



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

SIMULACE NELINEÁRNÍ ODEZVY STAVEBNÍCH MATERIÁLŮ A PROBLÉM IDENTIFIKACE MATERIÁLOVÝCH PARAMETRŮ

SIMULATION OF NONLINEAR RESPONSE OF CONSTRUCTION MATERIALS AND
PROBLEM OF IDENTIFICATION OF MATERIAL PARAMETERS

DISERTAČNÍ PRÁCE

DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ing. Filip Hokeš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. JIŘÍ KALA, Ph.D.

BRNO 2022

Abstrakt a klíčová slova

Abstrakt

Problematiku identifikace parametrů při numerických simulacích lze považovat za nezbytný krok při využití matematických modelů, jakými jsou komplexní materiálové modely stavebních materiálů využívaných v metodě konečných prvků. Problém se zvláště zesiluje v případě anizotropních materiálů, ale také u betonu, který se odlišně chová v tahu a tlaku a který vykazuje odlišnou odezvu při rychlém dynamickém a dlouhodobém zatížení. Korektní vystižení odezvy betonu při výpočtu si vyžaduje použití teorie plasticity, teorie poškození, viskoelasticity a viskoplasticity či jejich vzájemné kombinace. Vznikají tak materiálové modely a reologická schémata s velkým množstvím parametrů, které nejsou v normách běžně dostupné. Dizertační práce představuje pro identifikaci parametrů aplikaci meta-heuristického algoritmu Particle Swarm. Úspěšnost metody je demonstrována na dvojici případů, nejprve na identifikaci parametrů elastoplastického materiálového modelu z pracovního diagramu a poté na identifikaci hodnot tuhostních konstant a viskozit reologického schématu z křivky dotvarování.

Klíčová slova

Optimalizace, identifikace parametrů, materiálová nelinearita, beton, plasticita, reologie

Abstract

The issue of parameter identification within numerical simulations can be considered a necessary step in the use of mathematical models, such as complex material models of building materials utilized in finite element method. The problem is particularly emphasized in the case of anisotropic materials but also in the case of concrete, which behaves differently in tension and compression and which shows different response under rapid-dynamic and long-term loading. Correct capture of the concrete response in the computation requires usage of plasticity theory, damage theory, visco-elasticity and visco-plasticity or their mutual combinations. It results in development of material models and rheological schemes with large amount of parameters that are not commonly available in standards. The dissertation presents application of meta-heuristic algorithm Particle Swarm for parameter identification. The success of the method is demonstrated in a pair of cases, first on the identification of elastoplastic material model parameters from stress strain diagram and then to identify the values of stiffness constants and viscosities of the rheological scheme from a creep curve.

Keywords

Optimization, parameter identification, material nonlinearity, concrete, plasticity, rheology

Bibliografická citace

Ing. Filip Hokeš *Simulace nelineární odezvy stavebních materiálů a problém identifikace materiálových parametrů*. Brno, 2022. 111 s. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci s názvem Simulace nelineární odezvy stavebních materiálů a problém identifikace materiálových parametrů zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 28. 1. 2022

Ing. Filip Hokeš
autor práce

Poděkování

Za příležitost, čas a nezbytný nátlak.
Rodině, manželce, školiteli a kolegům!

Obsah

Abstrakt a klíčová slova	iii
Bibliografická citace	v
Prohlášení	vii
Poděkování	ix
1 Úvod	1
2 Analýza současného stavu poznání	3
3 Cíle dizertační práce	5
3.1 Identifikace parametrů modelu s pomocí optimalizace	5
3.2 Implementace algoritmu PSOA	5
4 Teorie komplexních materiálových modelů	6
4.1 Úvod	6
4.2 Přehled oblasti	7
4.3 Materiálová nelinearita	8
4.3.1 Základní vztahy teorie plasticity	9
4.3.1.1 Materiálový model <i>Menetrey-Willam</i>	10
4.3.2 Základní vztahy teorie viskoelastivity	12
4.3.2.1 Kelvinův řetězec	13
5 Teorie optimalizace	15
5.1 Úvod	15
5.2 Přehled oblasti	17
5.3 Optimalizační metody	18
5.3.1 Klasické metody	18
5.3.2 Metody matematického programování	18
5.3.2.1 Algoritmus Nelder-Mead (NMOA)	19
5.3.2.2 Schéma algoritmu Nelder-Mead (NMOA)	23
5.3.3 Moderní metody	24
5.3.3.1 Algoritmus Multi Objective Genetic Algorithm (MOGA)	24
5.3.3.2 Algoritmus Particle Swarm (PSOA)	27
5.3.3.3 Schéma algoritmu Particle Swarm (PSOA)	29
6 Testy implementovaných algoritmů	30
6.1 Úvod	30
6.2 Funkce Booth	31
6.2.1 Test algoritmu NMOA	31
6.2.2 Test algoritmu PSOA	32
6.3 Funkce Ackley (2D)	34
6.3.1 Test algoritmu NMOA	34

6.3.2	Test algoritmu PSOA	35
6.4	Funkce Michalewicz (5D)	38
6.5	Funkce Rosenbrock	39
6.5.1	Test algoritmu NMOA	39
6.5.2	Test algoritmu PSOA	40
6.6	Funkce Gomez-Levy	42
6.6.1	Test algoritmu NMOA	42
6.6.2	Test algoritmu PSOA	43
7	Aplikace optimalizace na problémy mechaniky stavebních konstrukcí	45
7.1	Úvod	45
7.2	Rozměrová optimalizace	47
7.2.1	Analytické řešení	48
7.2.2	Numerické řešení algoritmem NMOA	49
7.2.3	Numerické řešení algoritmem PSOA	51
7.3	Tvarová optimalizace	55
7.3.1	Numerické řešení algoritmem PSOA	57
8	Identifikace parametrů materiálových modelů	64
8.1	Identifikace parametrů modelu <i>Menetrey-Willam</i> použitím MOGA	64
8.1.1	Třibodový ohybový test (3PBT)	64
8.1.2	Compact Tension Test (CTT)	69
8.2	Identifikace parametrů modelu <i>Menetrey-Willam</i> použitím PSOA	72
8.2.1	Vstupní data, výpočtový model, účelová funkce a analýza citlivosti	72
8.2.2	Výsledky identifikace – spojitý charakter parametrů	73
8.2.3	Výsledky identifikace – diskrétní charakter parametrů	74
8.2.4	Shrnutí	75
8.2.5	Identifikace parametrů <i>Kelvinova řetězce</i>	78
9	Závěr	82
A	Výsledky tvarové optimalizace	84
A.1	Diskrétní charakter parametru	84
A.2	Kombinace diskrétních parametrů a parametrů typu průřez	85
B	Obrazová příloha ke studiím identifikace modelu GKCH	87
B.1	GKCH #0: RMSE, populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000	88
B.2	GKCH #1: RMSE, populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000	89
B.3	GKCH #2: RMSE, populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000	90
B.4	GKCH #3: RMSE, populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000	91
B.5	GKCH #4: L_1 , populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000	92
B.6	GKCH #5: L_1 , populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000	93
B.7	GKCH #6: L_1 , populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000	94
B.8	GKCH #7: L_1 , populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000	95
	Seznam obrázků	95
	Seznam tabulek	98
	Literaaura	99
	Seznam publikací	105
	Kompletní přehled publikačních aktivit	106
	Curriculum Vitae	109

Pro podrobnou analýzu odezvy stavebních konstrukcí se využívají numerické modely, které mohou být velmi komplexní a v konečném důsledku obsahovat řadu vstupních parametrů. Zdaleka ne všechny parametry lze určit přímo s pomocí dostupných experimentů. Problematiku identifikace lze tedy považovat za nedílnou součást pokročilých numerických analýz, nicméně aplikace metod identifikace je spíše doménou vědeckých studií. Obsahem předkládané práce je proto představení implementace metody identifikace parametrů nelineárních materiálových modelů pomocí optimalizace do výpočetního nástroje dostupného v projekční praxi.

Za dominantní lze v oblasti statiky a dynamiky stavebních konstrukcí považovat numerické řešení metodou konečných prvků (FEM) [10, 98], přestože některé programy (např. *Dlubal RFEM* a *SCIA Engineer*) poskytují pro materiálové a geometricky lineární prutové úlohy řešení ryze analytické, při výpočtech rozsáhlých konstrukcí s plošnými či objemovými prvky je však použití FEM nevyhnutelné. Stejný závěr lze učinit v případě, že se vliv geometrické nebo materiálové nelinearity do úvahy vezme. Vzhledem k všeobecnému tlaku na efektivitu je snahou navrhovat nosné konstrukce staveb co nejúsporněji, avšak bezpečné a dlouhodobě provozuschopné. Uvedené aspekty pak akcentují potřebu využití geometricky nelineárního řešení u lanových a membránových konstrukcí či materiálově nelineárního řešení betonových konstrukcí, které vykazují vazké (zpožděné) chování.

Zahrnutí výše zmíněných nelinearit, které jsou normativními standardy povoleny, klade aditivní požadavky nejen na vývojáře a výstupní kvalitu software, ale zároveň na jejich uživatele. Z hlediska teorie si odpovědné využití nelineárního řešení vyžaduje znalost principů nelineární mechaniky, jejichž podrobný popis je praktikům dostupný v publikaci [99]. Vedle běžných znalostí o řešení soustav lineárních rovnic v metodě konečných prvků je v nelinearitě nutná znalost pokročilých metod řešení soustav nelineárních rovnic, jelikož přesnost výsledků může být ovlivněna volbou a nastavením řešiče. Ve výpočtových systémech *Dlubal RFEM* a *SCIA Engineer* je v těchto ohledech snaha uživateli ulehčit. Oblast, kde však nejsou na první pohled přílišná zjednodušení možná, je zadávání vstupních vlastností použitých materiálů.

V metodě konečných prvků se vliv vlastností materiálu na statickou odezvu zavádí prostřednictvím konstitutivních (fyzikálních) rovnic, které mohou mít pro lepší výstižnost reálného chování nelineární tvar. Takový matematický model se označuje také jako materiálový model, přičemž jeho podoba a složitost je dána použitými teoretickými předpoklady. Použitá teorie má zároveň přímý vliv na podobu vstupních charakteristik, přičemž nejčastěji se jedná o mechanicko-fyzikální vlastnosti: moduly pružnosti, pevnosti a součinitele příčné kontrakce; lomově-mechanické vlastnosti: lomové energie. Vedle těchto známých veličin to však mohou být i další koeficienty jako jsou například tuhosti a viskozity elementárních členů reologických řetězců, ale také empirické koeficienty jako např. tzv. *Dynamic Increase Factor* (DIF) umožňující zohlednit odezvu při velmi rychlém dynamickém zatížení [160]. Některé a u některých modelů také všechny výše uvedené parametry je nutné zadat před spuštěním vlastní numerické simulace. Typicky se s tímto obecným zadáním lze setkat při využití knihovny nelineárních materiálových modelů *multiPlas* [35], která vznikla pro podporu simulací v systému *ANSYS*. V programech *SCIA Engineer* a *Dlubal RFEM* je situace trochu odlišná, jelikož jsou cíleny na uživatele v oblasti stavební mechaniky a tak jsou vybaveny databázemi materiálů dle dostupných normativních předpisů. Tím je zadání zjednodušeno, nicméně v případě komplexních materiálových modelů, které v některých případech mohou kombinovat i více teoretických předpokladů, nejsou některé materiálové parametry v těchto databázích dostupné. Jedním z východisek je využití 1D pracovních diagramů¹ z experimentů a to přímo jako vstup

¹Zatížení vs. deformace: F [N] - d [m] nebo napětí vs. přetvoření: σ [Pa] - ϵ [-]

materiálového modelu, popřípadě z nich lze hodnoty parametrů získat procesem zpětné *identifikace*. Podstata takového procesu spočívá v nalezení hodnot souboru vstupních parametrů materiálového modelu, který při numerické FEM simulaci dává pracovní diagram odpovídající výstupu z experimentu. Analýza současného stavu problematiky ukazuje, že napříč obory včetně nelineární mechaniky stavebních materiálů jsou dominantní metody optimalizační a metody založené na využití umělých neuronových sítí.

Z materiálů používaných pro návrh nosných konstrukcí staveb se popsáný problém hledání vhodných parametrů materiálových modelů akcentuje u betonu, jelikož vykazuje odlišné chování v tahu a tlaku. Navíc reaguje odlišně na zatížení ve velmi krátkém časovém horizontu, kdy vykazuje určité navýšení pevností a tuhosti, zatímco v dlouhodobém měřítku se projevuje dotvarováním. S ohledem na uvedené skutečnosti, tradici domovské katedry v oblasti modelování konstrukcí z betonu, dostupnosti systému *ANSYS* a především díky přímé vazbě na tým vývojářů výpočetního jádra programů *SCIA* a *RFEM* bylo tématem práce ověření a nasazení metody zpětné identifikace parametrů pomocí optimalizačních algoritmů na elastoplastický materiálový model betonu. Hlavním cílem práce bylo implementovat vhodnou optimalizační metodu pro identifikaci parametrů reologického modelu betonu přímo do systému *RFEM*. Záměrem bylo provést implementaci tak, aby se vycházelo jen z uživatelem zadaných a dostupných křivek dotvarování poskytované řešení uživateli bylo v přiměřeném čase dostatečně přesné.

Předkládaná dizertační práce věnovaná problematice identifikace materiálových modelů betonu pomocí optimalizace, kterou lze však zobecnit na konstitutivní modely všech materiálů je členěna do 9 kapitol včetně úvodu a závěru. Nejprve je provedena analýza současného stavu problematiky v oblasti identifikace parametrů, poté následuje představení cílů a obecný teoretický výklad k materiálové nelinearitě včetně popisu použitých materiálových modelů. Další část práce představuje dvojblok teorie optimalizace a kapitoly věnované benchmarkům implementovaných algoritmů. Poté je zařazena kapitola, která obsahuje verifikaci provedené implementace ukázkou rozměrové a tvarové optimalizace. Hlavní část této kapitoly je však věnována aplikaci optimalizace na problém identifikace materiálového modelu v systému *ANSYS*, kdy je nejprve představeno řešení s pomocí algoritmů dostupných přímo v tomto software a poté je prokázáno úspěšné použití vlastního implementovaného algoritmu. Poslední část zmíněné kapitoly obsahuje vytčené nasazení naprogramovaného řešení na identifikaci parametrů Kelvinova reologického schématu pro beton v programu *RFEM*.

2 | Analýza současného stavu poznání

„Finite element analysis is an art to predict the future“

Klaus-Jürgen Bathe – inženýr, profesor – MIT (1943-současnost)

Současná technologická vyspělost a úroveň znalostí napříč všemi vědeckými obory přirozeně vede ke snahám o maximální efektivitu využití lidských, přírodních či technických zdrojů. Ať už je zájem zpřesnění léčebných postupů, vývoj nových léků, zdokonalování moderních materiálů a chemických sloučenin, předpověď klimatických změn včetně návrhu ekologicky přívětivých východisek, výroba pokročilých strojů nebo návrh stavebních konstrukcí, všechny obory spojuje potřeba existence vhodného matematického modelu pro vystižení daného reálného jevu. Obecně lze tyto jevy popsat pomocí obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic či jejich soustav, nicméně analytické řešení je proveditelné jen pro omezené množství úloh a tak se běžně využívá numerických přístupů: *metody konečných prvků* [10, 98] (FEM), *metody hraničních prvků* (BEM) [2, 17], *metody konečných diferencí* (FDM) [81] či *metody konečných objemů* (FVM) [39]. V oblasti numerického řešení odezvy stavebních konstrukcí je zcela dominantní metoda FEM, v níž se vlastnosti materiálu zohledňují pomocí konstitutivních (fyzikálních) rovnic. S ohledem na věrné zachycení reality je zřejmé, že se nevystačí s linearitou a je zapotřebí zavést rovnice nelineární. Matematický model popisující nelineární odezvu se obecně označuje jako materiálový model [99]. Určení hodnot parametrů takového modelu může však být náročné, zvláště v případě, když počet takových parametrů řídicích konstitutivní rovnice je výrazně více, což jak uvádí MARKIEWICZ a LANGRAND přirozeně platí pro anizotropní materiály [87] nebo silně nelineární modely a jejich kombinace implementované TRCALOU a kol. [160]. Problematiku odhadu nebo-li identifikaci parametrů lze tedy považovat za důležitý krok ve vývoji přesných modelů v řadě vědeckých disciplín [115].

Využití identifikace v rámci lékařských oborů využívajících metod hlubokého učení lze najít v oblasti rekonstrukce výstupů z různých zobrazovacích metod [4, 52]. Uplatňují se však také metody optimalizační, například pro hledání parametrů modelů simulujících šíření infekčních nemocí [125, 126]. Metody identifikace založené na obou výše uvedených principech se využívají i při modelování difuzního šíření chemických látek [33, 94, 115]. Z technických oborů se metody identifikace, jak uvádí DERELI a KÖKER v [26], běžně využívají v robotice [13] a také v numerickém řešení statických [43, 61, 78, 87, 135, 159] i dynamických problémů [71, 72] stavebních konstrukcí, popřípadě při hledání poškození pro účely predikce životnosti [1, 28, 74, 141]. Výše uvedený průřez aktuální dostupnou literaturou ukazuje, že hlavní používané přístupy v problematice hledání neznámých parametrů numerických modelů jsou založeny na využití umělých neuronových sítí (ANN)¹ nebo optimalizace.

Proces inverzní identifikace využívající vycvičené umělé neuronové sítě pro identifikaci parametrů modelů konstrukčních materiálů byly publikovány FAIRBARNEM a kol. [40], YOSHIMUROU a kol. [148] či NOVÁKEM a LEHKÝM [100]. Podstata metody spočívá v předložení učící množiny charakterizované souborem dvojic vstup-výstup neuronové sítě. Proces učení se definuje jako optimalizační úloha, jejíž návrhové parametry jsou synaptické váhy a prahy [79]. Bližší popis metody a použití v oblasti spolehlivosti lze nalézt v publikaci autorů LEHKÉHO a NOVÁKA [77] a aplikace v oblasti identifikace lomově-mechanických parametrů modelu kompozitů v článku [79]. Využití optimalizačních technik v procesu učení neuronových sítí je podstatě příkladem nasazení optimalizace na problém identifikace, kdy jsou odhadovány předem neznáme charakteristiky sítě. Optimalizaci lze však pro identifikaci parametrů matematických modelů popisujících odezvu konstrukcí použít i přímo.

V takovém případě se úloha definuje jako minimalizace diskrepance mezi experimentálními daty a

¹V textu je dále používána zkratka ANN – Artificial Neural Networks

výstupem numerické simulace. Vzorová data mohou mít podobu pracovních diagramů, ale mohou být, jak uvádí MARKIEWICZ a LANGRAND [87], reprezentována množinou datových bodů obsahujících informaci o posunech či přetvořeních konstrukce ve skutečném měřítku. Uvedení autoři zavádí pro identifikační úlohy využívající metody konečných prvků označení: *Finite Element Model Updating* (FEMU), což elegantně vystihuje podstatu tohoto přístupu, kdy jsou zvoleným algoritmem v iteracích určovány realizace návrhových vektorů obsahující hodnoty vstupních charakteristik pro numerický výpočet, z něhož se exportuje pracovní diagram v požadovaném tvaru pro výpočet fitness funkce vyjadřující míru similarity se vzorem. Nejčastěji používaným číselným ohodnocením podobnosti je dle MAHNKENA a STEINA [86] suma kvadrátů rozdílů mezi vzorem a realizací, ale lze použít také RMSE chyby [57]. Popsaná aplikace byla rozpracována už v pracích DISTEFANA [29] a PISTERA [105], v nichž byl problém identifikace parametrů reologických modelů formulován jako nelineární optimalizační úloha. Hledání hodnot koeficientů Kelvinova řetězce, umožňujícího aproximaci viskózní odezvy v podobě dotvarování, bylo také popsáno v příspěvku GAVRUSE a kol. [46]. Inverzní analýze lomově-mechanických parametrů modelu betonu se v publikaci [106] věnovali PLANAS a kol. Určování parametrů elastoplastických modelů betonu s využitím optimalizace pro statické výpočty z 1D pracovních diagramů byla publikována v několika odborných publikacích autorem a kol. [159, 157, 156, 155, 151, 158] a identifikace parametrů materiálových modelů betonu z experimentálních dat pro řešení dynamické odezvy byla zase publikována KRÁLEM a kol. [71, 72]. Aktuální aplikace optimalizace pro identifikaci parametrů modelu kombinujícího viskoplasticitu s poškozením pro modelování cyklické únosnosti oceli za zvýšené teploty byla publikována KYAWEM a kol. [74]. Simulovaný problém byl autory vybrán s ohledem na aktuální snahu o redukci emisí CO₂ při plánovaném přerušovaném spouštění tepelných elektráren postavených z oceli. Významnou aplikační oblastí je také geotechnika, v níž se shodně využívají komplexní konstitutivní modely pro simulace chování zemin a skalních masivů [60, 61, 88].

Napříč uvedenými aplikacemi se objevují metody, které lze dle [86] dělit na metody 0. řádu (bez využití derivací) a 1. řádu (s využitím derivací). První skupinu tvoří metody, které pro hledání minima vystačí pouze s informací o velikosti účelové funkce. Druhá skupina tzv. *spádových metod*, vyžaduje vedle fitness hodnoty ještě informaci o směru (sklonu), v němž se návrhový prostor prohledává. Metody této druhé skupiny se vyznačují relativně rychlou konvergencí, která je však na úkor robustnosti, kdy hrozí uvíznutí v lokálním minimu. Optimalizační metody v prvně zmiňované skupině, kam lze například zařadit simplexové algoritmy jsou, jak uvádí [135], konvergenčně pomalejší. S pomalejší konvergencí vyváženou však vyšší robustností se lze setkat u moderních meta-heuristických algoritmů, které lze shodně zařadit do skupiny metod 0. řádu. Jedněmi z nejpoužívanějších meta-heuristických algoritmů pro identifikaci jsou evoluční a genetické metody. Použití těchto optimalizačních postupů založených na znalostech evoluce a genetiky pro identifikaci parametrů byly publikovány BRAASCHEM a ESTRINEM [15] či TALARREM a kol. [136], GAWADEM a SZELIGOU [135] při řešení problémů tváření materiálů a dále například v geotechnických úlohách [60, 61]. Vysoké popularitě a použití se z množiny moderních optimalizačních těší algoritmus *Particle Swarm* (PSO, optimalizace hejnem částic).

Předlohou tohoto algoritmu je chování společenstev živočichů (např. hmyzu, ryb nebo ptáků) při hledání potravy a byl představen KENNEDYEM a EBERHARTEM [36, 66]. Algoritmus byl úspěšně použit pro řešení klasických úloh konstrukční optimalizace: rozměrové a tvarové [96], přičemž umožňuje implicitně pracovat s reálnými spojitými, ale také, jak ukázal PARSOPOULOS a VRAHATIS [104], s diskretními proměnnými. Z hlediska aplikace PSO na problematiku identifikace parametrů, lze uvést příklady z oblasti geotechniky publikované MEIEREM a kol. [88] nebo FENGEM a kol. [41]. S ohledem na zmíněné úspěšné aplikace algoritmu PSO, a to nejen na problematiku inverzní identifikace materiálových parametrů, byla v rámci dizertační práce jako její hlavní cíl provedena implementace tohoto algoritmu pro účely identifikace parametrů *Kelvinova řetězce* pro beton v systému *RFEM* ze zadané křivky dotvarování. Tato aplikace představuje moderní přístup k problematice řešené DISTEFANEM [29], PISTEREM [105] nebo MOLLEM a kol. [95] za využití výkonu běžného počítače při zachování uživatelsky jednoduchého vstupu: křivky dotvarování. Implementace byla navíc realizována i pro využití při konstrukční optimalizaci a je aktuálně dostupná inženýrům v Evropě, USA i Asii. Provedený souhrn aktuálně dostupné literatury v oblasti identifikace parametrů je nutné s ohledem na aktuální kinematiku publikace nových poznatků považovat spíše za demonstrativní než taxativní výčet.

3 | Cíle dizertační práce

Tématem dizertační práce byla pokročilá numerická analýza konstrukcí s použitím nelineárních materiálových modelů. Ze spektra materiálů používaných pro nosné konstrukce staveb byla pozornost zúžena na beton, který v extrémních případech namáhání vykazuje silně nelineární chování s kvazikřehkou odezvou. Numerická simulace odezvy konstrukcí z betonu je však často komplikována množstvím vstupních neznámých daných komplexností konstitutivních vztahů. Prvotním cílem práce bylo prozkoumat možnosti zpětné identifikace materiálových parametrů vybraných modelů betonu z dostupných experimentálních dat pomocí optimalizace implementované v systému ANSYS. Hlavním cílem bylo provedení implementace optimalizačního algoritmu *Particle Swarm*¹ přímo do projekčního software a jeho verifikace na problému inverzní identifikace materiálových parametrů.

3.1 Identifikace parametrů modelu s pomocí optimalizace

Na základě potřeby definovat množství vstupních charakteristik existuje reálná potřeba nalezení vhodného způsobu určování těchto hodnot z dostupných experimentálních dat. V rámci práce bylo pro metodu inverzní identifikace parametrů materiálových modelů použito optimalizačních technik jako alternativa k postupu založeném na cvičení umělých neuronových sítí prezentovaným v pracích [100, 130].

Pro provedení příslušných identifikačních analýz bylo využito optimalizačních modulů implementovaných přímo v systému ANSYS, ve kterém byly zároveň realizovány vlastní nelineární numerické výpočty. Teoretické aspekty použitého materiálového modelů jsou přehledně zpracovány v následující kapitole 4, sekci 4.3.1.1. V rámci výpočtů byly provedeny studie zaměřené na verifikaci použitelnosti dostupných materiálových modelů betonu a konvergenci řešení při zjemňování sítě konečných prvků [153]. Součástí kapitoly 8.1 věnované identifikaci jsou zahrnuty výsledky a závěry citlivostních analýz a dílčích studií zaměřených na volbu korektní účelové funkce, která má často kruciólní vliv na úspěšnost provedené optimalizace.

3.2 Implementace algoritmu PSOA

Hlavním cílem práce bylo provedení vlastní implementace optimalizačního algoritmu za účelem inverzní identifikace parametrů *Kelvinova řetězce*, používaného v systému RFEM pro modelování viskózní odezvy betonových konstrukcí z normových křivek dotvarování. Teoretické aspekty vybraného algoritmu PSOA jsou rozepsány v rámci kapitoly 5, konkrétně v sekci 5.3.3.2. Provedená implementace byla verifikována vůči výsledkům dosaženým pomocí algoritmů dostupných v systému ANSYS, přičemž příslušné výsledky jsou dokumentovány v části 8.2 a problematika vlastní identifikace parametrů *Kelvinova řetězce* je obsažena v navazující části 8.2.5.

Implementace zmíněného algoritmu PSOA byla navíc provedena s ohledem na další využití a komerční nasazení při řešení úloh konstrukční optimalizace. Zmíněná vlastnost je v práci dokumentována na dílčí studii v sekci 7.2 a robustnost algoritmu je deklarována pomocí testovacích výpočtů shrnutých v kapitole 6.

Naplnění hlavního cíle bylo realizováno využitím moderních technologií z oblasti umělé inteligence v návrhu a posouzení statiky staveb.

¹V textu je dále používána zkratka PSOA – Particle Swarm Optimization Algorithm

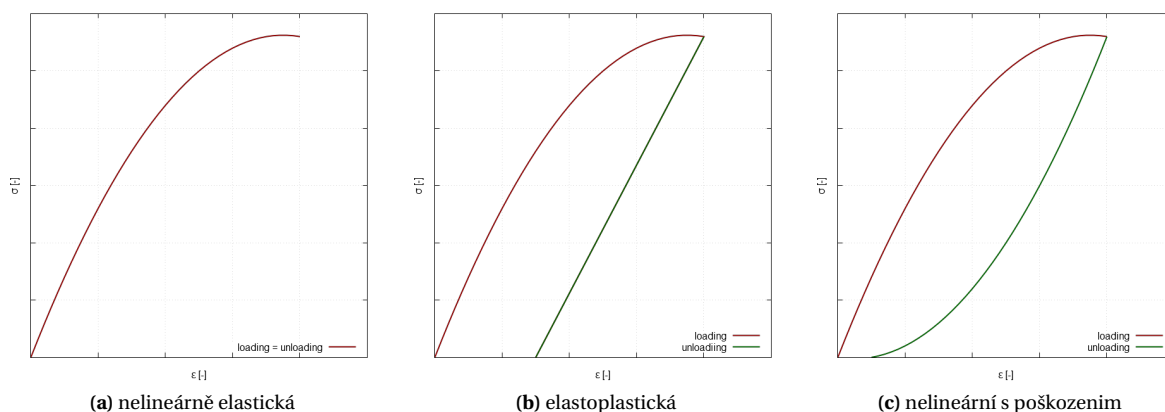
4 | Teorie komplexních materiálových modelů

„Complex systems are full of interdependencies – hard to detect – and nonlinear responses“

Nassim Nicholas Taleb – libanonsko-americký matematik a esejist (1960-současnost)

4.1 Úvod

Materiálová nelinearita je vedle geometrické nelinearity druhou nejrozsáhlejší oblastí teorie nelineární mechaniky. Vzniká jako důsledek změn v mikrostruktuře materiálu při působení zatížení, nicméně z pohledu běžně používaných výpočtů metodou konečných prvků se na chování materiálů obvykle pohlíží z makroměřítkem, předpisem specifického konstitutivního vztahu, který se označuje také jako materiálový model. Základní dělení modelů lze bez ohledu na konkrétní reálný materiál, ale s ohledem na text této práce, provést dle jejich časové závislosti na *modely bez viskózního chování* (časově nezávislé) a *modely viskózní* (časově závislé). Skupinu časově nezávislých modelů lze dle charakteru odezvy při odtižení dle [99] dále dělit na modely *nelineárně elastické* (viz obr. 4.1a), *elastoplastické* (modely plasticity, viz obr. 4.1b) a modely poškození (viz obr. 4.1c). V případě časově závislých modelů lze tyto dále dělit dle charakteru odezvy na *viskoelastické* a *viskoplastické*.

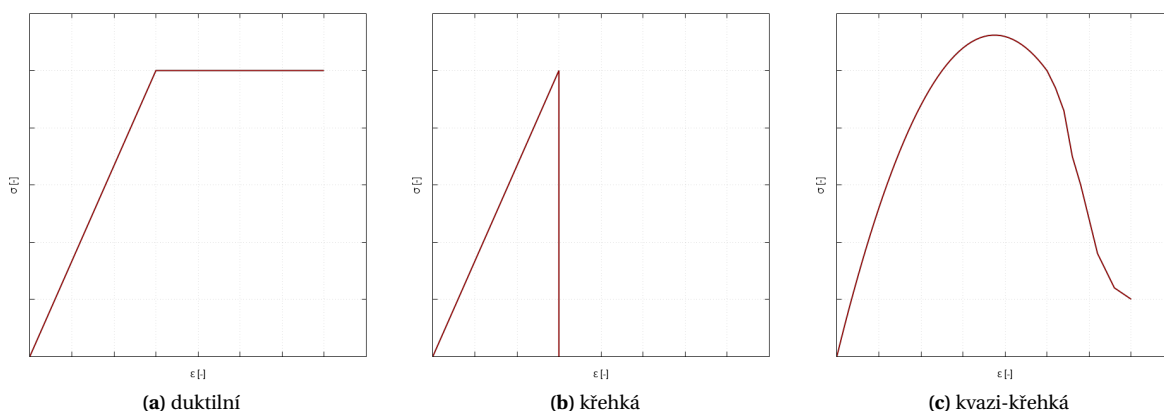


Obrázek 4.1: Materiálové modely bez viskózního chování (1D pracovní diagramy) – adaptováno z [99]

Numerické simulace statických a dynamických problémů stavebních konstrukcí vyžadují použití řady modelů z výše popsaných skupin. Důvodem je potřeba vystihnout různorodost chování vyplývající ze široké palety materiálů používaných pro návrh nosných konstrukcí staveb. Vzhledem k rozsahu problematiky v oblasti materiálové nelinearity byla věnována pozornost pouze materiálovým modelům betonu, které však teoreticky pokrývají jak časově nezávislé modely (modely poškození a modely plasticity), tak modely viskózní. Bližšímu zkoumání a k řešení problému identifikace parametrů byl jako zástupce neviskózních modelů vybrán materiálový model *Menetrey-Willam* a to vzhledem k jeho dostupnosti v rámci databáze *multiPlas* vyvinuté pro výpočty v systému *ANSYS*. Text této teoretické kapitoly je dále věnován popisu viskózního modelu betonu založeného na obecném *Kelvinově řetězci*. Pro identifikaci parametrů tohoto reologického schématu byla pro systém *RFEM* vyvinuta metoda identifikace využívající kombinace metody nejmenších čtverců a meta-heuristického optimalizačního algoritmu.

4.2 Přehled oblasti

Detailní zájem o zákonitosti chování konstrukčních materiálů pod zatížením a o mechanismus jejich porušování lze datovat již do 18. století. První poznatky v této oblasti přinesl už v roce 1773 CHARLES-AUGUSTIN DE COULOMB [22]. Coulombovy závěry byly ovšem zobecněny, přičemž o dnešní podobu tzv. Mohr-Coulombova kritéria, které je součástí komplexnějších konstitutivních vztahů se na konci 19. století, jak už název napovídá, postaral CHRISTIAN OTTO MOHR. Počátky rozvoje mechaniky materiálu lze spojit s prací HENRIHO TRESCY [139], který postuloval teorii maximálního smykového napětí, čímž bylo definováno Trescovo kritérium porušení materiálu. K zakládajícím příspěvkům se dále řadí práce RICHARDA VON MISESE [92], který se věnoval studiu chování kovových materiálů, pro které zformuloval tzv. von Misesovu podmínku plasticity. Ve stejné době se danou problematikou zabývali MAKSYMILIAN HUBER [56], který své závěry publikoval v roce 1904, a HEINRICH HENCKY. Von Misesova podmínka je tak v literatuře někdy nazývána jako podmínka Huber-Mises-Hencky (HMH). Do problematiky chování materiálů přispěla dále práce WILLIAMA RANKINA [110] zabývající se chováním zemin. Významnou teorii, jejíž vznik lze datovat do roku 1952 formulovali DRUCKER a PRAGER. Jejich práce [32] se zabývala odvozením modelu pro tlakově závislé chování zemin, ale dočkala se dalších úprav i pro jiné materiály. Zrychlený vědecký pokrok po druhé světové válce přinesl v oblasti mechaniky materiálů velký nárůst poznání a tak došlo v této oblasti k rozdělení na několik různých směrů dle podoby odezvy materiálů na zatížení. Z hlediska odezvy na tahové zatížení rozlišujeme materiály s *duktilní* odezvou (kovy, plasty) materiály s *křehkou* odezvou (sklo) a materiály s *kvazi-křehkou* odezvou (beton, cementové kompozity). Podoba odezvy uvedených typů materiálů je uvedena v pracovních diagramech na obrázcích 4.2a – 4.2c. Jednot-



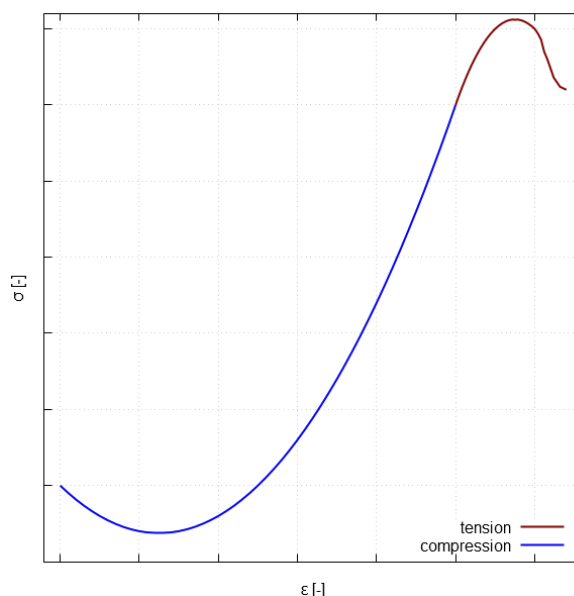
Obrázek 4.2: Materiálové modely dle odezvy na tahové zatížení (1D pracovní diagramey)

livým výše jmenovaným typům materiálů vyhovuje z hlediska popisu chování odlišná teorie. Pro kovové materiály a plasty se nejčastěji uplatňují materiálové modely založené na teorii plasticity, nicméně pro popis únavy se uplatňují poznatky lineární a nelineární lomové mechaniky. Lomová mechanika je zcela fundamentální teorií pro materiály s křehkou odezvou. Z hlediska betonu je situace komplikovanější. Problém spočívá v odlišné odezvě na tahové a tlakové zatížení, kdy v tahu má beton výrazně nižší pevnost a chová se kvazi-křehce, zatímco tlaková oblast je charakteristická vyšší pevností a duktilnější odezvou [150]. Typická podoba odezvy betonu na tahové a tlakové zatížení je uvedena ve společném grafu na obrázku 4.3. Z tohoto důvodu se při matematickém popisu chování betonu využívá několika přístupů. Jedním z nich je využití teorie plasticity. Aplikace teorie plasticity pro popis chování prostého betonu lze nalézt v pracích autorů CHENA a CHENA [18], WILLAMA a WARNKEHO [144], BAŽANTA [5], DRAGONA a MRÓZE [31], SCHREYERA [120], CHENA a BUYKOZTURKA [19], ONATEHO [101], PRAMONA a WILLAMA [109], ETSEA a WILLAMA [38], MENÉTREYHO a WILLAMA [90] či GRASSLA [51]. Materiálové modely představované ve výše uvedených publikacích využívají k popisu chování betonu klasické teorie plasticity, která však nemusí být vzhledem k postupnému snižování tuhosti betonu vlivem vzniku trhlin dostatečná [21]. Zmiňovaný problém lze odstranit aplikací teorie porušení, tj. použitím adekvátního modelu poškození. Jak však tvrdí GRASSL [50], použití samostatného modelu poškození pro popis nevratných deformací a neelastických objemových změn betonu je také nedostačující. Aplikaci modelu poškození pro popis cho-

vání betonu lze nalézt v publikacích autorů LOLANDA [82], ORTIZE a POPOVA [103], KRAJČINOVICE [70], RESENDEHO a MARTINA [113], SIMA a JUA [123, 124] a LUBARDY [83]. Vzhledem k uvedeným nedostatkům obou přístupů lze s výhodou využít jejich vzájemné kombinace, popřípadě je dále kombinovat s dalšími přístupy formulovanými v rámci nelineární lomové mechaniky. První skupina kombinovaných modelů je dle CICEKLIHO [21] založena na plasticitě formulované v prostoru efektivních napětí [45, 76, 146, 147]. Efektivní napětí v této skupině modelů se definuje jako průměrné napětí působící na nepoškozený materiál mezi defekty. Druhá skupina modelů je založena na plasticitě formulované v nominálním prostoru napětí [21]. Příklady druhé skupiny kombinovaných materiálových modelů lze nalézt v mnoha publikacích, z nichž lze připomenout následující [7, 59, 73, 84, 91, 102]. U této skupiny modelů je nominální napětí definováno jako napětí působící jak na porušenou, tak neporušenou část materiálu.

V současnosti lze identifikovat ještě další významné proudy v oblasti modelování nelineárního chování betonu. Jeden z těchto proudů spočívá v rozšíření klasické metody konečných prvků FEM na tzv. rozšířenou metodu konečných prvků XFEM¹, u které se odstraňuje potřeba změny sítě konečných prvků při simulaci růstu trhliny. Podrobné informace lze nalézt v publikacích BELYTSCHKA a BLACKA [11], MOESE a kol. [93] a DAUXE a kol. [24].

Další významný proud v této oblasti je založen na využití metody diskrétních prvků DEM², jejíž popis je obsažen v pracích CUNDALLA [23] a GHABOUSSIHO s BARBOSOU [47]. Tato metoda však opouští teorii kontinua a využívá jiných předpokladů než teorie plasticity a porušení.



Obrázek 4.3: 1D pracovní diagram betonu

V oblasti materiálových modelů vhodných pro řešení časově zpožděných jevů betonových konstrukcí lze za zcela fundamentální považovat práci BAŽANTA a kol. [6]. Podrobnou algoritmizaci těchto modelů pro účely řešení metodou konečných prvků lze nalézt v pracích TAYLORA a kol. [138] či SIMA a kol. [123, 124].

4.3 Materiálová nelinearita

S ohledem na provedené verifikační studie prezentované v této práci je následující text věnován nejprve předpokladům modelů teorie plasticity se zástupcem v podobě modelu *Menetrey-Willam* a dále teorii viskoelasticity včetně popisu modelu Kelvinova řetězce.

¹V textu je dále využívána zkratka **XFEM** – eXtended Finite Element Method

²V textu je dále využívána zkratka **DEM** – Discrete Element Method

4.3.1 Základní vztahy teorie plasticity

V obecném případě tříosé napjatosti lze fyzikální rovnice pro lineárně elastický materiál zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor složek pole přetvoření, $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor složek pole napětí a \mathbf{C} je matice poddajnosti materiálu získaná přepisem tenzoru 4. řádu do maticové formy. V případě uvažované přírůstkové teorie plasticity se předpokládá dekompozice vektoru přetvoření na elastickou $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ a plastickou $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ část [122]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.2)$$

Mezi elastickým přetvořením a napětím pak s využitím vztahu (4.2) platí

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (4.3)$$

Další výchozí předpoklad přírůstkové teorie plasticity spočívá v ohrazení oblasti pružných napětí plochou plasticity f [89]. Podmínka plasticity pro libovolný materiál lze tedy obecně zapsat

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad (4.4)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor složek pole napětí. Platí tedy, že je-li funkce plasticity $f < 0$ nachází se uvažovaný materiálový bod v elastickém stavu a je-li $f = 0$, pak materiálový bod leží přímo na ploše plasticity (tj. nachází se v plastickém stavu). Kladné hodnoty funkce plasticity odpovídají tzv. *plasticky nepřístupnému stavu napětí*, který není materiál schopen přenést [62]. Situace je však komplikovanější, protože reálné materiály vykazují závislost na historii zatěžování a tak je předpis funkce plasticity obvykle rozšiřován o vektor nezávislých vnitřních proměnných \boldsymbol{q}

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \leq 0 \quad (4.5)$$

Poslední výchozí předpoklad uvažované teorie plasticity je definice zákona plastického toku³ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, který popisuje vývoj míry plastického přetvoření. Předpis podoby zákona plastického toku je

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.6)$$

kde $\dot{\lambda}$ je plastický násobitel určující míru plastického tečení a funkce g je plastický potenciál. Dle podoby plastického potenciálu se dále rozlišují dvě větve teorie plasticity:

- (a) *Teorie plasticity s asociovaným zákonem plastického toku*, kde $f = g$
- (b) *Teorie plasticity s neasociovaným zákonem plastického toku*, kde $f \neq g$

Člen $\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) / \partial \boldsymbol{\sigma}$ v rovnici (4.6) představuje směr plastického toku a tak platí, že v případě asociovaného zákona je směr kolmý k ploše plasticity. Jak již bylo zmíněno, historie zatěžování je zohledněna vektorem vnitřních proměnných \boldsymbol{q} pro které lze zapsat vztah

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}), \quad (4.7)$$

kde \boldsymbol{h} představuje zákon zpevnění či změkčení.

Pro kompletní definici konstitutivních vztahů v teorii plasticity je dále zapotřebí zavést podmínky zatěžování a odtěžování, vyřešit problém překročení plochy plasticity při numerickém výpočtu, nadefinovat podmínky konzistence řešení a ošetřit materiálovou stabilitu. S ohledem na rozsah tohoto pojednání nebudou tyto aspekty, přestože hrají při korektní implementaci významnou roli, dále podrobně rozepsány. Výše podaná teorie dokazuje, že numerické řešení problému vyžaduje iterativní přístup a znalost

³V anglicky psané literatuře je označován jako tzv. *flow rule*. V česky psané odborné literatuře se lze setkat s pojmy *zákon plastického toku* nebo *zákon plastického přetváření*.

tečného konstitutivního tenzoru mezi přírůstkem přetvoření a napětí [99]

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.8)$$

V každém výpočetním kroku je v integračních bodech sítě konečných prvků počítán stav přetvoření a stav napětí dle výše uvedených vztahů a matice tuhosti soustavy algebraických rovnic se neustále mění. Z tohoto důvodu je při řešení rovnovážného stavu ve výpočtovém kroku využívána Newton-Raphsonova metoda [3, 99].

V rámci konceptu tzv. *multisurface plasticity* mohou být podmínka plasticity a plastický potenciál složeny z více různých ploch s jinými matematickými předpisy. Tohoto konceptu je využito u modelů v materiálové knihovně *multiPlas* [35]. Rovnice (4.5) a (4.6) pak lze psát ve tvaru

$$f_i(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.9)$$

V případě tohoto konceptu se ve výpočtu využívá kumulovaného plastického přetvoření, pro který společně a jeho derivaci platí dle [99, s. 173]

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} dt, \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (4.10)$$

4.3.1.1 Materiálový model *Menetrey-Willam*

Materiálově nelineární výpočty v systému *ANSYS* lze přímo provádět jen pro úzkou skupinu materiálových modelů. Nicméně jejich počet lze rozšířit pomocí vlastních materiálových subrutin nebo externích databází, kterou je např. databáze *multiPlas* od německé firmy *Dynardo GmbH*. Tento softwarový produkt disponuje v současnosti několika desítkami elastoplastických modelů pro nelineární simulace konstrukcí ze dřeva, zdiva, oceli, betonu a skalního masívu. Modely obsažené v této databázi vychází z předpokladů teorie plasticity a využívají konceptu slučování více typů ploch v rámci jednoho modelu.

Vzhledem k zaměření práce na analýzu nelineárního chování betonových konstrukcí byla pozornost věnována těm modelům, u kterých byla deklarována použitelnost pro řešení úloh s materiály mající kvazi-křehkou odezvu. Rozborem doprovodného manuálu [35] se ukázalo, že pro nelineární řešení konstrukcí z betonu lze využít modely:

- (a) *Drucker-Prager*,
- (b) *Concrete*,
- (c) *Menetrey-Willam*

Vzhledem k faktu, že materiálový model *Concrete* využívá plochy plasticity *Drucker-Prager*, byla analyzována použitelnost pro technické výpočty pouze u dvou posledně jmenovaných a na základě výsledků provedených numerických studií [152, 153] zabývajících se studiem použitelnosti vybraných materiálových modelů betonu byl pro identifikaci mechanicko-fyzikálních parametrů zvolen materiálový model označovaný jako *Menetrey-Willam*. Implementace tohoto konstitutivního vztahu v použité databázi vychází z prací publikovaných *MENETREYM* [89], *MENETREYM* a *WARNKEM* [90] a dále z publikace *BAŽANTA* a *JIRÁSKA* [63].

Tento materiálový model náleží ke skupině modelů nezohledňující vliv rychlosti deformace na stav napětí a respektuje výše uvedené předpoklady přírůstkové teorie plasticity. Předpis funkce plasticity, jak ji lze nalézt v programovém manuálu [35] má tvar:

$$f_{MW} = A[\sqrt{2}\xi + r(\theta, e)\rho] + \frac{B\rho^2}{h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})} - h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.11)$$

S eliptickou funkcí $r(\theta, e)$ vyvinutou *KLISINSKÝM* [68] na základě poznatků *WILLAMA* a *WARNKEHO* [144],

kteřá zajišťuje transformaci kruhové dráhy polárního poloměru $\rho(\theta)$ do třísymetrické elipsy [89]:

$$r(\theta, e) = \frac{4C \cos^2 \theta + D^2}{2C \cos \theta + D\sqrt{4C \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (4.12)$$

Člen $h(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ v rovnici (4.11) je funkce zpevnění/změkčení a A, B, C, D jsou parametry modelu, jejichž podoba je dána následujícími vztahy

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{f_t} - \frac{1}{f_b} + \frac{f_b - f_t}{f_c^2} \right] \quad (4.13)$$

$$B = \frac{3}{2f_c^2} \quad (4.14)$$

$$C = 1 - e^2 \quad (4.15)$$

$$D = 2e - 1, \quad (4.16)$$

kde parametr e v rovnicích (4.15) a (4.16) lze dále rozepsat ve tvaru

$$e = \frac{f_b(f_c^2 - f_t^2) + f_t(f_b^2 - f_c^2)}{2f_b(f_c^2 - f_t^2) - f_t(f_b^2 - f_c^2)} \quad (4.17)$$

V uvedených parametrech modelu v rovnicích (4.13) až (4.20) se vyskytují základní mechanicko-fyzikální vlastnosti betonu: jednoosá tlaková pevnost f_c , jednoosá tahová pevnost f_t a dvouosá tlaková pevnost f_b . Uvedené pevnosti musí s ohledem na funkčnost materiálového modelu plnit následující podmínku

$$f_b > f_c > f_t \quad (4.18)$$

Nerovnost mezi tlakovou a tahovou pevností je v případě betonu splněna přirozeně. Splnění nerovnosti mezi dvouosou a jednoosou tlakovou pevností lze docílit přepsáním dvouosé pevnosti f_b do vztahu

$$f_b = k f_c, \text{ kde } k > 1 \quad (4.19)$$

Hodnota parametru k ve vztahu (4.22) by se dle autorů SUCHARDY a BROŽOVSKÉHO [131] měla pohybovat okolo hodnoty 1,2. V rovnici pro plochu plasticity (4.11) se dále vyskytují souřadnice válcového Haigh-Wester-gaardova prostoru, v němž ξ představuje výšku, ρ představuje poloměr a θ azimut. Uvedené válcové souřadnice lze vyjádřit pomocí invariantů I_1, J_2 a J_3 následujícím způsobem

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (4.20)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} \quad (4.21)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}} \quad (4.22)$$

Vzhledem k implementaci úhlu θ do předpisu funkce plasticity se zvolený materiálový model odlišuje od modelů využívající plochy plasticity Drucker-Prage, které proto mohou v některých případech zatěžování vykazovat neschopnost korektně aproximovat chování betonu. Materiálový model *Menetrey-Willam* se řadí do skupiny materiálových modelů s neasociovaným zákonem plastického toku. Toto tvrzení dokládá fakt, že plastický potenciál na rozdíl od plochy plasticity nebere v úvahu úhel θ [35]. Předpis plastického potenciálu má tvar

$$g_{MW} = \rho^2 + X\rho + Y\xi, \quad (4.23)$$

kde parametry X a Y jsou opět vyjádřeny pomocí jednoosé tlakové pevnosti f_c , jednoosé tahové pevnosti

f_t , dvouosé tlakové pevnosti f_b a dilatačního úhlu ψ

$$X = \frac{2f_c \tan \psi - \sqrt{2}f_t}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2}\tan \psi)} \quad (4.24)$$

$$Y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{2f_t}{\sqrt{3}}, \quad (4.25)$$

kde

$$\arctan \frac{f_t}{\sqrt{2}f_c} < \psi < \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35,3^\circ \quad (4.26)$$

Z hlediska použití metody konečných prvků využívá zvolený materiálový model konceptu rozetřených trhlin [107]. S ohledem na potřebu odstranění negativní závislosti řešení na velikosti sítě konečných prvků využívá nelineární model *Menetrey-Willam* BAŽANTOVA konceptu *Crack Band* [8]. Při praktickém použití nelineárních materiálových modelů je nezávislost řešení na síti konečných prvků klíčovou vlastností. Ve výpočtových modelech celých konstrukcí se obvykle využívá odlišné velikosti prvků a navíc je s ohledem na výpočetní výkon snaha snížit časovou náročnost, což vede k tvorbě hrubší sítě, která však musí dávat obdobné výsledky jako síť jemnější. Pro demonstraci tohoto aspektu a ověření správnosti výsledků byla provedena jednoduchá numerická studie tahové zkoušky na betonovém vzorku publikovaná autorem v [153]. Shrnutí všech vstupních mechanicko-fyzikálních, lomově-mechanických a dalších vnitřních parametrů popsaného modelu, které byly předmětem identifikace pomocí optimalizačních algoritmů prezentovaných v této práci, jsou shrnuty v níže uvedené tabulce 4.1

Tabulka 4.1: Vstupní parametry modelu *Menetrey-Willam* (*multiPlas/ANSYS*)

název parametru	jednotka	popis
E	[Pa]	modul pružnosti
ν	[-]	Poissonův součinitel
f_c	[Pa]	jednoosá tlaková pevnost
f_t	[Pa]	jednoosá tahová pevnost
k	[-]	poměr mezi biaxiální tlakovou pevností a jednoosou tlakovou pevností
ψ	[°]	dilatance
ε_{ml}	[-]	plastické přetvoření při maximálním zatížení
G_{fc}	[Nm/m ²]	specifická lomová energie v tlaku
Ω_{ci}	[-]	relativní úroveň napětí na začátku nelineárního zpevnění
Ω_{cr}	[-]	reziduální relativní úroveň napětí v tlaku
G_{ft}	[Nm/m ²]	specifická lomová energie v tahu
Ω_{tr}	[-]	reziduální relativní úroveň napětí v tahu

4.3.2 Základní vztahy teorie viskoelastivity

Pro popis časově závislého chování materiálu, mezi které řadíme *creep*⁴ a *relaxaci*⁵ lze v nejjednodušším případě použít teorii lineární viskoelastivity. Modely v rámci této teorie jsou často tvořeny elementárními pružinami a tlumiči, pomocí nichž se usiluje o zkombinování elastického chování (Hookůva materiálu)

⁴ *Creep* – nárůst přetvoření při konstantním napětí

⁵ *Relaxace* – snížení napětí v materiálu při konstantním přetvoření

a viskózního chování (Newtonovy kapaliny) [99]. Lineární konstitutivní vztah pro výpočet napětí lze analogicky jako u elastoplastických modelů zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^v), \quad (4.27)$$

ve kterém lze viskózní přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ vypočítat s pomocí součinitele dotvarování $\varphi(t, t')$ vycházejícího z funkce poddajnosti $J(t, t')$

$$\varphi(t, t') = E(t')J(t, t') - 1 \quad (4.28)$$

Celkové přetvoření ve směru libovolné osy i lze určit pomocí vztahu

$$\varepsilon_i(t, t') = J(t, t')\sigma_i(t') - \nu J(t, t')\sigma_j(t') - \nu J(t, t')\sigma_k(t') \quad (4.29)$$

a s využitím součinitele dotvarování z rovnice (4.28) lze psát

$$\varepsilon_i(t, t') = \left(\frac{1}{E(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E(t')} \right) \sigma_i(t') - \nu \left(\frac{1}{E(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E(t')} \right) \sigma_j(t') - \nu \left(\frac{1}{E(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E(t')} \right) \sigma_k(t'), \quad (4.30)$$

ze kterého vyplývá

$$\varepsilon_i(t, t') = \varepsilon_i^e(t') + \varphi(t, t')\varepsilon_i^e(t'), \quad (4.31)$$

z čehož lze odvodit, že viskózní přetvoření má tvar

$$\varepsilon_i^v(t, t') = \varphi(t, t')\varepsilon_i^e(t'), \quad (4.32)$$

Významnou výhodou viskoelastických modelů je platnost principu superpozice, díky kterému lze sčítat přetvoření od jednotlivých zatěžovacích stavů v čase a tím je umožněno zohlednit ve výpočtu historii zatěžování. Výhoda principu superpozice je však v některých situacích komplikována nutností uchovávat při výpočtu rozsáhlé množství stavových dat. Tento nedostatek však lze odstranit řetězením dílčích reologických článků, čímž vznikne např. *Kelvinův řetězec* (GKCH)⁶.

4.3.2.1 Kelvinův řetězec

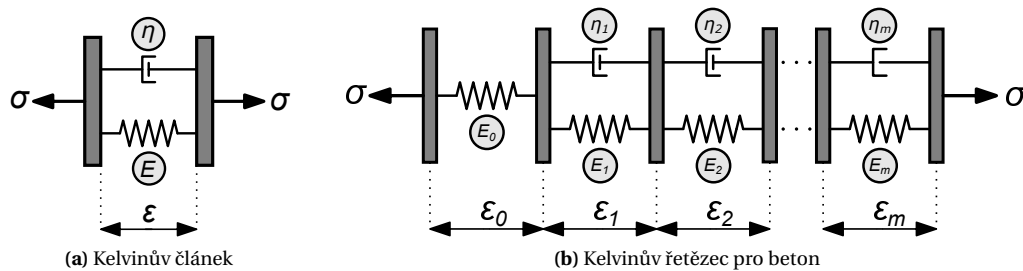
Využívá, jak už bylo naznačeno, principu superpozice účinků v jednotlivých časových okamžicích historie zatížení. Vzhledem k tomuto předpokladu lze historii přetvoření zapsat pomocí vztahu

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t, t'), \quad (4.33)$$

kde $J(t, t')$ je funkce poddajnosti, vyjadřující poměr deformace v čase t a napětí, které tuto deformaci způsobilo v čase t' , od kterého působí konstantně. V rámci řešeného problému je navíc uvažován bez stárnutí a funkci poddajnosti lze tedy zapsat takto

$$J(t, t') = J_0(t - t'). \quad (4.34)$$

V případě jednoduchého *Kelvinova článku* (obrázek 4.4a), který tvoří základní jednotku použitého ře-



Obrázek 4.4: Reologická schémata

⁶V textu je dále využívána zkratka GKCH – (General Kelvin CHain)

těžce, lze předpis pro funkci poddajnosti získat jako řešení rovnice

$$\sigma_e + \sigma_v = \sigma, \quad (4.35)$$

kde σ_e je elastické napětí v pružině článku, σ_v je viskózní (zpožděné) napětí v tlumiči článku a σ je konstantní napětí, kterým je článek zatížen od času $t' = 0$. Dosadí-li se za $\sigma_e = E\varepsilon(t)$ a za $\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}(t)$ získáme diferenciální rovnici

$$E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = \sigma, \quad (4.36)$$

jejíž řešení, jestliže $\varepsilon(0) = 0$, má tvar

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad (4.37)$$

a hledaná funkce poddajnosti má tedy podobu

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) H(t), \quad (4.38)$$

kde $H(t) = 1$, když $t > 0$ a $H(t) = 0$, když $t = 0$. Zapojením několika těchto článků do série získáme reologické schéma zvané *Kelvinův řetězec*, jehož podoba je znázorněna na obrázku 4.4b. Takto sestavený řetězec přináší výhodu ve větším množství tuhostních a viskózních parametrů, díky kterým lze lépe aproximovat skutečné chování materiálu. Funkce poddajnosti pro *Kelvinův řetězec* lze získat analogickým postupem a její tvar lze zapsat jako

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \right] H(t), \quad (4.39)$$

kde

$$\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j} \quad (4.40)$$

je tzv. retardační čas j -tého článku. Pravá strana rovnice (4.39) je tvořena řadou s exponenciálními členy, která se označuje jako *Dirichletova* či *Pronyho* řada [6].

