TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Derivace a její aplikace

Bakalářská práce

Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obory:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Geografie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborové)
Autor práce:	**Jana Čerychová**
Vedoucí práce:	RNDr. Daniela Bittnerová, CSc. Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Liberec 2019

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2017/2018**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Jana Čerychová**
Osobní číslo:	**P16000109**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Matematika se zaměřením na vzdělávání**
	Geografie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborové)
Název tématu:	**Derivace a její aplikace**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í :

Prostudovat historický vývoj pojmu derivace.
Porovnání způsobů zavedení pojmu derivace na středních školách.
Vypracování krátkodobého projektu na dané téma.
Praktická realizace tohoto projetu ve škole.
Zhodnocení.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Bittnerová, D. - Plačková, G.: Louskáček 1. Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné (Příklady). 4.vydání. TUL, Liberec 2014. Boctok, L. - Chandler, S.: Core Maths for A-level. The Bath Press. Avon. 1993. Brabec, J. - Martan, F. - Rozenský, Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985. Černý, I.: Matematická analýza, 1.část. [Skripta TU v Liberci.] Liberec 1995. Černý, I.: Matematická analýza, 2.část. [Skripta TU v Liberci.] Liberec 1996. Jarník, V.: Diferenciální počet I. Praha 1963. Kaňka, M. - Henzler, J.: Matematika pro ekonomy 2. Praha 1997 Veselý, J.: Matematická analýza pro učitele, 1.díl. Praha, Matfyzpress 1997.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.**

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **19. dubna 2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18. dubna 2019**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

L.S.

Technická univerzita v Liberci - 10 -

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 24. dubna 2018

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že texty tištěné verze práce a elektronické verze práce vložené do IS/STAG se shodují.

29. listopadu 2019 Jana Čerychová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat především RNDr. Daniele Bittnerové CSc. za její vedení, cenné rady a čas, který mi věnovala. Rovněž bych chtěla poděkovat RNDr. Jarmile Mulačové za umožnění realizace mého projektu. Nakonec bych chtěla poděkovat své rodině, která mě podporovala po celou dobu mého studia.

Anotace

Tato bakalářská práce se věnuje tématu derivace funkce jedné proměnné a její aplikace na středoškolské úrovni. Cílem je teoretické shrnutí daného tématu v rozsahu, ve kterém se s ním mohou studenti na středních školách setkat. Důraz je kladen na představení praktického využití derivace funkce jedné proměnné. Součástí práce je také návrh a realizace krátkodobého projektu zaměřeného na optimalizační úlohy. Poslední část bakalářské práce je věnována porovnání výukových materiálů zaměřených na diferenciální počet a zhodnocení jejich způsobu zavedení pojmu derivace funkce jedné proměnné.

Klíčová slova: derivace, diferenciální počet, aplikace, střední škola

Annotation

This bachelor thesis deals with the derivative of a function of a single variable and its application at the secondary school level. The goal is a theoretical summary of the topic at the secondary school level. The thesis puts an emphasis on practical application of the derivative. The thesis includes a proposal and a realization of short-term project which is directed at an optimization problems. The last part of the bachelor thesis contains a comporison of an educational materials which specialized in differential calculus. This part also includes an assessment of derivative defining in this materials.

Keywords: derivative, differential calculus, application, secondary school

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá diferenciálním počtem na středoškolské úrovni. Rozsah výkladu diferenciálního počtu na středních školách není pevně daný, některé střední školy se diferenciálním počtem vůbec nezabývají, některé ho mají součástí učebního plánu v rámci běžných hodin matematiky, jiné ho zařazují do volitelných předmětů zabývajících se matematikou či fyzikou. Rozsah výkladu diferenciálního počtu v této práci vychází ze středoškolských učebnic.

Derivace funkce patří na středních školách k nepopulárnímu učivu, studenti i někteří učitelé mu nevěnují příliš velkou pozornost, protože se raději soustředí na učivo, které je součástí státní maturity. Podle mého názoru učitel o hodinách matematiky zaujme studenty nejlépe tím, že jim ukáže využití probíraného učiva v běžném životě. Proto jsem si pro bakalářskou práci zvolila téma „Derivace a její aplikace“ a jako hlavní cíl si stanovila představení praktického využití derivace funkce jedné proměnné studentům středních škol.

Dílčích cílů má však tato bakalářská práce hned několik – teoretické shrnutí pojmu derivace funkce jedné proměnné a jeho aplikace na středoškolské úrovni, vypracování a realizace krátkodobého projektu na téma derivace a její aplikace, porovnání výukových materiálů zaměřených na diferenciální počet a zhodnocení jejich způsobu zavedení pojmu derivace funkce jedné proměnné.

První kapitola této práce se věnuje historickému vývoji diferenciálního počtu a objasňuje proslulý spor mezi Isaacem Newtonem a Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem o prvenství objevu derivace. V druhé kapitole objasňuji základní pojmy diferenciálního počtu na středoškolské úrovni. Ve třetí kapitole uvádím pět základních aplikací, kterými jsou: určení rovnice tečny a normály, vyšetřování průběhu funkce, L´Hospitalovo pravidlo, optimalizační úlohy a základní fyzikální aplikace. Ve čtvrté kapitole navrhuji projekt s názvem „Šetřivý matematik staví dům“, který je zaměřen na optimalizační úlohy a pomocí něhož ilustruji studentům použití derivace v běžném životě. Součástí práce je také realizace toho projektu a následné zhodnocení. Pátá kapitola se věnuje porovnání výukových materiálů zaměřených na diferenciální počet. K porovnání jsem vybrala čtyři materiály, se kterými mám vlastní zkušenosti z role studenta a přijdou mi přínosné. U každého výukového materiálu také zhodnocuji jeho způsob zavedení pojmu derivace funkce.

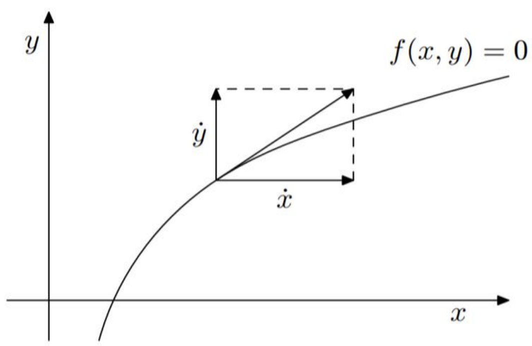
1 Historie diferenciálního počtu

S některými pojmy a myšlenkami souvisejícími s diferenciálním počtem se zabývali již filozofové ve starověkém Řecku. Již řecký filozof Zenon z Eleje (490–430 př. n. l.) se snažil svými paradoxy ukázat, že pro porozumění pohybu a změny je nutné pochopit pojem nekonečno. Řecký filozof Eudoxos z Knidu (408–355 př. n. l.) zavedl pojem libovolně malé veličiny, kterou definoval tvrzením: *„Odečteme-li od nějaké veličiny polovinu nebo více než polovinu a opakujeme-li tento postup dostatečně často, pak se vždy můžeme dostat k veličině, která je menší než nějaká daná veličina téhož druhu.“* Na přelomu středověku a renesance se tato metoda začala označovat jako exhaustivní neboli vyčerpávající. Eudoxos tuto metodu využil například pro určení obsahu kruhu, kdy kruh aproximoval n-úhelníkem, který rozdělil na pravidelné trojúhelníky. Obsah kruhu následně určil jako součet obsahů jednotlivých trojúhelníků. Další řeckou osobností byl Archimedes ze Syrakus (287–212 př. n. l.), který se mimo jiné zabýval křivkami, jež se snažil nahradit nekonečným počtem nekonečně krátkých úseček [1].

Významný rozvoj matematických poznatků nastal v období renesance. Základní otázky týkající se nejen diferenciálního a integrální počtu řešili mnozí matematici. V této době byly zkoumány plošné i prostorové křivky, tvary čoček a zrcadel, fyzikové se také zabývali pojmy jako rychlost, zrychlení, dráha či čas. K nejpřínosnějším osobnostem patřili německý matematik a astronom Johannes Kepler (1571–1630), italský astronom, fyzik a filozof Galileo Galilei (1564–1642), italský matematik, astronom a fyzik Bonaventura Cavalieri (1598–1647), francouzský filozof a matematik René Decartes (1596–1650), francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1655) či teolog, matematik a učitel Isaaca Newtona Isaac Barrow (1630–1677). Vznik diferenciálního počtu je neodmyslitelně spjat s anglickým matematikem a fyzikem Isaacem Newtonem (1643–1727) a německým matematikem, fyzikem, filozofem a diplomatem Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem (1646–1716).

Isaac Newton se myšlenkou diferenciálního počtu začal zabývat už během svých studiích na Trinity College v Cambridge, kde úspěšně absolvoval v roce 1665. Téhož roku vypukla v Anglii morová epidemie, a tak se Newton stáhl na dva roky na venkov, kde měl klid na promyšlení svých matematických a fyzikálních teorií. V roce 1667 se vrátil na Trinity College a začal sepisovat spis Philosophiae Naturalis Principia Mathematica označovaný také jako Pricipia, ve kterém popisuje základy klasické mechaniky. Aby ale mohl Newton své fyzikální teorie formulovat, potřeboval umět zacházet s nekonečně malými nenulovými čísly a podrobně popsat průběh křivky, a tak položil základy dnešního diferenciální a integrálního počtu. Newton trpěl chorobným strachem z neúspěchu a kritiky, proto některé své spisy nepublikoval, či si jejich publikaci dlouho rozmýšlel. Dovoloval však svým kolegům nahlížet do svých poznámek a o některých svých myšlenkách dokonce přednášel na zasedání Royal Society, takže byly veřejně dostupné. První myšlenky směřující k diferenciálnímu počtu Newton publikoval roku 1687 v Principiích. Podrobnější výklad sepsal v díle Methodus fluxionum et serierum infinitorum v roce 1671. Dílo však bylo publikováno až po Newtonově smrti v roce 1736 [2].

Základní Newtonovou myšlenkou bylo nalézt nástroj, pomocí kterého ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku bude schopen určit rychlost tohoto pohybu v určitém čase. Potřeboval tedy nástroj pro podrobný popis průběhu křivky. Křivku si Newton představoval jako množinu průsečíků dvou přímek rovnoběžných se souřadnicovými osami x a y pohybujících se okamžitými rychlostmi. Přičemž souřadnice pohybujícího se průsečíku označoval jako fluenty, tedy proměnné veličiny, a okamžitou rychlost, se kterou se souřadnice průsečíku mění, nazval fluxí. Symbol $\dot{y}$ označoval okamžitou rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou y a symbol $\dot{x}$ označoval okamžitou rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou x. Okamžitou rychlost pohybujícího se průsečíku pak určil složením složek pohybu podle v té době již známého rovnoběžníkového pravidla. Pro fluxe platí $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Derivaci y podle x pak Newton definuje jako poměr $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ [3].



(x,y).....fluenty (funkce času t)

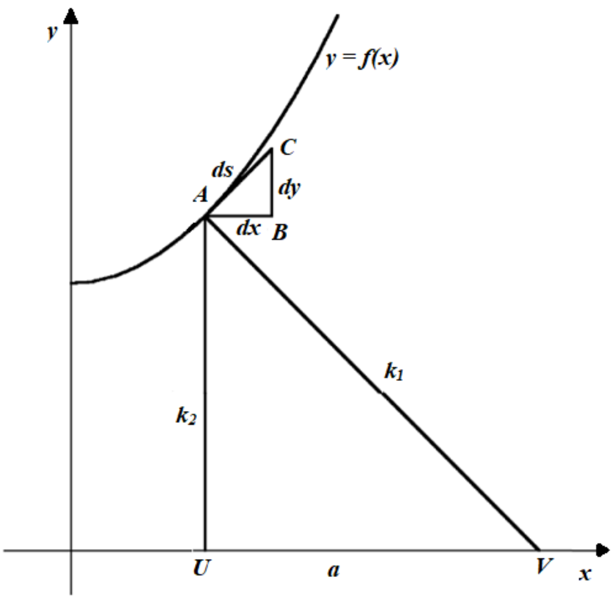
$(\dot{x},\dot{y})$.....fluxe (derivace fluent podle t)

$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ……směrnice tečny ke křivce

Obr. 1: Newtonova metoda fluxí [3]

Jiný náhled na diferenciální počet přinesl Gottfried Wilhelm Leibniz, který se zabýval především filozofií, diplomacií, právem a teologií. Hlubší zájem o matematiku projevil až po setkáním s Isaacem Newtonem v roce 1672 v Londýně. Leibniz byl ohromen Newtonovými myšlenkami a začal prohlubovat své matematické znalosti. V letech 1675–1676 zveřejnil první pokusy o diferenciální počet. Finální verzi své představy o diferenciálním počtu publikoval roku 1684 v časopise Acta Eruditorum. Názvosloví, které Leibniz v této publikaci zvolil, používáme dodnes [2].

Leibnizův pohled na diferenciální počet byl spíše geometrický. Derivaci chápal jako směrnici tečny ke křivce. Jeho způsob zavedení derivací vychází z tzv. charakteristického trojúhelníku, kterým se zabýval již Pascal. Newton uvažoval křivku zadanou obecnou funkcí $y = f(x)$ a na ní bod A, kterým prochází tečna t ke grafu funkce $f(x)$. Dále uvažoval pravoúhlý *trojúhelník ABC*, jehož jeden vrchol je dán bodem A, vrchol C leží na tečně t, kdy ds = $|AC|$ tvoří přeponu *trojúhelníku ABC*. Bod B vznikne jako průnik rovnoběžky r_1, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem C, a rovnoběžky r^2, která je rovnoběžná s osou x a prochází bodem A. Odvěsny Leibniz označil následovně: dx = $|AB|$, dy $=$ $|BC|$. Dále sestrojil v bodě A kolmici k_1 k tečně t a kolmici k_2 k ose x. Průnik kolmice k_1 s osou označil jako bod V a průnik kolmice k_2 s osou x jako bod U. Vytvořil tak pravoúhlý *trojúhelník AUV*, který je podobný *trojúhelníku ABC* (viz obr. 2) [3].



Obr. 2: Leibnizův charakteristický trojúhelník [3]

Leibniz si dále představoval, že strana dx bude konvergovat k nule a *trojúhelník ABC* se bude zmenšovat, přitom se jeho podobnost s *trojúhelníkem AUV* zachová. Z podobnosti těchto dvou trojúhelníků dostal vztah:

$\frac{a}{v} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ neboli $a\mathrm{d}x = v\mathrm{d}y$,

který se stal výchozím bodem řady jeho následovníků. Leibniz dále odvodil základní pravidla pro derivování, zavedl diferenciální zlomek $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, podmínku d$y$ = 0 pro lokální extrém a d^2y = 0 pro inflexi.

Řadu let si matematici z celé Evropy lámali hlavu, zda diferenciální počet definoval první Newton nebo Leibniz. Ve skutečnosti Leibniz vydal svou verzi diferenciální počtu v roce 1784, tedy o tři roky dříve než Newton. Ale Newton se zabýval diferenciálním počtem již v polovině šedesátých let a pouze otálel s publikováním svých spisů. Leibnizovi je také vyčítáno, že Newtona několikrát navštívil a mohl se inspirovat jeho poznámkami. Na druhou stranu Leibnizova verze se od Newtonovy značně liší. Newton zavádí derivace přes popis okamžité rychlosti přímočarého pohybu, kdežto Leibniz zvolil geometrický přístup a derivaci definuje jako směrnici tečny funkce v bodě. V současné době převládá názor, že oba tito matematičtí velikáni vytvořili základ diferenciálního počtu nezávisle na sobě.

Vznik diferenciálního i integrálního počtu vyvolal v matematickém světě velkou vlnu zájmu. K prvním Newtonovým a Leibnizovým následovníkům patřili švýcarští bratři Jacob Bernoulli (1654–1705) a Johann Bernoulli (1667–1748), kteří se poměrně rychle seznámili s Leibnizovými myšlenkami a začali je rozvíjet. Johann Bernoulli v 90. letech 17. století přednášel diferenciální počet v Ženevě a soukromě vyučoval Guillauma Francise de l'Hospitala (1661–1704), který v roce 1696 publikoval první učebnici diferenciálního počtu. Učebnice nesla název Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes a bylo v ní mino jiné představeno tzv. l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limity zlomku, jehož čitatel i jmenovatel se blíží k nule či k nekonečnu. Další učebnici diferenciálního počtu vydal švýcarský matematik Leonhard Euler (1707–1783), který byl rovněž Bernoulliho žákem. Jelikož Johann Bernoulli čerpal především z prací Leibnize a učil podle nich první autory učebnic diferenciálního počtu, uchytila se více Leibnizova symbolika, která byla přehlednější než Newtonova. K vývoji symboliky diferenciálního počtu přispěl také Joseph Louis

Lagrange (1736–1813), který zavedl název derivace a jehož vlivem se rozšířilo značení pomocí $f'(x)$ [4].

