VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

VYPRAZDŇOVÁNÍ ROTUJÍCÍ NÁDOBY
EMPTYING OF THE ROTATING VESSEL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE ATTILA HIDEGHÉTY
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. MILOSLAV HALUZA, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav
Akademický rok: 2010/11

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Attila Hideghéty

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vyprazdňování rotující nádoby

v anglickém jazyce:

Emptying of the rotating vessel

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Rotující nádoba zvyčuje otáčky, až dojde k jejímu postupnému vyprazdňování. Nalezněte rovnice a popište tento děj na záhladě rovnic hydrostatiky a rovnice kontinuity.

Cíle bakalářské práce:

Nalezení a sestavení rovnic popisující postupné vyprazdňování rotující nádoby při zvyšování otáček. Grafické znázornění objemu kapaliny v nádobě při dosažení otáček, diskuse jevu a závěrů.

Seznam odborné literatury:

[1] Fleischner, P.: Hydromechanika, skripta VUT v Brně, 1990

[2] Noskievič, J. a kol. : Mechanika tekutin,SNTL Praha, 1987

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/11.

V Brně, dne 19.11.2010

L.S.

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ DĚKANÁT 14

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan

Abstrakt

Předložená bakalářská práce zpracovává děje spojené s hydromechanikou. Za vším stojí Eulerovy rovnice hydrostatiky, hydrodynamiky a Bernoulliho rovnice. Voda má v rotující nádobě charakteristickou hladinovou plochu. Při postupném zvyšování otáček se voda začne vylévat. Úkolem je rozbor a analýza dějů, které mohou nastat při rotaci nádoby s vodou.

Klíčová slova

rotující nádoba, Eulerova rovnice hydrostatiky, zákon zachování objemu, voda, vylévání vody z nádoby

Abstract

This bachelor´s thesis handles with happenings related to hydromechanics. For all stands Euler´s equations of hydrostatics, hydrodynamics and Bernoulli´s equation. The water has got a characteristic surface in the rotating vessel, by increasing the revolutions the water begins to pour out. The task is analyzing the events that can occur when the vessel is rotating with the water.

Keywords

rotating vessel, Euler´s equation of hydrostatics, law of conservation of volume, water, pouring water out from the vessel

Bibliografická citace

HIDEGHÉTY, A. *Vyprazdňování rotující nádoby*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 48 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc..

Prohlášení autora o původnosti práce

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Vyprazdňování rotující nádoby* vypracoval samostatně pod vedením a dle pokynů mé vedoucí doc. Ing. Miloslava Haluzy, CSc., veškerá použitá literatura je uvedena v seznamu.

V Brně dne 25. 5. 2011

……………………
Attila Hideghéty

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat mému vedoucímu práce doc. Ing. Miloslavovi Haluzovi, CSc. za pomoc, ochotu, trpělivost a dobré rady při psaní této práce.

OBSAH

1. ÚVOD

Cílem této bakalářské práce je matematicky popsat jevy v rotující nádobě, v které se nachází voda. V Kapitole 1 odvodíme rovnici hladinové plochy dle Eulerovy rovnice hydrostatiky. Ze zákonu zachování objemu odvodíme patřičné charakteristické rozměry. Dalším krokem bude vypočítat tlak a sílu působící na dno před a po rotaci.
Při zvyšování otáček se bude voda vylévat v závislosti na otáčkách. Základní znaky a rozměry pro odvození těchto rovnic jsou známy ze schémat. Odvozené rovnice aplikujeme i na jiných případech, kdy vylévání vody bude omezeno víkem.
V Kapitole 2 rozšíříme poznatky a zahrneme je do výpočtů hydrodynamiku, neboli Bernoulliho rovnici. Na ose rotace nádoby vyvrtáme díru a umístíme ventil. Pomocí Bernoulliho rovnice jsme schopni odvodit výtokovou rychlost a vypočítat čas za kterou vyteče voda z nádoby při rotaci.

2. KAPITOLA 1

2.1. Rovnice hladinové plochy

2.1.1. Eulerova rovnice hydrostatiky [1]

Rovnici hladinové plochy rotující nádoby lze odvodit z Eulerovy rovnice hydrostatiky. Tyto rovnice použijeme, protože částice vody nekonají žádný vzájemný pohyb. Úhlová rychlost, kterou otáčíme nádobou musí být konstantní. Budeme vycházet z problematiky 3D. Předpokládame, že to je rotačně symetrická nádoba.

Eulerova rovnice hydrostatiky:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} \cdot gradp = \vec{0} \tag{1}$$

Z obrázků (příloha 1,2) určíme síly působící na element objemu vody, rozkládáme je do příslušných souřadnicových os, a zjistíme nasledující parametry:

celkové zrychlení na element objemu vody: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$

zrychlení působící v ose x: $a_x = r \cdot \omega^2 \cdot cos\varphi = x \cdot \omega^2$

zrychlení působící v ose y: $a_y = -g$

zrychlení působící v ose z: $a_z = r \cdot \omega^2 \cdot sin\varphi = z \cdot \omega^2$

Z Eulerova rovnice hydrostatiky (1) můžeme vyjádřit:

pro osu x:

$$x \cdot \omega^2 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot x \cdot \omega^2 \tag{2}$$

pro osu y:

$$-g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \cdot g \tag{3}$$

pro osu z:

$$z \cdot \omega^2 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot z \cdot \omega^2 \tag{4}$$

Z matematiky známe, že totální diferenciál má tvar pro $p = f(x, y, z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \tag{5}$$

Když rovnice (2), (3), (4) dosadíme do (5), tak dostaneme:

$$dp = \rho \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dy + \rho \cdot z \cdot \omega^2 \cdot dz \tag{6}$$

Teď je naším cílem vyjádřit ze vztahu (6) rovnice hladinové plochy vody. Toho docílíme tak, že do rovnice dosadíme $dp = 0$:

$$dp = \rho \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dy + \rho \cdot z \cdot \omega^2 \cdot dz = 0 \tag{7}$$

Rovnice (7) je obecná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, což snadno vyřešíme. Dostaneme závislost výšky hladiny na poloměru nádoby za předpokladu, že $r^2 = x^2 + z^2$, což je analytické vyjádření kružnice v rovině x-z. Tato úvaha vede na rovinný problém (2D):

$$\int 0 = \int \rho \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx - \int \rho \cdot g \cdot dy + \int \rho \cdot z \cdot \omega^2 \cdot dz$$

$$C = \rho \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \omega^2 - \rho \cdot g \cdot y + \rho \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \omega^2$$

$$\rho \cdot g \cdot y = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (x^2 + z^2) + C$$

$$y = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + C \tag{8}$$

Integrací rovnice (7) vznikne konstanta C, což můžeme zjistit z okrajových podmínek. Okrajová podmínka v našem případě pro $r = 0$ je $y = y_{01}$ (příloha 2). Když tyto hodnoty dosadíme do rovnice (8), tak nám vyjde, že $C = y_{01}$ a rovnice hladinové plochy bude vypadat takto:

$$y_{r1} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + y_{01} \tag{9}$$

2.1.2. Rovnice zachování hmoty

Hodnotu y_{01} zatím neznáme, a proto ji musíme vyjádřit. Vyjádříme ji z rovnice zachování hmoty, což znamená, že se objem vody v nádobě před rotací rovná objemu vody v rotující nádobě. Neuvažujeme vylévání vody. Když máme nestlačitelnou tekutinu (vodu považujeme za nestlačitelnou tekutinu), vyplívá nám, že $\rho = konstanta.$ Z této podmínky víme, že platí i zákon zachování objemu. Je zřejmé z přílohy 3 jak je definována elementární plocha. Z přílohy 4 doplníme chybějící znaky pro definování elementárního objemu.

Původní objem vody v nádobě za klid (objem válce) : $V_0 = \pi \cdot R^2 \cdot h_0$ (10)

Elementární objem vody v nádobě za rotace: $dV = y(r) \cdot dS$ (11)

Elementární plochu vyjádříme: $dS = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ (12)

Dosazením rovnice (12) do rovnice (11) dostaneme:

$$dV = y(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \tag{13}$$

Rovnice (13), je také obecná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Aplikováním vztahu (13) pro výpočet objemu dostaneme:

$$\int_0^{V_1} dV = \int_0^R y_{r1}(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$V_1 = \int_0^R \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + y_{01} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$V_1 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R + 2 \cdot \pi \cdot y_{01} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$V_1 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^4}{4} + 2 \cdot \pi \cdot y_{01} \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot R^4}{4 \cdot g} + \pi \cdot y_{01} \cdot R^2 \qquad (14)$$

Je zřejmé, že se objem vody v nádobě za klidu musí rovnat objemu vody za rotace. Ze vztahu (13) a (10) zjistíme konstantu y_{01}. Zapíšeme matematicky:

$$V_0 = V_1$$

$$\pi \cdot R^2 \cdot h_0 = \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot R^4}{4 \cdot g} + \pi \cdot y_{01} \cdot R^2$$

$$y_{01} \cdot R^2 = R^2 \cdot h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^4}{4 \cdot g}$$

$$y_{01} = h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}$$

$$h_0 = y_{01} + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}$$

Zpětným dosazením konstanty y_{01} do rovnice (9) obdržíme výsledný vztah pro rovnici hladinové plochy vody při rotaci:

$$y_{r1} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}$$

$$y_{r1} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h_0 \qquad (15)$$

Číselně:

$$y_{r1} = \frac{11^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot r^2 + 0{,}15 - \frac{11^2 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 9{,}81}$$

$$y_{r1} = 6{,}167176351 \cdot r^2 + 0{,}026656472$$

Výpočet charakteristických rozměrů dle schématu (příloha 4) i číselně:

$$h_1 = H - h_0 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(R^2 - \frac{R^2}{2}\right) + h_0 - h_0 = \frac{\omega^2}{4 \cdot g} \cdot R^2$$

$$h_1 = \frac{11^2 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 9{,}81} = 0{,}123343527 \cdot m$$

$$h_2 = H - y_{01} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(R^2 - \frac{R^2}{2}\right) + h_0 - \left(h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}\right) = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 = 2 \cdot h_1$$

$$h_2 = 2 \cdot 0{,}123343527 = 0{,}246687054 \cdot m$$

$$h_3 = h_2 - h_1 = 2 \cdot h_1 - h_1 = h_1$$

Lze konstatovat, že hladina kapaliny v klidu půlí výšku paraboloidu za rotace.

2.1.3. Tlak od kapaliny působící na dno nádoby [1]

Pro výpočet tlaku v rotující nádobě použijeme vztah (7):

$$dp = \rho \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dy + \rho \cdot z \cdot \omega^2 \cdot dz = 0$$

Zintegrováním diferenciální rovnice (7) dostaneme závislost tlaku na poloměru a výšce:

$$\int dp = \int \rho \cdot x \cdot \omega^2 \cdot dx - \int \rho \cdot g \cdot dy + \int \rho \cdot z \cdot \omega^2 \cdot dz$$

$$p = \rho \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \omega^2 - \rho \cdot g \cdot y + \rho \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \omega^2 + C$$

$$p = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (x^2 + z^2) - \rho \cdot g \cdot y + C$$

$$p = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot r^2 - \rho \cdot g \cdot y + C \qquad (16)$$

Konstantu C zjistíme z okrajových podmínek: $r = 0,\ y = y_{01}$ je $p = p_{atm}$

$$p_{atm} = -\rho \cdot g \cdot y_{01} + C \quad \Rightarrow \quad C = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot y_{01}$$

Vypočtenou konstantu C dosadíme zpátky do rovnice (16) a obdržíme tak vztah (17).

$$p = \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot y_{01} \qquad (17)$$

$$p = 1000 \cdot 11^2 \cdot \frac{r^2}{2} - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot y + 101325 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}026656472$$

$$p = 60500 \cdot r^2 - 9810 \cdot y + 101586{,}5$$

Vztah (17) umožní zjištění tlaku v každém bodě vody. My se soustředíme na tlaky na dně nádoby. Je zřejmé, že největší tlak bude na okraji a nejnižší tlak bude v ose symetrie nádoby :

- tlak v ose nádoby ($r = 0,\ y = 0$):

$$p_1 = \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{0^2}{2} - \rho \cdot g \cdot 0 + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot y_0 = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot y_0$$

$$p = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot \left(h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}\right)$$

$$p_1 = 101325 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}15 - \frac{11^2 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 9{,}81}\right) = 101586{,}5 \cdot Pa$$

- na okraji nádoby, maximální tlak ($r = R,\ y = 0$):

$$p_2 = \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \rho \cdot g \cdot 0 + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot y_0$$

$$p_2 = \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{R^2}{2} + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot \left(h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}\right)$$

$$p_2 = 1000 \cdot 11^2 \cdot \frac{0{,}2^2}{2} + 101325 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}15 - \frac{11^2 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 9{,}81}\right)$$

$$p_2 = 104006{,}5 \cdot Pa$$

2.1.4. Síla působící od kapaliny na dno nádoby [1]

Jak jsme počítali tlak, tak teď zjistíme sílu působící na dno, takže do rovnice (17) dosadíme $y = 0$. Atmosférický tlak nepočítame, p_{atm} položíme roven 0. Výpočty budou probíhat v relativních tlacích, $p_{atm} = 0$, přetlak je $p > p_{atm} > 0$, podtlak je $p < p_{atm} < 0$:

- síla působící na dno nádoby před rotací:

$$dF = p \cdot dS = h_0 \cdot \rho \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\int_0^{F_1} dF = \int_0^R h_0 \cdot \rho \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$F_1 = h_0 \cdot \rho \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi \cdot R^2 \cdot h_0 \cdot \rho \cdot g$$

$$F_1 = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}15 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 = 184{,}914145 \cdot N$$

- síla působící na dno nádoby při rotaci:

$$dF = p \cdot dS = \left(\rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_{01}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\int_0^{F_2} dF = \int_0^R \left(\rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_{01}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$F_2 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr + \rho \cdot g \cdot y_{01} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R r \cdot dr$$

$$F_2 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^4}{4} + \rho \cdot g \cdot y_{01} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$F_2 = \pi \cdot R^2 \cdot \left(\rho \cdot g \cdot y_{01} + \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{R^2}{4}\right)$$

$$F_2 = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \left(y_{01} + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}\right)$$

$$F_2 = \pi \cdot R^2 \cdot h_0 \cdot \rho \cdot g$$

$$F_2 = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}15 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 = 184{,}914145 \cdot N$$

Vypočítali jsme tlaky a síly působící na dno nádoby.

