

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Monika Ondračková

APLIKACE INTEGRÁLNÍHO POČTU VE FYZICE

Olomouc 2018

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne.....

.....

Monika Ondračková

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení bakalářské práce, poskytnutí cenných rad a za veškerý čas, který mi věnovala.

Obsah

Úvod.....	5
1 Neurčitý integrál	6
1.1 Primitivní funkce	6
1.2 Neurčitý integrál	6
2 Určitý integrál.....	8
2.1 Horní, dolní a integrální součet	8
2.2 Riemannův a Newtonův určitý integrál	10
2.3 Aditivita a linearita určitého integrálu	12
2.4 Výpočet určitých integrálů	12
2.5 Integrály základních elementárních funkcí	14
3 Aplikace integrálů v mechanice.....	15
3.1 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb	15
3.2 Mechanická práce	17
3.3 Těžiště tělesa	19
3.4 Moment setrvačnosti.....	22
4 Aplikace integrálů v termodynamice	26
4.1 Teplo	28
4.2 Adiabatický děj.....	30
4.3 Izotermický děj	32
4.4 Izobarický děj	33
4.5 Entropie	34
5 Aplikace integrálů v elektřině a magnetismu	37
5.1 Elektrický náboj, elektrický proud.....	37
5.2 Magnetická indukce	39
Závěr	42
Seznam použité literatury.....	43
Seznam použitého matematického značení	44
Seznam použitého fyzikálního značení	45
Seznam použitých fyzikálních konstant.....	47
Seznam obrázků	48
Seznam příloh	49

Úvod

Studenti matematických oborů se s integrálním počtem seznamují v jedné ze základních matematických disciplín, které se říká matematická analýza. Tento matematický aparát však není využíván pouze v matematice při výpočtu obsahu ohraničené plochy, délky křivky, objemu rotačních těles atd., ale dá se uplatnit i v jiných přírodních či technických vědách.

Hlavním cílem této bakalářské práce je seznámit studenty matematiky s vybranými aplikacemi integrálního počtu ve fyzice. Ta využívá ke svým výpočtům kromě jednoduchých integrálů také integrály dvojné, trojné a křivkové. S ohledem na stanovený cíl je práce zaměřena na ty jednoduché.

Práce je rozdělena na pět kapitol. První dvě tvoří matematickou část, zbylé tři tvoří fyzikální (aplikační) část.

První kapitola připomíná čtenářům velmi stručně problematiku primitivní funkce a neurčitého integrálu.

Druhá kapitola je zaměřena na určitý integrál. Konkrétně je zde uveden horní, dolní a integrální součet a z něj se přechází na Riemannův a Newtonův určitý integrál. V kapitole jsou rovněž uvedeny vlastnosti a metody výpočtu určitých integrálů. Součástí je také přehled integrálů základních elementárních funkcí.

Fyzika se dělí na několik částí – mechaniku, molekulovou fyziku, termodynamiku, akustiku, elektřinu, magnetismus, optiku, atomovou a jadernou fyziku a astrofyziku. Třetí kapitola ukazuje aplikace integrálního počtu v právě jedné z nich, a to v mechanice. Je zde využit integrální počet při výpočtu veličin popisující pohyb a dále při výpočtu mechanické práce, těžiště tělesa a momentu setrvačnosti.

Ve čtvrté kapitole s názvem Aplikace integrálů v termodynamice lze nalézt výpočet dodaného či odebraného tepla při různých tepelných dějích, výpočet teploty plynu po stlačení nebo stanovení entropie.

Poslední, pátá kapitola, se zabývá aplikacemi integrálů v elektřině a magnetismu, které využívá při výpočtu elektrického náboje, elektrického proudu a magnetické indukce.

Kromě ukázkových příkladů jsou součástí každé „aplikační“ kapitoly také příklady k procvičení, jejichž zadání je inspirováno zdroji [1], [2] a [3]. Taktéž obsahují teoretický fyzikální základ nezbytný pro uvedení do problematiky příkladů, který byl poskládán ze zdrojů [4], [5], [6], [7] a [8]. U každého příkladu k procvičení je v hranaté závorce uveden jeho výsledek. Podrobnější řešení lze pak nalézt v příloze na konci této práce.

Práce je doplněna obrázky vytvořenými v programech Geogebra Klasik a Malování 3D.

1 Neurčitý integrál

Než se pustíme do samotných aplikací integrálů ve fyzice, ráda bych v této a následující kapitole nejprve čtenářům připomněla několik vybraných pojmů týkajících se integrálů. Tato kapitola je zaměřena na primitivní funkci a neurčitý integrál. Nebudeme zde podrobně budovat teorii integrálního počtu, protože to není účelem této práce.

V kapitolách 3, 4 a 5 budeme, mimo jiné, využívat hledání primitivních funkcí, proto začneme právě tímto pojmem. Pozn. Symbolem $f'(x)$ značíme první derivaci funkce $f(x)$.

1.1 Primitivní funkce

Definice 1.1 (Primitivní funkce)

Nechť funkce $F(x)$ a $f(x)$ jsou definované v otevřeném intervalu (a, b) . Platí-li $\forall x \in (a, b)$ rovnice $F'(x) = f(x)$, řekneme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) .

Definice nám říká, že pokud zderivujeme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$, dostaneme právě funkci $f(x)$. V této situaci se nabízí při nejmenším dvě otázky – zda existuje ke každé libovolné funkci funkce primitivní a pokud ano, zda je určena jednoznačně. Existence primitivní funkce je podmíněna spojitostí funkce. Pokud tedy máme spojitou funkci, existuje k ní i primitivní funkce. Nebudeme se zde zabývat případy, kdy je hledání primitivních funkcí obtížné a podíváme se, jak je to s tou jednoznačností (věta 1.1) a zavedeme pojem neurčitý integrál (definice 1.2).

Věta 1.1

Nechť funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b) . Součet $F(x) + C$, kde C je konstanta, je rovněž její primitivní funkcí.

(Důkaz věty uvádí např. Laitochová, 2009, str. 9)

1.2 Neurčitý integrál

Definice 1.2 (Neurčitý integrál)

Neurčitým integrálem funkce $f(x)$ nazveme množinu všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ a značíme podle Leibnize symbolem

$$\int f(x) dx.$$

Z uvedené věty 1.1 vyplývá, že funkce $f(x)$ má nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší pouze o konstantu. To nás ale nijak nepřekvapuje, protože víme, že derivace libovolné konstanty je vždy rovna nule. Dle definice 1.2 množinu těchto primitivních funkcí k funkci $f(x)$ nazýváme neurčitým integrálem.

