(\frac{K_{IC}}{n}\right)^2 \frac{(1-\mu^2)(n+1)}{2KBE}}. \quad (4.33)$$



## 5. Výpočtový model

Výpočtový model má viesť k riešeniu skúmaného problému. Janíček [35] rozdeľuje každý riešený problém na niekoľko častí. Toto rozdelenie umožní riešenie na vyššej úrovni. V prvom rade je potrebné určiť si cieľ riešenia, následne vytvoriť systém podstatných veličín a na jeho základe zostaviť model.

### 5.1. Cieľ riešenia numerického výpočtu

Ako bolo popísané v rešeršnej časti práce, zistenie závislosti lomovej deformácie na triaxialite je uskutočňované v oblasti vysokých triaxialít, kde sa očakáva dutinový mechanizmus, ťahovými skúškami vzoriek s rôznym polomerom vrubu.

Z experimentu je však možné získať len obmedzený rozsah potrebných veličín popisujúcich správanie materiálu. Preto musí byť doplnený numerickou simuláciou, ktorá umožňuje podrobnejší pohľad na rozloženie poľa napätí a deformácie.

Cieľom riešenia je vytvorenie výpočtového modelu pre hladkú vzorku, vzorku s vrubom a vzorku s obvodovou trhlinou. Výsledky z modelu budú verifikované pomocou experimentu. Následne budú vyhodnotené veličiny, ktoré nie je možné pomocou experimentu zmerať, a to triaxialita a redukované plastické pretvorenie. Na základe týchto veličín bude zostavený lomový diagram pre skúmaný materiál.

Údaje z neho budú využité pre posúdenie telesa s trhlinou a porovnané s prístupom klasickej lomovej mechaniky.

### 5.2. Systém podstatných veličín

Zo všetkých vlastností a veličín popisujúcich skúmaný problém, teda vykonávaný experiment, je podľa Janíčka potrebné vybrať tie, ktoré sú pre jeho riešenie podstatné [35]. Tieto veličiny tvoria systém podstatných veličín. Ten sa dá rozdeliť na podmnožiny, ktoré popisujú jednotlivé vlastnosti entity.

#### 5.2.1. Popis experimentu

Ťahové skúšky boli vykonávané na univerzálnom skúšobnom stroji Zwick/Roell s možnou maximálnou silou 50 kN. Ku vzorkám boli pripravené extenzometre, pomocou ktorých sa merala deformácia. K dispozícii sú teda informácie o záťažnej sile a deformácii v smere osi vzorky.

K meraniu boli pripravené vzorky pre štandardnú ťahovú skúšku a vzorky s vrubom z ocele OCHN3MFA s chemickým zložením uvedeným v tabuľke 5.1 upravené kalením (870 °C po dobu 2,5 hodiny, ochladenie na 300 °C za 3 minúty vo vode a následne v oleji), popúšťaním (480 °C po dobu 6 hodín a potom 420 °C po dobu 6 hodín) a žíhaním (420 °C po dobu 6 hodín). Vzorky rady Z už neboli ďalej upravované vzorky označené LP boli následne popúšťané pri teplote 250 °C po dobu 2 hodín.

Ťahové skúšky mali byť realizované za troch rôznych teplôt: 22 °C, 0 °C a -80 °C a rôznych tepelných úprav materiálu. Zmena teploty a spracovanie materiálu významne ovplyvňujú materiálové charakteristiky. Z dôvodu nepriaznivej epidemiologickej situácie

## 5.2. SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČÍN

došlo k uzatvoreniu experimentálneho laboratória a nebolo možné realizovať všetky potrebné ťahové skúšky. Boli uskutočnené ťahové skúšky hladkých vzoriek pre teploty 0 °C a -80 °C a pre 2 rôzne tepelné úpravy. Experiment so vzorkou s vrubom bol vykonaný len pre teplotu -80 °C a vzorky rady Z. Preto bolo možné vytvoriť lomový diagram len pre tento konkrétny prípad.

Vzorky boli pri skúškach upevnené do čelustí skúšobného stroja a boli aktivované ich pohybom. Rýchlosť pohybu čelustí bola konštantná a to 1 mm/min.

Tabuľka 5.1: Chemické zloženie oceli OCHN3MFA v hmotnostných %

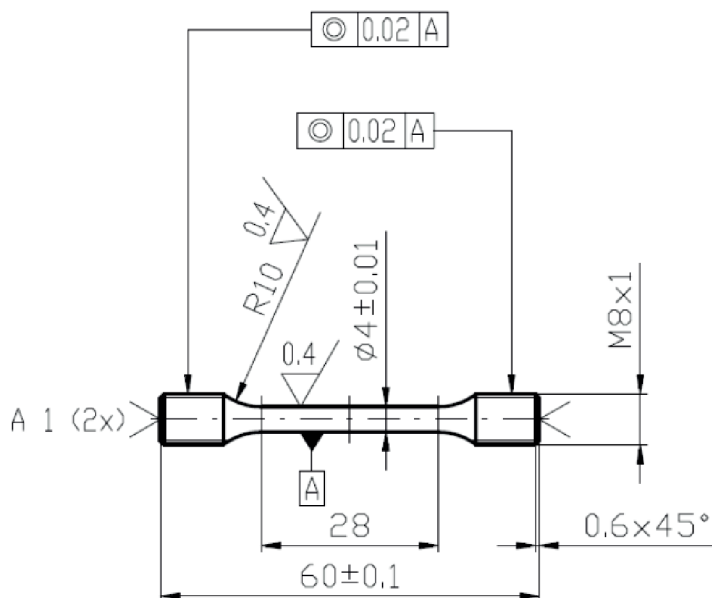
C	Mn	Si	Cr	Ni	Mo	V	P	S
0,4	0,3	0,32	1,19	3,27	0,52	0,14	0,01	0,01

### 5.2.2. Geometria entity

Vzorky musia byť v skúšobnom stroji určitým spôsobom uchytené. Uchytenie je realizované pomocou závitových hláv. Hlavy majú zväčšený prierez oproti meranej časti vzorky, čím sa zaistí, že lom prebehne v meranej časti vzorky. V jednej zo závitových hláv sa taktiež nachádza strediaci otvor bez poistného kužela.

#### Hladká vzorka

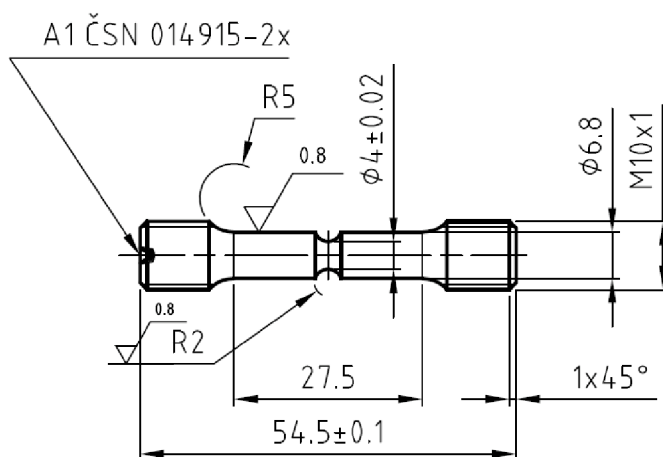
Hladká vzorka sa skladá z dvoch prvkov. Prvým sú závitové hlavy umiestnené na jej koncoch a druhým je hladké telo. Všetky dôležité procesy sa odohrávajú na hladkej časti, závitové hlavy slúžia na uchytenie vzorky a jej následnú aktiváciu. Spôsob uchytenia nie je pre riešenie problému podstatný.



Obr. 5.1: Geometria hladkej vzorky

### Vzorka s vrubom

Vzorka s vrubom sa skladá z troch prvkov. Sú nimi závitové hlavy na jej koncoch, ktoré prechádzajú do hladkej časti, tvoriacej druhý prvok. Posledným prvkom je vrub vytvorený uprostred vzorky, najmenší priemer v mieste vrubu zodpovedá priemeru hladkého skúšobného telesa. V tomto prípade sa očakáva maximálna triaxialita a vznik lomu pod vrubom uprostred vzorky. Opäť platí, že spôsob uchytenia do čelustí nie je pre riešenie podstatný.



Obr. 5.2: Geometria vzorky s vrubom

### Vzorka s trhlinou

K vzorke s trhlinou nie je realizovaný experiment. Výpočtový model uvažuje, že priemer takejto vzorky zodpovedá priemeru vzorky s vrubom a trhlina vytvára uprostred vzorky oslabený prierez s rovnakým priemerom ako v prípade vzorky s vrubom v mieste vrubu. Jedná sa v podstate o špeciálny prípad vzorky s vrubom, kde sa rádius vrubu limitne približuje k nulovej hodnote.

#### 5.2.3. Materiálové vlastnosti entity

Kalibrácia krivky napätie - pretvorenie bola uskutočnená na základe skúšok hladkých vzoriek. Kalibrácia pozostávala z troch krokov. Najprv bola získaná závislosť zmluvné napätie - zmluvné pretvorenie  $\sigma(\varepsilon)$  z krivky sila - posuv  $F(u)$  zaznamenávanej počas skúšky. Druhým krokom bolo stanovovanie krivky skutočné napätie - skutočné pretvorenie  $\sigma_{tr}(\varepsilon_{tr})$  podľa vzťahov (2.37) a (2.38). Pre ďalší výpočet je možné uvažovať len dáta pred vytvorením křčku, pretože tento prepočet je platný len po bod plastickej nestability. Tomuto bodu zodpovedá približne extrém na krivke  $F(u)$ , respektíve  $\sigma(\varepsilon)$ . Posledným krokom je preloženie takto získanej krivky R-O vzťahom (2.40).

## 5.2. SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČÍN

Z lineárnej oblasti je metódou sečnice získaný modul pružnosti v ťahu  $E$ , volený je bod na konci lineárnej oblasti. Následne je určené plastické pretvorenie:

$$\varepsilon_{tr}^{pl} = \varepsilon_{tr} - \frac{\sigma_{tr}}{E}. \quad (5.1)$$

Závislosť  $\log(\varepsilon_{tr}^{pl}) - \log(\sigma_{tr})$  je preložená priamkou:

$$y = ax + b \quad (5.2)$$

pomocou *Curve Fitting Toolboxu* v MATLABe využitím funkcie *fit*, ktorá využíva metódu najmenších štvorcov.

Porovnaním rovnice priamky (5.2) s logaritmom Hollomonovho vzťahu:

$$\log(\varepsilon_{tr}^{pl}) = n \log(\sigma_{tr}) + \log(K) \quad (5.3)$$

sa získajú hodnoty  $K$  a  $n$ :

$$\begin{aligned} n &= a \\ K &= \exp\left(\frac{b}{n}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

R-O vzťah je následne extrapolovaný aj za medzu pevnosti pre získanie aproximácie krivky  $\sigma_{tr}(\varepsilon_{tr})$ .

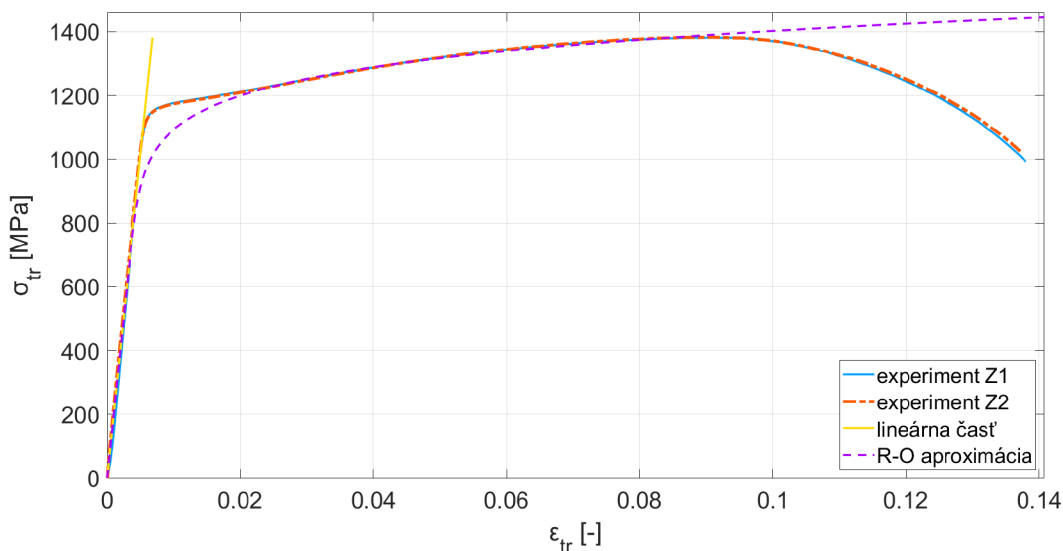
Pokiaľ by bola požadovaná presnejšia aproximácia oblasti za medzou pevnosti, sú možné dve metódy. Ak je k dispozícii priebežné meranie priečného zúženia, je použiteľná Bridgmanova alebo Mironeho korekcia. Druhou metódou je metóda pokus-omyl, kde je krivka po medzi pevnosti upravovaná tak, aby krivka získaná z numerickej simulácie zodpovedala nameranej krivke  $\sigma(\varepsilon)$ . V skúmanom prípade nebolo využité žiadne spresnenie krivky, ale len R-O vzťah.