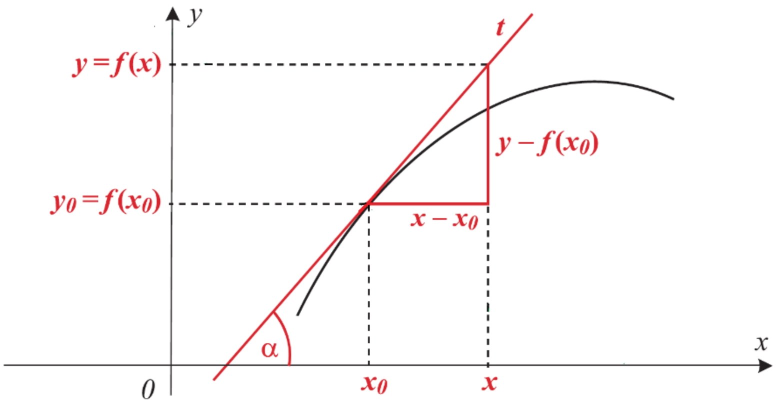
Vývoj diferenciální počtu ostatně stejně jako vývoj celé matematické analýzy je proces velmi pomalý a složitý. Zajímavé je, že i když v současné době derivaci definujeme jako limitu, pojem limita vznikl později než pojem derivace. Limitu poprvé definoval až francouzský matematik Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) v roce 1754. Významnou osobností moderní analýzy byl německý matematik Karl Weierstrass (1815–1897), který upravil definice limity, spojitosti a derivace tak, jak je známe dnes. K zpřesnění a vyjasnění důležitých pojmů z oblasti diferenciálního počtu přispěli také francouzský matematik Michel Rolle (1652–1719), český německy hovořící matematik a filozof Bernard Bolzano (1781–1848) a francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789–1857) [5].

2 Diferenciální počet funkce jedné proměnné

2.1 Význam a definice pojmu derivace

Derivace je významným pojmem matematické analýzy. Její znalost nám umožňuje detailní pohled na průběh mnohých funkcí. Z geometrického hlediska je derivace funkce f v bodě x_0 směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Z fyzikálního hlediska derivace funkce f v bodě x_0 charakterizuje rychlost změny funkční hodnoty funkce f v bodě x_0.

Definice 1. *Nechť je funkce f definovaná v každém bodě nějakého okolí bodu x_0 a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.*



Obr. 3: Derivace funkce *f* v bodě x_0 [6]

Provedeme-li substituci $h = x - x_0$, můžeme definiční vztah přepsat do tvaru $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Rozdíl $x - x_0$ se označuje také jako Δx, proto je možné se setkat i s definičním vztahem ve tvaru $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Pro derivaci funkce f v bodě x_0 se rovněž používají následující označení $y'(x_0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, jedná se o vlastní derivaci. Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, označujeme derivaci jako nevlastní. Pokud výše uvedená limita neexistuje, říkáme, že derivace funkce f v bodě x_0 neexistuje.

Příklad 1. *Pomocí definice najděte derivace následujících funkcí:*

a) $f\,:\,y\,=\,x^2$ *v bodě* $x_0\in\mathbf{R}$

b) $g\,:\,y\,=\,5x-4$ *v bodě* $x_0\ \in\mathbf{R}$

c) $k\,:\,y\,=\,\sqrt{x^2-1}$ *v bodě* $x_0=\sqrt{5}$

Řešení:

a) $$f'(x_0)\,=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=$$

$$=2x_0$$

b) $$g'(x_0)\,=\,\lim_{x\to x_0}\frac{5x-4-5x_0+4}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{5(x-\,x_0)}{x-\,x_0}=\lim_{x\to x_0}5=5$$

c) $$k'\left(\sqrt{5}\right)=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)-f\left(\sqrt{5}\right)}{x-\sqrt{5}}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{5-1}}{x-\sqrt{5}}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2-1}\,-2}{x-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+2}{\sqrt{x^2-1}+2}=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x^2-1-4}{(x-\sqrt{5})(\sqrt{x^2-1}+2)}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x^2-5}{(x-\sqrt{5})(\sqrt{x^2-1}+2)}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-\sqrt{5})(\sqrt{x^2-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}+2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}^2-1+2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4}+2}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Definice 2. *Nechť je funkce f definovaná v každém bodě nějakého levého, respektive pravého, okolí bodu x_0. Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, nazveme tuto limitu derivací zprava funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_-(x_0)$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, nazveme tuto limitu derivací zleva funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_+(x_0)$.*

Funkce f má derivaci v bodě x_0 právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny. Příkladem funkce, která má v bodě x_0 obě jednostranné derivace, ale nemá derivaci, je funkce $y = |\sin x|$ v bodě $x_0 = 0$. Výpočet jednostranných derivací této funkce v bodě $x_0 = 0$ je následující:

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=-1$$

$$y'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = 1$$

Z výpočtu vyplývá, že jednostranné derivace funkce $y = |\sin x|$ v bodě $x_0 = 0$ si nejsou rovny, proto derivace funkce $y = |\sin x|$ v bodě $x_0 = 0$ neexistuje.

Definice 3. *Řekneme, že funkce f má derivaci na intervalu $I = (a, b)$, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Derivace funkce f na intervalu je opět funkce s hodnotami derivace v každém bodě intervalu. O takové funkci říkáme, že je diferencovatelná.*

Definice 4. *Nechť má funkce $f(x)$ k-tou derivaci $f^{(k)}(x)$ v každém bodě nějakého okolí bodu x_0. Potom $(k+1)$-derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{x - x_0}$ a značíme ji $f^{(k+1)}(x_0)$.*

Příklad 2. *Určete druhou derivaci funkce $f : y = x^4 - 5$ v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$.*

Řešení:

Pro výpočet druhé derivace funkce f potřebujeme nejprve určit první derivaci funkce f.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 - 5 - {x_0}^4 + 5}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 - {x_0}^4}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)(x^2 + {x_0}^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} ((x + x_0)(x^2 + {x_0}^2)) = 2x_0 \cdot 2{x_0}^2 =$$

$$= 4{x_0}^3$$

Druhou derivaci funkce f dostaneme tak, že derivujeme první derivaci funkce f.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{4x^3 - 4{x_0}^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{4(x - x_0)(x^2 + xx_0 + {x_0}^2)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} 4(x^2 + xx_0 + {x_0}^2) = 12{x_0}^2$$

2.2 Výpočet derivace

Výpočet derivace pomocí definice může být v některých případech velmi náročný, proto se příliš nepoužívá. Pro výpočet derivace funkce používáme následující vzorce a pravidla.

Tabulka 1: Derivace elementárních funkcí

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\mathbf{D}_f$
$K \in \mathbf{R}$	0	$x \in \mathbf{R}$
x^n	nx^{n-1}	obor mocninné funkce
e^x	e^x	$x \in \mathbf{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbf{R} \setminus (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbf{R}; \sin x \neq 0$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbf{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0,+\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0,+\infty)$

Jestliže funkce f a g mají v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$, poté derivaci algebraických operací provádíme následujícím způsobem

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad pro\ g(x_0) \neq 0$$

Při výpočtech můžeme také narazit na derivaci složené funkce. Jestliže má funkce g v bodě x_0 vlastní derivaci $g'(x_0)$ a funkce f má v bodě $g(x_0)$ vlastní derivaci $f'(g(x_0))$, potom $f(g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Příklad 3. *Určete derivace následujících funkcí:*

a) $f : y = 10x^5 - 2x^3 + 12x + 6$ *v bodě* $x \in \mathbf{R}$

b) $g : y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ *v bodě* $x \in \mathbf{R}$

c) $p : y = 5\cos 3x^2$ *v bodě* $x \in \mathbf{R}$

Řešení:

a) $f'(x) = 50x^4 - 6x^2 + 12$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \cdot \frac{-4}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

c) $p'(x) = 5[-\sin(3x^2) \cdot 6x)] = -30x \cdot \sin(3x^2)$

2.3 Některé významné věty diferenciálního počtu

Věta 1. *Nechť má funkce f v bodě* x_0 *vlastní derivaci. Pak je v bodě* x_0 *spojitá.*

Podle předchozí věty z existence derivace v bodě x_0 plyne spojitost funkce v tomto bodě. Toto tvrzení však nelze obrátit. Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 neplyne existence derivace funkce f v tomto bodě. Příkladem funkce, která je v bodě x_0 spojitá, ale nemá v něm derivaci, je funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ nebo již zmíněná funkce $y = |\sin x|$ v bodě $x_0 = 0$, u které jsme ukázali, že jednostranné limity jsou různé, a tak derivace v bodě $x_0 = 0$ neexistuje. Stejným způsobem lze ukázat neexistenci derivace funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

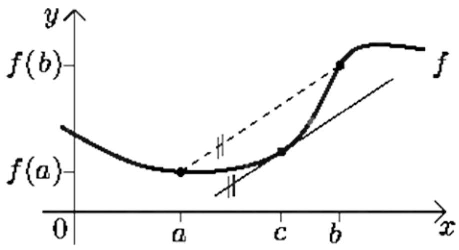
$$y'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$$

$$y'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$$

Jednostranné limity funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ si nejsou rovny, proto funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ nemá derivaci, i když je v tomto bodě spojitá.

Věta 2. (Lagrangeova věta o střední hodnotě) *Nechť f je funkce spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť má funkce f derivaci v každém bodě intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak existuje alespoň jeden bod c z intervalu* $\langle a, b\rangle$ *takový, že* $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

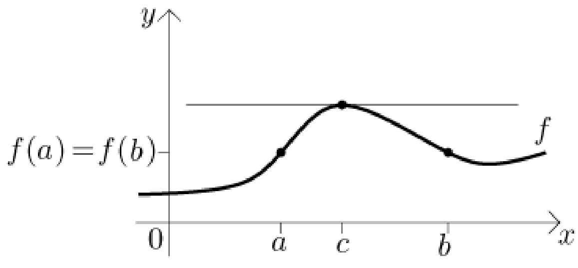
Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu rovnoběžná se spojnicí krajních bodů intervalu, tj. bodů $[a,\ f(a)]$ a $[b,\ f(b)]$.



Obr. 4: Geometrický význam Lagrangeovy věty o střední hodnotě [7]

Věta 3. (Rolleova věta) *Nechť f je funkce spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť má funkce f derivaci v každém bodě intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Dále platí* $f(a) = f(b)$. *Pak existuje alespoň jeden bod c z intervalu* $\langle a, b\rangle$ *takový, že* $f'(c) = 0$.

Geometricky lze Rolleova věta interpretovat: Pokud má spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ derivaci, vždy na tomto intervalu existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x.



Obr. 5: Geometrický význam Rolleovy věty [7]

3 Aplikace derivace

Derivaci funkce jedné proměnné lze aplikovat v řadě praktických i teoretických úloh týkajících se nejen matematiky, ale také fyziky, ekonomie či chemie. V této práci se zabýváme derivací na středoškolské úrovni, a tak si zde představíme pouze aplikace, se kterými se mohou studenti na středních školách setkat. Mezi tyto aplikace patří nalezení rovnice tečny a normály ke grafu funkce, vyšetřování průběhu funkce, optimalizační úlohy a základní fyzikální aplikace.

3.1 Rovnice tečny a normály ke grafu funkce

V kapitole pojednávající o významu derivace jsme uvedli, že z geometrického hlediska je derivace funkce f v bodě x_0 směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0,\ f(x_0)]$. Nemělo by tedy být žádným překvapením, že díky derivaci jsme schopni snadno určit rovnici tečny ke grafu funkce. Rovnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A = [x_0,\ f(x_0)]$ má tvar

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Normála je přímka kolmá na tečnu a pro směrnice kolmých přímek, v našem případě pro směrnice tečny k_t a normály k_n, platí $k_t \cdot k_n = -1$. Rovnice normály ke grafu funkce v bodě $A = [x_0,\ f(x_0)]$ má tedy tvar

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Příklad 4. *Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce* $f\colon y = x^2 - 7x + 10$ *v bodě* $x_0 = 4$.

Řešení:

- vypočítáme y-ovou souřadnici: $f(4) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 10 = -2$
- vypočítáme první derivaci: $f'(x) = 2x - 7$
- vypočítáme první derivaci v bodě $x_0 = 4$: $f'(4) = 1$
- dosadíme do rovnice tečny: $y = -2 + 1(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = x - 6$
- dosadíme do rovnice normály: $y = -2 - 1(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 2$

- obecná rovnice tečny má tvar: $x - y - 6 = 0$
- obecná rovnice normály má tvar: $x + y - 2 = 0$

Příklad 5. *Ve kterém bodě má tečna ke grafu funkce* $f: y = x^2$ *směrnici* $k = 10$? *Najděte rovnici tečny v tomto bodě.*

Řešení:

- pro hledaný bod platí: $f'(x_0) = 10$
- spočítáme první derivaci funkce f: $f'(x_0) = 2x_0$
- vypočteme x_0: $2x_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 5$
- pro $x_0 = 5$ z funkčního předpisu vypočteme y-ovou souřadnici: $y = 25$
- dosadíme do rovnice tečny: $y = 25 + 10(x - 5) \quad \Rightarrow \quad y = 10x - 25$
- hledaný bod je bod $[5, 25]$, obecná rovnice tečny v tomto bodě má tvar: $10x - y - 25 = 0$

3.2 Vyšetřování průběhu funkce

Vyšetřování průběhu funkce je proces vedoucí k zjištění podstatných vlastností funkce, pomocí kterých jsme schopni zakreslit graf funkce. Při vyšetřování průběhu funkce nás budou zajímat tyto vlastnosti: definiční obor funkce, sudost, lichost, periodicita, spojitost, průsečíky se souřadnými osami, monotónnost, extrémy funkce, konkávnost a konvexnost. Než se ale pustíme do samotného vyšetřování průběhu funkce, musíme znát některé souvislosti mezi derivací a danými vlastnostmi. Derivaci funkce používáme pro určení monotonie, vyšetření lokálních extrémů a pro určení konvexnosti, respektive konkávnosti.

Věta 4. *Má-li funkce f v bodě* $x_0 \in D_f$ *lokální extrém, pak je* $f'(x_0) = 0$ *nebo první derivace funkce f v bodě* x_0 *neexistuje. Jestliže* $f'(x_0) = 0$ *a zároveň* $f''(x_0) < 0$, *pak má funkce f v bodě* x_0 *ostré lokální maximum. Jestliže* $f'(x_0) = 0$ *a zároveň* $f''(x_0) > 0$, *pak má funkce f v bodě* x_0 *ostré lokální minimum.*

Definice 5. *Nechť má funkce f v bodě* $x_0 \in D_f$ *nulovou první derivaci, tj* $f'(x_0) = 0$. *Pak bod* x_0 *nazýváme stacionárním bodem.*

Věta 5. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu* $I = (a, b)$ *a nechť má funkce f derivaci ve všech bodech intervalu I. Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f rostoucí na I. Podobně je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f klesající na I. Analogické tvrzení platí i pro neostré nerovnosti: je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f neklesající na I, je-li* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f nerostoucí na I. Je-li* $f'(x) = 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f konstantní na I.*

Věta 6. *Je-li funkce f spojitá na intervalu* $I = (a,b)$ *a je-li* $f'(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, je funkce f ryze monotónní na I.*

Věta 7. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu* $I = (a,b)$ *a nechť má funkce f druhou derivaci ve všech bodech intervalu I. Je-li* $f''(x) > 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f konvexní na I. Podobně je-li* $f''(x) < 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, pak je funkce f konkávní na I.*

Definice 6*. Nechť je funkce f spojitá v bodě* $x_0 \in D_f$ *a nechť existuje* $f'(x_0)$*. Je-li funkce f v pravém okolí bodu* x_0 *konkávní, respektive konvexní, a současně je-li funkce f v levém okolí bodě* x_0 *konvexní, respektive konkávní, pak bod* x_0 *nazýváme inflexním bodem.*

Nyní známe všechny potřebné souvislosti derivace a průběhu funkce. Postup vyšetřování průběhu funkce se v mnohých publikacích liší. V této práci se budeme držet tohoto postupu:

1. definiční obor funkce
2. parita funkce (sudost, lichost) a periodičnost
3. průsečíky s osami souřadnic
4. body nespojitosti a krajní body definičního oboru
5. asymptoty grafu funkce
6. monotónnost a extrémy funkce
7. konvexnost, konkávnost, inflexní body
8. graf funkce
9. obor hodnot

Jednotlivé kroky si rozebereme podrobně. Jako první určujeme definiční obor funkce, tj. nalezneme množinu všech prvků, pro které je funkce definovaná. Při hledání definičního oboru vycházíme z množiny reálných čísel, kterou zužujeme podle definičních oborů jednotlivých elementárních funkcí a operací. Řídíme se těmito pravidly:

- nulou nelze dělit, tedy jmenovatel zlomku je nenulový
- sudé odmocniny jsou definovány pouze pro nezáporný základ odmocniny
- logaritmus $\ln(g(x))$ nebo $\log_a(g(x))$ je definován jen pro kladná $g(x)$ a pro $a > 0 \wedge a \neq 1$
- funkce $\operatorname{tg}(g(x))$ je definována pro $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- funkce $\operatorname{cotg}(g(x))$ je definována pro $g(x) \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

V dalším kroku se zabýváme paritou funkce, tedy tím, zda je funkce lichá či sudá. Obě možnosti je třeba prověřit, protože některé funkce nejsou sudé ani liché. Také může nastat případ, kdy je funkce sudá i lichá zároveň (tj. funkce $y = 0$). Pro lichou funkci platí: $\forall x \in D_f : -f(x) = f(-x)$, tedy pokud funkci náleží bod $[x, y]$, pak jí náleží i bod $[-x, -y]$. Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku. Pro sudou funkci platí: $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$. Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.