Výraz $f(x)$ vyskytující se za znakem integrace označujeme jako integrant, dx označuje proměnnou x , podle které integrujeme. Integrační znak \int má symbolizovat sumu.

Na rozdíl od derivování nelze integrování považovat za jednoznačnou operaci, a to díky integrační konstantě. Dalo by se říct, že integrování je opačný proces k derivování a naopak.

2 Určitý integrál

V této kapitole se zaměříme na určitý integrál. Položme nyní otázku, co to je určitý integrál. Jsem si jistá, že většina studentů by odpověděla: „Určitý integrál je obsah plochy pod křivkou.“ Geometrickým významem určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ je přesněji velikost plochy ohraničená grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Definici určitého integrálu vyslovil Riemann či Newton. Riemann použil pojem limita součtu integrálních součtů. Newton naopak užívá pojem primitivní funkce. Přesné znění obou definic zopakujeme níže. Nejprve však připomeneme pojmy jako horní, dolní a integrální součet. Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s pojmy infimum a supremum.

2.1 Horní, dolní a integrální součet

Definice 2.1 (Horní a dolní součet)

Nechť je definována omezená funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ tzv. dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, kde $n \in \mathbf{N}$, na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$. Toto rozdělení označme písmenem D a znakem Δx_i označme délku i -tého částečného intervalu, tj. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Dále znakem M_i označme supremum a znakem m_i infimum funkce $f(x)$ na daném částečném intervalu $\langle x_i, x_{i-1} \rangle$. Horním součtem $S(D)$ příslušného rozdělení D budeme rozumět

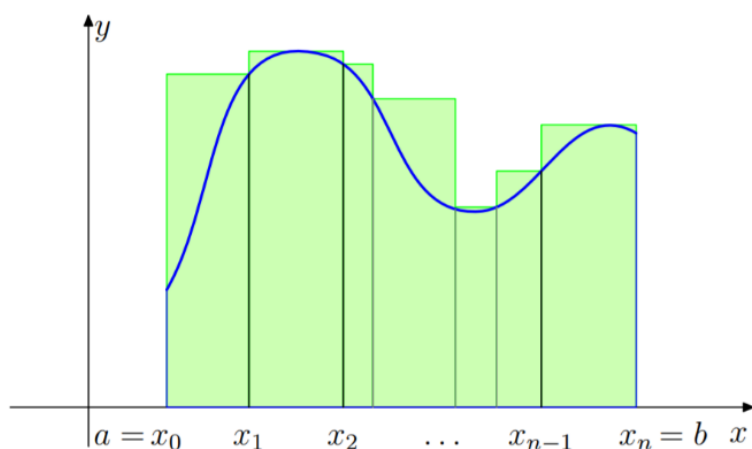
$$S(D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Obdobně dolním součtem $s(D)$ příslušného rozdělení D budeme rozumět

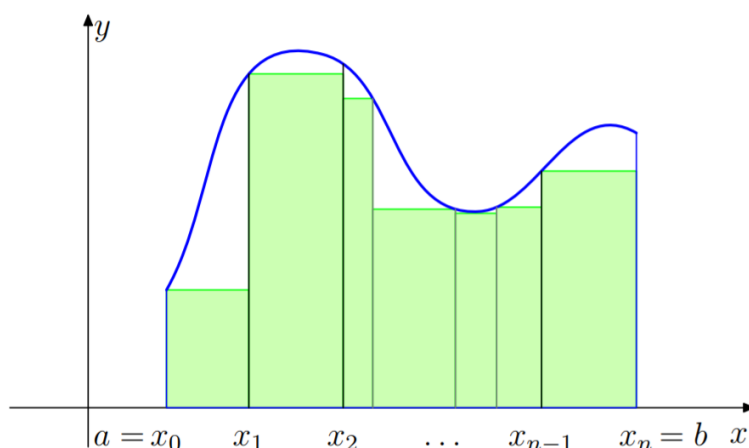
$$s(D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Geometrický význam předchozí definice můžeme vidět na obrázku 1 a 2 níže. Jak už bylo zmíněno, jedná se o obsah plochy S ohraničenou grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Abychom tento obsah S spočítali, využijeme např. známý a jednoduchý obsah obdélníku, a to následovně. Interval $\langle a, b \rangle$, na němž je funkce definovaná, rozdělíme na částečné intervaly Δx_i , na nichž určíme suprema M_i (resp. minima m_i). Tím získáme jednotlivé obdélníky o stranách Δx_i a M_i (resp. m_i). Součtem obsahů takto vzniklých obdélníků dostáváme horní součet (resp. dolní součet). Očividně bude platit $S \leq S(D)$ (resp. $s(D) \leq S$).

Je zřejmé, že čím „jemnější“ dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ provedeme, tím více se skutečnému obsahu S budeme přibližovat.



Obrázek 1: Geometrický význam horního součtu $S(D)$. (Převzato z [12], str. 112)



Obrázek 2: Geometrický význam dolního součtu $s(D)$. (Převzato z [12], str. 112)

Obdobně nadefinujeme integrální součet. Pojmy dělicí body, částečný interval a rozdělení mají stejný význam jako v definici 2.1.

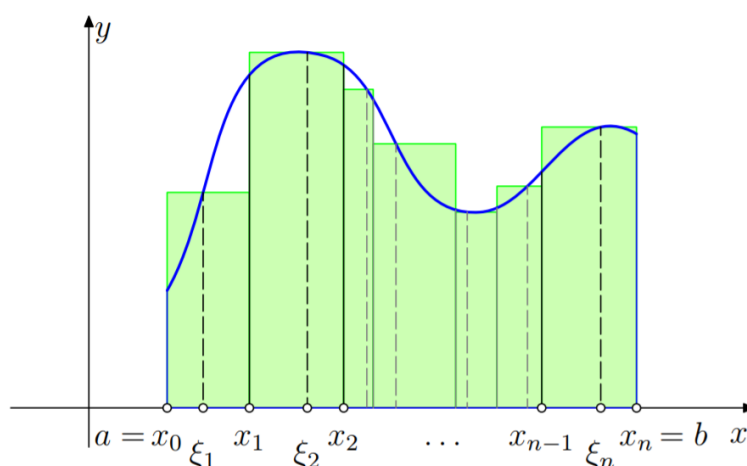
Definice 2.2 (Integrální součet)

Nechť je definována omezená funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ dělicími body na n -částečných intervalech. Integrálním součtem $\sigma(D)$ příslušného rozdělení D budeme rozumět

$$\sigma(D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

kde ξ_i je libovolný bod i -tého částečného intervalu.