Materiálový model dle předpisu v rovnici (4.39) s celkovým počtem 7 článků byl implementován v rámci knihovny nelineárních materiálových modelů v systému *RFEM*. Pro tento model byla v rámci řešení dizertační práce provedena implementace postupu identifikace parametrů E_j a τ_j založeného na využití kombinace metody nejmenších čtverců a optimalizačního algoritmu *Particle Swarm*. Sumarizace hledaných parametrů modelu *GKCH* v programu *RFEM* shrnuje na závěr uvedená tabulka 4.2

Tabulka 4.2: Vstupní parametry modelu GKCH (*RFEM*)

název parametru	jednotka	popis
E_0	[Pa]	základní modul pružnosti
$E_1 \dots E_7$	[Pa]	moduly pružnosti článků řetězce
$\tau_1 \dots \tau_7$	[-]	retardační časy článků řetězce

5 | Teorie optimalizace

„Co je hledané, má se za nejlepší.“

Gaius Titus Petronius – římský dvořan (27-66)

5.1 Úvod

Rozhodovací procesy jsou přirozenou součástí každé lidské činnosti. Člověk provádí denně několik rozhodnutí, přičemž volbu zakládá nejen na objektivních, ale také na subjektivních skutečnostech a pro vyhodnocení většinou nevyužívá přesně vymezených postupů či algoritmů, což však může odpovídat charakteru problému. Například při výběru nového spotřebiče hledá optimální variantu z hlediska výkonu a rozměrů vzhledem ke svým finančním možnostem, ale finální rozhodnutí činí i s ohledem na estetiku. Výběr vhodného spotřebiče lze asi stěží matematicky formalizovat, nicméně je-li problém techničtějšího charakteru: návrh optimální nosné konstrukce, zjištění optimální zásobovací cesty či návrh vhodného uspořádání elektrických obvodů, tak lze pro úspěšné vyhodnocení využít matematických postupů a pokročilých numerických algoritmů. Optimalizaci lze tedy v užším pojetí chápat jak technickou (fyzikální, ekonomickou, vojenskou, logistickou) aplikaci matematické analýzy extrémů funkcí [85]. Dle RAA [111, s. 1] lze optimalizaci obecně formulovat jako *proces hledání nejlepšího výsledku za daných okolností*, což z pohledu technických oborů lze v rámci rozhodovacích procesů popsat jako snahu o minimalizaci úsilí při maximalizaci zisku. Z pohledu funkcionální analýzy se jedná o hledání minima resp. maxima funkce, přičemž lze bez ztráty obecnosti dokázat, že má-li reálná funkce $f(x)$ minimum v bodě x^* pak je tento bod maximum funkce $-f(x)$ [111, s. 1]. Matematicky lze tedy optimalizaci formulovat takto

$$\text{Najdi } \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \text{ který minimalizuje } f(\mathbf{X})$$

při splnění podmínek

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{X}) &\leq 0, \quad j = \{1; 2; \dots; k\} \\ h_j(\mathbf{X}) &= 0, \quad j = \{1; 2; \dots; l\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde \mathbf{X} je vektor návrhových proměnných (návrhový vektor), $f(\mathbf{X})$ je účelová funkce (fitness) a $g_j(\mathbf{X})$ resp. $h_j(\mathbf{X})$ jsou nerovnostní resp. rovnostní omezení. V případě, že optimalizační problém má definované podmínky ve tvaru (5.1), pak se takový problém označuje jako *omezený*, v opačném případě není-li žádná podmínka definována, tak se řešení hledá v kompletním N dimenzionálním návrhovém prostoru a problém se označuje jako *neomezený*.

Vedle uvedeného základního dělení optimalizačních problémů lze s ohledem na potřeby textu této práce provést členění dle přípustnosti hodnot návrhových proměnných na problémy *diskrétní*¹, v nichž návrhové proměnné mohou nabývat pouze celočíselných hodnot, a *spojité*², ve kterých se návrhové proměnné uvažují z množiny \mathbb{R}^3 . Optimalizační problémy lze dále členit dle počtu a matematického tvaru účelové funkce. Z hlediska počtu účelových funkcí, které mají být minimalizovány, se problémy dělí

¹V anglicky psané literatuře se uvádí označení: *integer problems*, v práci je však pro odlišení využito označení: problémy *diskrétního charakteru* \mathbf{X}^d .

²V anglicky psané literatuře se uvádí označení: *real-valued problems*, v práci je však pro odlišení využito označení: problémy *spojitého charakteru* \mathbf{X}^c .

na *jednoúčelové (single-objective)* a *víceúčelové (multi-objective)*. Členění optimalizačních problémů dle tvaru lze v souladu s [111] provést následovně.

Problémy lineárního programování kde jsou účelová funkce a omezující podmínky lineárními funkcemi návrhových proměnných:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i &= b_j, \quad j = \{1; 2; \dots; m\} \\ x_i &\leq 0, \quad j i = \{1; 2; \dots; n\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde c_i , a_{ij} a b_j jsou konstanty.

Problémy kvadratického programování s účelovou funkcí ve tvaru kvadratické funkce návrhových proměnných a lineárními omezeními:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= c + \sum_{i=1}^n q_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n Q_{ij} x_i x_j \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i &= b_j, \quad j = \{1; 2; \dots; m\} \\ x_i &\leq 0, \quad j i = \{1; 2; \dots; n\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

kde c , q_i , Q_{ij} , a_{ij} a b_j jsou konstanty.

Problémy nelineárního programování kde má účelová funkce či omezující podmínka tvar nelineární funkce. Jedná se o nejrozšířenější oblast optimalizačních úloh, pro jejichž řešení bylo vyvinuto mnoho metod.

Problémy geometrického programování jsou takové úlohy, kde má účelová funkce tvar *posynomiálu* [111, s. 22], [34]. *Monomiál* a *posynomiál* lze definovat dle [14] takto:

Definice Necht' x_1, \dots, x_n je n -tice kladných reálných proměnných a $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$ je vektor z komponent x_i , pak reálná funkce $h(\mathbf{X})$ ve tvaru

$$h(\mathbf{X}) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad (5.4)$$

kde $c > 0$ a $a_i \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *monomiální funkce*, přesněji *monomiál* proměnných x_1, \dots, x_n . Suma monomiálů ve tvaru

$$h(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \dots x_n^{a_{nk}}, \quad (5.5)$$

kde $c_k > 0$ se nazývá *posynomiální funkce*, jednoduše *posynomiál*.

Z hlediska zaměření této práce lze ještě optimalizační úlohy dělit s ohledem na aplikační oblast. Přičemž z širokého pole využití optimalizace lze jmenovat například: *návrh leteckých a kosmických zařízení, návrh optimálních trajektorií letu, konstrukční optimalizace, návrh vodních zdrojů, návrh elektrických sítí, návrh zásobovacích tras, alokace zásob* ad. V literatuře se lze setkat ještě s pojmem *globální optimalizace*, čímž se dle [80] dá rozumět optimalizace funkcí bez znalosti technické podstaty problému, zatímco v případě *konstrukční optimalizace*, které je věnována následující kapitola 7, se jedná o využití metod globální optimalizace na problémy návrhu konstrukcí. Právě znalost technické či fyzikální podstaty problému umožňuje efektivní využití dostupných algoritmů pomocí jejich modifikací. Z uvedeného zároveň nepřímo vyplývá, že neexistuje žádná univerzální metoda či algoritmus, pomocí kterého by bylo možno dosáhnout nalezení optima libovolného problému, ale je zapotřebí volit pro různé oblasti odlišné přístupy, popřípadě je kombinovat.

5.2 Přehled oblasti

Masivní rozvoj optimalizace v podobě jak ji dnes známe a používáme nastal v polovině 20. stol. a souvisel s vynálezem digitálního počítače [111, s. 3], nicméně autoři KOCHENDERFER a WHEELER v [69, s. 2] datují počátky optimalizace už do antiky.

Na přelomu 5. a 4. stol. př. n. l. se antičtí filozofové PLATÓN (427-347 př. n. l.) a ARISTOTELES (384-322 př. n. l.) věnovali otázkám etiky za účelem optimalizace chování člověka a otázkám politiky s cílem optimalizace fungování společnosti (státu) [67, s. 14]. První geometrické optimalizační úlohy lze připisat EUKLIDOVÍ Z ALEXANDRIE (325-265 př. n. l.), který například dokázal, že čtverec je obdélník s maximální plochou při konstantním obvodu [42, 69, 67]. S dalším významným příspěvkem ke geometrické optimalizaci přišel PAPPUS Z ALEXANDRIE (~290 až ~350), když ve své práci prokázal, že šestiúhelníkový tvar včelích pláství je optimální tvar pro uchovávání medu. Z hlediska historie optimalizace a obecně celé matematiky bylo významné zavedení algebry. S jejím vznikem je spjat perský matematik AL' KHWARIZMI (780-850), podle jehož jména vznikl pojem *algoritmus*³. S osobou dalšího perského matematika IBN SAHLA (940-1000) lze spojit praktické uplatnění optimalizace při výpočtu tvaru čoček a zahnutých zrcadel.

Základními pojmy v oboru optimalizace jsou návrhová proměnná a návrhový prostor. Návrhové proměnné si můžeme představit jako osy definující návrhový prostor a realizace v tomto návrhovém prostoru, které nazýváme návrhovými vektory, jsou n -ticemi souřadnic. S pojmem souřadnice začal jako první pracovat RENÉ DESCARTES (1596-1650), který ve své práci [27] popsal metodu hledání tečny k libovolné křivce [69, s. 3]. Stejněmu problému a ve stejné době se věnoval také PIERRE DE FERMAT (1601-1665), který zavedl pojem derivace a za optimum považoval takový bod funkce, v němž byl sklon nulový [67, s. 17]. Dalšími významnými příspěvky do oblasti matematiky s přímým dopadem na optimalizace byly práce ISAACA NEWTONA (1643-1727) a GOTTFRIEDA WILHELMA LEIBNIZE (1646-1716). Oba se věnovali problémům průběhu funkcí, zabývali se derivacemi funkcí a jako první začali pracovat s integrály funkcí. Problematice minimalizace (optimalizace) funkcí a variačnímu počtu se v 18. a 19. století věnovali JACOB BERNOULLI (1654-1705) a JOHANN BERNOULLI (1667-1748), LEONHARD EULER (1701-1783), KARL WEIRSTRASS (1815-1897) a JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813), který zavedl pro řešení omezeného optimalizačního problému neznámé multiplifikátory, označované dnes jako *Langrangeovy multiplifikátory*. Řešení neomezených optimalizačních problémů pomocí gradientní metody největšího spádu v roce 1847 představil AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) [111, s. 3], [67, s. 22]. Popsané období, které je z hlediska klasických optimalizačních metod zcela fundamentální lze uzavřít zmínkou o prvním iterativním optimalizačním algoritmu, Newtonově metodě či Newton-Raphsonově metodě, o jejíž vývoj se dle [67, s. 22] zasloužila čtveřice matematiků: ISAAC NEWTON, JOSEPH RAPHSON (1648-1715), THOMAS SIMPSON (1710-1761) a JEAN-BAPTISTE-JOSEPH FOURIER (1760-1783).

Prudký rozvoj optimalizačních technik a zvláště numerických algoritmů nastal ve 20. století a souvisel s vynálezem počítače, nicméně ještě před tím byly LEONIDEM KANTOROVIČEM (1912-1986) představeny techniky lineárního programování [64]. Pro jejich řešení byla následně GEORGE M DANTZINGEM (1914-2005) v roce 1947 vyvinuta simplexová metoda. JOHN VON NEUMANN (1903-1957) přispěl do oblasti lineárního programování vytvořením teorie duality a dále se věnoval teorému *minimax*⁴ v rámci teorie her. Techniky nelineárního programování byly poprvé představeny WILLIAMEM KARUSHEM (1917-1997). V oblasti nelineárního programování je významná práce autorů HAROLDA WILLIAMA KUHA (1925-2014) a ALBERTA WILLIAMA TUCKERA (1905-1995) z roku 1951 týkající se *nutných a postačujících* podmínek optimálního řešení programovacích problémů⁵. Techniky dynamického programování byly představeny v roce 1952 RICHARDEM BELLMANEM [69]. Geometrické programování bylo uvedeno v 60. letech trojicí autorů: DUFFIN, ZENER, PETERSON [111]. Na počátku 60. let byly v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky vynalezeny heuristické techniky přímého prohledávání, z nichž lze zmínit například *Nelder-Meadovu* strategii pojmenovanou po jejich autorech, JOHNU ASHWORTHU NELDEROVI (1924-2010) a ROGERU MEADOVI (1938-2015) vycházející ze známé simplexové metody [67]. Ve stejném období lze zároveň vystopovat první pokusy o využití umělé inteligence založené na napodobování přírodních procesů

³Latinský překlad a výslovnost zní: *Algoritmi*

⁴Minimax teorém říká, že pro dva hráče existuje dvojice strategií, které každému umožňují minimalizovat maximální ztráty

⁵RAO označuje v [111, s. 3] *nutné a postačující* podmínky souhrnně jako tzv. *Kuhn-Tuckerovy* podmínky, zatímco Fitzpatrick v knize [67, s. 24] je označuje jako *Karush-Kuhn-Tuckerovy*.

[67, s. 27][58, s. 13], nicméně obecně známé genetické (evoluční) algoritmy byly poprvé publikovány JOHNEM H. HOLLANDEM (1929-2015) v roce 1975 [55]. Za jednu z posledních modifikací optimalizačních technik vycházejících z napodobování evolučních procesů je *diferenční evoluce* představená v roce 1995 autory RAINEREM STORNEM a KENNETHM PRICEM. V rámci moderních metod optimalizace představuje významný počín také uvedení algoritmu mravenčích kolonií (1992) MARCEM DORINGEM [30] a algoritmu *Particle Swarm*, inspirujícího se chováním společenstev živočichů v roce 1995 JIMEM KENNEDYEM a RUSSELLEM C. EBERHARTEM [66].

5.3 Optimalizační metody

Rozdělení optimalizačních metod nelze provést podle přesně stanoveného kritéria, což lze dokumentovat odlišnými přístupy v citovaných publikacích [111] a [69], nicméně v obou je členění shodně značně rozsáhlé. Pro účely této práce však lze provést dělení do tří základních skupin dle použitého matematického aparátu, tvaru účelové funkce a využití prvků umělé inteligence.

5.3.1 Klasické metody

Jedná se o skupinu metod zabývajících se vyšetřování průběhu funkcí jedné a více proměnných. Výchozí podmínkou pro aplikaci těchto metod je diferencovatelnost [143] vyšetřovaných účelových funkcí, což značně zužuje aplikační oblast.

5.3.2 Metody matematického programování

Metody matematického programování tvoří nejrozsáhlejší skupinu a lze ji vnitřně dále dělit dle tvaru použité účelové funkce. První skupinu tvoří **metody lineárního programování** (dále jen LP) poprvé zmíněné KANTORIVIČEM [64]. Jedná se o rozsáhlou skupinu úloh, pro jejichž řešení bylo vyvinuto několik metod. Za nejznámější lze považovat *simplexovou metodu* představenou G. DANTZINGEM pro řešení problémů optimální alokace zdrojů. RAO v [111, s. 120] klade důraz dále na *Karmarkarovu metodu* (1984) [65], která oproti simplexové metodě vyniká vyšší rychlostí. Z technických aplikací ve vztahu k mechanice stavebních konstrukcí je typickým příkladem hledání maximální plastické únosnosti rámců [119].

Druhou rozsáhlou skupinu metod tvoří **metody nelineárního programování** (dále jen NLP), u nichž jsou účelová funkce a omezující podmínky v nelineárním tvaru, popřípadě *nejsou explicitně vyjádřeny*. Metody v této skupině lze dle [54] rozdělit takto:

1. metody NLP pro *neomezené* problémy:

- (a) optimalizační procedury využívající derivací (1. řádu, např. *metoda nejstrmějšího spádu*⁶ [16], *Newtonova metoda*, *metoda konjugovaných gradientů*)
- (b) optimalizační procedury bez využití derivací (vyhledávací metody 0. řádu, např. *metoda přímého vyhledávání*⁷, *Powellova metoda* [108], *Nelder-Meadova metoda* [97])

2. metody NLP pro *omezené* problémy:

- (a) aproximační metody (např. *Zoutendijkova metoda přípustných směrů*⁸ [149], *Rosenova metoda projekce gradientů*⁹ [117, 118], *Zobecněná metoda redukováných gradientů*¹⁰ [44])
- (b) penalizační metody (např. *metoda rozšířených Langrangeových multiplikátorů*¹¹ [111, s. 459])
- (c) toleranční metody

⁶V angl. originále: *Steepest Descent Method*

⁷V angl. originále: *Direct Search Method*

⁸V angl. originále: *Zoutendijk's Method of Feasible Directions*

⁹V angl. originále: *Rosen's Gradient Projection Method*

¹⁰V angl. originále: *Generalized Reduced Gradient Method*

¹¹V angl. originále: *Augmented Lagrange Multiplier Method*

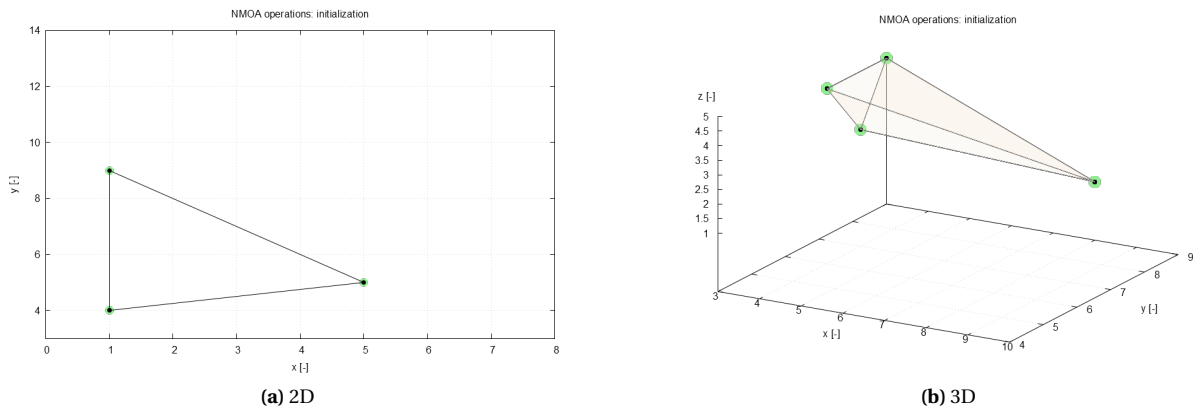
Výše popsané rozdělení reflektuje princip jmenovaných metod. Podle RAA [111] jsou metody pro *neomezené* problémy děleny na přímé a nepřímé vyhledávací metody, přičemž obdobné dělení na přímé a nepřímé metody uvádí i v rámci členění metod NLP pro *omezené* problémy. Toto dělení může být pro pochopení mírně zavádějící. V rámci dizertační práce byla pro demonstraci řešení úloh konstrukční optimalizace vybrána k implementaci metoda podle NELDERA a MEADA [97] a to zvláště s ohledem na její jednoduchý avšak účinný princip a proto bude na závěr této sekce zařazen podrobnější popis tohoto algoritmu.

Další skupiny metod matematického programování jsou metody pro **geometrické programování**, **dynamické programování**, **stochastické programování** a metody pro **celočíselné programování**¹². Tyto metody jsou významné z hlediska řešení technických úloh, jelikož rozsáhlá množina optimalizačních problémů obsahuje návrhové proměnné ve formě množin diskrétních parametrů (např.: výrobní řady profilů, délkové moduly). Metody celočíselného programování lze s ohledem na tvar účelové funkce dále dělit na metody celočíselného lineárního programování, kde lze jako zástupce jmenovat *Gomoryho metodu řezných rovin*¹³ [48, 49] a metody nelineárního celočíselného programování, kde má nezastupitelnou pozici *metoda větví a hranic*¹⁴ [75].

5.3.2.1 Algoritmus Nelder-Mead (NMOA)

První zmínky o tomto algoritmu byly publikovány SPENDLEYM a kol. v [128] roku 1962, nicméně komplexně byl formulován až NELDEREM a MEADEM v roce 1965 [97]. Základním matematickým konstruktem metody je **simplex**.

Definice: Je-li dáno $n + 1$ bodů v N -dimenzionálním prostoru, pak geometrický objekt tvořený těmito body nazýváme v daném prostoru *simplexem*. Jsou-li tyto body ekvidistatní, tak je daný simplex regulární. V rovině je simplex reprezentován, jak ukazuje obrázek 5.1a trojúhelníkem, zatímco v prostoru tetrahedronem, který je graficky znázorněn na obrázku 5.1b. V literatuře je proto někdy označována jako



Obrázek 5.1: Simplex v rovině a prostoru

simplexová metoda, nicméně nesmí být zaměňována s klasickou simplexovou metodou pro řešení optimalizačních úloh lineárního programování a proto bude v práci dále využíván termín: *Nelder-Meadova metoda* resp. Nelder-Meadův optimalizační algoritmus: NMOA – Nelder-Mead Optimization Algorithm.

Podstatou metody je porovnávání hodnot vrcholů simplexu a iterativní posun simplexu směrem k optimu pomocí operací: *reflexe*, *expanze*, *kontrakce* a *smrštění*. Prvním krokem algoritmu je inicializace počátečního simplexu. Autoři v [128] navrhují generovat těchto $n + 1$ počátečních návrhových vektorů pomocí vztahu

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(0)} + p\mathbf{u}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n q\mathbf{u}_j, \quad i = 1; 2; \dots; n \quad (5.6)$$

¹²V angl. originále: **Integer programming**

¹³V angl. originále: *Gomory's Cutting Plane Method*

¹⁴V angl. originále: *Branch and Bound Method*

kde

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} + n - 1 \right) \quad \text{a} \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} - 1 \right) \quad (5.7)$$

a kde $\mathbf{X}^{(0)}$ je počáteční bod a \mathbf{u}_j je jednotkový vektor ve smyslu souřadnicové osy j . Nicméně počáteční simplex lze v daném návrhovém prostoru vygenerovat také náhodně, čehož je využito v provedené implementaci algoritmu.

Po inicializaci a následné evaluaci účelových funkcí pro jednotlivé vrcholy simplexu se dle [69] aplikuje následující sled operací s přesně stanovenou logikou. Je-li simplex definován vrcholy $\mathbf{X}^{(0)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ a označí-li se \mathbf{X}_h vrchol s nejvyšší hodnotou účelové funkce $f(\mathbf{X}_h)$, \mathbf{X}_s vrchol s druhou nejvyšší hodnotou účelové funkce $f(\mathbf{X}_s)$ a \mathbf{X}_l vrchol simplexu s nejnižší hodnotou účelové funkce $f(\mathbf{X}_l)$ pak se každá iterace zahajuje operací *reflexe*.

Reflexe: převrací vrchol simplexu s nejvyšší hodnotou účelové funkce přes těžiště simplexu pomocí vztahu

$$\mathbf{X}_r = \bar{\mathbf{X}} + \alpha(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_h), \quad (5.8)$$

kde¹⁵ $\alpha > 0$ a $\bar{\mathbf{X}}$ je střední hodnota přes n vrcholů simplexu vyjma toho s nejvyšší hodnotou účelové funkce dle vztahu

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\sum_0^n \mathbf{X}_l + \dots + \mathbf{X}_s}{n} \quad (5.9)$$

Ilustrativní příklad reflexe pro 2D resp. 3D je zobrazen na obrázcích 5.3a resp. 5.4a. Jestliže **platí** nerovnost

$$f(\mathbf{X}_r) < f(\mathbf{X}_l) \quad (5.10)$$

pak následuje operace *expanze*.

Expanze: opět provádí převrácení simplexu z oblasti s vysokými hodnotami účelových funkcí do oblasti s předpokládanými nižšími hodnotami účelových funkcí, nicméně se pokouší prohledávat návrhový prostor ještě dále než je reflexní bod. Vzhledem ke znalosti polohy reflexního bodu definovaného vztahem (5.6) lze expanzní bod určit pomocí vztahu

$$\mathbf{X}_e = \bar{\mathbf{X}} + \beta(\mathbf{X}_r - \bar{\mathbf{X}}), \quad (5.11)$$

kde¹⁶ dle [69] $\beta > \max(1; \alpha)$. Podoba operace expanze je ilustrativně zobrazena na obrázcích 5.3b a 5.4b. Jestliže **platí** podmínka

$$f(\mathbf{X}_e) < f(\mathbf{X}_r) \quad (5.12)$$

pak lze zaměnit vrchol \mathbf{X}_h za \mathbf{X}_e , provést kontrolu konvergence a proces opakovat. Jestliže podmínka (5.12) **neplatí**, pak se zamění vrchol \mathbf{X}_h za \mathbf{X}_r , provede se kontrola konvergence a celý proces se zopakuje.

V případě, že po reflexi podmínka (5.10) **neplatí**, provede se porovnání vůči vrcholu \mathbf{X}_s

$$f(\mathbf{X}_r) \geq f(\mathbf{X}_s) \quad (5.13)$$

a jestliže tato nerovnost **neplatí**, pak se zamění vrchol \mathbf{X}_h za \mathbf{X}_r , provede se kontrola konvergence a celý proces se zopakuje. Jestliže však tato nerovnost **platí** tak se musí dále zkontrolovat podmínka

$$f(\mathbf{X}_r) \geq f(\mathbf{X}_h) \quad (5.14)$$

Jestliže **není** nerovnost splněna pak se provede výměna vrcholu \mathbf{X}_h za \mathbf{X}_r a provede se *kontrakce*. V případě, že **je** uvedená nerovnost splněna tak se provádí *kontrakce* přímo.

¹⁵Dle [69] se obvykle používá $\alpha = 1, 0$. Tato hodnota byla zároveň použita v provedené implementaci algoritmu.

¹⁶Dle [69] se obvykle používá $\beta = 2, 0$. Tato hodnota byla zároveň použita v provedené implementaci algoritmu.

Kontrakce: provede smrštění simplexu v jednom směru od vrcholu s nejhorsí hodnotou účelové funkce podle vztahu

$$\mathbf{X}_c = \bar{\mathbf{X}} + \gamma(\mathbf{X}_h - \bar{\mathbf{X}}), \quad (5.15)$$

kde¹⁷ koeficient kontrakce $\gamma \in (0; 1)$. Grafická podoba kontrakce je ilustrativně zobrazena na obrázku 5.3c pro 2D resp. na obrázku 5.4c pro 3D. Po kontrakci lze ještě na základě **úspěšného** vyhodnocení podmínky

$$f(\mathbf{X}_c) > f(\mathbf{X}_h) \quad (5.16)$$

provést operaci *smrštění*, zkontrolovat konvergenci a celý postup opakovat. **Není-li** uvedená podmínka splněna provede se záměna vrcholu \mathbf{X}_h za \mathbf{X}_c , kontrola konvergence a zopakování celého postupu.

Smrštění: zajišťuje posun všech vrcholů směrem k nejlepšímu bodu, přičemž se tak dle [69] nejčastěji děje půlením vzdálenosti. Operace smrštění lze formulovat jako výměnu všech vrcholů $\mathbf{X}^{(i)}$ (vyjma \mathbf{X}_l) za

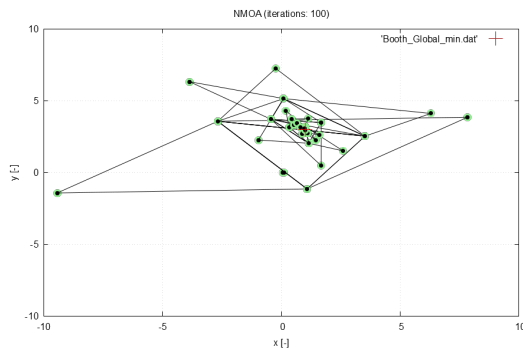
$$\mathbf{X}_s^{(i)} = \frac{\mathbf{X}^{(i)} + \mathbf{X}_l}{2} \quad (5.17)$$

Grafické znázornění operace smrštění je dokumentováno na obrázcích 5.3d a 5.4d.

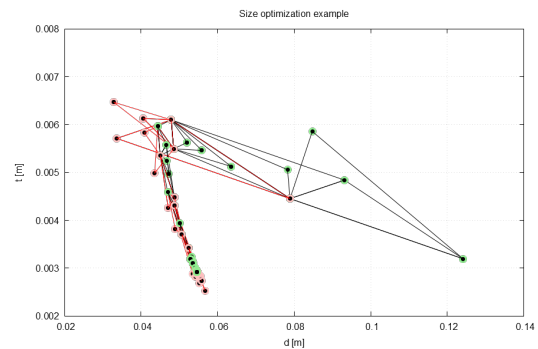
Ve výše uvedeném textu byla v rámci popisu logické posloupnosti operací několikrát zmíněna kontrola konvergence. V případě provedené implementace pro účely této práce nebyla tato kontrola uvažována a jediným zastavovacím kritériem byl počet iterací algoritmu N_{iter} . Odborné publikace [111, s. 332] či [69, s. 108] shodně doporučují kontrolovat konvergenci na základě porovnání směrodatné odchylky s s předem stanovenou mezí ϵ

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n f(\mathbf{X}^{(i)}) - f(\bar{\mathbf{X}})}{n+1}} \leq \epsilon \quad (5.18)$$

Z uvedené definice a popisu algoritmu, který je schematicky uveden za závěr kapitoly v sekci 5.3.2.2, jasně vyplývá, že úspěšné nalezení globálního minima záleží na volbě počátečního simplexu, což zároveň implikuje nezanedbatelnou míru rizika uvíznutí v lokálním minimu. Použitelnost algoritmu se tak omezuje jen na úzký okruh úloh s relativně hladkým průběhem účelové funkce bez většího množství nespojitostí daných omezujícími podmínkami. Uvedené tvrzení lze dokumentovat pomocí výsledků na testovacích funkcích *Booth* a *Gomez-Levy* uvedených v podkapitolách 6.2.1 a 6.6.1, kdy při testu pomocí druhé zmiňované funkce nebylo v drtivé většině pokusů nalezeno minimum. Přes uvedenou negativní vlastnost byla v rámci práce provedena implementace daného algoritmu s ohledem na potřebu demonstrace řešení rozměrové konstrukční optimalizace v části 7.2.2 a to pouze pro parametry \mathbf{X}^c . V oblasti řešení problematiky identifikace hodnot parametrů materiálových modelů lze možnost použití algoritmu NMOA spatřovat v dopřesnění výsledků získaných pomocí jiných algoritmů, které mívají vyšší robustnost, ale nižší přesnost.



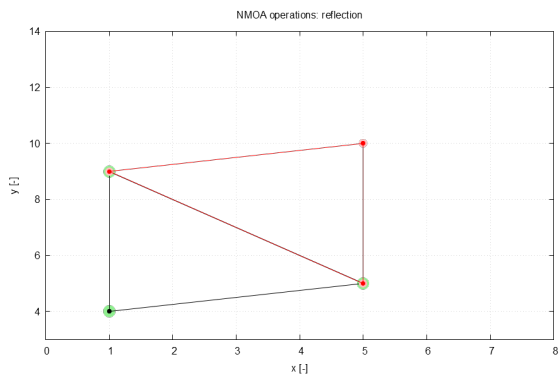
(a) funkce Booth $f_{min}(1;3) = 0$



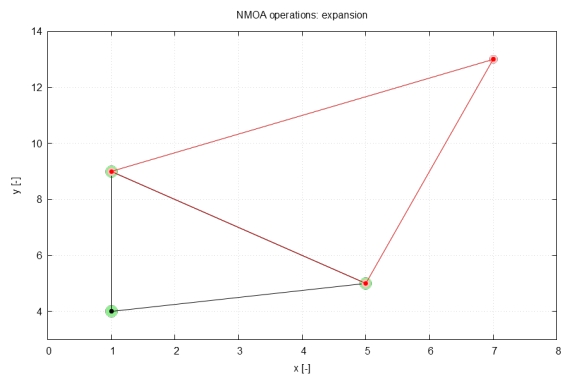
(b) Příklad rozměrové optimalizace z podkap. 7.2.2

Obrázek 5.2: Příklad vývoje simplexu v průběhu optimalizace

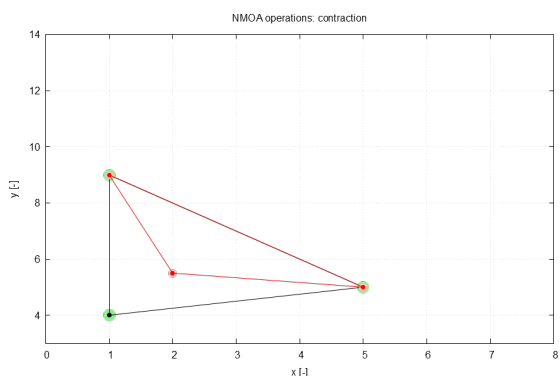
¹⁷Dle [69] se obvykle používá $\gamma = 0,5$. Tato hodnota byla zároveň použita v provedené implementaci algoritmu.



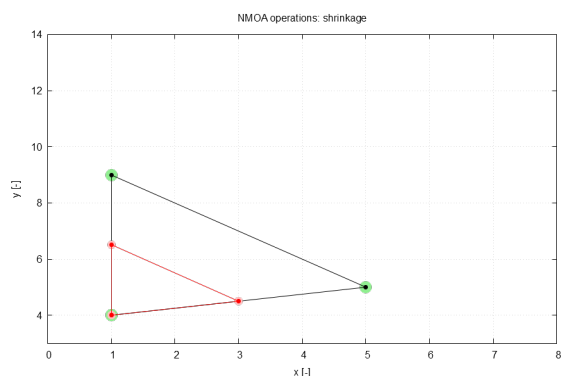
(a) • počáteční simplex, • reflexe



(b) • počáteční simplex, • expanze

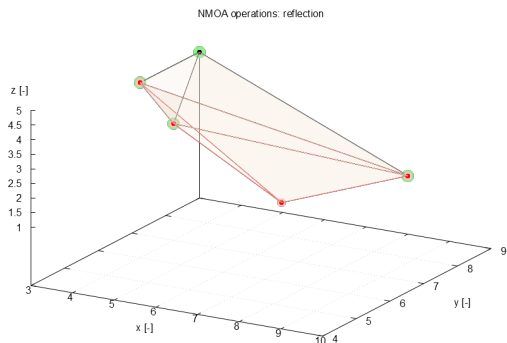


(c) • počáteční simplex, • kontrakce

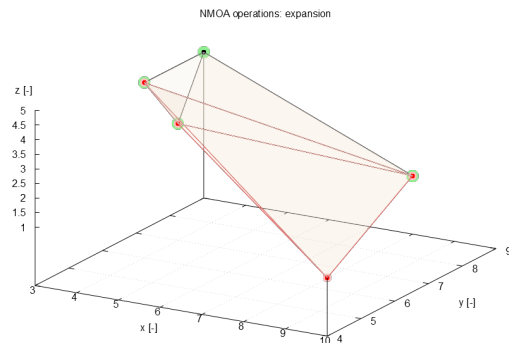


(d) • počáteční simplex, • smrštění

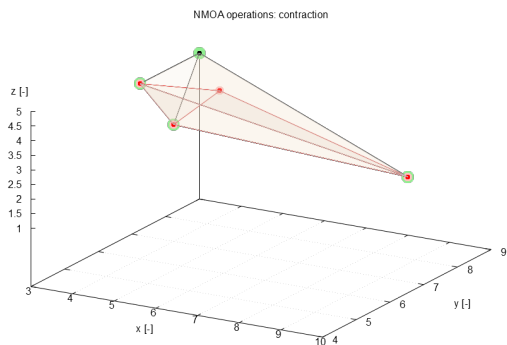
Obrázek 5.3: Základní operace algoritmu NMOA ve 2D



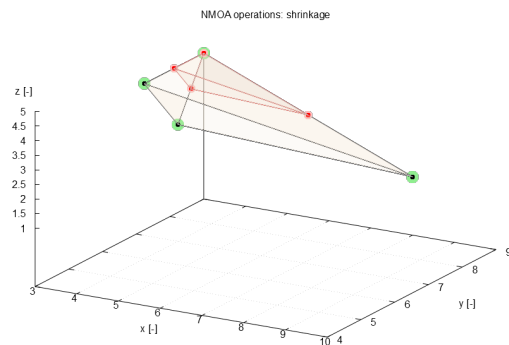
(a) • počáteční simplex, • reflexe



(b) • počáteční simplex, • expanze



(c) • počáteční simplex, • kontrakce



(d) • počáteční simplex, • smrštění

Obrázek 5.4: Základní operace algoritmu NMOA ve 3D

5.3.2.2 Schéma algoritmu Nelder-Mead (NMOA)

Algorithm 1 Schéma algoritmu NMOA

Require: $N_{iter} > 0$ ▷ N_{iter} ... number of iterations

 Compute initial simplex

for $i \leq N_{iter}$ **do**

 Sort vertices of simplex ▷ \mathbf{X}_h ... highest, \mathbf{X}_s ... second highest \mathbf{X}_l ... lowest

 Compute $\bar{\mathbf{X}}$ ▷ in according to (5.9)

 Compute reflection \mathbf{X}_r ▷ in according to (5.8)

if $f(\mathbf{X}_r) < f(\mathbf{X}_l)$ **then**

 Compute expansion \mathbf{X}_e ▷ in according to (5.11)

if $f(\mathbf{X}_e) < f(\mathbf{X}_r)$ **then**

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_e

else

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_r

end if

else if $f(\mathbf{X}_r) \geq f(\mathbf{X}_s)$ **then**

if $f(\mathbf{X}_r) \geq f(\mathbf{X}_h)$ **then**

 Compute contraction \mathbf{X}_c ▷ in according to (5.15)

if $f(\mathbf{X}_c) > f(\mathbf{X}_h)$ **then**

 Compute shrinkage ▷ in according to (5.17)

else

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_c

end if

else

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_r

 Compute contraction \mathbf{X}_c ▷ in according to (5.15)

if $f(\mathbf{X}_c) > f(\mathbf{X}_h)$ **then**

 Compute shrinkage ▷ in according to (5.17)

else

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_c

end if

end if

else

 Replace \mathbf{X}_h with \mathbf{X}_r

end if

 Convergence check ▷ Not implemented yet

end for

5.3.3 Moderní metody

Moderní metody optimalizace představují odklon od tradičních metod matematického programování a funkcionální analýzy, přičemž inspiraci nachází nejčastěji v přírodních procesech. Mezi nejznámější patří *genetické algoritmy* [55], které využívají principů Darwinovy teorie a genetických procesů. Druhým velmi známým je *algoritmus hejna částic*¹⁸ představený v [66] využívající principů chování živočichů hledajících ve skupinách potravu. Jako další zástupce lze dle [111] jmenovat: *simulované žíhání* [53], *algoritmus mravenčích kolonií* [30], *fuzzy optimalizaci* [112] a *metody založené na umělých neuronových sítích* [12]. Uvedené nekonvenční metody balancují na hraně umělé inteligence.

Při zkoumání možností nasazení optimalizace na problémy identifikace parametrů materiálových modelů bylo využito optimalizačního modulu v systému ANSYS, v rámci kterého byl použit genetický algoritmus MOGA. Z hlediska plnění cílů dizertační práce a pro účely řešení úloh konstrukční optimalizace byla dále provedena implementace algoritmu hejna částic PSO a proto bude v navazujícím textu provedena podrobnější charakteristika těchto nekonvenčních algoritmů.

5.3.3.1 Algoritmus Multi Objective Genetic Algorithm (MOGA)

Je, jak už název napovídá, algoritmus navržený pro řešení multikriteriálních optimalizačních úloh v systému ANSYS. Dle dostupného manuálu [3] je algoritmus MOGA implementován jako hybridní varianta algoritmu NSGA-II (*Non-dominated Sorted Genetic Algorithm-II*), který byl představen v publikaci [25]. Zmíněný algoritmus je založen na kontrolovaném elitismu a je vylepšením původního NSGA algoritmu využívající *nedominantního třídění*¹⁸. Podstata nedominantního genetického algoritmu, který si zachovává standardní operátory mutace a křížení, spočívá v rozřazení populace na základě nedominantnosti jednotlivců v dané populaci [129]. Nedominantní jedinec je takový, kterému nedominuje žádný další, přičemž dominanci lze ve smyslu minimalizačního problému definovat tak, že řešení $\mathbf{x}^{(1)}$ dominuje nad řešením $\mathbf{x}^{(2)}$, když vektor $\mathbf{x}^{(1)}$ je částečně menší než $\mathbf{x}^{(2)}$ ($\mathbf{x}^{(1)} < \mathbf{x}^{(2)}$), což znamená, že žádná hodnota vektoru $\mathbf{x}^{(2)}$ není menší než $\mathbf{x}^{(1)}$ a nejméně jedna hodnota vektoru $\mathbf{x}^{(2)}$ je ostře větší jak $\mathbf{x}^{(1)}$ [137].

Algoritmus MOGA je navržen pro globální optimalizaci a umožňuje řešení úloh s parametry nabývajících reálných spojitých, diskretních a tzv. výrobních hodnot¹⁹, které lze ve smyslu názvosloví této práce chápat jako reálné parametry s diskretním charakterem. Řešení optimalizační úlohy, jak vyplývá z předchozího textu, probíhá v několika generacích populace jednotlivců (realizací návrhových vektorů), pro jejichž generování se využívá dvou základních operací: *křížení*²⁰ a *mutace*²¹.

Křížení: je operace, při které jsou kombinovány *chromozomy* (návrhové proměnné) *rodičovských jedinců* (návrhových vektorů) za vzniku *potomků* (návrhových vektorů), přičemž se předpokládá, že kombinací toho nejlepšího z rodičovských jedinců vznikají parametry, které jsou lepší než ty rodičovské.

Provedená implementace algoritmu umožňuje křížení jak spojitých, tak diskretních a výrobních parametrů. V případě spojitých parametrů se provádí lineární kombinace chromozomů dle rovnic:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(O_1)} &= a \cdot \mathbf{X}^{(P_1)} + (1 - a) \cdot \mathbf{X}^{(P_2)} \\ \mathbf{X}^{(O_2)} &= (1 - a) \cdot \mathbf{X}^{(P_1)} + a \cdot \mathbf{X}^{(P_2)}\end{aligned}\quad (5.19)$$

kde $\mathbf{X}^{(O_1)}$, $\mathbf{X}^{(O_2)}$ jsou nové návrhové vektory (potomci) a $\mathbf{X}^{(P_1)}$, $\mathbf{X}^{(P_2)}$ jsou rodičovské návrhové vektory. V případě diskretních a výrobních parametrů se nejprve provádí převod hodnot těchto parametrů do binárního kódování a s těmito binárními řetězci se provádí jedna ze tří dostupných operací křížení operací křížení:

- **Jednobodové křížení** se provádí v jednom náhodně zvoleném bodě. Grafické znázornění tohoto operátoru je vidět na obrázku 5.5a

¹⁸V ang. originále: *Particle Swarm Algorithm*

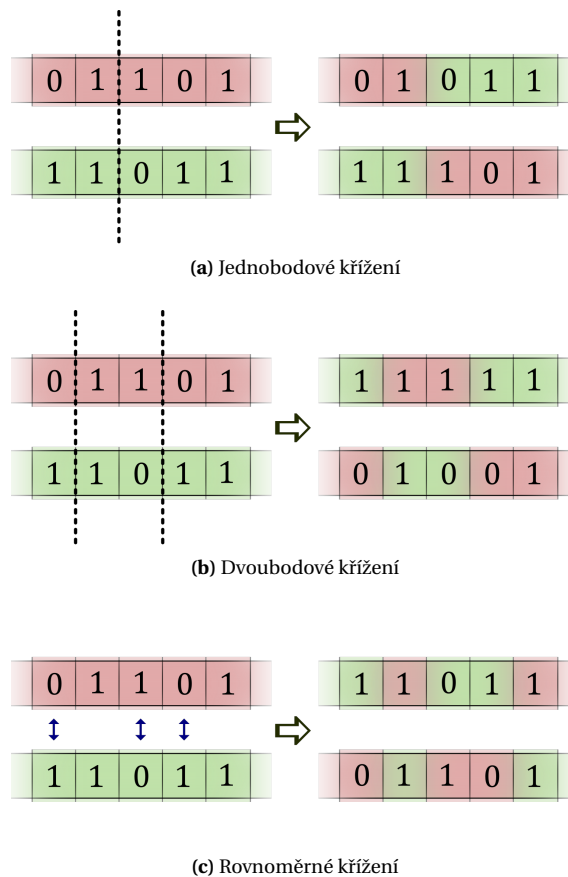
¹⁸V angl. originále: *non-dominated sorting*

¹⁹V angl. originále: *manufacturable values*

²⁰V angl. originále: *cross-over*

²¹V angl. originále: *mutation*

- **Dvoubodové křížení** se provádí ve dvou náhodně zvolených bodech. Grafické znázornění operace dvoubodového křížení je vidět na obrázku 5.5b
- **Rovnoměrné křížení** se provádí tak, že s určitou pravděpodobností přispívá daný rodič svými geny v rámci chromozomů. Dochází tak míchání na úrovni genů a ne na úrovni segmentů, jak tomu bylo u dvou výše jmenovaných typů křížení. Grafické znázornění operátoru rovnoměrného křížení je vidět na obrázku 5.5c



Obrázek 5.5: Operátor křížení pro binární řetězce diskretních a výrobních parametrů alg. MOGA

Mutace: mění hodnotu jednoho či více genů v rámci chromozomu, čímž může dojít ke vzniku unikátních nových jedinců. Algoritmus se díky této operaci stává robustnějším jelikož funguje jako prostředek k redukci pravděpodobnosti uvíznutí v lokálním minimu. V případě spojitých reálných parametrů se výpočet nového jedince $\mathbf{X}^{(C)}$ provádí dle vztahu

$$\mathbf{X}^{(C)} = \mathbf{X}^{(P)} + (\mathbf{X}^{(UB)} - \mathbf{X}^{(LB)}) \delta \quad (5.20)$$

kde $\mathbf{X}^{(P)}$ je původní (rodičovský) návrhový vektor, $\mathbf{X}^{(UB)}$ resp. $\mathbf{X}^{(LB)}$ je vektor horních, resp. dolních mezí a δ je malá variace spočítaná z polynomiálního rozdělení. U parametrů diskretních a výrobních se operátor mutace provádí jako záměna logické hodnoty daných genů s pravděpodobností 0,5.

Při běhu algoritmu je po vygenerování nové populace provedena evaluace hodnot účelové funkce pro jednotlivé jedince. Poté se kontroluje konvergence na základě vyhodnocení zda-li bylo dosaženo stanovených hodnot *maximálního povoleného Paretova procenta* nebo tzv. *procenta stability*.

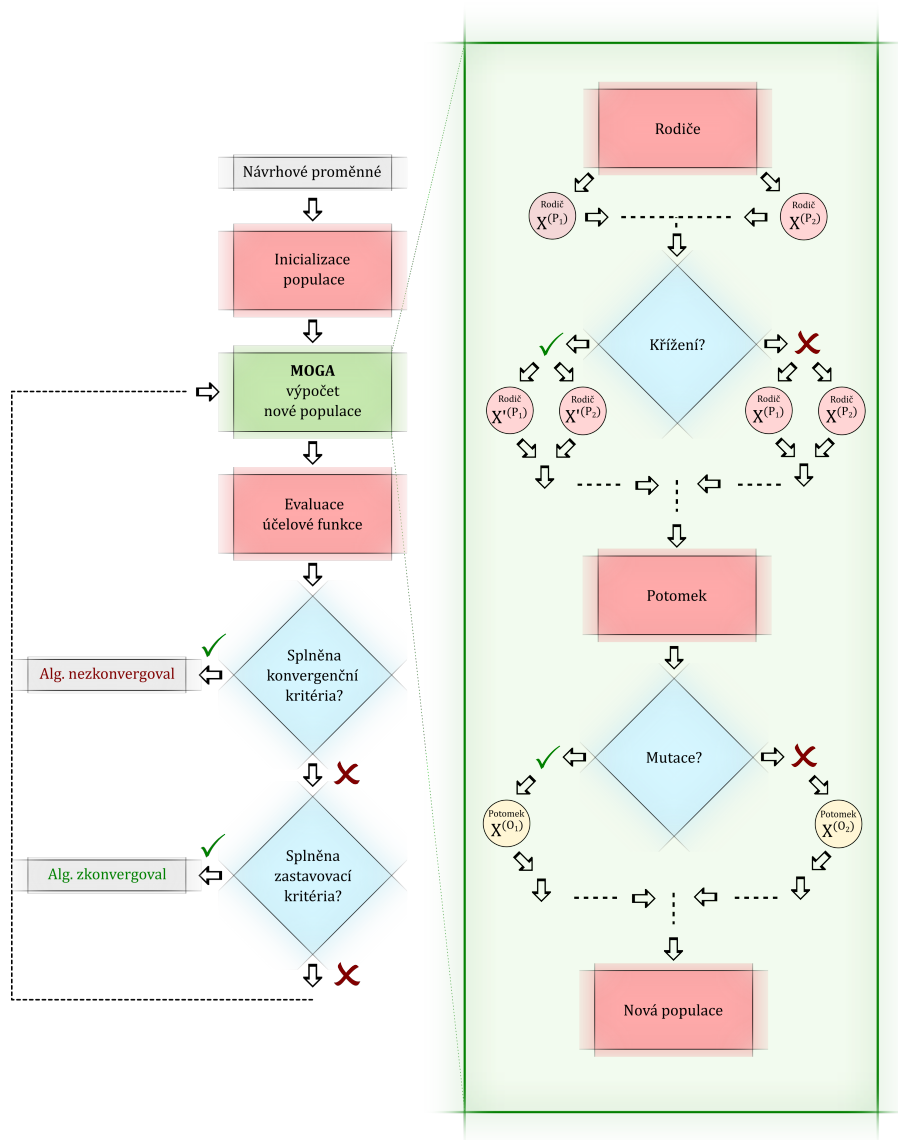
Maximální povolené Pareto procento: je číslo reprezentující poměr mezi požadovanými Pareto body a počtem členů v populaci.

Procento stability: je číslo charakterizující stabilitu populace na základě její střední hodnoty a směrodatné odchylky. Iteraci lze dle [3] považovat za konvergenčně stabilní, když

$$\frac{|\bar{f}^{(i)} - \bar{f}^{(i-1)}|}{f_{max} - f_{min}} < \frac{s}{100} \wedge \frac{|\bar{\sigma}(f)^{(i)} - \bar{\sigma}(f)^{(i-1)}|}{f_{max} - f_{min}} < \frac{s}{100} \quad (5.21)$$

kde $\bar{f}^{(i)}$ je střední hodnota účelové funkce v i -té iteraci, $\bar{\sigma}(f)^{(i)}$ je směrodatná odchylka v i -té iteraci, f_{max} , resp. f_{min} je maximální hodnota, resp. minimální hodnota účelové funkce v i -té iteraci a s je procento stability.

Posledním krokem před opakováním výpočtu nové populace pomocí výše uvedených operátorů je kontrola splnění zastavovacího kritéria, kterým je v daném případě maximální počet požadovaných iterací algoritmu. S ohledem na zařazení až za kontrolu konvergence dojde při vyčerpání počtu iterací k zastavení i v případě, že výpočet nezkonvergoval. Přehledně lze popsany algoritmus na závěr shrnout pomocí schématu na obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: Vývojový diagram alg. MOGA (adaptováno z [ansys]).

Největší devízou výše popsaného algoritmu je jeho robustnost, která jde však na úkor přesnosti. Popularita je však dána tím, že poskytovaná kvalita řešení je vzhledem k časové náročnosti a vynaloženému úsilí dostatečná [58].

5.3.3.2 Algoritmus Particle Swarm (PSOA)

Další ze skupiny moderních metod je optimalizace pomocí algoritmu *Particle Swarm*. Jedná se o metaheuristickou, behaviorální metodu, která tvoří určitou opozici vůči evolučním metodám (např. genetickým algoritmům). Algoritmus byl poprvé představen KENNEDYEM a EBERHARTEM v [66] a dle zmiňovaných autorů využívá hybnosti k akceleraci konvergence vstříc minimu účelové funkce [69, s. 158]. Částice představuje konkrétní realizaci návrhového vektoru $\mathbf{X}^{(i)}$, přičemž je-li populace o velikosti j , tak má každá částice v i -té iteraci dvě charakteristiky: *polohu* $\mathbf{X}_j^{(i)}$ (souřadnice polohy jsou jednotlivé návrhové proměnné) a navíc *rychlost* $\mathbf{V}_j^{(i)}$. Algoritmus se zahajuje náhodným rozmístěním částic v návrhovém prostoru. Tyto částice poté v průběhu iterací aktualizují polohu a ukládají si informaci o dosavadní nejlepší vlastní poloze (s nejnižší hodnotou účelové funkce²³) $\mathbf{P}_{best,j}$ a vyměňují si informaci o globálně nejlepší poloze (částice s nejnižší hodnotou účelové funkce²⁴) \mathbf{G}_{best} [111]. Aktualizace polohy částice lze tedy formálně zapsat takto

$$\mathbf{X}_j^{(i)} = \mathbf{X}_j^{(i-1)} + \mathbf{V}_j^{(i)}, \quad (5.22)$$

v rámci kterého

$$\mathbf{V}_j^{(i)} = w \cdot \mathbf{V}_j^{(i-1)} + c_1 \cdot r_1 \cdot [\mathbf{P}_{best,j} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}] + c_2 \cdot r_2 \cdot [\mathbf{G}_{best} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}]. \quad (5.23)$$

kde w je koeficient setrvačnosti zaváděný s ohledem na tlumení rychlosti hejna, aby nedocházelo k oscilacím na konci iteračního procesu, kde se očekává pohyb v malé oblasti okolo globálního minima. koeficient setrvačnost lze dle [121] zapsat v podobě

$$w = \Psi_{max} - \left(\frac{\Psi_{max} - \Psi_{min}}{N_{iter}} \right) i \quad (5.24)$$

kde i je číslo aktuální iterace, i_{max} maximální počet iterací a Ψ_{max} resp. Ψ_{min} je maximální resp. minimální hodnota setrvačnosti, přičemž v provedené implementaci jsou použity hodnoty $\Psi_{max} = 0,9$ a $\Psi_{min} = 0,4$. V rovnici (5.23) se objevuje výraz

$$c_1 \cdot r_1 \cdot [\mathbf{P}_{best,j} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}]$$

představující *vlastní inteligenci* částice a kde c_1 je kognitivní součinitel nabývající obvykle hodnoty 2,0 a r_1 je váhový součinitel s náhodnou hodnotou dle normálního rozdělení $r_1 \in U(0, 1)$. Ve stejné rovnici (5.23) se dále objevuje výraz

$$c_2 \cdot r_2 \cdot [\mathbf{G}_{best} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}],$$

který představuje *inteligenci hejna* částic a kde c_2 je sociální součinitel učení nabývající obvykle hodnoty 2,0 a r_2 je opět váhový součinitel s náhodnou hodnotou dle normálního rozdělení $r_2 \in (0, 1)$.

Ukázka vývoje hejna v 10 iteracích o celkovém počtu 3 částic při hledání minima funkce *Booth*²⁵ je uveden na obrázcích 5.7a – 5.7d. Na posledním ze výše uvedených obrázků je graficky znázorněn popsaný mechanismus aktualizace polohy částice mezi 6. (•) a 7. (•) iterací:

1. tlumení rychlosti z předchozí iterace součinitelem setrvačnosti $w \cdot \mathbf{V}_j^{(i-1)} \rightarrow$ poloha (•)
2. korekce polohy s ohledem na nejlepší polohu dané částice $c_1 \cdot r_1 \cdot [\mathbf{P}_{best,j} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}] \rightarrow$ poloha (•)
3. korekce polohy s ohledem na nejlepší globální polohu $c_2 \cdot r_2 \cdot [\mathbf{G}_{best} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}] \rightarrow$ poloha (•)

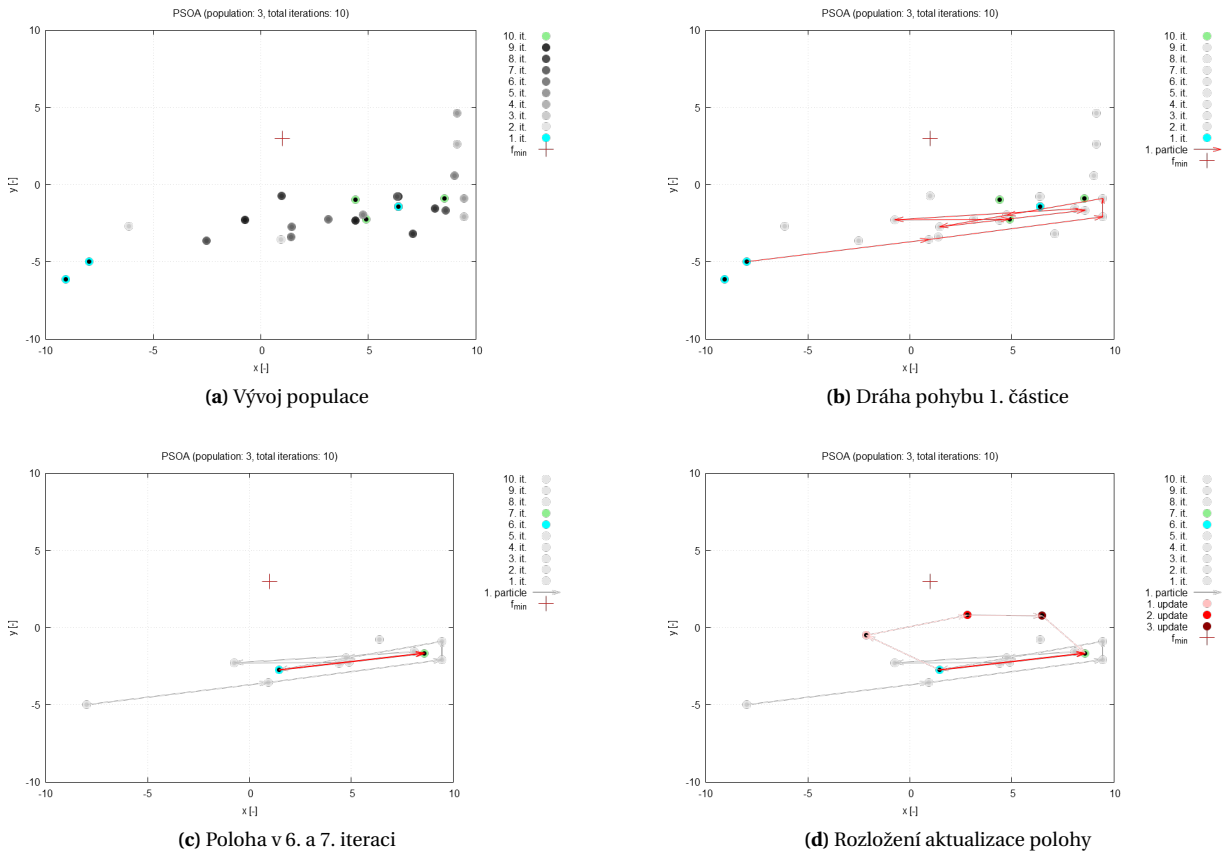
Algoritmus lze použít pro řešení neomezených i omezených optimalizačních problémů, kde se pro znevýhodnění nepřipustných řešení nevyhovujících omezujícím podmínkám využívá penalizace účelové funkce např. ve tvaru dle RAA [111, s. 711]. V provedené implementaci bylo s ohledem na požadavek

²³ *Personal Best*

²⁴ *Global Best*

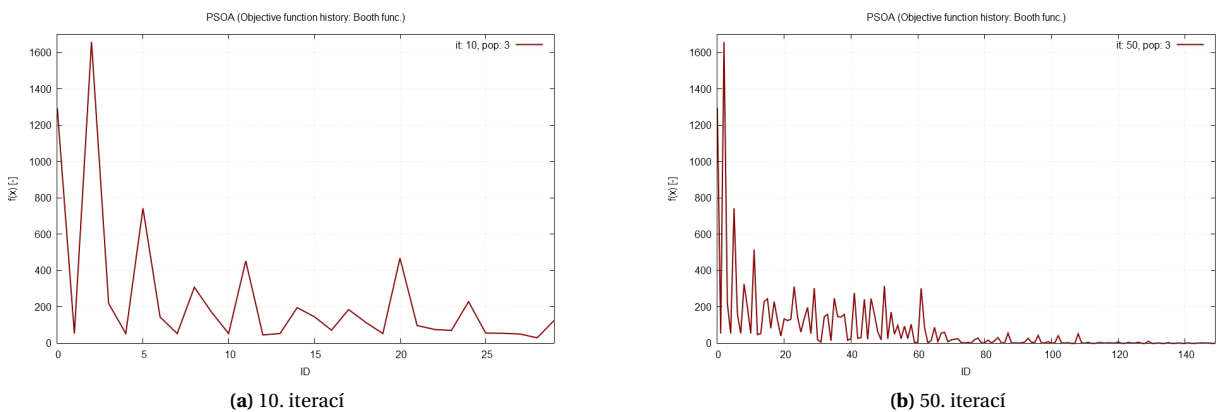
²⁵ Popis testovací funkce Booth včetně výsledků testů je společně s dalšími testy podrobně uvedena v příloze 6

dodržovat uživatelem zadané intervaly návrhových proměnných, využito striktní penalizace ponecháním částice v původní poloze: $\mathbf{X}_j^{(i)} = \mathbf{X}_j^{(i-1)}$ a vynulováním rychlosti $\mathbf{V}_j^{(i)} = 0, 0$.