2.1.5. Případ rotující nádoby s víkem

Při konstantní rychlosti otáček již víme, že rovnice hladinové plochy má tvar paraboloidu. Budeme to dále využívat a zkoumat stavy, jak se bude měnit hladinová plocha, když ji omezíme víkem. Z přílohy 5 je patrné, že víko bude v intervalu $\langle h_0, y_{01} + 2 \cdot h_1 \rangle$. Matematicky: $H_2 \epsilon \langle h_0, y_{01} + 2 \cdot h_1 \rangle$, kde H_2 je výška uložení víka. Na obrázku (příloha 5) je čerchovaně naznačena původní hladinová plocha. S uvažováním, že nebudou působit žádné síly navíc, můžeme tvrdit, že tvar hladinové plochy zůstane paraboloid, pouze rovnice bude posunuta o jinou konstantu vzhledem k počátku souřadného systému. Ze vztahu (8) budeme zjišťovat skutečný tvar rovnice paraboly. Dosazením do vztahu (8) parametry $r = 0$ je $y = y_{02}$, dostaneme:

$$y_{02} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot 0^2 + C$$

$$C = y_{02}$$

Vztah pro funkce hladinové plochy:

$$y_{r2} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + y_{02} \tag{18}$$

Cílem je ale získat hodnotu R_1, což získáme pro bod $y = H_2$ a $r = R_1$. Matematicky vyjádříme:

$$H_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R_1^2 + y_{02} \tag{19}$$

V tomto výrazu jsou dvě neznámé R_1 a y_{02}. Pro řešení musíme ještě doplnit rovnicí kontinuity. Z přílohy 5 můžeme psát:

$$H_2 \cdot \pi \cdot R^2 - h_0 \cdot \pi \cdot R^2 = V_{vzduch1} \tag{20}$$

Objem paraboloidu vypočítáme tak, že vytkneme elementární prvek a zintegrujeme ho přes celý objem:

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_4 \cdot dr \tag{21}$$

Z výrazu (21) neznámé h_4 vyjádříme z přílohy 5, matematicky:

$$h_4 = H_2 - y_{r2}(r)$$

Vidíme, že h_4 je závislé na proměnné r, takže $h_4 = f(r)$, dosadíme do vztahu (21):

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot [H_2 - y_{r2}(r)] \cdot dr$$

Do předchozího výrazu dosadíme za H_2 vztah (19) a za $y_{r2}(r)$ vztah (18), dostaneme tak:

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R_1^2 + y_{02} - \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 - y_{02}\right) \cdot dr$$

Zintegrováním vyjde:

$$\int_0^{V_{vzduch2}} dV = \int_0^{R_1} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R_1^2 - \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2\right) \cdot dr$$

$$V_{vzduch2} = \int_0^{R_1} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot (R_1^2 - r^2) \cdot dr$$

$$V_{vzduch2} = \frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \int_0^{R_1} (R_1^2 \cdot r - r^3) \cdot dr$$

$$V_{vzduch2} = \frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \left(R_1^2 \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R_1} - \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_1}\right)$$

$$V_{vzduch2} = \frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \left(R_1^2 \cdot \frac{R_1^2}{2} - \frac{R_1^4}{4}\right)$$

$$V_{vzduch2} = \frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \frac{R_1^4}{4}$$

Dostali jsme objem $V_{vzduch2}$, tento objem se musí rovnat objemu $V_{vzduch1}$ neboli vztah (20): $V_{vzduch1} = V_{vzduch2}$. Rozepsáním dostaneme:

$$\frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \frac{R_1^4}{4} = H_2 \cdot \pi \cdot R^2 - h_0 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{R_1^4}{4} = R^2 \cdot (H_2 - h_0) \tag{22}$$

Z rovnosti (22) můžeme snadno vypočítat poloměr R_1:

$$R_1^4 = 4 \cdot g \cdot R^2 \cdot \frac{(H_2 - h_0)}{\omega^2}$$

$$R_1 = \sqrt[4]{4 \cdot g \cdot R^2 \cdot \frac{(H_2 - h_0)}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R}{\omega}} \cdot \sqrt[4]{g \cdot (H_2 - h_0)}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}2}{11}} \cdot \sqrt[4]{9{,}81 \cdot (0{,}17 - 0{,}15)} = 0{,}12691367 \cdot m$$

První část máme, to jest, že R_1 je již známé. Zbývá určit y_{02} což máme již definované ze vztahu (19), snadno dostaneme túto konstantu:

$$H_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot R}{\omega}} \cdot \sqrt[4]{g \cdot (H_2 - h_0)} \right)^2 + y_{02}$$

$$y_{02} = H_2 - \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot R}{\omega} \cdot \sqrt{g \cdot (H_2 - h_0)}$$

$$y_{02} = H_2 - \frac{\omega \cdot R}{g} \cdot \sqrt{g \cdot (H_2 - h_0)} = H_2 - \omega \cdot R \cdot \sqrt{\frac{H_2 - h_0}{g}}$$

Konstantu y_{02} dosadíme zpátky do vztahu (18), dostaneme úplnou rovnici hladinové plochy, když je tam vloženo víko. Rovnici zapíšeme takto:

$$y_{r2} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + H_2 - \omega \cdot R \cdot \sqrt{\frac{H_2 - h_0}{g}}$$

$$y_{r2} = \frac{11^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot r^2 + 0{,}17 - 11 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 - 0{,}15}{9{,}81}}$$

$$y_{r2} = 6{,}167176351 \cdot r^2 + 0{,}070664798$$

Tvary hladinových ploch jsou znázorněny na obrázku (příloha 6).

2.2. Vyprazdňování rotující nádoby

2.2.1. Odvození a analýza dějů při zvyšování otáček [3]

Otáčky budeme zvyšovat do té doby, než se hladina vody dotkne okraje nádoby. To znamená, že objem vody bude konstantní, nebude se vylévat. Tento průběh přesně definuje vztah (10). Budeme hledat otáčky za sekundu, kdy se hladina vody dotkne okraje nádoby (příloha 7). Z rovnice (15) je patrné, že můžeme vypočítat otáčky za sekundu, za předpokladu, že $r = R$

a $y_{r1} = H_2$. Víme ještě, že otáčky dostaneme z výrazu $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot n_0$. Dosazením do rovnice (15) dostaneme:

$$H_2 = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot g} \cdot \left(R^2 - \frac{R^2}{2}\right) + h_0$$

$$H_2 = \frac{\omega_0^2}{4 \cdot g} \cdot R^2 + h_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{4 \cdot g \cdot \frac{(H_2 - h_0)}{R^2}}$$

$$2 \cdot \pi \cdot n_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{g \cdot (H_2 - h_0)}}{R}$$

$$n_0 = \frac{\sqrt{g \cdot (H_2 - h_0)}}{\pi \cdot R} \tag{23}$$

$$n_0 = \frac{\sqrt{9{,}81 \cdot (0{,}17 - 0{,}15)}}{\pi \cdot 0{,}2} = 0{,}704968372 \cdot s^{-1}$$

Obdrželi jsme vztah (23) pro otáčky, pro dosažení okraje nádoby (dále už jenom otáčky).

Nyní budeme otáčky n zvyšovat nad hodnotu n_0, ale jen do okamžiku, než se hladina (vrchol paraboloidu) dotkne dna nádoby (to je okamžik, když $y_{03} = 0$). Kapalina se z nádoby začne vylévat a objem kapaliny v nádobě se zmenšuje (příloha 8).
Pro otáčky v intervalu $\langle n_0, n_p \rangle$ bude platit:

$$2 \cdot h_5 = H_2 - y_{03}$$

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot H_2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 2 \cdot h_5 \tag{24}$$

V rovnici (24) je první část objem válce a druhá část je objem rotačního paraboloidu o výšce $2 \cdot h_5$.

Můžeme psát:

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_6 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 2 \cdot h_5 \tag{25}$$

$$h_6 = H_2 - h_5$$

Kapalina dosáhne výšky H_2 na okraji nádoby:

$$H_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y_{03}$$

$$y_{03} = H_2 - 2 \cdot h_5 \quad a \quad h_5 = H_2 - h_6$$

$$y_{03} = H_2 - 2 \cdot (H_2 - h_6) = 2 \cdot h_6 - H_2$$

Dostaneme a upravíme:

$$H_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \cdot h_6 - H_2$$

$$2 \cdot H_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{D^2}{4} + 2 \cdot h_6$$

$$h_6 = H_2 - \frac{\omega^2}{16 \cdot g} \cdot D^2$$

Dosazením h_6 do první části výrazu (25) obdržíme vztah (objem kapaliny se zvyšujícími otáčkami se zmenšuje):

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_6 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(H_2 - \frac{\omega^2}{16 \cdot g} \cdot D^2\right)$$

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left[H_2 - \frac{(2 \cdot \pi \cdot n)^2}{16 \cdot g} \cdot D^2\right]$$

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{16 \cdot g} \cdot D^2\right) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot D^4 \cdot n^2}{16 \cdot g} = k_1 - k_2 \cdot n^2 \tag{26}$$

$$V_{r1} = \frac{\pi \cdot 0{,}4^2}{4} \cdot 0{,}17 - \frac{\pi^3 \cdot 0{,}4^4 \cdot n^2}{16 \cdot 9{,}81} = 0{,}02136283 - 0{,}005057088 \cdot n^2$$

Z rovnice (26) vidíme, že se jedná o rovnici paraboly. Konstanty k_1, k_2 závisí na velikosti nádoby. Musíme si však uvědomit, že tato rovnice platí až do okamžiku, než vrchol paraboloidu dosáhne dna nádoby, to jest $y_{03} = 0$. Otáčky n_p (otáčky, kdy se vrchol paraboloidu dotkne dna nádoby) můžeme zjistit z rovnice (8) pro bod $r = R$ a $y = H_2$:

$$H_2 = \frac{\omega_p^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 + 0$$

$$H_2 = \frac{(2 \cdot \pi \cdot n_p)^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{R^2} = 4 \cdot \pi^2 \cdot n_p^2$$

$$\frac{g \cdot H_2}{2 \cdot R^2 \cdot \pi^2} = n_p^2 \quad \Rightarrow \quad n_p = \sqrt{\frac{g \cdot H_2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\pi^2 \cdot D^2}} \tag{27}$$

$$n_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}17}{\pi^2 \cdot 0{,}4^2}} = 1{,}453329531 \cdot s^{-1}$$

Se zvýšením otáček na $n = n_p$, objem dosáhne hodnoty V_p, kterou vypočítame dosazením n_p do výrazu (26). Dostaneme:

$$V_p = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot D^4 \cdot n_p^2}{16 \cdot g} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot D^4}{16 \cdot g} \cdot \frac{g \cdot H_2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}$$

$$V_p = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot D^4}{16 \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\pi^2 \cdot D^2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2$$

$$V_p = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}4^2}{8} \cdot 0{,}17 = 0{,}010681415 \cdot m^3 = 10{,}681415 \cdot l$$

V_p vyjadřuje objem vody, kdy se vrchol paraboloidu dotkne dna nádoby.