Horní a dolní součet byl závislý pouze na volbě dělicích bodů. Integrální součet $\sigma(D)$ je navíc závislý na volbě bodů ξ_i . Jeho geometrický význam můžeme vidět na obrázku 3.



Obrázek 3: Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(D)$. (Převzato z [12], str. 110)

2.2 Riemannův a Newtonův určitý integrál

Nyní se konečně dostáváme k zavedení pojmu určitý integrál. Budeme uvažovat dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ dělicími body danými posloupností

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Normou dělení δ_n označíme délku největšího částečného intervalu, tzn. $\delta_n = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$. Jestliže pro normu dělení platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, pak uvedenou posloupnost nazveme normální posloupností dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.

Definice 2.3 (Riemannův určitý integrál)

Konverguje-li posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ příslušící libovolné normální posloupnosti dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ vždy k téže limitě $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$, přičemž nezáleží na volbě dělicích bodů x_i a bodů ξ_i , pak tuto limitu nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b . Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Řekneme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ podle Riemanna, pokud uvedený integrál existuje.

Definice 2.4 (Dolní, horní integrál)

Dolním (resp. horním) integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme supremum (resp. minimum) množiny všech dolních součtů $s(D)$ (resp. horních součtů $S(D)$) funkce $f(x)$, které přísluší všem normálním dělením intervalu $\langle a, b \rangle$. Píšeme

$$\sup_{n \rightarrow \infty} s(D) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{resp.} \quad \inf_{n \rightarrow \infty} S(D) = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Definice 2.5 (Riemannův určitý integrál)

Je-li

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx,$$

pak společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Věta 2.1

Je-li funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak je na něm rovněž integrovatelná.

(Důkaz věty uvádí např. Laitochová, 2009, str. 51)

Počítání integrálů podle Riemanna je očividně dost pracné a časově náročné. Je-li však funkce $f(x)$, jejíž integrál počítáme, spojitá, pak se nám práce výrazně zjednodušuje, a to díky definici integrálu, kterou vyslovil Newton. Spojitostí funkce je zajištěna existence primitivní funkce a rovněž platí, že oba integrály (Riemannův a Newtonův) jsou si na intervalu $\langle a, b \rangle$ v tomto případě rovny.

Definice 2.6 (Newtonův určitý integrál)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a zároveň nechť má na intervalu $\langle a, b \rangle$ primitivní funkci $F(x)$. Newtonovým určitým integrálem nazveme přírůstek funkce $f(x)$ v mezích od a do b . Píšeme

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Porovnejme nyní definici 1.2 a definici 2.1. Rozdíl mezi určitým a neurčitým integrálem je zřejmý. Neurčitým integrálem rozumíme množinu všech primitivních funkcí, kdežto určitý

integrál je reálné číslo. Pojdme si ještě připomenout některé věty týkající se určitých integrálů, konkrétně aditivitu integrálu vzhledem k mezím a linearitu vzhledem k funkci.

2.3 Aditivita a linearita určitého integrálu

Věta 2.2

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li $a < b < c$, pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(Důkaz věty uvádí např. Laitochová, 2009, str. 52)

Věta 2.3

Nechť $a < b$. Jestliže existují integrály $\int_a^b f(x) dx$ a $\int_a^b g(x) dx$, pak rovněž existuje $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(Důkaz věty uvádí např. Jarník, 1974, str. 39)

Věta 2.4

Nechť $a < b$. Existuje-li integrál $\int_a^b f(x) dx$, pak pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

(Důkaz věty uvádí např. Jarník, 1974, str. 40)

2.4 Výpočet určitých integrálů

V následujících dvou větách se zaměříme na dvě metody výpočtu určitých integrálů – metodu per partes (neboli po částech) a metodu substituční.

Věta 2.5 (Metoda per partes)

Nechť funkce $u(x), v(x)$ mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité derivace. Pak na tomto intervalu platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

(Důkaz věty uvádí např. Jarník, 1974, str. 75)

Věta 2.6 (Substituční metoda)

Nechť má funkce $\varphi(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$. Dále necht' funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle A, B \rangle$ a pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $A \leq \varphi(t) \leq B$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

(Důkaz věty uvádí např. Jarník, 1974, str. 72)

Užitím metody per partes nebo substituční metody je možno výpočet integrálů zjednodušit. Využití obou metod je spojeno s určitou početní zdatností, aby bylo správně rozeznáno, kdy bude vhodné je aplikovat. Pozn. Pokud se u substituční metody nevracíme k původní proměnné, je nutno pro novou proměnnou přepočíst integrační meze.

Při výpočtech určitých integrálů lze využít i další vlastnosti. Například záměna mezí je spojena se změnou znaménka. Dále integrál funkce, jehož meze jsou si rovny, je roven nule. Matematicky to zapíšeme následovně:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (2.1)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (2.2)$$

Výpočet integrálů výrazně usnadňuje i znalost základních integrálů elementárních funkcí, jejichž přehled uvádíme v následující podkapitole „Integrály základních elementárních funkcí“. Písmenem C je označena integrační konstanta, kterou je zbytečné při výpočtu určitých integrálů uvádět, protože se vzájemně odečte, tzn.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + c]_a^b = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

Ve druhém sloupci je vždy uveden definiční obor $D(f)$ a podmínky.

2.5 Integrály základních elementárních funkcí

1. $\int k \, dx = kx + C$ $D(f) \in \mathbf{R}, k = \text{konst.}$
2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $D(f) \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
3. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ $D(f) \in \mathbf{R}, a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$ $D(f) \in \mathbf{R}$
5. $\int \frac{1}{x \ln a} \, dx = \log_a |x| + C$ $D(f) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
6. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ $D(f) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $D(f) \in \mathbf{R}$
8. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ $D(f) \in \mathbf{R}$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$ $D(f) \in \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbf{Z}$
10. $\int \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{cotg} x + C$ $D(f) \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$

Pozn. Bude-li v textu odkazováno na tabulkové integrály, budou tím myšleny integrály uvedené v této podkapitole.