Dále nás zajímá, zda je funkce periodická, tedy zda se její hodnoty pravidelně opakují s určitou periodou p. Funkce je periodická s periodou p, pokud pro její definiční obor platí: $(x \in D_f) \Rightarrow (x + kp \in D_f), k \in \mathbf{Z}$ a pro všechna x z definiční oboru platí: $f(x) = f(x + kp), k \in \mathbf{Z}$.

Významnou charakteristikou funkce jsou její průsečíky se souřadnými osami. Průsečík s osou x spočítáme tak, že za y dosadíme do funkčního předpisu nulu. Průsečík s osou y spočítáme tak, že za x dosadíme do funkčního předpisu nulu.

Dalším krokem je vyšetření chování funkce v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, to provedeme výpočtem jednostranných limit v těchto bodech. S body nespojitosti úzce souvisí pojem asymptota, což je přímka, ke které se graf funkce neustále a nekonečně přibližuje. Rozlišujeme dva druhy asymptot. Prvním druhem je asymptota bez směrnice, která je kolmá na osu x a jejíž předpis je: $x = a$, kde $a \in \mathbf{R}$. Aby se jednalo o asymptotu, nesmí být funkce v bodě a definovaná a musí v bodě a existovat alespoň jedna nevlastní jednostranná limita. Druhým typem je asymptota se směrnicí, jejíž předpis je $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$. Pro funkci $f(x)$ a asymptotu $y = ax + b$ platí vztah

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Z tohoto vztahu lze odvodit vzorce pro výpočet proměnných a a b

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax).$$

Všechny tři předchozí limity mají stejný význam i pro $x \to -\infty$.

Intervaly monotónnosti a extrémy funkce zjistíme z první derivace funkce. Lokální extrémy funkce se mohou nacházet v bodech, kde je první derivace rovna nule nebo v bodech, kde první derivace neexistuje. Tyto body rozdělí definiční obor na intervaly monotónnosti. Zda je funkce na daném intervalu rostoucí nebo klesající zjistíme tak, že spočítáme hodnotu první derivace na daném intervalu. Pokud je hodnota kladná, funkce je na intervalu rostoucí. Pokud je hodnota záporná, funkce je na intervalu klesající. Globální extrémy zjistíme tak, že spočítáme funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence lokálního extrému. Největší z těchto hodnot tvoří globální maximum, nejmenší tvoří globální minimum.

Pro určení konkávnosti, respektive konvexnosti, funkce využijeme druhé derivace funkce. Položíme-li tuto derivaci rovnu nule, získáme rovnici, jejímž vyřešením získáme inflexní body, tj. body, ve kterých se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak. Inflexní body a body nespojitosti nám rozdělí definiční obor funkce na intervaly. Pokud má funkce v libovolném bodě daného intervalu kladnou druhou derivaci, je funkce na daném intervalu konvexní. Pokud má funkce na daném intervalu druhou derivaci zápornou, je na daném intervalu konkávní.

Předposledním krokem vyšetřování průběhu funkce je načrtnutí grafu funkce na základě zjištěných vlastností. Posledním krokem je určení oboru hodnot, tj. množiny všech funkčních hodnot, kterých funkce pro $\forall x \in D_f$ nabývá.

Příklad 6. *Vyšetřete průběh funkce: y =* $-x^4 + 2x^2 + 3$.

Řešení: Při vyšetřování průběhu funkce se budeme držet výše uvedeného postupu.

1. definiční obor funkce
   - $D_f = \mathbf{R}$
2. parita funkce a periodičnost
   - spočítáme hodnoty, na základě kterých určíme paritu funkce

     $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

     $-f(x) = +x^4 - 2x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x)$

     $f(-x) = -x^4 + 2x^2 + 3$
   - funkce je sudá, není lichá
   - funkce není periodická
3. průsečíky s osami souřadnic
   - průsečík s osou y: $y = 0^4 + 2 \cdot 0^2 + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad P_y[0, 3]$
   - průsečík s osou x: $0 = -x^4 + 2x^2 + 3$

     pro řešení rovnice použijeme substituci: $a = x^2$

     $0 = -a^2 + 2a + 3$

     $0 = -1(a + 1)(a - 3) \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1,\ a_2 = 3$

     dosadíme zpět do substituce:

     $-1 = x^2 \quad \Rightarrow$ v reálných číslech nemá řešení

     $3 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_{x_1}[\sqrt{3}, 0], P_{x_2}[-\sqrt{3}, 0]$
4. vyšetření krajních bodů definičního oboru
   - určíme limity v krajních bodech definičního oboru

     $$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)\right] = -\infty$$

     $$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)\right] = -\infty$$
   - funkce se pro $x \to +\infty$ i pro $x \to -\infty$ blíží k $-\infty$
5. asymptoty grafu funkce
   - funkce nemá asymptoty
6. monotónnost a extrémy funkce
   - spočítáme první derivaci: $y' = -4x^3 + 4x$
   - určíme stacionární body

     $0 = -4x^3 + 4x$

     $0 = 4x(-x^2 + 1) \quad \Longrightarrow x_1 = 0$

$0 = -x^2 + 1$

$x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -1, x_3 = 1$

- spočítáme funkční hodnoty ve stacionárních bodech

  $f(-1) = -1 + 2 + 3 = 4$

  $f(0) = 3$

  $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$

- stacionární body rozdělí definiční obor do čtyř intervalů, spočítáme hodnoty první derivace na těchto intervalech

  $I_1(-\infty,-1);\ f'(-2) = 32 - 8 = 24$

  $I_2(-1,0);\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 2 = -\frac{3}{2}$

  $I_3(0,1);\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + 2 = \frac{3}{2}$

  $I_4(1,+\infty);\ f'(2) = -32 + 8 = -24$

- zjištěné informace zapíšeme do tabulky

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	rostoucí	4	klesající	3	rostoucí	4	klesající

- funkce má globální maximum v bodě $x = -1$ a v bodě $x = 1$, funkce nemá minimum

7. konvexnost, konkávnost, inflexní body

- spočítáme druhou derivaci: $y'' = -12x^2 + 4$
- určíme body, ve kterých je druhá derivace nulová

  $0 = -12x^2 + 4$

  $3x^2 = 1$

  $x^2 = \dfrac{1}{3}$

  $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- body rozdělí definiční obor do třech intervalů, spočítáme hodnoty druhé derivace na těchto intervalech

  $I_1\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ f''(-1) = -12 + 4 = -8$

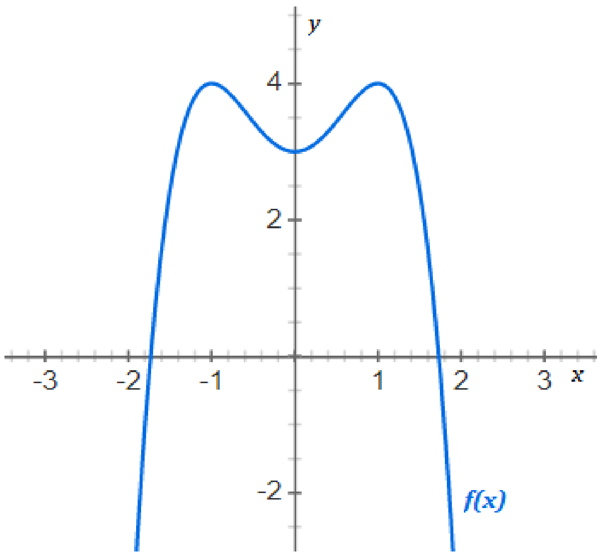
$I_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $f''(0) = 4$

$I_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$; $f''(1) = -12 + 4 = -8$

- zjištěné informace zapíšeme do tabulky

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkávní	inflexe	konvexní	inflexe	konkávní

8. graf funkce



Obr. 6: Graf funkce $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

9. obor hodnot

   - $H_f = (-\infty, 4\rangle$

Příklad 7. *Vyšetřete průběh funkce:* $g: y = \frac{x^2+1}{2x-1}$

Řešení: Při vyšetřování průběhu funkce se budeme držet výše uvedeného postupu.

1. definiční obor funkce

   - jmenovatel musí být nenulový

$2x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}$

- $D_g = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. parita funkce a periodičnost
   - určíme hodnoty, na základě kterých určíme paritu funkce

     $g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$

     $-g(x) = \frac{-x^2-1}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad -g(x) \neq g(-x)$

     $g(-x) = \frac{x^2+1}{-2x-1} \quad \Rightarrow \quad g(x) \neq g(-x)$
   - funkce není sudá, není lichá
   - funkce není periodická

3. průsečíky s osami souřadnic
   - průsečík s osou y: $y = \frac{0^2+1}{2\cdot 0-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad P_y[0,-1]$
   - průsečík s osou x: $0 = \frac{x^2+1}{2x-1}$

     zlomek je roven 0, pokud je jeho čitatel roven

     $x^2 + 1 = 0$

     $x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad$ v reálných číslech nemá řešení

     průsečík s osou x neexistuje

4. vyšetření bodů nespojitosti a krajních bodů definičního oboru
   - určíme limity pro $x \to \pm\infty$ a $x \to \frac{1}{2}$ zprava a zleva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right) = -\infty$$

   - funkce se pro $x \to +\infty$ blíží k $+\infty$ a pro $x \to -\infty$ se blíží k $-\infty$
   - funkce se pro $x \to \frac{1}{2}$ zprava blíží k ∞ a pro $x \to \frac{1}{2}$ zleva se blíží k $-\infty$

5. asymptoty grafu funkce

- asymptota bez směrnice je v bodě nespojitosti, její rovnice je $x = \frac{1}{2}$
- asymptota se směrnicí

  obecný tvar: $y = ax + b$

  vypočteme koeficienty a a b

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{2x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x-1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x-1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2-2x^2+x}{2(2x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{4x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(4-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{4}$$

  asymptota se směrnicí má rovnici: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

6. monotónnost a extrémy funkce

- spočítáme první derivaci

$$y' = \frac{2x(2x-1)-2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-2x-2x^2-2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$$

- určíme stacionární body

$$0 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 4 + 16 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{20}}{4} = \frac{2\pm2\sqrt{5}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

- spočítáme funkční hodnoty ve stacionárních bodech

$$g\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}+1}{1-\sqrt{5}-1} = \frac{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}{-\sqrt{5}} = \frac{10-2\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}} = \frac{5}{-2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}+1}{1+\sqrt{5}-1} = \frac{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- stacionární body rozdělí definiční obor do 3 intervalů, spočítáme hodnoty první derivace na těchto intervalech

$$I_1\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\; g'(-5) = \frac{2\cdot(-5)^2-2\cdot(-5)-2}{[2\cdot(-5)-1]^2} = \frac{50+8}{(-11)^2} = \frac{58}{121}$$

$$I_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\; g'(0) = \frac{-2}{(-1)^2} = -2$$

$I_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right);\ g'(5)=\frac{2\cdot5^2-2\cdot5-2}{[2\cdot5-1]^2}=\frac{50-12}{9^2}=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$

- zjištěné informace zapíšeme do tabulky

x	$\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	rostoucí	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$	klesající	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$	rostoucí

- funkce nemá globální minimum ani maximum

7. konvexnost, konkávnost, inflexní body
   - spočítáme druhou derivaci

$$y''=\frac{(4x-2)\left(4x^2-4x+1\right)-4(2x-1)(2x^2-2x-2)}{(2x-1)^4}=$$

$$=\frac{16x^3-16x^2+4x-8x^2+8x-2-16x^3+16x^2+16x+8x^2-8x-8}{(2x-1)^4}=\frac{20x-10}{(2x-1)^4}=\frac{10(2x-1)}{(2x-1)^4}=$$

$$=\frac{10}{(2x-1)^3}$$

   - druhá derivace nenabývá nulové hodnoty, tj. na definičním oboru nenalezneme bod, ve kterém se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak
   - bod nespojitosti $x=\frac{1}{2}$ rozdělí definiční obor do dvou intervalů, spočítáme hodnoty druhé derivace na těchto intervalech

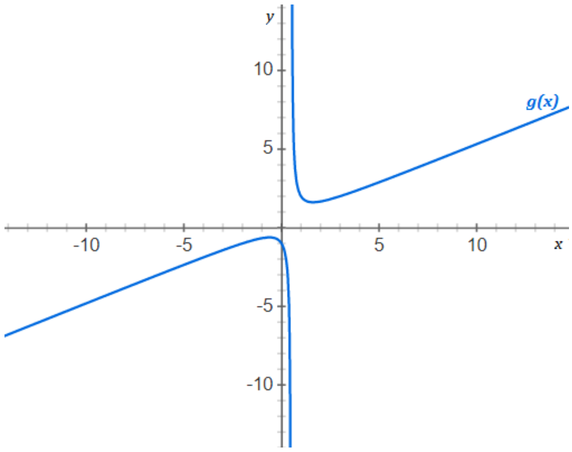
$I_1\left(-\infty,\frac{1}{2}\right);\ f''(0)=-10$

$I_2\left(\frac{1}{2},+\infty\right);\ f''(1)=10$

   - zjištěné informace zapíšeme do tabulky

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	neexistuje	$+$
$f(x)$	konkávní	neexistuje	konvexní

8. graf funkce



Obr. 7: Graf funkce $y = \frac{x^2+1}{2x-1}$

9. obor hodnot

➢ $H_f = \mathbf{R} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

3.3 Výpočet limit

Derivaci lze užít také k výpočtu některých limit, konkrétně se jedná o limity neurčitých výrazů ve tvaru $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, které lze spočítat užitím tzv. L´Hospitalova pravidla.

Věta 8. (L´Hospitalovo pravidlo) *Nechť* $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{matrix}\right\}$, kde $a \in \mathbf{R}$ *a nechť existuje vlastní nebo nevlastní* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 8 platí i pro jednostranné limity a pro limity v nevlastních bodech. Pokud po užití L´Hospitalova pravidla dostaneme opět výraz $\frac{0}{0}$ nebo výraz $\frac{\infty}{\infty}$, lze pravidlo použít znovu. L´Hospitalovo pravidlo můžeme použít i na jiné neurčité výrazy, které lze převést na tvar $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Například $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, lze upravit na tvar

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ nebo } \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Pro $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, se používá úprava na tvar

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Příklad 8. *Určete následující limity*:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x-\sin 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x-\cos x}{2x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x-\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{4-2\cos 2x} = \frac{5}{4-2} = \frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2} = [\,\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{2x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\cos\frac{1}{x^2}$

3.4 Optimalizační úlohy

Další významnou aplikací diferenciálního počtu jsou optimalizační úlohy, což jsou úlohy zaměřené na hledání extrému funkce. Mezi takové úlohy patří například hledání útvaru, který má při daném odvodu maximální obsah, či hledání tělesa, které má při daném objemu minimální povrch. V praxi se s těmito úlohami setkáme při řešení ideálních rozměrů bazénu, oplocení zahrady či objemu krabice. Optimalizační úlohy lze aplikovat i v ekonomii. Příkladem může být hledání maximálního zisku či minimalizace nákladů. Představme si firmu, která celosvětově vyrábí nápoje v plechovkách. Náklady takovéto firmy by klesly o nemalou částku, kdyby na výrobě plechovek dokázala ušetřit třeba jen 5 % ze současných nákladů. Jednou z možností snížení nákladů by bylo minimalizovat povrch plechovek, tedy vyřešit optimalizační úlohu: Určete rozměry plechovky ve tvaru válce o objemu 0,5 litru tak, aby byl její povrch minimální. K řešení této úlohy se vrátíme v příkladu 9.