Obrázek 5.7: Schematické znázornění procesu vývoje hejna v alg. PSOA na funkci Booth

Popsaný algoritmus byl vybrán k implementaci vzhledem k výbornému poměru přesnosti a robustnosti. Na srovnání níže uvedených obrázků 5.8a a 5.8b lze demonstrovat tvrzení o vysoké přesnosti, jelikož bylo při použití 50 iterací algoritmu s pouhými 3 částicemi na funkci *Booth* dosaženo minima $f_{min}^{PSOA}(1,066884; 2,924719) = 0,010423$, přičemž globální minimum funkce je $f_{g,min}(1,0; 3,0) = 0,0$. Důkaz robustnosti provedené implementace algoritmu je demonstrován na sadě testovacích funkcí s lokálními extrémy, omezujícími podmínkami i nespojitostmi v následující kapitole 6. S ohledem na nasazení



Obrázek 5.8: Vývoj hodnoty účelové funkce Booth $f_{min}(1;3) = 0$

algoritmu pro řešení úloh konstrukční optimalizace (rozměrové a tvarové) v programu *RFEM* byla implementace provedena tak, že návrhové proměnné mohou nabývat jak čisté reálných hodnot, tak diskrétních reálných a celých čísel. Kompletní přehled algoritmu je proveden v podkapitole 5.3.3.3.

5.3.3.3 Schéma algoritmu Particle Swarm (PSOA)

Algorithm 2 Schéma algoritmu PSOA

Require: $N_{iter} > 0$, ▷ N_{iter} ... number of iterations
Require: $M_{pop} > 0$, ▷ M_{pop} ... number of particles
Set $f_{g,best} = +\infty$
Initiate random numbers
for $j \leq M_{pop}$ **do**
 Initiate population \mathbf{X}_j with random values
 Compute objective function $f(\mathbf{X}_j)$
 Set velocity $\mathbf{V}_j = 0, 0$
 Set personal best position $\mathbf{P}_{best,j} = \mathbf{X}_j$
 Set PB objective function $f(\mathbf{P}_{best,j}) = f(\mathbf{X}_j)$
 if $f(\mathbf{P}_{best,j}) < f_{g,best}$ **then**
 Set $f_{G,best} = f(\mathbf{P}_{best,j})$
 Set $\mathbf{G}_{best} = \mathbf{P}_{best,j}$
 end if
end for
for $i \leq N_{iter}$ **do**
 for $j \leq M_{pop}$ **do**
 Update velocity $\mathbf{V}_j^{(i)}$ ▷ in according to (5.23)
 Update position $\mathbf{X}_j^{(i)}$ ▷ in according to (5.22)
 Check limits of variables X_1, \dots, X_k
 if Any of limit is violated **then**
 Set velocity $\mathbf{V}_j^{(i)} = \mathbf{V}_j^{(i-1)}$
 Set position $\mathbf{X}_j^{(i)} = \mathbf{X}_j^{(i-1)}$
 end if
 Compute objective function $f(\mathbf{X}_j^{(i)})$
 if $f(\mathbf{X}_j^{(i)}) < f(\mathbf{P}_{best,j})$ **then**
 Set $f(\mathbf{P}_{best,j}) = f(\mathbf{X}_j^{(i)})$
 Set $\mathbf{P}_{best,j} = \mathbf{X}_j^{(i)}$
 if $f(\mathbf{P}_{best,j}) < f_{G,best}$ **then**
 Set $f_{G,best} = f(\mathbf{P}_{best,j})$
 Set $\mathbf{G}_{best} = \mathbf{P}_{best,j}$
 end if
 end if
 end for
 Compute damping w ▷ in according to (5.24)
 Convergence check ▷ Not implemented yet
end for

6 | Testy implementovaných algoritmů

„Důvěřuj, ale prověřuj.“
české přísloví

6.1 Úvod

Implementace algoritmu PSOA realizovaná v rámci dizertační práce pro řešení inverzní identifikace parametrů materiálových modelů byla provedena v takové obecnosti, aby byla použitelná i pro řešení klasických úloh konstrukční optimalizace (rozměrové a tvarové). Pro demonstraci vybraných vlastností tradičních algoritmů při konstrukční optimalizaci byl implementována i strategie NMOA. Navíc bylo předpokládáno napojení naprogramované dynamické knihovny v systému *RFEM*. S ohledem na obecně vysoké požadavky kvality software při komerčním nasazení bylo při implementaci provedeno komplexní testování.

K testování bylo použito obecně známých a používaných funkcí, označovaných také jako *umělé krajiny*¹. Jejich primárním cílem je prověření základních charakteristik algoritmů, kterými jsou [142]:

- míra konvergence,
- přesnost,
- robustnost,
- výkon.

Z řady dostupných testů optimalizačních algoritmů byly vybrány takové účelové funkce, aby byly ověřeny základní charakteristiky jak ve 2D, tak vícedimenzionálním návrhovém prostoru při následujících vlastnostech:

- velké množství lokálních minim,
- existence dlouhých údolí,
- omezení oblasti přípustných řešení,
- nespojitost oblasti přípustných řešení.

Použité funkce odpovídající zmiňovaným kritériím byly:

- funkce *Booth* [132] ve 2D,
- funkce *Ackley* [133] ve 2D,
- funkce *Michalewicz* [134] v 5D,
- funkce *Rosenbrock* [142] s omezeními ve 2D,
- silně nespojitá 2D funkce *Gomez-Levy* [116].

¹V angl. originále: *artificial landscapes*

6.2 Funkce Booth

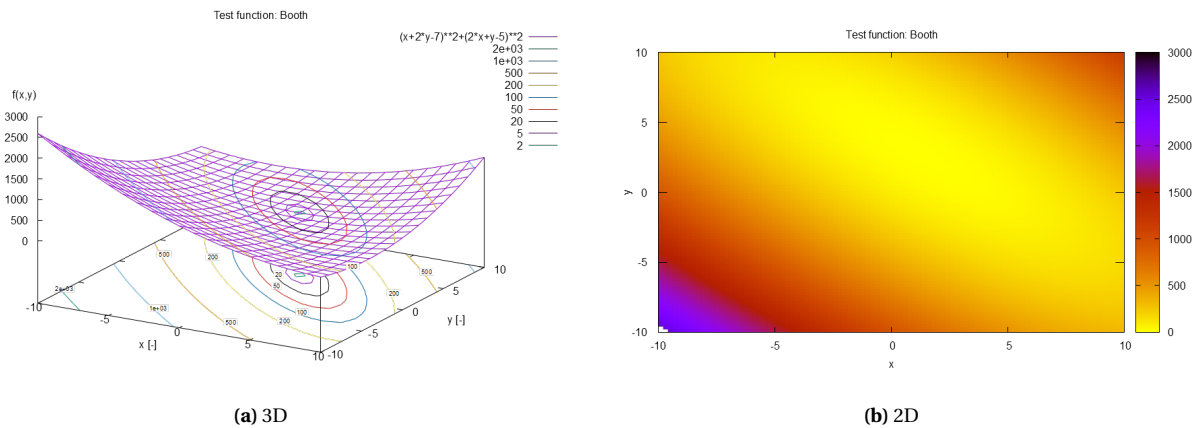
Testovací funkce Booth je dle [132] dvoudimenzionální (2D) funkce s předpisem

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2, \quad (6.1)$$

jejíž globální minimum leží v bodě (1;3) a má hodnotu

$$f_{g,min}(1;3) = 0,0 \quad (6.2)$$

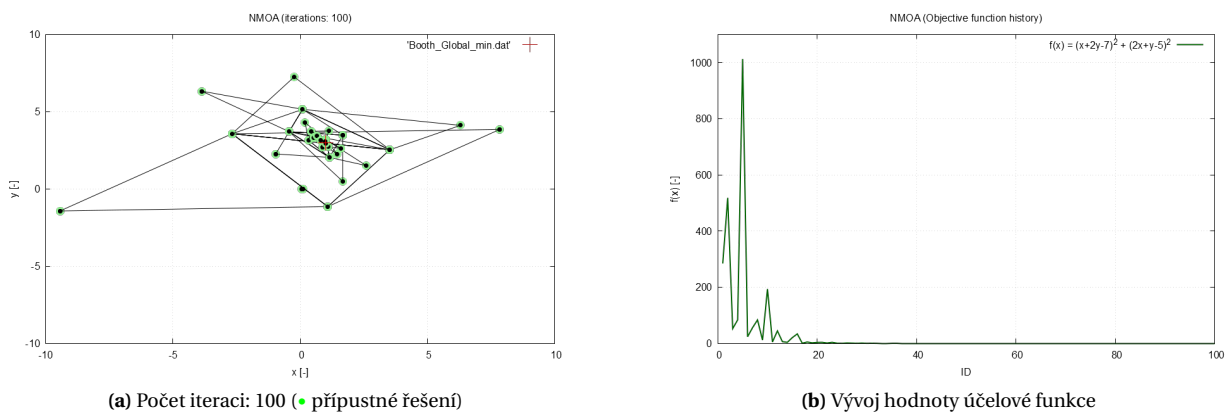
Pro účely testování algoritmů NMOA a PSOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byla zvolena doména ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -10, 0; 10, 0 \rangle$ a pro test algoritmu PSOA s předpokladem diskrétního charakteru parametrů \mathbf{X}^d byla použita identická doména $x_i^d \in \langle -10, 0; 10, 0 \rangle$ s krokem 0,001. Podoba funkce na definované doméně je zobrazena na obrázcích 6.1a a 6.1b.



Obrázek 6.1: Funkce Booth

6.2.1 Test algoritmu NMOA

Výsledek dokumentující konvergenci a robustnost řešení pomocí algoritmu NMOA, které lze provést zatím pouze na spojitém charakteru parametrů jsou pro danou testovací funkci zobrazeny na grafech v obrázcích 6.2a, 6.2b. Numerické srovnání dosaženého výsledku vzhledem k hodnotě analytického řešení je provedeno v tabulce 6.1.



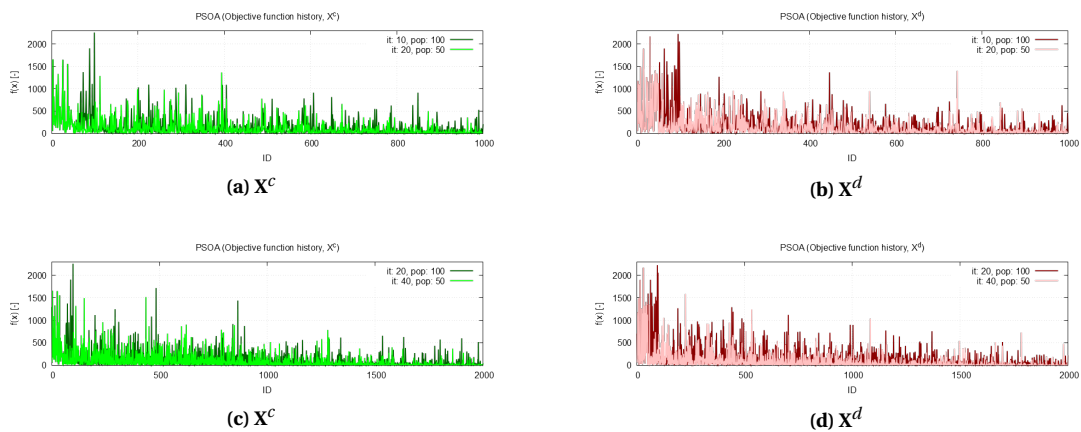
Obrázek 6.2: Výsledek testu alg. NMOA na funkci Booth pro parametry \mathbf{X}^c

Tabulka 6.1: Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Booth

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{NMOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	iterace: 100	$(1,000;3,000)^T$	$6,501 \cdot 10^{-5}$	$6,501 \cdot 10^{-5}$	-

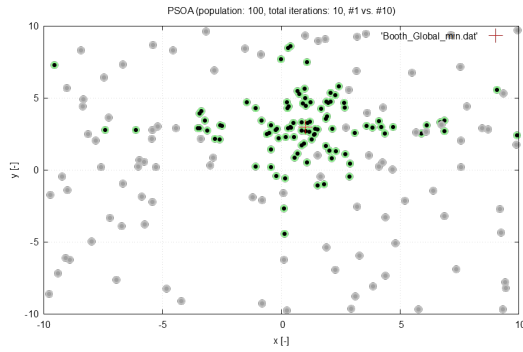
6.2.2 Test algoritmu PSOA

Výsledky dokumentující konvergenci a robustnost řešení pomocí algoritmu PSOA pro oba charaktery parametrů na dané testovací funkci jsou zobrazeny na grafech 6.3a – 6.3d a v obrázcích: 6.4a, 6.4b, 6.4c, 6.4d, 6.5a, 6.5b, 6.5c, 6.5d, kde lze pozorovat vývoj hejna mezi první a poslední iterací. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.2.

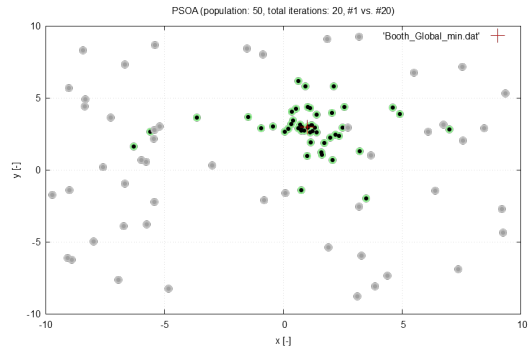

Obrázek 6.3: Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Booth

Tabulka 6.2: Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Booth

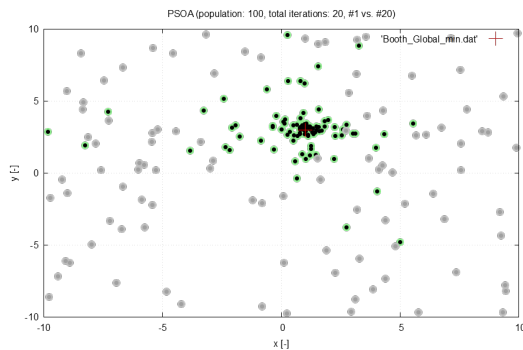
char. parametru	nastavení	\mathbf{x}	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 10	$(0,939;2,988)^T$	0,026	0,026	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 20	$(1,000;2,986)^T$	0,001	0,001	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 10	$(0,911;3,001)^T$	0,039	0,039	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 20	$(1,095;2,898)^T$	0,020	0,020	-
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	$(0,995;3,005)^T$	$4,931 \cdot 10^{-5}$	$4,931 \cdot 10^{-5}$	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	$(1,000;3,000)^T$	$5,273 \cdot 10^{-6}$	$5,273 \cdot 10^{-6}$	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 20	$(1,046;2,943)^T$	0,006	0,006	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 40	$(1,000;3,000)^T$	$5,000 \cdot 10^{-6}$	$5,000 \cdot 10^{-6}$	-



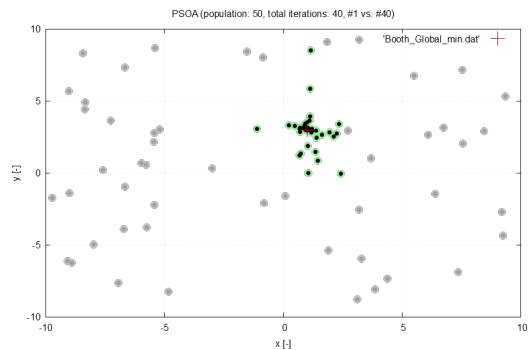
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)

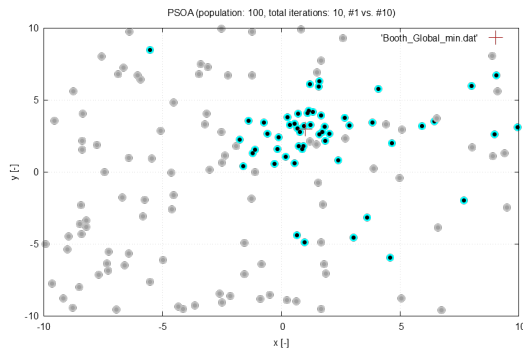


(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)

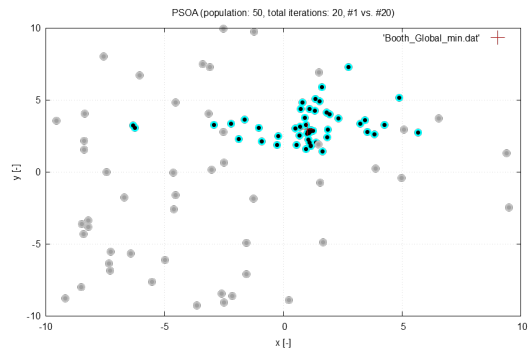


(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 40. iterace)

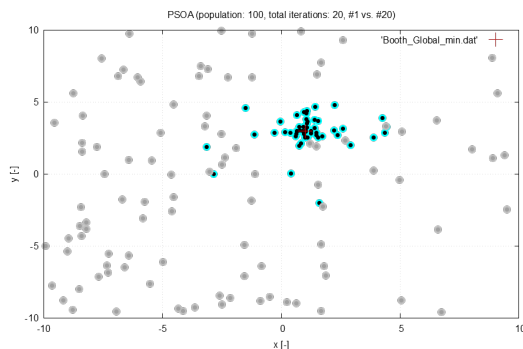
Obrázek 6.4: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Booth pro parametry X^c



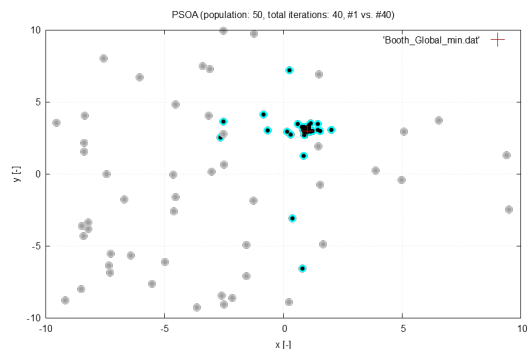
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)



(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)



(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 40. iterace)

Obrázek 6.5: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Booth pro parametry X^d

6.3 Funkce Ackley (2D)

Testovací funkce Ackley je dle [133] N dimenzionální (ND) funkce s předpisem

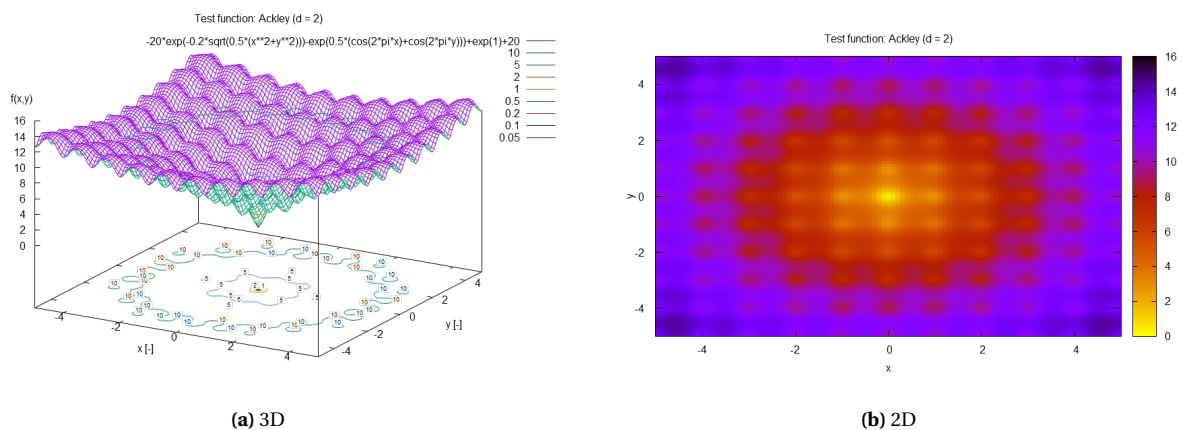
$$f(\mathbf{x}) = -a \cdot e^{-b \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}} - e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos cx_i} + a + e \quad (6.3)$$

Pro účely testování implementovaných algoritmů byla použita její 2D varianta ve tvaru

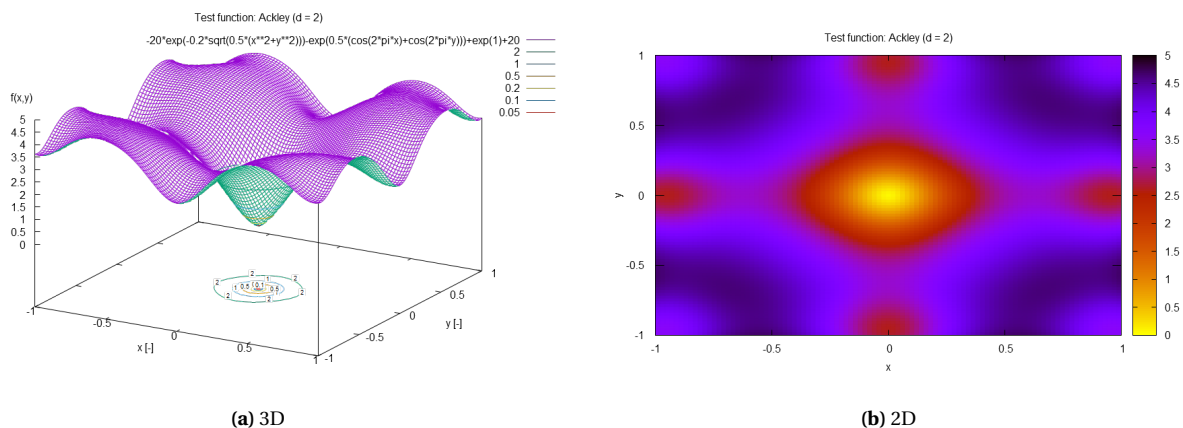
$$f(x_i) = -20 \cdot e^{-0,2 \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i^2}} - e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \cos 2\pi x_i} + 20 + e \quad (6.4)$$

s globálním minimem o hodnotě 0,0 v bodě

$$f_{g,min}(0;0) = 0,0 \quad (6.5)$$



Obrázek 6.6: Funkce Ackley



Obrázek 6.7: Detail globálního minima funkce Ackley

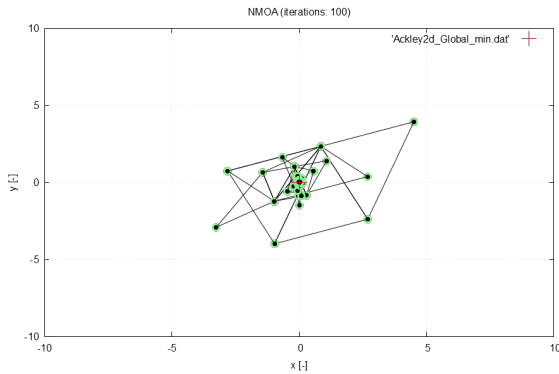
6.3.1 Test algoritmu NMOA

Test algoritmu NMOA pro parametry spojitého charakteru \mathbf{X}^c byl proveden na doméně ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -5, 0; 5, 0 \rangle$. Podoba funkce na definované doméně je zobrazena na obrázcích 6.6a a 6.6b. Detail oblasti globálního minima je zobrazen na obrázcích 6.7a a 6.7b. Výsledky dokumentující konvergenci a

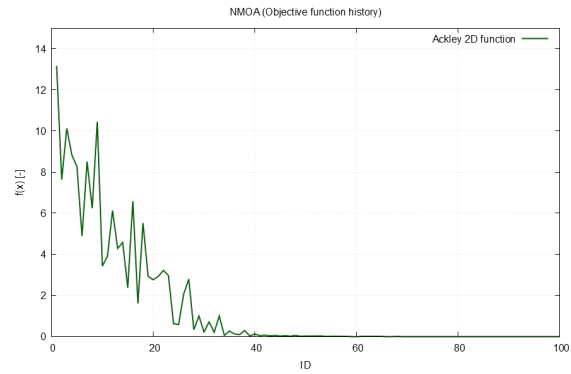
robustnost řešení pomocí *Nelder-Meadovy* strategie na dané testovací funkci jsou zobrazeny na grafech v obrázcích 6.8a, 6.8b. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.3.

Tabulka 6.3: Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Ackley 2D

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{NMOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	iterace: 100	$(-1,737 \cdot 10^{-6}; -2,369 \cdot 10^{-7})^T$	$4,957 \cdot 10^{-6}$	$4,957 \cdot 10^{-6}$	-



(a) Počet iterací: 100 (• přípustné řešení)



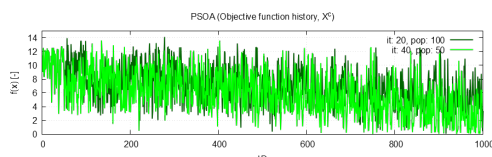
(b) Vývoj hodnoty účelové funkce

Obrázek 6.8: Výsledek testu alg. NMOA na funkci Ackley 2D pro parametry \mathbf{X}^c

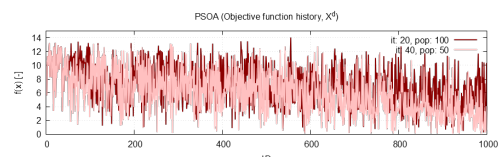
6.3.2 Test algoritmu PSOA

Test algoritmu PSOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byl proveden na doméně ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -5, 0; 5, 0 \rangle$ a pro test algoritmu s předpokladem diskrétního charakteru parametrů \mathbf{X}^d byla použita identická doména $x_i^d \in \langle -5, 0; 5, 0 \rangle$ s krokem 0,001.

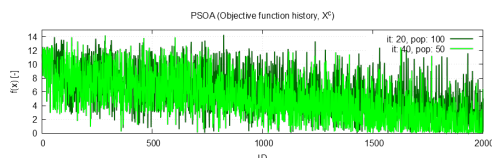
Výsledky dokumentující konvergenci a robustnost řešení pomocí algoritmu PSOA pro oba charaktery parametrů na dané testovací funkci jsou zobrazeny na grafech 6.9a-6.9d. Vývoj populace je demonstrován na obrázcích 6.10a, 6.10b, 6.10c, 6.10d, 6.11a, 6.11b, 6.11c, 6.11d. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.4.



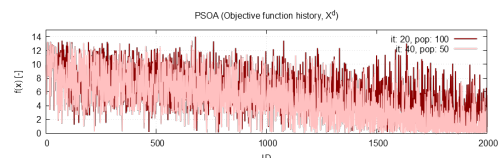
(a) \mathbf{X}^c



(b) \mathbf{X}^d

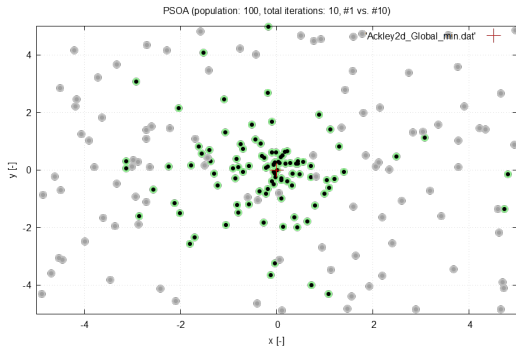


(c) \mathbf{X}^c

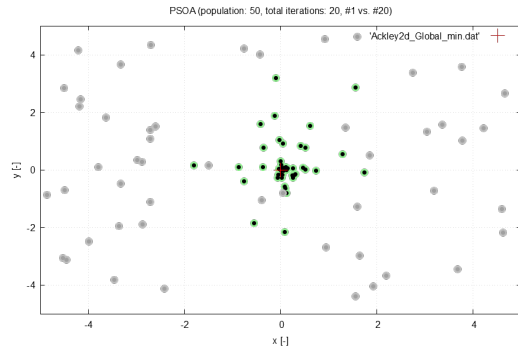


(d) \mathbf{X}^d

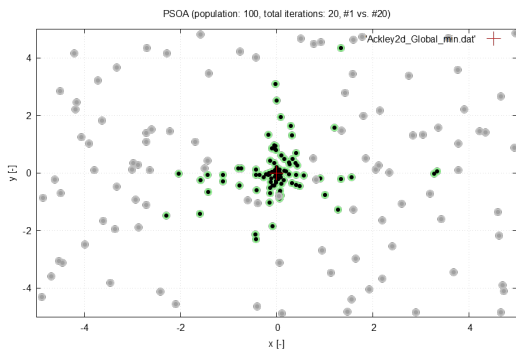
Obrázek 6.9: Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Ackley 2D



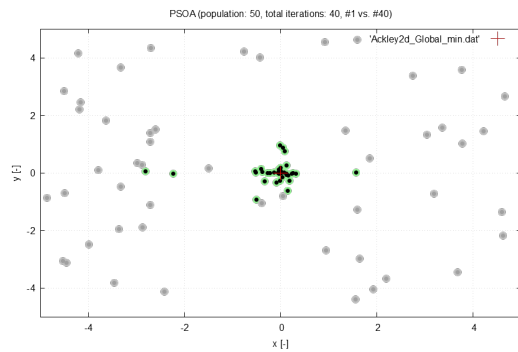
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)

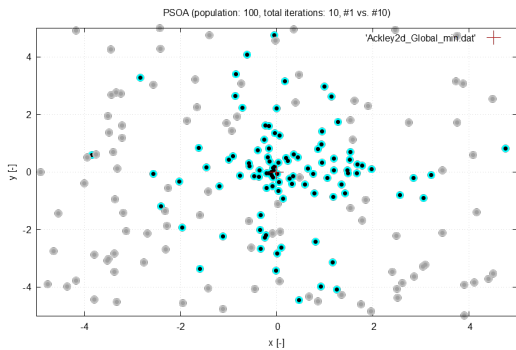


(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)

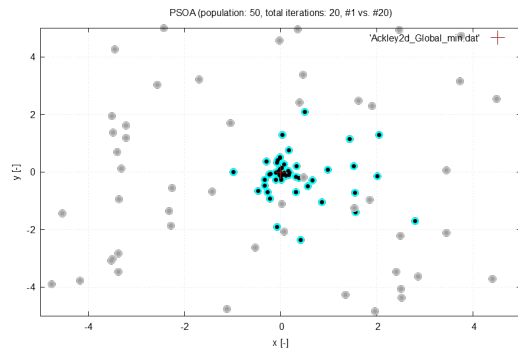


(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 40 (+ glob. min., • 1. iterace, • 40. iterace)

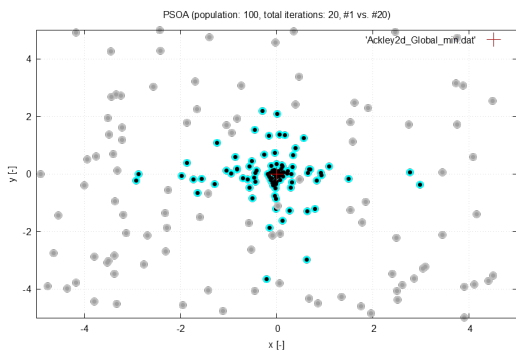
Obrázek 6.10: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Ackley pro parametry X^c



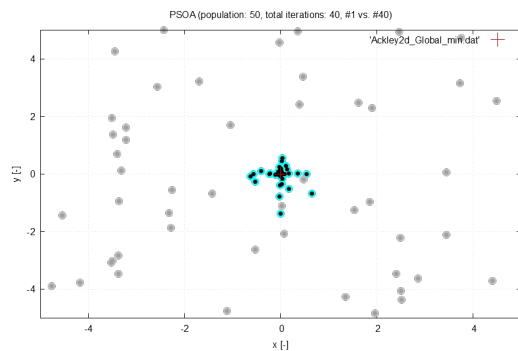
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)



(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, • 20. iterace)



(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, • 40. iterace)

Obrázek 6.11: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Ackley pro parametry X^d

Tabulka 6.4: Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Ackley

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 10	$(0,015;0,005)^T$	0,052	0,052	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 20	$(-0,001;0,004)^T$	0,011	0,011	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 10	$(0,008;-0,057)^T$	0,249	0,249	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 20	$(-0,016;-0,015)^T$	0,075	0,075	-
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	$(0,008;0,000)^T$	0,025	0,025	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	$(-0,0002;-0,0002)^T$	0,007	0,007	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 20	$(-0,020;-0,020)^T$	0,101	0,101	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 40	$(0,002;0,001)^T$	0,006	0,006	-

6.4 Funkce Michalewicz (5D)

Testovací funkce Michalewicz je dle [134] N dimenzionální (ND) funkce s předpisem

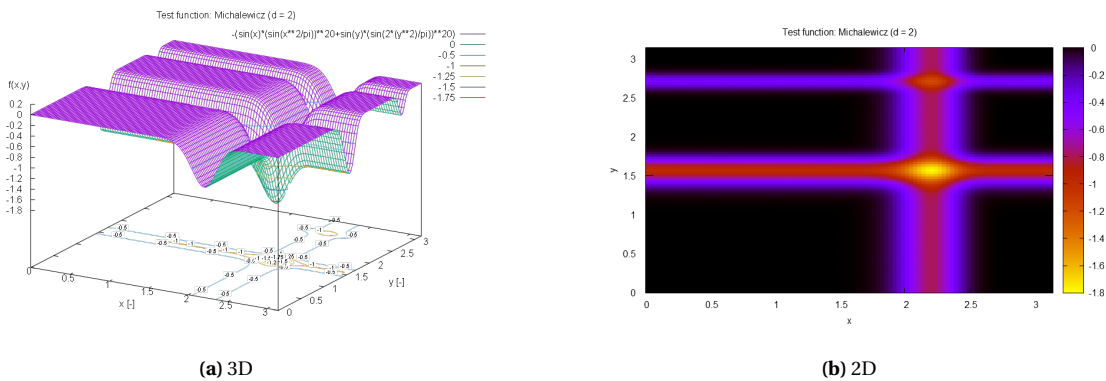
$$f(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^N \sin(x_i) \sin^{2m} \left(\frac{ix_i^2}{\pi} \right) \quad (6.6)$$

Pro účely testování implementovaného algoritmu PSOA byla použita její 5D varianta dle [142] ve tvaru

$$f(x_i) = - \sum_{i=1}^5 \sin(x_i) \sin^{20} \left(\frac{ix_i^2}{\pi} \right) \quad (6.7)$$

s globálním minimem

$$f_{g,min} = -4,687658 \quad (6.8)$$



Obrázek 6.12: Funkce Michalewicz (2D)

Test algoritmu PSOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byl proveden na doméně ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle 0; \pi \rangle$ a pro test algoritmu s předpokladem diskrétního charakteru parametrů \mathbf{X}^d byla použita identická doména $x_i^d \in \langle 0; \pi \rangle$ s krokem 0,001. Na obrázcích 6.12a a 6.12b výše je zobrazena 2D podoba této testovací funkce.

Výsledky dokumentující konvergenci a robustnost řešení pomocí algoritmu PSOA pro oba charaktery parametrů na dané testovací funkci jsou v podobě numerických hodnot prezentovány v tabulce 6.5.

Tabulka 6.5: Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Michalewicz (5D)

char. parametru	nastavení	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	-4,292	0,395	8,43
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	-4,187	0,501	10,69
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 40	-3,694	0,994	21,21
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 80	-4,645	0,042	0,90
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	-4,337	0,351	7,49
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	-4,483	0,205	4,38
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 40	-4,637	0,051	1,08
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 80	-4,496	0,192	4,09

6.5 Funkce Rosenbrock

Testovací funkce Rosenbrock je dle [142] dvoudimenzionální (2D) funkce s předpisem

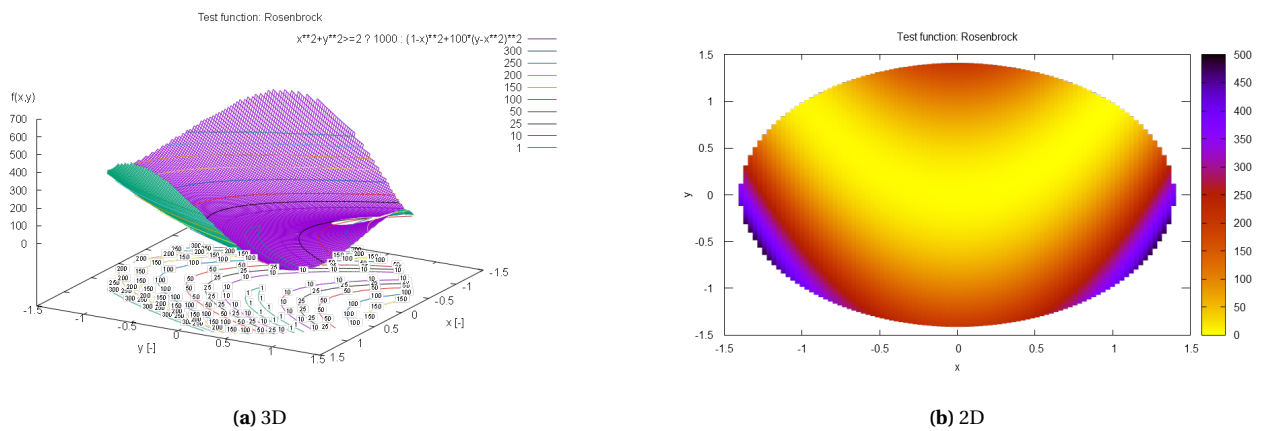
$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2, \quad (6.9)$$

jejíž globální minimum leží v bodě (1; 1) a má hodnotu

$$f_{g,min}(1; 1) = 0, 0, \quad (6.10)$$

a na které lze vymežit oblast přípustných řešení splňujících nerovnost

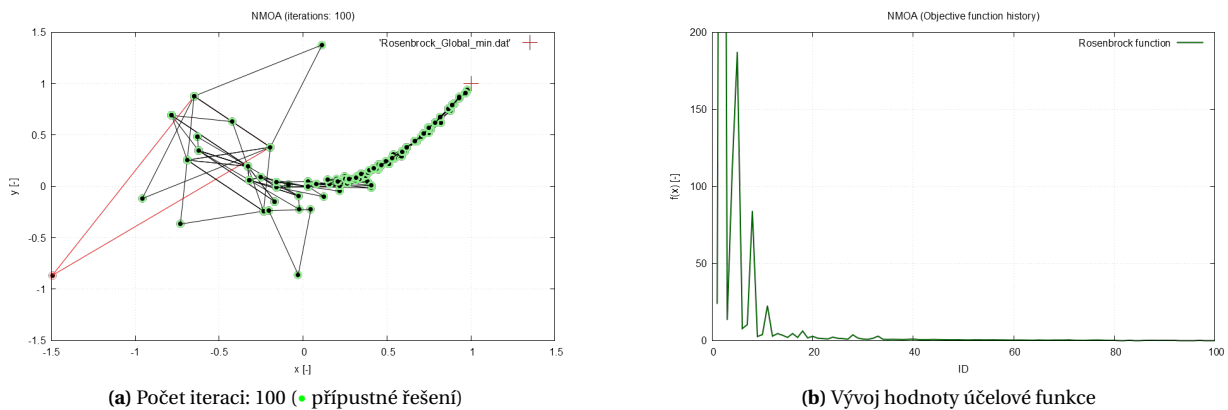
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2, 0 \quad (6.11)$$



Obrázek 6.13: Funkce Rosenbrock (2D) s omezením přípustných řešení

6.5.1 Test algoritmu NMOA

Test algoritmu NMOA pro parametry spojitého charakteru \mathbf{X}^c byl pro danou funkci dle obrázků 6.13a a 6.13b byl realizován na doméně ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -1, 5; 1, 5 \rangle$. Výsledky dokumentující konvergenci a robustnost řešení pomocí *Nelder-Meadovy* strategie na dané testovací funkci jsou zobrazeny na grafech v 6.14a, 6.14b. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.6.



Obrázek 6.14: Výsledek testu alg. NMOA na funkci Rosenbrock pro parametry \mathbf{X}^c

Tabulka 6.6: Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Rosenbrock

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{NMOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	iterace: 100	$(0,965;0,904)^T$	0,003	0,003	-

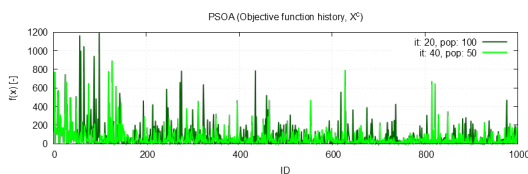
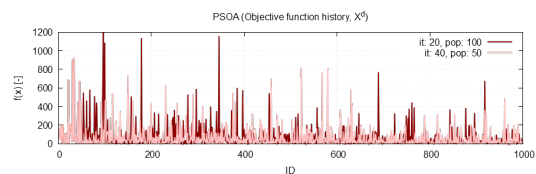
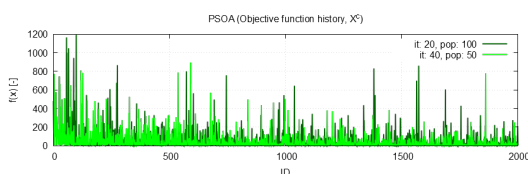
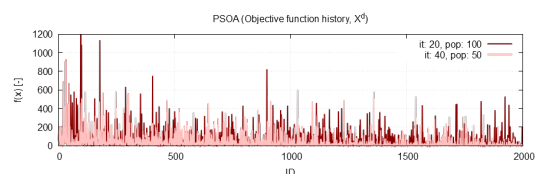
6.5.2 Test algoritmu PSOA

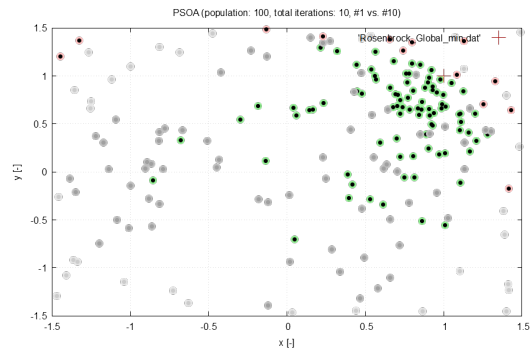
Pro účely testování algoritmu PSOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byla zvolena doména ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -1,5; 1,5 \rangle$ a pro test algoritmu s předpokladem diskrétního charakteru parametrů \mathbf{X}^d byla použita identická doména $x_i^d \in \langle -1,5; 1,5 \rangle$ s krokem 0,001.

Konvergence a robustnost řešení pomocí algoritmu PSOA pro oba charaktery parametrů na dané testovací funkci jsou dokumentovány na grafech v 6.15a – 6.15d a na obrázcích 6.16a, 6.16b, 6.16c, 6.16d, 6.17a, 6.17b, 6.17c, 6.17d je ilustrován vývoj populace napříč iteracemi. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.7.

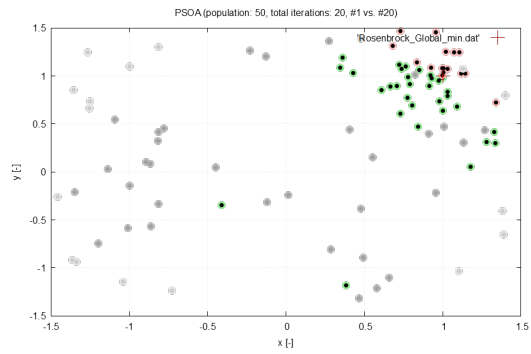
Tabulka 6.7: Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Rosenbrock

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 10	$(0,980;0,964)^T$	0,002	0,002	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 20	$(0,998;0,998)^T$	0,001	0,001	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 10	$(0,981;0,952)^T$	0,011	0,011	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 20	$(0,984;0,970)^T$	0,001	0,001	-
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	$(0,983;0,963)^T$	0,001	0,001	-
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	$(0,992;0,984)^T$	$7,513 \cdot 10^{-5}$	$5,273 \cdot 10^{-6}$	-
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 20	$(0,995;0,982)^T$	$1,301 \cdot 10^{-4}$	$1,301 \cdot 10^{-4}$	-
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 40	$(0,953;0,908)^T$	0.002	0.002	-

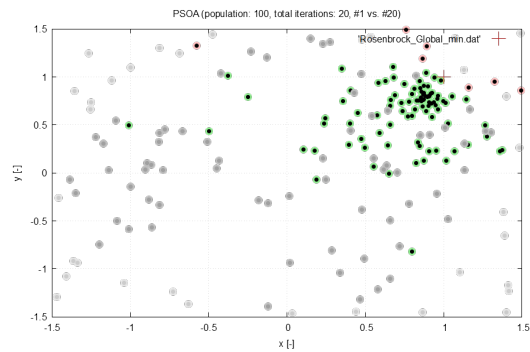

 (a) \mathbf{X}^c

 (b) \mathbf{X}^d

 (c) \mathbf{X}^c

 (d) \mathbf{X}^d
Obrázek 6.15: Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Rosenbrock



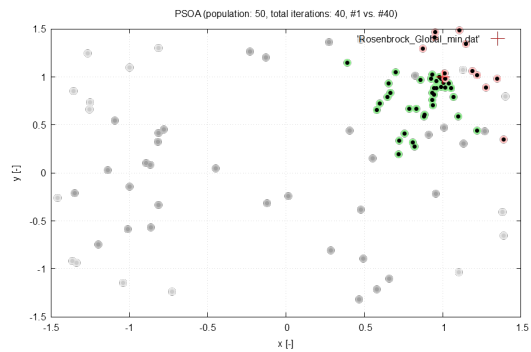
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 20. iterace)

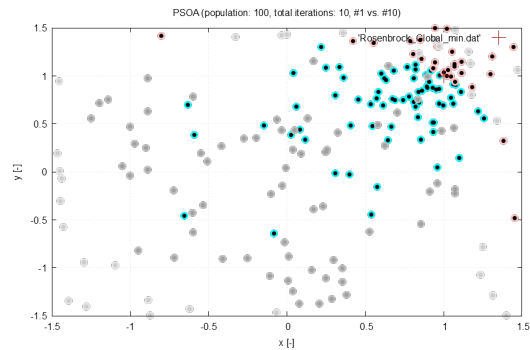


(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 20. iterace)

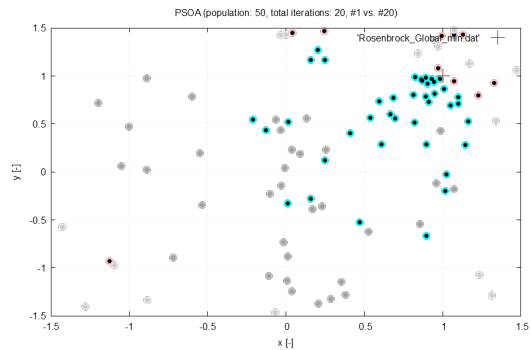


(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 40. iterace)

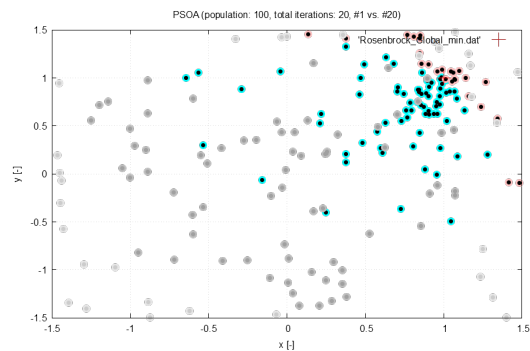
Obrázek 6.16: Výsledky testu alg. PSO na funkci Rosenbrock pro parametry X^c



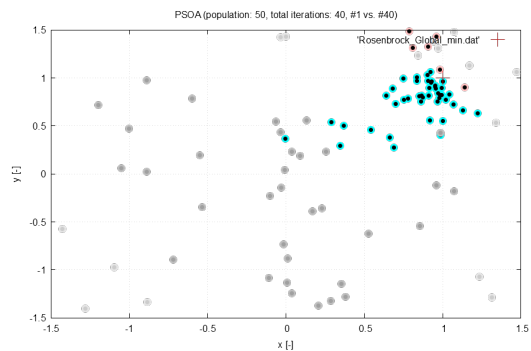
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 20. iterace)



(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 20. iterace)



(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min., • 1. iterace, •/• 40. iterace)

Obrázek 6.17: Výsledky testu alg. PSO na funkci Rosenbrock pro parametry X^d

6.6 Funkce Gomez-Levy

Testovací funkce Gomez-Levy je dle [116] dvoudimenzionální (2D) funkce s předpisem

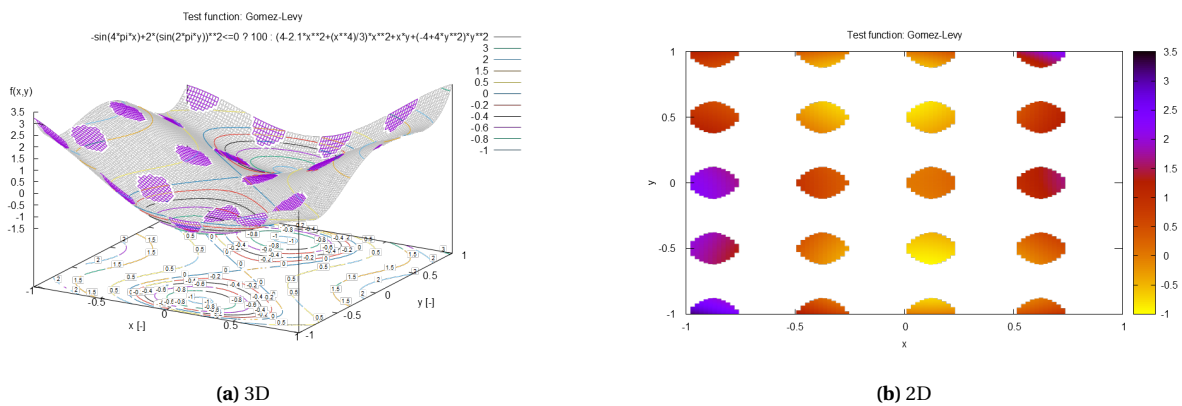
$$f(x_1, x_2) = \left(4 - 2, 1 \cdot x_1^2 + \frac{x_1^4}{3}\right) x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + (-4 + x_2^2) x_2^2, \quad (6.12)$$

jejíž globální minimum leží dle [116] v bodě $(0, 109; -0, 623)$ a má hodnotu

$$f_{g,min}(0, 109; -0, 623) = -0, 9711, \quad (6.13)$$

a na které lze vymezit oblast přípustných řešení splňujících nerovnost

$$-\sin(4\pi x_1) + 2 \sin^2(2\pi x_2) \leq 0, 0 \quad (6.14)$$

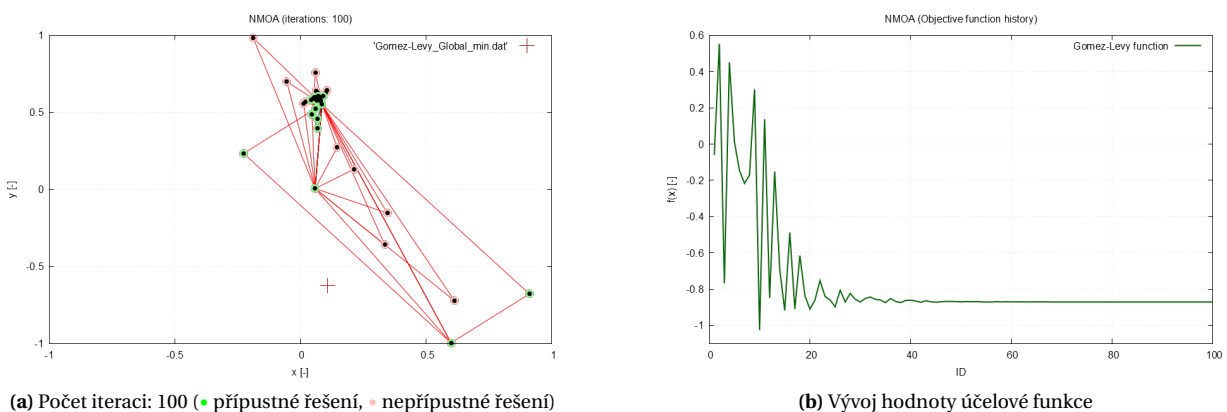


Obrázek 6.18: Funkce Gomez-Levy (2D) s omezením přípustných řešení

6.6.1 Test algoritmu NMOA

Test algoritmu NMOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byla zvolena doména ve tvaru čtverce $x_i^c \in (-1, 0; 1, 0)$. Podoba funkce na definované doméně je zobrazena na obrázcích 6.18a a 6.18b.

Konvergence a robustnost tohoto řešení jsou dokumentovány na grafech v 6.19a a 6.19b, přičemž výsledky uvedené v tabulce 6.8 ukazují, že ani v jednom z pokusů nebylo nalezeno globální minimum.



Obrázek 6.19: Výsledek testu alg. NMOA na funkci Gomez-Levy pro parametry \mathbf{X}^c

Tabulka 6.8: Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Gomez-Levy

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{NMOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	iterace: 100	$(0,057183;0,597251)^T$	-0,870660	0,100440	10,34

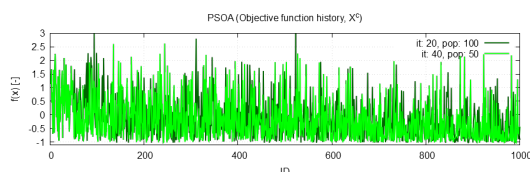
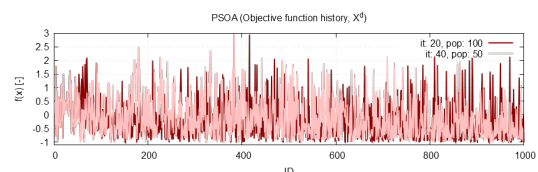
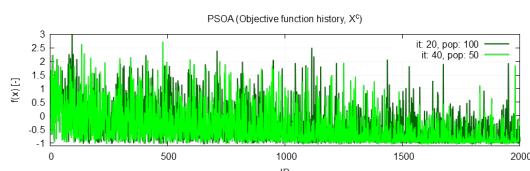
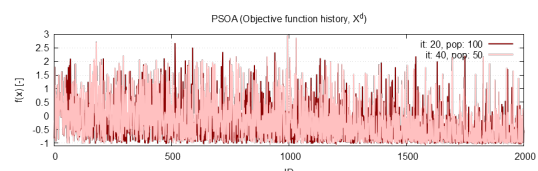
6.6.2 Test algoritmu PSOA

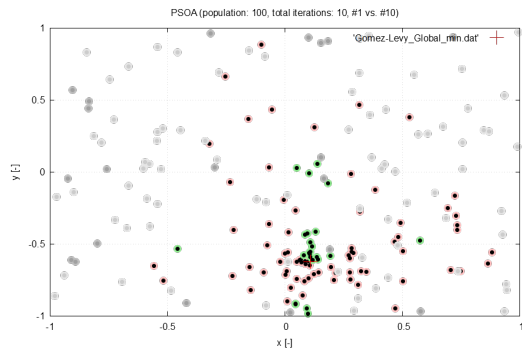
Pro účely testování algoritmu PSOA s předpokladem spojitého charakteru parametrů \mathbf{X}^c byla zvolena doména ve tvaru čtverce $x_i^c \in \langle -1, 0; 1, 0 \rangle$ a pro test algoritmu s předpokladem diskrétního charakteru parametrů \mathbf{X}^d byla použita identická doména $x_i^d \in \langle -1, 0; 1, 0 \rangle$ s krokem 0,001.

Konvergence a robustnost řešení pomocí algoritmu PSOA pro oba charaktery parametrů na dané testovací funkci jsou dokumentovány na grafech 6.20a – 6.20d a dále na obrázcích 6.21a, 6.21b, 6.21c, 6.21d, 6.22a, 6.22b, 6.22c, 6.22d je vidět vývoj populace částic mezi 1. a poslední iterací. Numerické srovnání dosažených výsledků testu je provedeno v tabulce 6.9.

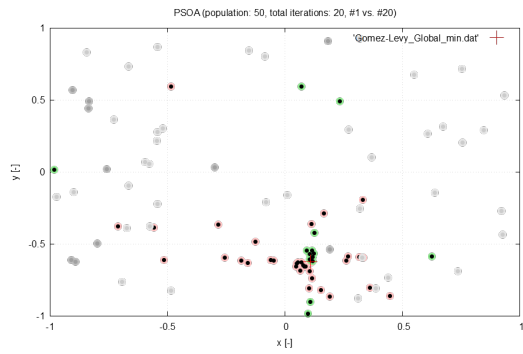
Tabulka 6.9: Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Gomez-Levy

char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 10	$(0,106; -0,621)^T$	-0,968	$3,1 \cdot 10^{-3}$	0,32
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 20	$(0,117; -0,622)^T$	-0,967	$4,1 \cdot 10^{-3}$	0,42
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 10	$(0,130; -0,623)^T$	-0,964	$7,1 \cdot 10^{-3}$	0,73
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 20	$(0,076; -0,601)^T$	-0,946	0,0251	2,58
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 20	$(0,108; -0,623)^T$	-0,971	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,01
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 40	$(0,109; -0,623)^T$	-0,970	$1,1 \cdot 10^{-3}$	0,11
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 20	$(0,108; -0,623)^T$	-0,971	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,01
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 40	$(0,113; -0,622)^T$	-0,968	$3,1 \cdot 10^{-3}$	0,32

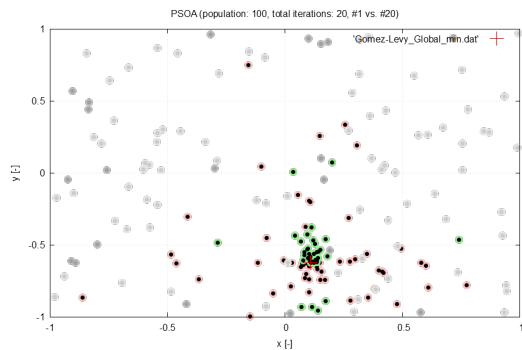

 (a) \mathbf{X}^c

 (b) \mathbf{X}^d

 (c) \mathbf{X}^c

 (d) \mathbf{X}^d
Obrázek 6.20: Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Gomez-Levy



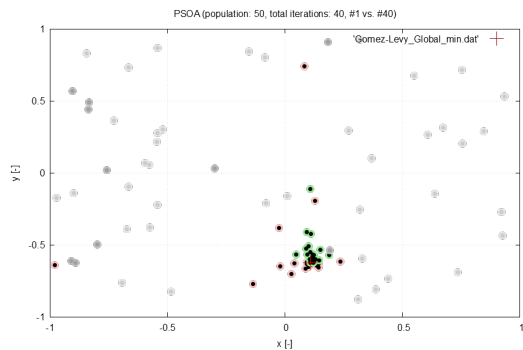
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 20. iterace)

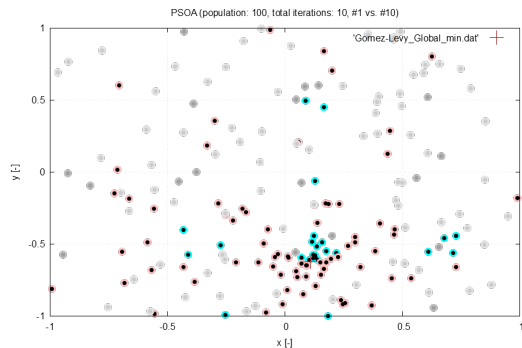


(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 20. iterace)

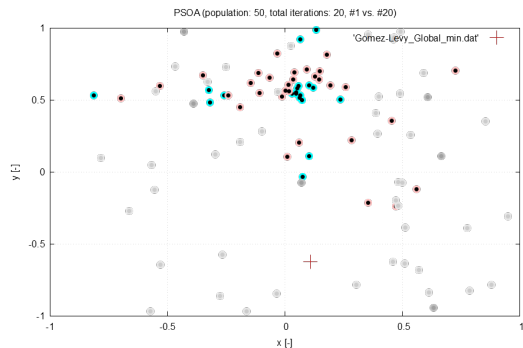


(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 40. iterace)

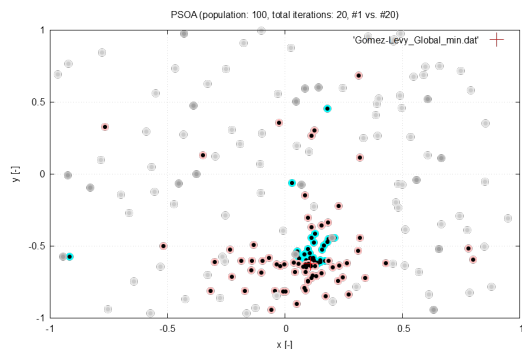
Obrázek 6.21: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Gomez-Levy pro parametry X^c



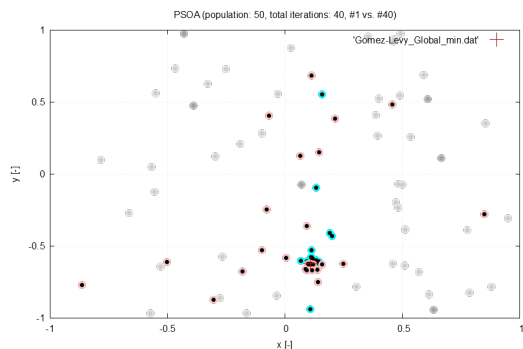
(a) Počet iterací: 10, velikost populace: 100 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 10. iterace)



(b) Počet iterací: 20, velikost populace: 50 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 20. iterace)



(c) Počet iterací: 20, velikost populace: 100 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 20. iterace)



(d) Počet iterací: 40, velikost populace: 50 (+ glob. min. • 1. iterace, ●/• 40. iterace)

Obrázek 6.22: Výsledky testu alg. PSOA na funkci Gomez-Levy pro parametry X^d

7 | Aplikace optimalizace na problémy mechaniky stavebních konstrukcí

„Rozdíl mezi málo a mnoho je třeba v tom, že jedna cihla je na stavbu málo, ale když někomu spadne na hlavu, je to mnoho.“

Jean Paul – německý spisovatel (1763 - 1825)

7.1 Úvod

Uplatnění optimalizace v oblasti mechaniky stavebních konstrukcí lze nalézt v typických minimalizačních a maximalizačních úlohách, jejichž cílem je dosažení optimálního návrhu s minimální spotřebou materiálu či maximálního využití konstrukčních prvků při dodržení stanovených návrhových kritérií. Dle CHRISTENSENA a KLARBIRNGA [20] lze definici tzv. konstrukční optimalizace¹ definovat jako snahu o nalezení dostatečné tuhosti popř. minimalizace citlivosti na ztrátu stability.