3 Aplikace integrálů v mechanice

V předchozích dvou kapitolách jsme zopakovali pojmy týkající se integrálů. Nyní se můžeme zaměřit na konkrétní aplikace ve fyzice. U fyzikálních veličin, které lze považovat za spojité, tzn. nemění se skokově, lze k jejich výpočtům použít Newton-Leibnizovu formuli.

Mechanika je částí fyziky, která se zabývá pohybem těles a jejich vzájemným působením. Dělí se na kinematiku a dynamiku. Kinematika studuje pohyb vzhledem k času a dynamika pohyb vzhledem k působícím silám.

V této kapitole ukážeme aplikace integrálů při výpočtu veličin popisujících pohyb a dále při výpočtu mechanické práce, těžiště tělesa a momentu setrvačnosti. Využití je samozřejmě daleko rozsáhlejší, např. výpočet síly, gravitační síly mezi tělesy, prodloužení či zkrácení tělesa při deformaci, stanovení výkonu atd.

Pozn. Symbolem Δx budeme označovat změnu veličiny x – tedy rozdíl její koncové a počáteční hodnoty. Diferenciál dx veličiny x bývá ve fyzice často nazýván elementem, jinými slovy malou částí, veličiny x .

3.1 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Přímocharý pohyb tělesa je pohyb, při němž se těleso pohybuje vůči Zemi po svislé, vodorovné nebo libovolně skloněné přímce. Dráhu, kterou při tomto pohybu urazí od doby t po dobu $t + \Delta t$, označíme Δs . Definujme pojem průměrná rychlost \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Často nás zajímá, jakou rychlost má těleso v daném okamžiku, tzn. v infinitezimálně krátkém časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$, kde $\Delta t \rightarrow 0$. Tuto veličinu nazýváme okamžitá rychlost. Z definice derivace a průměrné rychlosti dostaneme pro okamžitou rychlost v

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.1)$$

(Zlomek $\frac{ds}{dt}$ označuje derivaci dráhy podle času.)

Dále obdobně definujme pojem průměrné zrychlení

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

a okamžité zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (3.2)$$

Jak už název napovídá, u rovnoměrně zrychleného pohybu je zrychlení rovnoměrné, tzv. konstantní.

(Jednotky: $[t] = s$, $[s] = m$, $[v] = m \cdot s^{-1}$, $[a] = m \cdot s^{-2}$.)

Volný pád je speciálním případem rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, kdy se těleso pohybuje svisle k zemi s nulovou počáteční rychlostí a se zrychlením, tzv. tíhovým zrychlením g , jehož hodnota na 45° s. š. na úrovni mořské hladiny odpovídá hodnotě $g = 9,806\ 65\ m \cdot s^{-2}$ pro všechna tělesa libovolné hmotnosti, hustoty atd. Pro zjednodušení výpočtů budeme pracovat se zaokrouhlenou hodnotou $g \doteq 10\ m \cdot s^{-2}$.

Dalším případem může být **vrh svislý vzhůru**, pro něhož platí, že počáteční rychlost vyhození a rychlost dopadu jsou si rovny, pokud těleso dopadá na místo, ze kterého bylo i vyhozeno.

3.1.1 Ukázkový příklad 1

Zadání:

Jakou rychlostí by na zem dopadla dešťová kapka z mraku, který je ve výšce 2 km, kdyby nebyla brzděna odporem vzduchu?

Řešení:

Jedná se o volný pád, zrychlení a je rovno tíhovému zrychlení g . Počáteční hodnoty označíme následovně: $v_0 = 0\ m \cdot s^{-1}$, $s_0 = 0\ m$. Hodnoty při dopadu: $v_d = ?\ m \cdot s^{-1}$, $s_d = 2\ km = 2\ 000\ m$.

Máme vypočítat rychlost kapky při dopadu, tedy okamžitou rychlost v okamžiku dopadu. Pro okamžitou rychlost platí (3.1). Vzhledem k tomu, že nevíme, jak dlouho kapka padala, pomůžeme si vzorcem (3.2), ze kterého vyjádříme $dt = \frac{dv}{a}$ a jednoduše dosadíme do (3.1).

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$v = \frac{a\ ds}{dv}$$

Rovnici vynásobíme dv , zrychlení a zaměníme za tíhové zrychlení g .

$$v\ dv = a\ ds$$

$$v\ dv = g\ ds$$

Obě strany rovnice integrujeme pomocí tabulkových integrálů. Tíhové zrychlení g je konstantní, lze jej vytknout před integrál.

$$\int_{v_0}^{v_d} v \, dv = g \int_{s_0}^{s_d} ds$$

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^{v_d} = [gs]_{s_0}^{s_d}$$

$$\frac{v_d^2 - v_0^2}{2} = g(s_d - s_0)$$

Nyní stačí vyjádřit v_d a dosadit hodnoty ze zadání v základních jednotkách. Obě počáteční hodnoty jsou nulové, tudíž se vyjádření výrazně usnadní.

$$v_d^2 = 2gs_d$$

$$v_d = \sqrt{2gs_d}$$

$$v_d = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2000}$$

$$v_d = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Závěr:

Pokud by dešťová kapka nebyla brzděna odporem vzduchu dopadla by na zem rychlostí $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(Pozn. Vzorec $v_d = \sqrt{2gs_d}$ je platný pro libovolný volný pád ve vakuu. Rychlost dopadu tělesa ve vakuu závisí pouze na výšce, ze které těleso pustíme a je jedno jakou má např. hmotnost.)

3.1.2 Příklad k procvičení 1

Chlapec vyhodil kámen svisle vzhůru do vzduchu do výšky 5 metrů. Vypočtete, za jak dlouho opět chytí kámen do ruky. Předpokládejte, že místo vyhození je stejné jako místo chycení. Odpor vzduchu opět zanedbejte. [2 s]

3.2 Mechanická práce

Působení jednoho tělesa na druhé nazýváme síla, kterou značíme F . Lze ji vyjádřit pomocí tzv. druhého Newtonova zákona jako

$$F = m \cdot a, \tag{3.3}$$

kde m je hmotnost tělesa a a je jeho zrychlení.

(Jednotky: $[m] = \text{kg}$, $[F] = \text{N}$.)

Mechanická práce W je fyzikální veličina definovaná jako součin síly F a dráhy ds , po které síla působila na těleso. Můžeme ji vyjádřit vzorcem

$$W = F \, ds. \tag{3.4}$$

(Jednotka: $[W] = \text{J}$.)