V tabuľke 5.2 sa nachádzajú materiálové charakteristiky materiálov LP2 ( $-80$  °C) a LP3 ( $0$  °C), ktoré sú z rady vzoriek LP. Okrem toho bol ešte posudzovaný materiál Z ( $-80$  °C). Na obr. 5.3 je spracovaný záznam dvoch ťahových skúšok hladkých vzoriek spoločne s R-O aproximáciou pre materiál Z.

Poissonov pomer je volený s ohľadom na klasické vlastnosti ocelí.

Tabuľka 5.2: Materiálové charakteristiky oceli OCHN3MFA

označenie materiálu		LP2	LP3	Z	
materiálová charakteristika	značka	hodnota			jednotka
Youngov modul pružnosti v ťahu	$E$	248 088	238 161	203 074	[MPa]
Poissonov pomer	$\mu$	0,3	0,3	0,3	[-]
koefficient deformačného spevnenia	$K$	1887,5	1720,8	1707,5	[MPa]
exponent deformačného spevnenia	$n$	0,045	0,0372	0,0829	[-]



Obr. 5.3: Záznamy z ťahových skúšok hladkých vzoriek Z spoločne s R-O aproximáciou

Okrem ťahovej skúšky bola uskutočnená aj skúška pre zistenie lomovej húževnatosti. Materiál Z vykazoval hodnotu:

$$K_{IC} = 49,23 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}.$$

Pre stanovenie lomovej húževnatosti boli použité skúšobné telesá Charpy s únavovou trhlinou označované ako PCVN (*"Pre-cracked Charpy V-Notch Impact Test"*). Skúšobné telesá PCVN mali tvar hranolov o vonkajších rozmeroch 10 mm x 10 mm x 55 mm. Rovina šírenia trhliny bola kolmá k ose hranolov. Príprava únavovej trhliny bola uskutočnená v zhode s normou ČSN EN ISO 12737. K skúškam bol použitý stroj Zwick/Roell Z50 vybavený kryogénnou komorou. Skúšky boli realizované pri rýchlosti zaťažovania 1 mm/min. V priebehu skúšky bola snímaná závislosť sily  $F$  na priemestnení sily  $u$ . Ochladenie skúšobných telies bolo prevedené v liehovom kúpeli s nútenou cirkuláciou ochladzovacom kvapalným dusíkom, po dosiahnutí predpísanej teploty boli telesá temperované na teplote skúšky po dobu 15 minút. Čas medzi vytiahnutím z kúpeľa a dopadom baranu kladiva bol kratší ako 3 s.

#### 5.2.4. Vyhodnotenie experimentu

Počas experimentu je vyhodnocovaná deformácia v smere zaťažovania pomocou extenzomerov. Deformácia je značná a je nutné uvažovať veľké posuvy a pretvorenia. Z tejto deformácie je možné určiť zmluvné aj skutočné pretvorenie až do medze pevnosti.

Sila, ktorou stroj pôsobí na vzorku a deformuje ju, je takisto zaznamenávaná a umožňuje vyhodnotiť zmluvné a skutočné napätia až do medze pevnosti.

Hodnoty pretvorenia a napätí môžu byť vyhodnotené aj po medzi pevnosti, nie je ich však možné využiť pri tvorbe modelu materiálu. Naopak sú veľmi vhodné ako kritérium na ukončenie výpočtu.

Pri dosiahnutí medze klzu sa tvorí makroplastická deformácia, ktorej dôsledkom je trvalá zmena geometrickej konfigurácie vzorky. Zároveň sa výrazne mení sklon krivky a materiál spevňuje. V prípade vzorky bez vrubu pri dosiahnutí medze pevnosti vzniká krčok



### 5.3. MODELOVÝ OBJEKT

a deformácia už nie je rovnomerná. Celková sila potrebná na deformáciu vzorky klesá, ale kvôli zmenšovaniu prierečného prierezu vzorky skutočné napätie narastá. Po ďalšom zatažovaní v dôsledku vzniku dutín dochádza k tvárnemu lomu.

## 5.3. Modelový objekt

Nasledujúcim krokom pre vyriešenie problému je podľa Janíčka [35] vytvorenie modelového objektu. Tento model bol zostavený pomocou výpočtového modelovania využitím MKP. Samotný model pozostáva z viacerých dielčích modelov rešpektujúcich systémový prístup [35].

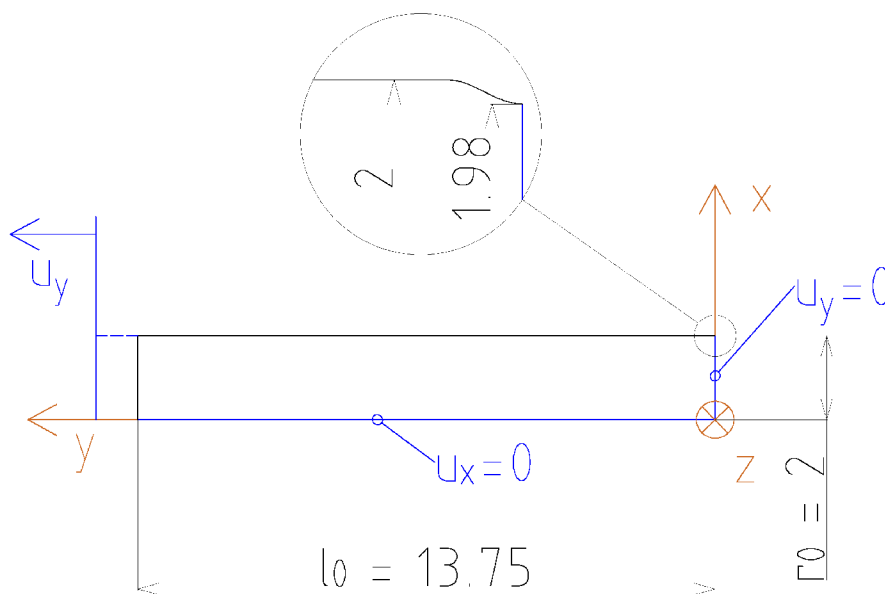
### 5.3.1. Model geometrie

Model geometrie pre všetky uvažované vzorky využíva osovú symetriu problému, čím sa výrazne redukuje počet potrebných prvkov a tým aj výpočtový čas. Zároveň je využitá aj symetria vzhľadom k rovine  $x - z$  a je modelovaná len polovica vzorky.

#### Hladká vzorka

Závitové hlavy nie sú modelované, pretože pre riešenie problému nie sú podstatné a podľa princípu Saint-Venant môžu byť nahradené deformačnou okrajovou podmienkou (OP) predpísanou na hladkú časť vzorky.

V prípade tvorby modelu geometrie hladkej vzorky pomocou MKP môže krčok vzniknúť na ľubovlnom mieste medzi čelustami. Z tohto dôvodu je v strede dĺžky vzorky namodelovaný mierne zmenšený priemer (1,98 mm), čím sa toto miesto oslabí a krčok vznikne priamo tu. Pre prechod z väčšieho priemeru do menšieho bola zvolená harmonická funkcia, ktorá obmedzí koncentráciu napätia.

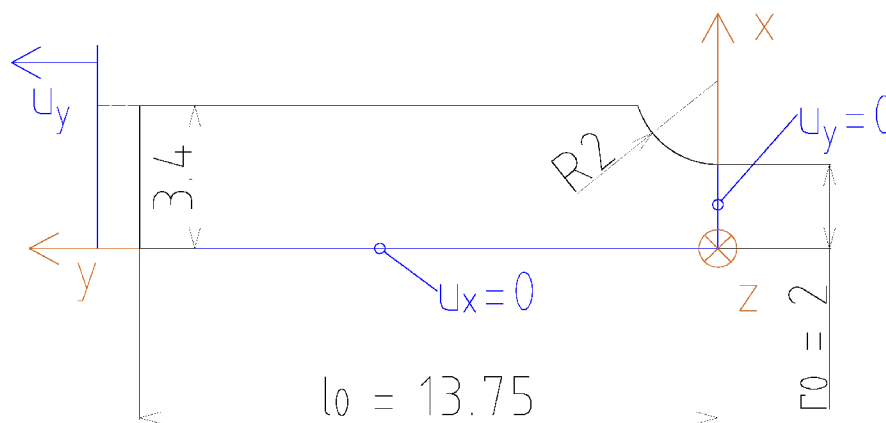


Obr. 5.4: Model geometrie a OP hladkej vzorky



**Vzorka s vrubom**

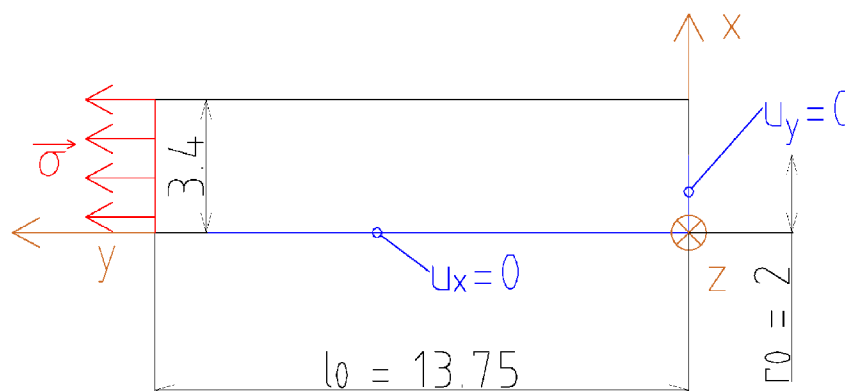
V prípade vzorky s vrubom nebude vznikáť kĺčok, lom vznikne v mieste maximálnej triaxiality v strede vzorky pod vrubom. Z rovnakých dôvodov ako pri hladkej vzorke nie sú modelované závitové hlavy a okrajové podmienky sú predpísané priamo do miesta prechodu hladkej časti do závitovej hlavy.



Obr. 5.5: Model geometrie a OP vzorky s vrubom

**Vzorka s trhlinou**

Geometria vzorky s trhlinou je relatívne jednoduchá, rozdiel medzi hladkou vzorkou a vzorkou s trhlinou je v okrajových podmienkach a rozmeroch. Vzorka s trhlinou bude taktiež vyžadovať špeciálne upraviť sieť konečných prvkov.



Obr. 5.6: Model geometrie a OP vzorky s trhlinou

### 5.3. MODELOVÝ OBJEKT

#### 5.3.2. Model okrajových podmienok a zaťaženia

Axisymetria je realizovaná pomocou predpísania nulových posuvov  $u_x$  na hrane totožnej s osou symetrie vzorky. Symetria vzhľadom k rovine  $x - z$  je realizovaná zamedzením posuvov  $u_y$ .

Pohyb čelustí skúšobného stroja je modelovaný predpísaním posuvu  $u_y$  na vrchnú hranu vzorky. Tento posuv narastá v niekoľkých záťažových krokoch, čo umožňuje lepšiu kontrolu konvergencie. V prípade hladkej vzorky je nutné zvoliť dostatočne jemný krok v okolí bodu plastickej nestability.

Výpočet je pre celistvé telesá ukončený, keď pretvorenie určené z posuvu na vrchnej hrane dosiahne pretvorenie zmerané extenzometrami, pri ktorom došlo k lomu vzorky. Pre teleso s trhlinou je výpočet ukončený, keď  $K_I$  dosiahne svoju kritickú hodnotu  $K_{IC}$ . Keďže faktor intenzity napätia závisí v LELM na nominálnom napätí je model telesa s trhlinou zaťažovaný silovo, čo umožní lepšiu kontrolu hodnoty  $K_I$ .