Budeme-li otáčky n zvyšovat dále nad n_p, vrchol paraboloidu bude klesat pod dno nádoby a logicky i objem vody se bude dále snižovat. Z obrázku (příloha 9) konstatujeme nasledující hodnoty:

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_7$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (y_{04} + H_2) - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot y_{04} - \frac{1}{2} \cdot (y_{04} + H_2) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot y_{04}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot y_{04} + \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot y_{04} - \frac{1}{2} \cdot y_{04} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot H_2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot y_{04}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(H_2 - \frac{H_2}{2} - \frac{y_{04}}{2}\right) + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2} \cdot y_{04}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot y_{04} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2} \cdot y_{04} \tag{28}$$

Neznáme velikost R_2. Zjistíme ji z obecného tvaru rotačního paraboloidu, vztah (8):

$$y_{r3} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 - y_{04}$$

Před y_{04} je znaménko (-), protože vrchol paraboloidu zasahuje do záporných částí souřadného systému. Potřebujeme kladné číslo y_{04}. Pro zjištění hodnoty R_2 budeme vycházet z obecného tvaru rotačního paraboloidu tak, že do rovnice dosadíme známé hodnoty, a vyjádříme R_2. Hodnota pro $r = R_2$ je $y_{r3} = 0$. Dosazením těchto hodnot do předchozího výrazu dostaneme :

$$0 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R_2^2 - y_{04}$$

$$R_2^2 = \frac{2 \cdot g \cdot y_{04}}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y_{04}}{\omega^2}}$$

Zjištené R_2, dále doplníme do výrazu (28):

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot y_{04} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot y_{04}}{\omega^2} \cdot y_{04}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot y_{04} + \frac{\pi \cdot g \cdot y_{04}^2}{(2 \cdot \pi \cdot n)^2}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot y_{04} + \frac{g \cdot y_{04}^2}{4 \cdot \pi \cdot n^2} \tag{29}$$

Ze vztahu (29) vidíme, že máme jedinou neznámou (proměnnou) y_{04}. Vyjádříme ji jako funkci objemu v závislosti na y_{04}. Matematicky: $V = V(y_{04})$. Abychom ji mohli použít, musíme najít závislost y_{04} na otáčkách n. Vycházíme z přílohy 9:

$$H_2 + y_{04} = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{D^2}{4}$$

$$y_{04} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot n)^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{D^2}{4} - H_2$$

$$y_{04} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{D^2}{4} - H_2 = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2}{2 \cdot g} - H_2 \tag{30}$$

Provedeme kontrolu pro $y_{04} = 0$, dosadíme do předchozí rovnice (30):

$$0 = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2}{2 \cdot g} - H_2 \quad \Rightarrow \quad n = n_p = \sqrt{\frac{g \cdot H_2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}}$$

Z výrazu (29) konstatujeme, že se zvyšením otáček $n > n_p$ se bude objem v nádrži dále zmenšovat. Dosadíme-li y_{04} do vztahu, dostaneme:

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2}{2 \cdot g} - H_2\right) + \frac{g}{4 \cdot \pi \cdot n^2} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2}{2 \cdot g} - H_2\right)^2$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 + \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot n^2 \cdot D^4}{16 \cdot g} + \frac{g}{4 \cdot \pi \cdot n^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\pi^4 \cdot n^4 \cdot D^4}{4 \cdot g^2} - 2 \cdot H_2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2}{2 \cdot g} + H_2^2\right)$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot n^2 \cdot D^4}{16 \cdot g} + \frac{g \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot D^4}{16 \cdot \pi \cdot n^2 \cdot g^2} - \frac{2 \cdot H_2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot D^2 \cdot g}{8 \cdot g \cdot \pi \cdot n^2} + \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi \cdot n^2}$$

$$V_{r2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 - \frac{\pi^3 \cdot n^2 \cdot D^4}{16 \cdot g} + \frac{\pi^3 \cdot n^2 \cdot D^4}{16 \cdot g} - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H_2 + \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$V_{r2} = \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{k_3}{n^2} \tag{31}$$

$$V_{r2} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}17^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{0{,}022560929}{n^2}$$

Obdržíme vztah pro objem vody v nádobě závisející na otáčkách, přitom musí platit $n > n_p$. Provedeme kontrolu tak, že při otáčkách n_p se objem vody v nádobě bude rovnat. Dosadíme n_p neboli výraz (27) do rovnice (31):

$$V_p = \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{n_p^2} = \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\frac{g \cdot H_2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}} = \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot R^2}{g \cdot H_2}$$

$$V_p = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H_2}{2} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot H_2}{8}$$

Vztahy pro objemy, které jsme odvodili v předchozích odstavcích můžeme vykreslit. Závislost objemů na otáčkách je znázorněno na obrázku (příloha 10).

V předchozích odstavcích jsme zjistili závislost mezi otáčkami a objemem vody v rotující nádobě. Přišli jsme na to, že na dvou intervalech, $\langle n_0, n_p \rangle$ a na $\langle n_p, \infty)$ se bude objem vody v rotující nádobě jinak měnit v závislosti na otáčkách. Budeme teď vyšetřovat spojitost křivek v bodě napojení $n = n_p$:

1. na intervalu $\langle n_0, n_p \rangle$, derivováním rovnice (26) dostaneme:

$$\frac{dV_{r1}}{dn} = \frac{d(k_1 - k_2 \cdot n^2)}{dn} = -2 \cdot k_2 \cdot n$$

2. na intervalu $\langle n_p, \infty)$, derivováním výrazu (32) dostaneme:

$$\frac{dV_{r2}}{dn} = \frac{d(k_3 \cdot n^{-2})}{dn} = -2 \cdot k_3 \cdot n^{-3}$$

Dosazením $n = n_p$ do předchozích rovnic dostaneme, jestli se křivky budou měnit spojitě nebo ne:

1.

$$\frac{dV_{r1}}{dn} = -2 \cdot k_2 \cdot n_p = -2 \cdot \frac{\pi^3 \cdot D^4}{16 \cdot g} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\pi^2 \cdot D^2}}$$

$$\frac{dV_{r1}}{dn} = -2 \cdot \frac{\pi^3 \cdot D^4}{16 \cdot g} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}}{\pi \cdot D} = -\frac{\pi^2 \cdot D^3 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}}{8 \cdot g}$$

$$\frac{dV_{r1}}{dn} = -\frac{\pi^2 \cdot 0{,}4^3 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}17}}{8 \cdot 9{,}81} = -0{,}014699233$$

2.
$$\frac{dV_{r2}}{dn} = -2 \cdot k_3 \cdot n_p^{-3} = -2 \cdot \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\pi^2 \cdot D^2}}\right)^3}$$

$$\frac{dV_{r2}}{dn} = -2 \cdot \frac{g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}}{\pi \cdot D}\right)^3} = \frac{-2 \cdot g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi^3 \cdot D^3}{\left(\sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}\right)^3}$$

$$\frac{dV_{r2}}{dn} = \frac{-2 \cdot g \cdot H_2^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi^3 \cdot D^3}{\left(\sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}\right)^3} = -\frac{g \cdot H_2^2 \cdot \pi^2 \cdot D^3}{2 \cdot (2 \cdot g \cdot H_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dV_{r2}}{dn} = -\frac{9{,}81 \cdot 0{,}17^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}4^3}{2 \cdot (2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}17)^{\frac{3}{2}}} = -0{,}014699233$$

V tomto případě křivky v bodě $n = n_p$ se napojují spojitě. Z přílohy 10 je zřejmé, že v bodě $n = n_0$ se křivky nenapojojí spojitě.

2.2.2. Aplikace odvozených rovnic pro vylévání na příkladě

V této kapitole se zabýváme analýzou jevů rotační nádoby, když je zakryta víkem. Při rotaci nádoby odstraníme víko za nekonečne krátkou dobu, to jest nekonečně rychle. Budeme uvažovat, že voda je nesmáčivá, abychom se nemuseli zabývat odebrání vody spolu s víčkem, anebo uvažujeme, že daný objem je tak malý vzhledem k objemu vody v nádobě, že to z prostého důvodu zanedbáme.
Pro tento problém máme odvozené všechny potřebné rovnice v kapitole (2.2.1.). Budeme využívat tyto rovnice pro zjištění objemu vody v rotující nádobě. Jako první je potřeba zjistit jaká je úhlová rychlost, a po zjištění této hodnoty můžeme konstatovat, do kterého intervalu náleží hodnota. Teoretický postup je takový, že při daných otáčkách odebereme víko a voda se bude vylívat při konstantních otáčkách po nějakou dobu. Tento jev bude kopírovat závislost objemu na otáčkách odvozenou v kapitole (2.2.1.). To znamená, že objem se bude snižovat do hodnoty, která je dána charakteristikou (příloha 10) při daných otáčkách (otáčky při kterých odstraníme víko). Otáčky n_p již máme spočtené ($n_p = 1{,}453329531 \cdot s^{-1}$). Vykreslíme závislost objemu na otáčkách pro tento případ (příloha 11).

Pro úhlovou rychlost $\omega = 11 \cdot rad \cdot s^{-1}$ číselně platí:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{11}{2 \cdot \pi} = 1{,}750704375 \cdot s^{-1}$$

Z této úvahy můžeme vidět, že $n > n_p$, což znamená že se nacházíme v intervalu $\langle n_p, \infty)$. Pro tento interval jsme odvodili v kapitole (2.2.1.) vztah (31). Tento vztah vyjadřuje, kolik vody je ještě v nádobě. Číselně:

$$V=\frac{g\cdot H_2^2}{4\cdot\pi}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{9{,}81\cdot 0{,}17^2}{4\cdot\pi}\cdot\frac{1}{1{,}750704374^2}=0{,}007360907\cdot m^3=7{,}360907\cdot l$$

Teď provedeme výpočet objemu vody v nádobě jiným způsobem, který poslouží jako kontrola vztahu (31). Budeme postupovat takto:

- Známe obecně rovnice paraboly, vztah (8):

$$y=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2+C$$

- Pro náš případ, když tam není víko (viz přílohu 12):

$$y_{r4}=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2-y_{05} \tag{32}$$

- Stačí jeden bod ležící na parabole který známe, z toho se dá vyjádřit rovnice paraboly pro tento případ. Tento bod je $[R;H_2]$. Zpětným dosazením do vztahu (32) obdržíme neznámou konstantu y_{05}:

$$H_2=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2-y_{05}\quad\Rightarrow\quad y_{05}=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2-H_2$$

- Vyjadření rovnice hladinové plochy, y_{05} dosadíme do výrazu (32):

$$y_{r4}=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2-\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2+H_2 \tag{33}$$

$$y_{r4}=\frac{11^2}{2\cdot 9{,}81}\cdot r^2-\frac{11^2}{2\cdot 9{,}81}\cdot 0{,}2^2+0{,}17$$

$$y_{r4}=6{,}167176351\cdot r^2-0{,}076687054$$

- Teď vypočítáme poloměr R_3. Z přílohy 12 je patrné, že toto číslo vyjádřuje, že v jaké vzdálenosti od osy y má průsečík paraboly s osou r. Dosadíme do rovnice (33) bod $[R_3;0]$, a dostaneme:

$$0=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R_3^2-\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2+H_2$$

$$\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R^2-H_2=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot R_3^2$$

$$R^2-\frac{2\cdot g\cdot H_2}{\omega^2}=R_3^2\quad\Rightarrow\quad R_3=\sqrt{R^2-\frac{2\cdot g\cdot H_2}{\omega^2}}$$

- Dále budeme postupovat tak, že vytkneme elementární prvek a budeme integrovat přes celý objem vody. Proto jsme potřebovali vztah pro R_3, protože to je dolní mez v integrací. Výpočet:

$$dV = y_{r4}(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\int_0^{V_2} dV = \int_{R_3}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 - \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 + H_2 \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$V_2 = \int_{R_3}^{R} \frac{\omega^2}{g} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot dr - \int_{R_3}^{R} \frac{\omega^2}{g} \cdot R^2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr + \int_{R_3}^{R} H_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \omega^2}{g} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_3}^{R} - \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot R^2}{g} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_3}^{R} + 2 \cdot \pi \cdot H_2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_3}^{R}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \cdot \left[R^4 - \left(R^2 - \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \right)^2 \right] - \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot R^2}{2 \cdot g} \cdot \left[R^2 - \left(R^2 - \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \right) \right] +$$

$$+ \pi \cdot H_2 \cdot \left[R^2 - \left(R^2 - \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \right) \right]$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \cdot \left[R^4 - \left(R^4 - 2 \cdot \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \cdot R^2 + \frac{4 \cdot g^2 \cdot H_2^2}{\omega^4} \right) \right] - \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot R^2}{2 \cdot g} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \right] + \pi \cdot H_2 \cdot \left[\frac{2 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \right]$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \cdot \left[\frac{4 \cdot g \cdot H_2}{\omega^2} \cdot R^2 - \frac{4 \cdot g^2 \cdot H_2^2}{\omega^4} \right] - \pi \cdot R^2 \cdot H_2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot g \cdot H_2^2}{\omega^2}$$

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H_2 - \frac{\pi \cdot g \cdot H_2^2}{\omega^2} - \pi \cdot R^2 \cdot H_2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot g \cdot H_2^2}{\omega^2}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot g \cdot H_2^2}{\omega^2}$$

Číselně to činí:

$$V_2 = \frac{\pi \cdot g \cdot H_2^2}{\omega^2} = \frac{\pi \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}17^2}{11^2} = 7{,}360907 \cdot l$$

Výsledek kontroly vychází stejně jak u odvozených rovnic. To znamená, že úvaha byla správná, odvozené rovnice platí a můžeme je dál používat na příkladech.

3. KAPITOLA 2

3.1. Vyprazdňování nádoby při rotaci otvorem

3.1.1. Bernoulliho rovnice a výtoková rychlost [2]

Našim cílem bude vypočítat čas, za který vyteče kapalina z nádoby při rotaci. Při této problematice jsme omezeni, a budeme využívat další vztahy pro definici problému. Tento vztah bude Torricelliho teoretická výtoková rychlost a Bernoulliho rovnice. Obecně Bernoulliho rovnice bez ztrát:

$$\frac{p_{B1}}{\rho} + \frac{v_{B1}^2}{2} + g \cdot h_{B1} = \frac{p_{B2}}{\rho} + \frac{v_{B2}^2}{2} + g \cdot h_{B2}$$

Podle přílohy 13 odvodíme teoretickou výtokovou rychlost bez ztrát z Bernoulliho rovnice, za předpokladu: $p_{B1} = p_{atm}$, $p_{B2} = p_{atm}$, $h_{B2} = 0 \cdot m$, $h_{B1} = h_0, v_{B1} = ?$, $v_{B2} = ?$. Z rovnice kontinuity máme závislost v_{B1} na v_{B2} nebo opačně. Rovnice kontinuity:

$$v_{B1} \cdot S_1 = v_{B2} \cdot S_2$$

Protože $S_1 \gg S_2 \;\Rightarrow\; v_{B1} \ll v_{B2}$. Z této úvahy můžeme uvažovat, že v_{B1} je zanedbatelně malé vůči v_{B2}. Matematicky $v_{B1} \approx 0 \cdot m \cdot s^{-1}$. Torricelliho teoretická výtoková rychlost je odvozena aplikováním Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g \cdot h_0 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_{B2}^2}{2} + g \cdot 0$$

$$g \cdot h_0 = \frac{v_{B2}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{B2} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Tento vztah ale není postačující, protože v místě kde voda vytéká je ventil. Ventil působí značné ztráty. Přičemž uvažujeme délku ventilu za zanedbatelnou.