Z historického hlediska lze snahy optimalizovat konstrukci vystopovat už v antice, kde bylo cílem např. zajištění optimálního výhledu divákům v antických arénách nebo návrh akvaduktů zajišťujících dodávku pitné vody do měst [37]. Potřeba optimalizace byla poté vždy akcentována v dobách s hospodářským útlumem a největšího rozvoje se dočkala v souvislosti s vývojem samočinných počítačů po druhé světové válce v 50. a 60. letech 20. století [111]. Masivní využití počítačů pro návrh a statické posouzení konstrukcí, jejich hardwarová vybavenost a možnosti paralelizace výpočtu v cloudech umožňuje v dnešní době provádět analýzy konstrukcí v řádech od několika sekund po desítky minut. Z tohoto pohledu jsou vytvořeny výborné předpoklady pro běžné nasazení optimalizačních technik v každodenní praxi. Z pohledu praktického použití při návrhu konstrukce lze úlohy konstrukční optimalizace dle [20] dělit na:

- *rozměrovou optimalizaci*², ve které se jako návrhové proměnné uvažují průřezové charakteristiky v případě prutových konstrukcí nebo tloušťky v případě plošných konstrukcí (obrázky 7.1a, 7.1b);
- *tvarovou optimalizaci*³, v rámci které se jako návrhová proměnná uvažuje tvar konstrukce např. ve smyslu náběhu u prutových konstrukcí, popř. proměnné tloušťky u plošných konstrukcí (obrázky 7.2a, 7.2b);
- *topologickou optimalizaci*⁴, která tvoří obecnou nadmnožinu výše uvedeným typům a jejíž cílem je nalezení optimálního konstrukčního systému pro přenesení uvažovaného zatížení (obrázky 7.3a, 7.3b).

Zmíněné typy úloh konstrukční optimalizace lze s ohledem na povahu návrhových proměnných zařadit pod oblast *geometrické optimalizace*. Výše zmíněné použití výkonných počítačů pro analýzu konstrukcí pomocí statických softwarových balíčků, v nichž jsou implementovány numerické algoritmy pro geometricky a materiálově nelineární úlohy rozšiřuje pole působnosti optimalizace do další sféry: *materiálové optimalizace*. V rámci této oblasti lze definovat úlohu:

- *identifikace parametrů materiálových modelů*, při níž jsou pomocí vhodných technik hledány předem neznámé hodnoty mechanicko-fyzikálních a dalších parametrů vystupujících v příslušných konstitutivních vztazích (obrázky 7.4a, 7.4b).

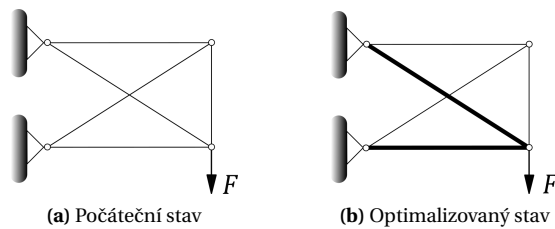
¹V angl. originále: *structural optimization*

²V angl. originále: *sizing optimization*

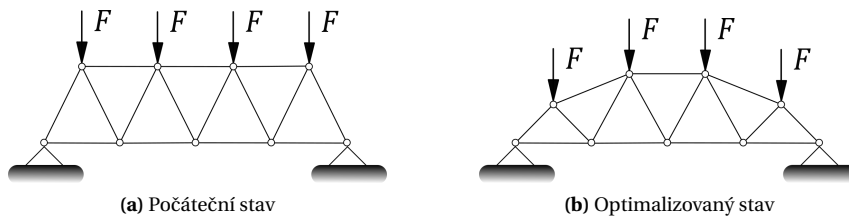
³V angl. originále: *shape optimization*

⁴V angl. originále: *topology optimization*

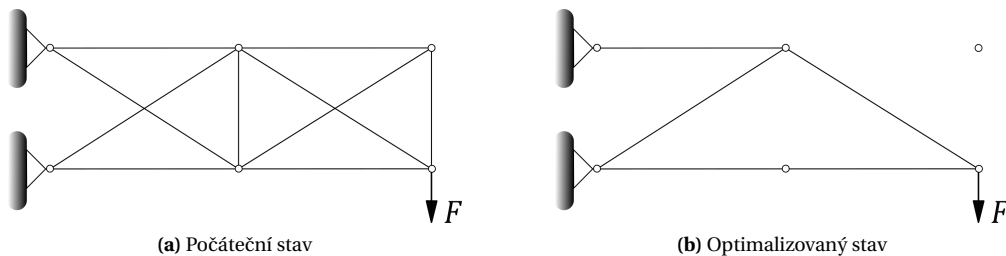
S ohledem na výše zavedené členění optimalizačních úloh uplatňujících se v rámci mechaniky stavebních konstrukcí jsou v textu této kapitoly řešeny kromě topologické optimalizace zbývající 2 typy optimalizačních úloh. Na jednotlivých příkladech je demonstrováno využití implementovaných algoritmů (PSOA & NMOA). V následující kapitole je s ohledem na cíle práce věnován prostor problematice identifikace parametrů dvou materiálových modelů: *Menetrey-Willam* z databáze *multiPlas* a *Kelvinova řetězce* implementovaného v rámci materiálové databáze solveru *FEM consulting, s.r.o.* (dostupné ve výpočtovém systému *Dlupal RFEM*). V rámci identifikace parametrů modelu *Menetrey-Willam* je navíc provedeno srovnání s výsledky dosažených pomocí genetického algoritmu dostupného ve výpočtovém systému *ANSYS*.



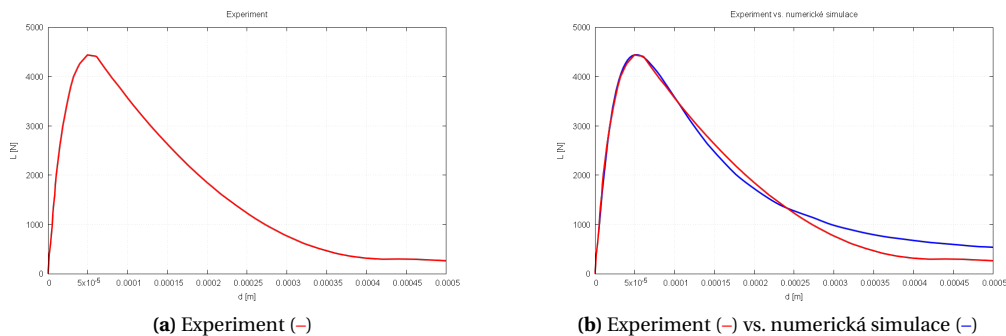
Obrázek 7.1: Příklad rozměrové optimalizace na příhradové konstrukci – adaptováno z [20]



Obrázek 7.2: Příklad tvarové optimalizace na příhradové konstrukci



Obrázek 7.3: Příklad topologické optimalizace na příhradové konstrukci – adaptováno z [20]

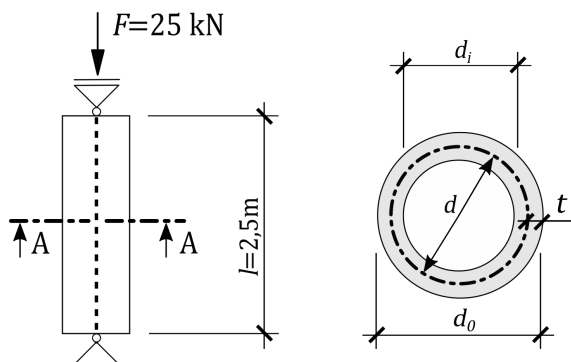


Obrázek 7.4: Výsledek identifikace parametrů materiálového modelu pomocí optimalizace

7.2 Rozměrová optimalizace

Při rozměrové optimalizaci prutových konstrukcí jsou jako návrhové proměnné uvažovány vlastní dimenze průřezů a případně tam, kde to umožňuje zadání úlohy, přímo průřezové charakteristiky. Rozměrová optimalizace plošných konstrukcí uvažuje jako návrhové proměnné tloušťky jednotlivých ploch. Pro demonstraci řešení rozměrové optimalizační úlohy a zároveň jako benchmark implementovaných algoritmů byla adaptována úloha z publikace [111], která vzhledem k dimenzi úlohy umožňuje analytické řešení.

Zadání bylo s ohledem na převod do jednotek SI modifikováno. Cílem bylo navržení prostě podepřeného sloupu stálého průřezu zatíženého tlakovou konstantní silou $F = 25$ kN, tak aby bylo dosaženo nejnížší ceny. Sloup byl uvažován z materiálu s modulem pružnosti $E = 85$ GPa, pevností v tlaku $f_c = 50$ MPa a objemovou hmotností $\rho = 2500$ kg · m³. Délka sloupu byla uvažována o velikosti $l = 2,5$ m. Vnesené napětí mělo být menší než pevnost materiálu a zároveň menší než Eulerovo kritické napětí ve vzpěru σ_{cr} . Jako návrhové proměnné byly uvažovány střední průměr průřezu d v intervalu od 0,02 m do 0,14 m a polovina tloušťky průřezu t v intervalu od 0,002 m do 0,008 m. Minimalizovat se měla účelová funkce ve tvaru $5W + 200d$, kde W je hmotnost sloupu v kg a d je výše zmíněný střední průměr průřezu. Podoba optimalizované konstrukce je znázorněna na obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: Geometrie optimalizovaného sloupu

Zadanou účelovou funkci lze matematicky zapsat následujícím způsobem

$$\min f(\mathbf{X}) = 5W + 200d = 5\rho l\pi dt + 200d, \quad (7.1)$$

kde

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} d \\ t \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

s ohledem na omezující podmínky

$$g_1(\mathbf{X}) = \sigma - f_c \leq 0, \quad (7.3)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = \sigma - \sigma_{cr} \leq 0, \quad (7.4)$$

$$g_3(\mathbf{X}) = 0,02 - d \leq 0, \quad (7.5)$$

$$g_4(\mathbf{X}) = d - 0,14 \leq 0, \quad (7.6)$$

$$g_5(\mathbf{X}) = 0,002 - t \leq 0, \quad (7.7)$$

$$g_6(\mathbf{X}) = t - 0,008 \leq 0, \quad (7.8)$$

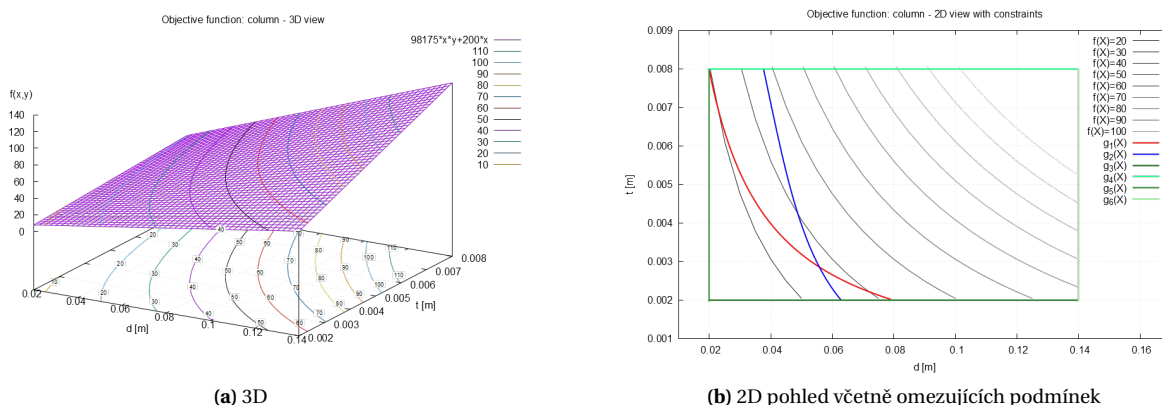
Řešení úlohy bylo z důvodu verifikačního charakteru provedeno nejprve analyticky a následně s pomocí obou implementovaných algoritmů NMOA a PSOA, přičemž v případě optimalizace hejnem částic byly uvažovány návrhové proměnné na zadaných intervalech jak se spojitým \mathbf{X}^c , tak s diskrétním charakterem \mathbf{X}^d . Pro účely testování algoritmu bylo řešení provedeno ve dvou variantách a to jako *neomezený problém* (uvažovány byly jen limity intervalů návrhových proměnných – rovnice (7.5)-(7.8)) a dále jako *omezený problém* (uvažovány byly všechny omezující podmínky – rovnice (7.3)-(7.8)).

7.2.1 Analytické řešení

Pro účely analytického řešení byla účelová funkce v rovnici (7.1) upravena dosazením známých hodnot materiálových a geometrických charakteristik na tvar

$$\min f(\mathbf{X}) = 98,175 \cdot 10^3 dt + 200d \quad (7.9)$$

Grafická podoba účelové funkce je zobrazena na obrázcích 7.6a a 7.6b, z nichž je patrná poloha globálních minim. V případě *neomezeného problému* je řešení polohy globálního minima triviální a to se nachází v bodě $\mathbf{X}_{GB} = (0,02; 0,002)^T$ a jeho hodnota je $f(\mathbf{X}_{GB}) = 7,927$. V případě *omezeného problému* leží globální minimum v průsečíku hraničních křivek nerovností (7.3) a (7.4).



Obrázek 7.6: Tvar definované účelové funkce pro optimalizaci průřezu sloupu

Pro vyřešení polohy globálního minima omezeného problému bylo zapotřebí upravit nerovnice (7.3) a (7.4) dosazením na tvar⁵

$$g_1(\mathbf{X}) = \frac{25 \cdot 10^3}{A} - 50 \cdot 10^6 = \frac{25 \cdot 10^3}{\pi dt} - 50 \cdot 10^6 \leq 0 \quad (7.10)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = \frac{25 \cdot 10^3}{A} - \frac{\pi^2 EI}{l_{cr}^2 A} = \frac{25 \cdot 10^3}{A} - \frac{\pi^2 \cdot 85 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi}{8} (d^2 + t^2) dt}{l_{cr}^2 \pi dt} = \frac{25 \cdot 10^3}{\pi dt} - \frac{\pi^2 \cdot 85 \cdot 10^9 \cdot (d^2 + t^2)}{8 l_{cr}^2} \leq 0, \quad (7.11)$$

kde vzhledem k prostému podepření $l_{cr} = l = 2,5$ m. Jednoduchou úpravou vztahu (7.10) byla získána rovnice hraniční křivky (v obrázku 7.6b je znázorněna červeně)

$$dt = \frac{25 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6 \pi} = 1,591549431 \cdot 10^{-4} \quad (7.12)$$

Analogickými úpravami byla získána rovnice (v obrázku 7.6b je znázorněna modře) z omezující podmínky (7.11) ve tvaru

$$dt(d^2 + t^2) = \frac{1,25 \cdot 10^6}{\pi^3 85 \cdot 10^9} = 4,742872711 \cdot 10^{-7} \quad (7.13)$$

⁵Vzhledem k tomu, že byl zadán průměr střednice d a polovina tloušťky t bylo možné výslednou plochu průřezu určit následovně

$$A = \frac{\pi d_o^2}{4} - \frac{\pi d_i^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} (d_o + d_i)(d_o - d_i) = \frac{\pi}{4} (d + t + d - t)(d + t - d + t) = \pi dt$$

a pro moment setrvačnosti bylo možno odvodit vztah

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (d_o^2 + d_i^2)(d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{64} (d_o^2 + d_i^2)(d_o + d_i)(d_o - d_i) = \frac{\pi}{64} ((d - t)^2 + (d + t)^2)(d - t + d + t)(d - t + d + t) = \\ &= \frac{\pi}{64} (d^2 - 2dt + t^2 + d^2 + 2dt + t^2) 2d2t = \frac{\pi}{8} (d^2 + t^2) dt \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic (7.12) a (7.13) byly získány celkem 4 řešení: $\mathbf{X}_1 = (-0,0545116; -0,00291965)^T$, $\mathbf{X}_2 = (-0,00291965; -0,0545116)^T$, $\mathbf{X}_3 = (0,00291965; 0,0545116)^T$ a $\mathbf{X}_4 = (0,0545116; 0,00291965)^T$, z nichž právě 4. představuje platné řešení v mezích návrhových proměnných a hledané globální minimum

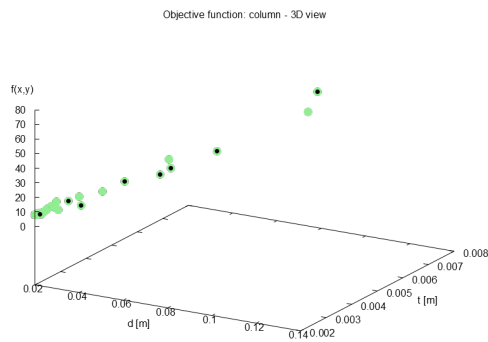
$$\mathbf{X}_{GB} = \mathbf{X}_4 = (0,0545116; 0,00291965)^T,$$

ve kterém je hodnota účelové funkce rovna $f(\mathbf{X}_{GB}) = 26,5273418$.

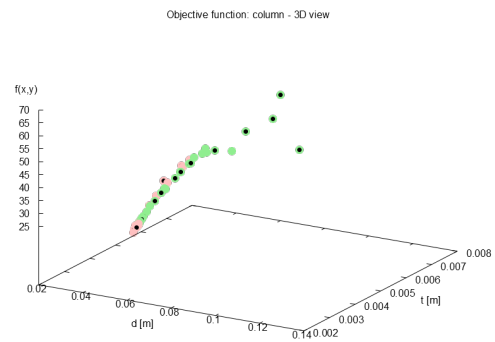
7.2.2 Numerické řešení algoritmem NMOA

Optimalizace průřezu tlačného sloupu algoritmem NMOA byla z důvodu řešení *neomezeného* a *omezeného* problému provedena pro celkem 150 iterací, přičemž v případě *neomezeného* problému, který je z hlediska řešení obecně jednodušší bylo pro nalezení minima zapotřebí výrazně méně iterací než v případě náročnějšího *omezeného* problému. Vzhledem ke stupni implementace bylo úloha řešena pouze pro spojitý charakter parametru v mezích zadaných intervalů návrhových proměnných.

Na níže uvedených obrázcích 7.7a a 7.7b je pro oba typy problémů patrná relativně vysoká rychlost konvergence do oblasti globálního minima. V obou případech řešených problémů bylo za optimální řešení považováno to, jehož bylo dosaženo v poslední 150. iteraci, nicméně v případě *neomezeného* problému bylo přijatelné řešení nalezeno už okolo 70. iterace avšak v případě problému se zadanými omezeními pevnosti v tlaku a ve vzpěru bylo přijatelných výsledků dosaženo až po 110 iteracích.



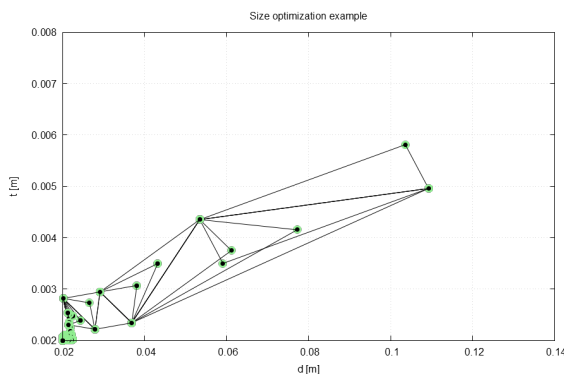
(a) neomezený problém (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš.)



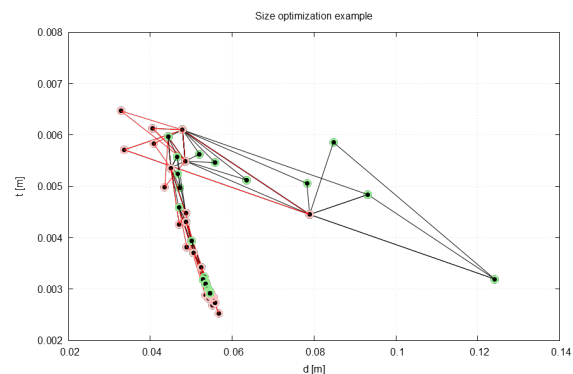
(b) omezený problém (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.7: Vývoj účelové funkce při rozměrové opt. sloupu (par.: \mathbf{X}^c , it.: 150)

Postupný vývoj simplexu (cesty algoritmu návrhovým prostorem), ze kterého je patrné respektování zadaných intervalů návrhových proměnných a především dodržení omezujících podmínek (7.12) a (7.13) je zobrazen na obrázku 7.8a.



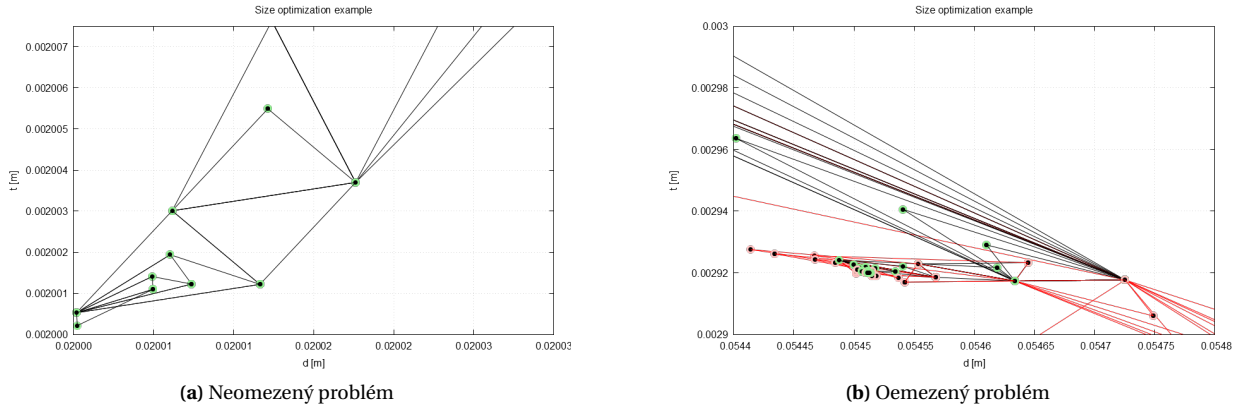
(a) Neomezený problém



(b) Omezený problém

Obrázek 7.8: Vývoj simplexu v průběhu opt. sloupu alg. NMOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 150)

V grafech na obrázcích 7.9a a 7.9b je na závěr zobrazen detail oblasti globálních minim jednotlivých problémů, přičemž červené čáry na obrázku 7.9b zobrazují nepřijatelná řešení nevyhovující zadaným podmínkám. Na všech uvedených obrázcích lze velmi názorně vidět, že v případě dvou návrhových proměnných má simplex tvar trojúhelníku a jednotlivé operace algoritmu popsané v kapitole 5.3.2.1 (reflexe, expanze, kontrakce) lze dobře identifikovat.



Obrázek 7.9: Vývoj simplexu v průběhu opt. sloupu alg. NMOA v oblasti glob. min. (par.: X^c , it.: 150)

Přesnost algoritmu a dosažené výsledky jsou na závěr dokumentovány v tabulce 7.1 pro případ *neomezeného* problému a v tabulce 7.2 pro *omezený* problém.

Tabulka 7.1: Výsledky opt. sloupu alg. NMOA na *neomezeném* problému

char. parametru	nastavení	X	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
X^c	iterace: 150	0,0200000000005198 0,00200000000005116	7,92700000030647	$3,06470 \cdot 10^{-10}$	$3,86615 \cdot 10^{-9}$

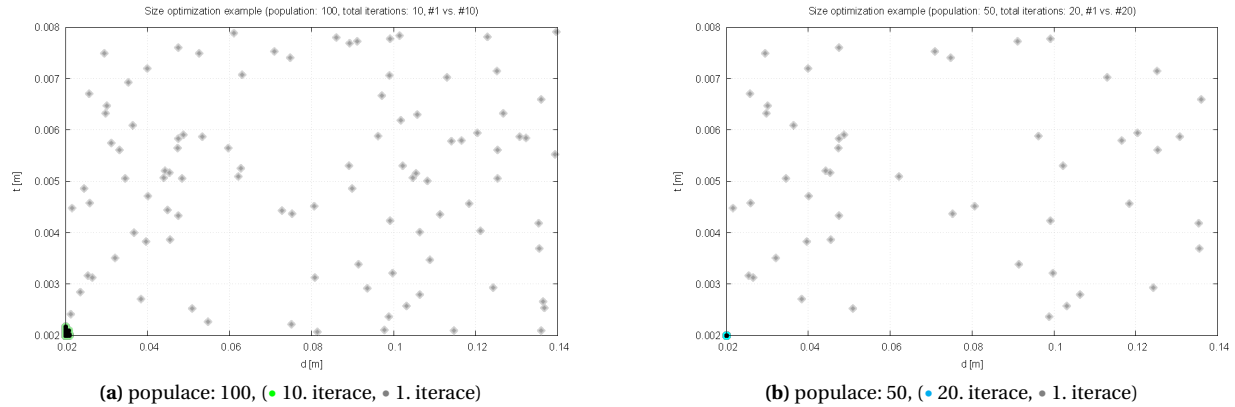
Tabulka 7.2: Výsledky opt. sloupu alg. NMOA na *omezeném* problému

char. parametru	nastavení	X	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
X^c	iterace: 150	0,0545115650 0,0029196552	26,527352560	$1,07600 \cdot 10^{-5}$	$4,05619 \cdot 10^{-9}$

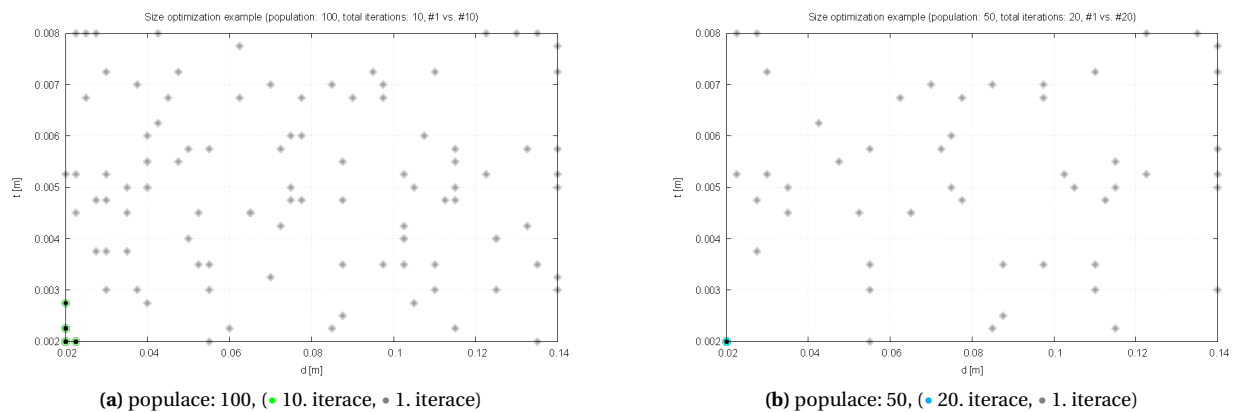
Z výsledků optimalizace dosažených pomocí algoritmu NMOA lze usuzovat na dobrou použitelnost pro problémy konstrukční optimalizace, nicméně z podstaty algoritmu je jasné, že není vhodný pro úlohy s výrazně nespojitým prostorem návrhových proměnných nebo pro úlohy s větším množstvím lokálních minim, v nichž by mohl mít tendenci uvíznout. S ohledem na tyto skutečnosti lze algoritmus doporučit pro dopřesnění jiných metod optimalizačních metod, které jsou v případě hledání přesného řešení výpočetně náročné. Použití algoritmu NMOA v kombinaci s jiným algoritmem může přispět ke snížení počtu nutných iterací a zároveň k eliminaci rizika uvíznutí v lokálním minimu.

7.2.3 Numerické řešení algoritmem PSOA

Optimalizace průřezu tlačného sloupu pomocí algoritmu PSOA pro oba zvolené typy optimalizačních problémů byla provedena pro 2 základní nastavení. V obou případech bylo provedeno celkem 1000 výpočtů, přičemž nejprve byla uvažována populace o velikosti 100 částic při 10 iteracích a následně populace o velikosti 50 částic s celkem 20 iteracemi. Z níže uvedených obrázků 7.10a a 7.10b resp. 7.11a a 7.11b, na nichž je zachyceno srovnání polohy částic v 1. a poslední iteraci je patrné, že nalezení triviálního řešení *neomezeného problému* bylo dosaženo pro obě nastavení a zároveň jak pro spojitý, tak diskrétní charakter parametru.



Obrázek 7.10: Srovnání vývoje populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^c)



Obrázek 7.11: Srovnání vývoje populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^d)

Při spojitým charakteru parametrů bylo globální minimum nalezeno v obou variantách shodně v poslední iteraci. Rozdíl mezi nastaveními algoritmu byl však patrný v rozptýlení částic poslední iterace od polohy globálního minima, charakterizovaném průměrnou vzdáleností

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n}, \quad (7.14)$$

kde n je počet přípustných řešení a

$$r_i = \sqrt{\Delta_{d,i}^2 + \Delta_{t,i}^2} = \sqrt{(d_i - d_{GB})^2 + (t_i - t_{GB})^2} \quad (7.15)$$

Kdy ve variantě s plnou populací dosáhla tato průměrná vzdálenost velikosti $\bar{r} = 1,06249 \cdot 10^{-4}$, kdežto v případě varianty s poloviční populací byla průměrná vzdálenost od polohy globálního minima o velikosti $\bar{r} = 3,94746 \cdot 10^{-8}$.

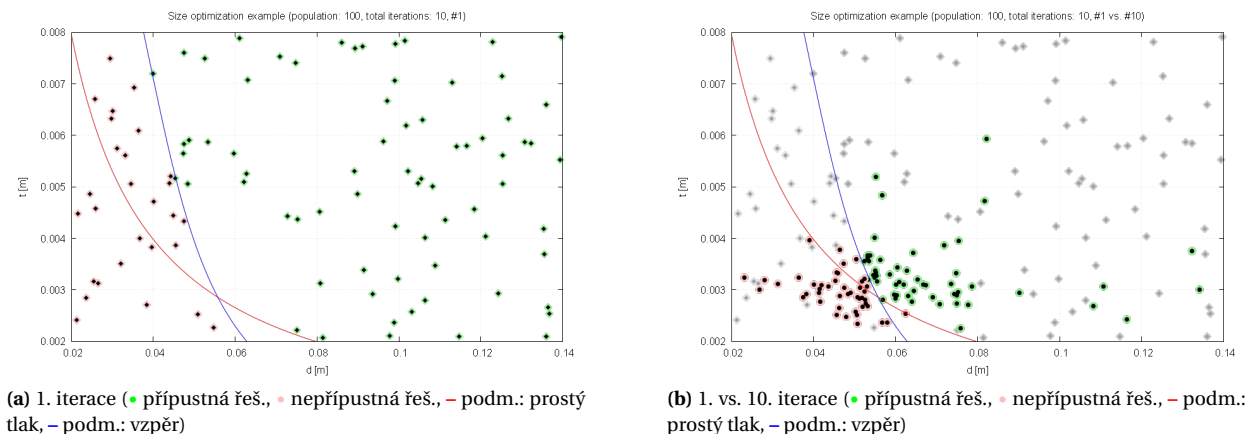
Výsledky optimalizace při uvažování diskrétního charakteru parametrů vykazovaly podobnou ten-

denci, ale nalezení globálního minima pro plnou populaci částic bylo dosaženo už ve 4. iteraci a ve variantě s poloviční populací až v 5. iteraci. Nicméně z hlediska rozptylu částic v poslední iteraci od polohy globálního minima lze konstatovat, že v případě plné populace se přímo v poloze globálního minima nacházelo 86 % částic s průměrnou vzdáleností od polohy globálního minima o velikosti $\bar{r} = 1,3 \cdot 10^{-4}$. Ve variantě s poloviční populací se přímo v poloze globálního minima nacházelo 100 % částic. Dosažené výsledky pro řešení *neomezeného problému* jsou na závěr shrnuty v následující tabulce 7.3.

Tabulka 7.3: Výsledky opt. průřezu sloupu alg. PSOA na *neomezeném problému*

char. parametru	nastavení	X	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
X^c	populace: 100, iterace: 10	0,0200024585 0,0020000141	7,9280022020	0,0010022020	0,013
X^c	populace: 50, iterace: 20	0,0200000009 0,0020000001	7,9270006618	0,0000006618	$8,35 \cdot 10^{-6}$
X^d	populace: 100, iterace: 10	0,02 0,002	0,0	0,0	-
X^d	populace: 50, iterace: 20	0,02 0,002	0,0	0,0	-

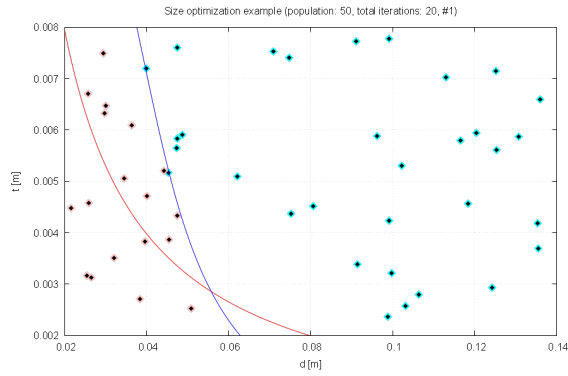
V rámci řešení *omezeného problému*, tedy při uvažování přípustných řešení dle požadavku na dodržení pevnosti v tlaku a ve vzpěru (nerovnice (7.3) a (7.4)), se projevilo očekávané zpomalení konvergence algoritmu. Z obrázků 7.12a, 7.12b, 7.13a a 7.13b resp. 7.14a, 7.14b, 7.15a a 7.15b, na nichž je zachyceno srovnání polohy částic v 1. a poslední iteraci je patrné, že nalezení globálního minima bylo dosaženo s přijatelnou přesností avšak ve všech případech s výrazně větším rozptylem částic hejna.



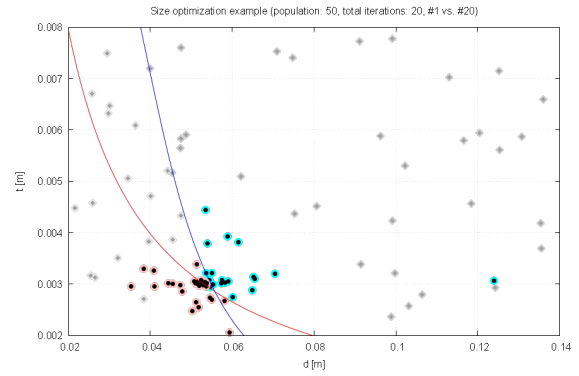
Obrázek 7.12: Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^c , it.: 10, pop.: 100)

V případě spojitého charakteru parametrů a ve variantě s plnou populací částic bylo minimum nalezeno v 8. iteraci, přičemž průměrná vzdálenost *přípustných řešení* od polohy globálního minima dosáhla velikosti $\bar{r} = 1,52441 \cdot 10^{-2}$. U varianty s poloviční velikostí populace bylo globální minimum nalezeno v 10. iteraci a průměrná vzdálenost dosáhla v poslední iteraci dosáhly hodnoty $\bar{r} = 4,51600 \cdot 10^{-3}$.

Výsledky řešení s parametry diskrétního charakteru vykazují podobné vlastnosti jako ty se spojitým charakterem avšak pro obě varianty nastavení bylo globální minimum nalezeno už při inicializaci populace v 1. iteraci. Na vývoji hejna v průběhu iterací je z obrázků 7.14a, 7.14b, 7.15a, a 7.15b patrné shlukování částic v oblasti okolo globálního minima, přičemž ve variantě s plnou populací se v poloze nalezeného globálního minima nacházely celkem 2 částice a průměrná vzdálenost dosáhla hodnoty

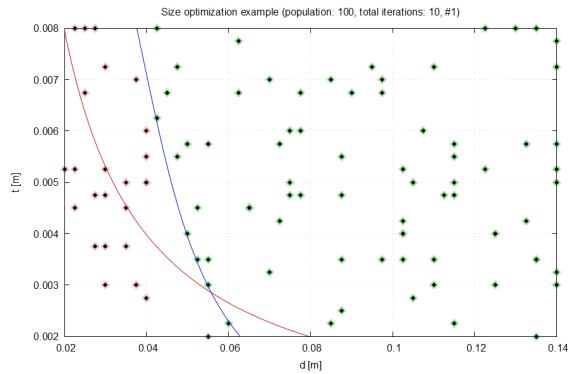


(a) 1. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)

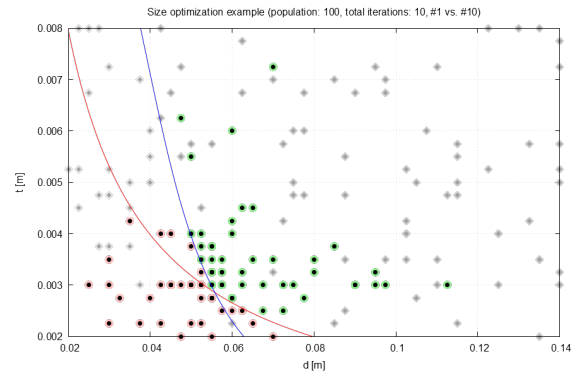


(b) 1. vs. 20. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)

Obrázek 7.13: Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^C , it.: 20, pop.: 50)

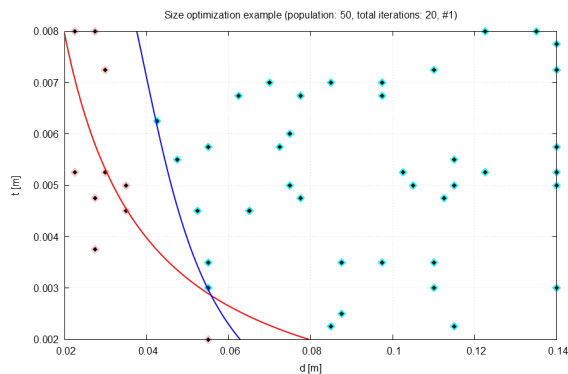


(a) 1. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)

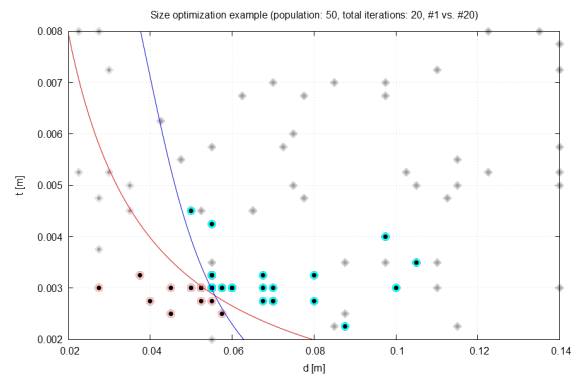


(b) 1. vs. 10. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)

Obrázek 7.14: Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^d , it.: 10, pop.: 100)



(a) 1. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)



(b) 1. vs. 20. iterace (• přípustná řeš., • nepřípustná řeš., - podm.: prostý tlak, - podm.: vzpěr)

Obrázek 7.15: Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: X^d , it.: 20, pop.: 50)

$\bar{r} = 1,10405 \cdot 10^{-2}$ a při poloviční populaci se v poloze globálního minima nacházelo celkem 11 částic s průměrnou vzdáleností přípustných řešení od polohy globálního minima o velikosti $\bar{r} = 9,67730 \cdot 10^{-3}$. Kompletní přehled dosažených výsledků pro řešení *omezeného problému* je na závěr uveden v následující tabulce 7.4.

Tabulka 7.4: Výsledky opt. sloupu alg. PSOA na *omezeném problému*

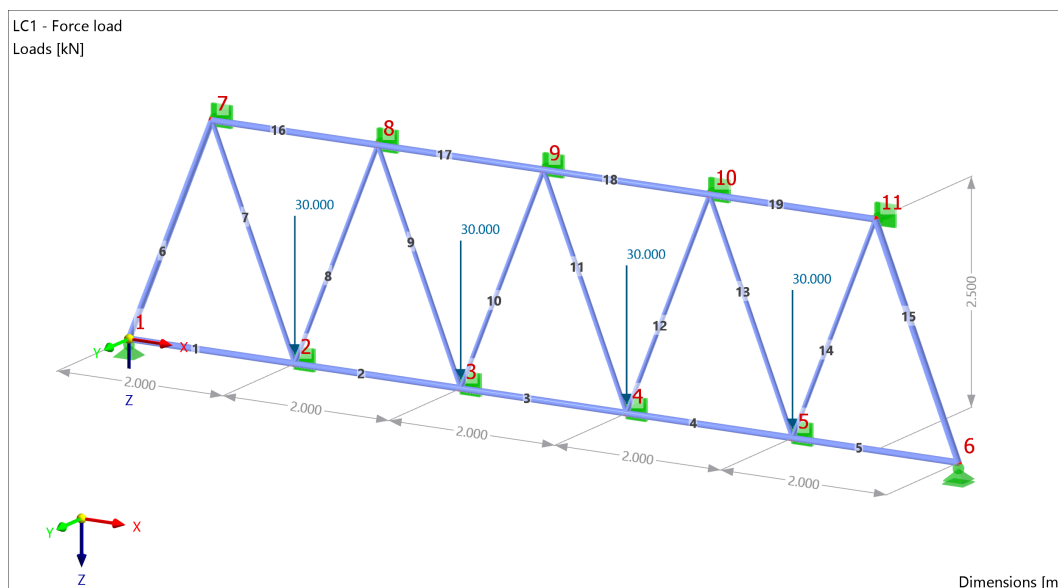
char. parametru	nastavení	\mathbf{X}	$f_{g,min}^{PSOA}$ [-]	$ \Delta $ [-]	$ \delta $ [%]
\mathbf{X}^c	populace: 100, iterace: 10	0,0544756342 0,0029878932	26,8748139576	0,3474721576	1,293
\mathbf{X}^c	populace: 50, iterace: 20	0,0545216581 0,0029370988	26,6256342190	0,0982924190	0,369
\mathbf{X}^d	populace: 100, iterace: 10	0,055 0,003	27,198875	0,6715332	2,469
\mathbf{X}^d	populace: 50, iterace: 20	0,055 0,003	27,198875	0,6715332	2,469

Z uvedených výsledků optimalizace průřezu tlačенého sloupu lze konstatovat, že implementace algoritmu PSOA je provedena korektně. Ve všech případech bylo s velmi uspokojivou přesností dosaženo globálního minima (max. odchylka 1,293 % pro spojité parametry a 2,469 % pro diskrétní parametry), přičemž ve variantách s poloviční velikostí populace bylo řešení dle průměrné vzdálenosti \bar{r} od polohy globálního minima o řád přesnější. V případě optimalizace omezeného problému s diskrétním charakterem parametru bylo vzhledem k perzistenci náhodnosti inicializace počáteční populace nalezeno minimum už v rámci této 1. iterace. Přestože se jedná o relativně jednoduchý příklad dvoudimenzionální rozměrové optimalizace, lze dle výsledků usuzovat na vhodnost použití algoritmu PSOA na daný typ úloh.

7.3 Tvarová optimalizace

V rámci tvarové optimalizace konstrukcí jsou návrhové proměnné geometrické veličiny definující nějakým způsobem tvar konstrukce. V případě prutových konstrukcí se jedná o jednotlivé souřadnice styčniců v rovině či prostoru anebo polohy uzlů definujících změnu příčného řezu nábehových prutů. U plošných konstrukcí to pak mohou být parametry definující vnější tvar plošné konstrukce anebo tloušťky, popř. polohy uzlů, ve kterých mění plocha svou tloušťku. Pro tělesové konstrukce lze za návrhové proměnné považovat parametry definující vnější tvar optimalizovaného tělesa. Mezi tvarovou a rozměrovou optimalizací, jejíž řešení bylo demonstrováno v přecházející části, existuje z pohledu praktického použití úzká vazba. Sloučení obou variant do jedné však zvyšuje náročnost výpočtu a klade specifické požadavky na použitý optimalizační algoritmus. Například v případě optimalizace staticky neurčité prutové konstrukce s omezujícími podmínkami na napětí v prutech dochází změnou profilu k přerozdělení vnitřních sil v konstrukci, což značně komplikuje analytický výpočet. Jedním z řešení je použití některého z meta-heuristických optimalizačních algoritmů. Jako ukázka zmíněného způsobu řešení a zároveň jako demonstrace autorem implementovaného optimalizačního modulu v systému *RFEM 6*, byla adaptována následující úloha optimalizace prutové konstrukce.

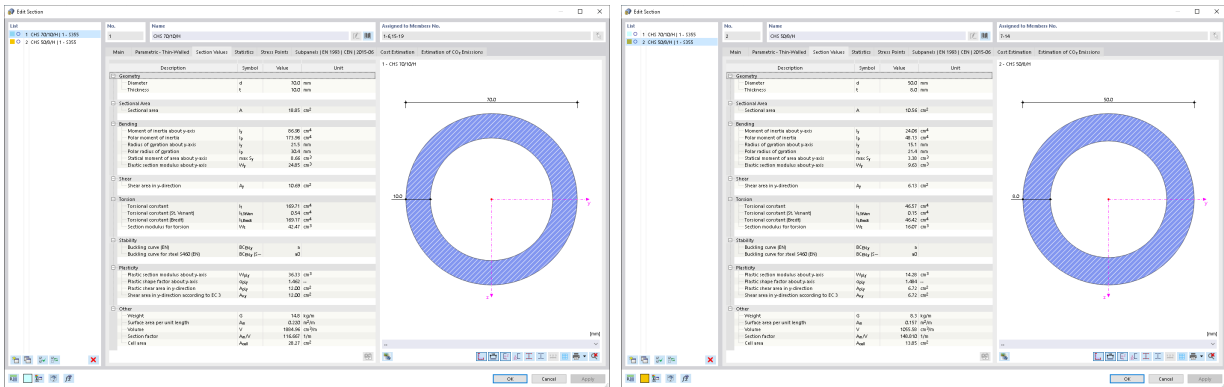
Prutová konstrukce nosníku ve výchozí geometrii dle obrázku 7.16 měla celkovou délku 10 m a výšku 2,5 m. Všechny pruty byly uvažovány z oceli pevnostní třídy S355 s modulem pružnosti $E_s = 210$ GPa. S ohledem na možnosti výpočtového systému *RFEM* byly průřezy uvažovány nejprve jako parametrické tenkostěnné profily definované pomocí vnějšího průměru a tloušťky stěny, poté jako tenkostěnné válcované trubky z výrobní řady CHS, která je součástí databáze profilů v programu. V případě parametrického zadání byly na počátku průřezy horního pásu, dolního pásu a krajních diagonál uvažovány z trubek o průměru $d_1 = 70$ mm a tloušťce $t_1 = 10$ mm. Průřezy vnitřních diagonál byly uvažovány z trubek s největším průměrem $d_2 = 50$ mm a tloušťkou $t_2 = 8$ mm. V případě využití profilů z programové databáze byly profily pásů a krajních diagonál uvažovány z trubek CHS 80/2 a profily diagonál z trubek CHS 54/2. Nastavení uvedených počátečních hodnot v systému *RFEM* jsou dokumentovány na obrázcích 7.17a a 7.17b. Zatížení bylo modelováno pomocí 4 koncentrovaných svislých sil $F = 30$ kN ve vnitřních uzlech



Obrázek 7.16: Počáteční geometrie v *RFEM*

dolního pásu konstrukce. Podepření bylo s ohledem na prostorovou podobu úlohy realizováno v krajních uzlech dolního pásu jako prosté, nicméně vzhledem k eliminaci nežádoucího vybočení v příčném směru byly ostatní uzly konstrukce zajištěny proti posunu ve směru globální osy Y (viz souřadný systém na obrázku 7.16). Úloha byla definována jako minimalizace hmotnosti konstrukce při splnění posudků návrhové situace na mezní stav únosnosti dle normy EN 1990 [127]. Vyhodnocení posudků bylo prováděno interně v programu *RFEM* pomocí příslušného modulu. Výše popsané zatížení bylo v rámci

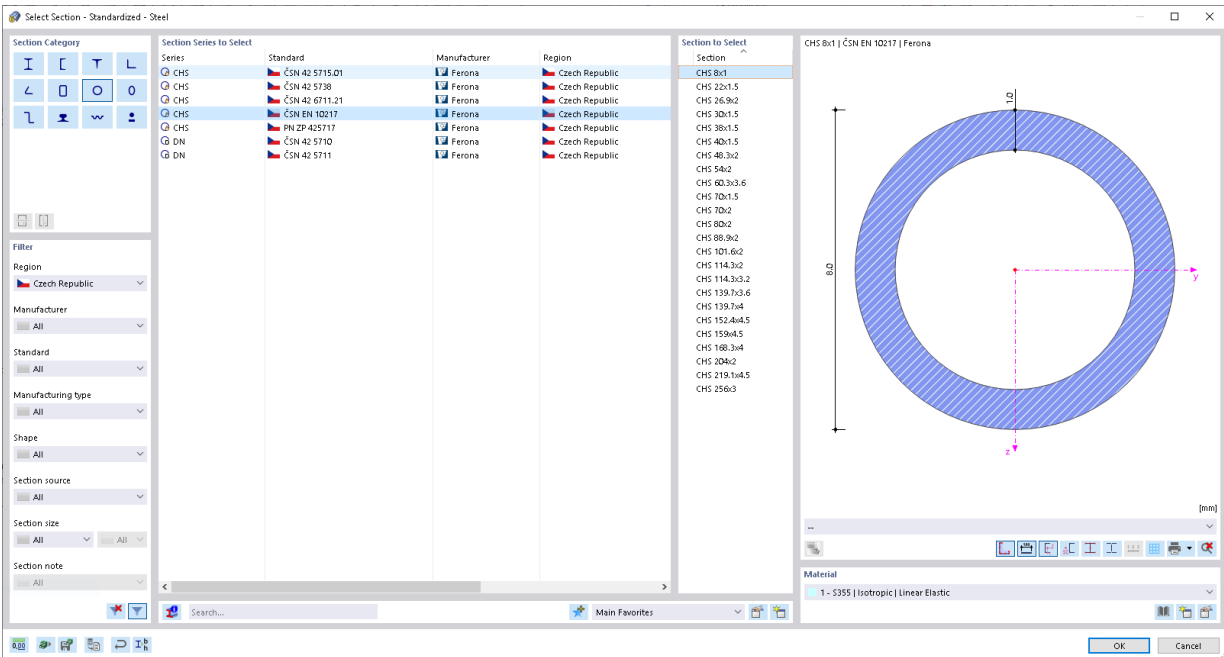
návrhové situace uvažováno jako stálé s dílčím součinitelem spolehlivosti $\gamma_f = 1,35$. Jako návrhové proměnné byly uvažovány svislá souřadnice z_1 krajních uzlů horního pásu č. 7,11 a svislá souřadnice z_2 uzlů č. 8,10 v mezích od 0,1 m do 2,5 m. Z hlediska rozměrové optimalizace byly návrhovými proměnnými uvažovány průměr d_1 a tloušťka t_1 profilu horního pásu, dolního pásu a krajních diagonál a průměr d_2 resp. tloušťka t_2 profilu vnitřních diagonál. V případě varianty s profily vybíranými z databáze byly uvažovány dvě návrhové proměnné diskrétního charakteru typu průřez X_1^S a X_2^S , přičemž skladba uvažované výrobní řady je dokumentována na obrázku 7.18. Příslušné meze uvažovaných návrhových proměnných jsou shrnuty v tabulce na obrázku 7.19



(a) Počáteční průřez horního a dolního pásu

(b) Počáteční průřez diagonál

Obrázek 7.17: Počáteční nastavení dimenzí průřezů v RFEM



Obrázek 7.18: Skladba řady profilů CHS dle ČSN EN 10217 v RFEM

Ze zmíněné tabulky je s ohledem na použití kroku patrné, že všechny návrhové proměnné byly uvažovány jako parametry s diskrétním charakterem. Výše popsaná optimalizační úloha lze tedy formálně zapsat jako

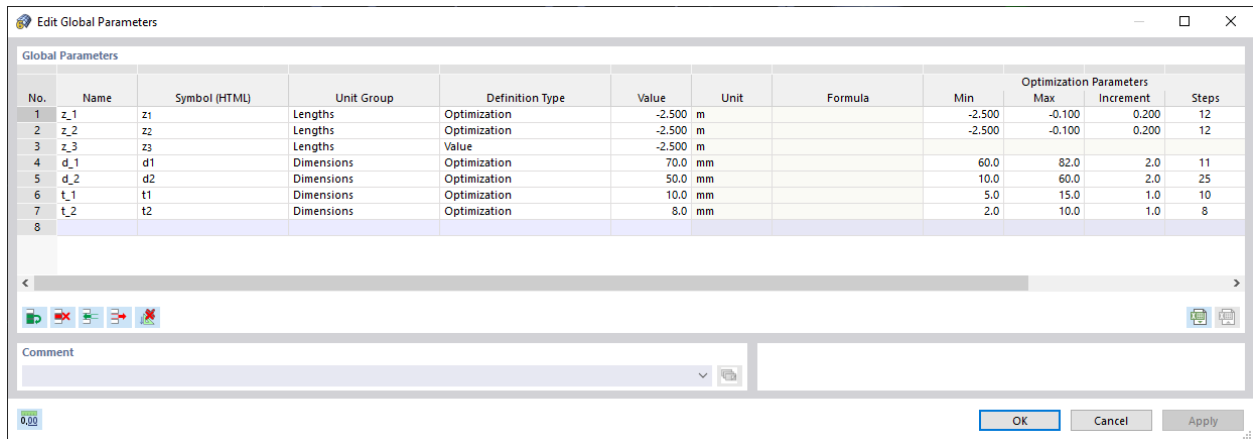
$$\min f(\mathbf{X}), \tag{7.16}$$

kde $f(\mathbf{X})$ je hmotnost konstrukce a

$$\mathbf{X} = \{z_1; z_2; d_1; t_1; d_2; t_2\}^T \tag{7.17}$$

resp. v případě použití výrobní řady

$$\mathbf{X} = \{z_1; z_2; X_1^S; X_2^S\}^T \tag{7.18}$$



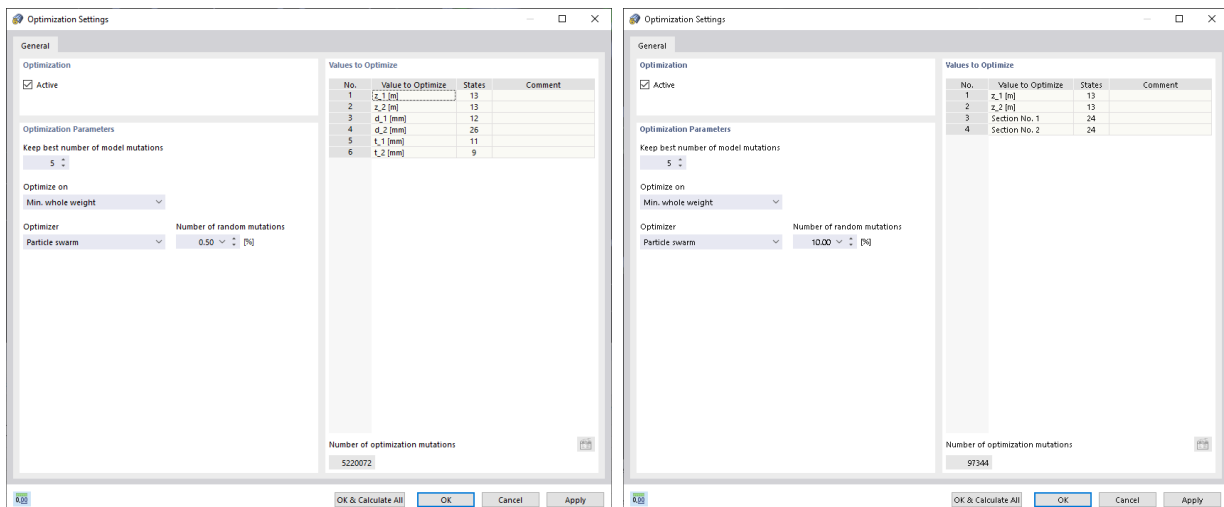
Obrázek 7.19: Nastavení návrhových proměnných v RFEM

Řešení optimalizační úlohy bylo provedeno přímo v prostředí RFEM s pomocí implementovaného algoritmu PSOA, přičemž návrhové proměnné byly uvažovány s diskrétním charakterem X^d a následně s diskrétním charakterem typu průřez X^s .

7.3.1 Numerické řešení algoritmem PSOA

S ohledem na verifikaci použitého algoritmu PSOA bylo řešení všech variant s odlišnými návrhovými proměnnými provedeno pro různé nastavení velikosti populace částic a počtu iterací. V optimalizačním modulu programu se nastavení počtu provedených simulací provádí určením počtu náhodných mutací z celkového počtu všech možných realizací. V případě řešené úlohy s diskrétními parametry definovanými pomocí kroku byl optimalizační výpočet proveden pro 0,5 % resp. 0,05 % mutací z celkového počtu 5220072 realizací, což představovalo 52 iterací algoritmu při populaci o velikosti 501 resp. 17 iterací s populací 153 částic.