3.2.1 Ukázkový příklad 2

Zadání:

Jakou práci W musí vykonat motor automobilu, jehož hmotnost je $m = 1,5 \text{ t}$, aby zvýšil svou rychlost ze $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

Veličiny uvedené v zadání je nutno převést do základních jednotek. Převodní vztah mezi $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ a $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ je následující: $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

$$m = 1,5 \text{ t} = 1\,500 \text{ kg}$$

$$v_1 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Práce motoru je dána vztahem (3.4). Ve vzorci se ale vyskytuje síla F , kterou neznáme. Dosadíme-li však vzorec (3.3) do vzorce (3.4) získáme

$$W = ma \, ds.$$

Zrychlení a nahradíme užitím vztahu (3.2).

$$W = m \frac{dv}{dt} \, ds,$$

kde $\frac{ds}{dt}$ je podle (3.1) rovno rychlosti v . Vzorec, ke kterému jsme dospěli vypadá následovně

$$W = mv \, dv$$

a neobsahuje žádnou neznámou veličinu. Můžeme proto integrovat. Hmotnost je konstantní, lze ji vytknout před integrál.

$$W = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv$$

Nyní už jen zbývá provést integraci dle tabulkového integrálu a dosadit hodnoty ze zadání převedené na základní jednotky.

$$W = m \cdot \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2}$$

$$W = 1\,500 \cdot \left[\frac{20^2}{2} - \frac{10^2}{2} \right]$$

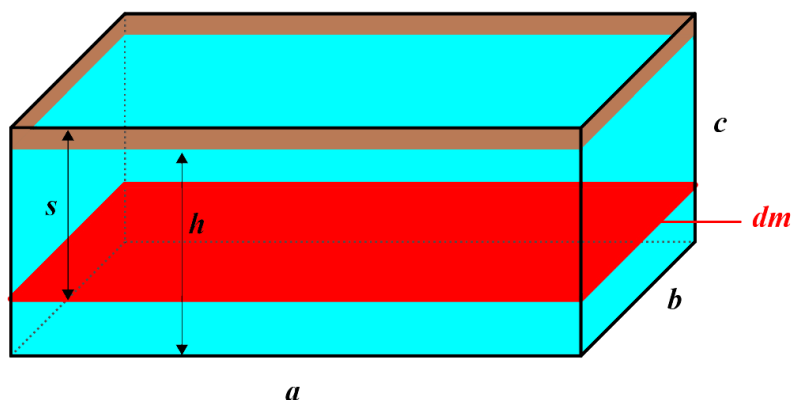
$$W = 225\,000 \text{ J}$$

Závěr:

Motor automobilu musí vykonat práci o velikosti 225 000 J, aby zrychlil ze $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3.2.2 Příklad k procvičení 2

Zahradní bazén ve tvaru kvádrů, který je zakopaný v zemi, je třeba vypustit. Vypočtete, jak velkou práci čerpadlo vykoná při vypouštění vody na okolní trávník, má-li dno rozměry $a = 5 \text{ m}$ a $b = 4 \text{ m}$, hloubka je $c = 2 \text{ m}$ a voda sahá do výšky $h = 1,8 \text{ m}$ ode dna bazénu (viz obrázek 4). Hustota vody je $\rho = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. [395 200 J]



Obrázek 4: Zahradní bazén. (Vlastní nákres.)

3.3 Těžiště tělesa

Zavedeme nejprve pojem hmotný střed a vymežíme jeho vlastnosti. V hmotném středu daného tělesa je soustředěna veškerá jeho hmotnost. Pokud bychom vzali výslednici všech sil, které na těleso působí, tak se hmotný střed bude pohybovat právě jako by na něj tato výslednice působila. Hmotný střed je rovněž místo, ve kterém působí tíhová síla na těleso. V tíhovém poli Země je hmotný střed označován jako těžiště. Pro jednotlivé kartézské souřadnice těžiště spojitých homogenních těles platí

$$x_T = \frac{1}{S} \int x \, dS, \quad (3.5)$$

$$y_T = \frac{1}{S} \int y \, dS, \quad (3.6)$$

$$z_T = \frac{1}{S} \int z \, dS, \quad (3.7)$$

kde S je plocha tělesa.

Uvedené vztahy se dají použít i při integraci přes celkový objem V nebo celkovou hmotnost M . Význam předchozí věty vysvětlíme na souřadnici x_T , přičemž pro souřadnice y_T a z_T to bude platit obdobně. Při integraci přes celý objem V bude pro souřadnici x_T platit

$$x_T = \frac{1}{V} \int x \, dV.$$

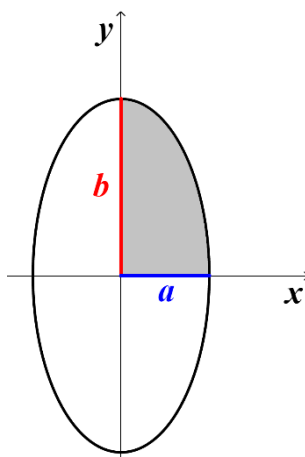
Budeme-li integrovat přes celkovou hmotnost M , je x_T dána následovně

$$x_T = \frac{1}{M} \int y \, dM.$$

3.3.1 Ukázkový příklad 3

Zadání:

Jaká bude poloha těžiště tenké nerezové desky ve tvaru 1/4 elipsy s hlavní poloosou o velikost $a = 1$ m a vedlejší poloosou o velikosti $b = 2$ m (viz obrázek 4, šedá část). Tloušťka desky je tak malá, že ji můžeme zanedbat.



Obrázek 5: Tenká nerezová deska ve tvaru 1/4 elipsy (šedá část). (Vlastní nákres.)

Řešení:

Abychom polohu těžiště dané desky vypočetli, jak už naznačují vzorce (3.5) a (3.6), musíme vědět, jaký je její obsah a obecně popsat souřadnice x a y . Umístění elipsy do souřadného systému budeme uvažovat přesně tak, jak je naznačeno na obrázku 5.