Bernoulliho rovnice se ztrátami:

$$\frac{p_{B1}}{\rho} + \frac{v_{B1}^2}{2} + g \cdot h_{B1} = \frac{p_{B2}}{\rho} + \frac{v_{B2}^2}{2} + g \cdot h_{B2} + Y_{z1,2}$$

Obecně ztrátová měrná energie Y_z je závislá na rychlosti (ξ - je ztrátový součinitel):

$$Y_z = \xi \cdot \frac{v^2}{2}$$

Odvození skutečné výtokové rychlosti pro: $p_{B1} = p_{atm}$, $p_{B2} = p_{atm}, v_{B1} = ?$, $h_{B1} = h_0$, $v_{B2} = ?$, $h_{B2} = 0 \cdot m$. Nejprve z rovnice kontinuity vyjádříme v_{B1}, pak to dosadíme do Bernoulliho rovnice:

$$v_{B1} \cdot S_1 = v_{B2} \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad v_{B1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot v_{B2}$$

$$v_{B1} = \frac{\frac{\pi \cdot d_v^2}{4}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \cdot v_{B2} \quad \Rightarrow \quad v_{B1} = \frac{d_v^2}{D^2} \cdot v_{B2}$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{\left(\frac{d_v^2}{D^2} \cdot v_{B2}\right)^2}{2} + g \cdot h_0 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_{B2}^2}{2} + g \cdot 0 + \xi \cdot \frac{v_{B2}^2}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2 \cdot v_{B2}^2}{2} + g \cdot h_0 = \frac{v_{B2}^2}{2} \cdot (1 + \xi)$$

$$g \cdot h_0 = \frac{v_{B2}^2}{2} \cdot \left[1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2\right]$$

$$v_{B2}^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_0}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad v_{B2} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_0}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \tag{34}$$

Obdrželi jsme vztah (34) pro výtokovou rychlost.

3.1.2. Čas za kterou se nádoba vyprázdní

Úkolem bude vyjádřit elementární objem. Z přílohy 14 vypíšeme potřebné parametry a vypočítáme objemy V_3 a V_4. Z těchto objemů formulujeme rovnici pro elementární objem. Pro výpočet objemů V_3 a V_4 vyházíme z výrazu (13):

$$dV = y_{r1}(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$dV = \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + y_{01}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\int_0^{V_3} dV = \int_0^R \left(\frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot r^3 + y_{01} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r\right) \cdot dr$$

$$V_3 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R + 2 \cdot \pi \cdot y_{01} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

$$V_3 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + \pi \cdot y_{01} \cdot R^2$$

$$dV = y_{r5}(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$dV = \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 + y_{01} - dy_0\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\int_0^{V_4} dV = \int_0^R \left[\frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot r^3 + (y_{01} - dy_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r\right] \cdot dr$$

$$V_4 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R + 2 \cdot \pi \cdot (y_{01} - dy_0) \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

$$V_4 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + \pi \cdot (y_{01} - dy_0) \cdot R^2$$

$$dV = V_4 - V_3 = \left(\frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + \pi \cdot (y_{01} - dy_0) \cdot R^2\right) - \left(\frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + \pi \cdot y_0 \cdot R^2\right)$$

$$dV = -\pi \cdot dy_0 \cdot R^2$$

Vyjádříme čas za kterou voda vyteče z nádoby při rotaci. Výtoková rychlost je už vyjádřena ze vztahu (34), jedinou změnu provedeme, h_0 změníme na y_0. Výtokový čas vypočteme z rovnice kontinuity a ze vztahu (34):

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad dV = Q \cdot dt = v_{B2} \cdot S_2 \cdot dt \tag{35}$$

$$Q \cdot dt = -\pi \cdot dy_0 \cdot R^2$$

$$-\pi \cdot dy_0 \cdot R^2 = v_{B2} \cdot S_2 \cdot dt$$

$$-\pi \cdot dy_0 \cdot R^2 = v_{B2} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt$$

$$-\pi \cdot dy_0 \cdot R^2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y_0}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt$$

$$-\pi \cdot dy_0 \cdot R^2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2 \cdot g \cdot y_0}} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d_v^2} = dt$$

$$\int_0^T dt = \int_{y_{01}}^0 -\pi \cdot dy_0 \cdot R^2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2 \cdot g \cdot y_0}} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d_v^2} \tag{36}$$

$$T = \sqrt{\frac{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2 \cdot g}} \cdot \frac{4 \cdot R^2}{d_v^2} \cdot \int_0^{y_{01}} \frac{dy_0}{\sqrt{y_0}}$$

$$T=\sqrt{\frac{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2\cdot g}}\cdot\frac{4\cdot R^2}{d_v^2}\cdot\left[\frac{\sqrt{y_0}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{y_{01}}$$

$$T=\sqrt{\frac{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2\cdot g}}\cdot\frac{8\cdot R^2}{d_v^2}\cdot\sqrt{y_{01}}$$

$$T=\sqrt{\frac{1+2-\left(\frac{0{,}02^2}{0{,}4^2}\right)^2}{2\cdot 9{,}81}}\cdot\frac{8\cdot 0{,}2^2}{0{,}02^2}\cdot\sqrt{0{,}026656472}$$

$$T=51{,}07424969\cdot s$$

Čas za který se nádoba vyprázdní je $T=51{,}07424969\cdot s$.

3.1.3. Výpočet objemu který vyteče z nádoby

Budeme zjišťovat objem který vyteče z nádoby při rotaci. Objem vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme zbylý objem v nádobě, pak ho odečteme z objemu na začátku. Výpočet provedeme tak, že vytkneme elementární prvek na objemu a zintegrujeme. Postup je logický z přílohy 16:

- zjistíme rovnice hladinové plochy $y_{r6}(r)$ z výrazu (8) dosazením bodu $r=r_v$ a $y_{r6}=0$:

$$y_{r6}=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2+y_{06}$$

$$0=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r_v^2+y_{06}\quad\Rightarrow\quad y_{06}=-\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r_v^2$$

$$y_{r6}=\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2-\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r_v^2$$

- vypočítáme objem zbylé vody v nádobě:

$$dV=y_{r6}(r)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot dr$$

$$dV=\left(\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r^2-\frac{\omega^2}{2\cdot g}\cdot r_v^2\right)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot dr$$

$$\int_0^{V_5}dV=\int_{r_v}^{R}\left(\frac{\omega^2\cdot\pi}{g}\cdot r^3-\frac{\omega^2\cdot\pi\cdot r_v^2}{g}\cdot r\right)\cdot dr$$

$$V_5 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_v}^{R} - \frac{\omega^2 \cdot \pi \cdot r_v^2}{g} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_v}^{R}$$

$$V_5 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{(R^4 - r_v^4)}{4} - \frac{\omega^2 \cdot \pi \cdot r_v^2}{g} \cdot \frac{(R^2 - r_v^2)}{2}$$

$$V_5 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \frac{r_v^4}{4} - \frac{\omega^2 \cdot \pi \cdot r_v^2}{g} \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$V_5 = \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \left(\frac{R^4}{4} + \frac{r_v^4}{4} - r_v^2 \cdot \frac{R^2}{2}\right)$$

- teď zjistíme objem uniklé vody:

$$\Delta V = V_0 - V_5$$

$$\Delta V = \pi \cdot R^2 \cdot h_0 - \frac{\omega^2 \cdot \pi}{g} \cdot \left(\frac{R^4}{4} + \frac{r_v^4}{4} - r_v^2 \cdot \frac{R^2}{2}\right)$$

$$\Delta V = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}15 - \frac{11^2 \cdot \pi}{9{,}81} \cdot \left(\frac{0{,}2^4}{4} + \frac{0{,}01^4}{4} - 0{,}01^2 \cdot \frac{0{,}2^2}{2}\right)$$

$$\Delta V = 0{,}003427153 \cdot m^3 = 3{,}427153 \cdot l$$

Objem vyteklé vody je $\Delta V = 0{,}003427153 \cdot m^3$.

3.1.4. Odvození závislosti mezi objemem a časem

Budeme zjišťovat závislost vytéklé vody v závislosti na času, vycházíme ze vztahu (35), přičemž t změníme na t_1:

$$dV = Q \cdot dt_1 = v_{B2} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1$$

$$dV = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y_0}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1 \qquad (37)$$

Ve výrazu (37) vystupují konstanty, přičemž y_0 je proměnné. Je závislé na čase: $y_0 = y_0(t_1)$. Vyjádříme funkci $y_0(t_1)$. Z přílohy 15 je logický postup:

- vyjádříme obecně čas t_1 ze vztahu (36), jedinou změnu provedeme y_0 změníme na y_{0k} (jedná se pouze o formální úpravu, aby bylo možné dosadit do výrazu (37)):

$$\int_0^{t_1} dt = \int_{y_{01}}^{y_0} -\pi \cdot dy_{0k} \cdot R^2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2 \cdot g \cdot y_{0k}}} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d_v^2}$$

$$t_1 = \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{\frac{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2\cdot g}} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d_v^2} \cdot \int_{y_0}^{y_{01}} \frac{dy_{0k}}{\sqrt{y_{0k}}}$$

$$t_1 = \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{\frac{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2\cdot g}} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d_v^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{y_{0k}}}{\frac{1}{2}}\right]_{y_0}^{y_{01}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}{2\cdot g}} \cdot \frac{R^2 \cdot 8}{d_v^2} \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}\right) = K \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}\right) \tag{38}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{1+2-\left(\frac{0{,}02^2}{0{,}4^2}\right)^2}{2\cdot 9{,}81}} \cdot \frac{0{,}2^2 \cdot 8}{0{,}02^2} \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}\right)$$

$$t_1 = 312{,}8244289 \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}\right)$$

- máme závislost, zbývá vyjádřit y_0 z rovnice (38) :

$$K \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}\right) = t_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1}{K} = \sqrt{y_{01}} - \sqrt{y_0}$$

$$\sqrt{y_0} = \sqrt{y_{01}} - \frac{t_1}{K} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \left(\sqrt{y_{01}} - \frac{t_1}{K}\right)^2$$

- y_0 dosadíme zpátky do výrazu (37):

$$dV = \sqrt{\frac{2\cdot g \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \frac{t_1}{K}\right)^2}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1$$

$$dV = \sqrt{\frac{2\cdot g}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{y_{01}} - \frac{t_1}{K}\right) \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1$$

$$dV = \sqrt{\frac{2\cdot g}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \sqrt{y_{01}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1 - \sqrt{\frac{2\cdot g}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{t_1}{K} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot dt_1$$

$$V = \sqrt{\frac{2\cdot g}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \sqrt{y_{01}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot \int_0^t dt_1 - \sqrt{\frac{2\cdot g}{1+\xi-\left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot \int_0^t t_1 \cdot dt_1$$

$$V(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \sqrt{y_{01}} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{4} \cdot t - \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 + \xi - \left(\frac{d_v^2}{D^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\pi \cdot d_v^2}{8} \cdot t^2$$

$$V(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81}{1 + 2 - \left(\frac{0{,}02^2}{0{,}4^2}\right)^2}} \cdot \sqrt{0{,}026656472} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot t - \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81}{1 + 2 - \left(\frac{0{,}02^2}{0{,}4^2}\right)^2}} \cdot \cdot \frac{1}{312{,}8244289} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{8} \cdot t^2$$

$$V(t) = K_2 \cdot t - K_3 \cdot t^2 = 0{,}000131171 \cdot t - 0{,}000001284 \cdot t^2$$

Poslední úlohou bylo odvodit závislost objemu na času. Vykreslíme graf (příloha 17).

4. ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo porozumění a získání základních poznatků z oblasti hydromechaniky. Myšlení a analytické řešení je v každém oboru inženýrství velice intuitivní a důležité.

Krok za krokem jsme rozebírali tento problém. Prvním krokem bylo odvodit z Eulerovy rovnice hydrostatiky rovnice hladinové plochy. Vycházeli jsme z trojrozměrné problematiky (3D). Po zamyšlení se tato problematika dá zjednodušit na rovinný problém (2D). U rovnice zachování hmoty jsme považovali hustotu vody za konstantní, neboť voda je nestlačitelná. Což není příliš přesné, ale pohybujeme se v malých tlacích a zrychleních, a proto je tato úvaha dostačující. Takovou úvahou jsme se dostali z rovnice zachování hmoty na rovnici zachování objemu. Dál jsme zjistili tlak a sílu na dno nádoby před a během rotace. Zjištěné síly měly totožnou hodnotu.