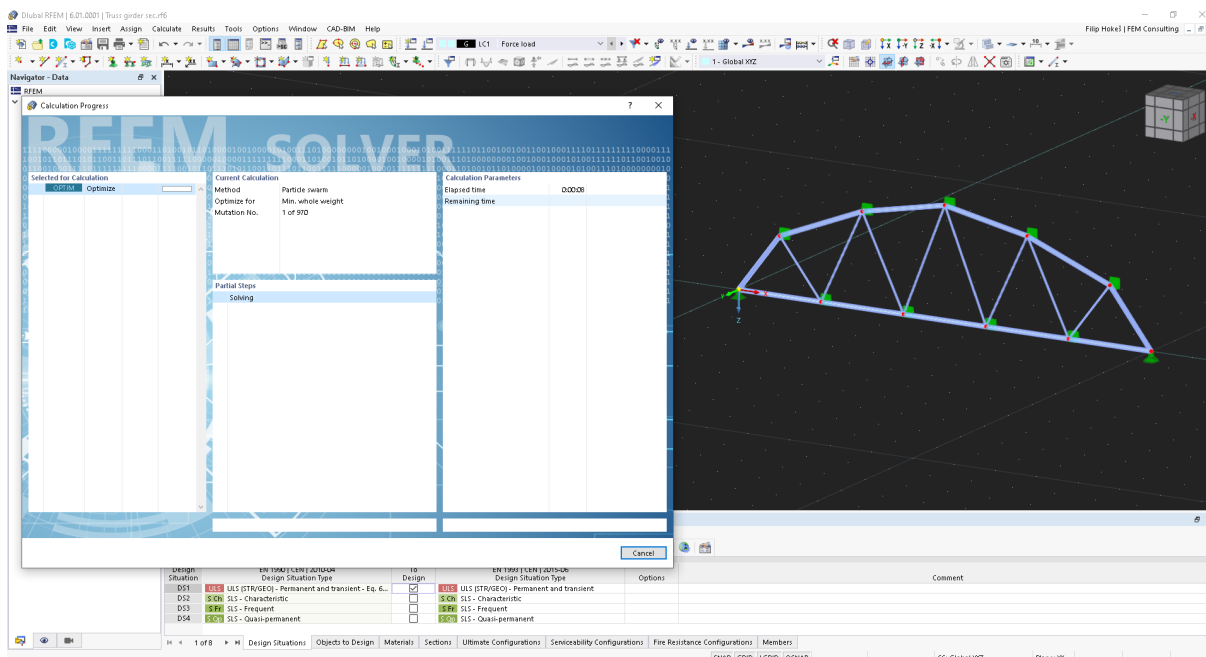
V případě kombinace diskretních a průřezových parametrů bylo celkové množství množných realizací rovno 97344, což by při požadavku na výpočet 0,5 % resp. 0,05 % ze všech mutací vedlo na nedostačujících 7 iterací resp. 3 iterace algoritmu. Proto byl optimalizační výpočet proveden pro 10 % mutací, čemuž odpovídalo 141 iterací s populací 69 částic resp. 10 iterací s populací 97 částic při výpočtu 1 % mutací. Dialogy dokumentující popsání zadání jsou zobrazeny na obrázcích 7.20a a 7.20b. Na obrázku 7.21 lze vidět dialog průběhu výpočtu včetně vizualizace aktuálně počítané varianty.



(a) Pouze diskretní parametry

(b) Diskretní parametry a parametry typu průřez

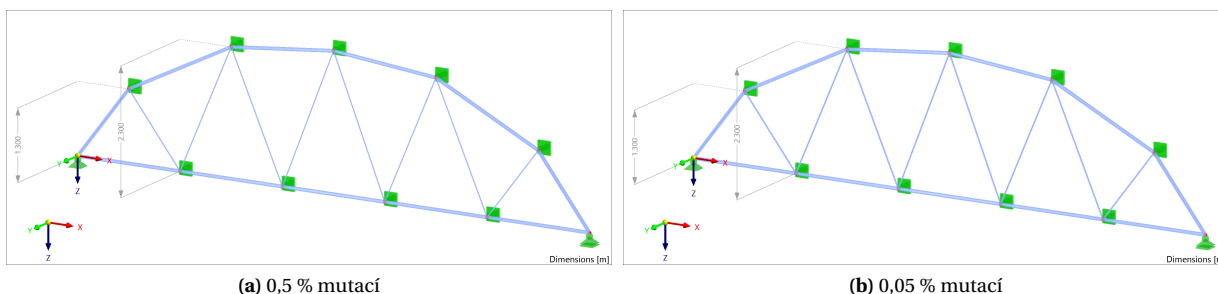
Obrázek 7.20: Nastavení optimalizace v RFEM



Obrázek 7.21: Vizualizace průběhu řešení optimalizace v RFEM

Výsledky – diskrétní charakter parametru X^d

Z hlediska optimalizace tvaru bylo při uvažování všech parametrů v diskrétní variantě nalezeno stejné optimální řešení v obou optimalizačních výpočtech. Výsledná geometrie konstrukce měla tvar horního pásu v podobě paraboly 2. stupně, což odpovídá charakteru zatížení. Optimální tvar získaný optimalizačním výpočtem 0,5 % resp. 0,05 % mutací je zobrazen na obrázcích 7.22a resp. 7.22b. Z pohledu roz-

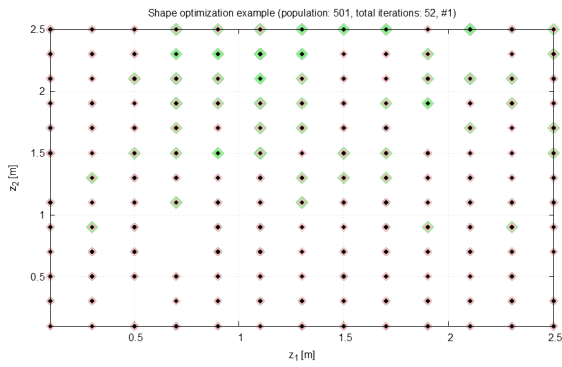


Obrázek 7.22: Optimální geometrie při diskrétním charakteru parametrů v RFEM

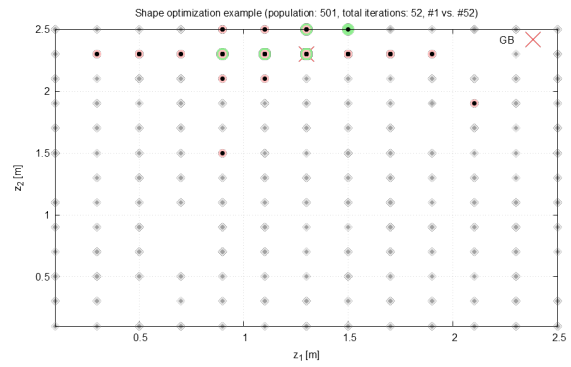
měrové optimalizace bylo v případě rozsáhlejšího výpočtu nalezeno řešení o celkové váze 178,685 kg s pruty horního pásu tvořeny trubkami s průměrem $d_1 = 64$ mm a tloušťkou $t_1 = 5$ mm a diagonálami z trubek o průměru $d_2 = 24$ mm a tloušťce $t_2 = 2$ mm. Při výpočtu desetinásobně menšího počtu mutací bylo z hlediska tvaru nalezeno optimální řešení o celkové váze 179,147 kg, přičemž pruty horního pásu byly tvořeny taktéž trubkami o průměru $d_1 = 64$ mm a tloušťce $t_1 = 5$ mm a pruty diagonál byly tvořeny trubkami s průměrem $d_2 = 18$ mm a tloušťkou stěny $t_2 = 3$ mm. Nalezení optimálnější varianty bylo umožněno lepším pokrytím návrhového prostoru větším množstvím částic a hlavně *trojnásobným počtem iterací*.

Dosažené výsledky a konvergence jsou, stejně jako v předcházející kapitole, dokumentovány rozložením částic v návrhovém prostoru, přičemž vzhledem k většímu množství návrhových proměnných jsou na obrázcích 7.23a-7.26a zobrazeny vždy jen geometricky související parametry. Z porovnání obrázků 7.23a, 7.24a, 7.25a a 7.26a, 7.27a, 7.28a lze potvrdit výše uvedené tvrzení o rovnoměrnosti pokrytí návrhového prostoru částicemi. Ze všech zmíněných grafů je z tvaru hejna patrné, že v poslední iteraci docházelo k jednoznačnému shlukování částic v okolí nalezeného globálního minima a to i přes poměrně velký počet nepřijatelných řešení vznikajících při nesplnění návrhových omezení, kterými byly v

daném případě normové posudky. Číselně lze pro vyjádření úspěšnosti algoritmu použít relativní hod-

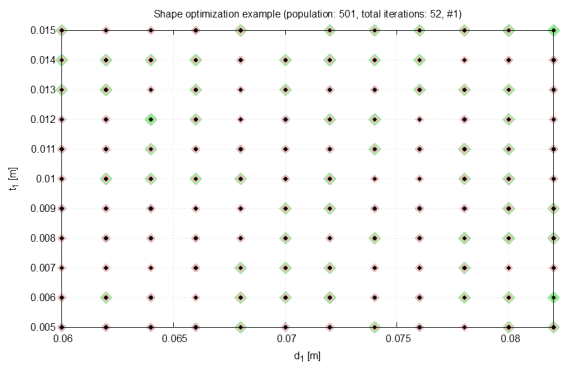


(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

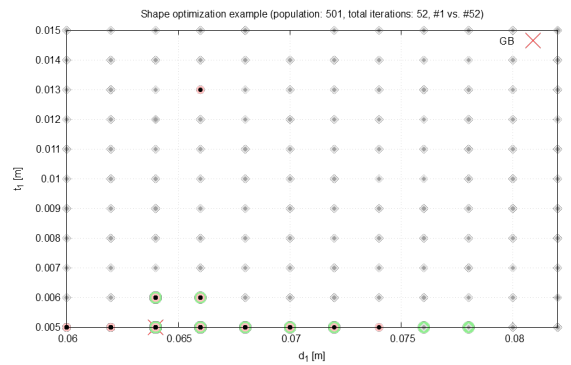


(b) 1. vs. 52. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.23: Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^c)

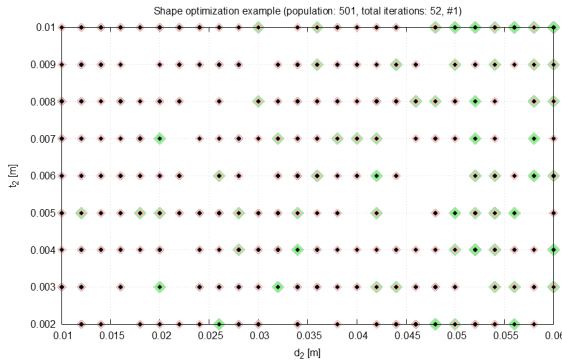


(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

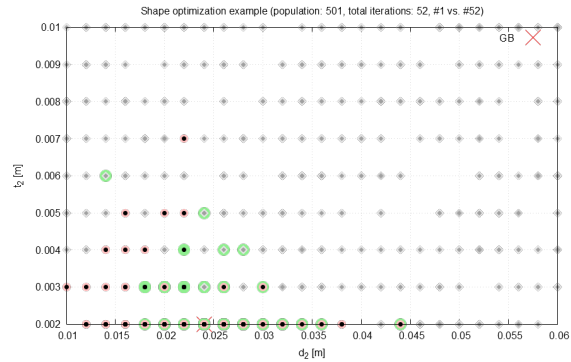


(b) 1. vs. 52. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.24: Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_1 - t_1$, par.: \mathbf{X}^d)



(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)



(b) 1. vs. 52. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.25: Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_2 - t_2$, par.: \mathbf{X}^d)

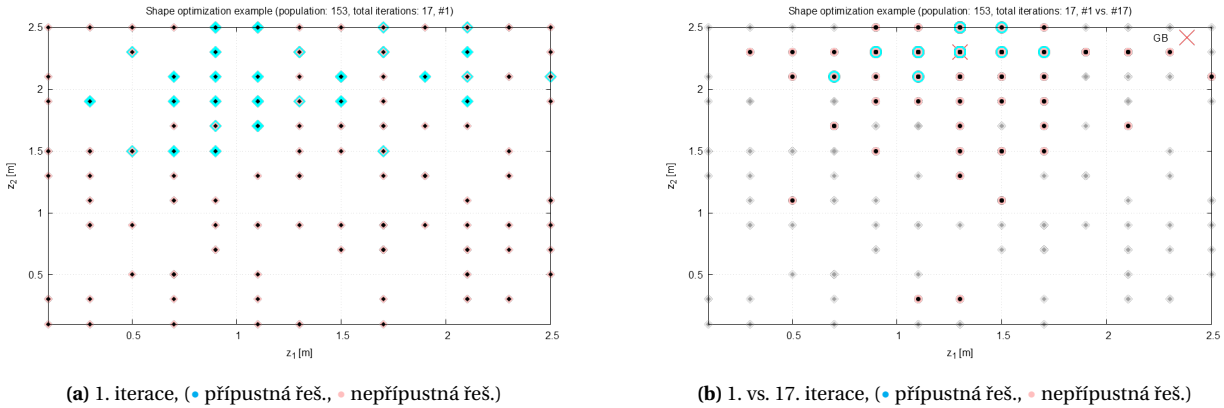
noty rozptylu $\bar{\rho}$ částic poslední iterace od polohy globálního minima, který lze definovat analogicky jako ve vztazích (7.14) a (7.15)

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{ij}}{n}, \quad (7.19)$$

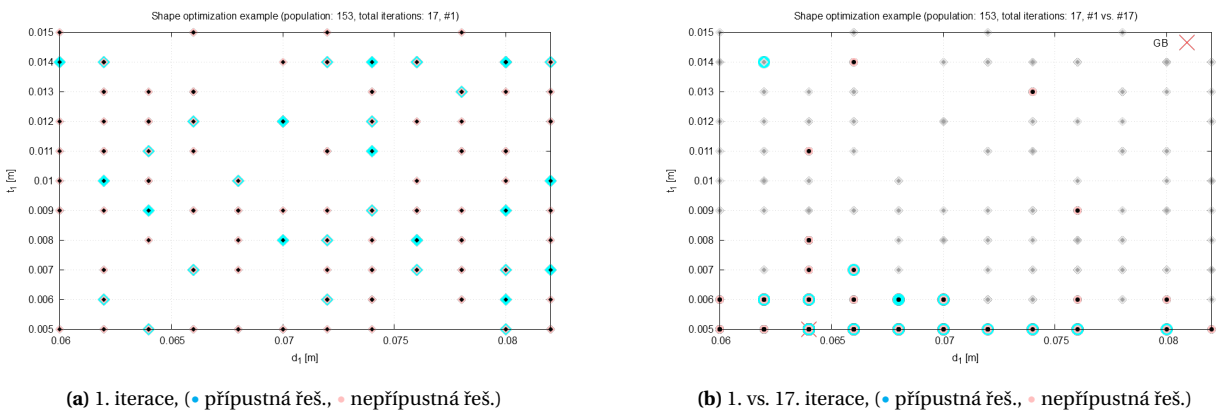
kde n je počet přípustných řešení a

$$\rho_{ij} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (\delta_{ij})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{X_{ij}}{X_{GB}} - 1 \right)^2} \quad (7.20)$$

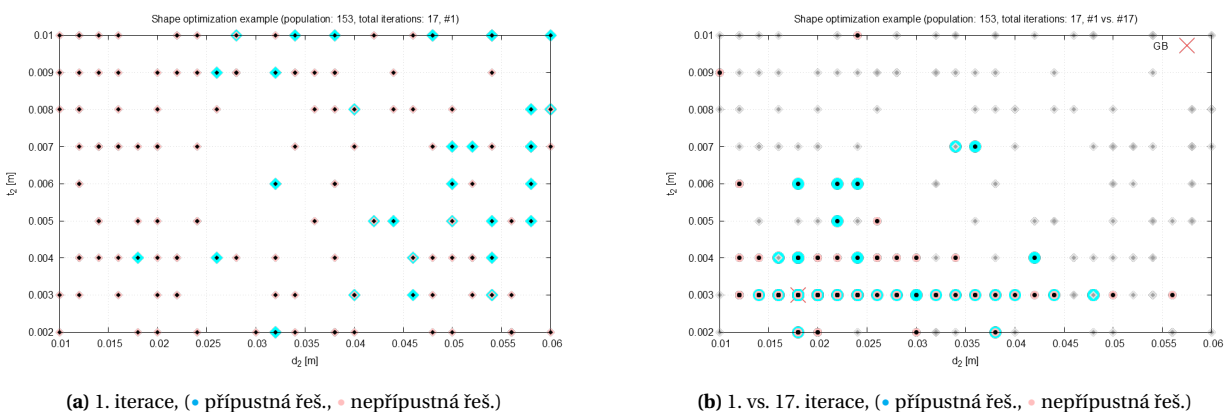
a kde m je počet návrhových proměnných v \mathbf{X} a za X_{GB} je uvažována hodnota parametru náležející variantě s nejnižší hodnotou účelové funkce, jelikož není v dané úloze známo přesné řešení. Hodnota tohoto rozptylu dosáhla ve variantě s 52 iteracemi a populací 501 částic hodnoty $\bar{\rho} = 0,08138$, zatímco ve variantě výpočtu se 17 iterací populace 153 částic byla hodnota výrazně vyšší a to o velikosti $\bar{\rho} = 0,59124$. Uvedená čísla ukazují, že pro nalezení optimální varianty je z hlediska nastavení algoritmu výhodnější zvyšování počtu iterací před neúměrným navyšováním velikosti populace. Tvrzení lze potvrdit porov-



Obrázek 7.26: Vývoje populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^c)



Obrázek 7.27: Vývoj populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_1 - t_1$, par.: \mathbf{X}^d)



Obrázek 7.28: Vývoj populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_2 - t_2$, par.: \mathbf{X}^d)

náním hodnot rozptylu nejen přípustných řešení, ale celé populace v poslední iteraci, kdy bylo při 52 iteracích dosaženo hodnoty $\bar{\rho}_{all} = 0,14794$, zatímco při 17 iteracích hodnoty $\bar{\rho}_{all} = 0,62654$.

Přehled nalezených řešení pro oba optimalizační výpočty včetně příslušných hodnot parametrů je zobrazen v tabulkách na obrázcích 7.29 a 7.30 pocházejících z GUI RFEM 6.

Order	Model Name	Whole weight [t]	Optimized Values							
			z_1 [m]	z_2 [m]	d_1 [mm]	d_2 [mm]	t_1 [mm]	t_2 [mm]		
1	Test.5752	0.179	-1.300	-2.300	64.0	24.0	5.0	2.0		
2	Test.7962	0.179	-1.300	-2.300	64.0	14.0	5.0	5.0		
3	Test.3135	0.179	-1.300	-2.300	64.0	18.0	5.0	3.0		
4	Test.3954	0.181	-1.300	-2.300	64.0	16.0	5.0	4.0		
5	Test.22394	0.181	-1.300	-2.300	64.0	14.0	5.0	6.0		

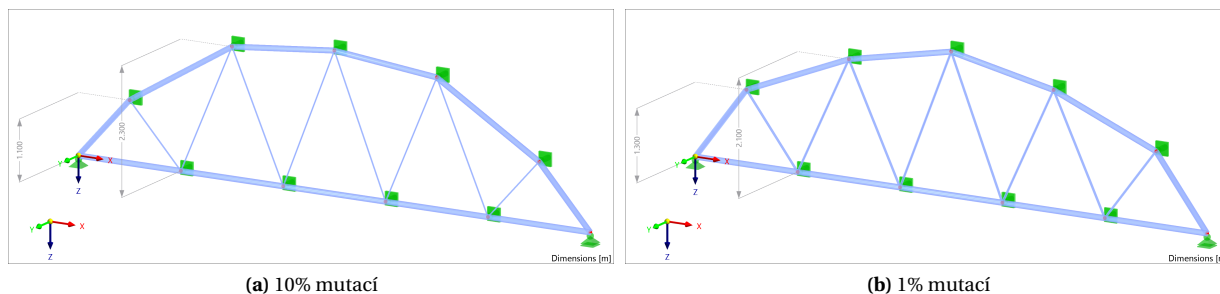
Obrázek 7.29: Dosažené výsledky při výpočtu 0,5 % všech mutací při použití diskretních parametrů

Order	Model Name	Whole weight [t]	Optimized Values							
			z_1 [m]	z_2 [m]	d_1 [mm]	d_2 [mm]	t_1 [mm]	t_2 [mm]		
1	Test.1952	0.179	-1.300	-2.300	64.0	18.0	5.0	3.0		
2	Test.2105	0.181	-1.300	-2.500	64.0	18.0	5.0	3.0		
3	Test.1938	0.181	-1.300	-2.500	64.0	14.0	5.0	5.0		
4	Test.1231	0.182	-1.300	-2.300	64.0	20.0	5.0	3.0		
5	Test.1285	0.183	-1.100	-2.300	68.0	12.0	5.0	4.0		

Obrázek 7.30: Dosažené výsledky při výpočtu 0,05 % všech mutací při použití diskretních parametrů

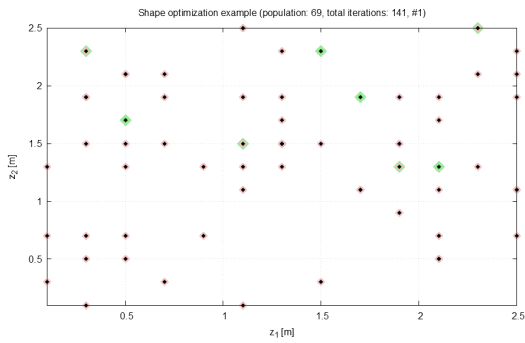
Výsledky – kombinace diskretního charakteru parametru X^d a parametrů typu průřez X^S

Z hlediska optimalizace tvaru nebylo při uvažování kombinace parametrů nalezeno stejné optimální řešení v obou optimalizačních výpočtech. Výsledná geometrie konstrukce měla sice stále tvar horního pásu v podobě paraboly 2. stupně, což odpovídá charakteru zatížení. Optimální tvar získaný optimalizačním výpočtem 10 % resp. 1 % mutací je zobrazen na obrázcích 7.31a resp. 7.31b, přičemž rozdíl spočíval v odlišné poloze uzlu č. 8 resp. 10, kdy při rozsáhlejší výpočtu byla určena poloha uzlu ve výšce 2,3 m (shodně jako při uvažování jen diskretního charakteru parametrů), zatímco při kratším výpočtu dosáhla hodnoty 2,1 m. Optimální poloha uzlu č. 7 resp. 11 byla při výpočtu 10 % mutací rovna hodnotě 1,1 m při výpočtu 1% mutací hodnoty 1,3.

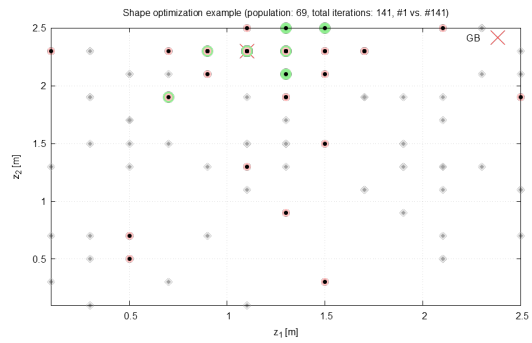

Obrázek 7.31: Optimální geometrie při kombinaci diskretních a průřezových parametrů

Z pohledu optimalizace tvaru průřezu bylo při výpočtu většího množství variant nalezeno optimální řešení s pásy tvořenými pruty ozn. CHS 101.6x2 ($d_1 = 101,6$ mm, $t_1 = 2,0$ mm) a diagonálami z prutů ozn. CHS 22x1,5 ($d_2 = 22,0$ mm, $t_2 = 1,5$ mm), zatímco při provedení menšího množství výpočtů byla nalezena optimální varianta se stejnými profily pásů, ale s diagonálami z prutů ozn. CHS 38x1,5 ($d_2 = 38,0$ mm, $t_2 = 1,5$ mm). Uvedené výsledky se významně promítly do hodnoty účelové funkce optimální varianty, kdy při výpočtu 10% mutací činila hmotnost konstrukce 120 kg a při kalkulaci desetinásobně nižšího množství variant 131 kg, což představuje rozdíl 9,2 %.

Výsledky jsou dále dokumentovány pomocí obrázků 7.32a – 7.35b, z nichž je jasně patrná dobrá konvergence algoritmu k optimálnímu řešení, nicméně z vizuálního porovnání tvaru hejna (obrázky 7.32b a 7.33b vs. obrázky 7.34b a 7.35b) v poslední iteraci je patrné, že v případě výpočtu 1% ze všech možných mutací zaujímal hejno v návrhovém prostoru větší prostor a lze tedy hovořit o tom, že provedených 10 iterací algoritmu bylo nedostačujících. Číselně lze pomocí relativního rozptylu částic v poslední iteraci $\bar{\rho}$ uvedené tvrzení potvrdit, jelikož hodnota $\bar{\rho}$ pro výpočet se 14 iteracemi dosáhla velikosti 0,15740, resp. hodnota $\bar{\rho}_{all}$ při uvažování jak přípustných, tak nepřípustných řešení, velikosti 0,14794. Při výpočtu s byt 97 částicemi avšak pouhými 10 iteracemi algoritmu byla hodnota rozptylu $\bar{\rho} = 0,20103$ resp. hod-

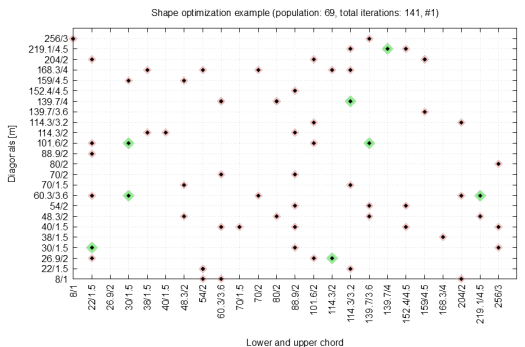


(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

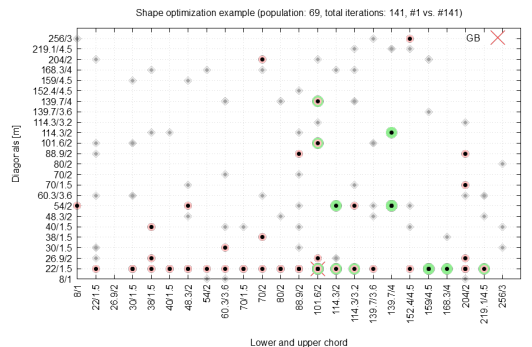


(b) 1. vs. 141. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.32: Vývoj populace (69 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: X^d)

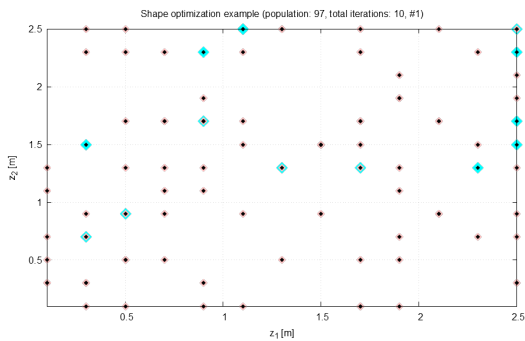


(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

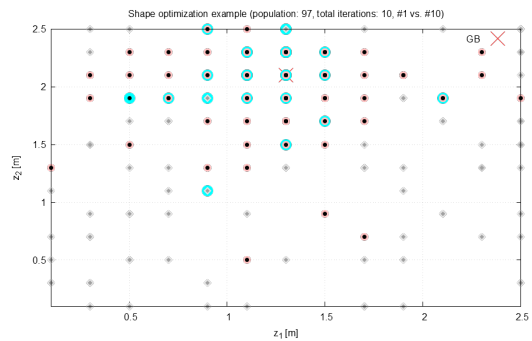


(b) 1. vs. 141. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.33: Vývoj populace (69 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($X_1^s - X_2^s$, par.: X^d a X^s)

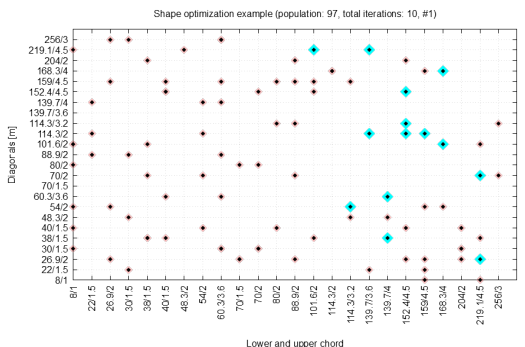


(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

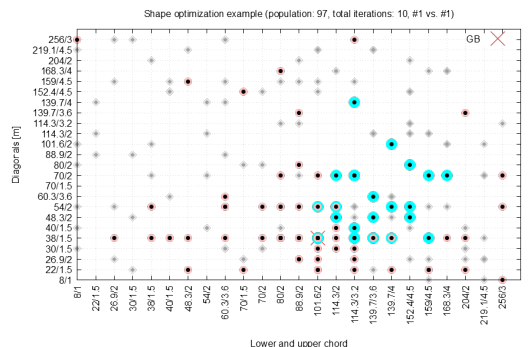


(b) 1. vs. 10. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.34: Vývoj populace (97 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: X^d a X^s)



(a) 1. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)



(b) 1. vs. 10. iterace, (● přípustná řeš., ● nepřípustná řeš.)

Obrázek 7.35: Vývoj populace (97 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($X_1^s - X_2^s$, par.: X^d a X^s)

nota $\bar{\rho}_{all} = 0,30660$. Do hodnoty rozptylu nemohly být vzhledem ke své diskrétní a enumerativní povaze zahrnuty parametry typu průřez a jejich rozptyl je možné hodnotit pouze vizuálně.

Přehled nalezených řešení pro oba optimalizační výpočty včetně příslušných hodnot parametrů je na závěr zobrazen v tabulkách na obrázcích 7.36 a 7.37 pocházejících přímo z GUI *RFEM 6*.

Order	Model Name	Whole weight [t]	Optimized Values			
			z_1 [m]	z_2 [m]	Section No. 1	Section No. 2
1	Test.1639	0.120	-1.100	-2.300	CHS 101.6x2	CHS 22x1.5
2	Test.2875	0.127	-1.300	-2.300	CHS 101.6x2	CHS 30x1.5
3	Test.3110	0.128	-1.100	-2.500	CHS 101.6x2	CHS 30x1.5
4	Test.3716	0.129	-1.300	-2.100	CHS 101.6x2	CHS 26.9x2
5	Test.2381	0.130	-1.300	-2.300	CHS 101.6x2	CHS 26.9x2

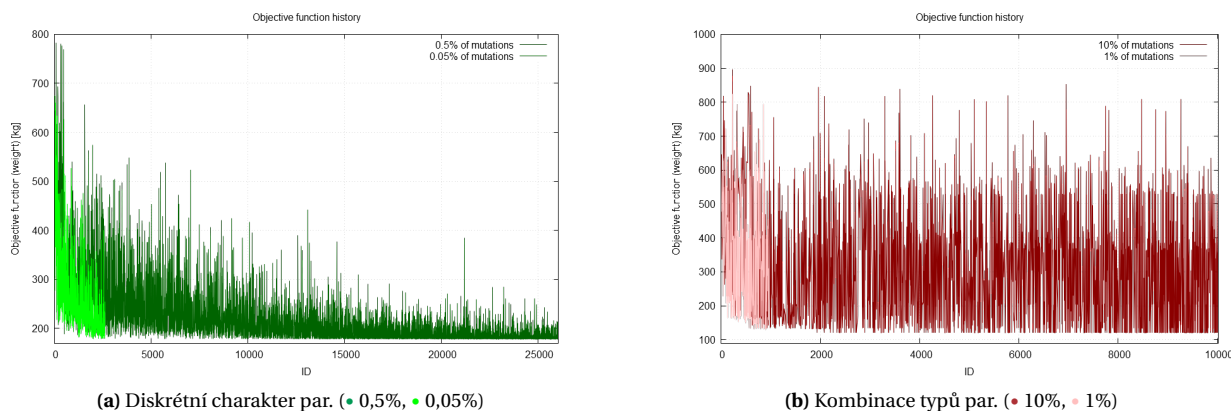
Obrázek 7.36: Dosažené výsledky při výpočtu 10 % všech mutací a při použití parametrů typu průřez

Order	Model Name	Whole weight [t]	Optimized Values			
			z_1 [m]	z_2 [m]	Section No. 1	Section No. 2
1	Test.661	0.131	-1.300	-2.100	CHS 101.6x2	CHS 38x1.5
2	Test.700	0.132	-1.300	-2.300	CHS 101.6x2	CHS 38x1.5
3	Test.712	0.133	-1.100	-2.500	CHS 101.6x2	CHS 38x1.5
4	Test.593	0.133	-1.500	-2.300	CHS 101.6x2	CHS 38x1.5
5	Test.749	0.134	-1.100	-2.300	CHS 114.3x2	CHS 22x1.5

Obrázek 7.37: Dosažené výsledky při výpočtu 1% všech mutací a při použití parametrů typu průřez

Shrnutí

Na základě získaných výsledků lze konstatovat, že provedená implementace optimalizačního algoritmu je vhodná pro tvarové optimalizační úlohy, popřípadě pro řešení kombinace s rozměrovou optimalizací. Prezentované výsledky potvrdily dříve učiněné závěry, že pro dosažení skutečného optima je z hlediska nastavení algoritmu výhodnější zvyšování počtu iterací než neúměrné zvětšování populace. Vyšším počtem iterací je zajištěna vyšší kinematika hejna, čímž dochází k lepší exploraci návrhového prostoru. Při všech provedených výpočtech byla nalezena velmi uspokojivá optimální varianta, nicméně jak lze vidět na obrázcích 7.38a a 7.38b znázorňujících vývoj účelové funkce napříč iteracemi, tak v případě využití diskrétního parametru typu průřez dochází i v poslední iteraci k výrazným oscilacím.



Obrázek 7.38: Srovnání vývoje účelové funkce pro provedené optimalizační výpočty

Cílem dalšího vývoje je tedy snaha o takovou úpravu algoritmu pro průřezové parametry, aby byla zajištěna hladší konvergence. Z dostupných výsledků lze však konstatovat, že implementovaná varianta algoritmu *Particle Swarm* je pro úlohy tvarové optimalizace, včetně použití parametrů typu průřez, vhodná.

Dalším plánovaným vývojem ve spolupráci se společností *Dlubal* je umožnění uživatelům provádět vedle rozměrové a tvarové i topologické optimalizaci.

8 | Identifikace parametrů materiálových modelů

Korektní a úspěšná aplikace pokročilých materiálových modelů při analýze a návrhu stavebních konstrukcí spočívá ve správném nastavení vstupních charakteristik použitého konstitutivního vztahu. Takový matematický model často obsahuje větší množství vstupních neznámých, majících charakter mechanicko-fyzikálních, lomově-mechanických, ale i ryze empirických parametrů. Pro identifikaci hodnot těchto neznámých lze právě využít inverzní identifikace založené na použití optimalizačních algoritmů. Pro demonstraci metody inverzní identifikace pomocí optimalizace byly provedeny celkem dvě dílčí studie. První byla realizována na materiálovém modelu *Menetrey-Willam* z databáze *multiPlas* v systému *ANSYS*, který disponuje optimalizačními nástroji, čímž byla umožněna verifikace implementace a použití algoritmu PSOA na danou problematiku. Druhá dílčí studie byla věnována identifikaci parametrů *Kelvinova řetězce*, implementovaného v systému *RFEM* pro účely modelování viskózního chování betonu.

8.1 Identifikace parametrů modelu *Menetrey-Willam* použitím MOGA

Inverzní identifikace představuje ryze numerický přístup k hledání předem neznámých parametrů matematických modelů. Výchozím předpokladem pro provedení úspěšné identifikace je existence experimentálních dat ve formě bodů zatěžovací křivky. V současnosti lze pro inverzní identifikaci využít umělých neuronových sítí [100] nebo optimalizačních algoritmů [15, 140]. Druhá z uvedených metod byla aplikována pro identifikaci hodnot materiálového modelu *Menetrey-Willam* publikovaných autorem v [155, 156, 157, 154] a to vzhledem k dostupnosti optimalizačního modulu v prostředí *ANSYS Workbench* a na základě vyhodnocení vhodnosti modelů knihovny *multiPlas* prezentovaného v podkapitole 4.3.1.1.

Podstatou inverzní identifikace využívající vhodného optimalizačního algoritmu je opakovaný numerický výpočet daného experimentu, při kterém je vektor návrhových proměnných tvořen neznámými materiálovými parametry. Optimalizační úloha se v takovém případě definuje jako minimalizace funkce představující diskrepanci mezi experimentální a numerickou zatěžovací křivkou. Za identifikované parametry jsou pak považovány ty, pro které je hodnota cílové funkce nejnižší. V procesu inverzní identifikace lze dále využívat analýzy citlivosti pro analýzu chování numerického modelu a také pro redukci dimenze návrhového vektoru, čímž dochází ke snížení časové náročnosti výpočtu [151].

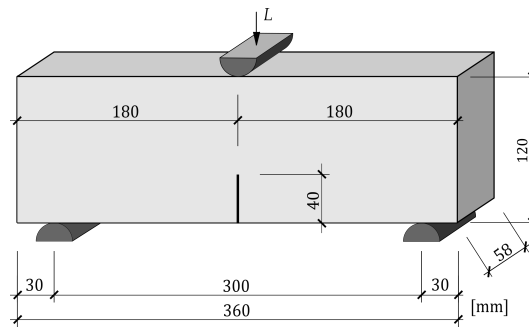
Problematika identifikace parametrů pro analyzovaný materiálový model byla uskutečněna nejprve s pomocí optimalizačního modulu systému *ANSYS Workbench* a to na dvou zatěžovacích křivkách pocházejících z experimentů publikovaných v odborných publikacích [130] a [145]. Křivka z prvního ze jmenovaných zdrojů byla výstupem třibodové ohybové zkoušky betonového trámce se zářezem o rozměrech 360 x 120 x 58 mm. Schematické znázornění tohoto experimentu je dokumentováno na obrázku 8.1. Křivka pocházející z druhého článku byla závislost $L - CMOD$ z experimentu *Compact Tension Test* (CTT).

8.1.1 Třibodový ohybový test (3PBT)

Vstupní data

V rámci citované publikace [130] byly prezentovány zkoušky na čtyřech sadách vzorků z betonu pevnostní třídy C25/30 dle normy ČSN EN 1992-1-1 [127]. V rámci těchto sad byly kombinovány betonové směsi se stupněm rozlití kužele F45 a F70 o stáří 28 a 170 dní, přičemž v rámci každé sady bylo přípra-

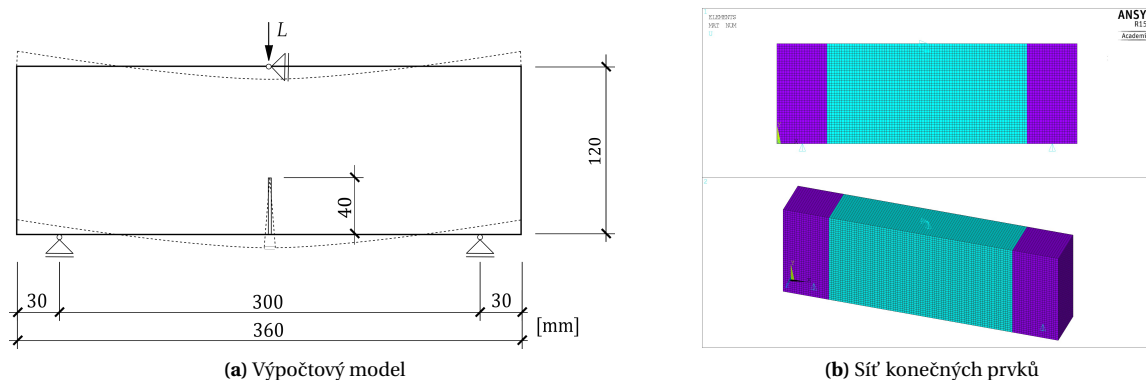
veno celkem 5 zkušebních těles [130]. Pro účely identifikace byla vybrána pouze jedna zatěžovací křivka příslušící vzorku se stupněm rozlití F45 o stáří 28 dní.



Obrázek 8.1: Schéma zatěžovací zkoušky 3PBT

Výpočtový model

Vzhledem k úspoře výpočetního času nelineární simulace byla redukována komplexnost úlohy z 3D na 2D úlohu rovinné napjatosti. V rámci zjednodušení byly modifikovány také okrajové podmínky, kdy namísto modelování kovových podporových segmentů s kontaktem mezi materiály bylo z hlediska korektní idealizace úlohy zabráněno pouze svislému posunu v místech těchto podpor. Zjednodušení se týkalo také oblasti vnášení zatížení, kde opět nebyl modelován kontakt, ale namísto toho byla předepsána svislá deformace. S ohledem na řešitelnost dané úlohy bylo zabráněno vodorovnému posunu v místě vnášeného zatížení, čímž se zachovala symetrie experimentu zobrazená na obrázku 8.1. Výsledná podoba idealizace řešené úlohy je vyobrazena na obrázku 8.2a. Geometrie výpočtového modelu byla pokryta sítí rovinných čtyřuzlových prvků označovaných PLANE182 se třemi stupni volnosti v každém z uzlů. S ohledem na redukci nároků na výpočetní čas byla geometrie pokryta pravidelnou čtvercovou sítí o velikosti 3,0 mm. Odpovídajícího rozměru ve zbývajícím třetím směru bylo dosaženo předepsáním tloušťky prvku o velikosti $w = 58$ mm. Speciální úpravu výpočtového modelu si vyžádala oblast v okolí podpor. Vzhledem ke zvoleným okrajovým podmínkám se jednalo o oblast potenciálního výskytu lokálních špiček napětí a tak byl prvkům v pásech širokých 60 mm nad oběma podporami předepsán elastický materiál. Uvedená úprava výpočtového modelu byla provedena mimo zájmovou oblast nad zářezem a nemá tak negativní dopad na prováděnou analýzu. Podoba geometrie výpočtového modelu včetně uvedené úpravy oblasti nad podporami je zobrazena na obrázku 8.2b.



Obrázek 8.2: Idealizace zatěžovací zkoušky 3PBT a výpočtový model

Účelová funkce

Základní princip identifikace založené na využití optimalizačních metod je minimalizace diskrepance mezi experimentální a numerickou $L - d$ křivkou. Problém však spočívá v korektní formulaci účelové

funkce, která dokáže tento rozdíl co nejpřesněji postihnout. Potřeba správné formulace účelové funkce platí také pro analýzu citlivosti, jejíž primárním účelem je stanovit citlivost materiálových parametrů na tvar výsledné $L-d$ křivky. Na základě výsledků takové analýzy lze redukovat dimenzi návrhového vektoru neznámých parametrů vstupujících do optimalizačního procesu a snížit tak časovou náročnost výpočtu. Pro výpočet difference mezi dvěma křivkami lze dle HYNDMANA a kol. [57] využít tzv. RMSE chyby, která se běžně využívá k evaluaci matematických modelů v demografii, meteorologii a ekonomice. Výpočet RMSE chyby lze provést dle následujícího vztahu

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2}{n}}, \quad (8.1)$$

kde y_i^* je hodnota síly z numerické simulace a y_i je hodnota síly na experimentální $L-d$ křivce a n je počet bodů křivky. Avšak přímý výpočet RMSE chyby je často komplikován rozdílným rozložením bodů na experimentální a numerické křivce z důvodu odlišného běhu řešiče. Ve výpočtu chyby se tedy zavádí mapování bodů na numerické křivce pomocí lineární interpolace.

Při inverzní identifikaci bylo v rámci řešených studií [159] využito také formulace účelové funkce jako rozdíl ploch $A_{Ld,ref}$ pod referenční $L-d$ křivkou a plochy $A_{Ld,num}$ pod numericky spočítanou $L-d$ křivkou

$$\Delta A_{Ld} = A_{Ld,ref} - A_{Ld,num} \quad (8.2)$$

a také rozdíl maximálních hodnot zatížení $L_{max,ref}$ a $L_{max,num}$ ve tvaru:

$$\Delta L_{max} = L_{max,ref} - L_{max,num} \quad (8.3)$$

Analýza citlivosti

Při řešení dizertační práce byla provedena studie [159], jejíž základním cílem bylo provedení analýzy citlivosti využívající RMSE chyby. V rámci této studie však byla analýza přes celou délku křivky rozšířena o výpočet chyby na vzestupné a sestupné větvi a dále pro 5 rovnoměrně rozdělených úseků $L-d$ křivky. Vlastní citlivost byla vyjádřena pomocí Spearmanova korelačního koeficientu r_s

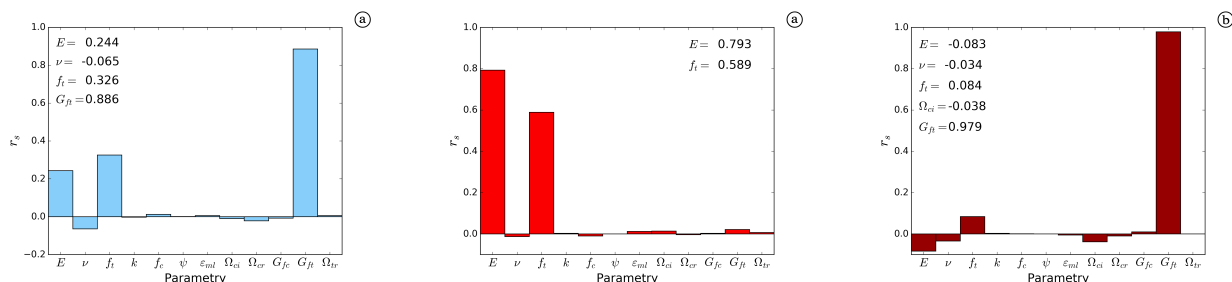
$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (8.4)$$

kde

$$\delta_i = \text{rank}(X_i) - \text{rank}(Y_i) \quad (8.5)$$

je rozdíl pořadí mezi hodnotami jednoho parametru a cílové funkce a n představuje počet simulací v rámci analýzy.

První analýza vyhodnocující citlivost přes celou délku $L-d$ křivky prokázala vyšší citlivost pouze u modulu pružnosti E_c , jednoosé tahové pevnosti f_t a specifické lomové energie v tahu G_{ft} . Výsledky této první analýzy citlivosti lze vidět na obrázku 8.3a.



(a) Graf citlivosti – RMSE chyba přes celou délku $L-d$ křivky

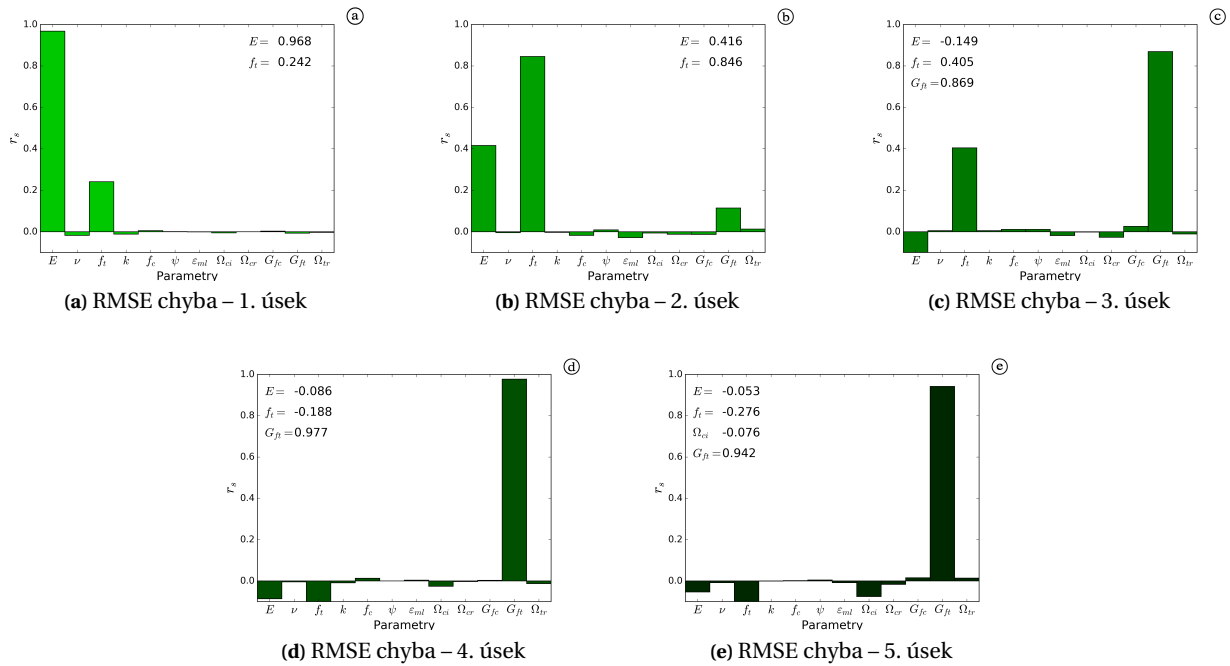
(b) Zpevnění

(c) Změkčení

Obrázek 8.3: Graf citlivosti – RMSE chyba na celé křivce a na větvích zpevnění a změkčení ($L-d$)

Z obavy, že použitý výpočet chyby přes celou délku křivky skrývá citlivost dalších parametrů, byla provedena další analýza, při které bylo využito výpočtu citlivosti parametrů na vzestupné a sestupné větvi diagramu. Výsledek druhé analýzy potvrdil předešlé výsledky, nicméně díky rozdělení výpočtu se citlivost modulu pružnosti E_c a tahové pevnosti f_t projevila pouze na vzestupné větvi, zatímco na sestupné větvi byla indikována vyšší citlivost pouze u specifické lomové energie v tahu G_{ft} . Grafické vyjádření výsledků této druhé analýzy je zobrazeno na obrázcích 8.3b a 8.3c.

Vzhledem k tomu, že analýza neprokázala citlivost jiných materiálových parametrů, byla provedena ještě třetí analýza rozšiřující myšlenku rozdělení $L-d$ křivky. Při poslední analýze byla citlivost parametrů vyhodnocována na 5 úsecích stejné délky.



Obrázek 8.4: Graf citlivosti pro 5 úseků $L-d$ křivky ($L-d$)

Výsledky této analýzy jsou uvedeny na obrázcích 8.4a až 8.4e. Opět byla potvrzena významná citlivost modulu pružnosti E_c a tahové pevnosti f_t , ale jak ukazují grafy na obrázcích 8.4a a 8.4b vyšší citlivost na modul pružnosti byla zaznamenána v prvním úseku, zatímco v druhém úseku dominovala tahová pevnost. V dalších částech se opět významně projevila citlivost na specifickou lomovou energii G_{ft} , nicméně byla v těchto částech zaznamenána negativní závislost na tahovou pevnost, která se v předcházejících analýzách neprojevila.

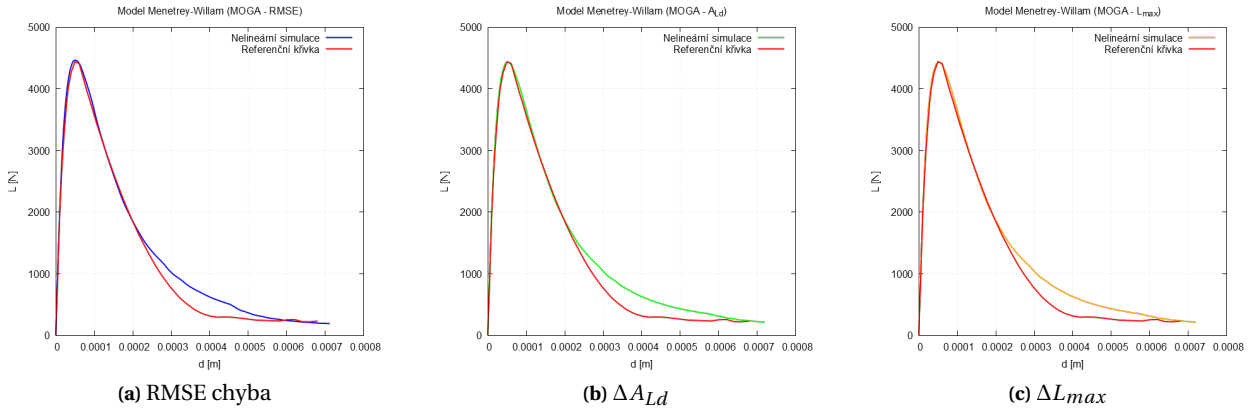
Význam provedené modifikované analýzy citlivosti spočíval v možnosti použít jednoduché statistické metody jako nástroje pro pochopení chování libovolného materiálového modelu s větším množstvím vstupních parametrů. Vlastní identifikace hodnot materiálových parametrů byla vždy provedena přímou optimalizací pomocí genetického algoritmu, který je velmi robustní. S ohledem na výsledky analýzy citlivosti byla identifikace prováděna v redukovaném prostoru tří proměnných. Podoba redukovaného návrhového vektoru měla tedy tvar

$$\mathbf{X}_{\text{red}} = \begin{Bmatrix} E_c \\ f_t \\ G_{ft} \end{Bmatrix} \quad (8.6)$$

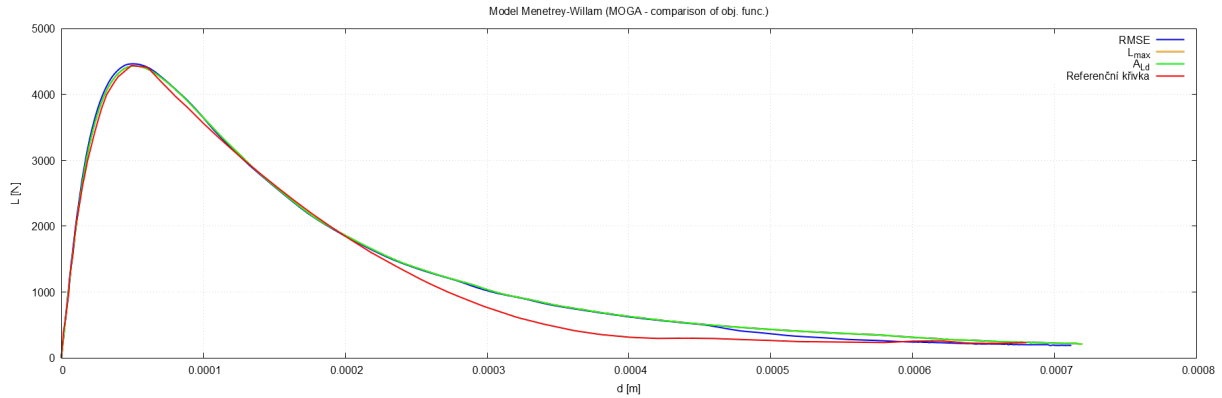
Výsledky identifikace

V rámci identifikační úlohy využívající RMSE chyby bylo vygenerováno celkem 76 návrhových vektorů, přičemž minima s hodnotou RMSE = 144,92 N bylo dosaženo v 33. iteraci. Identifikace materiálových parametrů při použití účelových funkcí definovaných jako rozdíly ΔA_{Ld} a ΔL_{max} ukázala na použitel-

nost uvedeného způsobu formulace účelové funkce, nicméně si vyžádala nejvíce výpočetního času. Při minimalizační variantě bylo minima s celkovou hodnotou RMSE = 143,13 N dosaženo při 85. iteraci z celkových 122 a ve druhé variantě bylo minima s celkovou hodnotou RMSE = 178,39 N dosaženo v 254. iteraci z celkového počtu 415 iterací. Porovnání výsledných L - d křivek lze pozorovat na obrázcích 8.5a až 8.5c a 8.6. Výsledné hodnoty identifikovaných parametrů shrnuje tabulka 8.1.



Obrázek 8.5: Výsledné L - d křivky po identifikaci pomocí alg. MOGA



Obrázek 8.6: Kompletní srovnání výsledných L - d křivek pro GB po identifikaci alg. MOGA

Tabulka 8.1: Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. MOGA z 3PBT testu

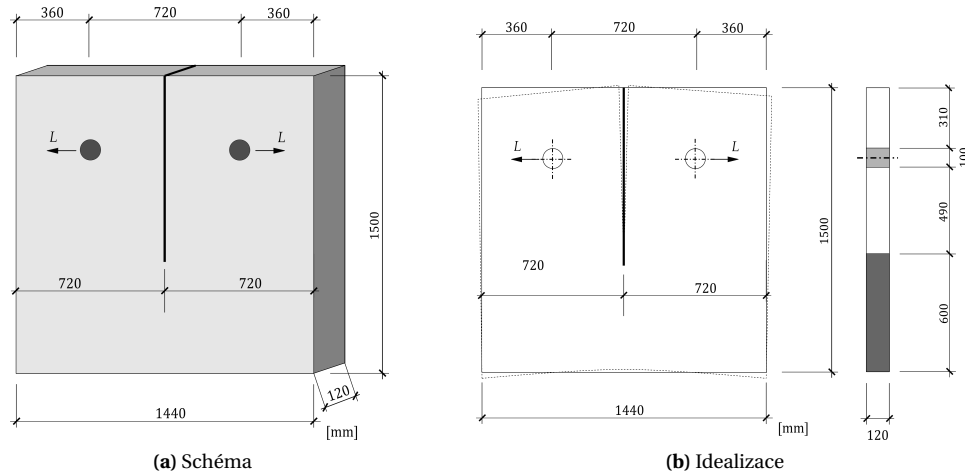
Par.	Jednotka	RMSE	hledání $\Delta A_{Ld} = 0$ $\Delta L_{max} = 0$	$\min \{ \Delta A_{Ld}, \Delta L_{max} \}$
E	[GPa]	40,914	48,969	45,014
f_t	[MPa]	2,296	2,278	2,253
G_{ft}	[Nm/m ²]	49,654	49,564	50,056

8.1.2 Compact Tension Test (CTT)

Vstupní data

Jak bylo ukázáno v přecházející kapitole, k identifikaci může být použit pracovní diagram ze zkoušky v tříbodovém ohybu, nicméně pro analýzu lze využít také speciálních testů: *Compact Tension Test* (CTT) a *Wedge Splitting Test* (WST), které byly navrženy jako určitá substituce, na betonu obtížně proveditelných, přímých tahových testů. První z výše jmenovaných experimentů je zároveň doporučován v RILEM [114] pro určování hodnot lomových energií G_f .

Prezentované výsledky identifikace parametrů modelu *Menetrey-Willam* na experimentálních datech z CT testu byly autorem publikovány v rámci příspěvku na mezinárodní konferenci [158]. Obecná podoba konfigurace CT testu je zobrazena na obrázku 8.7a. Autoři citované publikace [145] provedli ex-

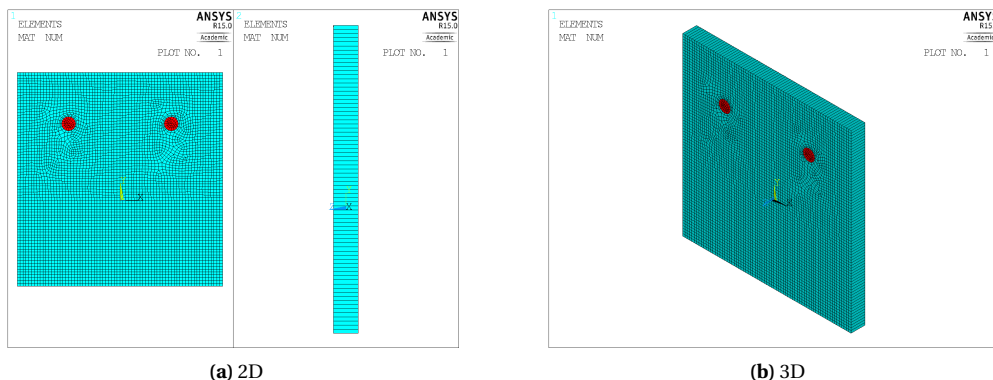


Obrázek 8.7: Schéma CT testu a idealizace pro účely tvorby výpočtového modelu

perimenty na celkem 14 vzorcích s rozdílnými dimenzemi, vlastnostmi betonu a pro několik zatěžovacích rychlostí. Pro účely studie však byla vybrána výsledná $L - \text{CMOD}$ křivka pro největší vzorek, jehož rozměry jsou uvedeny na obrázcích 8.7a a 8.7b.