Obsah elipsy je $S = \pi ab$, z toho odvodíme, že naše 1/4 bude mít čtvrtinový obsah, tj.

$$S = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 2}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Dále budeme potřebovat rovnice elipsy, jenž má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Souřadnice x a y , jestliže $a = 1$ a $b = 2$, vyjádříme z rovnice elipsy následovně

$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2},$$

$$y = 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Nyní můžeme vypočítat jednotlivé souřadnice těžiště.

x -ová souřadnice těžiště je dle (3.5)

$$x_T = \frac{1}{S} \int x \, dS.$$

Element plochy dS v tomto případě můžeme vyjádřit jako $dS = y \, dx$.

$$x_T = \frac{1}{S} \int xy \, dx$$

V integrálu se vyskytují dvě proměnné, integrovat máme podle x , proto y nahradíme výše vyjádřeným y z rovnice elipsy, tj. $y = 2\sqrt{1 - x^2}$.

$$x_T = \frac{1}{S} \int x \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Dosadíme za S obsah 1/4 elipsy, doplníme meze integrálu ($x \in \langle 0,1 \rangle$) a zavedeme substituci dle věty 2.6. Druhý sloupec v substituční závorce naznačuje přepočtení integračních mezí.

$$x_T = \frac{2}{\pi} \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \, dx \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \int_1^0 -\sqrt{t} \, dt$$

Zaměníme-li meze, jak uvádí vzorec (2.1), zbavíme se mínusu v integrálu. Odmocninu \sqrt{t} vyjádříme pomocí mocniny, tj. $t^{\frac{1}{2}}$, čímž se dostáváme na tabulkový integrál.

$$x_T = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$x_T = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} [1 - 0]$$

$$x_T = \frac{4}{3\pi}$$

To samé provedeme pro souřadnici y_T . Element dS vypadá následovně $dS = x \, dy$. Integrujeme podle y , nahrazujeme tudíž x vyjádřeným z rovnice elipsy $x = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$. Meze integrálu $y \in \langle 0,2 \rangle$. Další postup výpočtu je identický jako u souřadnice x_T .

$$y_T = \frac{2}{\pi} \int_0^2 y \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} \, dy = \left[\begin{array}{l} t = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ dt = -\frac{y}{2} \, dy \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 0 \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \int_1^0 -2\sqrt{t} \, dt$$

$$y_T = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2 \cdot 2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1$$

$$y_T = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{3} [1 - 0]$$

$$y_T = \frac{8}{3\pi}$$

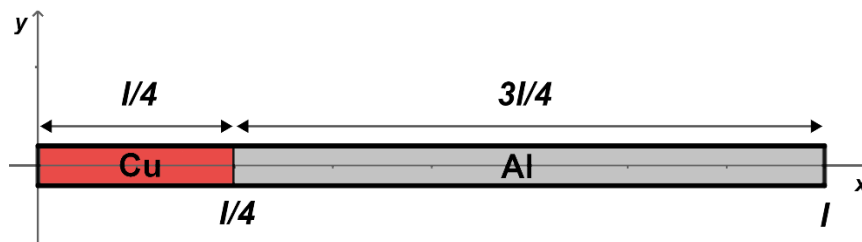
V zadání je uvedeno, že tloušťku desky máme zanedbat, proto souřadnici z_T nemá smysl počítat.

Závěr:

Souřadnice těžiště nerezové desky ve tvaru 1/4 elipsy jsou $T = \left[\frac{4}{3\pi}, \frac{8}{3\pi} \right]$.

3.3.2 Příklad k procvičení 3

Tyč o délce $l = 1$ m je tvořena z jedné čtvrtiny z mědi a ze tří čtvrtin z hliníku (viz obrázek 6). Určete polohu těžiště této tyče. Hustota mědi je $\rho_{\text{Cu}} = 8\,930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota hliníku $\rho_{\text{Al}} = 2\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. [$x_T \doteq 0,363$ m; $y_T = 0$ m; $z_T = 0$ m]



Obrázek 6: Tyč z mědi a hliníku. (Vlastní nákres.)

3.4 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J je veličina, která udává míru setrvačných vlastností při rotaci (otáčivém pohybu). Pro tělesa se spojitým rozložením látky platí následující vztah

$$J = \int r^2 dm, \quad (3.8)$$

kde r je vzdálenost od osy otáčení o a integruje se přes celou hmotnost m tělesa.

(Jednotka: $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.)

Steinerova věta

Mějme dvě osy. Osu o procházející těžištěm tělesa a osu o' , která je rovnoběžná s osou o a zároveň je od ní vzdálena o vzdálenost x . Pokud jsme schopni určit moment setrvačnosti J_T vzhledem k ose o , pak moment setrvačnosti J_a vzhledem k ose o' vypočteme podle Steinerovy věty, která zní

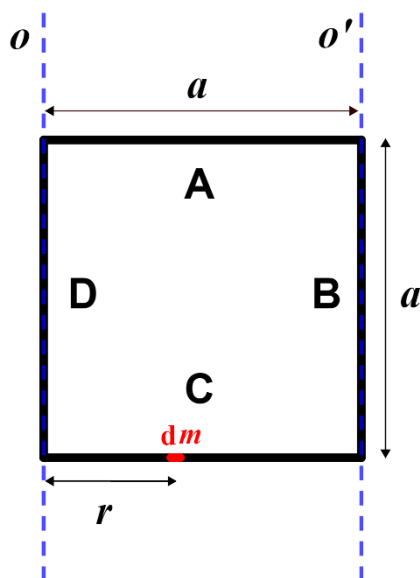
$$J_a = J_T + mx^2, \quad (3.9)$$

kde m je hmotnost tělesa.

3.4.1 Ukázkový příklad 4

Zadání:

Tenký homogenní drát o hmotnosti m má tvar čtverce a délka jedné jeho strany je a . Jaký je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose o splývající s jednou jeho stranou? (viz obrázek 7)



Obrázek 7: Tenký homogenní drát ve tvaru čtverce. (Vlastní nákres.)

Řešení:

Při výpočtu využijeme vzorec (3.8), který musíme upravit. Podívejme se proto na hmotnost a element hmotnosti dm . Jestliže celý drát má hmotnost m , pak jednotlivé strany mají hmotnost $\frac{m}{4}$. Vezmeme-li v úvahu jednu ze stran a její element dr , který je na obrázku vyznačen červeně, bude jeho hmotnost $dm = \frac{m}{4} dr = \frac{m}{4a} dr$.

Pro jednodušší a přehlednější výpočet si drát nyní rozdělíme na 4 části (jednotlivé strany čtverce) označené A, B, C a D – viz obrázek 7. Momenty setrvačnosti jednotlivých stran vypočteme dle (3.8) a výsledný moment setrvačnosti celého drátu pak bude roven jejich součtu (dle věty 2.2).

Pro jednodušší a přehlednější výpočet si drát nyní rozdělíme na 4 části (jednotlivé strany čtverce) označené A, B, C a D – viz obrázek 7. Momenty setrvačnosti jednotlivých stran vypočteme dle (3.8) a výsledný moment setrvačnosti celého drátu pak bude roven jejich součtu (dle věty 2.2).