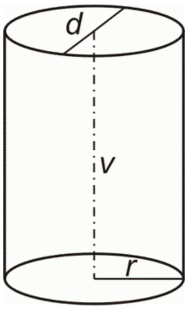
Při řešení optimalizačních úloh postupujeme tímto způsobem:

1. Náčrt obrázku vystihující situaci (pokud je to možné)
2. Vyjádření funkce, jejíž extrém hledáme
3. Stanovení podmínek existence proměnných
4. Převedení funkce na funkci jedné proměnné
5. Nalezení extrému funkce
6. Dopočítání zbylých proměnných
7. Kontrola a interpretace výsledku

Příklad 9. *Určete rozměry plechovky ve tvaru válce o objemu 0,5 litru tak, aby byl její povrch minimální.*

Řešení:

- náčrt:



- povrch válce: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$
- zapíšeme podmínky pro neznámé r a v: $r, v > 0$
- objem válce: $V = \pi r^2 v = 0{,}5$ l
- z objemu vyjádříme výšku: $v = \frac{V}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2\pi r^2}$
- dosadíme v do vzorce pro povrch válce: $S = 2\pi r^2 + \frac{1}{r^2}$
- hledáme minimum funkce $S = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{1}{r^2}$$

$4\pi r - \frac{1}{r^2} = 0$

$4\pi r^3 = 1$

$r^3 = \frac{1}{4\pi} \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$

ověříme, zda má funkce v bodě $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ minimum:

$I_1\left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right); S'\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi - 25 = -22{,}5$

$I_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}, +\infty\right); S'(1) = 4\pi - 1 = 11{,}56$

funkce je na I_1 klesající, na I_2rostoucí, funkce má v bodě $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ minimum

- dopočítáme rozměr v: $v = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}}$
- závěr: Výška plechovky je $v = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}}$ dm $\doteq 0{,}86$ dm, poloměr plechovky je

  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ dm $\doteq 0{,}43$ dm.

Příklad 10. *Určete dvě kladná čísla tak, aby jejich součin byl maximální, když je jejich součet 36.*

Řešení:

- zapíšeme funkce, jejíž maximu hledáme: $f(x; y) = x \cdot y$
- zapíšeme podmínky pro neznámé x a y: $x, y > 0 \wedge x, y \in \langle 0{,}36\rangle$
- ze vztahu pro součet vyjádříme y: $x + y = 36 \quad \Longrightarrow \quad y = 36 - x$
- dosadíme y do funkce f a hledáme její maximum:

  $f(x) = 36x - x^2$

  $f'(x) = 36 - 2x$

  $0 = 36 - 2x$

  $x = 18$

  ověříme, zda má funkce v bodě $x = 18$ maximum

  $I_1\langle 0, 18); f'(10) = 36 - 20 = 16$

  $I_2\ (18, 36\rangle; f'(20) = 36 - 40 = -4$

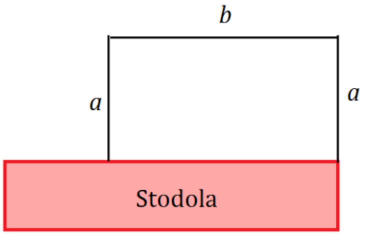
funkce je na I_1 rostoucí, na I_2klesající, funkce má v bodě $x = 18$ maximum

- dopočítáme číslo y: $y = 36 - 18 \quad \Rightarrow \quad y = 18$
- závěr: Hledanými čísly jsou čísla 18 a 18.

Příklad 11. *Chceme oplotit část zahrady a vytvořit tak výběh pro koně, který bude na jedné straně přiléhat ke stodole. Strana stodoly, ke které bude výběh přiléhat, má délku 60 m. Určete rozměry výběhu tak, aby byla jeho rozloha maximální, jestliže máte k dispozici 100 m elektrického ohradníku*.

Řešení:

- náčrt:



- obsah výběhu: $\mathrm{S} = a \cdot b$
- zapíšeme podmínky pro neznámé: $a, b > 0 \wedge a \in \langle 0,50 \rangle;\ b \in \langle 0,100 \rangle$
- obvod výběhu: $\mathrm{O} = 2a + b = 100$
- z obvodu vyjádříme rozměr b: $b = 100 - 2a$
- dosadíme b do vzorce pro obsah: $\mathrm{S} = a \cdot (100 - 2a) = 100a - 2a^2$
- hledáme maximum funkce $S = 100a - 2a^2$

  $S'(a) = 100 - 4a$

  $0 = 100 - 4a$

  $a = 25$

  ověříme, zda má funkce S v bodě $a = 25$ maximum:

  $I_1 \langle 0, 25);\ S'(10) = 100 - 40 = 60$

  $I_2\ (25, 50\rangle;\ S'(30) = 100 - 120 = -20$

  funkce je na I_1 rostoucí, na I_2klesající, funkce má v bodě $a = 25$ maximum
- dopočítáme rozměr b: $b = 100 - 50 = 50$
- závěr: Rozměry výběhu jsou 50 x 25 m.

3.5 Užití diferenciálního počtu ve fyzice

Někteří studenti středních škol se mohou s derivacemi setkat i během hodin fyziky. Pomocí derivace se na vybraných, většinou technicky zaměřených, středních školách zavádějí pouze základní veličiny, které zde uvedeme. Využití derivace ve fyzice je však daleko širší.

Ve středoškolské fyzice se některé veličiny definují pomocí vztahu $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, kde x je určitá fyzikální veličina a Δt je velmi malé. Například okamžitá rychlost se definuje jako $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde se Δt blíží k 0. Tento vztah však není přesný a používá se pouze z důvodu neznalost diferenciálního počtu. My však už víme, že derivace funkce f v bodě x_0 popisuje rychlost změny funkční hodnoty funkce f v bodě x_0, a tak můžeme výše uvedené fyzikální veličiny definovat pomocí derivace. Obecný vztah $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lze pomocí derivace zpřesnit a vyjádřit jako $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Okamžitou rychlost pak definujeme $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, tedy derivace dráhy podle času t.

Podobně můžeme pomocí derivace definovat i jiné veličiny závislé na čase blížícímu se k nule. Okamžité zrychlení se definuje vztahem $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, což lze derivací zpřesnit a vyjádřit $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Okamžité zrychlení tedy odpovídá první derivaci okamžité rychlosti podle času t. Jelikož známe vztah pro okamžitou rychlost $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, můžeme okamžité zrychlení vyjádřit: $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$. Okamžité zrychlení tedy také odpovídá druhé derivaci dráhy podle času t. Stejným způsobem definujeme i okamžitou úhlovou rychlost $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ a okamžité úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$.

Další vztahy, se kterými se mohou setkat i studenti středních škol, jsou okamžitý výkon $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ či okamžitý elektrický proud $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Příklad 12. *Kámen byl vyhozen kolmo vzhůru počáteční rychlostí* $20\ m/s$. *Jakou rychlost má kámen 1,5 s po vyhození? Jaké maximální výšky dosáhne a za jak dlouho se v ní ocitne? (Počítejte s* $g = 10\ m/s^2$.*)*

Řešení:

- zapíšeme známé veličiny:

  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$

  $t_1 = 1{,}5s$

  $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$

- zapíšeme vzorec pro vrh kolmý vzhůru: $s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$
- zapíšeme vzorec pro okamžitou rychlost a dosadíme do něj:

  $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

  $v = s'(t) = v_0 - gt$

  $v = s'(1{,}5) = 20 - 10 \cdot 1{,}5 = 20 - 15 = 5\,\mathrm{m/s}$

- kámen dosáhne maximální výšky právě tehdy, když bude jeho okamžitá rychlost nulová, spočítáme t pro $v = 0$:

  $v = v_0 - gt$

  $0 = 20 - 10t$

  $t = 2\,\mathrm{s}$

- spočítáme maximální výšku

  $s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$

  $s = 20 \cdot 2 - \frac{10}{2} \cdot 2^2 = 40 - 5 \cdot 4 = 20\,\mathrm{m}$

- závěr: Kámen má 1,5 s po vyhození rychlost 5 m/s. V maximální výšce 20 m se ocitne za 2 s.

Příklad 13. *Pohyb dvou hmotných bodů je popsán rovnicemi: $s_1 = t^3 + 5t^2 + 2t$; $s_2 = 5t^3 - 4t^2 + 4t$, kde t je čas. Určete okamžik, kdy se tyto dva hmotné body pohybují se stejným zrychlením. Dále určete, jaké jsou jejich okamžité rychlosti v tomto okamžiku.*

Řešení:

- podle vzorce $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ určíme okamžité rychlosti obou hmotných bodů:

  $v_1(t) = \frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 10t + 2$

  $v_2(t) = \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t} = 15t^2 - 8t + 4$

- podle vzorce $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ určíme okamžité zrychlení obou hmotných bodů:

$a_1(t) = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = 6t + 10$

$a_2(t) = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = 30t - 8$

- vypočteme pro jaké t si jsou zrychlení rovna:

$a_1 = a_2$

$6t + 10 = 30t - 8$

$24t = 18$

$t = \frac{3}{4}\ \mathrm{s} = 0{,}75\ \mathrm{s}$

- zjistíme, jakou rychlostí se hmotné body pohybují v čase $t = 0{,}75$ s:

$v_1\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 10 \cdot \frac{3}{4} + 2 = \frac{27}{16} + \frac{30}{4} + 2 = \frac{179}{16} \doteq 11{,}2\ \mathrm{m/s}$

$v_2\left(\frac{3}{4}\right) = 15 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{135}{16} - 6 + 4 = \frac{103}{16} \doteq 6{,}4\ \mathrm{m/s}$

- závěr: Hmotné body se pohybují stejným zrychlením v čase $t = 0{,}75$ s. Rychlost prvního hmotného bodu je v tomto okamžiku 11,2 m/s, rychlost druhého je 6,4 m/s.

Příklad 14. *Hřídel se roztáčí tak, že během prvních třech sekund je úhel jejího otočení úměrný času t a lze popsat rovnicí:* $\varphi = t^4 + 3t^2$. *Určete, v jakém okamžiku se hřídel pohybuje úhlovým zrychlením* 54 *rad/s*.

Řešení:

- podle vzorce $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ určíme úhlovou rychlost hřídele:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}(t^4 + 3t^2)}{\mathrm{d}t} = 4t^3 + 6t$$

- podle vzorce $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ určíme úhlové zrychlení hřídele:

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathrm{d}(4t^3 + 6t)}{\mathrm{d}t} = 12t^2 + 6$$

- určíme hodnotu t pro úhlové zrychlení ε =54 rad/s:

$54 = 12t^2 + 6$

$12t^2 = 48$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad$ zajímají nás pouze kladné hodnoty, tedy $t = 2$

- závěr: Hřídel se pohybuje úhlovým zrychlením 54 rad/s v čase 2 s po uvedení hřídele do pohybu.

Příklad 15. *Setrvačník se rozbíhá tak, že během prvních 5 sekund jeho pohybu je jeho vykonaná práce rovna polovině třetí mocniny času. Určete, jaký výkon má setrvačník pro* $t_1 = 1\ s\ a\ t_2 = 4\ s$.

Řešení:

- podle vzorce $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ určíme okamžitý výkon setrvačníku:

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t^3}{2}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2}$$

- určíme výkon setrvačník pro $\mathrm{t}_1 = 1$ s a $\mathrm{t}_2 = 4$ s:

$$P_1(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{2} = \frac{3}{2}\ \mathrm{W}$$

$$P_2(4) = \frac{3 \cdot 4^2}{2} = \frac{42}{2} = 21\ \mathrm{W}$$

- závěr: Pro $\mathrm{t}_1 = 1$ s má setrvačník výkon 1,5 W a pro $\mathrm{t}_2 = 4$ s má výkon 21 W.

4 Krátkodobý projekt na užití derivace

4.1 Charakteristika projektu

Projekt nese název „Šetřivý matematik staví dům“ a je zaměřen na procvičení optimalizačních úloh, které jsou koncipovány do krátkého příběhu. Obecným cílem projektu není pouze již zmíněné procvičení optimalizačních úloh, ale také pochopení významu matematiky pro běžný život.

Základním předpokladem pro realizaci tohoto projektu je znalost pojmu derivace, schopnost vyšetřování průběhu funkce, především hledání extrému funkce, a schopnost práce s měřítkem.

Studenti během projektu rozvíjejí své kompetence k řešení problémů, kdy hledají vhodnou metodu řešení, aplikují již dříve získané vědomosti, kriticky se zamýšlejí nad získanými poznatky a interpretují je před třídou. Studenti dále rozvíjejí komunikativní kompetence, kdy komunikují s učitelem, v rámci menších skupin i v rámci celé třídy a používají odborný jazyk a odpovídající symbolická vyjádření. Základem celého projektu je následující příběh obsahující 10 příkladů a zadaný úkol.

4.1.1 Příběh

Petr je čtyřicetiletý nadšenec matematiky, kterému se konečně podařilo našetřit dostatek peněz na stavbu vysněného domu. Před pár lety zdědil pozemek na venkově ve tvaru kruhu o poloměru 50 m, kde by svůj dům rád postavil. Než se pustí do stavby, rád by pozemek oplotil, aby zbytečně nelákal zloděje. Pozemek je poměrně rozlehlý a Petrovi se zahrada ve tvaru kruhu příliš nezamlouvá, rozhodne se tedy, že pozemek nevyužije celý, ale vytvoří si na něm zahradu, která bude mít tvar pravoúhelníku, a tu si oplotí. Nyní však před ním stojí těžký úkol, je třeba určit strany pravoúhelníku tak, aby rozloha jeho zahrady byla co největší (příklad č. 1).

Petr si chce postavit tzv. nízkoenergetický dům, což je dům, na jehož běžné používání se spotřebuje méně energie než na běžný dům. Petr chce ušetřit především na vytápění, a tak plánuje postavit dům, který bude mít při daném objemu minimální povrch, tudíž z něj bude utíkat méně tepla. Dům by měl být ve tvaru kvádru a mít dvě patra, a tak by měl být vysoký 6 metrů. Jeho objem by si Petr představoval 864 m^3. Dalším Petrovým početním úkolem je určit zbývající dva rozměry domu tak, aby jeho povrch byl minimální (příklad č. 2). Dům chce Petr situovat 15 m od jižní části plotu a 30 m od západní části plotu.

Dále se Petr zamýšlí nad ideálním rozměrem oken, protože čím menší obvod budou okna mít, tím méně studeného vzduchu budou v zimě propouštět. Zároveň v domě musí být dostatek světla, proto by jedno okno mělo mít plochu 4 m^2. Petr tedy musí určit rozměry pravoúhelníku, jehož obsah je 4 m^2 tak, aby jeho obvod byl minimální (příklad č. 3).

Protože je Petr velice šetřivý, nakoupil nějaký materiál již loni, kdy byl ve výrazné slevě. Nakoupil 40 m plotového pletiva a 80 m laťkového plotu. Plotové pletivo chce Petr použít na oplocení výběhu pro slepice, které si chce do budoucna pořídit. Výběh by chtěl Petr umístit do severovýchodního rohu pozemku a k oplocení využít plotu, který ohraničuje celou jeho zahradu. K ohraničení výběhu chce také použít kurník o rozměrech 2 x 2 m, který umístí do severozápadního rohu výběhu. Otázka, kterou musí Petr řešit, tentokrát zní: Jaké rozměry bude mít výběh pro slepice, když chceme, aby při použití pouze výše zmíněných prostředků byla jeho výměra co největší (příklad č. 4)?

Petr chce výběh pro slepice co nejvíce zamaskovat, a tak podél nově vytvořeného plotu ve vzdálenosti 2 metry od plotu vysadí ptačí zob, který se používá na živé ploty. Kromě slepic si chce pořídit také psa. Nejvíce by se mu líbil bernardýn, který může mít v krčku až 90 cm. Petrova manželka Lenka však takto velkého psa nechce, protože se bojí, že by ji mohl zničit její vysněnou zahrádku, kde bude pěstovat domácí zeleninu, zasadí ovocné stromy a vysází barevné květinové záhony. Petr se však bernardýna nechce vzdát, a tak přijde s nápadem vytvořit manželce oplocený prostor, kde by mohla mít svou zahrádku v bezpečí. Manželé se dohodnou, že by zahrádka mohla přiléhat k východnímu plotu a být vzdálena 2 m od ptačího zobu. Pro oplocení Petr použije 80 m laťkového plotu, který již nakoupil, a opět se bude snažit najít rozměry zahrádky tak, aby její výměra byla co největší (příklad č. 5).