Výpočtový model

Výpočtový model lomového experimentu byl stejně jako v případě předešlé studie na ohýbaném nosníku proveden v prostředí systému ANSYS. Geometrie výpočtového modelu v rozměrech uvedených výše na obrázcích 8.7a a 8.7b byla opět s ohledem na úsporu výpočetního času simulace pokryta sítí rovinných čtyřuzlových konečných prvků (PLANE182) a úloha byla řešena jako 2D problém rovinné napjatosti s tloušťkou prvku o velikosti 120 mm. Zářez byl na vzorku modelován pomocí dvojice linií se sdíleným



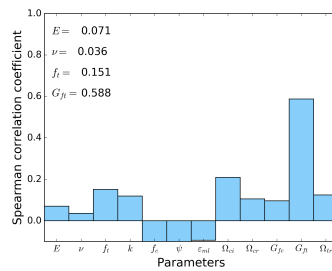
Obrázek 8.8: Síť konečných prvků

uzlem ve vrcholu zářezu. Zatížení bylo do modelu vnášeno jako předepsaná vertikální deformace o ve-

likosti 0,00062 m. Uvedené zatížení bylo předepsáno na středovém uzlu ocelových válců modelovaných pomocí stejných rovinných prvků (v obrázcích 8.8a a 8.8b označeno červeně). Uvedený způsob modelování vnášeného zatížení vyžadoval použití *Langrangeova* kontaktního algoritmu na rozhraní beton-ocel. Pro vymodelování kontaktu bylo využito prvků CONTA171 a TARGE169. Idealizovaná podoba CT experimentu a popsaná síť konečných prvků je uvedena na obrázcích 8.7b a 8.8a resp. 8.8b.

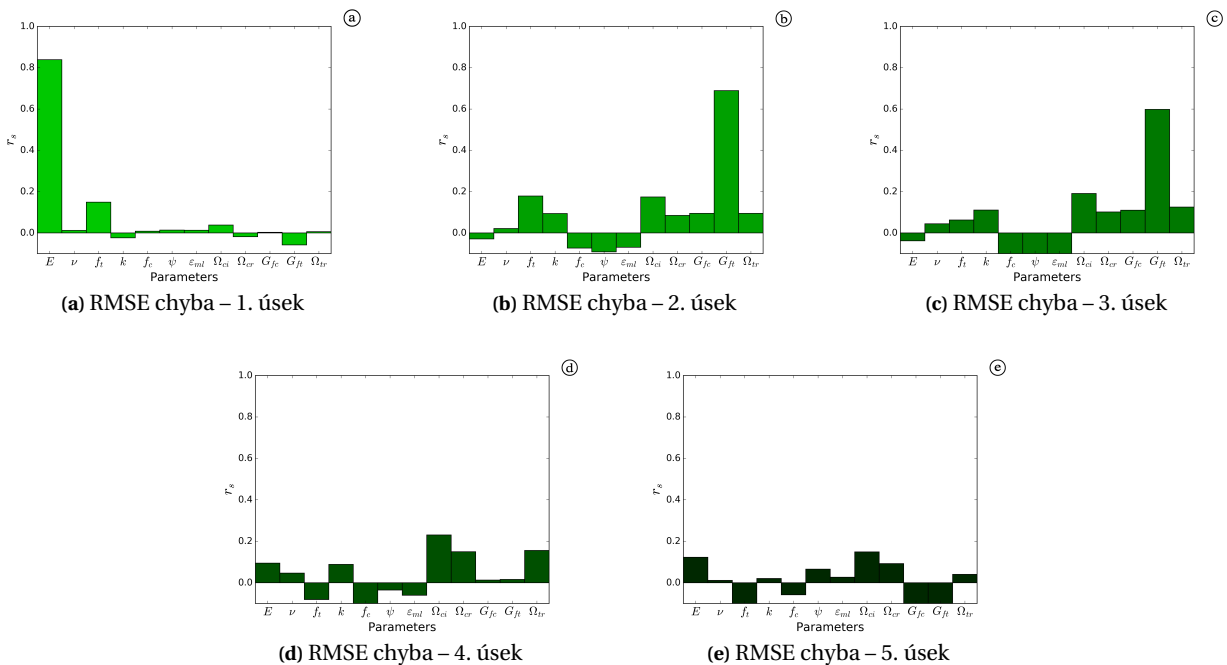
Účelová funkce a analýza citlivosti

Na základě dříve získaných výsledků na úloze tříbodového ohybu byla pro analýzu citlivosti a také pro následnou identifikaci parametrů modelu použita účelová funkce ve tvaru (8.1). Citlivost byla vyhodnocována pomocí Spearmanova koeficientu korelace r_s , jehož formulace byla uvedena ve vztazích (8.4) a (8.5).



Obrázek 8.9: Graf citlivosti – RMSE chyba přes celou délku L – d křivky (L - $CMOD$)

Z výsledků citlivosti parametrů na RMSE chybu počítanou přes celou délku L – $CMOD$ křivky bylo patrné, že nejzásadnější vliv na tvar diagramu má lomová energie G_f . Uvedenou skutečnost dokumentuje sloupcový graf na obrázku 8.9. S ohledem na znalosti výsledků analýzy citlivosti na úloze ohýbaného nosníku byl proveden výpočet *Spearmanova koeficientu korelace* r_s také pro 5 úseků pracovního diagramu. Z výsledků těchto výpočtů, jejichž grafická podoba je uvedena na obrázcích 8.10a až 8.10e, vyplývá, že

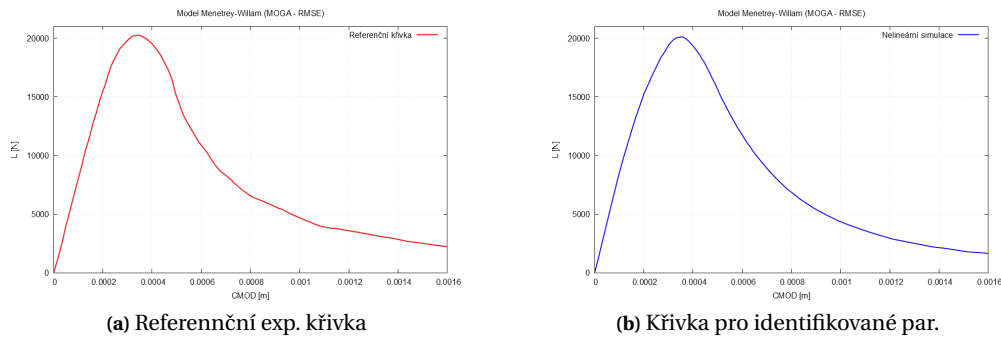


Obrázek 8.10: Graf citlivosti pro 5 úseků křivky (L - $CMOD$)

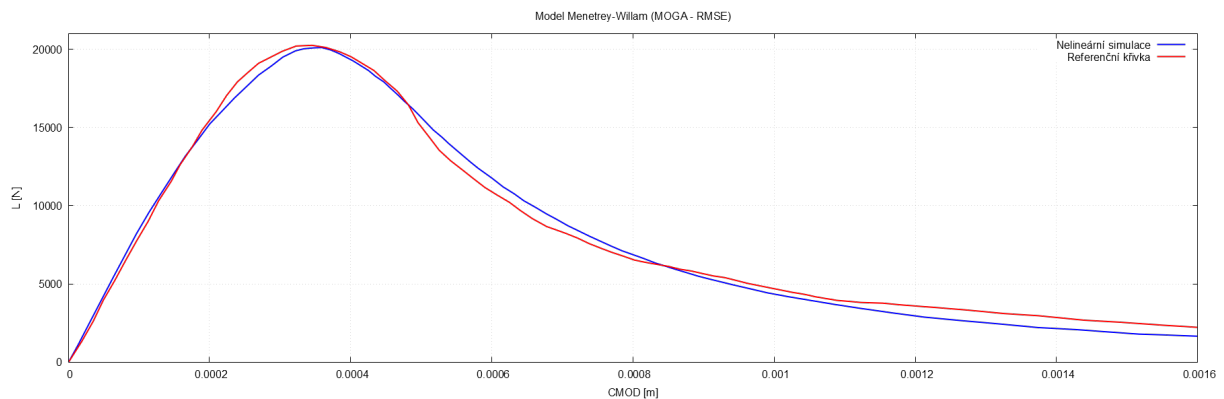
na podobu výsledné křivky má dále významný vliv jednoosá tahová pevnost f_t a modul pružnosti E . Výsledky na 3. a 4. úseku (obrázky 8.10c-8.10d) navíc vykazovaly méně signifikantní vliv relativních rezi-duálních pevností Ω_{ci} , Ω_{cr} a Ω_{tr} .

Výsledky identifikace

Vlastní proces identifikace byl proveden s ohledem na výsledky analýzy citlivosti pro návrhový vektor $\mathbf{X}_{red} = \{E_c; f_t; G_{ft}\}^T$. Výše zmíněné reziduální pevnosti nebyly do identifikace zahrnuty, jelikož příslušné hodnoty korelačního koeficientu r_s nabývaly nižších hodnot než hodnota náležející jednoosé tahové pevnosti mající tuto hodnotu z veličin návrhového vektoru nejnižší. Identifikace pomocí genetického optimalizačního algoritmu MOGA byla provedena pro 20 generací populace o 50 realizacích v generaci. Výsledných hodnot materiálových charakteristik, odpovídajících globálnímu minimu s velikostí chyby RMSE = 549,39, bylo dosaženo v 93. realizaci návrhového vektoru. Porovnání výsledné a referenční $L - CMOD$ je ilustrováno pomocí obrázků 8.11a, 8.11b a 8.12.



Obrázek 8.11: Referenční a výsledná $L - CMOD$ křivka



Obrázek 8.12: Kompletní srovnání výsledných $L - CMOD$ křivek pro GB po identifikaci alg. MOGA

Tabulka 8.2: Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. MOGA z CT testu

Par.	Jednotka	RMSE
E	[GPa]	32,901
f_t	[MPa]	2,005
G_{ft}	[Nm/m ²]	68,206

Identifikované hodnoty materiálových parametrů, které jsou přehledně shrnuty v tabulce 8.2, dosahovaly nižších hodnot než, jaké byly uvedeny původní publikaci [145]. Lze předpokládat, že rozdíl může způsoben vlastním materiálovým modelem, jelikož z vizuálního srovnání experimentální křivky a numerického výsledku lze usuzovat na korektní použití optimalizace.

8.2 Identifikace parametrů modelu *Menetrey-Willam* použitím PSOA

V textu předcházející podkapitoly 8.1 byl na dvou studiích představen koncept identifikace parametrů materiálového modelu *Menetrey-Willam* pomocí optimalizačního algoritmu označovaného MOGA. Doložené výsledky prokázaly použitelnost postupu založeného na minimalizaci rozdílu mezi experimentální zatěžovací křivkou libovolného druhu a příslušným numericky získaným zatěžovacím diagramem. K minimalizaci bylo úspěšně využito optimalizačního algoritmu inspirovaného evolučními a genetickými procesy. V rámci dizertační práce byla s ohledem na potřeby řešení identifikace viskózních materiálových modelů betonu v systému *RFEM* provedena implementace algoritmu *Particle Swarm*, založeného na napodobování chování společenstev organismů při hledání potravy. Jedním z dílčích cílů práce tudíž bylo ověřit použitelnost tohoto algoritmu na problému identifikace materiálových parametrů zopakováním identifikační studie na úloze ohybaného nosníku v rámci tříbodové ohybové zkoušky (3PBT). S ohledem na časový odstup vyvolaný nutnými vývojovými pracemi při implementaci a testování algoritmu PSOA, byly výpočty provedeny pro vyšší verzi knihovny *multiPlas* a v novější verzi systému *ANSYS*.

Implementace algoritmu PSOA byla s ohledem na použití v širším okruhu úloh konstrukční optimalizace, včetně rozměrové a tvarové, provedena tak, že návrhové proměnné mohou mít charakter spojitých a diskrétních proměnných s definovaným krokem. S ohledem na tuto speciální vlastnost, byla identifikace parametrů modelu *Menetrey-Willam* provedena pro oba tyto charakteristiky návrhových proměnných, přičemž zároveň vždy pro populaci částic o velikosti 100 a 50. Celkový počet provedených simulací byl v každé analýze 1000, což při velikosti hejna rovné 100 částicím vedlo na 10 iterací algoritmu a při velikosti hejna rovné 50 částicím na 20 iterací.

8.2.1 Vstupní data, výpočtový model, účelová funkce a analýza citlivosti

Vzhledem ke snaze verifikovat provedenou implementaci a zároveň použitelnost daného algoritmu v úlohách identifikace parametrů byla pro analýzu použita stejná vstupní data jako v případě analýzy pomocí software *ANSYS*. Jednalo se tedy o zatěžovací $L-d$ křivku pocházející z tříbodového ohybového testu na betonovém nosníku o délce 360 mm, výšce 120 mm a šířce 56 mm, který byl v polovině rozpětí opatřen zářezem výšky 40 mm. Materiálově nelineární MKP výpočet byl proveden na stejném rovinném výpočtovém modelu nosníku, řešeném jako rovinná napjatost. Minimalizován byl rozdíl mezi experimentální a numerickou $L-d$ křivkou definovaný pomocí osvědčené RMSE chyby definované ve vztahu (8.1). Zohledněny byly také výsledky provedené analýzy citlivosti a identifikace byla provedena pouze pro redukovaný vektor signifikantních návrhových proměnných (8.6), který byl však s ohledem na použití vyšší verze knihovny materiálových modelů rozšířen o parametr reziduální tahové pevnosti Ω_{tr} . Při testování novější verze knihovny bylo totiž zjištěno, že bez použití uvedeného parametru nebude možno získat dříve dosažené výsledky. Popisovaná změna souvisela zřejmě se změnami v implementaci použitého materiálového modelu. Aktualizovaný redukovaný vektor návrhových proměnných měl tedy tvar

$$\mathbf{X}_{red} = \begin{Bmatrix} E_c \\ f_t \\ G_{ft} \\ \Omega_{tr} \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

Hodnoty návrhových proměnné vektoru \mathbf{X}_{red} byly uvažovány pro intervaly uvedené v tabulce 8.3.

Hodnoty výsledků dosažených s pomocí algoritmu PSOA, prezentované v následujících podsekcích, jsou vztahovány k výsledkům dosaženým v rámci předešlé studie využívající algoritmu MOGA a to vzhledem k tomu, že není známo jednoznačně správné řešení. Pro vyjádření úspěšnosti algoritmu je využíváno relativní hodnoty rozptylu $\bar{\rho}$ částic poslední iterace od polohy globálního minima, který lze definovat analogicky jako ve vztazích (7.14) a (7.15)

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{ij}}{n}, \quad (8.8)$$

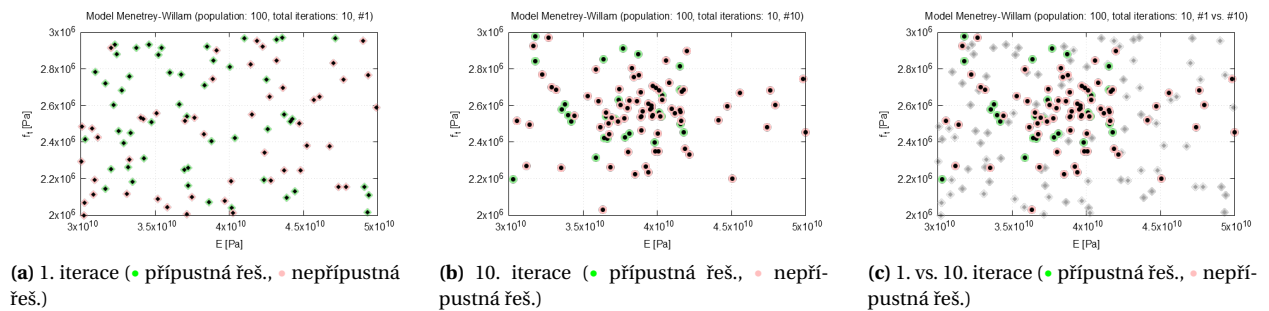
kde n je počet přípustných řešení a

$$\rho_{ij} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (\delta_{ij})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{X_{ij}}{X_{GB}} - 1 \right)^2} \quad (8.9)$$

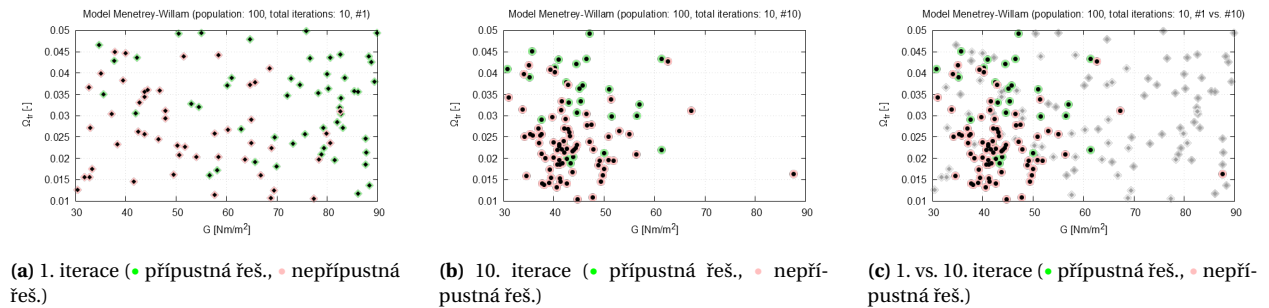
a kde m je počet návrhových proměnných v \mathbf{X}_{red} . Do charakteristiky není zahrnut parametr Ω_{tr} , který nebyl v předešlé studii identifikován.

8.2.2 Výsledky identifikace – spojitý charakter parametrů

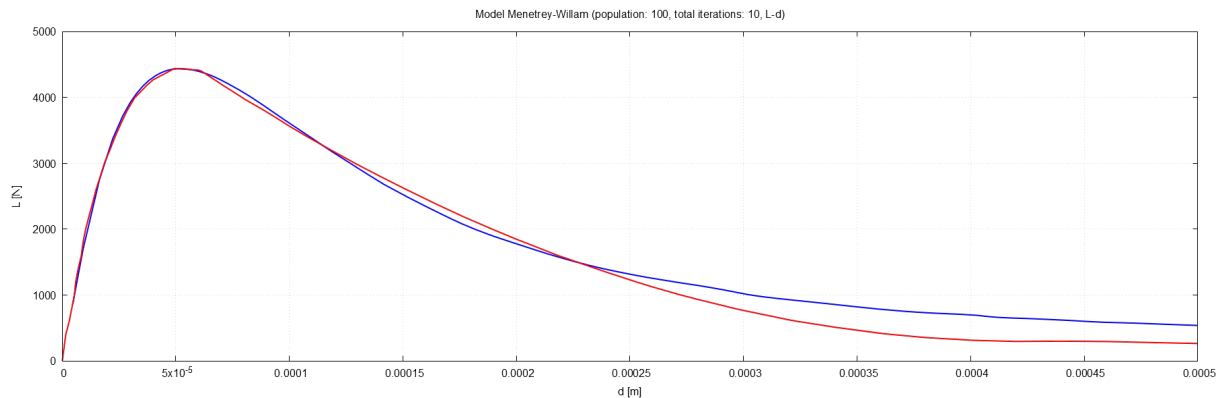
Při spojitém charakteru parametrů bylo globálního minima pro populaci o velikosti 100 částic dosaženo v poslední 10. iteraci s relativním rozptylem $\bar{\rho} = 0,23923$ a výslednou hodnotou chyby RMSE = 164,16659. Grafické znázornění výsledků v podobě srovnání polohy částic v 1. a 10. iteraci a porovnání experimentální a numerické $L - d$ křivky je znázorněno na obrázcích 8.13a – 8.14c a 8.15.



Obrázek 8.13: Vývoj populace při identifikaci E a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)



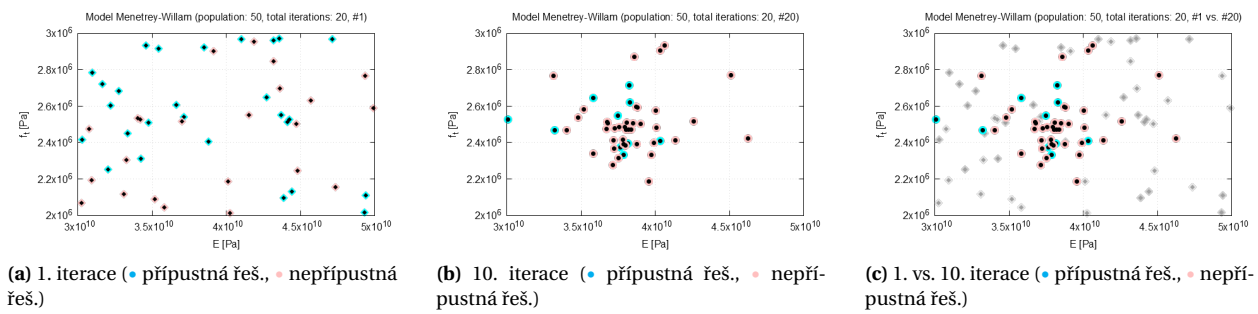
Obrázek 8.14: Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)



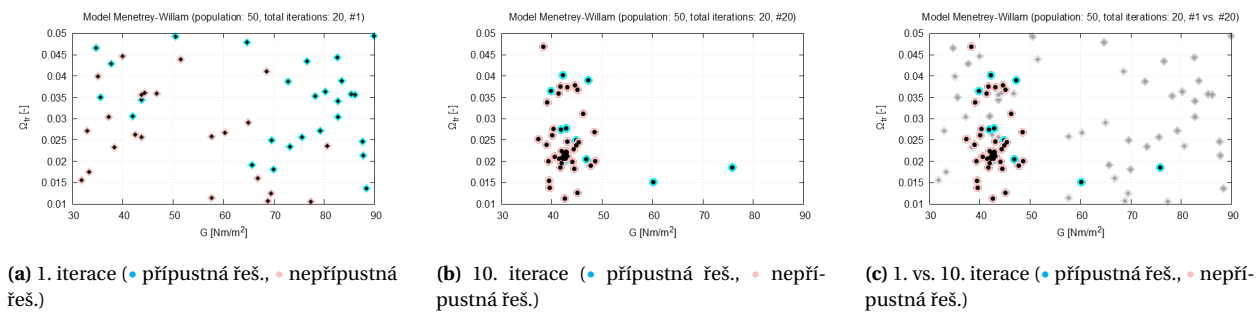
Obrázek 8.15: Výsledné $L - d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)

V případě poloviční velikosti populace částic bylo minima dosaženo v 18. iteraci, přičemž relativní

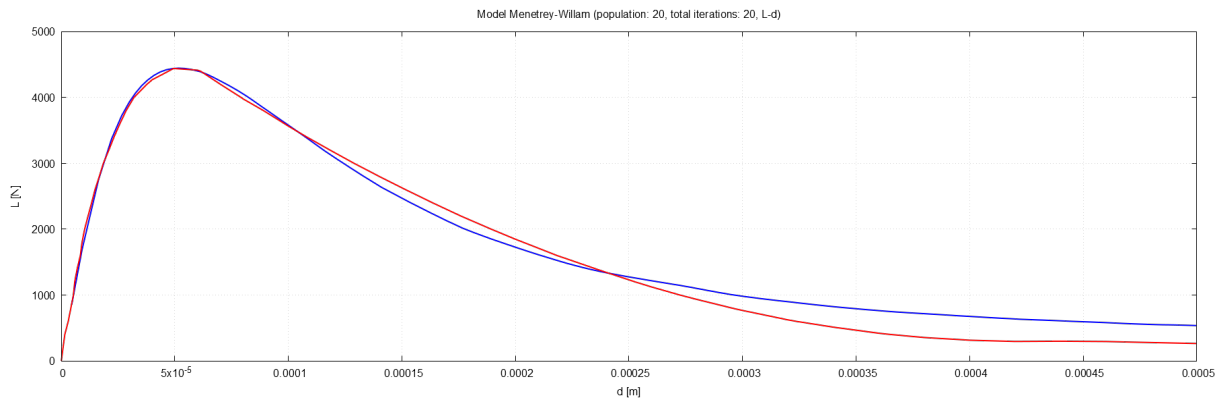
rozptyl dosáhl velikosti $\bar{\rho} = 0,24310$ a výsledná chyba RMSE nabyla hodnoty 160,39137.



Obrázek 8.16: Vývoj populace při identifikaci E a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^C , it.: 20, pop.: 50)



Obrázek 8.17: Vývoj populace při identifikaci G_{f_t} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^C , it.: 20, pop.: 50)



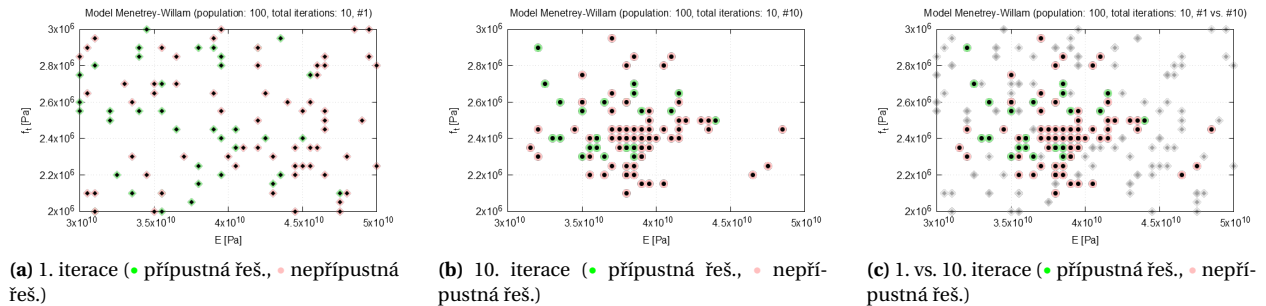
Obrázek 8.18: Výsledné $L - d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^C , it.: 20, pop.: 50)

Nalezení lepší varianty v případě poloviční velikosti populace potvrzuje závěry učiněné na základě výsledků optimalizace průřezu tláčeného sloupu v sekci 7.2.3, nicméně hodnota relativního rozptylu přípustných řešení byla vyšší. Uvažuje-li se však hodnota relativního rozptylu částic všech řešení v poslední iteraci, pak je v případě populace o velikosti 50 částic hodnota rovna $\bar{\rho}_{all} = 0,20870$ a pro populaci o 100 částicích rovna $\bar{\rho}_{all} = 0,24653$. Grafické vyjádření výsledků formou grafů poloh částic v 1. a 20. iteraci a srovnání $L - d$ křivky pro návrhový vektor nalezeného minima se vzorovou křivkou je uvedeno na obrázcích 8.16a – 8.17c a 8.18.

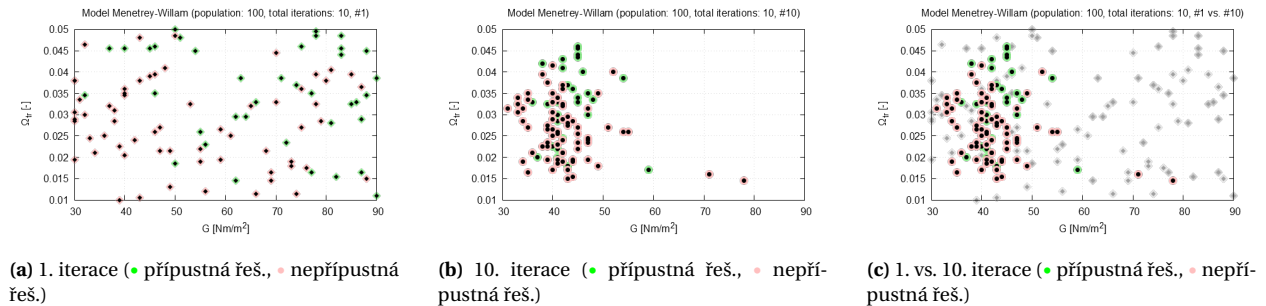
8.2.3 Výsledky identifikace – diskrétní charakter parametrů

Analýza inverzní identifikace s uvažováním diskrétního charakteru parametrů byla provedena s cílem prokázat realizovatelnost této úlohy při uvažování předem definované množiny realizací návrhových proměnných. Při tomto charakteru parametrů dochází na jedné straně k redukci počtu možných variant a zdánlivému zjednodušení úlohy, ale na straně druhé lze očekávat snížení přesnosti vlivem voleného kroku jednotlivých návrhových proměnných.

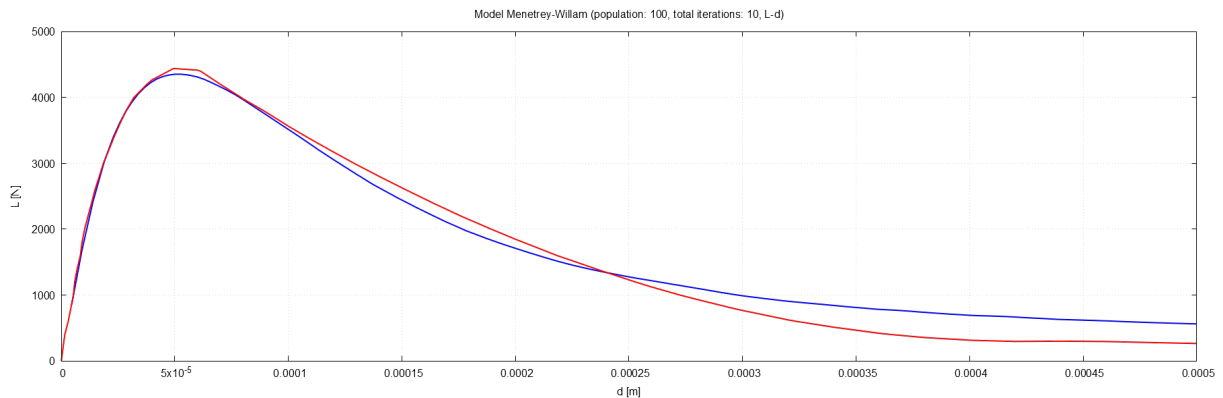
Dosažené výsledky vykazovaly, stejně jako v případě spojitého charakteru parametrů, zlepšení při hledání minima pro poloviční variantu populace, přičemž příslušný relativní rozptyl částic přípustných řešení resp. všech řešení v poslední iteraci nabyl velikosti $\bar{\rho} = 0,20246$ resp. $\bar{\rho}_{all} = 0,19172$. Hodnota účelové funkce nalezeného minima měla hodnotu 170,2131. V případě plné velikosti populace byla hodnota účelové funkce $RMSE = 172,38902$ a příslušné rozptyly částic přípustných a všech řešení v poslední iteraci byly $\bar{\rho} = 0,20892$ a $\bar{\rho}_{all} = 0,22100$.



Obrázek 8.19: Vývoj populace při identifikaci E a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)



Obrázek 8.20: Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)



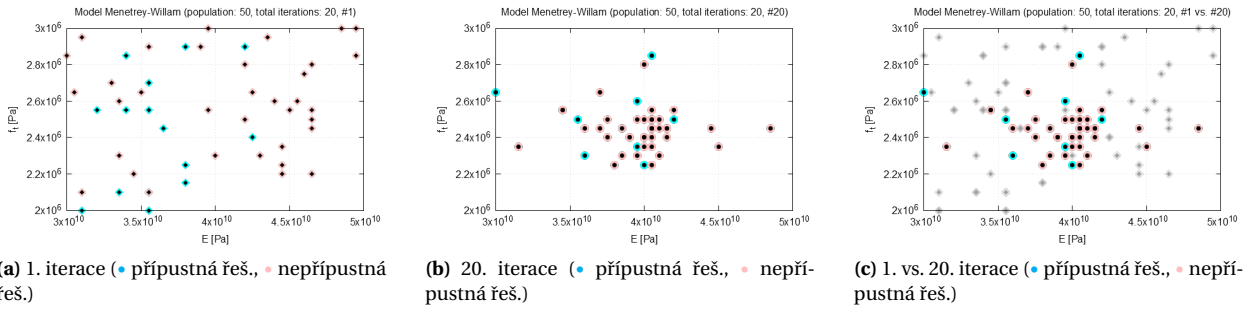
Obrázek 8.21: Výsledné $L-d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)

Srovnání poloh částic v první a poslední iteraci pro populaci o velikosti 100 resp. 50 je dokumentována pomocí obrázků 8.19a – 8.20c resp. 8.22a – 8.23c a grafické porovnání $L-d$ křivek pro dosažená minima s původní experimentální křivkou je zobrazeno na obrázcích 8.21 a 8.24.

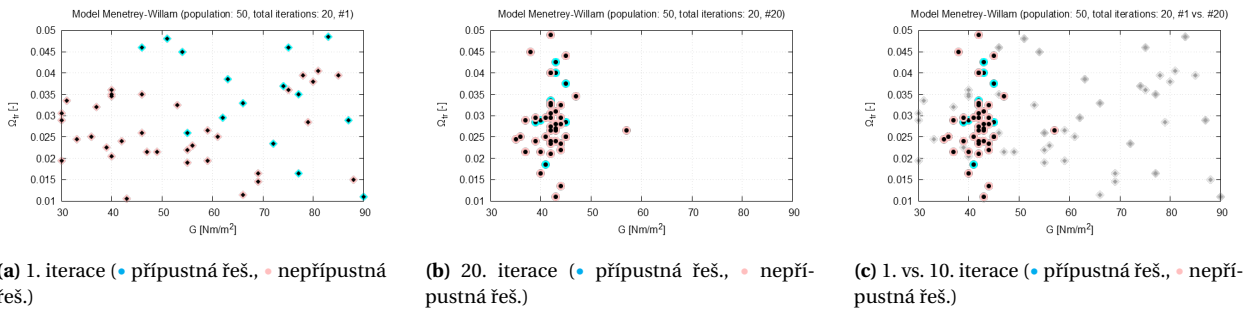
Celková sumarizace výsledků včetně srovnání vůči hodnotám získaným při identifikaci pomocí alg. MOGA v systému ANSYS jsou uvedeny v tabulce 8.4.

8.2.4 Shrnutí

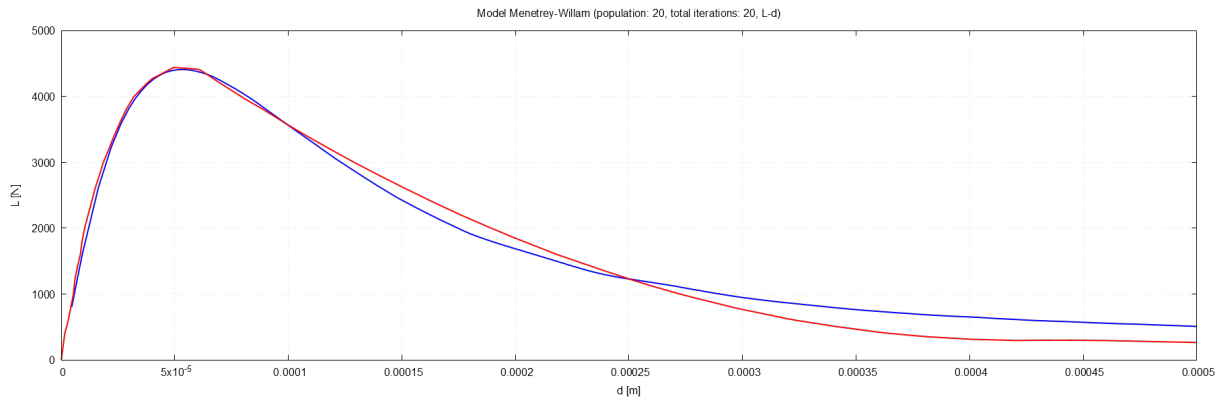
Výsledky uvedené na předcházejících stranách ukazují, že s implementovaným algoritmem PSOA bylo dosaženo výsledků podobné přesnosti jako při použití algoritmů dostupných v komerčních softwaro-



Obrázek 8.22: Vývoj populace při identifikaci E a f_t pomocí alg. PSOA (par.: X^d , it.: 20, pop.: 50)



Obrázek 8.23: Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: X^d , it.: 20, pop.: 50)



Obrázek 8.24: Výsledné $L-d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: X^d , it.: 20, pop.: 50)

Tabulka 8.3: Intervaly návrhových proměnných při identifikaci pomocí alg. PSOA

Par.	Jednotka	od	do	krok
E	[GPa]	30,0	50,0	0,5
f_t	[MPa]	2,00	3,00	0,05
G_{ft}	[Nm/m ²]	30	90	1
Ω_{tr}	[-]	0,0100	0,0500	0,0005

Tabulka 8.4: Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. PSOa z 3PBT testu

char. par.	nastavení	X_{red}	$ \Delta_X [-]$	$ \delta_X [%]$	RMSE [N]	$ \Delta_f [-]$	$ \delta_f [%]$
X^c	pop.: 100, it.: 10	$38,126 \cdot 10^9$	$2,788 \cdot 10^9$	6,813	164,16659	21,037	14,698
		$2,448 \cdot 10^6$	$0,152 \cdot 10^6$	6,615			
		43,385	6,269	12,626			
		0,01882	–	–			
X^c	pop.: 50, it.: 20	$37,919 \cdot 10^9$	$2,995 \cdot 10^9$	7,321	160,39137	17,261	12,060
		$2,472 \cdot 10^6$	$0,176 \cdot 10^6$	7,678			
		42,211	7,443	14,990			
		0,02072	–	–			
X^d	pop.: 100, it.: 10	$38,000 \cdot 10^9$	$2,914 \cdot 10^9$	7,122	172,38902	29,25902	20,442
		$2,400 \cdot 10^6$	$0,104 \cdot 10^6$	4,530			
		42,000	7,654	15,415			
		0,0270	–	–			
X^d	pop.: 50, it.: 20	$35,500 \cdot 10^9$	$5,414 \cdot 10^9$	13,233	170,2131	27,0831	18,922
		$2,500 \cdot 10^6$	$0,204 \cdot 10^6$	8,885			
		41,000	8,654	17,429			
		0,0185	–	–			

vých nástrojích. Maximální odchylka byla zaznamenána v případě diskrétního charakteru návrhových proměnných a při použití plné populace o velikosti 100 částic, přičemž hodnota této odchylky dosáhla 20,442 %. Důvodem uvedeného rozdílu je použití diskrétních parametrů, kdy snížením velikosti kroku by mělo docházet ke zpřesňování a přiblížení k řešení se spojitými parametry. Dále lze odchylku připisat použití novější verze materiálové knihovny, jelikož jak lze pozorovat na srovnání obrázků 8.6 a 8.15, 8.18, 8.21, 8.24, ani v jednom případě nebylo možné dosáhnout zarovnání konců $L-d$ diagramů. Hodnoty odchylek jednotlivých parametrů ukazují, že nalezená řešení se nachází blízko globálního minima.

Prokázána je tímto použitelnost optimalizačních technik založených na napodobování chování početných populací živočichů na problematiku zpětné identifikace parametrů komplexního materiálového modelu z experimentálních dat. Vzhledem k množství nepřijatelných řešení odpovídajících nekonvergujícím řešením vykázal algoritmus vysokou míru robustnosti, která byla ovšem vykoupena dosažením minima nižší avšak přijatelné přesnosti.

8.2.5 Identifikace parametrů *Kelvinova řetězce*

Metoda zpětné identifikace parametrů byla aplikována také na viskózní reologický model *Kelvinova řetězce*¹. Tento materiálový model byl implementován do systému *RFEM* pro simulace dotvarování betonu tak, že vyžaduje definici celkem 14 parametrů. Příslušná Dirichletova řada aproximující funkci dotvarování má tedy tvar

$$\varphi(t) = \left[E_0 + \sum_{j=1}^7 \alpha_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\Gamma_j}} \right) \right], \quad (8.10)$$

kde E_0 je modul pružnosti betonu, $\alpha_j = E_j$ a

$$\Gamma_j = \frac{E_j}{\eta_j} \quad (8.11)$$

Z pohledu praktického použití není přímá definice vstupních parametrů uživatelem realizovatelná, přestože jsou dvojice E_j a η_j fyzikálně reprezentovatelné jako tuhosti a viskozity jednotlivých článků řetězce, jediná dostupná charakteristika v normativním předpisu [127] je křivka dotvarování (průběh součinitele dotvarování φ v čase t).

BAŽANT a kol. v [9] pro identifikaci koeficientů řady z experimentálních dat použití metody nejmenších čtverců, přičemž volbu retardačních časů Γ_j vyskytujících se v exponentech členů řady volili empiricky tak, aby bylo zajištěno rovnoměrné pokrytí časové osy v logaritickém měřítku. Kompletní identifikace všech parametrů lze však také určit jako kořeny polynomu, jehož koeficienty jsou determinanty matic získaných z hodnot aproximované funkce dotvarování a jejich derivací dle [95]. Problém hledání předem neznámých hodnot parametrů řady lze formulovat také jako optimalizační úlohu. Toto řešení je podrobně popsáno v pracích DISTEFANA [29] a PISTERA [105]. Tito autoři řešili identifi-kační problém jako nelineární optimalizační úlohu. Vzhledem k aktuální výkonnosti běžně dostupných počítačových sestav lze optimalizaci řešit ve velmi krátkém čase i hrubou silou pomocí algoritmů založených na imitaci přírodních procesů, jakou je například algoritmus PSOA. Přestože autoři [6, 9] považují za dostatečně přesné použití metody nejmenších čtverců, vyžaduje tato metoda odhad retardačních časů. Použití optimalizačního algoritmu lze považovat za zpřesnění. Pomocí optimalizace lze důkladněji prohledat prostor návrhových proměnných a najít odpovídající dvojice E_j a η_j , které přesněji vystihují zadanou funkci poddajnosti.

Navržená kombinace metody nejmenších čtverců byla testována na dvou sadách studií lišících se použitou účelovou funkcí. V rámci první sady testovacích studií byla uvažována účelová funkce formulovaná jako RMSE chyba

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2}{n}} \quad (8.12)$$

a v rámci druhé sady byla účelová funkce definována jako L_1 norma následujícím vztahem

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |y_i^* - y_i|, \quad (8.13)$$

kde y_i^* je hodnota součinitele dotvarování φ určená pomocí Dirichletovy řady a y_i je hodnota součinitele φ z normové křivky dotvarování a n je počet bodů křivky. V rámci každé ze zmiňovaných studií byl dále analyzován vliv velikosti populace a počtu iterací na přesnost a byl zkoumán vliv striktní penalizace částic při opuštění předem stanových intervalů hledaných parametrů. Hranice těchto intervalů byly v rámci algoritmu stanoveny jako 0,9 a 1,1 násobek hodnoty parametru získaného metodou nejmenších čtverců ve variantě bez penalizace, resp. 0,75 a 1,25 násobek ve variantě se striktní penalizací. Při překročení hranic intervalu byla v této variantě automaticky hodnota účelové funkce nastavena na hodnotu $+\infty$ a rychlost částice na hodnotu 0,0. Značení jednotlivých studií a použitá nastavení shrnuje dále uvedená tabulka 8.5.

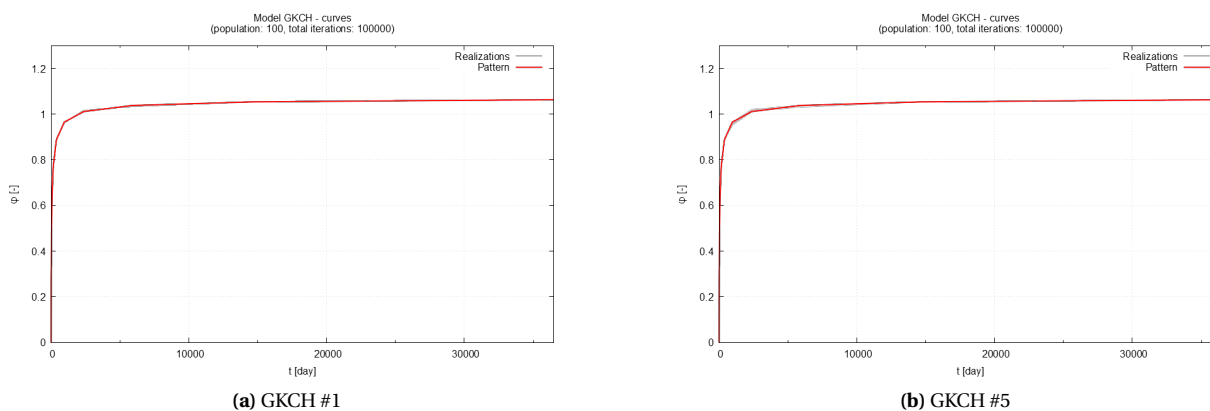
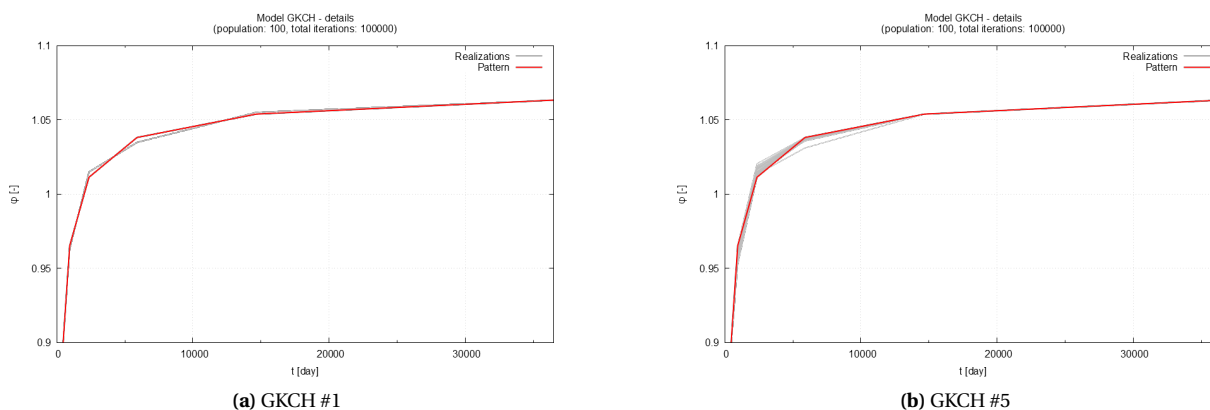
¹V anglicky psané literatuře se používá pojem *General Kelvin Chain* a proto bude v dalších částech textu práce využívána zkratka **GKCH**.

Tabulka 8.5: Přehled provedených studií včetně příslušných nastavení

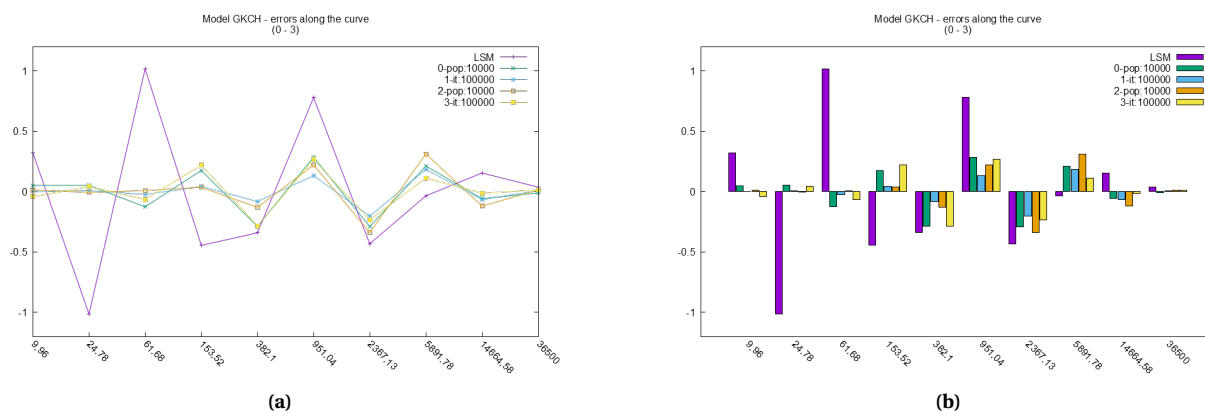
Studie	Typ účelové funkce f	Penalizace (○ - ne, ● - ano)	Populace	Počet iterací
GKCH #0	RMSE	○	$1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^4$	1000
GKCH #1	RMSE	○	100	$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$
GKCH #2	RMSE	●	$1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^4$	1000
GKCH #3	RMSE	●	100	$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$
GKCH #4	L_1	○	$1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^4$	1000
GKCH #5	L_1	○	100	$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$
GKCH #6	L_1	●	$1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^4$	1000
GKCH #7	L_1	●	100	$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$

Výsledky identifikace

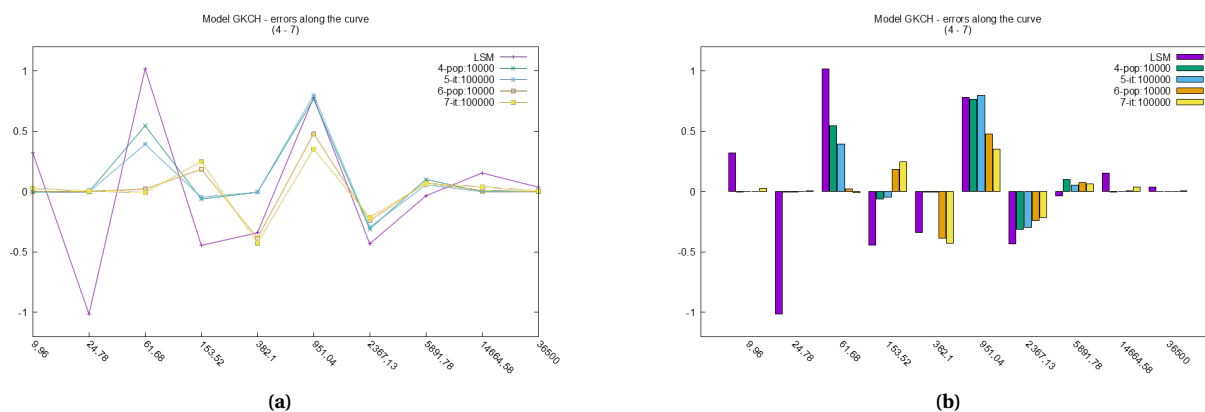
Všechny dosažené výsledky prokázaly účinnost použité metody identifikace parametrů, kdy ve všech případech došlo pomocí PSOA ke zpřesnění. Uvedené tvrzení lze dokumentovat průběhy součinitele dotvarování v čase na obrázcích 8.25a, 8.25b, 8.26a a 8.26b, pocházejících ze studií GKCH #1 a GKCH #5, v rámci nichž došlo k největšímu zlepšení vůči odhadu pomocí metody nejmenších čtverců a tedy k dosažení nejnižší hodnoty účelové funkce. Příslušné hodnoty lze dohledat v tabulce 8.6. V rámci těchto


Obrázek 8.25: Srovnání nejlepších $\varphi - t$ křivek

Obrázek 8.26: Detail srovnání nejlepších $\varphi - t$ křivek

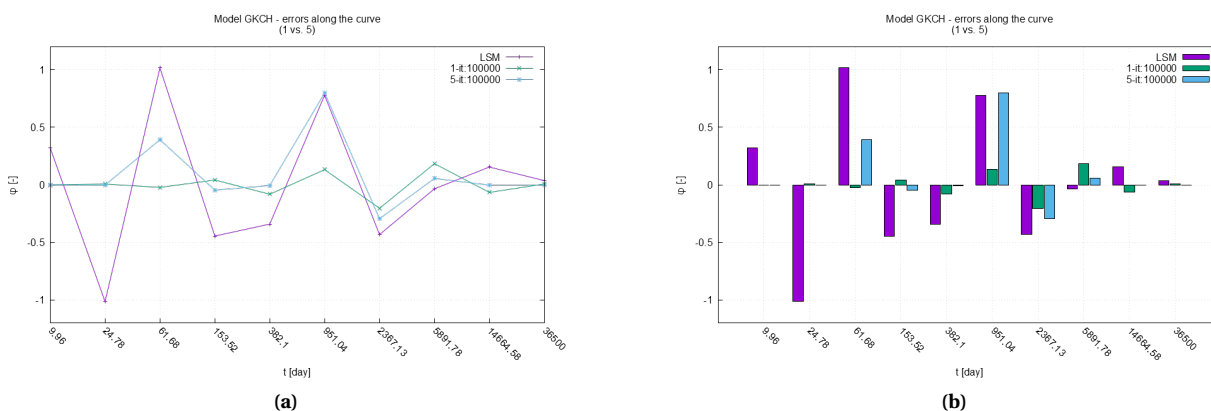
studii bylo využito maximálního počtu iterací, což poukazuje na charakteristickou vlastnost algoritmu PSOA, který lépe konverguje při zvyšování počtu iterací než při zvětšování velikosti populace částic. Stejnou tendenci lze pozorovat napříč provedenými studiemi, jejichž grafické výstupy jsou s ohledem na jejich relativně velké množství situovány do přílohy B.



Obrázek 8.27: Srovnání provedených studií GKCH #0 až #3 (úč. funkce: RMSE)



Obrázek 8.28: Srovnání provedených studií GKCH #4 až #7 (úč. funkce: L_1)



Obrázek 8.29: Srovnání provedených studií GKCH #1 vs. #5

Porovnání výsledků s ohledem na použitou účelovou funkci lze provést pomocí grafů na obrázcích 8.27a – 8.28b. Na zmíněných grafech lze v detailu pozorovat odchylky výsledné křivky dotvarování a křivky odpovídající odhadu pomocí metody nejmenších čtverců ve významných časových uzlech od zadané normové křivky, přičemž lze konstatovat, že lepších výsledků lze dosáhnout při použití účelové funkce definované pomocí RMSE chyby. Grafy na obrázcích 8.29a a 8.29b srovnávají nejlepší výsledky dosažené v rámci jednotlivých sad studií uvedenou skutečnost ratifikují.

Ze všech výsledků je patrné, že použitá metoda vykazuje problémy s nalezením optimálních hodnot parametrů ovlivňujících podobu střední části křivky. V této části dochází s ohledem na nízký sklon k oscilacím, což je zřejmě důsledek existence většího množství lokálních minim.

Tabulka 8.6: Dosažené výsledky identifikace parametrů modelu GKCH algoritmem PSOA

Studie	Typ účelové funkce f	$f^{\text{LSM}} [-] \cdot 10^{-3}$	$f_{\text{avg}}^{\text{PSOA}} [-]$	δ [%]	poměr r [-]
0	RMSE	4,05997	2,52388	37,84	1,46
			1,89320	53,37	1,10
			1,72655	57,47	1,00
1	RMSE	4,05997	2,52388	37,84	2,44
			1,64329	59,52	1,59
			<u>1,03238</u>	<u>74,57</u>	<u>1,00</u>
2	RMSE	4,05997	1,91880	52,74	1,10
			1,82208	55,12	1,04
			1,74611	56,99	1,00
3	RMSE	4,05997	1,91880	52,74	1,27
			1,85484	54,31	1,22
			1,51639	62,65	1,00
4	L_1	33,00641	17,03653	48,38	1,32
			13,31887	59,65	1,03
			12,90919	60,89	1,00
5	L_1	33,00641	17,03653	48,38	1,35
			13,69066	58,52	1,09
			<u>12,57318</u>	<u>61,69</u>	<u>1,00</u>
6	L_1	33,00641	23,45167	28,95	1,51
			19,66237	40,43	1,25
			15,56606	52,84	1,00
7	L_1	33,00641	23,45167	28,95	1,66
			19,61190	40,58	1,39
			14,13406	57,18	1,00

Shrnutí

Z doložených výsledků včetně těch uvedených v příloze B lze považovat aplikaci metody identifikace hodnot parametrů *Kelvinova řetězce* pomocí optimalizace algoritmem PSOA za korektní a použitelné jako zpřesnění odhadu metodou nejmenších čtverců (MNČ). Jako slabinu použitého řešení lze považovat právě počáteční odhad MNČ, který je závislý na empirické volbě retardačních časů Γ_j . Lze totiž předpokládat existenci takové křivky dotvarování, pro níž budou nevhodnou volbou retardačních časů odhadnuty špatné startovací hodnoty parametrů pro běh optimalizačního algoritmu. Přestože algoritmus vykázal dobrou schopnost nalézt minimum při řešení neomezené optimalizační úlohy, bude pozornost věnována vývoji zlepšení počátečního odhadu MNČ a problematice volby retardačních časů.

Dílčím cílem práce bylo ověření použitelnosti a následné nasazení metod optimalizace na identifikaci parametrů materiálových modelů stavebních materiálů používaných při numerických simulacích statických úloh. Předpoklady pro úspěšné použití optimalizace na problematiku identifikace byly příznivé, jelikož se jedná vedle umělých neuronových sítí o druhou nejpoužívanější metodu napříč technickými obory včetně stavebního inženýrství. Dle analýzy současného stavu poznání v kapitole 2 však lze nalézt aplikace spíše v oblasti geotechnických úloh využívajících silně nelineárních modelů zemin a skalních hornin. Použití optimalizačních metod a zvláště moderních meta-heuristických algoritmů na hledání parametrů konstitutivních modelů betonu není tak rozsáhlé, přestože se vzhledem ke komplexnosti vlastností betonu a odpovídající paletě modelů jedná o problematiku velmi aktuální. Tento dílčí cíl byl realizován nejprve s použitím genetického algoritmu MOGA v systému ANSYS, kdy byly identifikovány parametry elastoplastického materiálového modelu betonu *Menetrey-Willam* z databáze *multiPlas*. Pro ověření metody byly provedeny celkem 2 dílčí studie, přičemž v rámci první bylo využito experimentálních dat z jednoduchého experimentu v třibodovém ohybu a v druhé studii bylo využito publikovaných dat z tahových zkoušek označovaných *Compact Tension Test* (CTT). V obou případech se dosáhlo výborných výsledků, což bylo považováno za výchozí předpoklad k implementaci vlastního algoritmu pro potřeby identifikace parametrů *Kelvinova reologického řetězce* z křivky dotvarování pro program *RFEM*.

Dosažení hlavního cíle bylo realizováno prostřednictvím implementace optimalizačního algoritmu *Particle Swarm* (PSOA) a jeho nasazením na problém identifikace předem neznámých parametrů dvou materiálových modelů betonu. Pomocí uvedeného algoritmu využívajícího kombinaci principů kognitivního a sociálního učení byla nejprve zopakována analýza identifikace na elastoplastickém modelu *Menetrey-Willam*, přičemž bylo dosaženo srovnatelných výsledků jako při použití dostupného genetického algoritmu. Tento závěr byl považován za validaci provedené implementace a zároveň jako predikce použitelnosti PSOA pro zadané účely v systému *RFEM*. Za hlavní výsledek vyjadřující splnění cíle lze považovat ono úspěšné využití naprogramovaného řešení pro zpřesnění odhadu tuhostí a viskozit v *Kelvinově řetězci* z předem známé křivky dotvarování. Z uvedených výsledků vyplývá, že použitelnost odhadu metodou nejmenších čtverců je zúžena na případy, kdy jsou vzorová data tvořena mračnem bodů. V situaci, kdy je na vstupu pouze jedna křivka se ukazuje, že pomocí metody nejmenších čtverců nelze dosáhnout požadované přesnosti v navazujícím numerickém řešení. Navržený postup využívající implementovaného algoritmu umožňuje výrazné zpřesnění hledaných hodnot parametrů řetězce a v konečném důsledku zpřesnění výpočtu odezvy řešené konstrukce. Jako nevýhodu popsaného postupu lze označit oscilaci výsledků při opakovaném výpočtu, což je však přirozený důsledek použité metody využívající náhodné inicializace počáteční populace částic. Odstranění uvedeného negativa lze docílit kombinací navýšení počtu populace a iterací algoritmu, což bohužel vede ke zvýšení nároků na čas. Nicméně aktuální implementace byla provedena bez použití paralelizace výkonného kódu a tak existuje reálný potenciál ke zpřesnění bez negativního dopadu na délku výpočtu. Použití paralelních cyklů uvnitř algoritmu je předmět budoucího vývoje, který je nutnou podmínkou pro konkurenceschopnost.