V kapitole 2.2. jsme důkladně rozebrali problematiku zabývající se vyprazdňováním nádoby za rotace. Byly odvozeny základní funkce. Bylo zjištěno, že v jednotlivých intervalech otáček dochází k vyprazdňování nádoby dle daných funkcí. V intervale $\langle n_0, n_p \rangle$ má zbylý objem v závislosti na otáčkách tvar paraboly. Naopak v intervale $\langle n_p, \infty)$ je závislosti zbylého objemu a otáček hyperbola. Dokázali jsme, že se tyto dvě funkce v bodě n_p napojuji spojitě. Závislost objemu na otáčkách je vykreslena v příloze 10.

Odvozené rovnice byly aplikovány na případě, kdy na nádobě bylo položeno víko a během rotace jsme ho rychle odstránili. Následně jsme vykreslili graf (příloha 11).

V Kapitole 2 jsme se soustředili na Bernoulliho rovnici. Na dně nádoby byl umístěn ventil. Cílem bylo zjistit kolik vody a za jaký časový interval vyteče z nádoby během rotace. Je zřejmé, používame-li ventil s větším průměrem, vyteče také více vody. Čas za který vyteče voda z nádoby je o něco větší, než byly původní odhady. Což je způsobeno konstantou ξ.

V poslední kapitole bylo cílem odvodit závislost vyteklého objemu na času, závislost jsme vykreslili (příloha 17).

Seznam použitých zdrojů:

[1] FLEISCHNER, Petr. *Hydromechanika*. Brno : Ediční středisko VUT Brno, 1977. 232 s. ISBN 80-214-0226-1.

[2] NOSKIEVIČ, Jaromír, et al. *Mechanika tekutin*. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. 356 s. ISBN 04-233-87.

[3] *VYPRAZDŇOVÁNÍ ROTUJÍCÍ NÁDOBY* [online]. 2008 [cit. 2011-04-20]. Vutbr.cz. Dostupné z WWW: <https://www.vutbr.cz/elearning/mod/resource/view.php?id=127843>.

Seznam hlavních použitých označení

Latinská písmena:

Označení	Rozměr	Význam
a_i	$[m \cdot s^{-2}]$	zrychlení
C	$[m]$	obecně konstanta
D	$[m]$	vnitřní průměr nádoby (zvolený $2 \cdot R = D = 0{,}4 \cdot m$)
d_v	$[m]$	vnitřní průměr ventilu (zvolený $2 \cdot r_v = d_v = 0{,}02 \cdot m$)
F_j	$[N]$	síla
g	$[m \cdot s^{-2}]$	tíhové zrychlení ($g = 9{,}81 \cdot m \cdot s^{-2}$)
h_k	$[m]$	patřičné rozměry z obrázků
H	$[m]$	maximální výška hladiny vody v nádobě při $\omega = 11 \cdot rad \cdot s^{-1}$
H_2	$[m]$	výška nádoby neboli výška uložení víka ($H_2 = 0{,}17 \cdot m$)
k_1	$[m^3]$	konstanta
k_2	$[m^3 \cdot s^2]$	konstanta
k_3	$[m^3 \cdot s^{-2}]$	konstanta
K	$\left[s \cdot m^{-\frac{1}{2}}\right]$	konstanta
K_2	$[m^3 \cdot s^{-1}]$	konstanta
K_3	$[m^3 \cdot s^{-2}]$	konstanta
n_n	$[s^{-1}]$	otáčky za sekundu
p_{atm}	$[Pa]$	atmosférický tlak ($p_{atm} = 101325 \cdot Pa$)
p_j	$[Pa]$	tlak
n_n	$[s^{-1}]$	otáčky za sekundu
p_{atm}	$[Pa]$	atmosférický tlak ($p_{atm} = 101325 \cdot Pa$)
p_y	$[Pa]$	tlak
R_o	$[m]$	patřičné rozměry z obrázků
T	$[s]$	čas za kterou voda vyteče z nádoby
V_p	$[m^3]$, $[l]$	objem
y_{rw}	$[m]$	rovnice hladinové plochy

y_{0q}	$[m]$	patřičné rozměry z obrázků a z rovnic
Y_z	$[J \cdot kg^{-1}]$	ztrátová měrná energie

Řecká písmena:

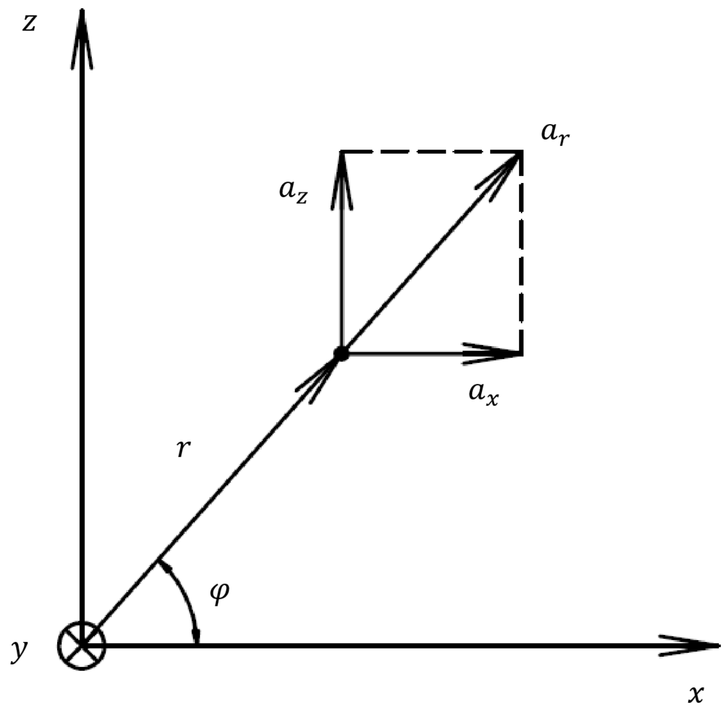
Označení	Rozměr	Význam
π	$[rad]$	Ludolfovo číslo ($\pi = 3{,}141592654 \cdot rad$)
ω_n	$[rad \cdot s^{-1}]$	úhlová rychlost (zvolený $\omega = 11 \cdot rad \cdot s^{-1}$)
ξ	$[1]$	ztrátový součinitel (zvolený $\xi = 2$)
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota vody ($\rho = 1000 \cdot kg \cdot m^{-3}$)

Indexy:

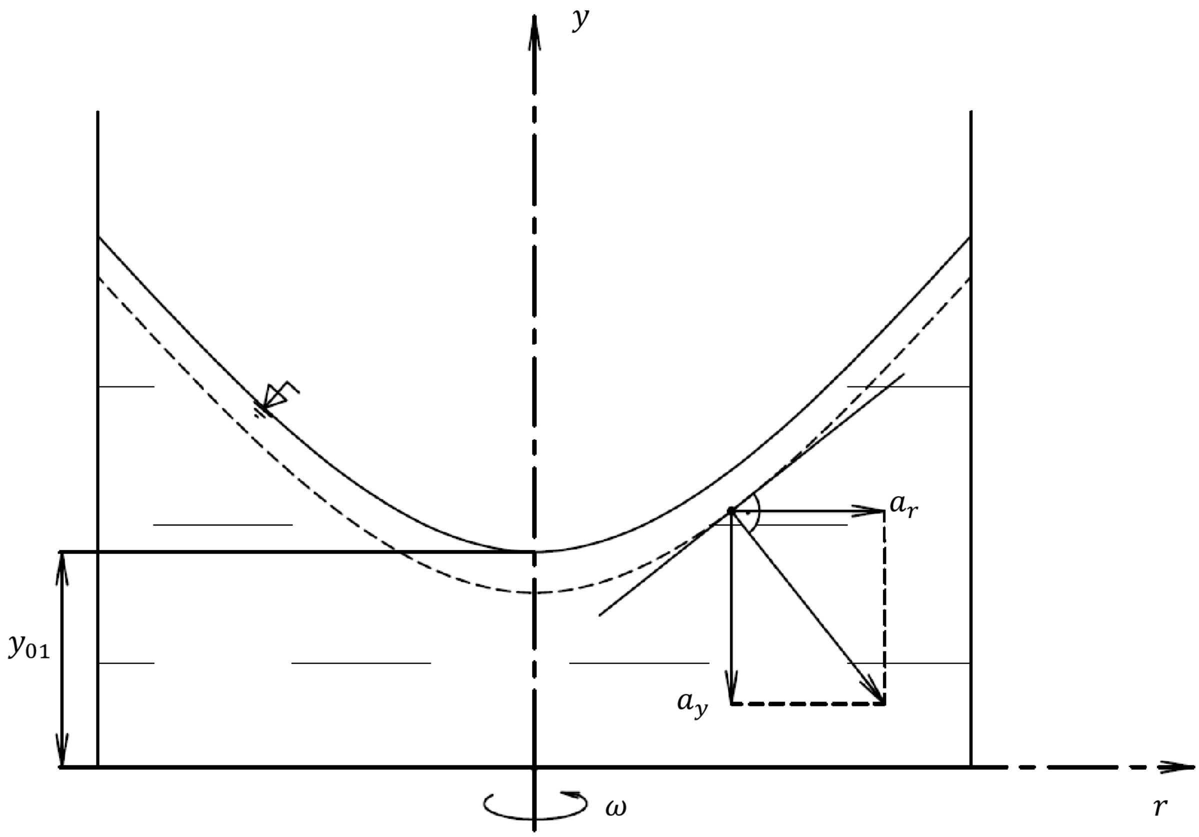
i	$i = x, y, z, r$
j	$j = 1{,}2$
k	$k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7, B1, B2$
m	$m = 1{,}2{,}3$
n	$n = 0, p$
o	$o = 1{,}2{,}3{,}4$
p	$p = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5, p, r1, r2, vzduch1, vzduch2,$
q	$q = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6, k$
y	$q = 1{,}2, B1, B2$
w	$w = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$

Seznam příloh

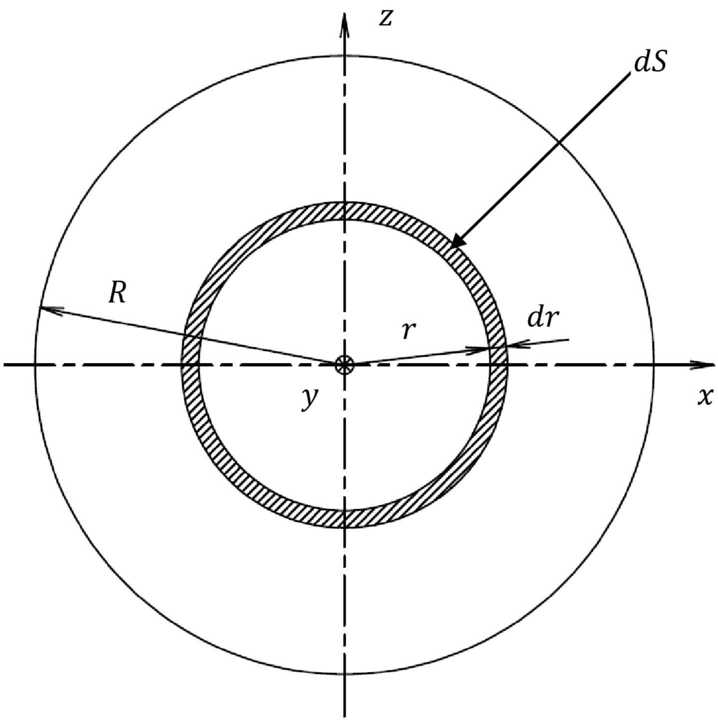
Příloha 1: Rozklad sil v rovině x-z



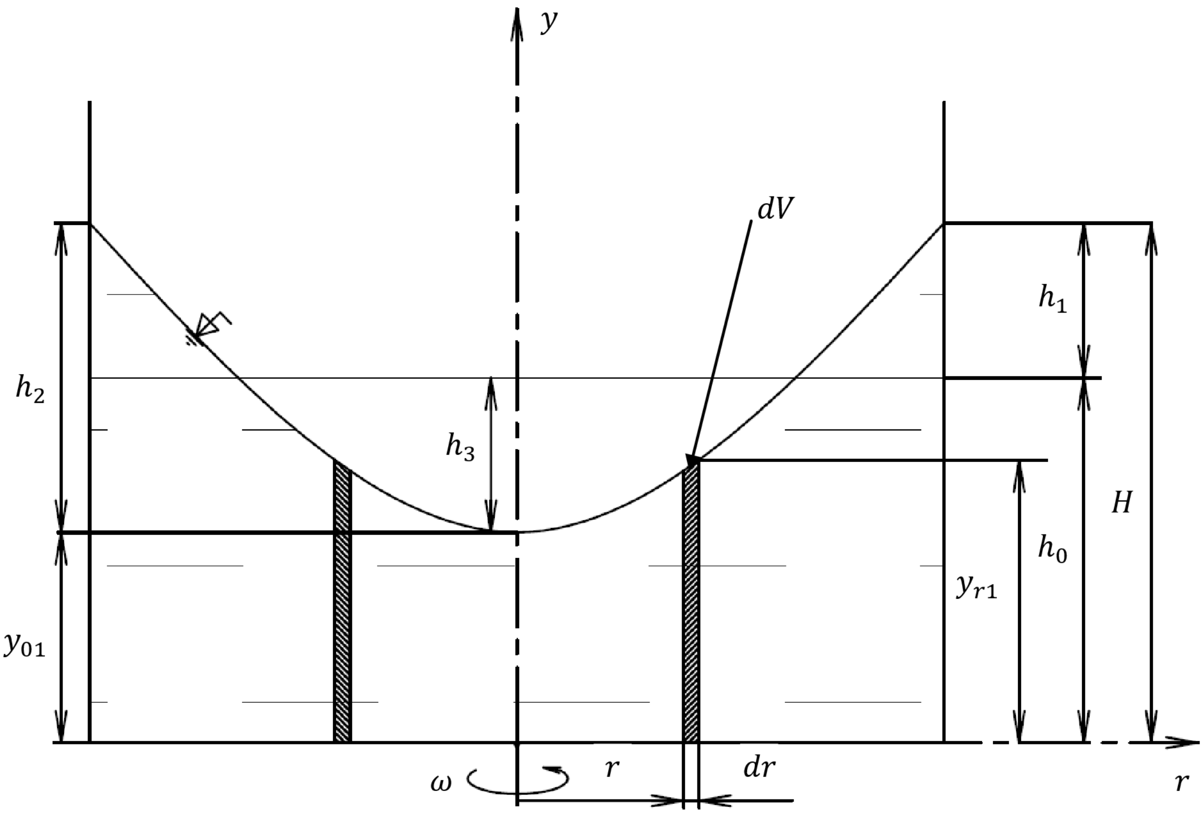
Příloha 2: Schéma rotující nádoby s vodou se silovým rozkladem v rovině r-y