Aby měla Lenka vždy dostatek vody na zalévání své zahrádky, navrhl Petr, že jí přesně uprostřed zahrádky vytvoří nádrž na vodu. Lenka s Petrovým návrhem souhlasila a dodala, že by byla ráda, kdyby nádrž byla ve tvaru kvádru a měla čtvercové dno. Ve slevě se Petrovi podařilo nakoupit 200 m^2 velkých dlaždic vhodných pro vodní nádrže. Nyní se tedy snaží spočítat, jaké rozměry by nádrž měla mít, aby její objem byl co největší. Petr počítá s tím, že některé dlaždice bude muset dělit, či se nějaké rozbijí, proto počítá s rezervou 8 m^2 (příklad č. 6).

Zrovna, když Petr řešil rozměry vodní nádrže, uvědomil si, že by nebylo na škodu mít vlastní bazén. Petr s Lenkou se shodli, že bazén by měl být ve tvaru válce a jeho objem by měl být 25 000 litrů. Petr se tedy hned pustil do další úlohy: Jaké rozměry bude mít bazén o objemu 25 000 litrů, když požaduje, aby na jeho vydláždění bylo zapotřebí co nejméně materiálu? Bazén chce Petr umístit 10 m od západního plotu a 30 m od jižního plotu (příklad č. 7).

Petr rád posedí s přáteli u piva či u grilovaného steaku, proto na jeho zahradě nesmí chybět pergola s příjemným posezením a grilem. Podstava pergoly bude mít rozměry 6 x 6 m, pergola bude mít střechu, jejíž vertikální průřez bude ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku. Základna tohoto trojúhelníku měří 6 m a ramena 5 m. V podkroví pergoly se bude nacházet místnost, kde budou moct Petrovi kamarádi za teplých letních dnech přespat. Petr chce, aby místnost byla ve tvaru kvádru, a tak se pouští do dalších výpočtů. Jaká bude šířka a výška místnosti, aby byl objem místnosti co největší? Pergola bude umístěna 10 m od západního plotu a 20 m od jižního plotu (příklad č. 8).

Petr nedávno našel u svých rodičů na půdě nevyužitý plech o rozměrech 120 x 120 cm. Nyní by z něj chtěl vyrobit krabici na dřevěné uhlí, kterou umístí do pergoly vedle krbu. Petr plánuje vyrobit krabici bez víka tak, že v rozích vystřihne 4 velké čtverce a zbytek ohne a svaří. Jako správný matematik se zamýšlí, jak velké čtverce má v rozích vystřihnout, aby byla krabice co nejobjemnější (příklad č. 9).

Jako poslední plánuje Petr postavit terasu, která bude jednou stranou přiléhat k severní straně domu. Lenka by si představovala terasu, jejíž půdorys se skládá z půlkruhu a obdélníku. Petr chce zase po obvodu terasy udělat palisádu (něco jako obrubník) a má k dispozici 16 m palisád. Petrovým posledním úkolem je spočítat, jaké rozměry bude mít terasa, aby byl její obsah co největší, když má k dispozici 16 m palisád? Palisáda nebude v místě, kde terasa přiléhá k domu (příklad č. 10).

4.1.2 Příklady

Příklad č. 1: Do kruhu o poloměru 50 m chceme vepsat pravoúhelník maximálního obsahu. Jaké bude mít tento pravoúhelník rozměry?

Příklad č. 2: Požadujeme, aby dům ve tvaru kvádru měl výšku 6 m a jeho objem byl 864 m^3. Určete jeho zbývající rozměry tak, aby byl jeho povrch minimální.

Příklad č. 3: Pravoúhelník má obsah 4 m^2. Určete jeho rozměry tak, aby byl jeho obvod minimální.

Příklad č. 4: V rohu již oploceného pozemku chceme vytvořit výběh ve tvaru pravoúhelníku. K dispozici máme již 2 existující na sebe kolmé ploty, 40 metrů nového pletiva a kurník o délce 2 m. Určete rozměry výběhu, aby byla jeho výměra co největší.

Příklad č. 5: Chceme vytvořit zahrádku ve tvaru pravoúhelníku, která bude na jedné straně přiléhat k již existujícímu plotu. Zahrádku chceme oplotit a máme k dispozici 80 m pletiva. Jaké rozměry bude zahrádka mít, aby její rozloha byla co největší?

Příklad č. 6: Chceme vytvořit dlážděnou nádrž na vodu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou. Máme dostatek materiálu na vydláždění plochy 192 m^2. Vypočtěte, jaké rozměry bude mít nádrž, aby byl její objem maximální.

Příklad č. 7: Požadujeme, aby bazén ve tvaru válce měl objem 25 000 litrů. Určete rozměry válce, aby na jeho vydláždění bylo zapotřebí co nejméně materiálu.

Příklad č. 8: Do rovnoramenného trojúhelníku vepište pravoúhelník, aby byl jeho obsah maximální. Základna trojúhelníku má délku 6 m, ramena měří 5 m.

Příklad č. 9: Z plechu o rozměrech 120 x 120 cm chceme vytvořit krabici bez víka tak, že v rozích vystřihneme 4 stejně velké čtverce a zbytek přehneme, aby vznikla krabice. Jak velké čtverce musíme odstřihnout, aby měla krabice maximální objem?

Příklad č. 10: Chceme vytvořit terasu, která jednou stranou přiléhá k domu. Půdorys terasy se skládá z půlkruhu a obdélníku (viz obrázek). Po obvodu terasy chceme udělat palisádu (obrubník), na níž máme k dispozici 16 m palisád. Palisáda nebude na staně, kde terasa přiléhá k domu. Určete rozměry terasy tak, aby byl její obsah co největší.

4.1.3 Úkol

Pomozte Petrovi s výpočtem jednotlivých úloh a zamyslete se, zda může podle těchto výpočtů dům a zahradu postavit. Zamyslete se například, zda není Petrův bazén zbytečně moc hluboký nebo naopak příliš mělký. Lze na zahradě vše uspořádat, jak si Petr naplánoval? Nepřekrývají se některé stavby? Načrtněte všechny významné stavby do plánu Petrovy zahrady a pomozte mu odpovědět na otázku, zda se na zahradu vejde ještě menší fotbalové hřiště pro jeho dva syny. Případně kde bude hřiště umístěno a jaké budou jeho rozměry?

4.2 Plán realizace projektu

Jedná se o krátkodobý projekt, jehož předpokládaná doba realizace jsou 3 vyučovací hodiny. Projekt je koncipován pro čtvrtý ročník středních škol. Před realizací projektu by žáci měli být seznámeni s pojmem derivace, být schopni najít extrém zadané funkce a být teoreticky seznámeni s optimalizačními úlohami.

Projekt by měl navazovat hned po výkladu optimalizačních úloh, proto by mělo být na začátku hodiny zařazeno rychlé opakování postupu řešení optimalizačních úloh. Na začátku první hodiny se studenti rozdělí do devíti skupin po dvou až třech studentech. Každá skupina obdrží papírky, na kterých jsou vypsány jednotlivé kroky řešení optimalizačních úloh. Úkolem studentů je seřadit jednotlivé kroky tak, jak jdou za sebou. Po vyřešení proběhne společná ústní kontrola, po které si studenti papírky ve správném pořadí nalepí na papír, který mají k dispozici v průběhu celého projektu.

Poté každá skupina dostane papír s předtištěným výše uvedeným příběhem a každý student obdrží počáteční plán pozemku (příloha 1). Studenti si přečtou příběh a učitel jim zadá výše uvedený úkol. Žáci doposud žádnou optimalizační úlohu neřešili, proto učitel přečte první odstavec příběhu, který pojednává o rozměrech matematikovy zahrady, a společně s žáky vyřeší příklad č. 1*: Do kruhu o poloměru 50 m chceme vepsat pravoúhelník maximálního obsahu. Jaké bude mít tento pravoúhelník rozměry?* Po úspěšném vyřešení příkladu učitel studentům promítne funkci, jejíž extrém hledali. Poté studenti zakreslí rozměry zahrady do plánu pozemku a přejdou k řešení dalších příkladů.

Každá skupina si vybere jeden příklad, který vyřeší. Učitel jejich výběr koordinuje, aby každá skupina měla jiný příklad. Učitel studenty v průběhu výpočtů kontroluje a pomáhá jim. V případě, že některá skupina správně vyřeší příklad rychleji než ostatní, učitel rozdělí studenty z této skupiny do skupin, které jdou pomalejší či potřebují s řešením příkladu poradit.

Když studenti všechny příklady správně spočítají, zve učitel k tabuli jednotlivé skupiny v pořadí podle příběhu. Každá skupina pak sdělí svým spolužákům, jaké bylo zadání jejich příkladu, jak postupovala při jeho výpočtu a jakého se dobrala výsledku. Také se zamyslí, zda jsou rozměry objektu podle jejich výpočtu praktické. Například zda není místnost příliš nízká či vysoká. Nakonec studenti zakreslí rozměry objektu do plánu pozemku.

Poté, co před tabulí vystoupí všechny skupiny, učitel vyvolá závěrečnou diskusi otázkami: Lze na zahradě vše uspořádat, jak si Petr naplánoval? Nepřekrývají se některé stavby? Vejde se na pozemek ještě menší fotbalové hřiště? Jaké budou jeho rozměry? Přijde vám znalost výpočtu optimalizačních úloh užitečná?

4.3 Realizace projektu

Projekt byl realizován v jedné třídě Gymnázia Dr. Josefa Pekaře v Mladé Boleslavi v rámci volitelného semináře matematiky. Přítomno bylo pouze 12 studentů. Projekt neprobíhal přesně podle plánu. Z důvodu časového skluzu byl studentům diferenciální počet vyložen pouze během pěti vyučovacích hodin. Byla jim vysvětlena definice derivace, odvozeny základní vzorce a aritmetické operace, Lagrangeova a Rolleova věta, souvislosti derivace s vyšetřováním průběhu funkce a s optimalizačními úlohami. Studenti však neměli možnost si nově nabyté znalosti upevnit a procvičit, proto sem se projekt snažila přizpůsobit jejich možnostem. Po konzultaci s jejich vyučující jsem se rozhodla k příkladům připsat jednotlivé kroky řešení optimalizačních úloh (příloha 2) a na začátku projektu vynechat opakování řešení postupu optimalizačních úloh.

Projektem se studenti zabývali 3 vyučovací hodiny. První hodinu byli seznámeni s obsahem a cílem projektu. Přečetli si příběh a společně jsme na tabuli vyřešili příklad číslo 2. V plánu bylo počítat příklad číslo 1, ale vzhledem k jeho obtížnosti jsem v dané situaci zvolila příklad jednodušší. Po jeho vyřešení studenti vytvořili šest dvojic. Každá dvojice si vybrala jeden příklad z příběhu, který řešila ve zbytku hodiny (15 minut). V průběhu řešení jsem studenty obcházela a pomáhala jim s řešením. Dvojice, které nestihly příklad vyřešit, dostaly za úkol vyřešit příklad do příští hodiny, která se konala za týden. Tři dvojice stihly příklad správně vyřešit během hodiny a zbylé tři přinesly jeho správné řešení na další hodinu.

Na začátku druhé hodiny jsem se studenty společně vyřešila příklad číslo 1. Příklad byl pro studenty obtížnější, a tak nám jeho řešení trvalo 30 minut. Poté jsem studentům rozdala plán Petrova pozemku (příloha 1), na který jsme společně zakreslili řešení příkladu číslo 1. Během třetí hodiny, která následovala bezprostředně po druhé, studenti chodili k tabuli v pořadí podle příkladů z příběhu a sdělovali svým spolužákům, co počítali, k jakému výsledku dospěli, zda jsou rozměry objektu praktické či ne a jak bude objekt zakreslen v plánu pozemku. Protože bylo dvojic pouze šest a příkladů potřebných k vyřešení osm, ujala sem se dvou zbylých příkladů já a v rychlosti seznámila studenty s jejich řešením.

Poté, co se všichni u tabule vystřídali, pokračoval projekt dále podle plánu realizace. Vyvolala jsem závěrečnou diskusi otázkami: Lze na zahradě vše uspořádat, jak si Petr naplánoval? Uspořádali byste některé objekty jinak? Vejde se na pozemek ještě menší fotbalové hřiště? Přijde vám znalost výpočtu optimalizačních úloh užitečná? Výsledkem diskuze a celého projektu bylo zjištění, že optimalizační úlohy mají významné využití v praxi, ale vždy se musíme zamyslet nad tím, zda výsledky, ke kterým jsme dospěli, jsou v běžném životě použitelné. Například, zda bazén nebude příliš mělký, místnost příliš vysoká či výběh pro slepice příliš velký.

4.4 Zhodnocení projektu

Osobně bych projekt zhodnotila jako povedený. Podařilo se mi pomocí něj ukázat studentům praktické využití derivace a procvičit postup řešení optimalizačních úloh. Během projektu si studenti také procvičili práci s měřítkem. Ve třídě bylo méně studentů, než jsem předpokládala, přesto jsem projekt realizovala tak, aby byly ukázány všechny praktické příklady, které jsem měla připravené. Časové rozložení projektu do třech vyučovacích hodin bylo v menším počtu studentů ideální. Pokud by však měl být projekt realizován ve třídě s větším počtem studentů, myslím, že by bylo lepší jeho realizaci rozložit do čtyřech vyučovacích hodin. Studenti během projektu spolupracovali a bylo vidět, že je projekt zaujal.

Během realizace projektu jsem se setkala s klasickými pedagogickými problémy. Například jsem studentům připravila ke každému příkladu pracovní list s jednotlivými kroky řešení optimalizačních úloh a někteří tento pracovní list nevyužili a dělali si nepřehledné poznámky do sešitu, ve kterých bylo obtížné se vyznat, když chtěli s něčím poradit či udělali chybu. Někteří studenti si dokonce nevšimli, že pracovní list má dvě strany, a vše zhuštěně zapsali na první stranu. Dále jsem se setkala s tím, že někteří studenti byli rychlejší a někteří pomalejší, ale myslím si, že se mi podařilo zvolit ideální tempo, které vyhovovalo většině.

Abych projekt nehodnotila pouze na základě svých dojmů, požádala jsem po ukončení projektu studenty, aby mi napsali, co se jim na projektu líbilo a co ne. Výrazně převažovaly kladné ohlasy. Studentům se líbilo zpracování formou příběhu a ukázka využití derivace v praxi. Dále projekt hodnotili jako přínosný, reálný, srozumitelný a praktický. Také je bavilo, že projekt nespočíval pouze v počítání příkladů, ale že se s příklady dále pracovalo a výsledky se zakreslovaly do plánu pozemku a hodnotilo se, zda jsou výsledky praktické. Zaznamenala jsem také jeden negativní ohlas, že studenti měli málo času na řešení některých úloh. Nicméně vidím jako úspěch, že tento ohlas byl pouze jeden a zbytku třídy připadalo tempo adekvátní. Některé komentáře studentů k realizaci projektu jsou uvedeny v příloze 6.

5 Výukové materiály zaměřené na téma derivace funkce jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat porovnáním čtyř výukových materiálů zaměřených na výklad a aplikaci pojmu derivace. Budeme porovnávat dvě papírové učebnice z edic Matika pro spolužáky a Matematika pro gymnázia. Zbylé dva výukové materiály tvoří internetová učebnice www.realisticky.cz a výuková videa dostupná na stránce www.isibalo.com. Všechny čtyři materiály stručně přestavíme a rozsah jejich výkladu pojmu derivace budeme porovnávat s rozsahem uvedeným v této bakalářské práci. Dále budeme hodnotit přehlednost, srozumitelnost, náročnost, matematickou správnost výkladu, typy a množství aplikačních úloh a stanovíme, pro koho je výukový materiál vhodný. Dále uvedeme, jakým způsobem tyto výukové materiály zavádějí pojem derivace funkce jedné proměnné.