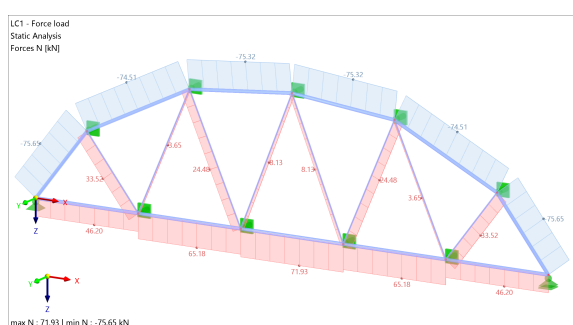
Softwarová implementace algoritmu PSOA byla doplněna ještě *Nelder-Meadovou optimalizační strategií* (NMOA), jejíž teoretický popis, příklady použití a testy byly v této práci také publikovány. Programování bylo provedeno v takové míře obecnosti, aby výsledný produkt byl vedle identifikace použitelný i pro klasickou konstrukční optimalizaci dimenzí a tvaru konstrukce. Uvedeného cíle bylo dosaženo a v aktuální nové verzi *RFEM 6*, která umožňuje provádění konstrukčních optimalizací je naprogramované knihovny včetně jejich algoritmů plně využíváno. Představená aplikace meta-heuristického algoritmu na problematiku identifikace předem neznámých parametrů materiálových modelů a na problematiku

konstrukční optimalizace lze považovat za aplikaci umělé inteligence při návrhu a posouzení stavebních konstrukcí, nejen z betonu. Předmětem dalšího vývoje je vedle paralelizace algoritmu jeho použití na problematiku topologické optimalizace, která představuje v kombinaci s tvarovou a rozměrovou optimalizací značný kombinatorický problém.

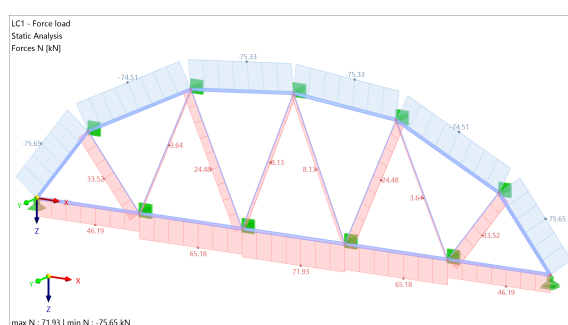
A | Výsledky tvarové optimalizace

A.1 Diskrétní charakter parametru

Na níže uvedených obrázcích A.1a, A.2a, A.3a, A.4a a A.5a jsou zobrazeny výsledky na optimální variantě konstrukce při výpočtu 0,5 % ze všech mutací. Na obrázcích A.1b, A.2b, A.3b, A.4b a A.5b lze pak pozorovat výsledky optimální varianty získané při výpočtu 0,05 % ze všech možných mutací.

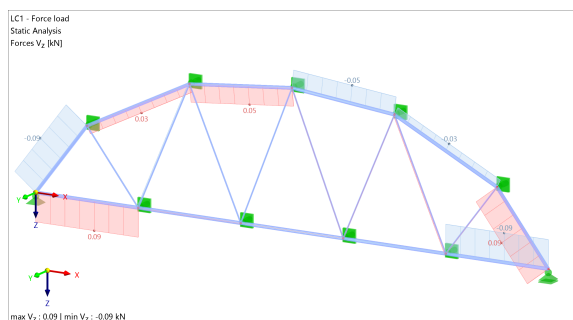


(a)

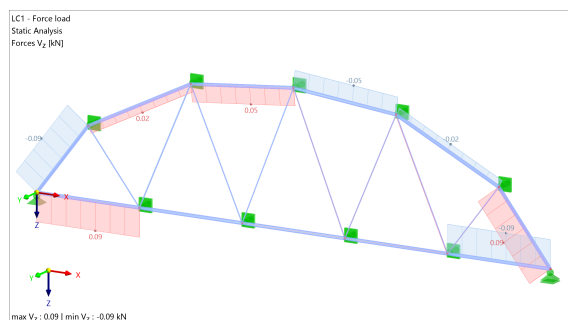


(b)

Obrázek A.1: Srovnání dosažených výsledků - normálové síly N

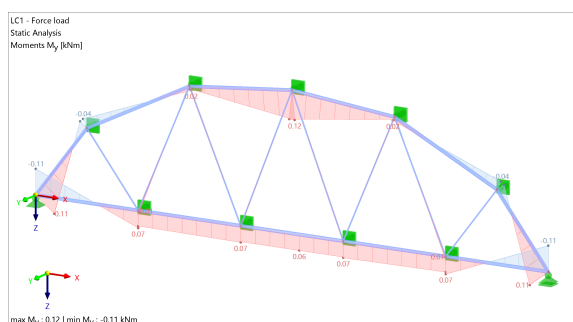


(a)

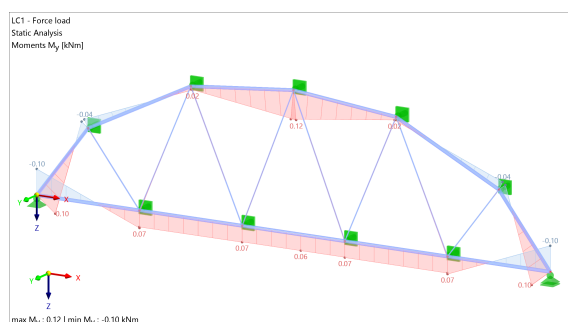


(b)

Obrázek A.2: Srovnání dosažených výsledků - posouvající síly V_z

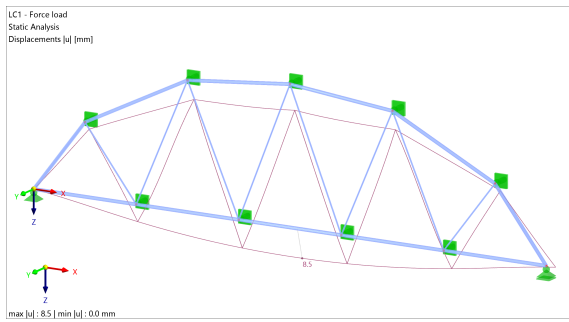


(a)

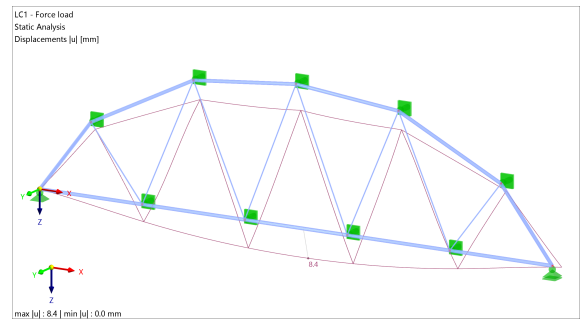


(b)

Obrázek A.3: Srovnání dosažených výsledků - ohybové momenty M_y

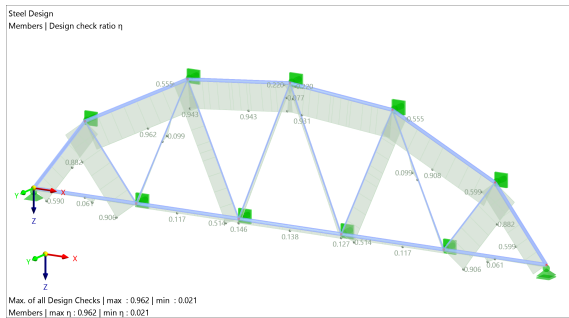


(a)

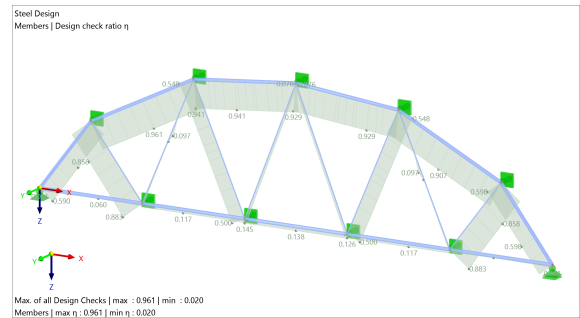


(b)

Obrázek A.4: Srovnání dosažených výsledků - celková deformace U_{tot}



(a)

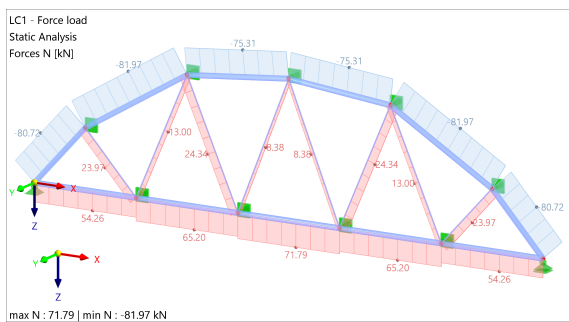


(b)

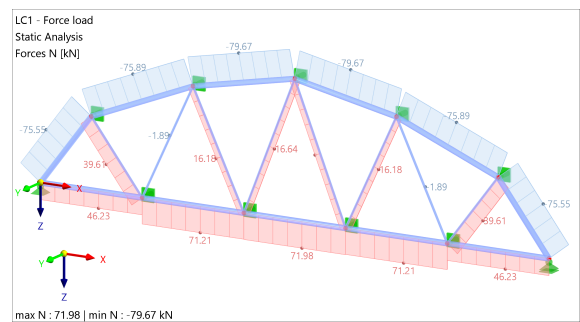
Obrázek A.5: Srovnání dosažených výsledků - využití prutů

A.2 Kombinace diskrétních parametrů a parametrů typu průřez

Na níže uvedených obrázcích A.6a, A.7a, A.8a, A.9a a A.10a jsou zobrazeny vnitřní síly, deformace a využití prutů na optimální variantě konstrukce při výpočtu 10 % ze všech mutací. Na obrázcích A.6b, A.7b, A.8b, A.9b a A.10b lze pak pozorovat stejné veličiny optimální varianty získané při výpočtu 1 % ze všech možných mutací.

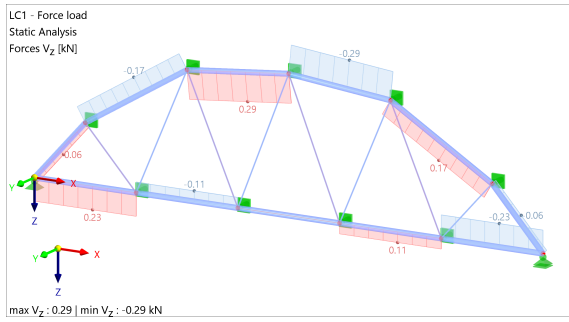


(a)

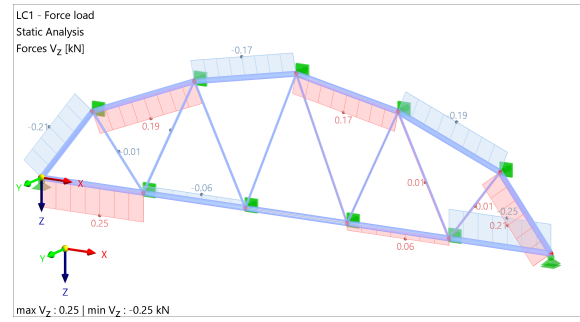


(b)

Obrázek A.6: Srovnání dosažených výsledků - normálové síly N

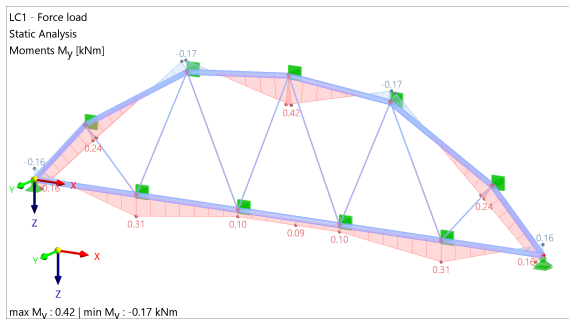


(a)

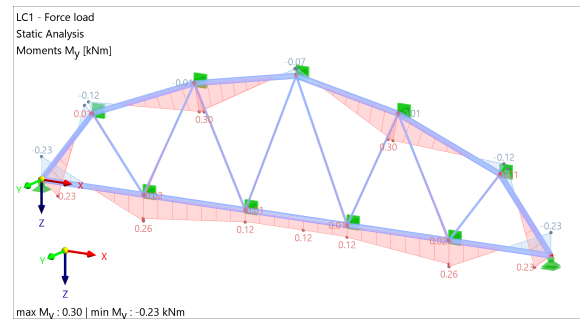


(b)

Obrázek A.7: Srovnání dosažených výsledků - posouvající síly V_z

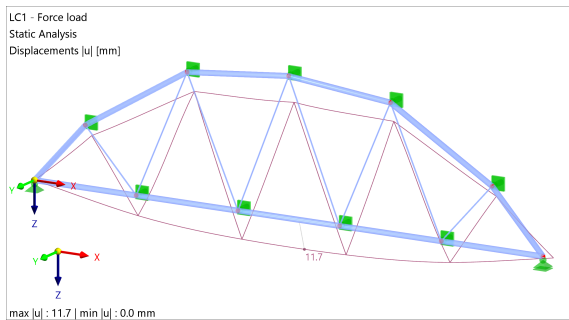


(a)

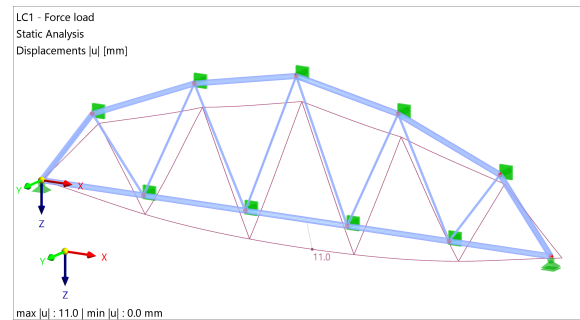


(b)

Obrázek A.8: Srovnání dosažených výsledků - ohybové momenty M_y

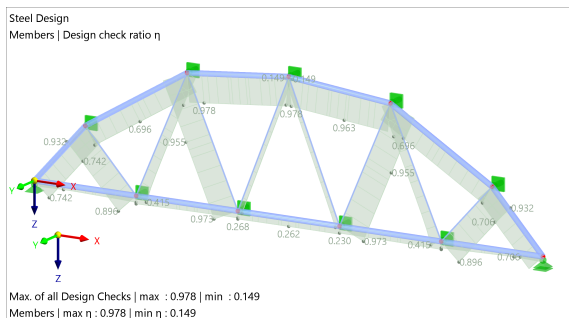


(a)

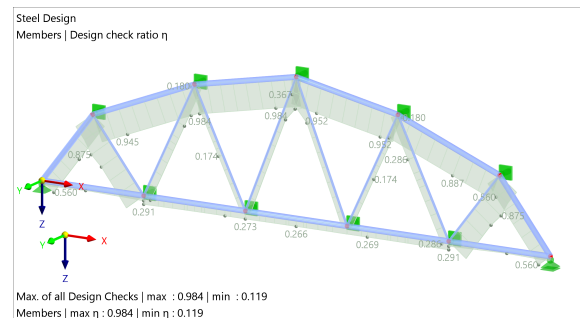


(b)

Obrázek A.9: Srovnání dosažených výsledků - celková deformace U_{tot}



(a)



(b)

Obrázek A.10: Srovnání dosažených výsledků - využití prutů

B | Obrazová příloha ke studiím identifikace modelu GKCH

Následující obrazová příloha obsahuje srovnání provedených realizací křivek dotvarování získaných identifikací parametrů modelu GKCH pomocí algoritmu PSOA s těmito nastaveními:

D.1 GKCH #0:

- **neomezený** opt. problém, **účelová funkce:** RMSE, **populace:** 100-10000, **iterace:** (konst.) 1000

D.2 GKCH #1:

- **neomezený** opt. problém, **účelová funkce:** RMSE, **populace:** (konst) 100, **iterace:** 1000-100000

D.3 GKCH #2:

- **omezený** opt. problém, **účelová funkce:** RMSE, **populace:** 100-10000, **iterace:** (konst.) 1000

D.4 GKCH #3:

- **omezený** opt. problém, **účelová funkce:** RMSE, **populace:** (konst) 100, **iterace:** 1000-100000

D.5 GKCH #4:

- **neomezený** opt. problém, **účelová funkce:** L_1 , **populace:** 100-10000, **iterace:** (konst.) 1000

D.6 GKCH #5:

- **neomezený** opt. problém, **účelová funkce:** L_1 , **populace:** (konst) 100, **iterace:** 1000-100000

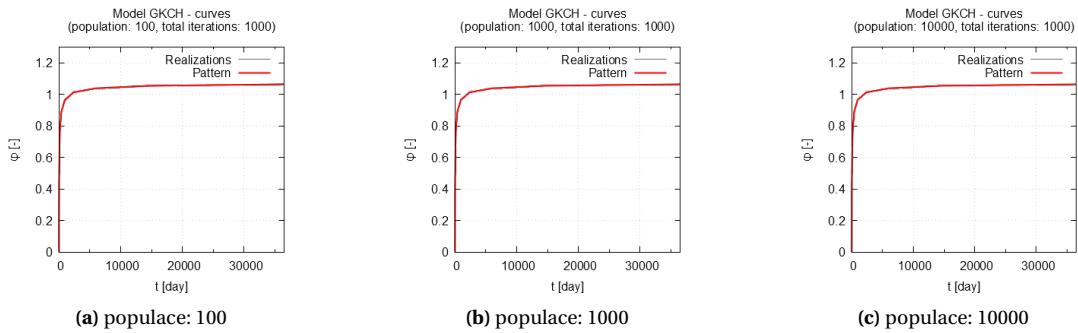
D.7 GKCH #6:

- **omezený** opt. problém, **účelová funkce:** L_1 , **populace:** 100-10000, **iterace:** (konst.) 1000

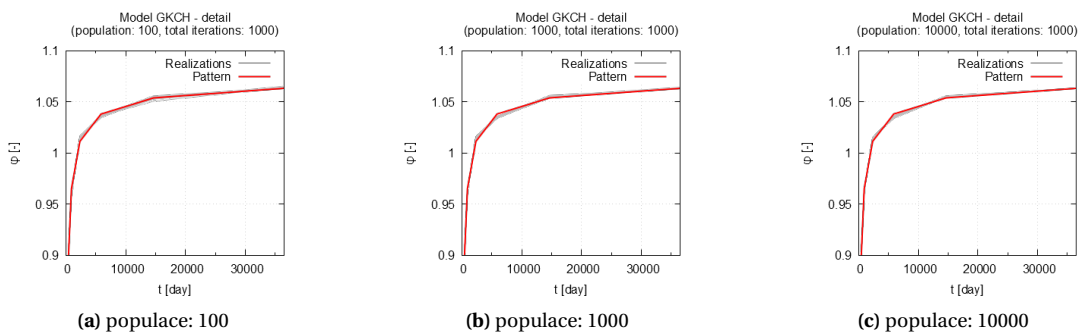
D.8 GKCH #7:

- **omezený** opt. problém, **účelová funkce:** L_1 , **populace:** (konst) 100, **iterace:** 1000-100000

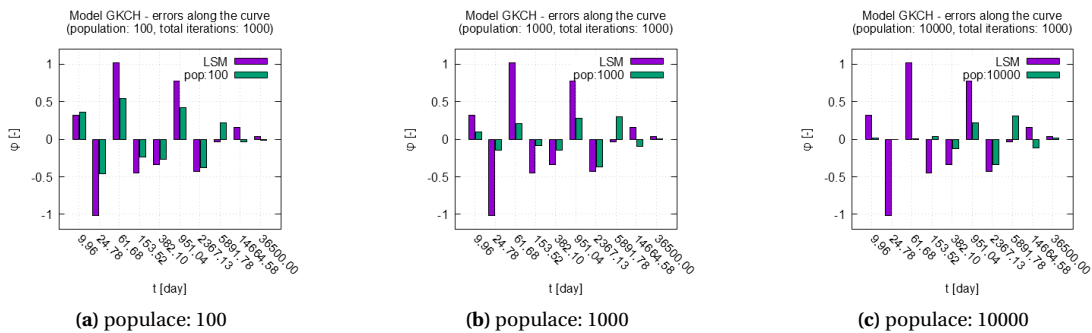
B.1 GKCH #0: RMSE, populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000



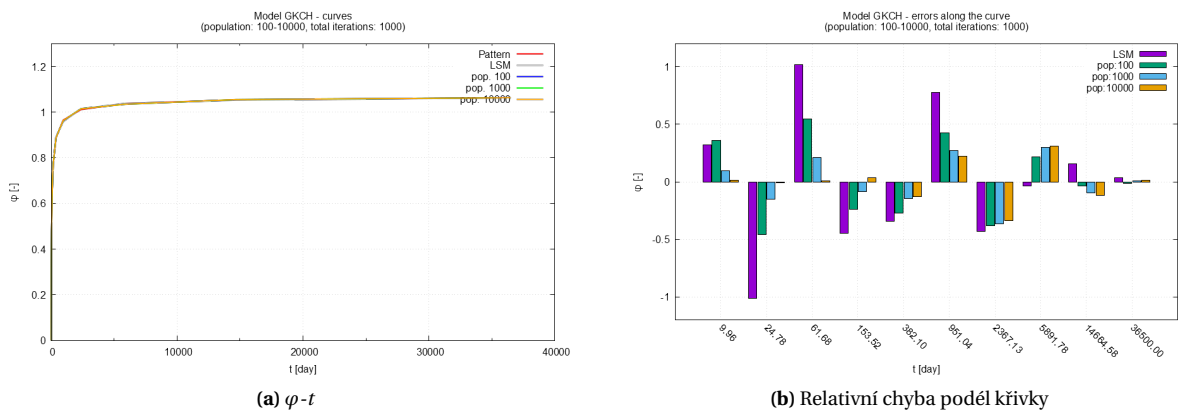
Obrázek B.1: Studie 0: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.2: Studie 0: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

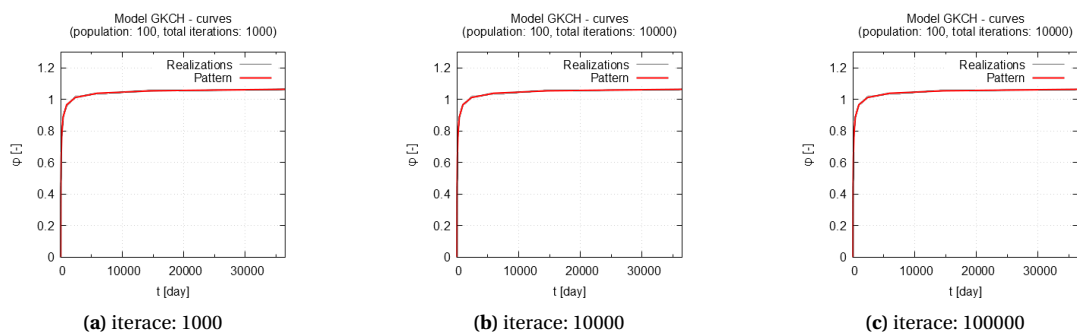


Obrázek B.3: Studie 0: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

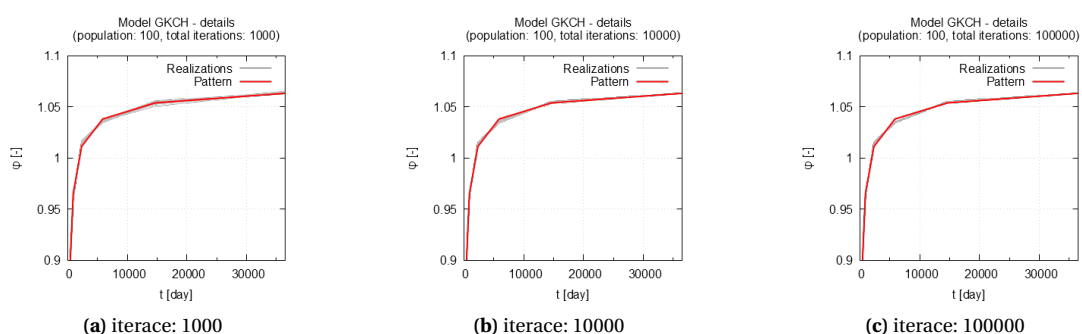


Obrázek B.4: Studie 0: výsledné srovnání

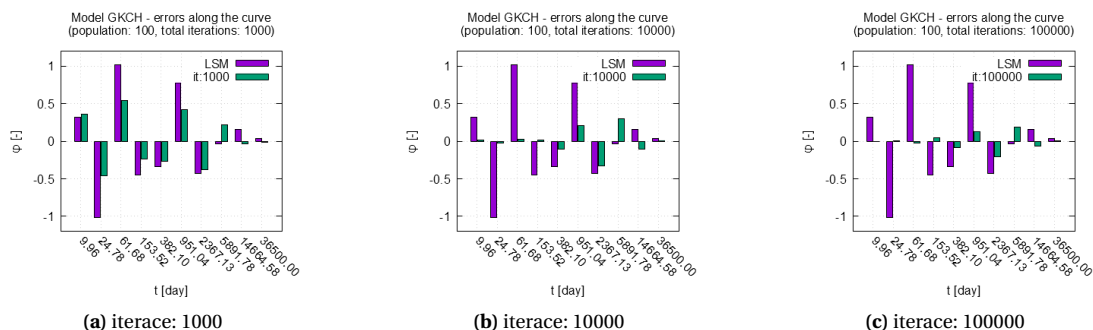
B.2 GKCH #1: RMSE, populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000



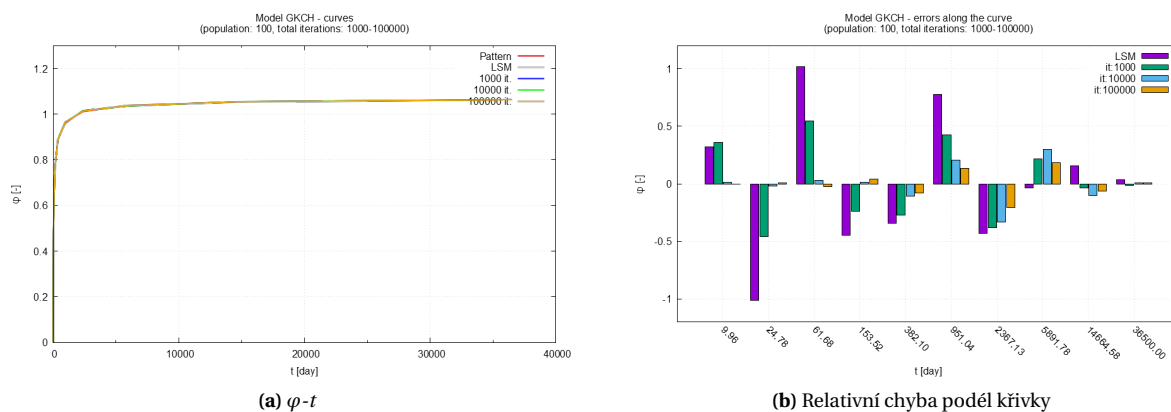
Obrázek B.5: Studie 1: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.6: Studie 1: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

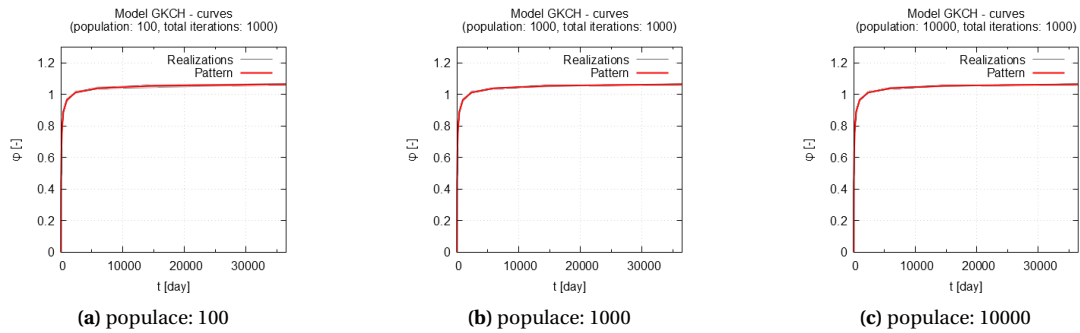


Obrázek B.7: Studie 1: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

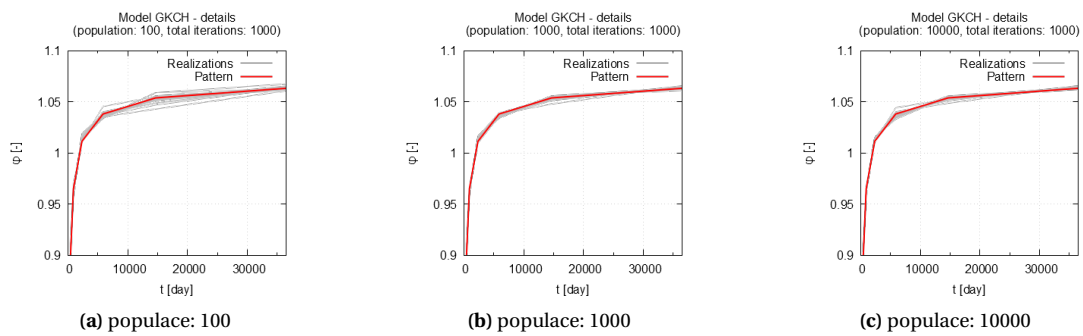


Obrázek B.8: Studie 1: výsledné srovnání

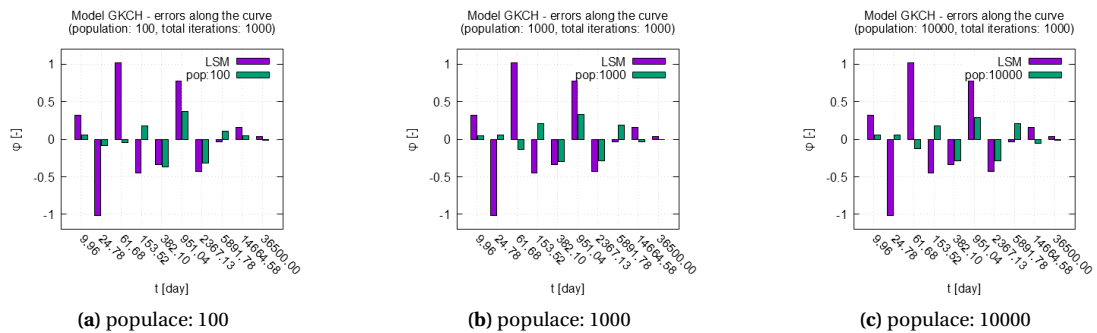
B.3 GKCH #2: RMSE, populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000



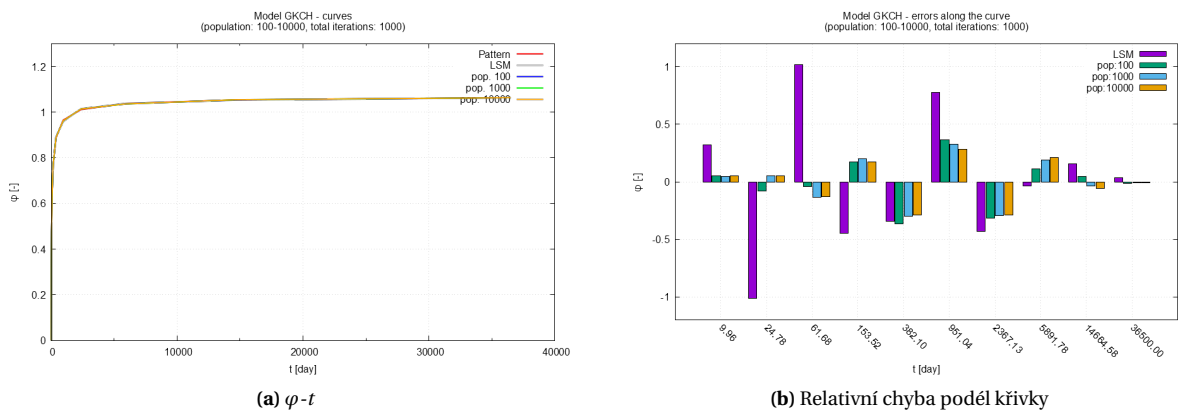
Obrázek B.9: Studie 2: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.10: Studie 2: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

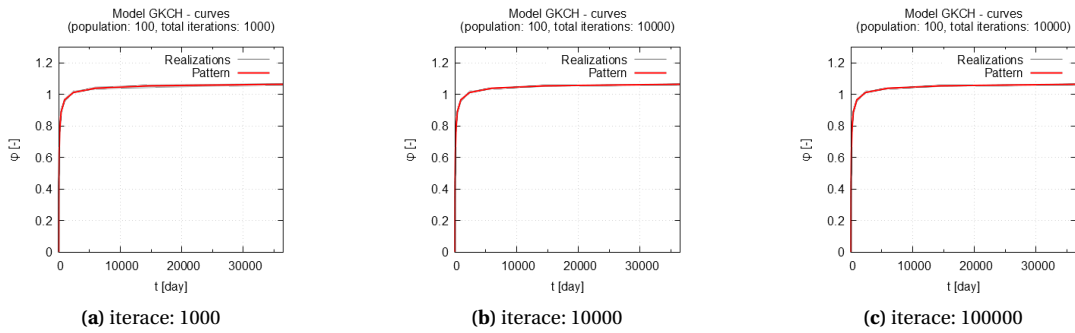


Obrázek B.11: Studie 2: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

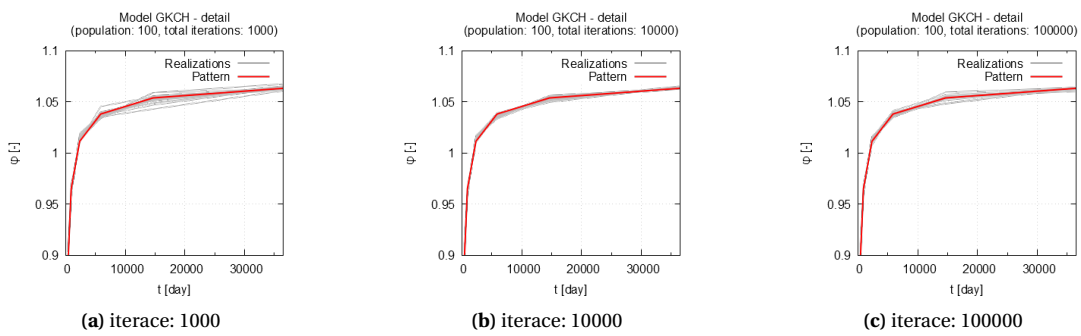


Obrázek B.12: Studie 2: výsledné srovnání

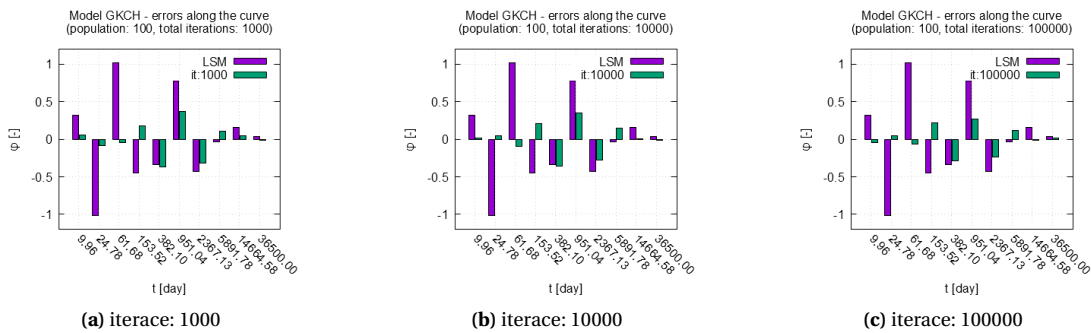
B.4 GKCH #3: RMSE, populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000



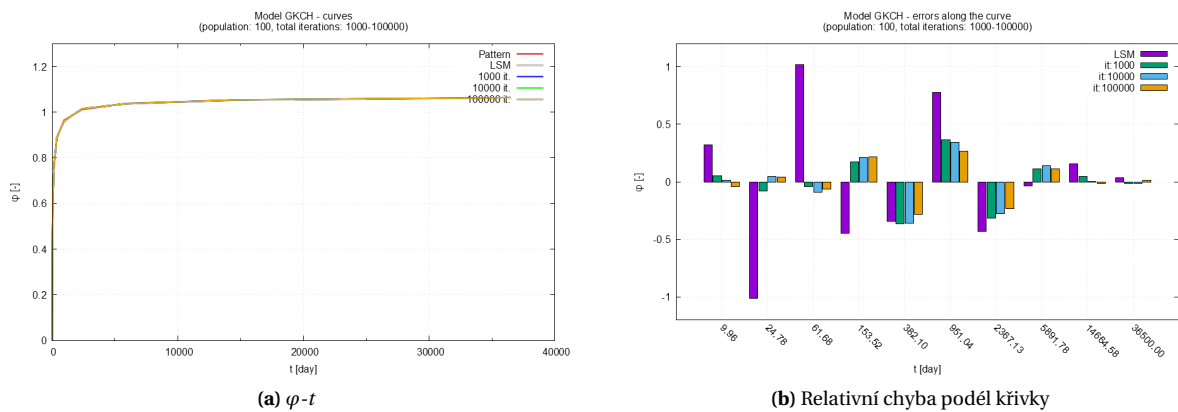
Obrázek B.13: Studie 3: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.14: Studie 3: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

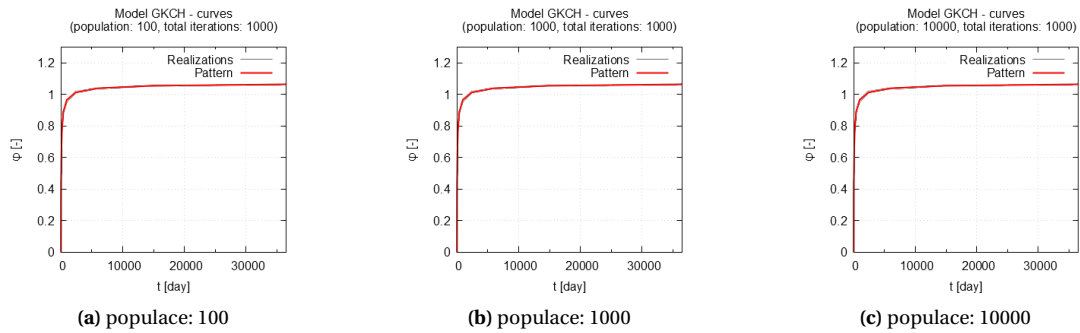


Obrázek B.15: Studie 3: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

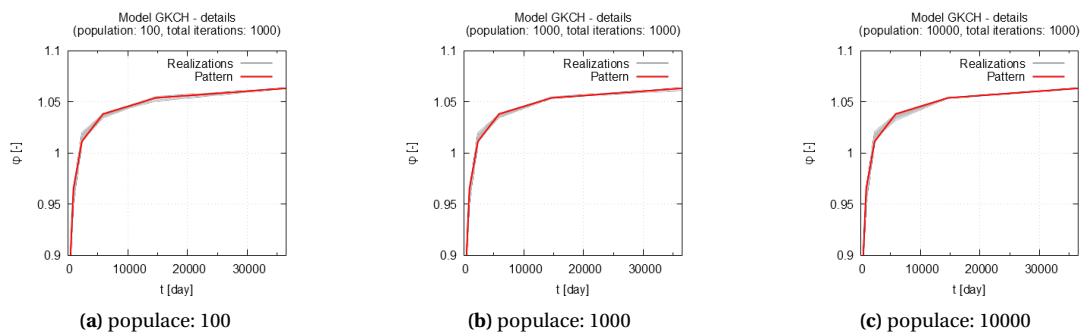


Obrázek B.16: Studie 3: výsledné srovnání

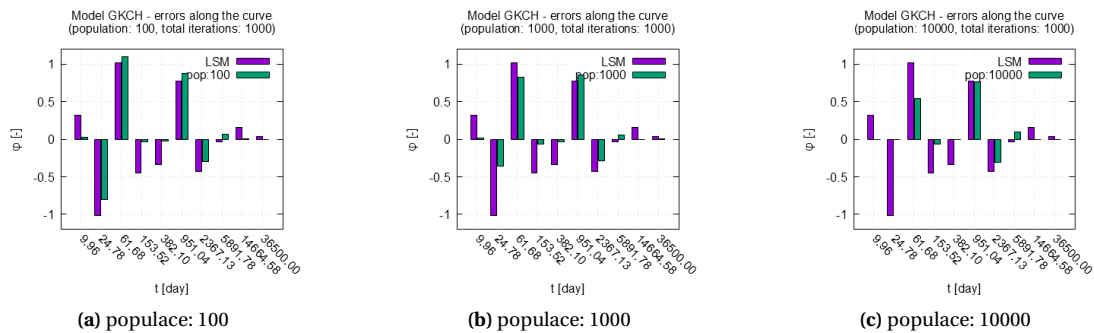
B.5 GKCH #4: L_1 , populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000



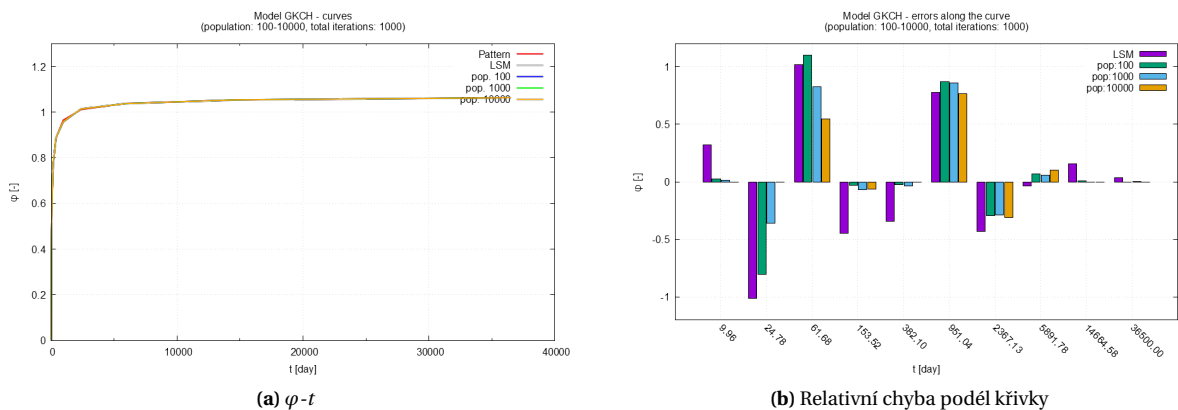
Obrázek B.17: Studie 4: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.18: Studie 4: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

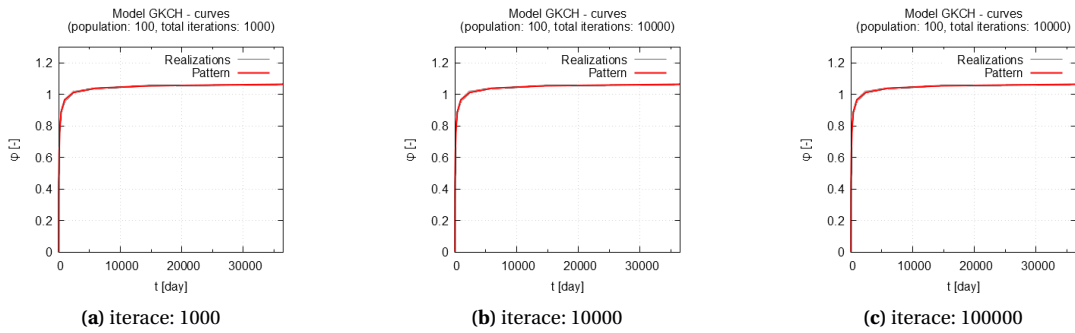


Obrázek B.19: Studie 4: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

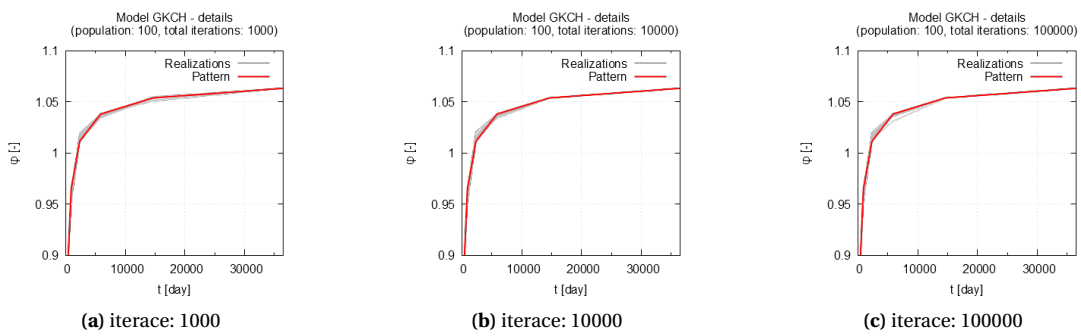


Obrázek B.20: Studie 4: výsledné srovnání

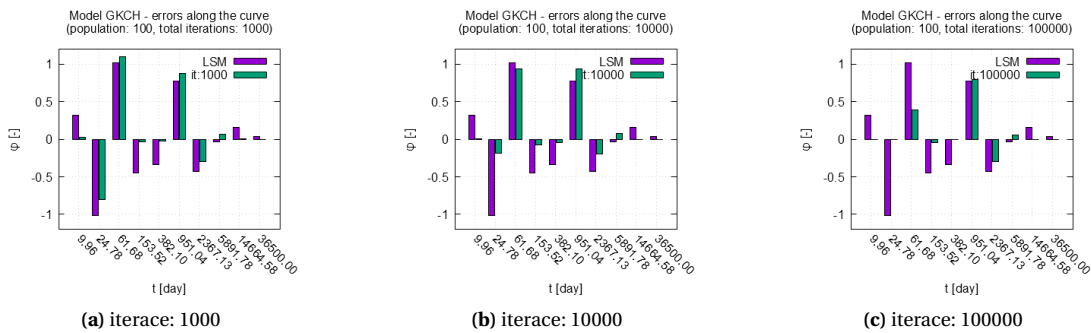
B.6 GKCH #5: L_1 , populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000



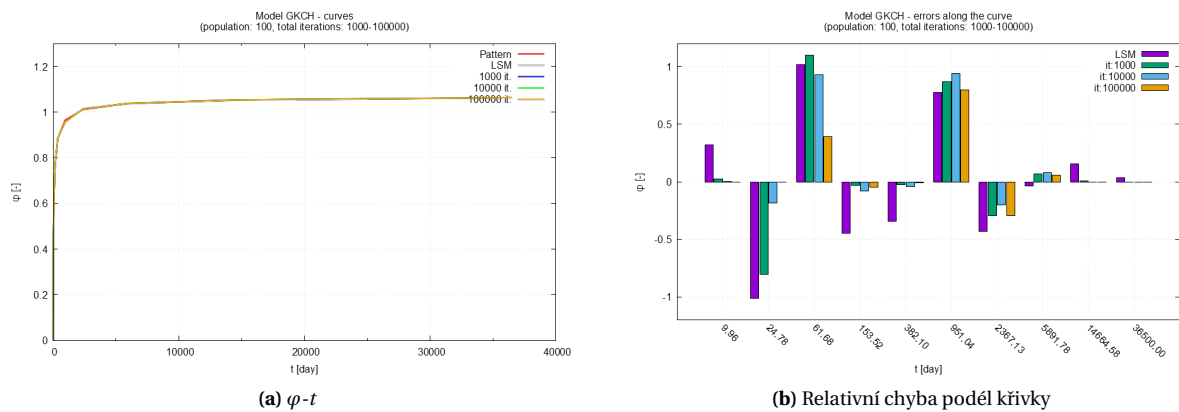
Obrázek B.21: Studie 5: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.22: Studie 5: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

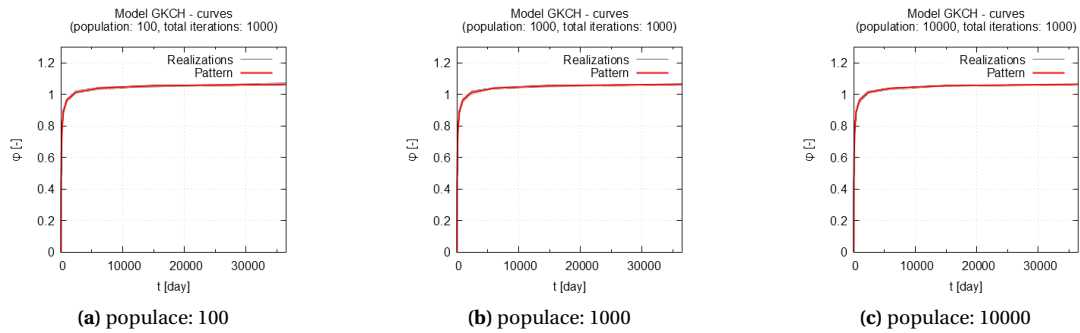


Obrázek B.23: Studie 5: srovnání relativních chyb podél φ - t křivky

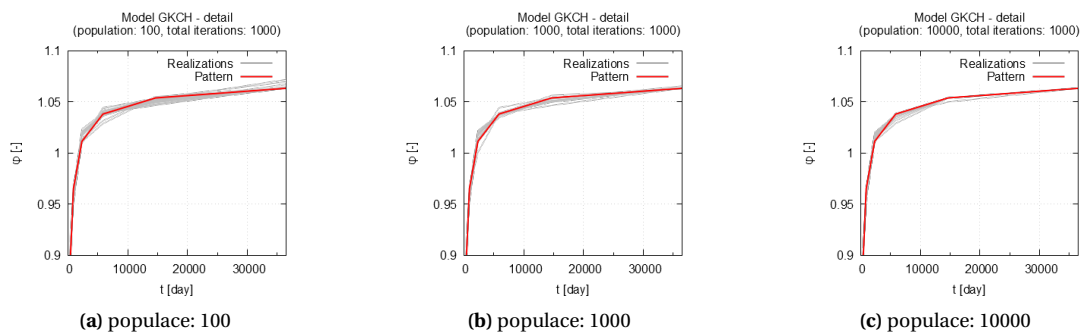


Obrázek B.24: Studie 5: výsledné srovnání

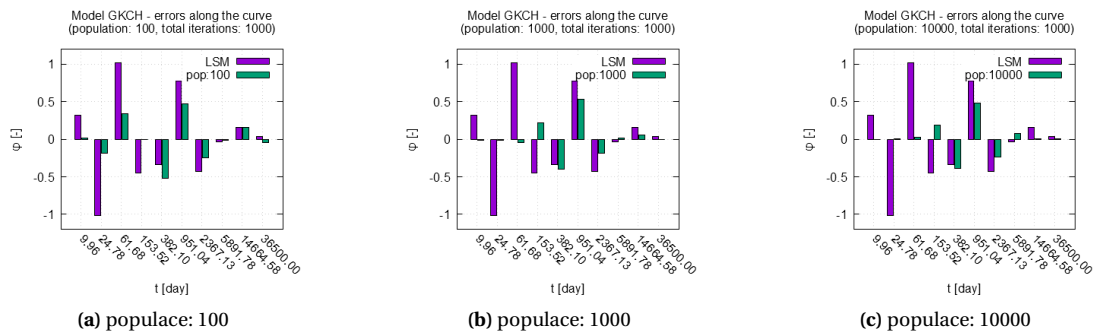
B.7 GKCH #6: L_1 , populace: 100 – 10000, iterace (konst.): 1000



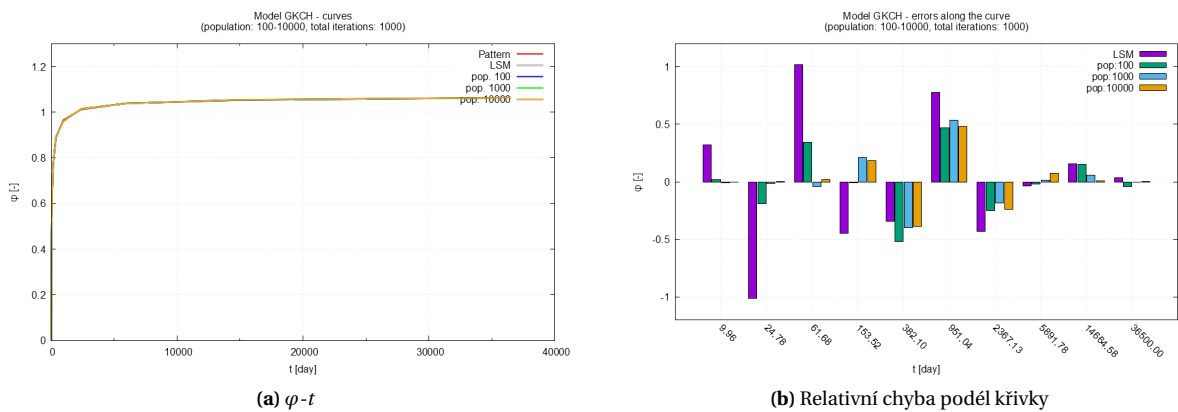
Obrázek B.25: Studie 6: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.26: Studie 6: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek

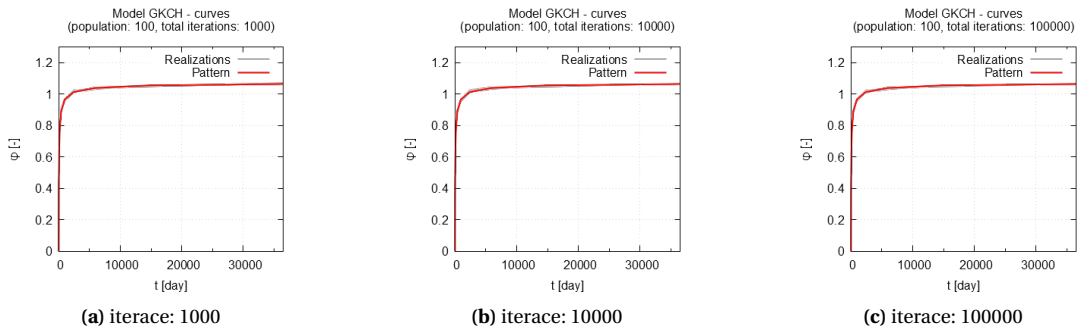


Obrázek B.27: Studie 6: srovnání relativních chyb podél křivky

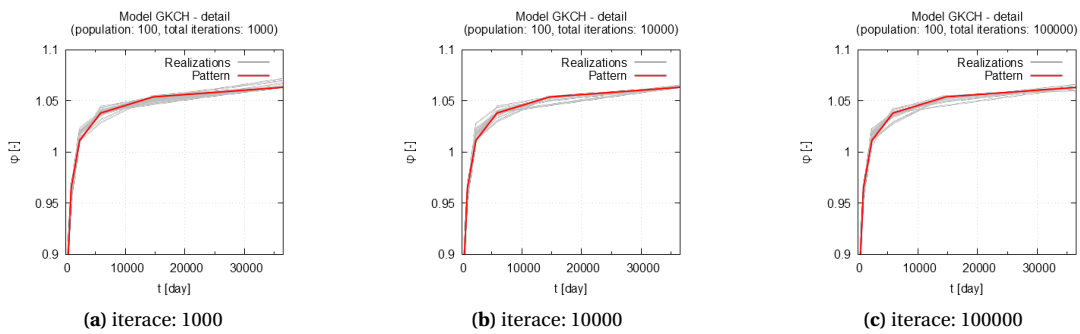


Obrázek B.28: Studie 6: výsledné srovnání

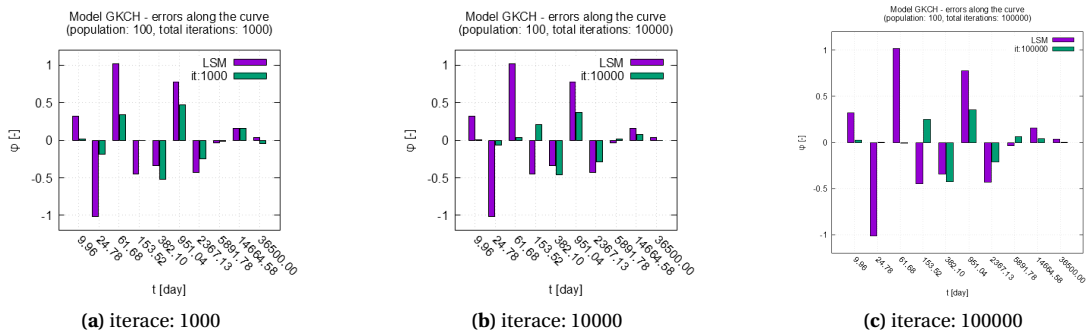
B.8 GKCH #7: L_1 , populace (konst.): 100, iterace: 1000 - 100000



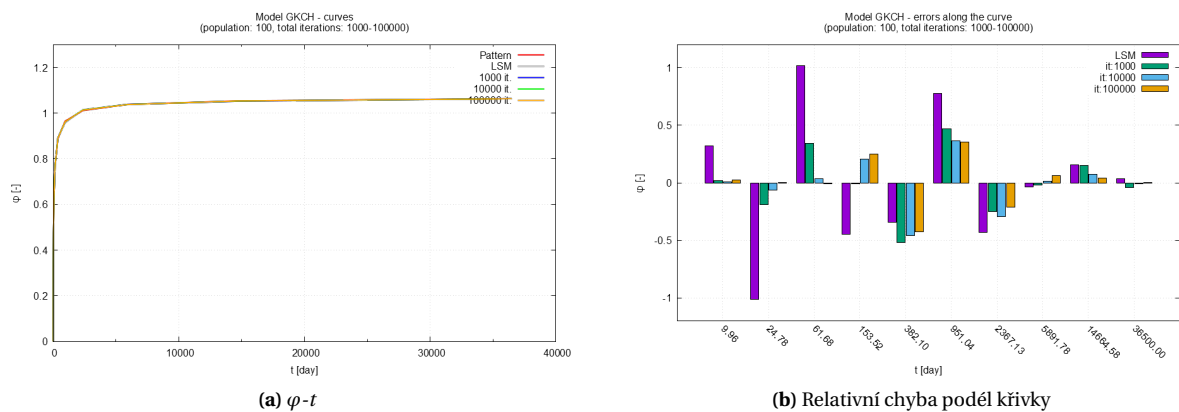
Obrázek B.29: Studie 7: srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.30: Studie 7: detail srovnání provedených realizací φ - t křivek