Moment setrvačnosti J_D části D, vzhledem k ose o , bude nulový, protože vzdálenost r od osy otáčení o je ve všech bodech části D nulová. Pokud bychom integrovali, meze integrálu by obě byly rovny nule, tudíž výsledek by byl rovněž nula (dle vzorce 2.2).

Pojďme na další část drátu. Momenty setrvačnosti částí A a C vzhledem k ose o si budou očividně rovný. Vypočteme tedy J např. pro část C. Element hmotnosti dm má stejné vyjádření jako v předchozím případě. Část C má délku rovnu a , tudíž vzdálenost jednotlivých elementů dm se bude pohybovat od 0 až po a .

$$J_C = \int_0^a r^2 \frac{m}{4a} dr$$

Zlomek $\frac{m}{4a}$ je konstanta, můžeme ji tedy vytknout před integrál. Dostáváme tabulkový integrál, který snadno vypočítáme.

$$J_C = \frac{m}{4a} \int_0^a r^2 dr$$

$$J_C = \frac{m}{4a} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a$$

$$J_C = \frac{m}{4a} \frac{a^3}{3}$$

$$J_C = \frac{1}{12} ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Připomeňme, že moment setrvačnosti části A bude stejný jako části C, tudíž

$$J_A = \frac{1}{12} ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Zbývá moment setrvačnosti poslední části B, kterou proložíme osou o' . Díky toho můžeme využít Steinerovu větu (3.9), kde x je vzdálenost mezi osami o a o' , v našem případě tedy např. délka části C, která je rovna a . Moment setrvačnosti J_T ze vzorce (3.9) je zde roven našemu J_D . Nesmíme zapomenout dosazovat čtvrtinovou hmotnost!

$$J_B = J_D + \frac{m}{4} a^2$$

$$J_B = 0 + \frac{m}{4} a^2$$

$$J_B = \frac{1}{4} ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Jak už bylo řečeno, výsledný moment setrvačnosti je roven součtu dílčích momentů.

$$J = J_A + J_B + J_C + J_D$$

$$J = \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 + \frac{1}{12} ma^2 + 0$$

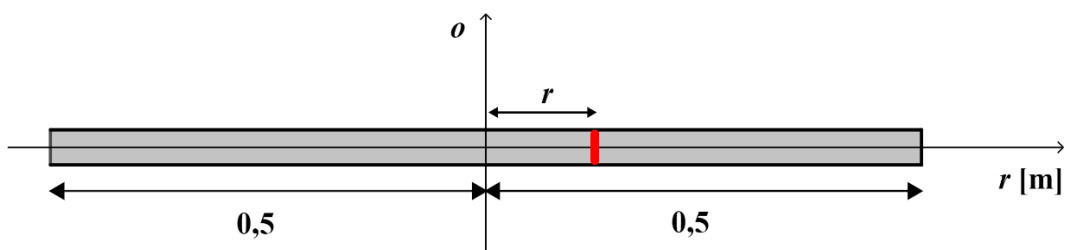
$$J = \frac{5}{12} ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Závěr:

Moment setrvačnosti drátu ve tvaru čtverce vzhledem k ose o , splývající s jednou jeho stranou, je $\frac{5}{12}ma^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3.4.2 Příklad k procvičení 4

Jak velký bude moment setrvačnosti tenké železné tyče vzhledem k ose o , která je na tyč kolmá a prochází jejím středem (viz obrázek 8). Délka tyče $r = 1 \text{ m}$. Hustota železa je $\rho_{\text{Fe}} = 7860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. [$J = 655 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$]



Obrázek 8: Tenká železná tyč. (Vlastní nákres.)

Tímto příkladem bychom kapitolu „Aplikace v mechanice“ ukončili a můžeme přejít na další část fyziky, konkrétně na termodynamiku.

4 Aplikace integrálů v termodynamice

Termodynamika je fyzikální obor zabývající se vzájemnými přeměnami jednotlivých druhů energií, či fyzikálními, chemickými a biologickými procesy a jejich rovnovážnými stavy.

Ukážeme si aplikace integrálů při výpočtu tepla v různých případech, výpočet teploty plynu po stlačení a výpočet entropie. Další využití je například při výpočtu tepelného toku, práce atd. Nejprve ale opět uvedeme několik nezbytných pojmů, které nás opět uvedou do problematiky následujících příkladů.

Teplota

Teplota je parametr, kterým můžeme popsat stav tepelné rovnováhy mezi tělesy. Říkáme, že tělesa jsou v tepelné rovnováze, jestliže mezi nimi neprobíhá žádná tepelná výměna. Teplotu můžeme udávat v různých stupnicích. Nás ale bude především zajímat Celsiova teplota t a Kelvinova teplota T , mezi nimiž platí následující převodní vztah

$$t = T - 273,15 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (4.1)$$

(Jednotky: $[t] = ^\circ\text{C}$, $[T] = \text{K}$.)

Jenom pro zajímavost – teploty $T = 0 \text{ K}$, tzv. absolutní nuly, nelze dosáhnout.

Vnitřní energie

Každá látka je tvořena atomy či molekulami, které se náhodně pohybují. Kterýkoliv atom či molekula má svou potenciální (polohovou) a kinetickou (pohybovou) energii. Vnitřní energii U tělesa označujeme souhrn potenciálních a kinetických energií jeho jednotlivých částic.

(Jednotka: $[U] = \text{J}$.)

Teplo

Je nutno rozlišovat mezi teplotou a teplem. Teplo je míra změny vnitřní energie, kterou si systém (např. hrnek s čajem) vymění s okolím (místnost) v důsledku jejich teplotního rozdílu. V momentě, kdy mají stejnou teplotu (čaj i místnost), nastává tepelná rovnováha a výměna tepla je ukončena.

Tepelná kapacita, měrná tepelná kapacita, molární tepelná kapacita

Tepelnou kapacitu C můžeme chápat jako jakousi konstantu úměrnosti, a to mezi teplem Q , které systému dodáme, a změnou teploty ΔT , která díky toho nastane. Pišeme tedy

$$Q = C\Delta T. \quad (4.2)$$

(Jednotka: $[C] = \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Měrná tepelná kapacita c je tepelná kapacita C na jednotku hmotnosti m . Platí vztah

$$c = \frac{C}{m}. \quad (4.3)$$

(Jednotka: $[c] = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Poměr, mezi měrnou tepelnou kapacitou c_p při konstantním tlaku p a měrnou tepelnou kapacitou c_V při konstantním objemu V , určuje tzv. Poissonovu konstantu κ

$$\frac{c_p}{c_V} = \kappa. \quad (4.4)$$

(Hodnoty Poissonovy konstanty pro jednotlivé plyny jsou uvedeny ve fyzikálních tabulkách.)