#### 5.3.3. Model materiálu

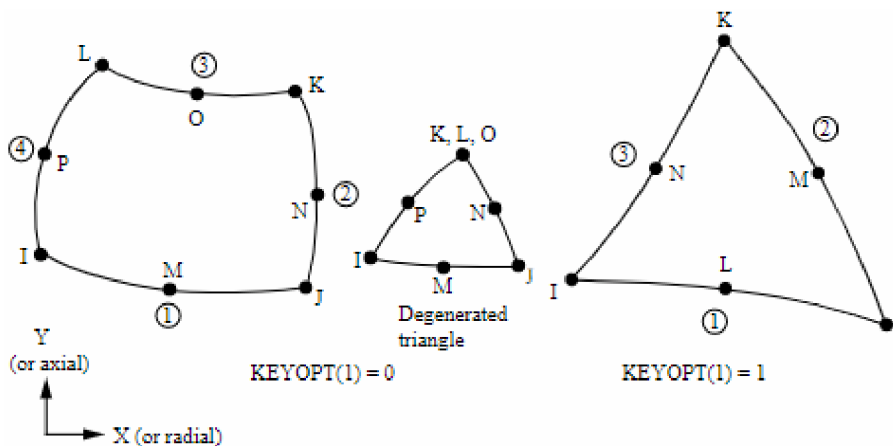
V programe ANSYS je model materiálu rozdelený na lineárnu a nelineárnu časť. Z tabuľky 5.2 sú získané všetky potrebné hodnoty.

Elastická časť je popísaná ako izotropná a lineárna, je potrebné definovať Youngov modul pružnosti v ťahu a Poissonov pomer.

Pre popis plastickeho spevnenia materiálu je použitý R-O vzťah. Plasticke vlastnosti materiálu sú zadané pomocou multilineárnej závislosti pozostávajúcej z 25 rovnomerne rozložených bodov. Každý bod je zadaný hodnotou skutočného pretvorenia a skutočného napätia.

#### 5.3.4. Typ elementu siete

Použitým typom prvku je rovinný kvadratický prvok PLANE183, ktorý môže mať 8 uzlov alebo 6 uzlov vo svojej degenerovanej podobe. V každom uzle má dva stupne voľnosti zodpovedajúce dvom posuvom ( $u_x, u_y$ ). Využíva sa na riešenie rovinných úloh (rovinná napätosť, rovinná deformácia) alebo axisymetrických úloh [30].



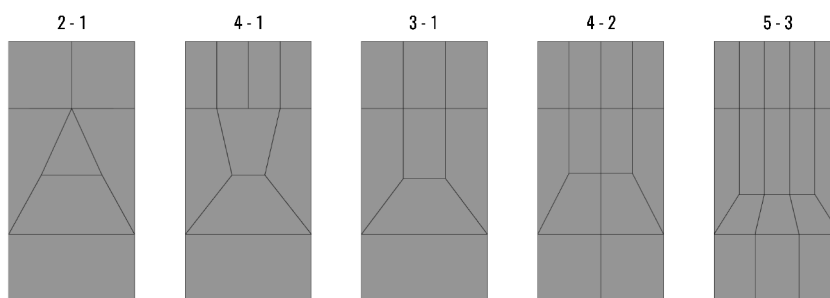
Obr. 5.7: Geometria prvku PLANE183 [30]

### 5.3.5. Sieť konečných prvkov

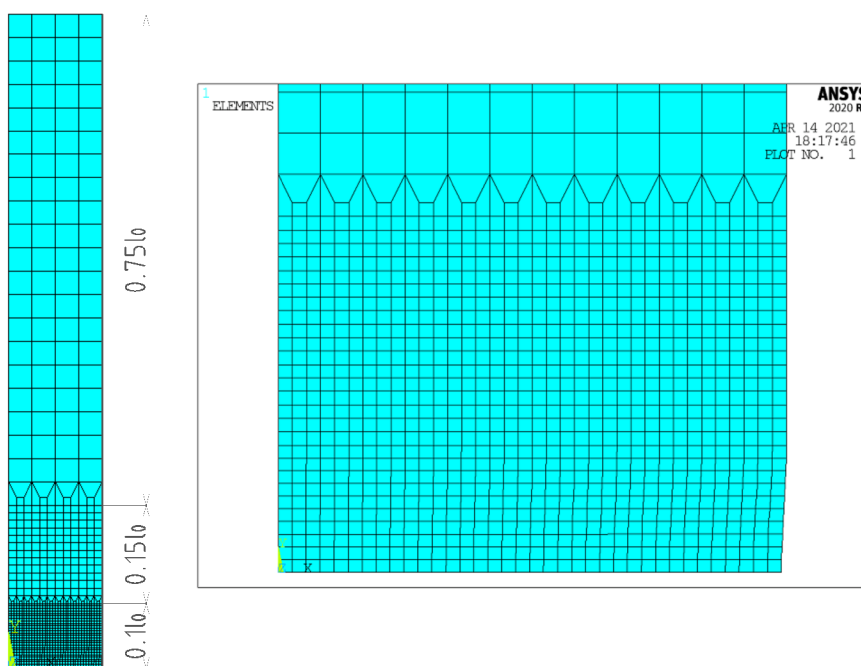
Model hladkej a vrubovanej vzorky je tvorený všeobecnými štvoruholníkmi. Program ANSYS je schopný tvoriť mapovanú sieť na takýchto útvaroch, dokonca aj pokiaľ je jedna zo strán tvorená časťou kruhu. Na väčšine plôch je možné vytvoriť mapovanú sieť. V oblasti, kde sa očakáva vznik lomu, teda uprostred vzoriek, by mala byť sieť dostatočne jemná. Naopak vo väčšej vzdialenosti od stredu vzorky môže byť sieť oveľa hrubšia.

Zväčšovať elementy v smere osi  $y$  nie je problémom. Zväčšovanie elementov v smere osi  $x$  pri zachovaní mapovanej siete na väčšine modelu je však komplikované. Je potrebné vytvoriť oblasti, kde sa bude meniť veľkosť prvkov.

Z topologického hľadiska existujú určité prechody, ktorými je vhodné vytvoriť redukciu počtu prvkov (obr. 5.8). Niektoré programy využívajúce MKP, ako napr. ABAQUS, a taktiež niektoré rozšírenia, ako napr. HyperMesh alebo FEACrack, dokážu takéto prechody siete tvoriť automaticky. ANSYS túto možnosť neponúka, preto bolo autorom vytvorené makro schopné vytvoriť prechod 3-1 (na obr. 5.8).

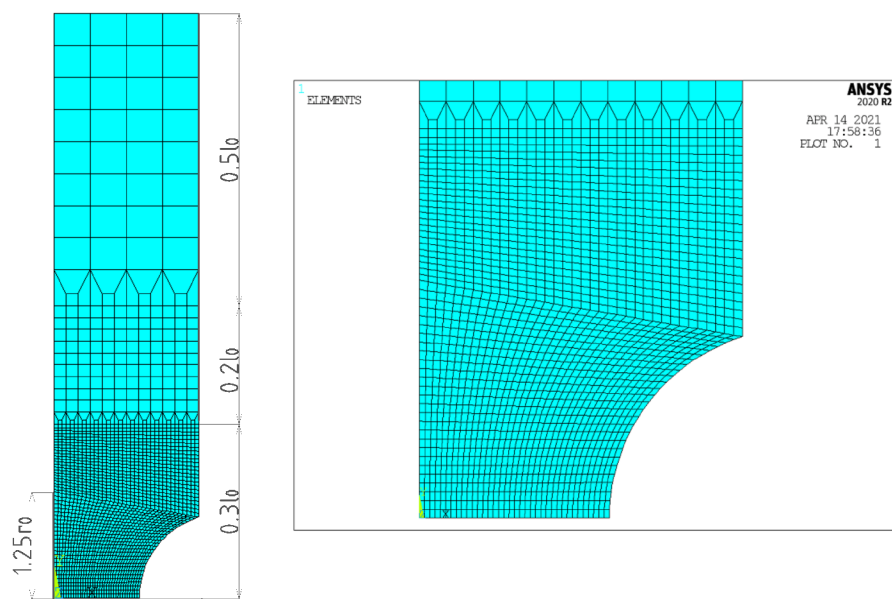


Obr. 5.8: Prechody vhodné na redukciu počtu prvkov [36]

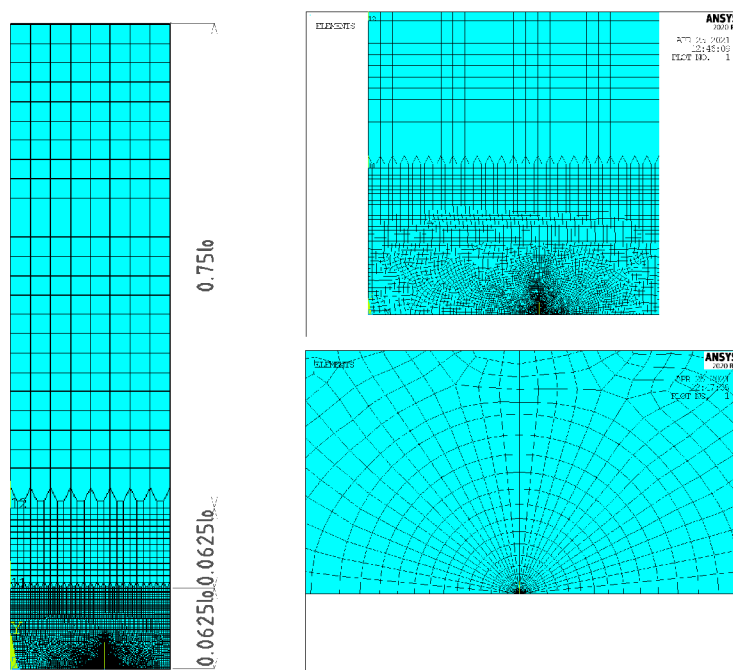


Obr. 5.9: Sieť konečných prvkov hladkej vzorky s detailom okolia stredu vzorky

### 5.3. MODELOVÝ OBJEKT



Obr. 5.10: Sieť konečných prvkov vrubovanej vzorky s detailom okolia stredu vzorky



Obr. 5.11: Sieť konečných prvkov vzorky s trhlinou s detailom čela trhliny

Pre model telesa s trhlinou bola vytvorená sieť vhodná pre elastoplastické riešenie - s degenerovanými prvkami so stredovými uzlami v polovici prvku. V tangenciálnom smere sa nachádza 32 prvkov, čo zodpovedá približne jednému prvku na  $5^\circ$ . V radiálnom smere sa nachádza 13 radov prvkov tvoriacich sústredné kruhy.

### 5.3.6. Vplyv veľkosti prvku na riešenie

Veľkosť prvku má vplyv na všetky skúmané veličiny. Úloha s celistvými telesami bola preto spočítaná pre rôzne veľkosti prvku a bola vyhodnotená triaxialita v okamihu lomu a lomová deformácia vzoriek Z1 a ZV2. V tomto momente prešli vzorky výraznou plasti-  
záciou a na hladkej vzorke sa vytvoril krčok. Pri tvorbe siete je potrebné myslieť na to, že by mala byť schopná zachytiť tieto efekty.

V tabuľke 5.3 je uvedený počet prvkov po najmenšom priemere, kde sa očakáva vznik lomu. Pre každú veľkosť prvku bola vyhodnotená maximálna triaxialita a lomová deformácia. Tabuľka ďalej uvádza relatívnu zmenu pri zdvojnásobení počtu prvkov.

Už pri 18 prvkoch po priereze dáva model veľmi presné výsledky, zmena oproti 36 prvkom je menšia ako 1%. Napriek tomu bolo zvolených 36 prvkov. Rýchlosť výpočtu nie je veľmi ovplyvnená a tento počet prvkov lepšie zachytí gradient napätia a deformácie zo stredu vzorky k povrchu.

Tabuľka 5.3: Vplyv veľkosti prvku na riešenie - hladká vzorka a vzorka s vrubom

počet prvkov	hladká vzorka				vzorka s vrubom			
	$\eta$	$\Delta\eta / \eta$	$\varepsilon_f$	$\Delta\varepsilon_f / \varepsilon_f$	$\eta$	$\Delta\eta / \eta$	$\varepsilon_f$	$\Delta\varepsilon_f / \varepsilon_f$
18	0,8735	0,14%	0,9632	0,16%	1,1252	0,04%	0,2918	0,24%
<b>36</b>	0,8747	0,03%	0,9647	0,03%	1,1256	0,01%	0,2925	0,06%
72	0,8750	-	0,9650	-	1,1257	-	0,2926	-

Podobný prístup bol zvolený aj pri telese s trhlinou. Z numerického modelu bola vyhodnocovaná len triaxialita, lomová deformácia bola určená metódou popísanou v sekcii 4.7. V tomto prípade je v tabuľke uvedená veľkosť degenerovaných prvkov okolo čela trhliny ako podiel celkovej dĺžky trhliny. Odporúča sa, aby táto veľkosť bola menšia ako  $a/8$ . V prípade, že je cieľom vyhodnocovanie napätí, mala by byť oveľa menšia.

Medzi triaxialitou a lomovou deformáciou sa predpokladá exponenciálny vzťah, takže malá odchýlka v triaxialite môže viesť k veľkým rozdielom lomových deformácií. Z tohoto dôvodu je vhodné zvoliť veľkosť, pri zmenšovaní ktorej sa hodnota triaxiality nebude veľmi meniť. Odchýlky sa pohybujú v jednotkách percent, takáto odchýlka je akceptovateľná a zvolená bola veľkosť prvku  $a/512$ .