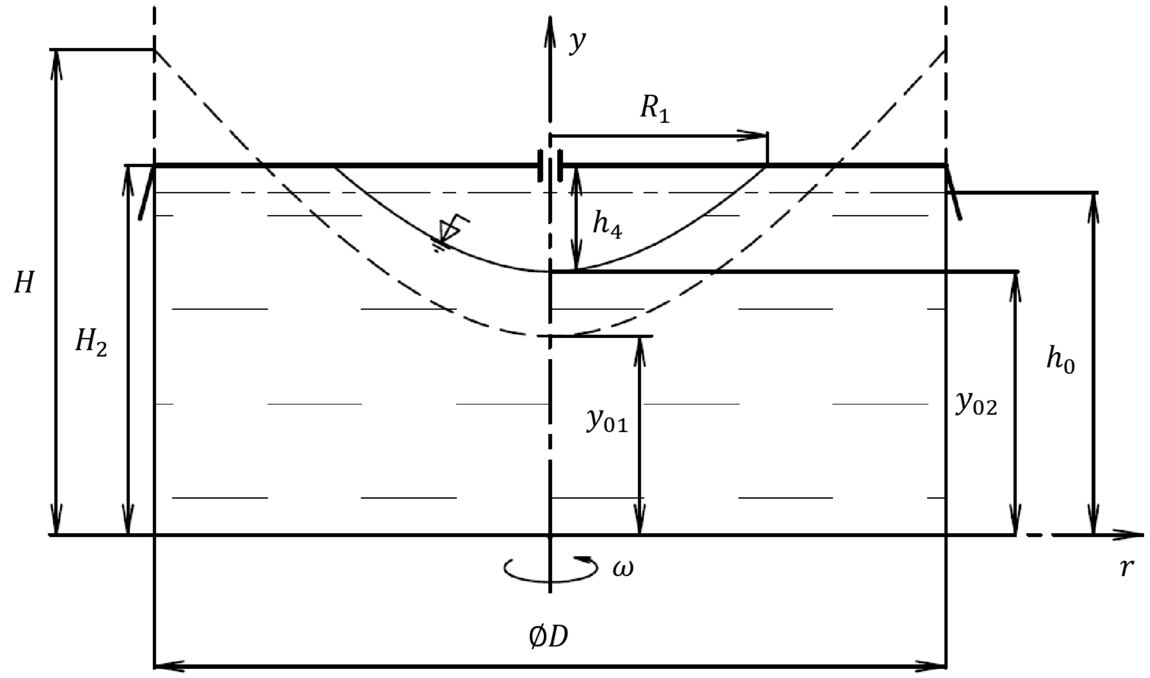
Příloha 3: Elementární plocha (pohled shora na dno nádoby)



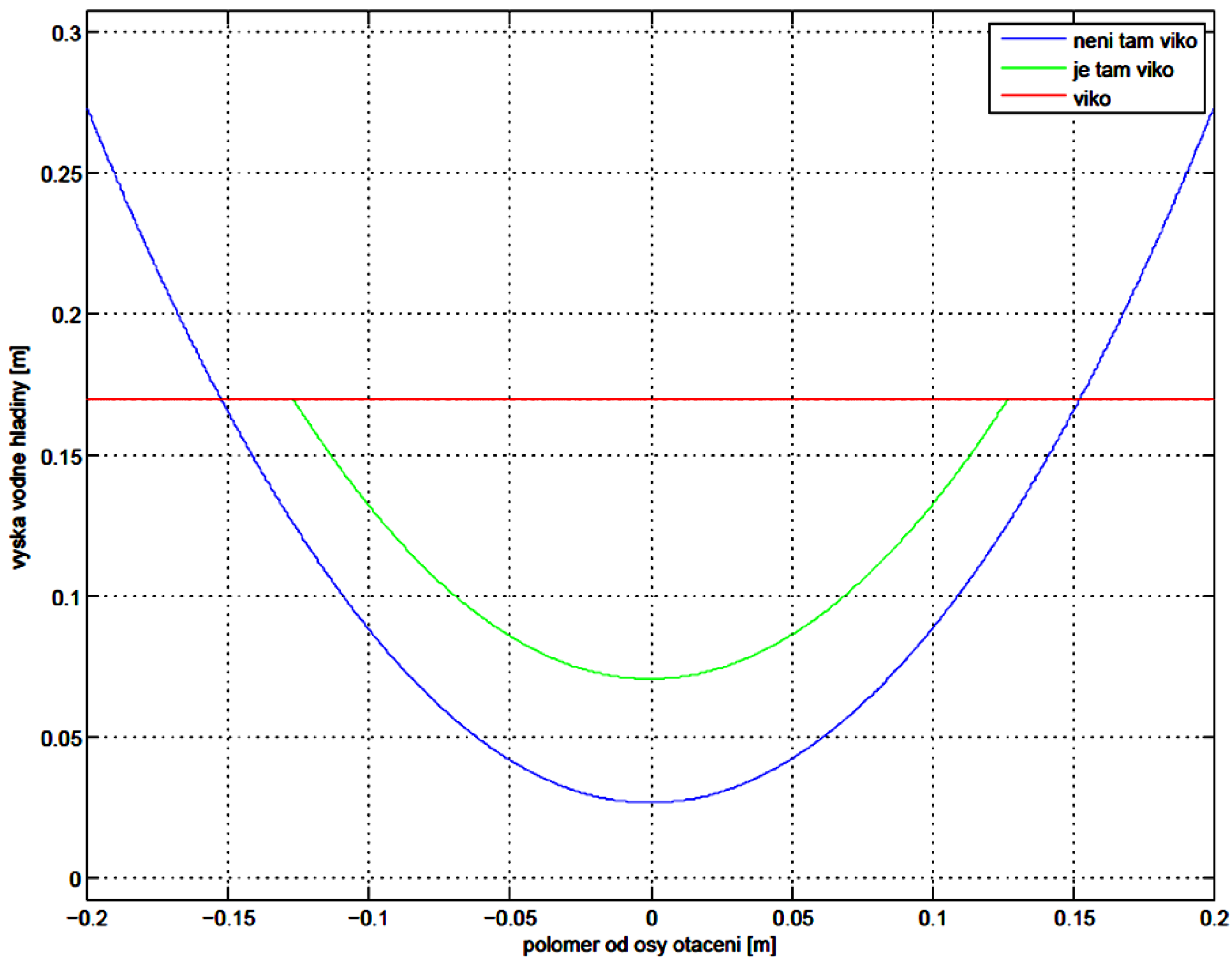
Příloha 4: Rotující nádoba s patřičnými rozměry a vyznačeným elementárním objemem



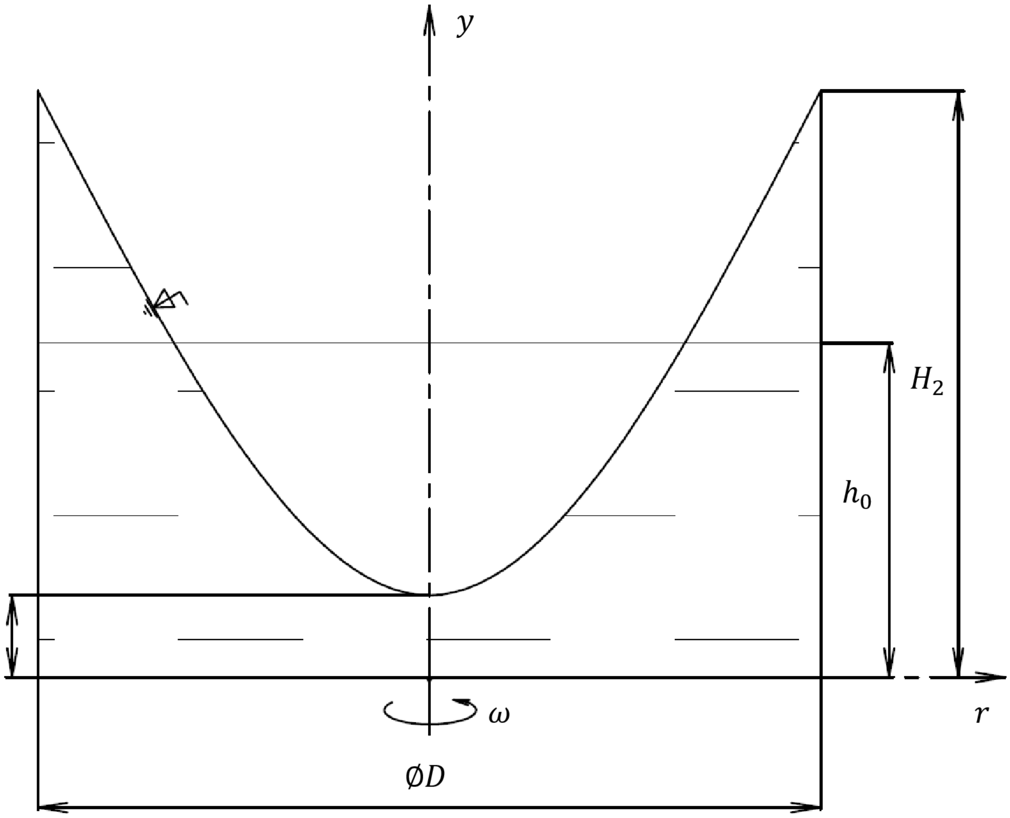
Příloha 5: Nádoba je zakryta víkem



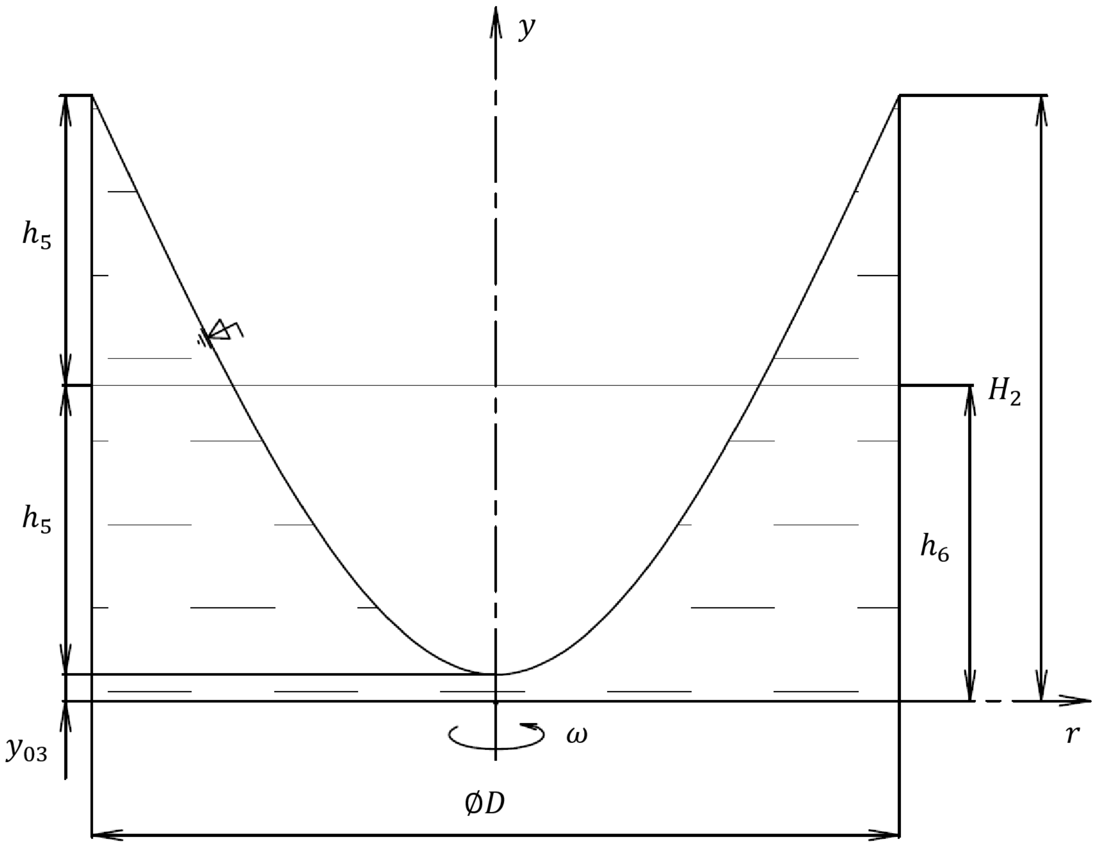
Příloha 6: Závislost výšky vodní hladiny na poloměru od osy otáčení