Obrázek B.31: Studie 7: srovnání relativních chyb podél křivky



Obrázek B.32: Studie 7: výsledné srovnání

Seznam obrázků

4.1	Materiálové modely bez viskózního chování (1D pracovní diagramy) – adaptováno z [99]	6
4.2	Materiálové modely dle odezvy na tahové zatížení (1D pracovní diagramy)	7
4.3	1D pracovní diagram betonu	8
4.4	Reologická schémata	13
5.1	Simplex v rovině a prostoru	19
5.2	Příklad vývoje simplexu v průběhu optimalizace	21
5.3	Základní operace algoritmu NMOA ve 2D	22
5.4	Základní operace algoritmu NMOA ve 3D	22
5.5	Operátor křížení pro binární řetězce diskretních a výrobních parametrů alg. MOGA	25
5.6	Vývojový diagram alg. MOGA (adaptováno z [ansys])	26
5.7	Schematické znázornění procesu vývoje hejna v alg. PSOA na funkci Booth	28
5.8	Vývoj hodnoty účelové funkce Booth $f_{min}(1;3) = 0$	28
6.1	Funkce Booth	31
6.2	Výsledek testu alg. NMOA na funkci Booth pro parametry \mathbf{X}^c	31
6.3	Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Booth	32
6.4	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Booth pro parametry \mathbf{X}^c	33
6.5	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Booth pro parametry \mathbf{X}^d	33
6.6	Funkce Ackley	34
6.7	Detail globálního minima funkce Ackley	34
6.8	Výsledek testu alg. NMOA na funkci Ackley 2D pro parametry \mathbf{X}^c	35
6.9	Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Ackley 2D	35
6.10	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Ackley pro parametry \mathbf{X}^c	36
6.11	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Ackley pro parametry \mathbf{X}^d	36
6.12	Funkce Michalewicz (2D)	38
6.13	Funkce Rosenbrock (2D) s omezením přípustných řešení	39
6.14	Výsledek testu alg. NMOA na funkci Rosenbrock pro parametry \mathbf{X}^c	39
6.15	Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Rosenbrock	40
6.16	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Rosenbrock pro parametry \mathbf{X}^c	41
6.17	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Rosenbrock pro parametry \mathbf{X}^d	41
6.18	Funkce Gomez-Levy (2D) s omezením přípustných řešení	42
6.19	Výsledek testu alg. NMOA na funkci Gomez-Levy pro parametry \mathbf{X}^c	42
6.20	Vývoj hodnoty účelové funkce pro alg. PSOA na testovací funkci Gomez-Levy	43
6.21	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Gomez-Levy pro parametry \mathbf{X}^c	44
6.22	Výsledky testu alg. PSOA na funkci Gomez-Levy pro parametry \mathbf{X}^d	44
7.1	Příklad rozměrové optimalizace na příhradové konstrukci – adaptováno z [20]	46
7.2	Příklad tvarové optimalizace na příhradové konstrukci	46
7.3	Příklad topologické optimalizace na příhradové konstrukci – adaptováno z [20]	46
7.4	Výsledek identifikace parametrů materiálového modelu pomocí optimalizace	46
7.5	Geometrie optimalizovaného sloupu	47
7.6	Tvar definované účelové funkce pro optimalizaci průřezu sloupu	48

7.7	Vývoj účelové funkce při rozměrové opt. sloupu (par.: \mathbf{X}^c , it.: 150)	49
7.8	Vývoj simplexu v průběhu opt. sloupu alg. NMOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 150)	49
7.9	Vývoj simplexu v průběhu opt. sloupu alg. NMOA v oblasti glob. min. (par.: \mathbf{X}^c , it.: 150)	50
7.10	Srovnání vývoje populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c)	51
7.11	Srovnání vývoje populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d)	51
7.12	Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)	52
7.13	Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 20, pop.: 50)	53
7.14	Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)	53
7.15	Vývoj populace při rozměrové opt. sloupu alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 20, pop.: 50)	53
7.16	Počáteční geometrie v <i>RFEM</i>	55
7.17	Počáteční nastavení dimenzí průřezů v <i>RFEM</i>	56
7.18	Skladba řady profilů CHS dle ČSN EN 10217 v <i>RFEM</i>	56
7.19	Nastavení návrhových proměnných v <i>RFEM</i>	57
7.20	Nastavení optimalizace v <i>RFEM</i>	57
7.21	Vizualizace průběhu řešení optimalizace v <i>RFEM</i>	58
7.22	Optimální geometrie při diskrétním charakteru parametrů v <i>RFEM</i>	58
7.23	Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^c)	59
7.24	Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_1 - t_1$, par.: \mathbf{X}^d)	59
7.25	Vývoj populace (501 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_2 - t_2$, par.: \mathbf{X}^d)	59
7.26	Vývoje populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^c)	60
7.27	Vývoj populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_1 - t_1$, par.: \mathbf{X}^d)	60
7.28	Vývoj populace (153 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($d_2 - t_2$, par.: \mathbf{X}^d)	60
7.29	Dosažené výsledky při výpočtu 0,5 % všech mutací při použití diskrétních parametrů	61
7.30	Dosažené výsledky při výpočtu 0,05 % všech mutací při použití diskrétních parametrů	61
7.31	Optimální geometrie při kombinaci diskrétních a průřezových parametrů	61
7.32	Vývoj populace (69 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^d)	62
7.33	Vývoj populace (69 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($\mathbf{X}_1^s - \mathbf{X}_2^s$, par.: \mathbf{X}^d a \mathbf{X}^s)	62
7.34	Vývoj populace (97 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($z_1 - z_2$, par.: \mathbf{X}^d a \mathbf{X}^s)	62
7.35	Vývoj populace (97 částic) při tvarové opt. alg. PSOA ($\mathbf{X}_1^s - \mathbf{X}_2^s$, par.: \mathbf{X}^d a \mathbf{X}^s)	62
7.36	Dosažené výsledky při výpočtu 10 % všech mutací a při použití parametrů typu průřez	63
7.37	Dosažené výsledky při výpočtu 1% všech mutací a při použití parametrů typu průřez	63
7.38	Srovnání vývoje účelové funkce pro provedené optimalizační výpočty	63
8.1	Schéma zatěžovací zkoušky 3PBT	65
8.2	Idealizace zatěžovací zkoušky 3PBT a výpočtový model	65
8.3	Graf citlivosti – RMSE chyba na celé křivce a na větvích zpevnění a změkčení (<i>L-d</i>)	66
8.4	Graf citlivosti pro 5 úseků <i>L-d</i> křivky (<i>L-d</i>)	67
8.5	Výsledné <i>L-d</i> křivky po identifikaci pomocí alg. MOGA	68
8.6	Kompletní srovnání výsledných <i>L-d</i> křivek pro GB po identifikaci alg. MOGA	68
8.7	Schéma CT testu a idealizace pro účely tvorby výpočtového modelu	69
8.8	Sít' konečných prvků	69
8.9	Graf citlivosti – RMSE chyba přes celou délku <i>L-d</i> křivky (<i>L-CMOD</i>)	70
8.10	Graf citlivosti pro 5 úseků křivky (<i>L-CMOD</i>)	70
8.11	Referenční a výsledná <i>L-CMOD</i> křivka	71
8.12	Kompletní srovnání výsledných <i>L-CMOD</i> křivek pro GB po identifikaci alg. MOGA	71
8.13	Vývoj populace při identifikaci <i>E</i> a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)	73
8.14	Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)	73
8.15	Výsledné <i>L-d</i> křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 10, pop.: 100)	73
8.16	Vývoj populace při identifikaci <i>E</i> a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 20, pop.: 50)	74
8.17	Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 20, pop.: 50)	74
8.18	Výsledné <i>L-d</i> křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^c , it.: 20, pop.: 50)	74
8.19	Vývoj populace při identifikaci <i>E</i> a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)	75
8.20	Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)	75

8.21	Výsledné $L-d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 10, pop.: 100)	75
8.22	Vývoj populace při identifikaci E a f_t pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 20, pop.: 50)	76
8.23	Vývoj populace při identifikaci G_{ft} a Ω_{tr} pomocí alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 20, pop.: 50)	76
8.24	Výsledné $L-d$ křivky pro GB po identifikaci alg. PSOA (par.: \mathbf{X}^d , it.: 20, pop.: 50)	76
8.25	Srovnání nejlepších $\varphi-t$ křivek	79
8.26	Detail srovnání nejlepších $\varphi-t$ křivek	79
8.27	Srovnání provedených studií GKCH #0 až #3 (úč. funkce: RMSE)	80
8.28	Srovnání provedených studií GKCH #4 až #7 (úč. funkce: L_1)	80
8.29	Srovnání provedených studií GKCH #1 vs. #5	80
A.1	Srovnání dosažených výsledků - normálové síly N	84
A.2	Srovnání dosažených výsledků - posouvající síly V_z	84
A.3	Srovnání dosažených výsledků - ohybové momenty M_y	84
A.4	Srovnání dosažených výsledků - celková deformace U_{tot}	85
A.5	Srovnání dosažených výsledků - využití prutů	85
A.6	Srovnání dosažených výsledků - normálové síly N	85
A.7	Srovnání dosažených výsledků - posouvající síly V_z	86
A.8	Srovnání dosažených výsledků - ohybové momenty M_y	86
A.9	Srovnání dosažených výsledků - celková deformace U_{tot}	86
A.10	Srovnání dosažených výsledků - využití prutů	86
B.1	Studie 0: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	88
B.2	Studie 0: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	88
B.3	Studie 0: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	88
B.4	Studie 0: výsledné srovnání	88
B.5	Studie 1: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	89
B.6	Studie 1: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	89
B.7	Studie 1: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	89
B.8	Studie 1: výsledné srovnání	89
B.9	Studie 2: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	90
B.10	Studie 2: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	90
B.11	Studie 2: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	90
B.12	Studie 2: výsledné srovnání	90
B.13	Studie 3: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	91
B.14	Studie 3: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	91
B.15	Studie 3: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	91
B.16	Studie 3: výsledné srovnání	91
B.17	Studie 4: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	92
B.18	Studie 4: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	92
B.19	Studie 4: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	92
B.20	Studie 4: výsledné srovnání	92
B.21	Studie 5: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	93
B.22	Studie 5: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	93
B.23	Studie 5: srovnání relativních chyb podél $\varphi-t$ křivky	93
B.24	Studie 5: výsledné srovnání	93
B.25	Studie 6: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	94
B.26	Studie 6: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	94
B.27	Studie 6: srovnání relativních chyb podél křivky	94
B.28	Studie 6: výsledné srovnání	94
B.29	Studie 7: srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	95
B.30	Studie 7: detail srovnání provedených realizací $\varphi-t$ křivek	95
B.31	Studie 7: srovnání relativních chyb podél křivky	95
B.32	Studie 7: výsledné srovnání	95

Seznam tabulek

4.1	Vstupní parametry modelu <i>Menetrey-Willam (multiPlas/ANSYS)</i>	12
4.2	Vstupní parametry modelu GKCH (<i>RFEM</i>)	14
6.1	Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Booth	32
6.2	Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Booth	32
6.3	Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Ackley 2D	35
6.4	Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Ackley	37
6.5	Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Michalewicz (5D)	38
6.6	Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Rosenbrock	40
6.7	Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Rosenbrock	40
6.8	Dosažený výsledek alg. NMOA při testu na funkci Gomez-Levy	43
6.9	Dosažené výsledky alg. PSOA při testu na funkci Gomez-Levy	43
7.1	Výsledky opt. sloupu alg. NMOA na <i>neomezeném problému</i>	50
7.2	Výsledky opt. sloupu alg. NMOA na <i>omezeném problému</i>	50
7.3	Výsledky opt. průřezu sloupu alg. PSOA na <i>neomezeném problému</i>	52
7.4	Výsledky opt. sloupu alg. PSOA na <i>omezeném problému</i>	54
8.1	Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. MOGA z 3PBT testu	68
8.2	Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. MOGA z CT testu	71
8.3	Intervaly návrhových proměnných při identifikaci pomocí alg. PSOA	76
8.4	Hodnoty materiálových parametrů identifikovaných pomocí alg. PSOA z 3PBT testu	77
8.5	Přehled provedených studií včetně příslušných nastavení	79
8.6	Dosažené výsledky identifikace parametrů modelu GKCH algoritmem PSOA	81

Literatura

- [1] ALEXANDRINO, P. da S. L. GOMES, G. F. a CUNHA, S. S. A robust optimization for damage detection using multiobjective genetic algorithm, neural network and fuzzy decision making. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020-01-02, **28**(1), s. 21–46. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2019.1583225.
- [2] ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method*. Wiley, 2 vydání, 2002. ISBN 978-0-470-84298-0.
- [3] ANSYS Inc. ANSYS Mechanical Theory Reference Release 15.0. 2014.
- [4] ANTHOLZER, S., HALTMEIER, M. a SCHWAB, J. Deep learning for photoacoustic tomography from sparse data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2019-07-03, **27**(7), s. 987–1005. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2018.1518444.
- [5] BAŽANT, Z. P. Endochronic inelasticity and incremental plasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1979, **14**(9), s. 691–714. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90029-X.
- [6] BAŽANT, Z., P. a JIRÁSEK, M. *Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures: Fundamentals of Linear Viscoelasticity*, **225**, s. 9–28. Springer: Dordrecht, Netherlands, 2018. DOI: 10.1061/JMCEA3.0001741.
- [7] BAŽANT, Z. P. a KIM, S-S. Plastic-Fracturing Theory for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1979, **105**(3), s. 407–428.
- [8] BAŽANT, Z. P. a OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*. 1983, **16**(3), s. 155–177. ISSN 0025-5432. DOI: 10.1007/BF02486267.
- [9] BAŽANT, Z. P. a WU, S. T. Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1973, **99**(2), s. 367–387. ISSN 0044-7951. DOI: 10.1061/JMCEA3.0001741.
- [10] BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures*. 2 vydání, 2016. ISBN 978-0-9790049-5-7.
- [11] BELYTSCHKO, T. a BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999, **45**(5), s. 601–620. ISSN 1097-0207. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S.
- [12] BERKE, L. a HAJELA, P. Applications of artificial neural nets in structural mechanics. *Structural Optimization*. 1992, **4**(2), s. 90–98. ISSN 0934-4373. DOI: 10.1007/BF01759922.
- [13] BLUM, CH. a GROß. Swarm Intelligence in Optimization and Robotics. In *Springer Handbook of Computational Intelligence*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. s. 1291–1309. DOI: 10.1007/978-3-662-43505-2_66. ISBN 978-3-662-43504-5.
- [14] BOYD, S., KIM, S. J., VANDENBERGHE, L. a HASSIBI, A. A tutorial on geometric programming. *Optimization and Engineering*. 2007, **8**(1), s. 67–127. ISSN 1389-4420. DOI: 10.1007/s11081-007-9001-7.
- [15] BRAASCH, H. a ESTRIN, Y. *Parameter identification for a two-internal variable constitutive model using the evolution strategy*, MD43 and AMD 168, s. 47–56. ASME Press, 1993.
- [16] CAUCHY, A. L. . Méthode générale pour la résolution de systemes d'équations simultanées. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*. 1847, , (25), s. 536–538.
- [17] CHAHROUR, A. H. a OHTSU, M. BEM Analysis of Crack Propagation in Concrete Based on Fracture Mechanics. *Boundary Element Methods*. 1992, s. 59–66.
- [18] CHEN, A. C. T. a CHEN, W. F. Constitutive Relations for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1975, **101**(4), s. 465–481.
- [19] CHEN, E.-S. a BUYUKOZTURK, O. Constitutive Model for Concrete in Cyclic Compression. *Journal of Engineering Mechanics*. 1985, **111**(6), s. 797–814. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:6(797).
- [20] CHRISTENSEN, P. W. a KLARBRING, A. *An introduction to structural optimization*. Springer, 2009. ISBN 978-1-4020-8666-3.
- [21] CICEKLI, U., VOYIADJIS, G. Z. a AL-RUB, R. K. A. A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *International Journal of Plasticity*. 2007, **23**(10-11), s. 1874–1900. ISSN 07496419. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.03.006.
- [22] COULOMB, Ch.-A. *Essai Sur Une Application Des Re'gles De Maximis & Minimis A' Quelques Proble'mes De Statique, Relatifs A' L'architecture*. De L'Imprimerie Royale, 1. vydání, 1776.
- [23] CUNDALL, P. A. Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 1988, **25**(3), s. 107–116. ISSN 01489062. DOI: 10.1016/0148-9062(88)92293-0.
- [24] DAUX, Ch., MOES, N., DOLBOW, J., SUKUMAR, N. a BELYTSCHKO, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, **48**(12), s. 1741–1760. ISSN 1097-0207. DOI: 10.1002/1097-0207(20000830)48:12<1741::AID-NME956>3.0.CO;2-L.
- [25] DEB, K., PRATAF, A., AGARWAL, S. a MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2002, **6**(2), s. 182–197. DOI: 10.1109/4235.996017.

- [26] DERELI, S. a KÖKER, R. Calculation of the inverse kinematics solution of the 7-DOF redundant robot manipulator by the firefly algorithm and statistical analysis of the results in terms of speed and accuracy. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020-05-03, **28**(5), s. 601–613. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2019.1602124.
- [27] DESCARTES, R. *Discours de la Méthode*. 1637.
- [28] DING, Z., YAO, R. LI, J. a ZHONGRONG, L. Structural damage identification based on modified Artificial Bee Colony algorithm using modal data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2018-03-04, **26**(3), s. 422–442. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2017.1310855.
- [29] DISTEFANO, N. On the Identification Problem in Linear Viscoelasticity. In *ZAMM*, **50**, s. 683–690, 1970.
- [30] DORIGO, M. a STÜTZLE, T. *Ant Colony Optimization*. A Bradford Book, 1 vydání, 2004. ISBN 978-0262042192.
- [31] DRAGON, A. a MRÓZ, Z. A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science*. 1979, **17**(2), s. 121–137. ISSN 00207225. DOI: 10.1016/0020-7225(79)90058-2.
- [32] DRUCKER, D. Ch. a PRAGER, W. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1952, **10**(2), s. 157–165. ISSN 0033569X, 15524485.
- [33] DUA, V. a DUA, P. A Simultaneous Approach for Parameter Estimation of a System of Ordinary Differential Equations, Using Artificial Neural Network Approximation. 2012-02-01, **51**(4), s. 1809–1814. ISSN 0888-5885. DOI: 10.1021/ie200617d.
- [34] DUFFIN, R. J., PETERSON, E. L. a ZENER, C. . *Geometric Programming : Theory and Application*. John Wiley & Sons, 1. vydání, 1967. ISBN 978-0471223702.
- [35] DYNARDO GmbH. Multiplas – User's Manual Release 5.1.0 for 15.0. 2014.
- [36] EBERHART, R. a KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. In *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, s. 39–43, 1995. DOI: 10.1109/MHS.1995.494215.
- [37] ŠEDLBAUER, D. *Optimalizace podrobného návrhu železobetonového skeletu*. Soutěžní práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky, Praha, 2011.
- [38] ETSE, G. a WILLAM, K. Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1994, **120**(9), s. 1983–2011. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:9(1983).
- [39] EYMARD, R., GALLOUËT, T. a HERBIN, R. Finite volume methods. **7 / Handbook of Numerical Analysis**. Netherlands: Elsevier, 2000. s. 713–1018. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(00\)07005-8](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(00)07005-8).
- [40] FAIRBAIRN, E. M. R., PAZ, C. N. M., EBECKEN, N. F. F. a ULM, F.-J. Use of neural networks for fitting of FE probabilistic scaling model parameters. *International Journal of Fracture*. 1999, **95**(1/4), s. 315–324. ISSN 03769429. DOI: 10.1023/A:1018677023642.
- [41] FENG, X.-T., CHEN, B.-R., YANG, Ch., ZHOU, H. a DING, X. Identification of visco-elastic models for rocks using genetic programming coupled with the modified particle swarm optimization algorithm. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2006, **43**(5), s. 789–801. ISSN 13651609. DOI: 10.1016/j.ijrmmms.2005.12.010.
- [42] FITZPATRICK, R. *Euclid's Elements of Geometry*. 1 vydání, 2008. ISBN 978-0-6151-7984-1.
- [43] FU, R., XU, H., WANG, Z., SHEN, L., CAO, M. TONGWEI, L. a NOVÁK, D. Enhanced Intelligent Identification of Concrete Cracks Using Multi-Layered Image Preprocessing-Aided Convolutional Neural Networks. *Sensors*. 2020, **20**(7). ISSN 1424-8220. DOI: 10.3390/s20072021.
- [44] GABRIELE, G. A. a RAGSDALL, K. M. The Generalized Reduced Gradient Method: A Reliable Tool for Optimal Design. *Journal of Engineering for Industry*. 05 1977, **99**(2), s. 394–400. ISSN 0022-0817. DOI: 10.1115/1.3439249.
- [45] GATJINGT, F. a PIJAUDIER-CABOT, G. Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2002, **26**(1), s. 1–24. ISSN 0363-9061. DOI: 10.1002/nag.188.
- [46] GAVRUS, A., ASSONI, E. a CHENOT, J. L. An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters. *Journal of Materials Processing Technology*. 1996, **60**(1-4), s. 447–454. ISSN 0924-0136. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0924-0136\(96\)02369-2](http://dx.doi.org/10.1016/0924-0136(96)02369-2). Proceedings of the 6th International Conference on Metal Forming.
- [47] GHABOUSSI, J. a BARBOSA, R. Three-dimensional discrete element method for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1990, **14**(7), s. 451–472. ISSN 1096-9853. DOI: 10.1002/nag.1610140702.
- [48] GOMORY, R. E. An Algorithm for the Mixed Integer Problem. *Rand Report R.M. 25797*. 1960. DOI: 10.1115/1.3439249.
- [49] GOMORY, R. E. *Industrial Scheduling*. Prentice-Hall, 1963.
- [50] GRASSL, P. a JIRÁSEK, M. Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, **43**(22-23), s. 7166–7196. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032.
- [51] GRASSL, P., LUNDGREN, K. a GYLTOFT, K. Concrete in compression a plasticity theory with a novel hardening law. *International Journal of Solids and Structures*. 2002, **39**(20), s. 5205–5223. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00408-0.
- [52] GREENSPAN, H., VAN GINNEKEN, B. a SUMMERS, R. M. Guest Editorial Deep Learning in Medical Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2016, **35**(5), s. 1153–1159. ISSN 0278-0062. DOI: 10.1109/TMI.2016.2553401.
- [53] HAJEK, B. Cooling Schedules for Optimal Annealing. *Open Problems in Communication and Computation*. 1987, s. 147–150. DOI: 10.1007/978-1-4612-4808-8_42.
- [54] HIMMELBLAU, D. *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, Inc., 1 vydání, 1972. ISBN 978-0070289215.
- [55] HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Bradford Books, reprint vydání, 1992. ISBN 978-0262581110.
- [56] HUBER, M. Specific work of strain as a measure of material effort. *Czasopismo Techniczne*. 1904, **22**.
- [57] HYNDMAN, R. J. a KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*. 2006, **22**(4), s. 679–688. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.

- [58] HYNEK, J. *Genetické algoritmy a genetické programování*. Grada, 1 vydání, 2008. ISBN 978-80-247-2695-3.
- [59] IMRAN, I. a PANTAZOPOULOU, S. J. Plasticity Model for Concrete under Triaxial Compression. *Journal of Engineering Mechanics*. 2001, **127**(3), s. 281–290. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:3(281).
- [60] JAVADI, A. A., FARMANI, R., TOROPOV, V. V. a SNEE, C. P. M. Identification of parameters for air permeability of shotcrete tunnel lining using a genetic algorithm. *Computers and Geotechnics*. 1999, **25**(1), s. 1–24. ISSN 0266352X. DOI: 10.1016/S0266-352X(99)00014-2.
- [61] JIN, Y.-F., YIN, Z.-Y., SHEN S.-L. a ZHANG D.-M. A new hybrid real-coded genetic algorithm and its application to parameters identification of soils. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2017-09-02, **25**(9), s. 1343–1366. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2016.1259315.
- [62] JIRÁSEK, M. a ZEMAN, J. *Přetváření a porušování materiálů*. Nakladatelství ČVUT, 1. vydání, 2006. ISBN 978-80-01-03555-9.
- [63] JIRÁSEK, M. a BAŽANT, Z. P. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2002. ISBN 9780471987161.
- [64] KANTOROVIČ, L., V. A New Method of Solving of Some Classes of Extremal Problems. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, s. 211–214, 1940.
- [65] KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*. 1984, **4**(4), s. 373–395. ISSN 0209-9683. DOI: 10.1007/BF02579150.
- [66] KENNEDY, J. a EBERHART, R. C. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, **4**, s. 1942–1948, 1995. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- [67] KIRANYAZ, S., INCE, T. a GABBOUJ, M. Optimization Techniques. *Multidimensional Particle Swarm Optimization for Machine Learning and Pattern Recognition*. 2014, s. 13–44. DOI: 10.1007/978-3-642-37846-1_2.
- [68] KLISINSKY, M. *Degradation and plastic deformation of concrete*. Polish Academy of Sciences, 1985.
- [69] KOCHENDERFER, M. J. a WHEELER, T. A. *Algorithms for optimization*. The MIT Press, 2019. ISBN 978-026-2039-420.
- [70] KRAJČINOVIC, D. Damage mechanics. *North-Holland Series in applied mathematics and mechanics*. 1996, **41**, s. 791.
- [71] KRÁL, P., HRADIL, P. a KALA, J. Four-Point Bending Test on a High Reinforced Concrete Beam: Nonlinear Numerical Analysis Using Material Parameter Identification. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019, **471**, s. 052052. DOI: 10.1088/1757-899x/471/5/052052.
- [72] KRÁL, P., HRADIL, P., HUŠEK M., KALA, J. a KALA, Z. Sensitivity analysis and optimization as tools for the inverse concrete material model parameter identification. *AIP Conference Proceedings*. 2018, **1978**(1), s. 430010. DOI: 10.1063/1.5044025.
- [73] KRÄTZIG, W. B. a PÖLLING, R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers*. 2004, **82**(15-16), 15-16, s. 1201–1215. ISSN 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.002.
- [74] KYAW, S. T., ROUSE, J. P. LU, J. a SUN, W. Determination of material parameters for a unified viscoplasticity-damage model for a P91 power plant steel. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016, **115-116**, s. 168–179. ISSN 00207403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2016.06.014.
- [75] LAND, A. H. a DOIG, A. G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*. 1960, **28**(3), s. 497–520. ISSN 00129682, 14680262. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/1910129>.
- [76] LEE, J. a FENVES, G. L. Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998, **124**(8), s. 892–900. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892).
- [77] LEHKÝ, D. a NOVÁK, D. Solving Inverse Structural Reliability Problem Using Artificial Neural Networks and Small-Sample Simulation. *Advances in Structural Engineering*. 2012, **15**(11), s. 1911–1920. ISSN 1369-4332. DOI: 10.1260/1369-4332.15.11.1911.
- [78] LEHKÝ, D., LIPOWCZAN, M., ŠIMONOVÁ, H. a KERŠNER, Z. A hybrid artificial neural network-based identification system for fine-grained composites. *Computers and Concrete*. 2021, **28**(4), s. 369–378. ISSN 1598-818X. DOI: 10.12989/cac.2021.28.4.369.
- [79] LEHKÝ, D., ŠOMODÍKOVÁ, M. a NOVÁK, D. Inverzní spolehlivostní analýza mostu z MPD nosníků: identifikace parametrů. *Beton - TKS*. 2016, **2016**(6), s. 58–61. ISSN 1213-3116.
- [80] LEPŠ, M. *Single and Multi-Objective Optimization in Civil Engineering with Applications*. Dizertační práce, České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2004.
- [81] LeVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. DOI: 10.1137/1.9780898717839.
- [82] LOLAND, K. E. Continuous damage model for load-response estimation of concrete. *Cement and Concrete Research*. 1980, **10**(3), s. 395–402. ISSN 00088846. DOI: 10.1016/0008-8846(80)90115-5.
- [83] LUBARDA, V. A., KRAJČINOVIC, D. a MASTILOVIC, S. Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. *Engineering Fracture Mechanics*. 1994, **49**(5), s. 681–697. ISSN 00137944. DOI: 10.1016/0013-7944(94)90033-7.
- [84] LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S. a ONATE, E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989, **25**(3), s. 299–326. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90050-4.
- [85] MAÑAS, M. *Optimalizační metody*. SNTL, 1 vydání, 1979.
- [86] MAHNKEN, R. a STEIN, E. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996, **136**(3), s. 225–258. ISSN 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(96\)00991-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(96)00991-7).
- [87] MARKIEWICZ, E. a LANGRAND, B. Characterisation and Parameters Identification of Materials Constitutive and Damage Models. *Procedia Engineering*. 2017, **173**, s. 33–40. ISSN 18777058. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.12.016.
- [88] MEIER, J., SCHAEGLER, W., BORGATTI, L., CORSINI, A. a SCHANZ, T. Inverse Parameter Identification Technique Using PSO Algorithm Applied to Geotechnical Modeling. *Journal of Artificial Evolution and Applications*. 2008-05-04, **2008**, s. 1–14. ISSN 1687-6229. DOI: 10.1155/2008/574613.

- [89] MENETREY, P. *Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, 1994.
- [90] MENETREY, P. a WILLAM, K. J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*. 1995, **92**(3), s. 311–318.
- [91] MENZEL, A. A framework for multiplicative elastoplasticity with kinematic hardening coupled to anisotropic damage. *International Journal of Plasticity*. 2005, **21**(3), s. 397–434. ISSN 07496419. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.12.006.
- [92] MISES, R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1913, **1**, s. 582–592.
- [93] MOES, N., DOLBOW, J. a BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999, **46**(1), s. 131–150. ISSN 1097-0207. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J.
- [94] MOLES, C. G., MENDES, P. a BANGA J. R. Parameter Estimation in Biochemical Pathways. *Genome Research*. 2003, **13**(11), s. 2467–2474. ISSN 1088-9051. DOI: 10.1101/gr.1262503.
- [95] MOLL, I., NAVRÁTIL, J. a ŽÁK, J. Výpočet exponentů při aproximaci funkce součtem exponenciál. In *Knižnice algoritmů XI., Proceedings of Sympóziium Algoritmy '91, 15.-19.4.1991*, s. 11–16, Štrbské pleso, Slovensko, 1991. JSMF SAV: Bratislava. DOI: 10.1007/978-94-024-1138-6_2.
- [96] MORTAZAVI, A. a TOGAN, V. Sizing and layout design of truss structures under dynamic and static constraints with an integrated particle swarm optimization algorithm. *Applied Soft Computing*. 2017, **51**, s. 239–252. ISSN 1568-4946. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.11.032>.
- [97] NELDER, J. A. a MEAD, R. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*. 1965-01-01, **7**(4), s. 308–313. ISSN 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [98] NĚMEC, I. a kol. *Finite element analysis of structures – principles and praxis*. Shaker, 1. vydání, 2010. ISBN 978-383-2293-147.
- [99] NĚMEC, I., TRCALA, M. a REK, V. *Nelineární mechanika*. Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTUM, 2018. ISBN 978-80-214-5519-1.
- [100] NOVÁK, D. a LEHKÝ, D. ANN inverse analysis based on stochastic small-sample training set simulation. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2006, **19**(7), s. 731–740. ISSN 09521976. DOI: 10.1016/j.engappai.2006.05.003.
- [101] ONATE, E., OLLER, S., OLIVER, J. a LUBLINER, J. A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations*. 1988, **5**(4), s. 309–319. ISSN 0264-4401. DOI: 10.1108/eb023750.
- [102] ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials*. 1985, **4**(1), s. 67–93. ISSN 01676636. DOI: 10.1016/0167-6636(85)90007-9.
- [103] ORTIZ, M. a POPOV, E. P. Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*. 1982, **1**(2), s. 139–150. ISSN 01676636. DOI: 10.1016/0167-6636(82)90042-4.
- [104] PARSOPOULOS, K. E. a VRAHATIS, M. N. Recent Approaches to Global Optimization Problems through Particle Swarm Optimization. *Natural Computing: An International Journal*. jun 2002, **1**(2-3), s. 235–306. ISSN 1567-7818. DOI: 10.1023/A:1016568309421.
- [105] PISTER, K., S. Mathematical Modeling for Structural Analysis and Design. In *Nuclear Engineering & Design*, **18**, s. 353–375, 1972.
- [106] PLANAS, J., GUINEA, G. V. a ELICES, M. Size effect and inverse analysis in concrete fracture. *International Journal of Fracture*. 1999, **95**(1/4), s. 367–378. ISSN 03769429. DOI: 10.1023/A:1018681124551.
- [107] PÖLLING, R. *Eine praxisnahe, schadigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. PhD thesis, Ruhr-Universität, Bochum, 2000.
- [108] POWELL, M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*. 1964, **7**(2), s. 155–162. ISSN 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.155.
- [109] PRAMONO, E. a WILLAM, K. Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989, **15**(6), s. 1183–1204. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:6(1183).
- [110] RANKINE, W. J. M. On the Stability of Loose Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1857, **147**, s. 9–27. ISSN 0261-0523. DOI: 10.1098/rstl.1857.0003.
- [111] RAO, S. S. *Engineering optimization*. John Wiley, 4th ed vydání, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.
- [112] RAO, S. S. Description and Optimum Design of Fuzzy Mechanical Systems. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. 1987, **109**(1), s. 126–132. ISSN 0738-0666. DOI: 10.1115/1.3258776.
- [113] RESENDE, L. a MARTIN, J. B. A progressive damage ‘continuum’ model for granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1984, **42**(1), s. 1–18. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(84)90029-X.
- [114] RILEM Draft Recommendation 50-FMC. Determination of Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-point Bending Tests on Notched Beams. 1985.
- [115] ROJAS, C. J. G., BITTERN COURT, M. L. a BOLDRINI, J. L. Parameter identification for a damage model using a physics informed neural network. 2021, s. 1–31.
- [116] ROMMEL, G. R. a SHOEMAKER, Ch. A. Constrained Global Optimization of Expensive Black Box Functions Using Radial Basis Functions. *Journal of Global Optimization*. 2005, **31**(1), s. 153–171. ISSN 0925-5001. DOI: 10.1007/s10898-004-0570-0.
- [117] ROSEN, J. B. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1960, **8**(1), s. 181–217. ISSN 03684245. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/2098960>.
- [118] ROSEN, J. B. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part II. Nonlinear Constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1961, **9**(4), s. 514–532. ISSN 03684245. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/2098878>.

- [119] RUBINSTEIN, F. M. a KARAGOZIAN, J. Building Design Using Linear Programming. *Journal of the Structural Division*. 1966, **92**(6), s. 223–245. ISSN 0044-8001. DOI: 10.1061/JSDIAG.0001552.
- [120] SCHREYER, H. L. A Third-Invariant Plasticity Theory for Frictional Materials. *Journal of Structural Mechanics*. 1983, **11**(2), s. 177–196. ISSN 0360-1218. DOI: 10.1080/03601218308907440.
- [121] SHI, Y. a EBERHART, R. C. Parameter selection in particle swarm optimization. In Porto, V. W., Saravanan, N., Waagen, D., Eiben, A. E. (Ed.) *Evolutionary Programming VII*, s. 591–600. Springer Berlin Heidelberg, 1998. ISBN 978-3-540-68515-9.
- [122] SIMO, J. C. a HUGHES, T. J. R. *Computational inelasticity*. Springer, [online-aug.]. vydání, 1998. ISBN 978-038-7227-634.
- [123] SIMO, J. C. a JU, J. W. Strain- and stress-based continuum damage models—I. Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*. 1987, **23**(7), 7, s. 821–840. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90084-9.
- [124] SIMO, J. C. a JU, J. W. Strain- and stress-based continuum damage models—II. Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*. 1987, **23**(7), s. 841–869. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90084-9.
- [125] SMIRNOVA, A. a CHOWELL, G. A primer on stable parameter estimation and forecasting in epidemiology by a problem-oriented regularized least squares algorithm. *Infectious Disease Modelling*. 2017, **2**(2), s. 268–275. ISSN 24680427. DOI: 10.1016/j.idm.2017.05.004.
- [126] SMIRNOVA, A., CHOWELL-PUENTE, G., DeCAMP, L., MOGHADAS, S. a SHEPPARD, M. J. Improving epidemic size prediction through stable reconstruction of disease parameters by reduced iteratively regularized Gauss–Newton algorithm. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2017-10-1, **25**(5), s. 653–667. ISSN 1569-3945. DOI: 10.1515/jiip-2016-0053.
- [127] ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2. Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. 2006.
- [128] SPENDLEY, W., HEXT, G. R. a HIMSWORTH, F. R. Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation. *Technometrics*. 1962, **4**(4), s. 441–461. ISSN 0040-1706. DOI: 10.1080/00401706.1962.10490033.
- [129] SRINIVAS, N. a DEB, K. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. *Evol. Comput.* sep 1994, **2**(3), s. 221–248. ISSN 1063-6560. DOI: 10.1162/evco.1994.2.3.221.
- [130] STRAUSS, A., ZIMMERMANN, T., LEHKÝ, D., NOVÁK, D. a KERŠNER, Z. Stochastic fracture-mechanical parameters for the performance-based design of concrete structures. *Structural Concrete*. 2014, **15**(3), s. 380–394. ISSN 1464-4177. DOI: 10.1002/suco.201300077.
- [131] SUCHARDA, O. a BROŽOVSKÝ, J. Elastic-Plastic Modelling of Reinforced Concrete Beam: Implementation and Comparison with the Experiment. *Transactions of the VSB - Technical University of Ostrava. Construction Series*. 2011, **XI**(1), s. 1–7. ISSN 1804-4824. DOI: 10.2478/v10160-011-0014-y.
- [132] SURJANOVIC, S. a BINGHAM, D. Optimization Test Problems: Booth function. *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets* [online, cit. 2021-06-10]. Simon Fraser University: Derek Bingham, 2013. Dostupné z: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/booth.html>.
- [133] SURJANOVIC, S. a BINGHAM, D. Optimization Test Problems: Ackley function. *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets* [online, cit. 2021-06-10]. Simon Fraser University: Derek Bingham, 2013. Dostupné z: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/ackley.html>.
- [134] SURJANOVIC, S. a BINGHAM, D. Optimization Test Problems: Michalewicz function. *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets* [online, cit. 2021-06-11]. Simon Fraser University: Derek Bingham, 2013. Dostupné z: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/michal.html>.
- [135] SZELIGA, D., GAWAD, J. a PIETRZYK, M. Parameters identification of material models based on the inverse analysis. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2004, **14**(4), s. 549–556. Dostupné z: <http://leudml.org/doc/207719>.
- [136] TALAR, J., SZELIGA, D. a PIETRZYK, M. Application of genetic algorithms for identification of rheological and friction parameters in copper deformation processes. *Archives of Metallurgy*. 2002, **47**(1), s. 27–41.
- [137] TAMURA, K. a MIURA, S. Necessary and sufficient conditions for local and global nondominated solutions in decision problems with multi-objectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1979, **28**(4), s. 501–523.
- [138] TAYLOR, R., L., PISTER, K., S. a GOUDREAU, G., L. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970, **2**(1), s. 45–59. ISSN 0029-5981. DOI: 10.1002/nme.1620020106.
- [139] TRESCA, H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1864, **59**, s. 754.
- [140] VAZ, M., CARDOSO, E. L., MUNOZ-ROJAS, P. A., CARNIEL, T. A., LUERSEN, M. A., TMOIYAMA, M., da SILVA, J. O., STAHL-SCHMIDT, J. a TRENTIN, R. G. Identification of constitutive parameters – optimization strategies and applications. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2015, **46**(4-6), 4-5, s. 477–491. ISSN 09335137. DOI: 10.1002/mawe.201500423.
- [141] WEI, Z., LIU, J. a ZHONGRONG, L. Structural damage detection using improved particle swarm optimization. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2018-06-03, **26**(6), s. 792–810. ISSN 1741-5977. DOI: 10.1080/17415977.2017.1347168.
- [142] Wikipedia contributors. Test functions for optimization — Wikipedia, The Free Encyclopedia [online, cit. 2021-06-11], 2021. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Test_functions_for_optimization&oldid=1024083311.
- [143] Wikipedia contributors. Diferencovatelnost — Wikipedia, The Free Encyclopedia [online, 2021-10-22], 2021. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferencovatelnost>.
- [144] WILLAM, K. a WARNKE, E. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In *International Assoc. for Bridge and Structural Engineering*, **19**, s. 1–30, 1975.
- [145] WITTMANN, F. H., ROKUGO, K., BRÜHWILER, E., MIHASHI, H. a SIMONIN, P. Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens. *Materials and Structures*. 1988, **21**(1), s. 21–32. DOI: 10.1007/BF02472525.
- [146] WU, J. Y., LI, J. a FARIA, R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of*

- Solids and Structures*. 2006, **43**(3-4), s. 583–612. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.038.
- [147] YAZDANI, S. a SCHREYER, H. L. Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1990, **116**(7), s. 1435–1450. ISSN 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:7(1435).
- [148] YOUSHIKAWA, S., HISHIDA, H., a YAGAWA, G. Parameter optimization of viscoplastic constitutive equation using hierarchical neural network. In *Proceedings of 7th International Conference on Experimental Mechanics*, **1**, s. 296–301, 1992.
- [149] ZOUTENDIJK, G. *Methods of Feasible Directions*. Elsevier Publishing Company, 1 vydání, 1960. ISBN 9780444406606.

Seznam publikací

- [150] HOKEŠ, F. The Current State-of-the-Art in the Field of Material Models of Concrete and other Cementitious Composites. In *Applied Mechanics and Materials*, **729**, s. 134–139, 2015. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.729.134. Dostupné z: <http://www.scientific.net/AMM.729.134>.
- [151] HOKEŠ, F. Vliv redukce počtu návrhových parametrů při inverzní identifikaci parametrů nelineárních materiálových modelů s pomocí optimalizačních algoritmů. In *Proceedings of 13th International Conference of New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*, Bratislava, 2015. Slovak University of Technology in Bratislava. ISBN 978-80-227-4463-8.
- [152] HOKEŠ, F. Comparison of suitability of selected material models of concrete for inverse identification of parameters with the aid of optimization algorithms. In *31st conference with international participation Computational Mechanics 2015*, s. 1–2, Plzeň, 2015. University of West Bohemia. ISBN 978-80-261-0568-8.
- [153] HOKEŠ, F. Selected Aspects Of Modelling Of Non-Linear Behaviour Of Concrete During Tensile Test Using Multiplas Library. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. 2015, **15**(2). ISSN 1804-4824. DOI: 10.1515/tvsb-2015-0009. Dostupné z: <http://www.degruyter.com/view/j/tvsb.2015.15.issue-2/tvsb-2015-0009/tvsb-2015-0009.xml>.
- [154] HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KRÁL, P. a KALA, J. Numerical Simulation of Reinforced Concrete Beam with Utilization of Elastoplastic Material Model of Concrete. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2016, **11**, s. 136–141. ISSN 1991-8747.
- [155] HOKEŠ F., KALA, J. a KRŇÁVEK, O. Optimization as a Tool for the Inverse Identification of Parameters of Nonlinear Material Models. In *Proceedings of the 9th International Conference on Continuum Mechanics (CM '15)*, s. 50–55, Rome, 2015. WSEAS Press. ISBN 978-1-61804-346-7.
- [156] HOKEŠ F., KALA, J. a KRŇÁVEK, O. Nonlinear numerical simulation of fracture test with use of optimization for identification of material parameters. *International Journal of Mechanics*. 2016, **10**, s. 159–166. ISSN 1998-448.
- [157] HOKEŠ, F., KALA, J., HUŠEK, M. a KRÁL, P. Parameter Identification for a Multivariable Nonlinear Constitutive Model inside ANSYS Workbench. *Procedia Engineering*. 2016, **161**, s. 892–897. ISSN 1877-7058. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.743. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705816329721>.
- [158] HOKEŠ F., KRÁL, P., HUŠEK, M. a KALA, J. Study on Identification of Material Model Parameters from Compact Tension Test on Concrete Specimens. **245**(3), 2017. DOI: 10.1088/1757-899X/245/3/032079. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/245/3/032079>.
- [159] HOKEŠ, F., KRÁL, P., KRŇÁVEK, O. a HUŠEK, M. Improved Sensitivity Analysis in the Inverse Identification of the Parameters of a Nonlinear Material Model. In *Modern Building Materials, Structures and Techniques MBMST 2016*, Lithuania, 2016.
- [160] TRCALA, M., NĚMEC, I. VANĚČKOVÁ, A. a HOKEŠ, F. Dynamic analysis of viscous material models. In *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics 20*, s. 139–148, Hejnice, 2021. Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences. DOI: 10.21136/panm.2020.14. Dostupné z: <https://articles.math.cas.cz/10.21136/panm.2020.14>. ISBN 9788085823714.

Kompletní přehled publikačních aktivit

Články do časopisů v databázi Scopus

1. ŠMAK, M., KALA, J. a HOKEŠ, F. *Pinned joints – their design and real behaviour*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Engineering and Computational Mechanics. 2017, **170**(4), s. 154-166. ISSN 1755-0777. DOI:10.1680/jencm.17.00003
2. HOKEŠ, F. a KALA, J. *Selecting the objective function during the inverse identification of the parameters of a material model of concrete*. Frattura ed Integrità Strutturale, 2017, **11**(39), s. 7-16. ISSN 19718993. DOI:10.3221/IGF-ESIS.39.02
3. HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KALA, J. a KRÁL, P. *Predicting the load-carrying capacity of reinforced concrete structural element*. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. World Scientific and Engineering Academy and Society, 2017, **12**, s. 1-10. ISSN 19918747.
4. HOKEŠ, F., KALA, J. a KRŇÁVEK, O. *Nonlinear numerical simulation of a fracture test with use of optimization for identification of material parameters*. International Journal of Mechanics, North Atlantic University Union, 2016, **10**, s. 159-166. ISSN 19984448
5. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P. a HOKEŠ, F. *Effect of the support domain size in SPH fracture simulations*, International Journal of Mechanics, North Atlantic University Union, 2016, **10**, s. 396-402. ISSN 19984448.

Konferenční příspěvky v databázi Scopus

1. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J., KALA, Z. a HOKEŠ, F. Using the inverse identification of parameters of a nonlinear concrete material model for analysis of RC structural element. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2018, ICNAAM 2018*. American Institute of Physics, 2019, s. 1-4. ISBN 978-073541854-7. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.5114111
2. HOKEŠ, F., KALA, J., TRCALA, M. a NĚMEC, I. Implementation of the Viscous Drucker-Prager and Viscous Lee-Fenves Nonlinear Material Models and Finite Element Benchmarks. In: *Advances and Trends in Engineering Sciences and Technologies III*. CRC Press, 2019, s. 105-111. ISBN 9780429021596. DOI:10.1201/9780429021596-16
3. HOKEŠ, F., KRÁL, P. a TRCALA, M. Modelling uniaxial compression of concrete specimen with utilization of nonlinear material models inside ANSYS and RFEM. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2018, ICNAAM 2018*. American Institute of Physics, 2019, s. 1-4. ISBN 978-073541854-7. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.5114112
4. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P. a HOKEŠ, F. Using noise to generate the material structure of concrete. In: *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2018. ISBN 978-073541690-1. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.5044017
5. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P. a HOKEŠ, F. Steel Fibre Reinforced Concrete Simulation with the SPH Method. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Institute of Physics Publishing, 2017. ISSN 1757-8981. DOI:10.1088/1757-899X/245/3/032070

6. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F. a KRÁL, P. Conversion of Fractal Fields into Heterogeneities inside SPH Simulations. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Institute of Physics Publishing, 2017. ISSN 1757-8981. DOI:10.1088/1757-899X/245/3/032024
7. KRÁL, P., HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KALA, J. a HRADIL, P. Optimization-Based Inverse Identification of the Parameters of a Concrete Cap Material Model. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Institute of Physics Publishing, 2017. ISSN 1757-8981. DOI:10.1088/1757-899X/245/3/032078
8. HOKEŠ, F., KRÁL, P., HUŠEK, M. a KALA, J. Study on Identification of Material Model Parameters from Compact Tension Test on Concrete Specimens. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Institute of Physics Publishing, 2017, s. 1-10. ISSN 1757-8981. DOI:10.1088/1757-899X/245/3/032079
9. KRÁL, P., HRADIL, P., HUŠEK, M. a HOKEŠ, F. Comparison of responses of concrete damage material models with respect to optimization-based material parameter identification. In: *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2017. ISBN 978-073541538-6. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.4992644
10. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P. a HOKEŠ, F. Concept and numerical simulations of a reactive anti-fragment armour layer. In: *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2017. ISBN 978-073541538-6. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.4992643
11. HOKEŠ, F., KRÁL, P., KRŇÁVEK, O. a HUŠEK, M. Improved Sensitivity Analysis in the Inverse Identification of the Parameters of a Nonlinear Material Model. In: *Procedia Engineering*. Elsevier, 2017, s. 347-354. ISSN 18777058. DOI:10.1016/j.proeng.2017.02.039
12. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J., HOKEŠ, F. a HUŠEK, M. Identification of the Parameters of a Concrete Damage Material Model. In: *Procedia Engineering*. Elsevier, 2017, s. 578-585. ISSN 18777058. DOI:10.1016/j.proeng.2017.02.068
13. HOKEŠ, F., KALA, J., HUŠEK, M. a KRÁL, P. Parameter Identification for a Multivariable Nonlinear Constitutive Model inside ANSYS Workbench. In: *Procedia Engineering*. Elsevier, 2016, s. 892-897. ISSN 18777058. DOI:10.1016/j.proeng.2016.08.743
14. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F. a KRÁL, P. Influence of SPH Regularity and Parameters in Dynamic Fracture Phenomena. In: *Procedia Engineering*. Elsevier, 2016, s. 489-496. ISSN 18777058. DOI:10.1016/j.proeng.2016.08.671
15. HOKEŠ, F. Different Approaches to Numerical Simulations of Prestressed Concrete Structural Elements. In: *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2014, s. 148-153. ISBN 978-303835196-2. ISSN 1662-7482. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.621.148

Publikace do recenzovaných periodik

1. NĚMEC, I., TRCALA, M., HOKEŠ, F. a VANĚČKOVÁ, A. Dynamic analysis of viscous material models. In: *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics. Proceedings of Seminar. Hejnice, June 21-26, 2020*. Prague: Institute of Mathematics CAS, 2021. s. 139-147. ISBN: 978-80-85823-71-4.
2. HOKEŠ, F. Selected Aspects Of Modelling Of Non-Linear Behaviour Of Concrete During Tensile Test Using Multiplas Library. *Transaction of the VŠB-Technical university of Ostrava, Mechanical series*, 2015, **15**(2), s. 1-10. ISSN: 1210-0471.

Další publikace

1. HOKEŠ, F., KALA, J. a NĚMEC, I. Video analysis of response of reinforced concrete beam to impact loading during drop test. In: *4th International Scientific Conference Structural and Physical Aspects of Construction Engineering (SPACE 2019)*. MATEC Web of Conferences. CEDEX A: EDP Sciences, 2020. s. 1-6. ISSN: 2261-236X.

2. HOKEŠ, F., HUŠEK, M. a KRÁL, P. Nonlinear Numerical Study of Pin Joint at Static and Cyclic Loading. In: *Juniorstav 2017*. Brno, Česká republika: 2017. s. 1-8. ISBN: 978-80-214-5462-0.
3. HUŠEK, M., HOKEŠ, F., KALA, J. a KRÁL, P. *Inclusion of Randomness into SPH Simulations*. WSEAS TRANSACTION on HEAT and MASS TRANSFER, 2017, **2017**(1), s. 1-10. ISSN: 2224-3461.
4. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F. a KRÁL, P. *How to Handle Irregular Distribution of SPH Particles in Dynamic Fracture Analysis*. International Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, **2016**(1), s. 212-217. ISSN: 2367-8984.
5. HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KRÁL, P. a KALA, J. *Numerical Simulation of Reinforced Concrete Beam with Utilization of Elasto-plastic Material Model of Concrete*. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 2016, **2016**(11), s. 136-141. ISSN: 2224-3429.
6. HUŠEK, M., HOKEŠ, F., KALA, J. a KRÁL, P. *A Simple Solution for Randomized Failure Modeling with the SPH Method*. International Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, **2016**(1), s. 253-258. ISSN: 2367-8992.
7. HOKEŠ, F. a KALA, J. Volba účelové funkce při inverzní identifikace parametrů materiálového modelu. In: *Modelování v mechanice 2016*. Ostrava, Česká republika: 2016. s. 1-7. ISBN: 978-80-248-3917-2.
8. HOKEŠ, F. Predikce únosnosti železobetonového konstrukčního prvku. In: *Juniorstav 2016*. Brno, Česká republika: 2016. s. 1-8. ISBN: 978-80-214-5311-1.
9. HOKEŠ, F. Comparison of suitability of selected material models of concrete for inverse identification of parameters with aid of optimization algorithms. In: *Computational Mechanics 2015*. Špičák: 2015.
10. HOKEŠ, F. Modelování předpětí nesoudržnou předpínací výztuží ve výpočtovém systému ANSYS. In: *Juniorstav 2015*. Brno, Česká republika: 2015. s. 1-9. ISBN: 978-80-214-5091-2.
11. KRŇÁVEK, O., HOKEŠ, F., HRUBÝ, P. a NEVAŘIL, A. Analýza vlivu postupné výstavby mostu na stav napjatosti v konstrukčních detailech. In: *Modelování v mechanice 2015*. Ostrava, Česká republika: 2015. s. 1-11. ISBN: 978-80-248-3756-7.
12. KALA, J. a HOKEŠ, F. The Idealization of Boundary Conditions in Numerical Simulations of Prestressed Pedestrian Bridges and Comparing with Experimental Measurements. In: *Proc. of 16th European Bridge Conference*. Edinburgh, Scotland: M C Forde, 2015. s. 1-8. ISBN: 0-947644-78-4.
13. HOKEŠ, F., NEVAŘIL, A., TOTKOVÁ, L. a KRŇÁVEK, O. Numerická simulace procesu dotvarování a smrštění betonu na submodelu profilu ocelobetonového spřaženého mostu. In: *Proceedings of 13th International Conference of New Trends in Statics and Dynamics of Buildings* Bratislava, Slovensko: 2015. s. 1-8. ISBN: 978-80-227-4463-8.
14. HRUBÝ, P., HOKEŠ, F., KRŇÁVEK, O. a NEVAŘIL, A. Numerical analysis of the process of repairing defects in lamellar flange and its influence on the local stress state. In: *Computational Mechanics 2015*. Špičák: 2015. s. 41-42. ISBN: 978-80-261-0568-8.
15. HOKEŠ, F. Vliv redukce počtu návrhových parametrů při inverzní identifikaci parametrů nelineárních materiálových modelů s pomocí optimalizačních algoritmů. In: *Proceedings of 13th International Conference of New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava, Slovenská republika: 2015. s. 1-6. ISBN: 978-80-227-4463-8.
16. HOKEŠ, F. The Current State-of-the-Art in the Field of Material Models of Concrete and Other Cementitious Composites. In: *Materials, Mechanics and Information Engineering*. Applied Mechanics and Materials. 2015. s. 134-139. ISBN: 978-3-03835-385-0. ISSN: 1662-7482.

Curriculum Vitae

Osobní údaje

Jméno a příjmení, titul: Filip Hokeš, Ing.
Adresa trvalého bydliště: Na Rejdišti 613/6
66902, Znojmo
Česká republika
Telefon: +420 602 718 491
E-mail: hokes.f@fce.vutbr.cz
Datum narození: 11. 12. 1988
Národnost: Česká

Pracovní zkušenosti

10/2016 – dosud *FEM consulting, s.r.o.*
Pozice: Výzkumný pracovník
Náplň práce: Výzkum a vývoj algoritmů pro konstrukční optimalizaci

04/2016 – dosud *FEM consulting, s.r.o.*
Pozice: IT specialista
Náplň práce: Správa hardware a software, správa sítě

09/2015 – dosud *VUT v Brně, FAST, Ústav stavební mechaniky*
Pozice: Asistent
Náplň práce: Vedení cvičení z předmětů: Statika I a Statika II

05/2014 – 11/2015 *VUT v Brně, Fakulta stavební, projekt MPO FR-TI4/430*
Pozice: Výpočtář ve výpočtovém systému ANSYS
Náplň práce: Příprava výpočtových modelů, provádění strukturálních analýz

Vzdělání

02/2014 – dosud *VUT v Brně, Fakulta stavební*
Studijní program: Stavební inženýrství, navazující doktorský
Obor: Konstrukce a dopravní stavby
Téma disertační práce: Komplexní výpočtové modely
Školitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.

- 09/2012 – 02/2014 *VUT v Brně, Fakulta stavební*
Studijní program: Stavební inženýrství, navazující magisterský
Obor: Konstrukce a dopravní stavby
Téma diplomové práce: Statická a dynamická analýza předpjaté mostní konstrukce
Školitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 09/2008 – 06/2012 *VUT v Brně, Fakulta stavební*
Studijní program: Stavební inženýrství, bakalářský
Obor: Konstrukce a dopravní stavby
Téma bakalářské práce: Podrobná analýza složitých konstrukčních detailů
Školitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 09/2004 – 06/2008 *Gymnázium Šumperk*
Maturitní zkouška: Český jazyk, Anglický jazyk, Fyzika, Matematika

Pedagogická praxe

- 01/2016 – dosud *Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky*
výuka v rámci pedagogického úvazku – asistent
Cvičení z předmětu Statika I, Statika II a Nelineární mechanika
(vedení cvičení)
- 09/2015 – 12/2015 *Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky*
výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu
Cvičení z předmětu Statika II
(vedení cvičení)
- 02/2015 – 06/2015 *Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky*
výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu
Cvičení z předmětu Statika I
(1. cvičící – vedení cvičení, 2. cvičící – zadávání a opravy kontrolních testů a domácích úkolů, konzultace)
- 09/2014 – 12/2014 *Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky*
výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu
Cvičení z předmětu Statika II
(vedení cvičení)
- 02/2014 – 06/2014 *Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky*
výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu
Cvičení z předmětu Základy stavební mechaniky
(2. cvičící – zadávání a opravy kontrolních testů a domácích úkolů, konzultace)

Účast na řešení vědeckých projektů

- 10/2017 – dosud *Projekt TAČR FW03010260*
Název: Pokročilý softwarový nástroj pro návrh a analýzu betonových a spřažených konstrukcí se zohledněním fází výstavby a časově závislých dějů
Řešitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.

- 10/2017 – 09/2020 *Projekt MPO TRIO FV20372*
Název: Softwarový nástroj pro nelineární analýzu betonových konstrukcí u rychlých dynamických dějů
Řešitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 02/2017 – 12/2019 *Projekt GAČR 17-23578S*
Název: Identifikace míry poškození vyztuženého betonu při extrémním zatížení
Řešitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 01/2017 – 12/2019 *Projekt TAČR TH02020301*
Název: Pokročilý návrh zesilování ocelové konstrukce pod zatížením
Řešitel: prof. Ing. Miroslav Bajer, CSC.
- 08/2016 – 12/2019 *Projekt MPO TRIO FV10317*
Název: Pokročilé kotevní kontaktní materiály s využitím kompozitů
Řešitel: Ing. Jan Barnat, Ph.D.
- 03/2016 – 12/2017 *Standardní projekt spec. výzkumu FAST-S-16-3718*
Název: Pokročilé numerické metody s komplexními materiálovými modely
Řešitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 05/2014 – 12/2017 *Projekt GAČR 14-25320S*
Název: Aspekty použití komplexních nelineárních výpočtových modelů
Řešitel: prof. Ing. Jiří Kala, Ph.D.
- 05/2014 – 11/2015 *Projekt MPO FR-TI4/430*
Název: Pravděpodobnost poruchy svarového spoje lamelových pásnic s indikacemi zjištěnými progresivními nedestruktivními metodami
Řešitel: Ing. Aleš Nevařil, Ph.D.
- 03/2016 – 12/2016 *Juniorský projekt spec. výzkumu FAST-J-16-3562*
Název: Implementace materiálových modelů betonu ve výpočtovém systému ANSYS a jejich experimentální verifikace
Řešitel: Ing. Filip Hokeš
- 03/2015 – 12/2015 *Juniorský projekt spec. výzkumu FAST-J-15-2875*
Název: Vliv rychlosti deformace na parametry nelineárních materiálových modelů betonu
Řešitel: Ing. Filip Hokeš
- 03/2014 – 12/2014 *Juniorský projekt spec. výzkumu FAST-J-14-2359*
Název: Nelineární výpočtové modely předpjatých betonových prvků
Řešitel: Ing. Filip Hokeš

Další aktivity

- 05/2014 – dosud *Ústav stavební mechaniky, FAST VUT v Brně*
Správa počítačových učeben, IT specialista