5.1 Matika pro spolužáky

Autorem projektu Matika pro spolužáky je Marek Liška, který v roce 2012 během svého studia na Gymnáziu J. K. Tyla v Hradci Králové dostal nápad sepsat vlastní učebnice matematiky, pomocí kterých chtěl zlepšit vztah studentů k matematice. Z řad studentů a učitelů se mu podařilo sestavit tým, který společnými silami v roce 2015 vydal první učebnice. V září 2018 učebnice z edice Matika pro spolužáky pokrývaly celou středoškolskou matematiku a učilo podle nich 122 škol. [8]

Výkladem pojmu derivace se zabývá učebnice s podtitulem Diferenciální a integrální počet. Výkladu a procvičení pojmu derivace se zde věnuje 12 stran, na kterých je vysvětlen geometrický význam derivace, definice derivace, základní vzorce pro počítání derivací, derivace aritmetických operací a derivace složené funkce. Výklad je doplněn 8 řešenými příklady s podrobným komentářem a 18 příklady, jejichž správné řešení je uvedeno na konci kapitoly. Postup řešení těchto příkladů lze dohledat na internetové stránce www.pocitame.si, na kterou se lze jednoduše dostat pomocí QR kódů uvedených u výsledků. Z aplikačních úloh se v této učebnici vyskytuje průběh funkce a optimalizační úlohy, mezi kterými nalezneme i úlohy fyzikálního charakteru. Tématikou průběhu funkce se zabývá 28 stran, na kterých nalezneme výklad jednotlivých vlastností funkce, 2 řešené příklady s podrobným komentářem a 12 příkladů s výsledky. Optimalizačním úlohám je věnováno 9 stran, na kterých najdeme přehledný postup řešení optimalizačních úloh, 4 řešené příklady z praxe opět s podrobným komentářem a 5 neřešených příkladů s výsledky. Rozsah výkladu je poměrně malý. Učebnice se zaměřuje na základní pojmy, které se snaží co nejjednodušeji vysvětlit, aby je pochopil každý.

Učebnice používá studentský jazyk. Při definování pojmů se často vyhýbá matematickým zápisům a vysvětluje dané pojmy slovně. Například konvexnost a konkávnost funkce jsou vysvětleny takto: *„Funkce je konkávní, když její graf má tvar kopce* ∩*, můžeš si to pamatovat podle toho, že do konkávní kávu naliješ. U funkce konvexní je to zase naopak, tvar grafu připomíná velké písmeno* U *či údolí tvaru* ∪*“* [8 s. 55]. Některé matematické zápisy jsou v učebnici uvedeny – definice derivace, derivace složené funkce či parita funkce, ale vždy jsou doplněny o podrobný komentář.

Učebnice je doplněna o pracovní sešit s řadou příkladů, které jsou uspořádány podle obtížnosti. Plusem je také zařazení příkladů odpovídajících obtížnosti státní maturity. Učebnice se snaží vzbudit u studentů zájem o matematiku. Na začátku každé kapitoly se nachází tabulka, ve které je vysvětleno, co se studenti v dané kapitole naučí, proč je dobré to umět a kde se to dá použít. Na konci každé kapitoly je zařazeno přehledné shrnutí nových poznatků a příklady na procvičení s uvedenými výsledky. Dalším pozitivem je přehledné uspořádání celé učebnice, za zmínku stojí také moderní grafické zpracování.

V projektu Matika pro spolužáky vidím velkým přínos pro výuku matematiky, protože se zaměřuje i na matematicky méně nadané studenty, kteří mají v dnešních školách nemalé zastoupení a pro které je většina matematických učebnic příliš složitá. Největší přínos spatřuji v řešených příkladech, které obsahují velmi podrobný komentář k postupu řešení. Učebnice je vhodná i pro samostudium. Matika pro spolužáky je psaná studentským „nematematickým“ jazykem, který umožňuje snadné pochopení řady matematických problémů. Mnozí by mohli namítat, že učebnice sepsané studenty nemusejí být matematicky korektní. V tomto případě však učebnice prošly řadou jazykových i matematických korektur, které ručí za jejich správnost.

5.1.1 Zavedení pojmu derivace funkce

Učebnice z edice Matika pro spolužáky hned v úvodu sděluje, že derivace je směrnice tečny v bodě. Dále se zabývá tím, že tečna svírá s osou x úhel α, takže tan α je také směrnice tečny. Následuje graf, na kterém je u funkce $y = x^3$ znázorněno několik sečen procházejících bodem A. Pod grafem je uvedeno: *„Derivace v bodě a je vlastně limita směrnic sečen, které procházejí bodem* $f(a)$ *a bodem* $f(x)$*. Bod x je v tomto případě libovolný bod z okolí a, který se k bodu a limitně blíží“* [8 s. 36]. Poté se učebnice podrobně věnuje vztahu mezi derivací a spojitostí funkce.

Na další straně (příloha 7) se vrací k faktu, že tangens úhlu je směrnicí tečny a s pomocí grafu zavádí definici derivace, jejíž každý člen podrobně popisuje. Graf podporující definici derivace není příliš přehledný. Z mého pohledu je v něm zbytečně zvýrazněno okolí bodu A, a zároveň velmi potlačeno to, že se bod X limitně blíží k bodu A (viz příloha 2). Pod grafem je uvedeno: *„První derivace funkce f v bodě a se značí* $f'(a)$*. Pokud by bylo za úkol zjistit druhou derivaci (což je derivace z první derivace), tak by se to značilo* $f''(a)$*“* [8 s. 37]. Toto zavedení druhé derivace naprosto přesně vystihuje charakter celé učebnice, který může být pro někoho naprosto nedostačující a nepřesný, ale někomu může svou jednoduchostí pomoci k pochopení pro něj náročných pojmů.

K zavedení pojmu derivace v této učebnici mám řadu připomínek. Učebnice derivaci popisuje jako limitu směrnic sečen, ale neuvádí, co je to sečna, což by bylo dobré v učebnici tohoto charakteru vysvětlit. Dále bych vztah mezi derivací a spojitostí zařadila až za kompletní vysvětlení pojmu derivace a nevsouvala ho doprostřed vysvětlování. Kromě toho, že graf vystihující definici derivace mi přijde nepřehledný, bych ho ještě doplnila o komentář či alespoň popisek, který u grafu chybí.

5.2 Matematika pro gymnázia

Druhou papírovou učebnicí je Diferenciální a integrální počet z edice Matematika pro gymnázia, jejímiž autory jsou Dag Hrubý a Josef Kubát. Rozsah výkladu a aplikace pojmu derivace v této učebnici je téměř shodný s rozsahem v této práci. Nalezneme zde vysvětlení geometrického i fyzikálního významu derivace, definici derivace, derivace elementárních funkcí a aritmetických operací i některé významné věty diferenciální počtu jako jsou Lagrangeova či Rolleova věta. Matematika pro gymnázia používá odbornější jazyk než Matika pro spolužáky. Pro srovnání i zde uvedeme způsob, jakým tato učebnice zavádí konvexní a konkávní funkci: *„Funkce f se nazývá konvexní v intervalu I, právě když pro libovolná čísla* $x_1, x_2, x_3 \in I$, *která splňují nerovnost.* $x_1 < x_2 < x_3$, *platí, že bod* $[x_2; f(x_2)]$ *leží pod přímkou procházející body* $[x_1; f(x_1)]$ *a* $[x_3; f(x_3)]$ *nebo na ní. Funkce f se nazývá konkávní v intervalu I, právě když pro libovolná čísla* $x_1, x_2, x_3 \in I$, *která splňují nerovnost.* $x_1 < x_2 < x_3$, *platí, že bod* $[x_2; f(x_2)]$ *leží nad přímkou procházející body* $[x_1; f(x_1)]$ *a* $[x_3; f(x_3)]$ *nebo na ní."* [5 s. 120].

Známkou podrobnosti a odbornosti této učebnice jsou důkazy derivace všech elementárních funkcí, které jsou v učebnici uvedeny. Z aplikačních úloh jsou zde zastoupeny: vyšetřování průběhu funkce, užití derivací při výpočtu některých limit, nalezení rovnice tečny a normály, optimalizační a fyzikální úlohy. Nejpodrobněji se učebnice zabývá vyšetřováním průběhu funkce, kterému je věnováno 29 stran s řadou řešených i neřešených příkladů. Zbylé aplikační úlohy jsou uvedeny stručně.

Učebnice je dobrým základem pro studenty středních škol, kteří by se chtěli matematikou zabývat i na vysoké škole. V porovnání s učebnicí z edice Matematika pro spolužáky je tato učebnice podrobnější, odbornější a náročnější, obsahuje více různorodých příkladů na procvičení, které jsou často formulovány tak, aby se student musel nad příkladem zamyslet a nezačal ho okamžitě řešit podle naučeného postupu. Výsledky všech příkladů jsou uvedeny na konci učebnice, a to velmi zhuštěně. Učebnice jako celek je přehledná a logicky uspořádaná, oproti předchozí učebnici však obsahuje menší množství grafů podporujících výklad, neuvádí praktické příklady a nemotivuje studenty. Atraktivitou učebnice mohou být historické poznámky uvedené na konci učebnice, kde je možné se stručně dozvědět, jak diferenciální počet vznikl.

5.2.1 Zavedení pojmu derivace funkce

V učebnice z edice Matematika pro gymnázia se student na zavedení pojmu derivace připravuje již v kapitole týkající se limit, kde učebnice s podrobným komentářem zavádí směrnici tečny jako limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Dále je v učebnici uveden příklad, ve kterém student dojde k závěru, že okamžitou rychlost dokážeme spočítat jako limitu

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\lim_{x\to x_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Poté je zmíněno, že obě výše uvedené limity jsou limity podílu přírůstku funkce a přírůstku argumentu a tato limita má zásadní význam a své vlastní označení. Následně je vyslovena definice derivace funkce a uvedeno její značení a ekvivalentní zápisy.

Zavedení derivace v této učebnici je přehledné, srozumitelné a využívá geometrického i fyzikálního významu derivace. Jediné, co lze výkladu vytknout, je absence grafu znázorňující geometrický význam derivace.

5.3 Realisticky.cz

Autorem elektronické učebnice Realisticky.cz je středoškolský učitel Martin Krynický, který se na základě své praxe snaží nalézt takový postup výkladu, aby ho pochopila většina žáků. Název Realisticky.cz je odvozen od realistické pedagogiky, na jejímž principu je učebnice vytvořena. Součástí webové stránky je také didaktická část, ve které jsou uvedeny zásady realistické pedagogiky, autorův pohled na současné české školství či rady, jak učebnici využívat ve škole a jak z ní studovat samostatně. Webová stránka www.realisticky.cz navazuje na stránky www.ucebnice.krynicky.cz, kam Krynický od roku 2008 umisťoval obsahy svých hodin matematiky a fyziky, které používal jako studijní materiály pro své studenty. Za tři roky bylo možné na těchto stránkách nalézt kompletní rozsah středoškolské matematiky a fyziky. S rostoucím množstvím informací se stránka stávala náročnější na údržbu a neumožňovala zpětnou vazbu či diskusi o problémech souvisejících s výukou, a tak Krynický v září 2010 založil elektronické učebnice Realisticky.cz.

Pojem derivace nalezneme na této stránce v učebnici věnované matematice pro střední školy v kapitole Diferenciální a integrální počet. Rozsah výkladu přibližně odpovídá rozsahu této bakalářské práci. Autor se zde věnuje definici derivace, derivacím elementárních funkcí a aritmetických operací a zmiňuje také Rolleovu a Lagrangeovu větu. Podrobně se věnuje vyšetřování průběhu funkce a zmiňuje i rovnici tečny a normály, slovní úlohy na hledání extrémů, L´Hospitalovo pravidlo a fyzikální aplikace. Z hlediska odbornosti je tato učebnice srovnatelná s učebnicí z edice Matematika pro gymnázia. Konvexní funkce je zde definována takto*:*

„Funkce f se nazývá konvexní (má tvar „ďolíčku“) v intervalu I, právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$ splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + + f(x_1),$$

$($*bod* $P_2[x_2, f(x_2)]$ *leží pod přímkou* $P_1P_3)$ [9].

Hlavní odlišnost této učebnice od jiných spočívá v tom, že student je pomocí příkladu naváděn, aby k novým poznatkům došel sám, přičemž správný postup je v učebnici podrobně popsán. Na tomto principu je založena celá učebnice a z mého pohledu tak tvoří přechod mezi dvěma výše uvedenými učebnicemi, protože v ní najdeme jak odborné definice, tak podrobné komentáře psané studentským jazykem. Autor se také snaží, aby studenti všechny nové poznatky odvozovali, a nebyly jim předkládány jako hotová fakta.

Většina uvedených příkladů obsahuje i řešení s komentářem. Slabou stránkou této učebnice je menší počet příkladů k procvičení, který autor kompenzuje tak, že odkazuje na konkrétní příklady z publikace Matematika – přípravě k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy od Jindry Petákové. Na začátku některých kapitol jsou uvedeny znalostní předpoklady, které student potřebuje k zvládnutí kapitoly. Na konci je většinou uvedeno shrnutí nových poznatků, které je však velmi strohé. Učebnice je také doplněna pedagogickými poznámkami, ve kterých jsou zmíněny autorovi zkušenosti s tím, kde a jak studenti nejčastěji chybují, nebo proč je pro ně obtížné danou látku pochopit. Silnou stránkou učebnice je velké množství přehledných grafů.

Na rozdíl od předchozích učebnic zde chybí odpověď na nejčastější otázku studentů: „K čemu mi to bude?“. Na druhou stranu studenti mohou být motivováni tím, že spoustu nových poznatků odvodí sami. Negativem této učebnice je, že neprochází žádnými matematickými či jazykovými korekturami, a tak je možné v učebnici nalézt nějaké chyby. V části věnované derivaci jsem žádné matematické nepřesnosti neshledala, narazila jsem pouze na drobné jazykové nedostatky jako překlepy či chyby v interpunkci. Autor se tyto nedostatky snaží odstranit tím, že pod každou kapitolou umožňuje veřejnou diskuzi, kam mohou čtenáři psát své připomínky či dotazy. Učebnice je vhodná spíše pro samostudium, a to především pro studenty, kteří nemají rádi, když jim někdo předkládá hotová fakta. Dále je učebnice velmi užitečná pro učitele jako inspirace pro přípravu na hodinu.

5.3.1 Zavedení pojmu derivace funkce

Předtím, než učebnice Realisticky.cz zavede derivaci, věnuje se podrobně pojmům přírůstek funkce a přírůstek argumentu. Studentům jsou zadány příklady typu: dokresli do grafu k vyznačenému Δx odpovídající Δy a obráceně či vyjádři přírůstek funkce y v bodě x_0 odpovídající přírůstku argumentu Δx. Dále si studenti pomocí příkladů připomenou, že lineární funkce má předpis $y = ax + b$, kde hodnota parametru a nám říká, jak rychle funkce roste nebo klesá. Parametr a pak vyjádří jako $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Následně jsou studentům zadány úkoly: Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Porovnej, jak rychle roste ve vyznačených bodech. Jak velkou část grafu musí být okolo každého z bodů vidět, aby byl příklad řešitelný? Nakresli několik obrázků naší funkce s různě zvolenou velikostí Δx. Závisí parametr a na volbě Δx? Jak dosáhneme nejpřesnějšího výsledku? Pomocí těchto úkolů učebnice postupně dojde k definici derivace, kterou ověří pomocí výpočtu okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu.

Tento postup výkladu je velmi názorný, používá mnoho grafů, které jasně vystihují situaci. Myslím, že by mohl studenty zaujmout. Problémem může být to, že takovýto výklad zabere více vyučovacích hodin a vyžaduje neustálou aktivitu studentů, která na dnešních školách stále ubývá. Zajímavé je, že na rozdíl od předchozích dvou učebnic v tomto výkladu zazní spojení „směrnice tečny“ až úplně na konci, i když studenti většinu času směrnici tečny používají.

5.4 ISIBALO

ISIBALO je výukový portál poskytující výuková videa, řešené příklady a studijní materiály z matematiky, fyziky a nově i z chemie, dostupný na stránce www.isibalo.com. Autorem projektu je Dominik Chládek, jehož cílem je ukázat lidem, že matematika pro ně nemusí být strašák, ale že je může i bavit a hlavně dávat smysl.