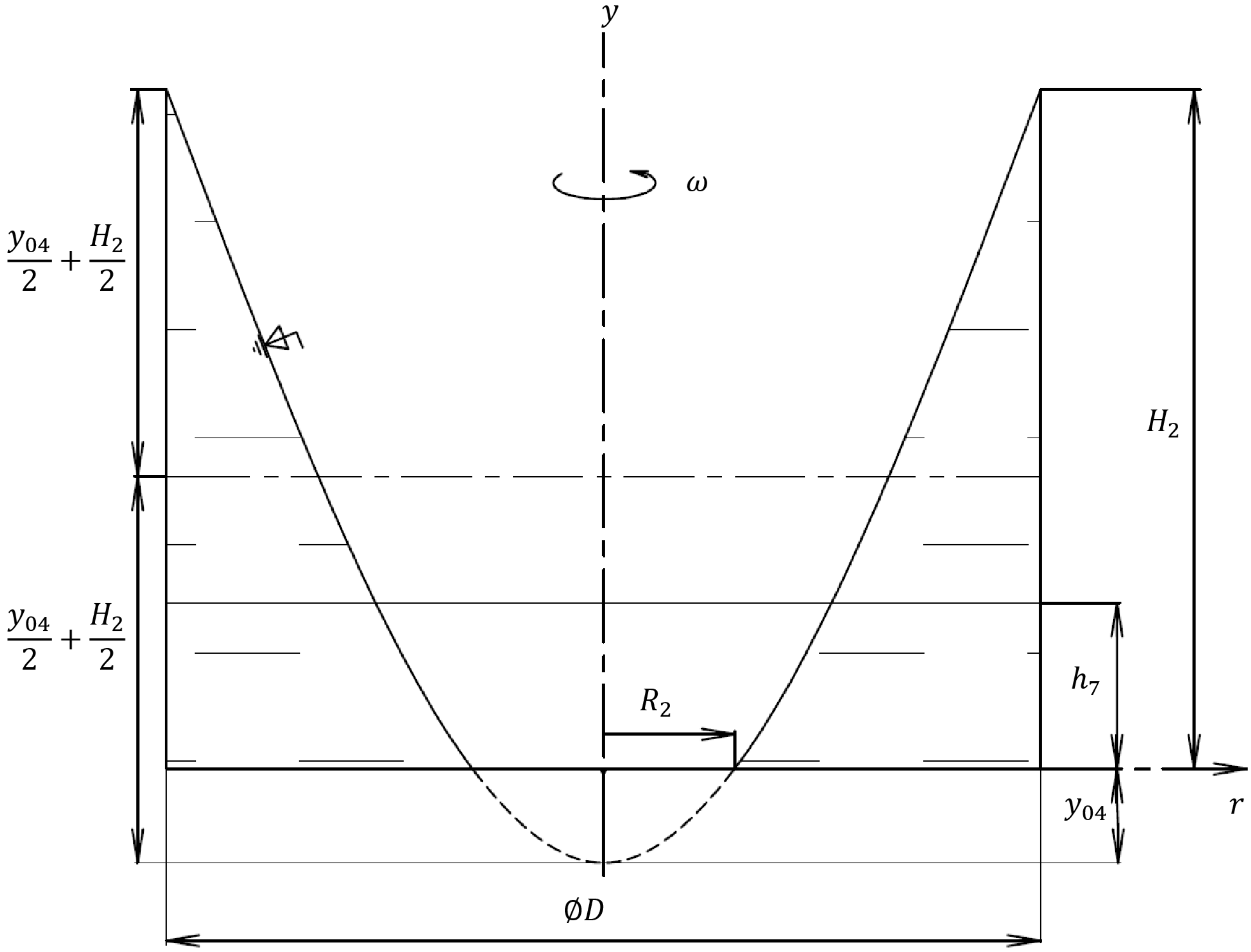
Příloha 7: Rotující nádoba, kdy se voda dotkne okraje nádoby



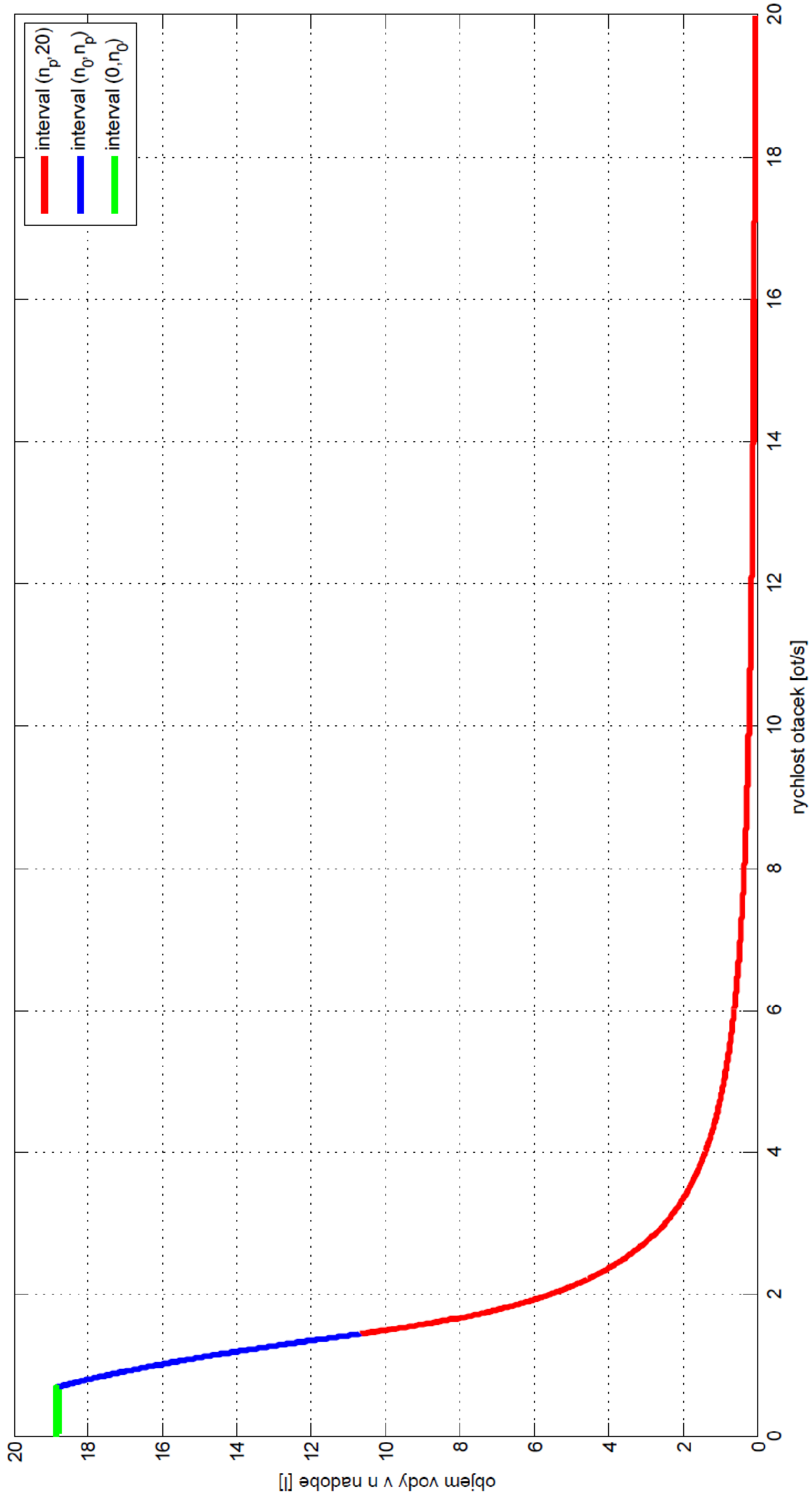
Příloha 8: V nádobě se objem vody začne zmenšovat



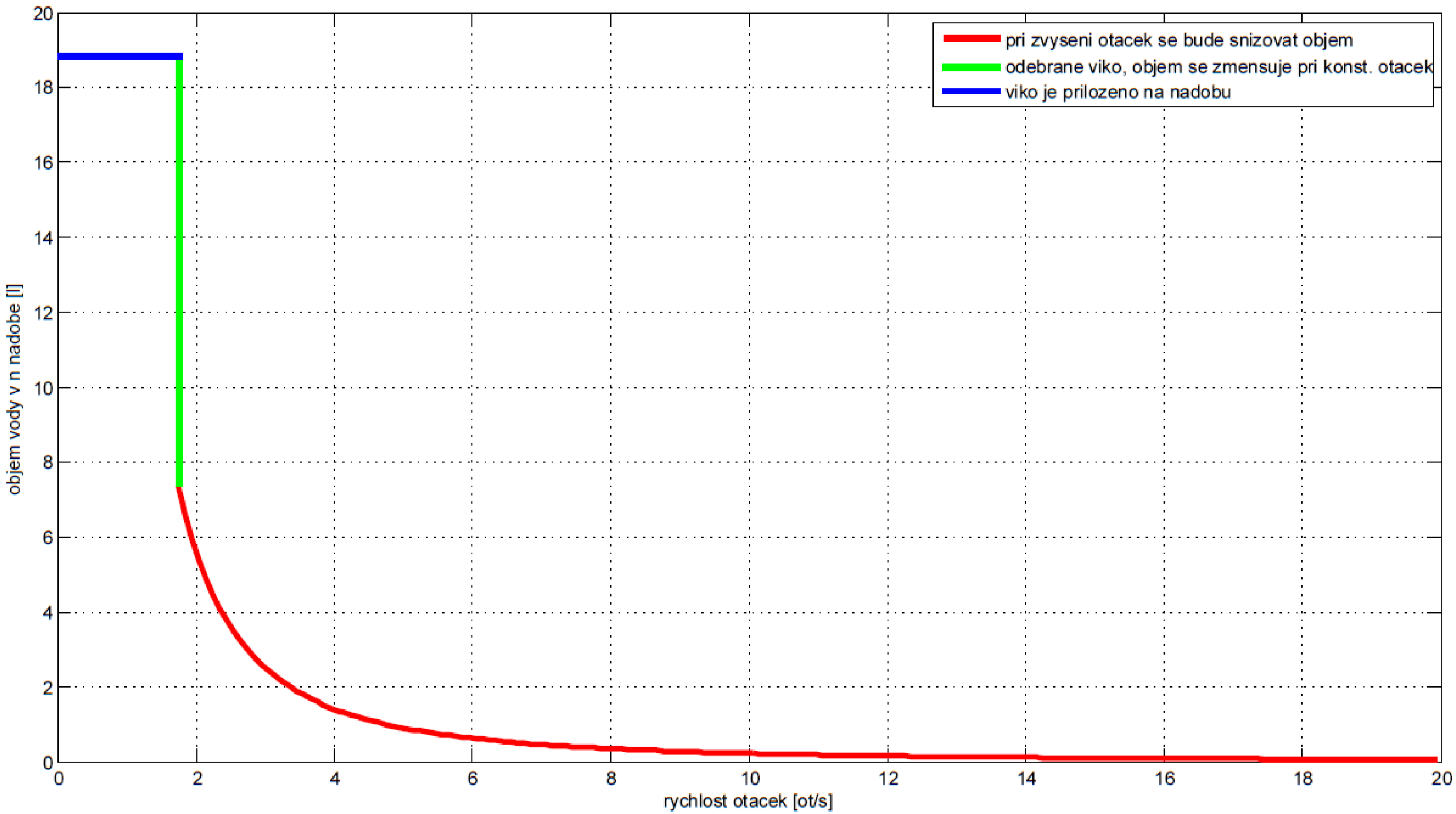
Příloha 9: Vrchol paraboloidy se dostal pod dno nádoby



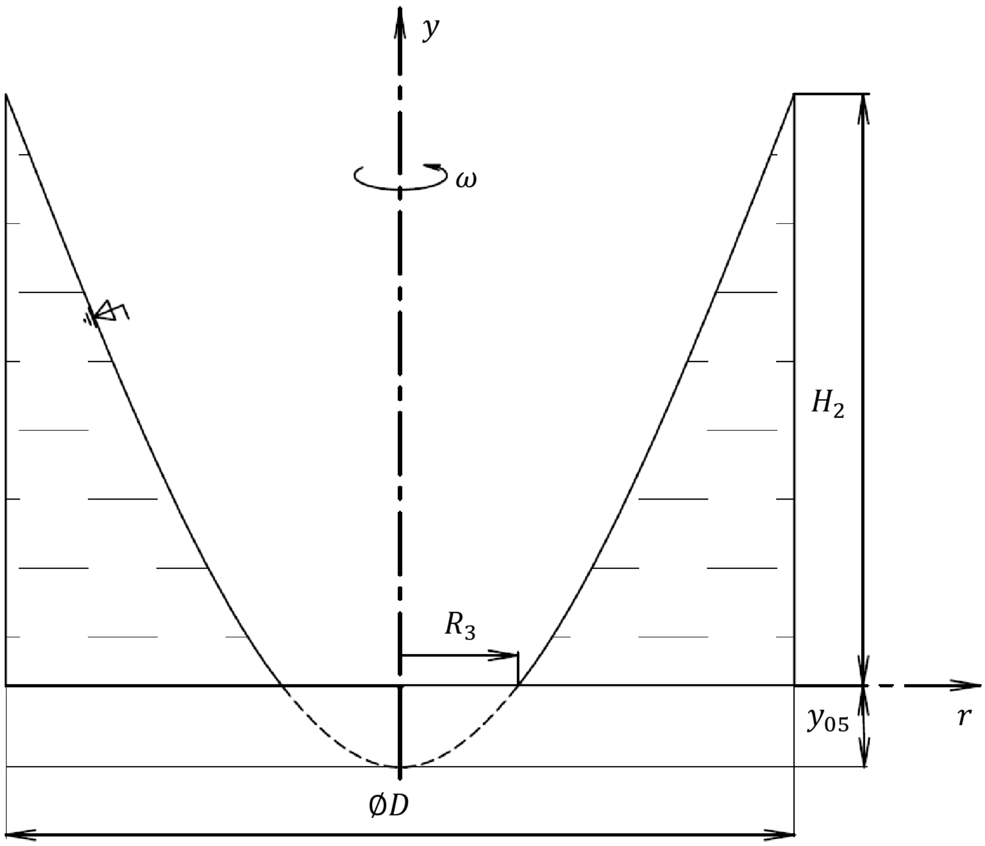
Příloha 10: Závislost objemu vody v nádobě na otáčkách