Tabuľka 5.4: Vplyv veľkosti prvku na riešenie - vzorka s trhlinou

veľkosť prvku	$\eta$	$\Delta\eta/\eta$
$a/128$	2,2425	1,87 %
$a/256$	2,2845	-1,88 %
<b><math>a/512</math></b>	2,2415	1,43 %
$a/1024$	2,2736	-

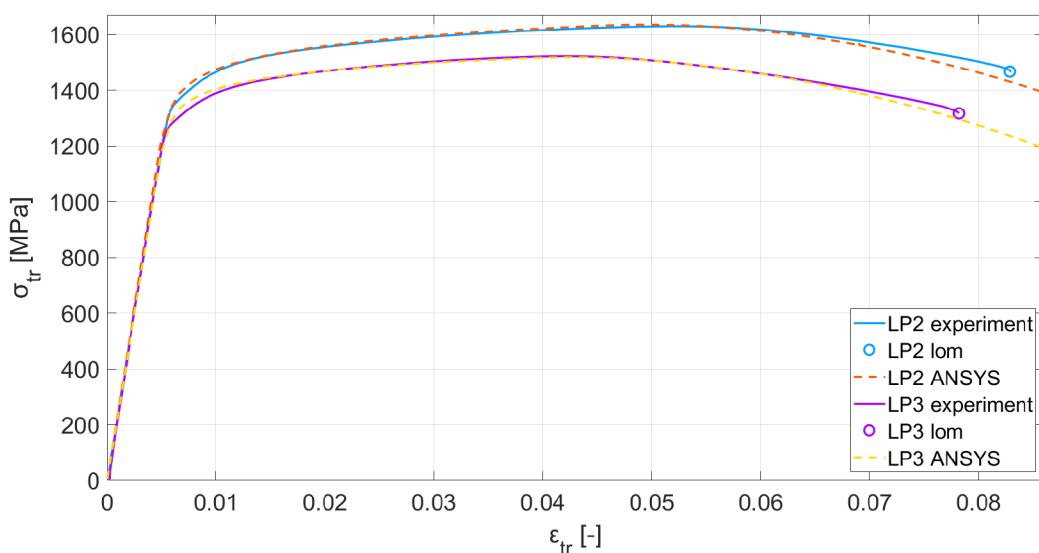


## 6. Výsledky z výpočtového modelu

Zostavený model je potrebné verifikovať porovnaním výsledkov s experimentom, prípadne s analytickým prístupom. V prípade zhody je model prehlásený za vhodný pre riešenie problému a bude zostavený lomový diagram a na jeho základe posúdené teleso s trhlinou.

### 6.1. Porovnanie s experimentom

Výsledky získané výpočtovým modelovaním sú porovnané s experimentom. Na obr. 6.1 sú vyhodnotené vzorky LP2 a LP3, k nim nebolo možné realizovať experiment so vzorkou s vrubom. Výpočet slúži na verifikáciu zostaveného modelu. Výsledky sú vo veľmi dobrej zhode s experimentom. Tu vyhodnotenie týchto skúšok končí.



Obr. 6.1: Porovnanie experimentu a výpočtového modelovania pre hladké vzorky LP2 a LP3

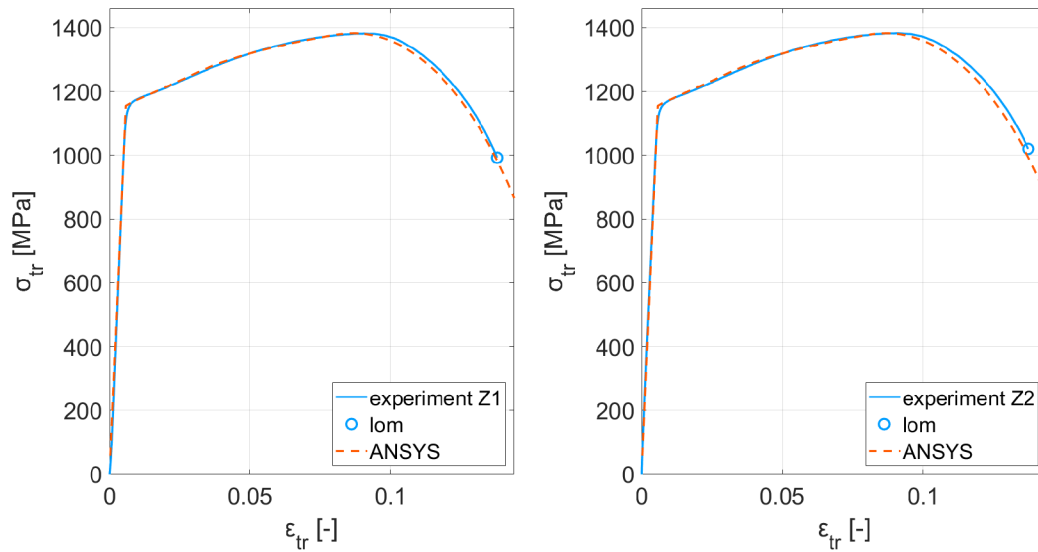
Ďalej boli na obr. 6.2 a 6.3 posúdené skúšky vzoriek Z1, Z2, ZV1 a ZV2. Zhoda kriviek  $\sigma_{tr} - \epsilon_{tr}$  medzi experimentálnymi a numerickými výsledkami je pre všetky vzorky okrem vzorky ZV1 až do medze pevnosti takmer perfektná, po medze pevnosti dochádza k miernym odchýlkam, ktoré sú však na inžinierskej úrovni zanedbateľné.

Pri vzorke ZV1 je veľký rozdiel hlavne v elastickej oblasti, čo je pravdepodobne spôsobené nepresnosťami pri vykonávaní experimentu.

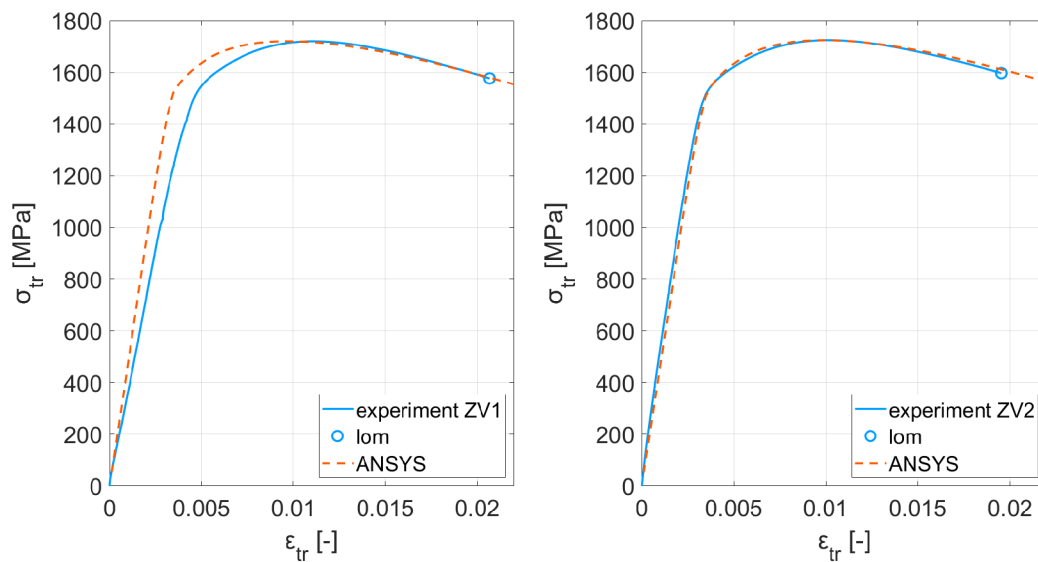
Je jasné, že zhoda kriviek  $\sigma_{tr} - \epsilon_{tr}$  nezaručuje zhodu v lokálnych hodnotách napätí a deformácie. Získanie správnej krivky je však podmienkou pre správnosť výpočtového modelu. Keďže takáto zhoda bola pri výpočtoch dosiahnutá, je rozumné očakávať, že aj lokálne hodnoty vyhodnotené zo simulácií s dostatočnou presnosťou zodpovedajú skutočným hodnotám.

Zo skúšok je určený okamih lomu podľa skutočného pretvorenia  $\epsilon_{tr}$  zmeraného extenzometrom.

## 6.1. POROVNANIE S EXPERIMENTOM



Obr. 6.2: Porovnanie experimentu a výpočtového modelovania pre hladké vzorky z materiálu Z



Obr. 6.3: Porovnanie experimentu a výpočtového modelovania pre vzorky s vrubom z materiálu Z

Pre jednotlivé vzorky Z1, resp. ZV1 a Z2, resp. ZV2 sú body lomu takmer totožné. Ďalej budú teda vyhodnotené polia skúmaných veličín v okamihu lomu pre vzorky Z2 a ZV2, pričom tieto s dostatočnou presnosťou popisujú polia skúmaných veličín v okamihu lomu vzoriek danej geometrie a materiálu.

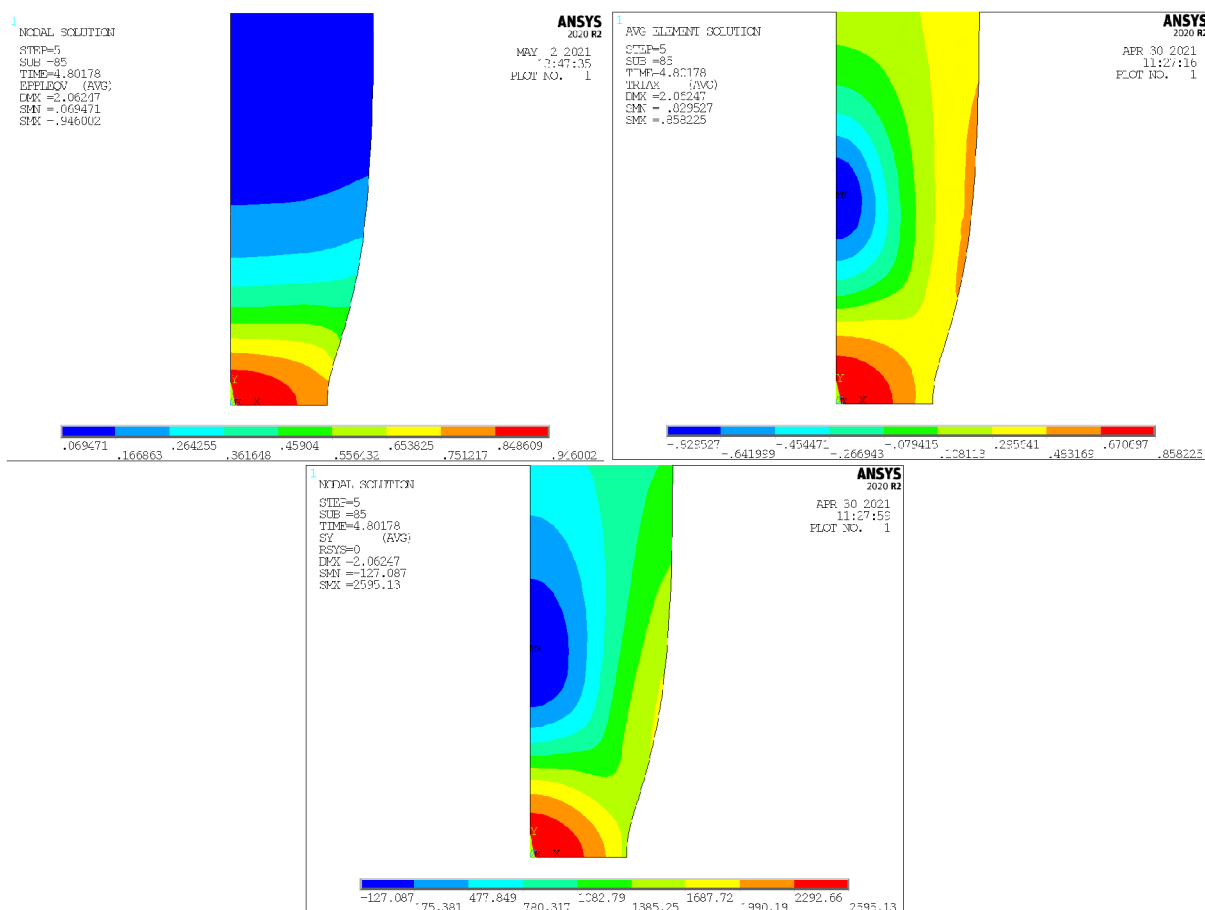


## 6.2. Pole napätia, deformácie a triaxiality

Konštrukcia lomového diagramu vychádza z redukovaného plastického pretvorenia a triaxiality napätia. Okrem týchto veličín je vyhodnotených aj pole najväčšieho normálového napätia - v smere zaťažovania vzorky, teda osi  $y$  (rešpektujúc súradnicový systém zavedený na obr. 5.4, 5.5 a 5.6).