Tématu derivace se věnuje lekce Diferenciální počet (derivace), ve které je k dispozici 25 výukových videí a 132 video příkladů. Rozsah výkladu je širší než v této bakalářské práci, zahrnuje například i derivaci funkce s absolutní hodnotou či Taylorův a Maclaurinův polynom. Z aplikačních úloh jsou zde podrobně uvedeny všechny kromě fyzikálních aplikací. Nalezneme zde videa, která obtížnostně odpovídají střední i vysoké škole, přičemž u každého videa či příkladu je uvedena jeho obtížnost. Každé výukové video se zaměřuje na jedno téma a je dlouhé 10–30 minut. Téměř pod všemi videi lze nalézt příklady, u kterých jsou přiložena krátká videa s komentovaným řešením, a testy, pomocí kterých si lze ověřit znalost hlavních poznatků z výukového videa. Pro zobrazení testů a řešení příkladů je však nutné zakoupit předplatné. K některým výukovým videím jsou přiloženy i přehledné výpisky. Na začátku každé lekce je uvedeno, co se v dané lekci naučíme a k čemu se to dá použít. Nalevo od každého videa jsou uvedeny předpoklady z jiných témat, které by měl student pro zvládnutí lekce znát, napravo najdeme videa, která na danou lekci navazují. Za zmínku stojí i přehledný, propracovaný a moderní design stránky.

Dominik Chládek ve svých výukových videích přednáší srozumitelně a názorně, i vysokoškolskou matematiku dokáže vysvětlit jednoduchým způsobem. Používá odbornou matematiku, kterou vysvětluje lidským způsobem, výklad doplňuje řadou příkladů a krátkými testy. Podobně jako předchozí učebnice jeho výstupy neprocházejí žádnou korekturou, a tak zde můžeme narazit na drobné chyby z nepozornosti, které se objevují především u řešených příkladů. Na některé chyby autor upozorňuje a omlouvá se za ně v popisku videa.

ISIBALO hodnotím jako přínosný a velice propracovaný výukový portál, který nabízí pomocnou ruku každému, kdo si neví s matematikou rady. Je vhodný jak pro samostudium, tak pro jedince, kteří potřebují vysvětlit látku probíranou ve škole.

5.4.1 Zavedení pojmu derivace funkce

Dominik Chládek vysvětluje pojem derivace ve dvou videích. V prvním videu uvádí geometrický i fyzikální význam derivace. Vše ilustruje pouze na grafech, video není doplněno o žádné zápisky. Student by si měl z videa odnést, že derivace funkce f v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0. Druhé video se zabývá samotnou definicí derivace. Nejprve je zde zopakován výpočet směrnice lineární funkce, podobně jako tomu bylo u předchozí učebnice. Poté Chládek přichází s myšlenkou, že směrnici tečny v bodě A lze přibližně určit jako směrnici sečny danou body A a B, přičemž nejpřesněji určíme směrnici tečny právě tehdy, když se B bude limitně blížit k A. Na základě této úvahy zavádí definici derivace a její ekvivalentní zápisy.

Výkladu není co vytknout, je logicky uspořádaný a snadno pochopitelný. V prvním videu si student vytvoří intuitivní představu o tom, co to derivace je, a následně v druhém videu je odvozena definice derivace.

6 Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce bylo představit studentům středních škol praktické využití derivace funkce jedné proměnné. Toho bylo dosaženo prostřednictvím krátkodobého projektu, který se skládal z 10 praktických příkladů zakomponovaných do krátkého příběhu o tom, jak spořivý matematik staví dům. Projekt nebyl realizován přesně podle původního plánu, ale musel být přizpůsoben aktuálním podmínkám ve třídě, kde byl realizován. Studenty příběh zaujal a hodnotili ho jako přínosný.

Využití derivace bylo také ukázáno v kapitole Aplikace derivace, kde bylo předvedeno 12 řešených příkladů z oblasti hledání rovnice tečny a normály, vyšetřování průběhu funkce, řešení některých limit pomocí L´Hospitalova pravidla a základních fyzikálních aplikací. Těmto aplikacím a projektu předcházelo teoretické shrnutí pojmu derivace, doplněné o historický vývoj tohoto pojmu.

Poslední kapitola se věnovala porovnání vybraných výukových materiálů zaměřených na diferenciální počet a může být velkým přínosem pro učitele i studenty, kteří se diferenciálním počtem zabývají a hledají studijní materiál, který by jim nejvíce vyhovoval. První výukový materiál tvořila učebnice z edice Matika pro spolužáky, která se zaměřuje na vysvětlení základních pojmů studentským jazyk a je vhodná pro studenty, kteří se snaží vyhnout složitým matematickým zápisům. Dalším materiálem byla učebnice z edice Matematika pro gymnázia, která je odbornější, podrobnější a obsahuje více příkladů než Matika pro spolužáky. Tato učebnice je dobrým zdrojem pro přípravu na studium na vysoké škole.

Třetí výukový materiál představovala internetová učebnice Realisticky.cz, která je založená na principech realistické pedagogiky a je vhodná pro jedince, kteří nemají rádi, když jim někdo předkládá hotová fakta. Posledním porovnávaným výukovým materiálem byl výukový portál ISIBALO, který se skládá z výukových videí a řady řešených příkladů. ISIBALO obsahuje i vysokoškolské učivo a je vhodné pro samouky, kteří dávají přednosti výukovým videím před papírovými učebnicemi.

Věřím, že tato bakalářská práce rozšířila povědomí studentů středních škol o praktickém užití pojmu derivace a je pro ně jak dobrou studijní oporou, tak stručným přehledem v současnosti dostupným výukových materiálů zaměřených na diferenciální počet. Dále doufám, že projekt navržený v této práci budu v budoucnu při výuce využívat nejen já ale i ostatní učitelé.

Zdroje

[1] FOLTA, J. *Dějiny matematiky*. 1.vyd. Praha: Národní technické muzeum, 2004. ISBN 80-239-4031-7.

[2] MAREŠ, M. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.

[3] SCHWABIK, Š., ŠARMANOVÁ, P. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-038-1.

[4] VESELÝ, J. *Matematická analýza pro učitele. První díl*. Praha: MatfyzPress, 1997. ISBN 80-85863-23-5.

[5] HRUBÝ, D., KUBÁT, J. *Matematika pro gymnázia*. *Diferenciální a integrální počet.* 2.vyd. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

[6] Euler.fd.cvut.cz – server ústavu aplikované matematiky. In: *Derivace funkce* [online]. [vid. 09. 10. 2019]. Dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety /Calculus1/Cal1_soubory/files/Prednaska5.pdf

[7] Math Tutor. In: *Věta o střední hodnotě a příbuzná tvrzení* [online]. [vid.12. 10. 2019]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/2/txc3ca2a.htm

[8] LIŠKA, M., VALENTA, T., KRÁL, L. *Matematika pro spolužáky. Diferenciální a integrální počet.* 1.vyd. Praha: ProSpolužáky.cz s. r. o., 2018. ISBN 978-80-88255-32-1.

[9] *Realistické učebnice matematiky a fyziky* [online]. [vid. 8. 11. 2019]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

[10] *Vaše cesta ke vzdělání* [online]. [vid. 10. 11. 2019]. Dostupné z: https://isibalo.com/

[11] BITTNEROVÁ, D., PLAČKOVÁ, G. *Louskáček 1. Diferenciální počet funkce jedné proměnné (Příklady)*. 4.vyd. Liberec: TUL, 2014. ISBN 978-80-7494-015-6.

[12] BLOCTOK, L., CHANDLER, S. *Core Maths for A-level.* Avon: The Bath Press, 1993. ISBN 978-13-1664-425-6.

[13] BRABEC, J., MARTAN, F., ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I.* Praha: SNTL, 1985.

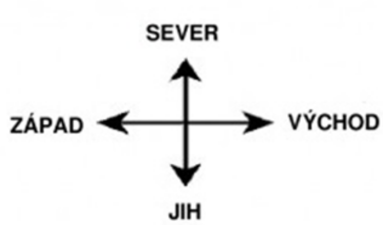
[14] JARNÍK, V. *Diferenciální počet I*. 5.vyd. Praha: Česká akademie věd, 1963.

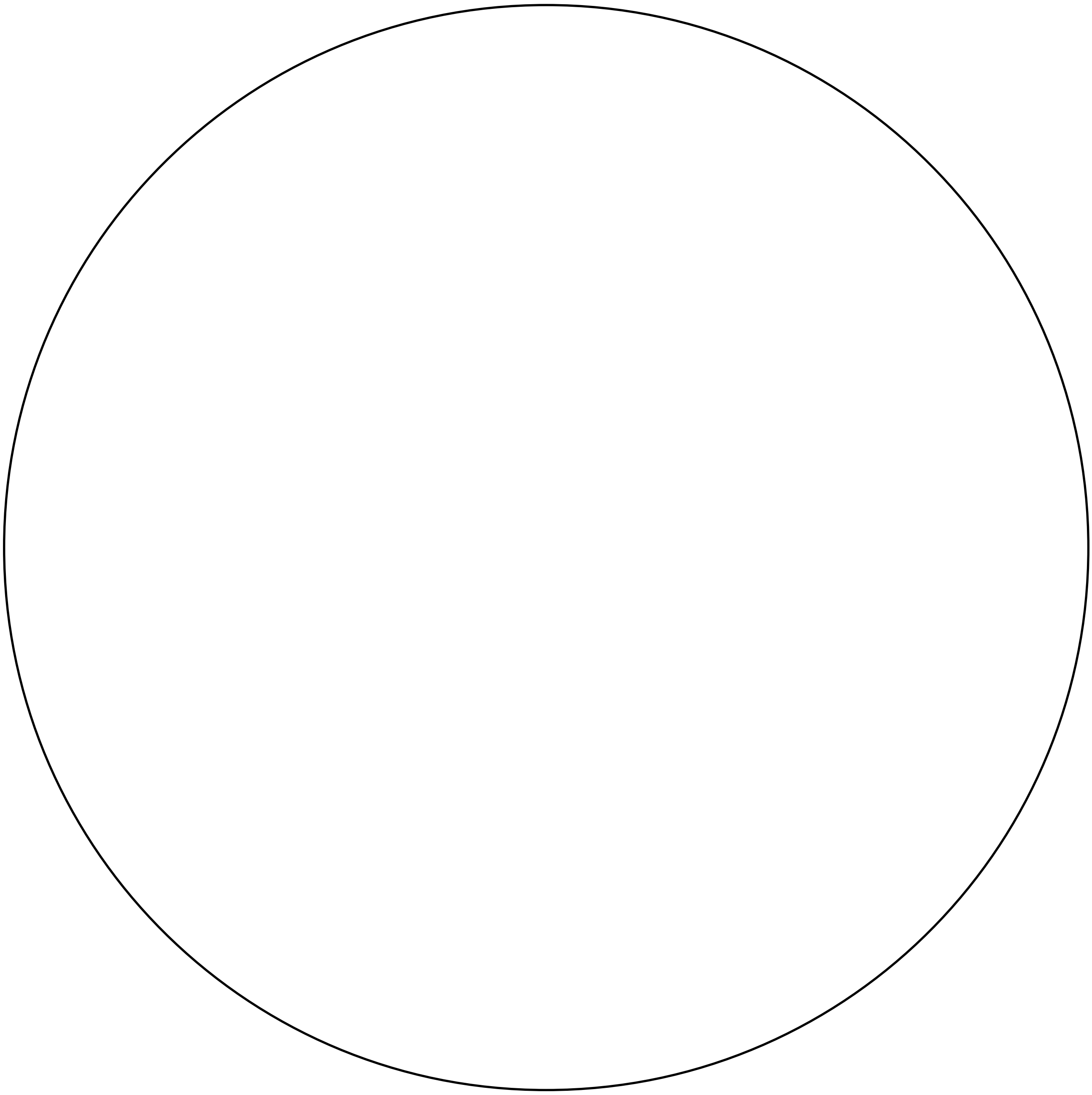
Seznam příloh

Přílohy

Příloha 1: Plán pozemku, do kterého studenti zakreslovali jednotlivé objekty

Plán Petrova pozemku





1 : 500

Příloha 2: Pracovní list k příkladu číslo 1

Příklad č. 1: Do kruhu o poloměru 50 m chceme vepsat pravoúhelník maximálního obsahu. Jaké bude mít tento pravoúhelník rozměry?

Řešení:

Náčrt situace:

Vyjádření funkce, jejíž extrém hledáme:

Podmínky existence proměnných:

Z dalšího vztahu mezi proměnnými vyjádříme jednu proměnnou pomocí druhé:

Převedeme funkci na funkci jedné proměnné:

Nalezneme extrém funkce:

- Vypočteme první derivaci:

- Určíme stacionární body:

- Ověříme, zda funkce nabývá ve stacionárním bodu požadovaného extrému:

Dopočítáme druhou proměnnou:

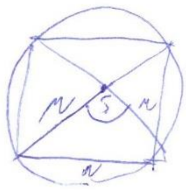
Závěr:

Příloha 3: Ukázka řešení příkladu číslo 1 studentem

Příklad č. 1: Do kruhu o poloměru 50 m chceme vepsat pravoúhelník maximálního obsahu. Jaké bude mít tento pravoúhelník rozměry?

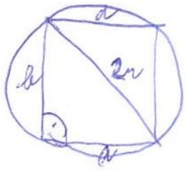
$r = 50$

Řešení:



$a = \sqrt{r^2 + r^2}$

Náčrt situace:



Vyjádření funkce, jejíž extrém hledáme:

$a = \sqrt{r^2 + r^2}$

$(2r)^2 = a^2 + b^2$

$100^2 = a^2 + b^2$

$a = \sqrt{100^2 + b^2}$

$S = a \cdot b$

$\Rightarrow S = \sqrt{100^2 - b^2} \cdot b$

Podmínky existence proměnných:

$a, b \in (0, 100)$

Z dalšího vztahu mezi proměnnými vyjádříme jednu proměnnou pomocí druhé:

$S = \sqrt{100^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2}$

$S = \sqrt{100^2 b^2 - b^4}$

$S = \sqrt{10000 b^2 - b^4}$

$S = (10000 b^2 - b^4)^{\frac{1}{2}}$

$S' = (10\,000 b^2 - b^4)^{\frac{1}{2}}$

$S' = 2 \cdot 10\,000 b$

$S' = \frac{1}{2}(10\,000 b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (20\,000 b - 4 b^3)$

$[f g(x)] = f' \cdot g(x) \cdot g'(x)$

$f' : x^{\frac{1}{2}}$

$g' : 10\,000 b^2 - b^4$

Převedeme funkci na funkci jedné proměnné:

$\frac{1}{2}(10\,000 b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (20\,000 b - 4 b^3)$

$\frac{20\,000 b - 4 b^3}{2\sqrt{10000 b^2 - b^4}} \Rightarrow \frac{10\,000 b - 2 b^3}{\sqrt{10\,000 b^2 - b^4}} = 0$

Nalezneme extrém funkce:

– Vypočteme první derivaci:

$\frac{2b(5000 - b^2)}{b\sqrt{b^2(10\,000 - b^2)}} = 0$

$\frac{2b(5\,000 - b^2)}{b\sqrt{10\,000 - b^2}} = 0$

– Určíme stacionární body:

$\frac{2(5\,000 - b^2)}{\sqrt{10\,000 - b^2}} = 0$

$10\,000 - 2b^2 = 0$

$10\,000 - 2b^2 = 0$

$10000 = 2b^2$

$5000 = b^2$

$b = \sqrt{5\,000}$

$b = 50\sqrt{2}$

– Ověříme, zda funkce nabývá ve stacionárním bodu požadovaného extrému:

$S'(50)$ ~~10000 − b³~~ $\frac{2(5000-b^2)}{\sqrt{10000-b}} = \frac{2(5000-50^2)}{\sqrt{10000-50^2}}$

$= \frac{5000}{\sqrt{7500}} \rightarrow +$

Dopočítáme druhou proměnnou:

$S'(90)$ $\frac{2(5000-90^2)}{\sqrt{10000-90^2}} = \frac{2(5000-8100)}{\sqrt{10000-8100}} = \frac{2\cdot(-3100)}{\sqrt{1900}}$

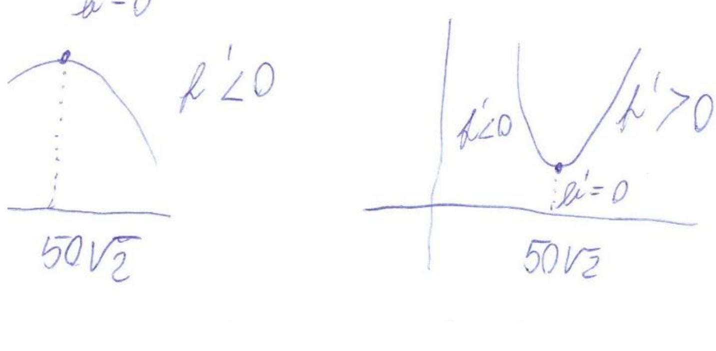
$\rightarrow -$

Závěr:

→ stacionární bod maximu

$b = 50\sqrt{2}$ je maximum

$a = \sqrt{100^2 - b}$



$I_1(0; 50\sqrt{2})$

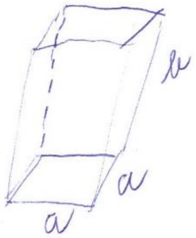
$I_2(50\sqrt{2}; 100)$

Příloha 4: Ukázka řešení příkladu 6 studentem

Příklad č. 6: Chceme vytvořit dlážděnou nádrž na vodu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou. Máme dostatek materiálu na vydláždění plochy 192 m². Vypočtěte, jaké rozměry bude mít nádrž, aby byl její objem maximální.