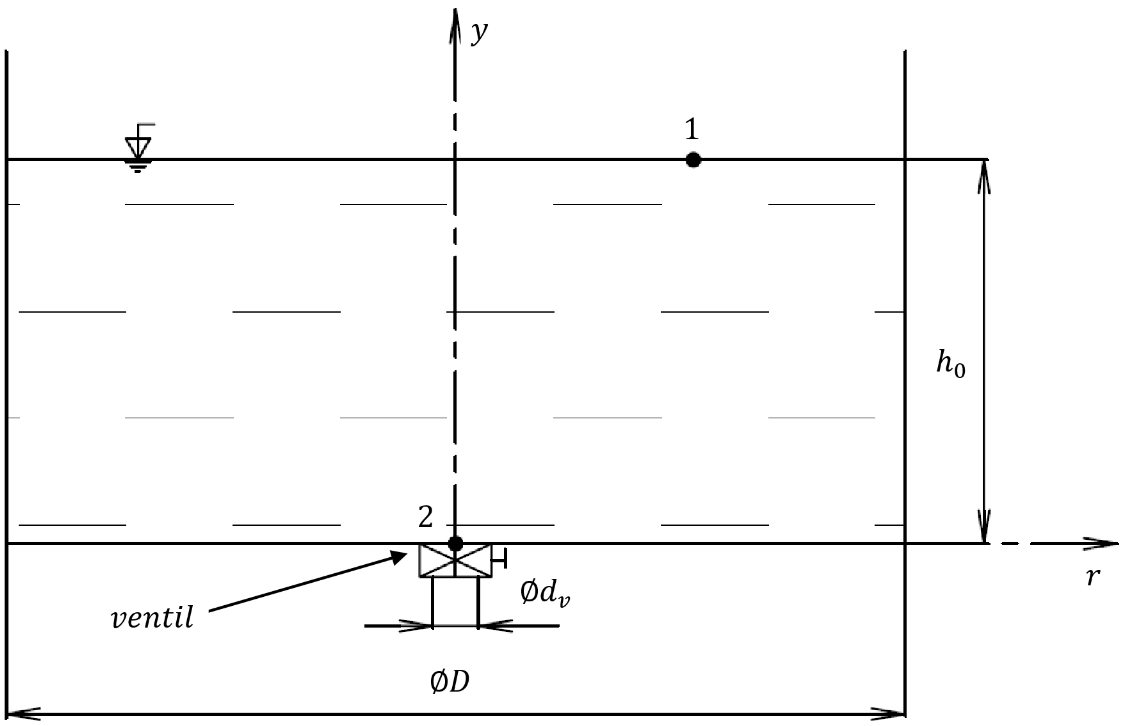
Příloha 11: Závislost objemu vody v nádobě na otáčkách (na příkladě)



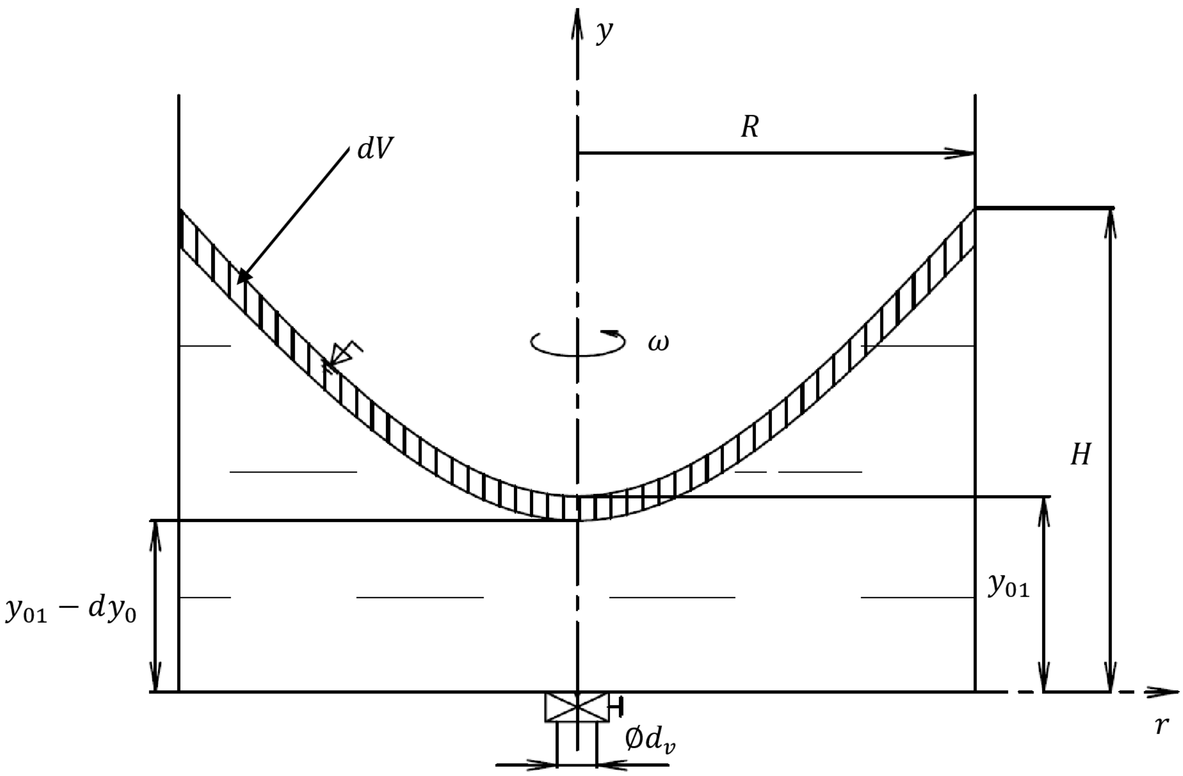
Příloha 12: Nádoba s patřičnými rozměry



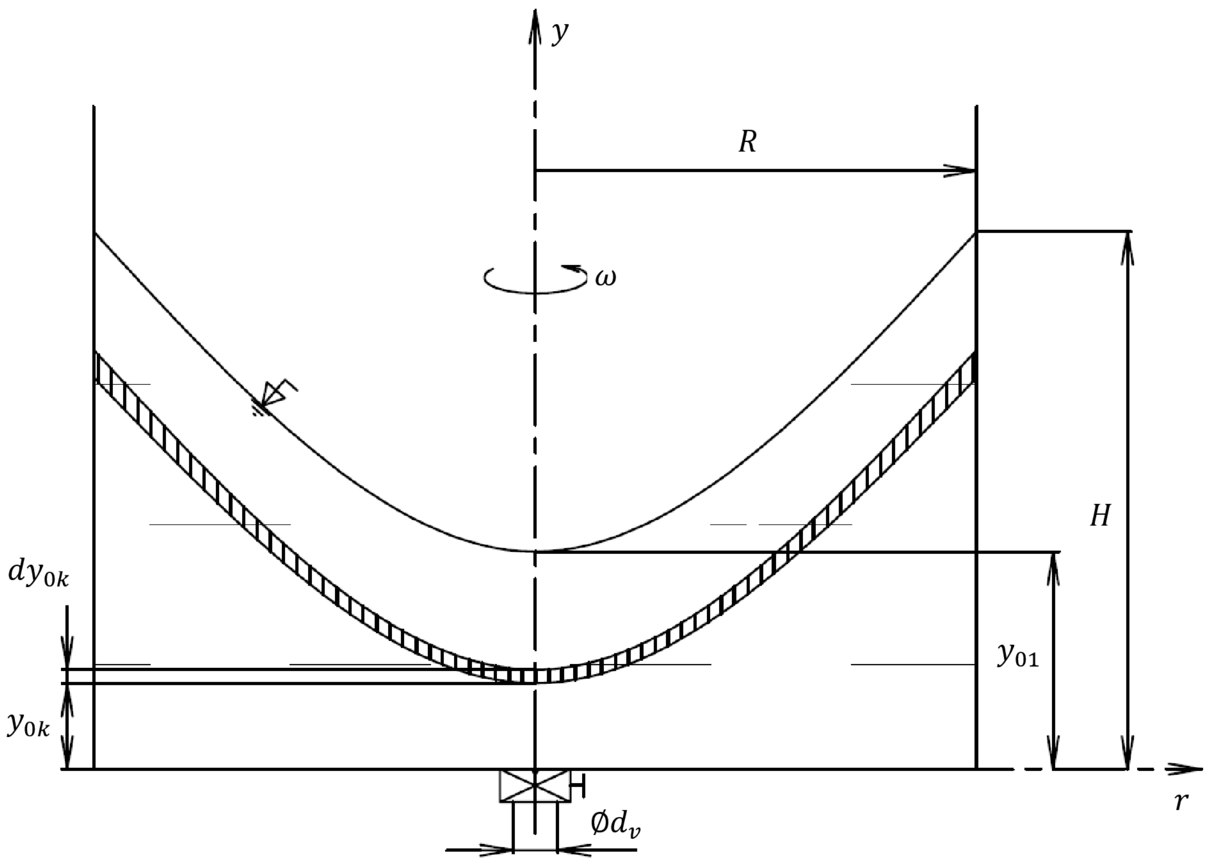
Příloha 13: Nádoba pro výpočet výtokové rychlosti



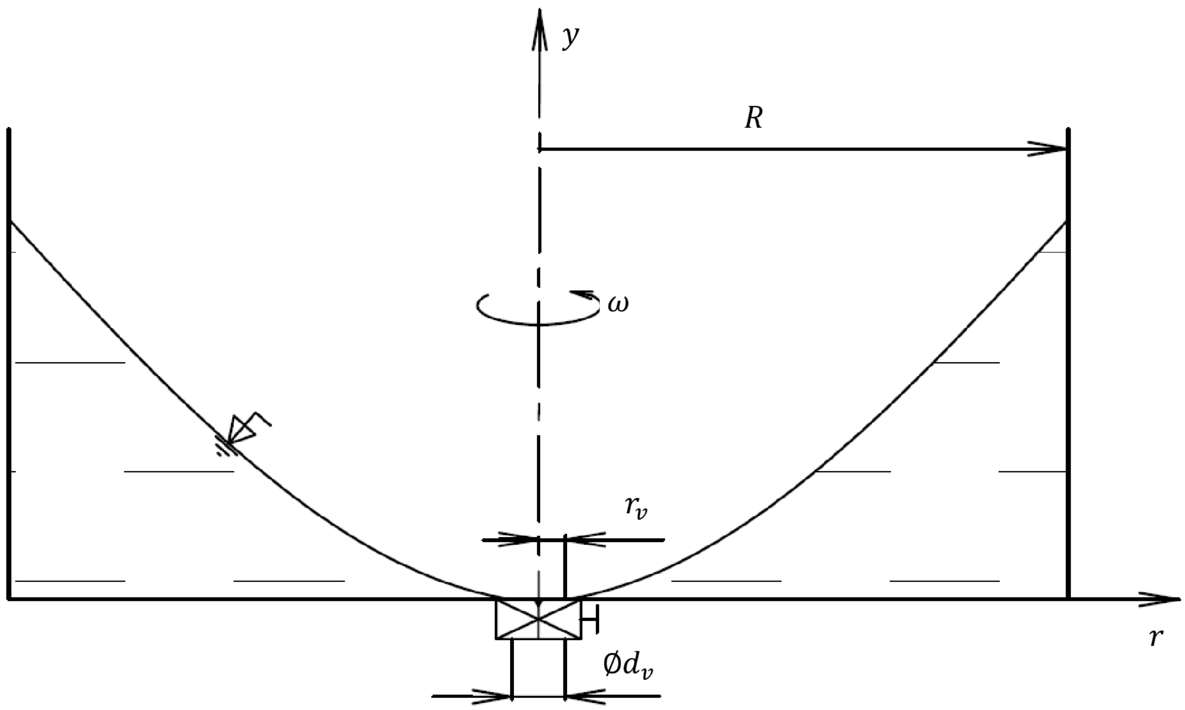
Příloha 14: Nádoba s vyznačeným elementárním objemem



Příloha 15: Nádoba s rozměry



Příloha 16: Stav, kdy z nádoby již nevyteče víc vody



Příloha 17: Závislost vyteklého objemu na čase