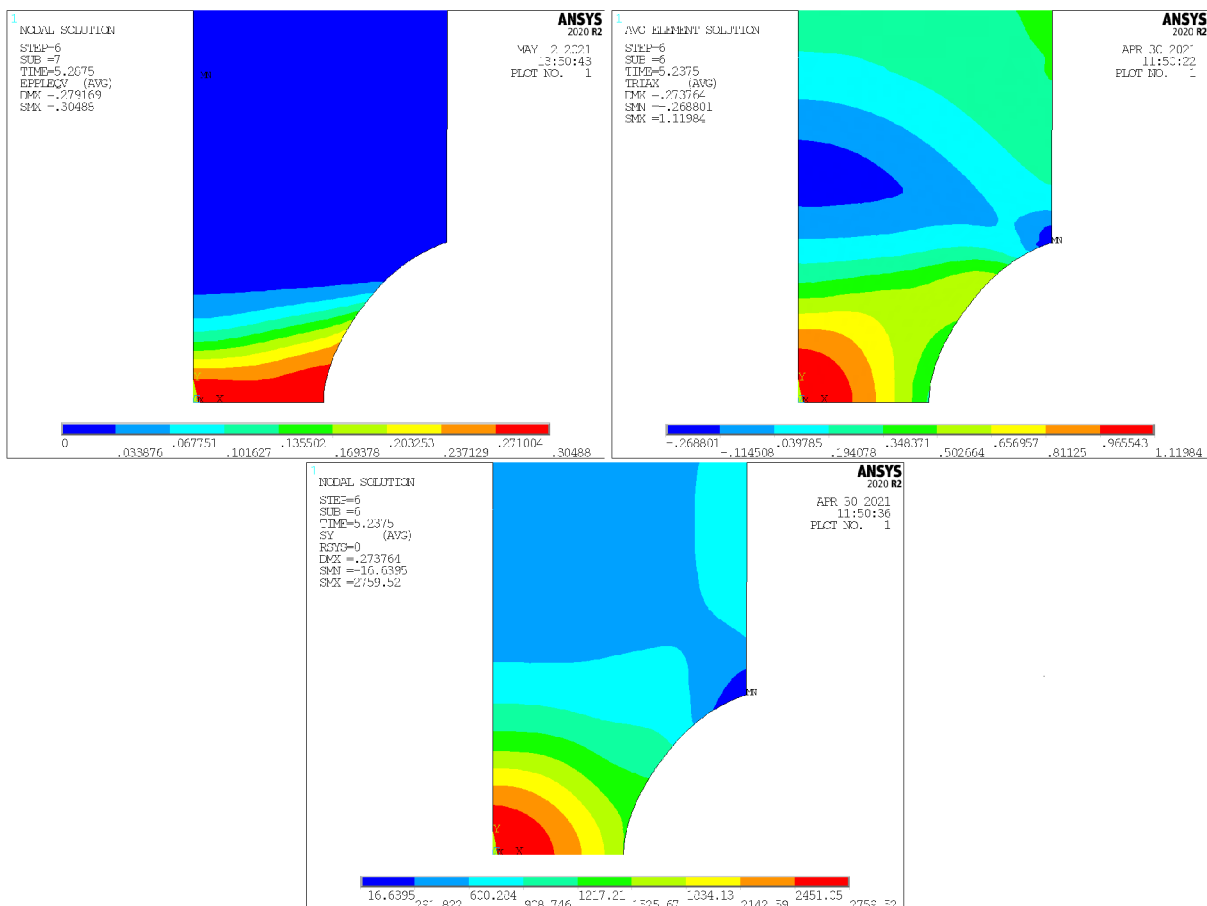
K poliam triaxiality zobrazeným na nasledujúcich obrázkoch je vhodné uviesť, že jej hodnota je vyhodnotená z priemerných hodnôt hydrostatického a redukovaného napätia na jednotlivých prvkoch a nejedná sa o hodnoty určené v uzloch siete. Pri zmešovaní veľkosti prvku, sa hodnoty určené z prvkov a z uzlov budú k sebe približovať. Pre konštrukciu lomového diagramu boli využité korektnejšie hodnoty z uzlov.

Na hladkej vzorke došlo pred lomom k vytvoreniu krčku. Maximálne napätie  $\sigma_{yy}$ , maximálne redukované plastické pretvorenie a maximálna triaxialita sa nachádzajú uprostred vzoriek Z2 aj ZV2. Tu sa očakáva vznik lomu a tieto hodnoty môžu byť použité do lomového diagramu.



Obr. 6.4: Pole redukovaného plastického pretvorenia  $\epsilon_{red}^{pl}$  (vľavo hore), triaxiality  $\eta$  (vpravo hore) a normálového napätia  $\sigma_{yy}$  v hladkej vzorke

## 6.2. POLE NAPÄTIA, DEFORMÁCIE A TRIAXIALITY



Obr. 6.5: Pole redukovaného plastického pretvorenia  $\varepsilon_{red}^{pl}$  (vľavo hore), triaxiality  $\eta$  (vpravo hore) a normálového napätia  $\sigma_{yy}$  vo vzorke s vrubom

Jednotlivé polia veličín pre teleso s trhlinou by mali byť vyhodnotené v okamihu, keď faktor intenzity napätia  $K_I$  dosiahne svoju kritickú hodnotu  $K_{IC} = 49,23 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Dosadením tejto hodnoty do rovnice (4.25) je možné určiť nominálne napätie:

$$\sigma_{nom} = 1346,5 \text{ MPa.}$$

Z tohoto napätia je prepočtom určené zaťaženie  $\sigma$ , ktorým je potrebné pôsobiť na vrchnú plochu vzorky, aby faktor intenzity napätia dosiahol svoju kritickú hodnotu:

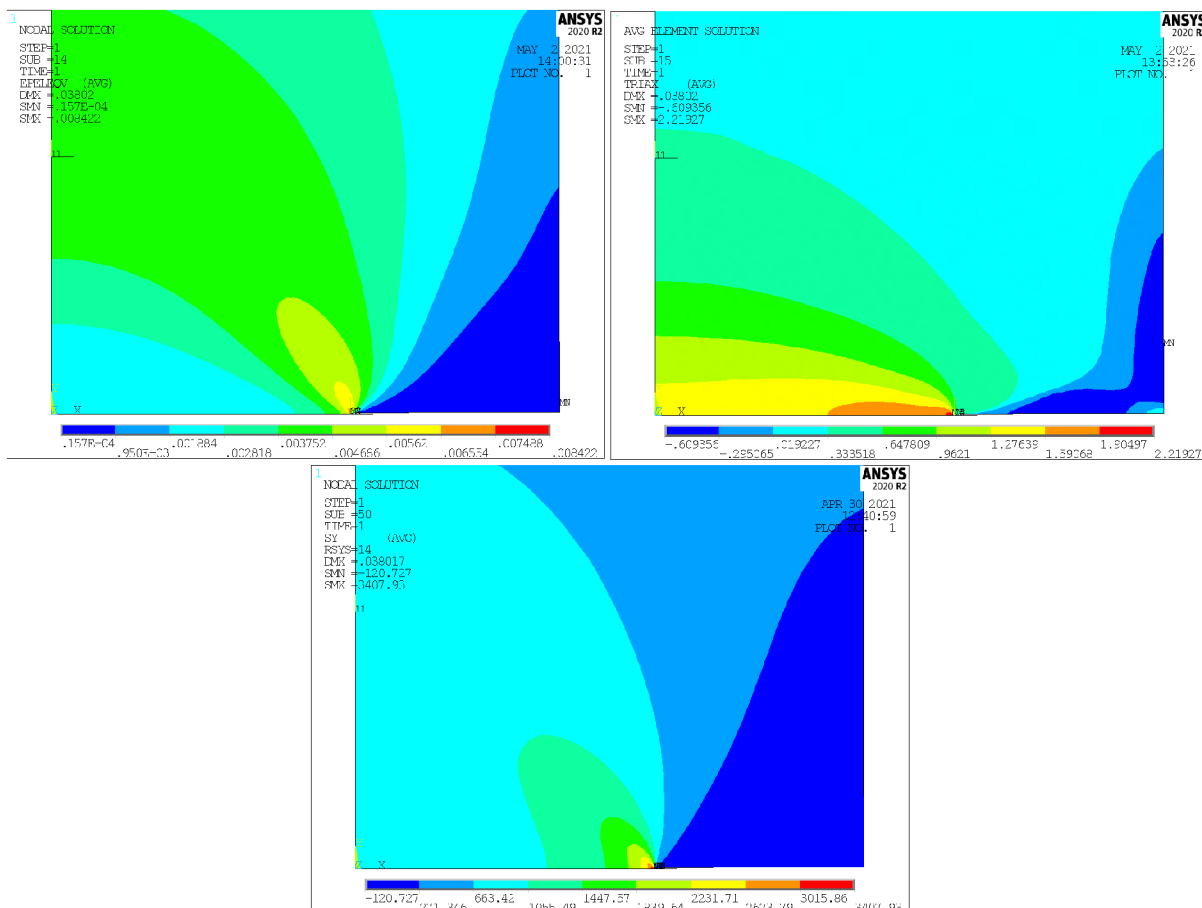
$$\sigma = \left(\frac{2}{3,4}\right)^2 \sigma_{nom} = 465,23 \text{ MPa.}$$

Pri tomto zaťažení faktor intenzity napätia prepočítaný podľa rovnice (4.26) z  $J$ -integrálu vyhodnoteného pomocou príkazu  $CINT$  dosiahol hodnotu  $K_I = 50,31 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Tieto dve hodnoty si veľmi dobre zodpovedajú. Pre toto zaťaženie boli vyhodnotené jednotlivé veličiny na obr. 6.6.

Teleso s trhlinou dosahuje oveľa vyššie hodnoty triaxiality ako telesá s rôznymi polermi vrubu ako je vidno na obr. 6.6. Dá sa teda očakávať, že pretvorenie, pri ktorom dôjde k lomu bude oveľa nižšie.

V mieste čela trhliny sa nachádza numerická singularita a pri zmenšovaní prvku narastá plastické pretvorenie nado všetky medze. Pre zostavenie lomového diagramu to nie je problém, keďže existuje postup popísaný v časti 4.7 na vyhodnotenie lomovej deformácie.

Z tohto dôvodu je taktiež na obr. 6.6 zobrazené elastické redukované pretvorenie namiesto plastického. Jeho hodnota je o niekoľko rádov menšia ako v prípade celistvých telies. Pri porovnaní s hodnotou plastického pretvorenia určenou v sekcii 6.5 ( $\varepsilon_{red}^{pl} = 0,027$ ) sa zdajú byť obe hodnoty v poriadku. Hodnota plastického pretvorenia je oveľa vyššia než hodnota elastického, čo je pred čelom trhliny, kde by mala dominovať plastická deformácia, očakávateľné.