Řešení:

Náčrt situace:



Vyjádření funkce, jejíž extrém hledáme:

~~$S = a^2 + 4(ab)$~~

chceme $V \Rightarrow a^2 \cdot b$

$$\frac{192-a^2}{4a} = b$$

Podmínky existence proměnných:

$a, b \in R^+$

Z dalšího vztahu mezi proměnnými vyjádříme jednu proměnnou pomocí druhé:

$$192 = a^2 + 4ab$$
$$192 = a(a+4b)$$
$$\frac{192}{a} = a + 4b$$

$$\frac{192}{a} - a = 4b$$
$$\frac{192}{a} \cdot \frac{1}{4} - \frac{a}{4} = b$$
$$\frac{48}{a} - \frac{a}{4} = b$$

$$\frac{192-a^2}{4a} = b$$

$$\frac{192}{a+4b} = a$$

Převedeme funkci na funkci jedné proměnné:

~~$S = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{192-a^2}{4a}$~~

~~$S = a^2 + 192 - a^2$~~

$$V = a^2 \cdot \frac{192-a^2}{4a}$$
$$V = \frac{192a - a^3}{4}$$
$$V = 192a \cdot 4^{-1} - a^3 \cdot 4^{-1}$$

Nalezneme extrém funkce:

– Vypočteme první derivaci:

$$V' = 192 \cdot 4^{-1} - 3a^2 \cdot 4^{-1}$$
$$V' = \frac{192}{4} - \frac{3a^2}{4} \rightarrow$$

– Určíme stacionární body:

$$\frac{192}{4} - \frac{3a}{4} = 0$$
$$192 - 3a = 0$$
$$192 = 3a^2$$
$$a = \sqrt{64}$$
$$a = \pm 8$$

– Ověříme, zda funkce nabývá ve stacionárním bodu požadovaného extrému:

$$V' = \frac{192}{4} - \frac{3a^2}{4}$$

$$V'' = 0 - \frac{6a}{4} \qquad V''_{(8)} = \frac{-48}{4}$$

$$V''_{(8)} = -12$$

$\Rightarrow$ maximum v bodě $a = 8$

Dopočítáme druhou proměnnou:

$$192 = a^2 + 4ab$$

Závěr:

$$192 - 64 = 4ab$$

$$128 = 32b$$

$$\underline{\underline{b = 4}}$$

Nádrž má maximální objem při rozměrech $\underline{a = 8 \text{ a } b = 4}$.

Příloha 5: Hodnocení projektu studenty

Velmi užitečné. Ukázalo mi to nové možnosti aplikace ~~...~~ matematiky v praxi.
– užitečné; ~~...~~
– derivace

Bylo to těžké, to jo, ale na druhou stranu to ve všem zadání bylo srozumitelné. Bavilo mě to a líbilo se mi, že ~~A~~ jste vymyslela příklady z praxe.

Zajímavé příklady a ukázka použití v praxi

Jelikož jsem s derivacemi neměl v minulosti absolutně žádnou zkušenost, bylo to pro mě velmi těžké.
Jinak bavilo mě kreslit plot Petrova domu a díky jí zkušenost

– pěkný průběh
– pomohlo mi to case k lepšímu pochopení derivátů
– líbil se mi průběh výuky

zajímavý způsob využití
dobré k mučení

1. ZAJÍMAVÉ, VESELÉ A ROZHODNĚ PŘÍNOSNÉ
2. VÝKLAD SROZUMITELNÝ A ENTUZIASTICKÝ
3. VYSVĚTLENÍ NEJASNOSTÍ VÍCE NEŽ ADEKVÁTNÍ

– PRAKTICKÉ VYUŽITÍ
– REÁLNÉ ÚLOHY

• procvičení
• ukázka, že to lze i v praxi
• kreslení plánku

– málo času

Příloha 6: Ukázková strana z učebnice z edice Matika pro spolužáky

kapitola 1

část 3

Derivace funkce

Diferenciální a integrální počet | Diferenciální počet

Ach ty derivace!

V této podkapitole ti konečně řeknu, co znamená pojem derivace. Naučím tě pravidla pro derivování nejen součtu nebo součinu jednoduchých funkcí, ale i funkcí složených.

Na co umět derivace?

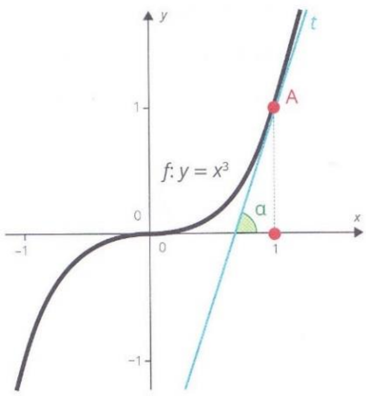
Derivací funkce získáš její tečnu v daném bodě. Díky derivacím můžeš vyřešit matematické, fyzikální, ale i ekonomické problémy. Jestliže graf funkce popisuje například dráhu nějakého tělesa v čase, tak derivace funkce vyjadřující tuto situaci v konkrétním bodě popisuje rychlost tělesa v tomto bodě. Dále derivace využiješ například v ekonomii. Díky nim budeš moci určit takovou cenu, při které bude firma maximalizovat zisk.

Derivace a matematika?

Derivace se v matice využívá opravdu hodně, například díky ní dokážeš určit extrémy (maxima a minima) funkce. Hlavní využití derivace objevíš během vyšetřování průběhu funkce. O průběhu funkce ti ale řeknu až v další podkapitole. Pokud ovládneš výpočet limit a derivací, tak dokážeš určit průběh všech možných funkcí.

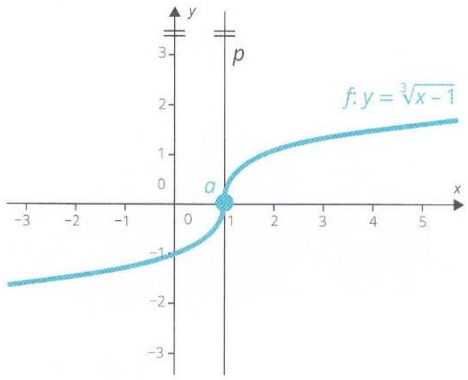
Nyní to bude jen o derivaci

Z úvodu asi tušíš, že derivace funkce je směrnice tečny grafu funkce v daném bodě. Tečna je přímka dotýkající se grafu v jednom bodě. V případě derivace **tečna** svírá s osou x úhel α, takže tangens α je **směrnice** tečny a ta určuje, jak moc je tečna nakloněná.

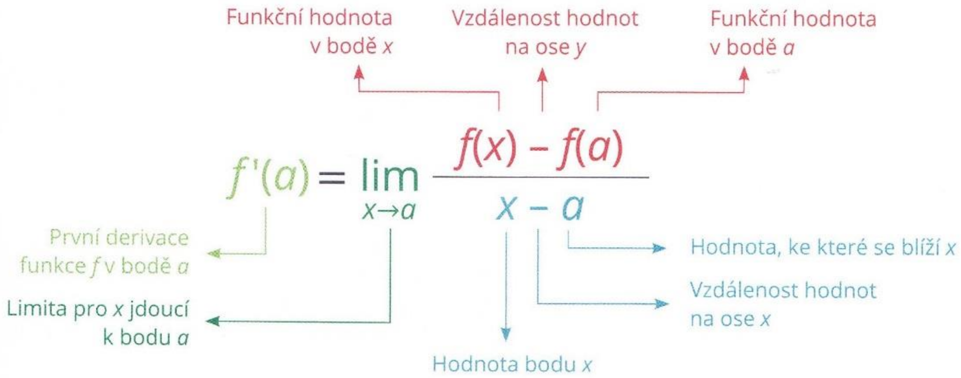


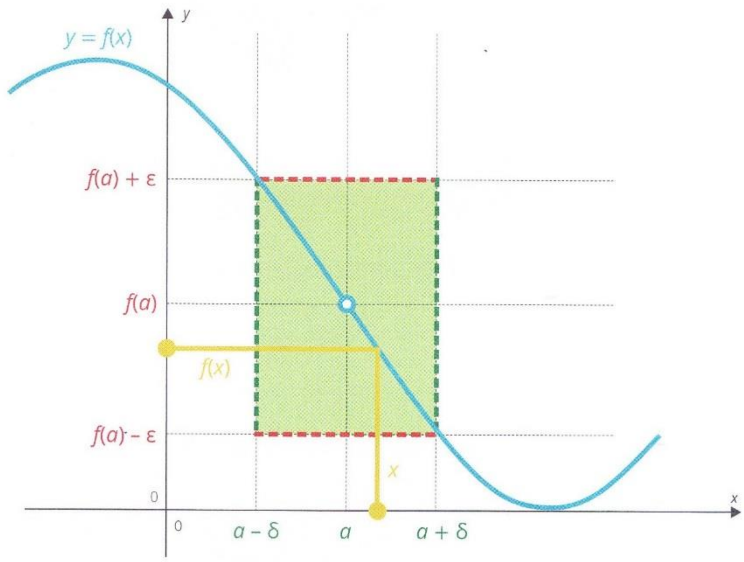
Na obrázku vidíš tečnu t funkce f: $y = x^3$ procházející bodem A[1; 1]. Tangens úhlu α vypočítáš jako podíl protilehlé strany ku přilehlé straně pravoúhlého trojúhelníku, který vznikne pomocí tečny t, osy x a kolmice z bodu A na osu x.

Příloha 7: Ukázková strana z učebnice z edice Matika pro spolužáky



Na začátku jsem ti řekl, že tangens úhlu je směrnice tečny, takže derivaci vypočítáš jako podíl změny hodnoty na ose *y* a změny hodnoty na ose *x*. A teď to všechno ještě dát dohromady.





První derivace funkce *f* v bodě *a* se značí jako $f'(a)$. Pokud by bylo za úkol zjistit druhou derivaci (což je derivace z první derivace), tak by se to značilo jako $f''(a)$. Třetí derivace (což je derivace z druhé derivace) by se značila jako $f'''(a)$. V případě, že by se měla provést derivace vyšších řádů, tak by se vše zapsalo pomocí čísel v závorkách – například u čtvrté derivace by to bylo $f^{(4)}(a)$.

Příloha 8: Ukázková strana z učebnice z edice Matematika pro gymnázia

4. DERIVACE FUNKCE

4.1 Derivace funkce v bodě

Vedle limity patří derivace funkce k pilířům infinitezimálního počtu. S derivací funkce úzce souvisí pojem diferenciál funkce, a tedy i název diferenciální počet, jak ukážeme později. Pomocí derivace se naučíme elegantním způsobem vyšetřovat průběhy funkcí, včetně sestrojení jejich grafů, budeme moci řešit slovní úlohy, kde je požadováno určení extrému dané veličiny, a to buď maxima, nebo minima, ukážeme si užití derivace v geometrii, fyzice a chemii.

Směrnice tečny

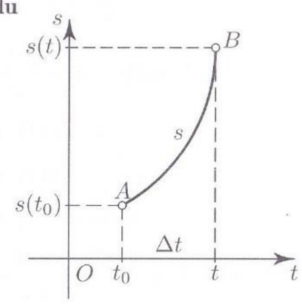
Na konci předcházející kapitoly jsme se v souvislosti s určením tečny grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$ zabývali limitou

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukázali jsme, že tato limita má geometrickou interpretaci, udává *směrnici tečny* k_T grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$. Podívejme se nyní na jeden problém z fyziky.

Okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu

Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje. Od jistého okamžiku začneme měřit čas a zároveň v závislosti na čase t budeme měřit dráhu $s(t)$, kterou bod urazil od okamžiku $t = 0$. Dráha $s(t)$ je, jak známe z fyziky, funkcí času t. Na jednu osu soustavy souřadnic budeme nanášet čas t, na druhou dráhu $s(t)$, dostaneme tak graf funkce $s = s(t)$, obr. 4.1. V době mezi časy t_0 a t urazil bod dráhu délky $s(t) - s(t_0)$.



Obr. 4.1

Průměrná rychlost $\bar{v}$ v časovém intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta t\rangle$ je dána výrazem

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Veličina $\bar{v}$ charakterizuje pohyb v čase t_0 tím přesněji, čím je menší Δt. *Okamžitou rychlost* v v čase t_0 budeme definovat jako limitu

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Příklad 1

Dráha přímočarého pohybu je dána vztahem $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, kde a je konstanta. Přírůstek dráhy v čase t_0 je

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2 = at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2.$$

Pro okamžitou rychlost v čase t_0 pak platí

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at_0 + \frac{1}{2}a\Delta t\right) = at_0,$$

nebo psáno jinak:

$$\Delta s = s(t) - s(t_0) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}at_0^2 = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}at_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2}a \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} =$$

$$= \frac{1}{2}a \lim_{t \to t_0} (t + t_0) = \frac{1}{2}a \cdot 2t_0 = at_0.$$

V obou případech jsme získali výsledek $v = at_0$. Můžeme tedy prohlásit, že okamžitá rychlost v libovolném časovém okamžiku t je $v = at$, tzn. že roste rovnoměrně s časem. Proto tento pohyb nazýváme rovnoměrně zrychlený.

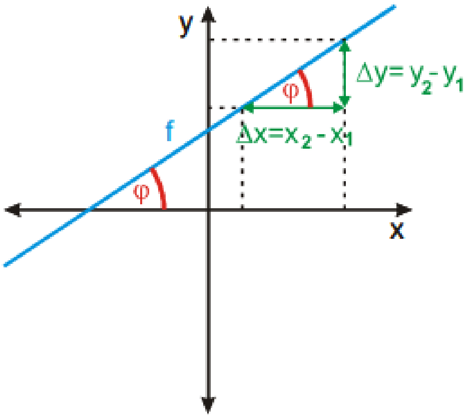
Pozornému čtenáři jistě neušlo, že v uvedených případech jsme pracovali s limitou

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

Příloha 9: Ukázka z internetové učebnice Realisticky.cz

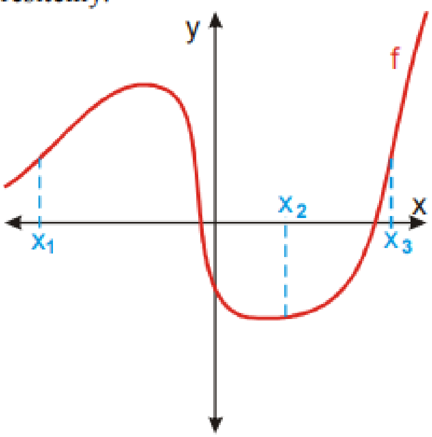
Př. 3: Kterým číslem charakterizujeme míru růstu lineární funkce. Jak se toto číslo počítá, pokud známe dva body grafu funkce?

Míru růstu lineární funkce charakterizuje hodnota parametru a, která také udává $\mathrm{tg}\varphi$ (φ je úhel, který graf svírá s kladnou poloosou x).
Hodnotu a můžeme vypočítat ze dvou bodů grafu, buď dosazením do rovnice $y = ax + b$ nebo vzorcem $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Určit, jak rychle funkce roste nebo klesá, není u lineární funkce nic těžkého. Zkusíme, zda by něco podobného šlo provést i u složitějších funkcí, které nejsou lineární (lineární funkce situaci zjednodušuje tím, že se mění pořád stejným způsobem a její změna je v každém bodě stejná).

Př. 4: Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Porovnej, jak rychle roste ve vyznačených bodech. Jak velkou část grafu musí být okolo každého z bodů vidět, aby byl příklad řešitelný.



Funkce $y = f(x)$ roste nejrychleji v bodě x_3 (graf je v něm nejstrmější), nejpomaleji v bodě x_2 (graf je v něm nejpozvolnější).
K vyřešení příkladu stačí vidět libovolně malou část grafu funkce v okolí bodu, ve kterém máme porovnat rychlost růstu.

Příloha 10: Ukázka z výukového portálu ISIBALO