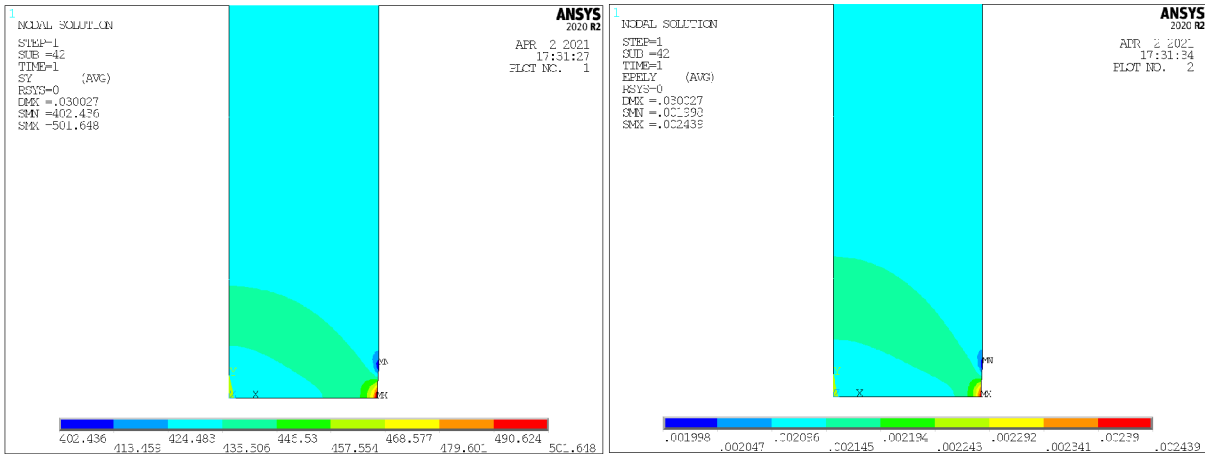


Obr. 6.6: Pole redukovaného elastického pretvorenia  $\varepsilon_{red}^{el}$  (vľavo hore), triaxiality  $\eta$  (vpravo hore) a normálového napätia  $\sigma_{yy}$  vo vzorke s trhlinou

### 6.3. Porovnanie s analytickým riešením

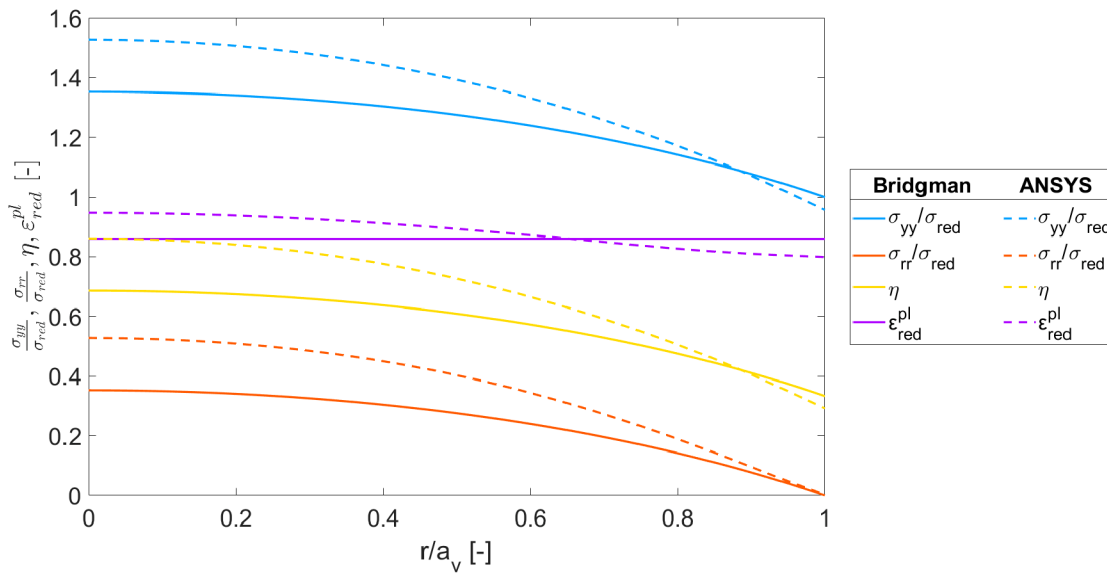
V hladkej vzorke dochádza až do medze pevnosti k rovnomernej deformácii, napätie  $\sigma_{yy}$  a pretvorenie je v nej konštantné a môže byť určené podľa rovníc (2.35)-(2.38). Výsledky z ANSYSu tomuto správaniu taktiež zodpovedajú. Kvôli zúženiu potrebnému pre vytvorenie krčku dochádza v tomto mieste k miernej koncentrácii napätia - maximálne napätie zodpovedá 1,15násobku nominálneho. Takúto chybu možno považovať za zanedbateľnú.

### 6.3. POROVNANIE S ANALYTICKÝM RIEŠENÍM



Obr. 6.7: Pole normálového napätia  $\sigma_{yy}$  (vľavo) a pretvorenia  $\epsilon_{yy}$  (vpravo) v hladkej vzorke v elastickej oblasti

Po vytvorení křčku sa ponúka využitie Bridgmanovho riešenia. Toto riešenie podľa Baa [15] nie je pre napätia v dobrej zhode s numerickým, redukované pretvorenie by malo byť relatívne presné. Rozdiely v normovaných hodnotách napätia na obr. 6.8 vzhľadom k redukovanému napätiu sú veľmi veľké.

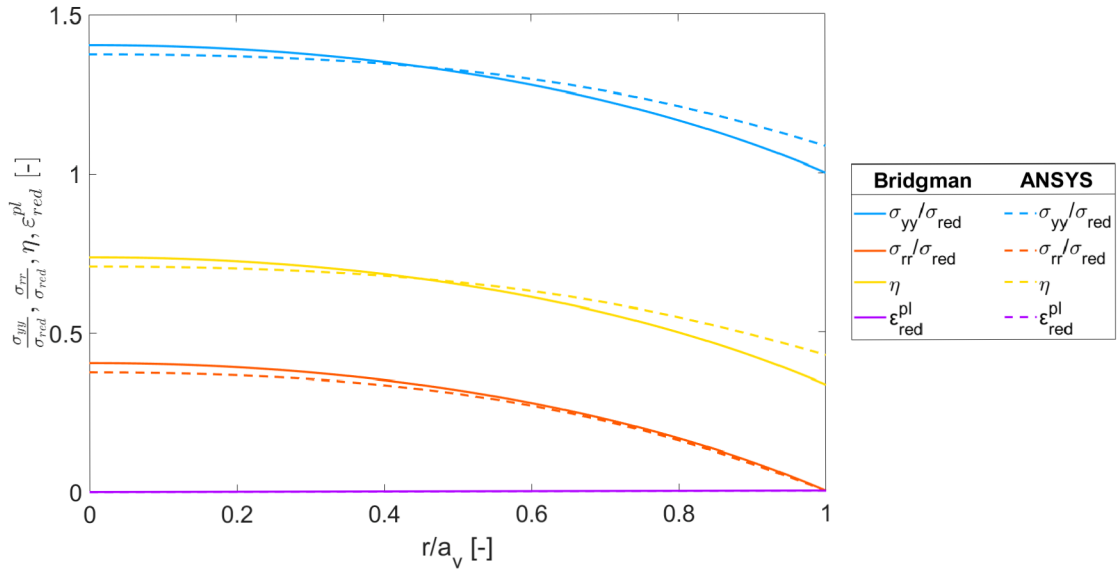


Obr. 6.8: Porovnanie numerického a analytického riešenia v hladkej vzorke po vytvorení křčku

Bridgmanovo riešenie popisuje taktiež vzorky s vrubom. Pokiaľ sa vo vzorke nenachádza plastická deformácia, Bridgmanovo riešenie zodpovedá tomu určenému pomocou MKP. Možno taktiež porovnať maximálne triaxiality nachádzajúce sa v strede vzorky na začiatku zaťažovania. Analytický výpočet dáva:

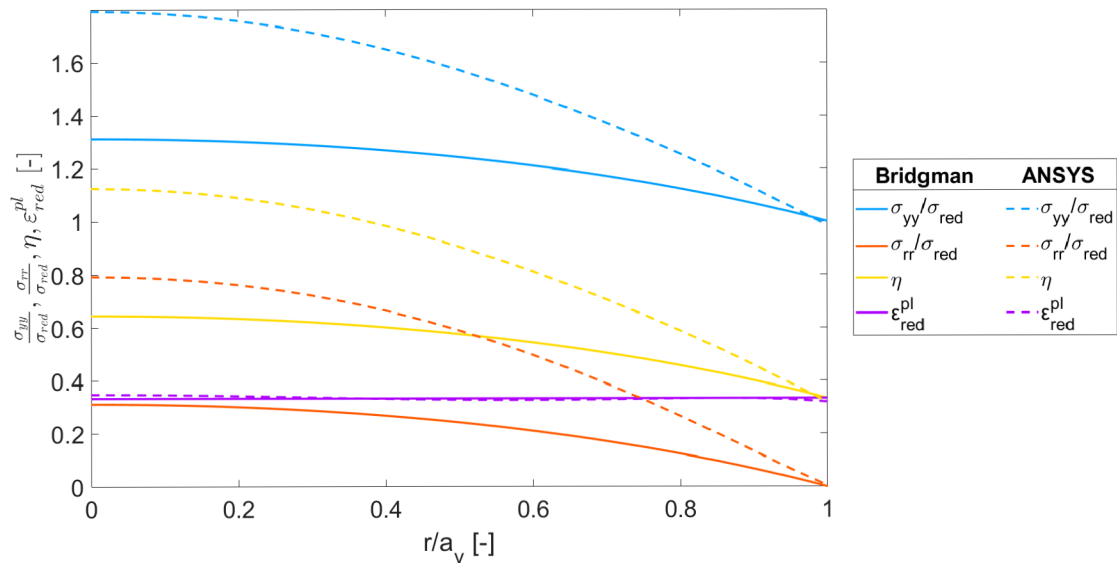
$$\eta_{max} = \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{a_v}{2R_v} + 1\right) = \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{2}{2 \cdot 2} + 1\right) = 0,7387 \quad (6.1)$$

a numerické riešenie  $\eta_{max} = 0,7093$ .



Obr. 6.9: Porovnanie numerického a analytického riešenia vo vzorke s vrubom na začiatku zatažovania

V okamihu lomu po tom, čo vzorka prekonala rozsiahlu plastickú deformáciu sú rozdiely medzi analytickým a numerickým riešením značné, podobne ako pri hladkej vzorke.

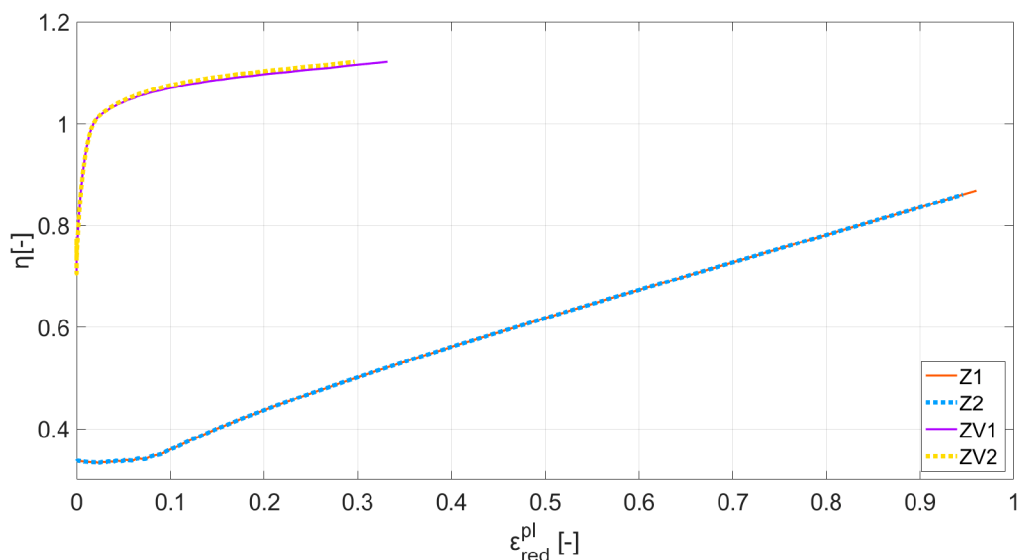


Obr. 6.10: Porovnanie numerického a analytického riešenia v vzorke s vrubom v okamihu lomu

Bridgmanovo riešenie je tak vhodné pre popis elastických napätí, ale nie je schopné vystihnúť redistribúciu napätia v dôsledku plastickej deformácie.

## 6.4. Konštrukcia lomového diagramu

Z výpočtového modelu popisujúceho experimenty sa získajú priebehy závislosti triaxiality na redukovanom plastickom pretvorení až do okamihu lomu. V priebehu zaťažovania sa triaxialita výrazne mení, stredná hodnota sa určí na základe vzťahu (3.9), kde je integrál vyhodnotený numericky pomocou príkazu *trapz* v programe MATLAB, ktorý využíva lichobežníkovú metódu numerickej integrácie.



Obr. 6.11: Závislosť maximálnej triaxiality na redukovanom pretvorení v priebehu zaťažovania

Tabuľka 6.1: Body do lomového diagramu

skúška	$\eta_{av}$	$\varepsilon_f$
Z1	0,5991	0,9647
Z2	0,5951	0,9460
ZV1	1,0756	0,3317
ZV2	1,0753	0,2925

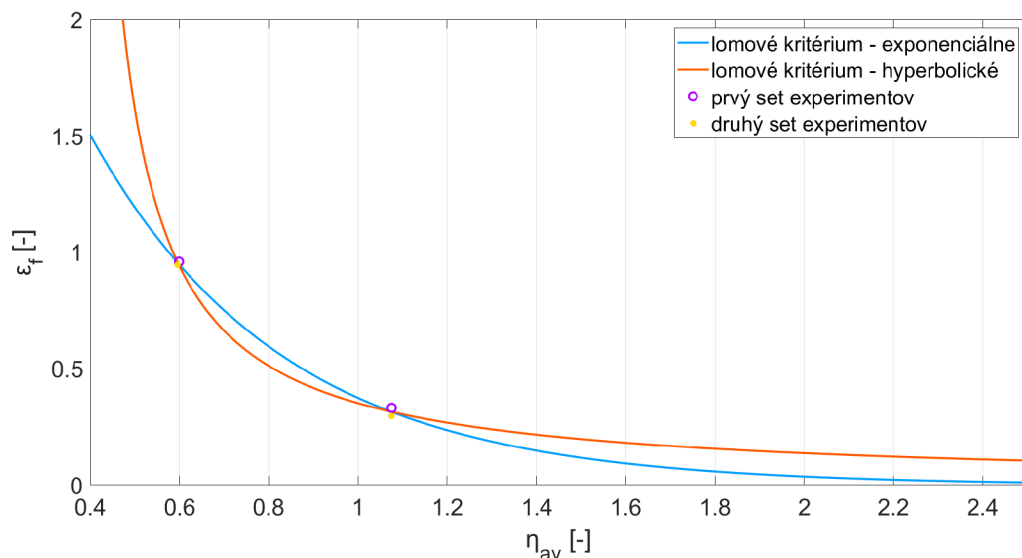
Získané hodnoty priemernej triaxiality a lomej deformácie boli vynesené do grafu a preložené exponenciálnou a hyperbolickou funkciou pomocou rozšírenia *Curve Fitting Toolbox* v MATLABe.

Takto získané lomové kritériá pre daný materiál je možné zapísať v tvare:

$$\varepsilon_f = 3,804e^{-2,318\eta_{av}} \quad (6.2)$$

a

$$\varepsilon_f = \frac{0,2249}{\eta_{av} - 0,3610} \quad (6.3)$$



Obr. 6.12: 2 lomové kritériá materiálu pre teplotu  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  s bodmi získanými z experimentov

Odchýlka oboch zvolených funkcií od nameraných dát je veľmi malá. V oblasti medzi lomom hladkej vzorky a lomom vzorky s vrubom je rozdiel medzi týmito funkciami malý, hyperbolická funkcia je konzervatívnejšia v tom zmysle, že pre danú priemernú triaxialitu dáva menšiu hodnotu lomovej deformácie, teda k lomu podľa nej dôjde skôr. Naopak v oblasti s menšou priemernou triaxialitou než je triaxialita hladkej vzorky a v oblasti s väčšou priemernou triaxialitou než je triaxialita vrubovanej vzorky je exponenciálne kritérium konzervatívnejšie. Hodnoty hyperbolickej funkcie s klesajúcou triaxialitou veľmi rýchlo narastajú. Naopak s narastajúcou triaxialitou hyperbolická funkcia len pozvoľna klesá. Exponenciálne kritérium sa teda javí ako realistickejšie.

## 6.5. Vyhodnotenie telesa s trhlinou

Lomový diagram bol ďalej využitý na posúdenie telesa s trhlinou. Triaxialita v telese s trhlinou zostáva v priebehu zaťažovania takmer konštantná a len sa vplyvom plastizácie pred čelom trhliny veľmi mierne znižuje. V tom je rozdiel v porovnaní s celistvými telesami, kde triaxialita počas celého zaťažovania narastala. V okamihu, keď sa vo vzorke dosiahne kritická hodnota  $K_{IC}$ , bola určená poloha maximálnej triaxiality a určená jej priemerná hodnota v priebehu zaťažovania.

Rozdiel medzi maximálnou triaxialitou  $\eta = 2,2353$  a priemernou hodnotou triaxiality  $\eta_{av} = 2,1795$  nie je taký významný ako pri celistvých telesách.

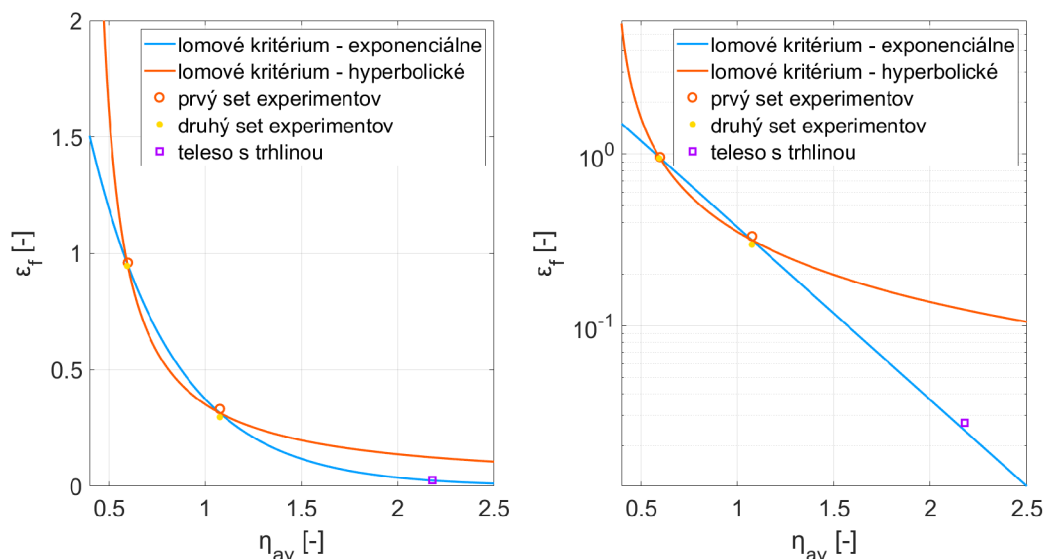
Pre skúmaný prípad je lomová deformácia pre teleso s trhlinou podľa vzťahu (4.33) rovná:

$$\varepsilon_f = 0,027.$$

Do lomového diagramu v obr. 6.13 je možné vyniesť pre priemernú triaxialitu  $\eta_{av}$  bod s lomovou deformáciou  $\varepsilon_f$  určenou z lomovej húževnatosti z rovnice (4.33) - táto metóda bude označovaná FT. Taktiež je možné získať hodnoty lomovej deformácie z obidvoch aproximácií - metódou EXP teda z rovnice (6.2) a metódou HYP teda z rovnice (6.3).

## 6.5. VYHODNOTENIE TELESA S TRHLINOU

Súčasne sú z týchto 2 bodov využitím rovnice (4.32) získané odhady lomovej húževnatosti  $K_{IC}$ . Takto získané dáta sú zároveň uvedené v tabuľke 6.2.



Obr. 6.13: Lomový diagram s bodom predstavujúcim trhlinu (vľavo) a v logaritmickej ose  $\varepsilon_f$  (vpravo)

Tabuľka 6.2: Lomové parametre materiálu Z pre telesá s trhlinou pre hodnoty triaxiality  $\eta_{av} = 2,1795$

metóda	FT	EXP	HYP	jednotka
$\varepsilon_f$	0,0270	0,0243	0,1237	[-]
$K_{IC}$	49,23	46,46	112,15	[MPa√m]

Je jasné, že metóda EXP je vhodnejšia než metóda HYP, výsledky z metódy EXP sú vo veľmi dobrej zhode s výsledkami získanými meraním lomovej húževnatosti teda metódou FT. Možno konštatovať, že pre tento prípad je nestabilný lom predchádzaný tvárnym porušením pri čele trhliny. Vysoké hodnoty triaxiality podporujú výrazný rast dutín v plastickej oblasti a lomová deformácia je o rád nižšia ako pri celistvých telesách.

Na obr. 6.13 sú prepojené zmienené prístupy, ktoré ukazujú, že lomovú húževnatosť je možné približne odhadnúť použitím exponenciálnej aproximácie lomového diagramu (metóda EXP).



## 7. Záver

Cieľom tejto práce bolo vytvorenie lomového diagramu pre skúmaný materiál v oblasti vysokých triaxialít. Jeho konštrukcia vyžaduje porozumenie výpočtovému modelovaniu ťahových skúšok a mechanizmov lomu, ktoré úroveň triaxiality ovplyvňuje. Pritom boli použité len experimentálne určené ťahové diagramy hladkej a vrubovanej vzorky. Základom týchto oblastí je venovaná rešeršná časť práce.

Ďalej sa práca venuje vytvoreniu výpočtových modelov ťahových skúšok hladkých telies a telies s vrubom a s obvodovou trhlinou, ktoré umožňujú okrem vyhodnotenia vstupných dát do lomového diagramu aj pohľad na pole napätí a deformácií v takýchto telesách.

Pre všetky modely bola uskutočnená citlivostná analýza na veľkosť prvku. Pokiaľ pre celistvé telesá postačuje relatívne veľká veľkosť prvku, pre vyhodnotenie napätí v okolí čela trhliny bolo potrebné veľkosť prvku značne zmenšiť.

Práca uvažuje, že krivku  $\sigma_{tr} - \varepsilon_{tr}$  je možné popísať R-O vzťahom. Porovnaním s experimentálnymi dátami bolo zistené, že pre skúmané materiály tento vzťah veľmi dobre aproximuje skutočnú krivku aj po medzi pevnosti, čo je veľmi výhodné, pokiaľ nie sú známe údaje o konečnom zúžení priečneho prierezu v okamihu lomu.

Lomový diagram je užitočný aj pre teoretické odhady lomovej húževnatosti vysokopevných ocelí a hliníkových zliatin, keďže experimentálna realizácia skúšok lomovej húževnatosti je ekonomicky aj časovo veľmi náročná. Diagram bol zostrojený pre teplotu  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  a aj pri takto nízkej teplote bolo možné využiť diagram popisujúci tvárny lom materiálu. Odhad lomovej húževnatosti je vo veľmi dobrej zhode s priamo zmeranou hodnotou.

Lomový diagram patrí k základným lomovým charakteristikám materiálu, podobne ako sú skúšky lomovej húževnatosti alebo skúšky rázom v ohybe. Jeho praktická aplikovateľnosť je však vyššia, pretože je široko využívaný v tváriacich procesoch, kde je treba starostlivo strážiť maximálnu povolenú plastickú deformáciu pri rôznych napäťových stavoch. Práca ukazuje metodológiu, ktorá umožňuje získať lomový diagram na základe pomerne jednoduchých experimentálnych ťahových skúšok spojených s modelovaním pomocou MKP.

Z dôvodu nepriaznivej epidemiologickej situácie bohužiaľ nebolo možné realizovať všetky potrebné experimenty, aby mohli byť materiálové charakteristiky pre rôzne teploty riadne určené. Práca však v prílohe ponúka parametrické makrá pre ANSYS APDL, ktoré umožňujú jednoduché modelovanie ťahových skúšok telies s ľubovoľným polomerom vrubu, ktorých materiál je možné popísať R-O vzťahom.



# Literatúra

- [1] BURŠA, Jiří & kol. *Výpočtové modely materiálu*. V Brne: 2019. Podpory k predmetu Konštitutívne vzťahy materiálu.
- [2] LIAN, Junhe & kol. A hybrid approach for modelling of plasticity and failure behaviour of advanced high-strength steel sheets. *International Journal of Damage Mechanics*. 2013, **22**, 188-218. DOI:10.1177/1056789512439319.  
Dostupné tiež z: [https://www.researchgate.net/publication/258140537\\_A\\_hybrid\\_approach\\_for\\_modelling\\_of\\_plasticity\\_and\\_failure\\_behaviour\\_of\\_advanced\\_high-strength\\_steel\\_sheets](https://www.researchgate.net/publication/258140537_A_hybrid_approach_for_modelling_of_plasticity_and_failure_behaviour_of_advanced_high-strength_steel_sheets)
- [3] HALAMA, Radim. *Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů*. V Ostrave: 2010, 141 s. Téza habilitačnej práce (Ph.D.), Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojná, Katedra pružnosti a pevnosti.
- [4] WILLIAMSON, Julianna. *ANSYS Training Manual: Plasticity Chapter Three: Rate-Independent Plasticity*. 30.09.2001 [cit. 2021-04-21].  
Dostupné z: <https://slideplayer.com/slide/9509075/>
- [5] KOCKS, U. F. Laws for Work-Hardening and Low-Temperature Creep. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1976, **98**(1). DOI:10.1115/1.3443340.
- [6] CHABOCHE, J.L. & kol. Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel. *Materials Modeling and Inelastic Analysis of Metal Structures*. V Berlíne: IASMiRT, 1979. Číslo správy: L11/3.  
Dostupné tiež z: <https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.20/26854>
- [7] HIATT, John. *Stress and strain* [online]. 29.08.2019 [cit. 2021-04-21].  
Dostupné z: <https://community.sw.siemens.com/s/article/stress-and-strain>
- [8] HOLLOWOMON, John H. Tensile deformation. *Transactions of AIME*. 1945, 162, 268–277.  
Dostupné tiež z: <https://www.scribd.com/document/255631757/Tensile-Deformation-John-Hollomon>
- [9] RAMBERG Walter & William R OSGOOD. *Description of stress-strain curves by three parameters*. Vo Washington: National Advisory Committee on Aeronautics (NACA), 1943. Technická poznámka č. 902.  
Dostupné tiež z: <http://www.apesolutions.com/spd/public/NACA-TN902.pdf>
- [10] BRIDGMAN, Percy W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. V New Yorku: McGraw-Hill, 1952, 362 s. ISBN 978-06-74-73133-2.  
Dostupné tiež z: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015006412780>
- [11] MIRONE, Giuseppe. Approximate Model of the Necking Behaviour and Application to the Void Growth Prediction. *International Journal of Damage Mechanics*. 2004, **13**(3), 241-261. DOI: 10.1177/1056789504042592.  
Dostupné tiež z: [https://www.researchgate.net/publication/245338079\\_Approximate\\_Model\\_of\\_the\\_Necking\\_Behaviour\\_and\\_Application\\_to\\_the\\_Void\\_Growth\\_Prediction](https://www.researchgate.net/publication/245338079_Approximate_Model_of_the_Necking_Behaviour_and_Application_to_the_Void_Growth_Prediction)

## LITERATÚRA

- [12] ANSYS® Mechanical APDL, Release 2020 R2, Help System, *Material Reference*, ANSYS, Inc.
- [13] BAO, Yingbin & Tomasz WIERZBICKI. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005, **72**(7), 1049-1069. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2004.07.011.  
Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.07.011>
- [14] KUCZYNSKA, M. & kol. The role of stress state and stress triaxiality in lifetime prediction of solder joints in different packages utilized in automotive electronics. *Microelectronics Reliability*. 2017, **74**, 155-164. DOI: 10.1016/j.microrel.2017.04.013.  
Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2017.04.013>
- [15] BAO, Yingbin. *Prediction of Ductile Crack Formation in Uncracked Bodies*. V Cambridge: 2003, 253 s.  
Dostupné tiež z: <https://core.ac.uk/download/pdf/4385492.pdf>
- [16] RICE, J. R. & D. M. TRACEY. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1969, **17**, 201-217.
- [17] THOMASON, P. F. *Ductile Fracture of Metals*. 1. vyd. V Oxforde: Pergamon Press, 1990, 219 s. ISBN 978-00-80-40178-2.
- [18] KOSSAKOWSKI, Paweł. An Analysis of the Tvergaard Parameters at Low Initial Stress Triaxiality for S235JR Steel. *Polish Maritime Research*. 2015, **21**, 100-107. DOI:10.2478/pomr-2014-0046.  
Dostupné tiež z: <https://www.sciendo.com/article/10.2478/pomr-2014-0046>
- [19] HANCOCK, J. W. & A. C. MACKENZIE. On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the mechanics and physics of solids*. 1976 **24**(2-3), 147-169. DOI: 10.1016/0022-5096(76)90024-7.  
Dostupné tiež z: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(76\)90024-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(76)90024-7)
- [20] FRENCH, I. E. & P. F. WEINRICH. The influence of hydrostatic pressure on the tensile deformation and fracture of copper. *Metall Mater Trans A*. 1975, **6**, 785-790. DOI: 10.1007/BF02672300.  
Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.1007/BF02672300>
- [21] LI, Tao. Fracture strain of gun steel for ultra-high-pressure vessels considering triaxiality effect. *Advances in Mechanical Engineering*. 2017, **9**(11). DOI: 10.1177/1687814017714977.  
Dostupné tiež z: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1687814017714977>
- [22] BAO, Yingbin & Tomasz WIERZBICKI. A Comparative Study on Various Ductile Crack Formation Criteria. *The Journal of Engineering Materials and Technology*. 2004, **126**(3), 313-324. DOI: 10.1115/1.1755244.  
Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.1115/1.1755244>

- [23] POKLUDA, Jaroslav & Pavel ŠANDERA. *Micromechanisms of Fracture and Fatigue In a Multiscale Context*. V Londýne: Springer, 2010, 296 s. ISBN 978-1-84996-265-0. DOI 10.1007/978-1-84996-266-7.
- [24] IRWIN, George R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, **24**, 361-364.  
Dostupné tiež z: <https://imechanica.org/files/1957%20Irwin%20Analysis%20of%20stresses%20and%20strains%20near%20the%20end%20of%20a%20crack%20traversing%20a%20plate.pdf>
- [25] ANDERSON, T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. 2. vyd. V Boca Raton: CRC Press, 1995. ISBN 08-493-4260-0.
- [26] TADA, Hiroshi, Paul C. PARIS & George R. IRWIN. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3. vyd.. V St. Louis: ASME Press, 2000. ISBN 07-918-0153-5. DOI: 10.1115/1.801535.
- [27] RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, **35**, 379–386.
- [28] RICE, J. R. & G. F. ROSENGREN (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968 **16**(1), 1–12. DOI:10.1016/0022-5096(68)90013-6.  
Dostupné tiež z: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90013-6)
- [29] O'DOWD, N. P. & C. F. SHIH. Family of crack-tip fields characterised by a triaxiality parameter - I Structure of fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1991, **39**, 989-1015. DOI: 10.1016/0022-5096(91)90049-T.  
Dostupné tiež z: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(91\)90049-T](https://doi.org/10.1016/0022-5096(91)90049-T)
- [30] ANSYS® Mechanical APDL, Release 2020 R2, Help System, *Element Reference*, ANSYS, Inc.
- [31] SHIH C. F., B. MORAN & T. NAKAMURA. Energy Release Rate Along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. *International Journal of Fracture* . 1986, **30**, 79-102. DOI: 10.1007/BF00034019.  
Dostupné tiež z: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00034019>
- [32] ROH, M. *Popis napjatosti a deformace na čele vyhnutých trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech*. V Brne: Vysoké učení technické v Brne, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 63 s. Diplomová práca. Vedúca diplomovej práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.
- [33] WILSON, Christopher D. Fracture Toughness Testing with Notched Round Bars. V Knoxville: 1997, 123 s. Téma dizertačnej práce (Ph.D.), University of Tennessee.  
Dostupné tiež z: [https://trace.tennessee.edu/utk\\_graddiss/2512/](https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/2512/)

## LITERATÚRA

- [34] ALEXOPOULOS, Nikolaos & Murat TIRYAKIOGLU. Relationship between Fracture Toughness and Tensile Properties of A357 Cast Aluminum Alloy. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2009, **40**(3), 702-716. DOI: 10.1007/s11661-008-9742-8. Dostupné tiež z: [https://www.researchgate.net/publication/225627598\\_Relationship\\_between\\_Fracture\\_Toughness\\_and\\_Tensile\\_Properties\\_of\\_A357\\_Cast\\_Aluminum\\_Alloy](https://www.researchgate.net/publication/225627598_Relationship_between_Fracture_Toughness_and_Tensile_Properties_of_A357_Cast_Aluminum_Alloy)
- [35] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky - hledání souvislostí*. 2. vyd. V Brně: CERM, VUTIUM, 2008, 226 s. ISBN 978-80-72-04555-6.
- [36] Toplogy Guides. *Optimal Edge Loop Reduction Flows* [online]. [cit. 2021-04-21]. Dostupné z: <https://topologyguides.com/loop-reduction>

# Zoznam použitých skratiek a symbolov

## Skratky

EPLM	elastoplastická lomová mechanika
HMH	Hubert, Mises a Henkey
HRR riešenie	riešenie podľa Hutchinsona, Ricea a Rosengrena
LELM	lineárne elastická lomová mechanika
MKP	metóda konečných prvkov
OP	okrajové podmienky
PCVN	skúšobné telesá Charpy s únavovou trhlinou
R-O vzťah	Rambergov-Osgoodov vzťah

## Symboly

$a$	dĺžka trhliny
$a_v$	polomer deformovanej plochy vo vzorke s vrubom
$a_{v0}$	polomer nedeformovanej plochy vo vzorke s vrubom
$B$	empiricky zistená konštanta
$d\lambda$	plastický multiplikátor
$E$	Youngov modul pružnosti v ťahu
$E_{ij}^A$	Almansi-Hamelov tenzor pretvorenia
$E_{ij}^C$	Cauchyho tenzor pretvorenia
$E_{ij}^L$	Green-Lagrangeov tenzor pretvorenia
$E_t$	tangenciálny modul pružnosti
$F_{pl}$	funkcia plasticity
$F, F_i$	sila
$G$	modul pružnosti v šmyku
$G_I$	hnacia sila trhliny pre normálový mód
$G_{IC}$	kritická hodnota hnacej sily trhliny pre normálový mód
$f(a/W)$	korekčná funkcia na konečnú šírku pásu

$f(r/R)$	korekčná funkcia vo vzorke s obvodovou trhlinou
$I_1, I_2, I_3$	invarianty tenzoru $\sigma_{ij}$
$J$	$J$ -integrál
$J_C$	kritická hodnota $J$ -integrálu
$J_{el}$	elastická časť $J$ -integrálu
$J_{pl}$	plastická časť $J$ -integrálu
$J_1, J_2, J_3$	invarianty deviátoru Cauchyho tenzoru napätí $s_{ij}$
$K$	koeficient deformačného spevnenia
$K_I$	faktor intenzity napätia pre normálový mód
$K_{IC}$	kritická hodnota faktoru intenzity napätia pre normálový mód, lomová húževnatosť
$k_1, k_2$	konštanty úmernosti v HRR riešení
$l$	dĺžka
$l_0$	pôvodná dĺžka
$n$	exponent deformačného spevnenia
$Q_{pl}$	plastický potenciál
$Q$	$Q$ -parameter
$q$	vektor posuvu trhliny
$R$	polomer prierezu tyče v mieste bez trhliny
$R_v$	polomer vrubu
$r$	minimálny polomer prierezu tyče v mieste s trhlinou
$r_p$	veľkosť plastickej oblasti druhého rádu
$r_y$	veľkosť plastickej oblasti prvého rádu
$S_i$	druhý Piola-Kirchhoffov tenzor napätia v hlavných súradniciach
$S_0$	pôvodná plocha
$s$	prevrátená hodnota exponentu deformačného spevnenia
$s_{ij}$	deviátor Cauchyho tenzoru napätia
$T$	$T$ -napätie
$T_i$	vektor povrchových síl



$u$	posuv
$u_f$	posuv, pri ktorom došlo k lomu
$u_{pl}$	plastický posuv v mieste pôsobenia sily v dôsledku prítomnosti trhliny
$u_x, u_y$	posuv v smere osi $x, y$
$W$	merná energia napätosti
$w_{iw}$	váhová funkcia
$X$	súradnice nedeformovanej geometrie
$x$	súradnice deformovanej geometrie
$\alpha$	”backstress”
$\beta$	faktor biaxiality
$\gamma$	krivka
$\Delta l$	zmena dĺžky, predĺženie
$\delta$	šírka plastickej zóny
$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta
$\varepsilon^{el}$	elastické pretvorenie
$\varepsilon_f$	lomová deformácia
$\varepsilon_{ij}$	tenzor zmluvných pretvorení
$\varepsilon_{ijk}$	Levi-Civito tensor
$\varepsilon^{pl}$	plastické pretvorenie
$\bar{\varepsilon}^{pl}$	intenzita plastického pretvorenia
$\varepsilon_{red}$	redukované pretvorenie
$\varepsilon_{tr}$	skutočné pretvorenie
$\varepsilon_{tr}^{pl}$	skutočné plastické pretvorenie
$\varepsilon_u$	jednoosové pretvorenie na medzi pevnosti
$\eta$	faktor triaxiality
$\eta_{av}$	priemerná hodnota faktoru triaxiality
$\eta_{max}$	maximálna hodnota faktoru triaxiality
$\theta_L$	Lodeho uhol

$\mu$	Poissonov pomer
$\mu_L$	Lodeho parameter
$\xi$	Haigh-Westergaardova súradnica
$\rho$	Haigh-Westergaardova súradnica
$\sigma_{HMH}$	redukované napätie podľa teórie HMH
$\sigma_{ij}$	Cauchyho tenzor napätia
$\sigma_k$	medza klzu
$\sigma_m$	hydrostatické napätie
$(\sigma_m)_{SSY;T=0}$	hydrostatické napätie určené podľa teórie uvažujúcej malú plastickú oblasť
$\sigma_{nom}$	nominálne napätie
$\sigma_{red}$	redukované napätie
$\sigma_{rr}$	radiálne napätie
$\sigma_{tr}$	skutočné napätie
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	normálové napätie v smere osi $x, y, z$
$(\sigma_{yy})_{HRR}$	napätie $\sigma_{yy}$ určené podľa teórie HRR
$(\sigma_{yy})_{SSY;T=0}$	napätie $\sigma_{yy}$ určené podľa teórie uvažujúcej malú plastickú oblasť
$\sigma_{\theta\theta}$	tangenciálne napätie
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	hlavné napätia
$\tau_{ij}$	prvý Piola-Kirchhoffov tenzor napätia
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	šmykové napätie pôsobiace v rovine $xy, xz, yz$
$\Omega$	ohraničená plocha
$\Omega_{ie}$	plocha prvku $ie$