Molární tepelná kapacita C_V při konstantním objemu se vztahuje na jednotku molu. Jeden mol udává počet atomů/ molekul, které jsou ve 12 g uhlíku ^{12}C . Tento počet udává tzv. Avogadrova konstanta $N_A = 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Pro n molů libovolné látky platí vztah

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{m_m}, \quad (4.5)$$

kde N je počet molekul, m je hmotnost látky a m_m její molární hmotnost.

(Jednotky: $[n] = \text{mol}$, $[m_m] = \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.)

Molární tepelná kapacita při konstantním objemu je dána vztahem

$$C_V = c_V m_m, \quad (4.6)$$

kde c_V je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu a m_m je molární hmotnost látky.

(Jednotka: $[C_V] = \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Můžeme zavést i molární tepelnou kapacitu C_p při konstantním tlaku, pro kterou platí

$$C_p = C_V + R_m, \quad (4.7)$$

kde R_m je molární plynová konstanta, $R_m = 8,314\,510 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, která je pro všechny plyny stejná. Uvedený vzorec (4.7) je označován jako Mayerův vztah.

Platí rovněž

$$\frac{C_p}{C_V} = \kappa. \quad (4.8)$$

(Jednotka: $[C_p] = \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

První věta termodynamiky

Uvažujme systém popsany počátečními veličinami p_1 (tlak), V_1 (objem) a T_1 (teplota). Přejde-li tento systém do stavu, který můžeme popsat veličinami p_2 , V_2 a T_2 , dojde ke změně vnitřní energie dU systému. Změnu vnitřní energie popisuje první věta termodynamiky

$$dU = \delta Q - \delta W, \quad (4.9)$$

kde δQ je teplo dodané okolím a δW je práce, kterou vykonává systém. Symbol δ označuje neúplné diferenciály, tzn. že teplo a práce jsou závislé na způsobu, jakým soustava přejde z jednoho stavu do druhého.

Vnitřní energie je závislá pouze na stavu, ve kterém se nachází, ne na cestě, po níž se do něj dostala. Tudiž jde o úplný diferenciál a můžeme ji vyjádřit jako

$$dU = nC_V dT. \quad (4.10)$$

Pro neúplný diferenciál práce platí

$$\delta W = p(V) dV. \quad (4.11)$$

Symbol $p(V)$ značí, že tlak je závislý na objemu, což v praxi znamená, že jej nemůžeme vytknout před integrál. Tento problém nám ale vyřeší stavová rovnice (4.13) uvedená níže.

První větu termodynamiky můžeme rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + \delta W, \\ \delta Q &= nC_V dT + p(V) dV. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Stavová rovnice

Stavová rovnice popisuje chování ideálního plynu, tj. plyn dokonale stlačitelný a bez vnitřního tření. Pro zjednodušení výpočtů můžeme reálné plyny považovat za ideální a použít stavovou rovnici, která má následující tvar

$$pV = nR_m T, \quad (4.13)$$

kde p je tlak, V je objem, n je počet molů, R_m je plynová konstanta a T označuje termodynamickou teplotu plynu.

4.1 Teplo

4.1.1 Ukázkový příklad 5

Zadání:

Dusík o objemu 6,5 litru je uzavřen v láhvi pod tlakem 85 MPa. Jaké teplo Q musíme dodat, abychom zvýšili jeho teplotu ze 4 °C na 12 °C? (Poissonova konstanta pro dusík je $\kappa = 1,404$.)

(Poznámka: Jednotka MPa značí megapascaly, tj. 10^6 Pa.)

Řešení:

Využijeme první termodynamický zákon (4.12). Vzhledem k tomu, že nedochází ke změně objemu, je $dV = 0$. Rovnice se nám zjednoduší na $\delta Q = nC_V dT$.

Neznáme počet molů n ani hodnotu molární tepelné kapacity C_V , musíme je tedy nahradit. Ze stavové rovnice pro počáteční stav dusíku vyjádříme n .

$$p_1 V_1 = n R_m T_1$$

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1}$$

Další neznámou C_V získáme následujícím způsobem. Vyjádříme C_p ze (4.8), tzn. $C_p = C_V \kappa$, a dosadíme do (4.7), tak dostaneme

$$C_V \kappa = C_V + R_m.$$

Podle uvedené rovnice bude molární tepelná kapacita C_V rovna

$$C_V = \frac{R_m}{\kappa - 1}.$$

Dosadíme vyjádřené n a C_V do zjednodušeného prvního termodynamického zákona.

$$\delta Q = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} \frac{R_m}{\kappa - 1} dT$$

Integrujeme. Všechny konstanty vytkneme před integrál.

$$Q = \int \frac{p_1 V_1}{T_1 (\kappa - 1)} dT$$

$$Q = \frac{p_1 V_1}{T_1 (\kappa - 1)} \int_{T_1}^{T_2} dT$$

Dostali jsme se k jednoduchému tabulkovému integrálu.

$$Q = \frac{p_1 V_1}{T_1 (\kappa - 1)} [T]_{T_1}^{T_2}$$

Ještě, než dosadíme hodnoty ze zadání, musíme je převést na základní jednotky.

$$V_1 = 6,5 \text{ l} = 6,5 \text{ dm}^3 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_1 = 85 \text{ MPa} = 85 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 4 + 273,15 = 277,15 \text{ K}$$

$$T_2 = 12 + 273,15 = 285,15 \text{ K}$$

Můžeme dosadit.

$$Q = \frac{85 \cdot 10^6 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}}{277,15 (1,404 - 1)} [285,15 - 277,15]$$

$$Q \doteq 39\,475 \text{ J}$$

Závěr:

Aby dusík zvýšil svou teplotu ze 4 °C na 12 °C, musíme mu dodat teplo o velikosti 39 475 J.

4.2 Adiabatický děj

Adiabatický děj je proces, při kterém soustava přechází z jednoho stavu do druhého a nedochází k výměně tepla, tzn. $\delta Q = 0$. Toho lze docílit buď rychlým průběhem nebo dobrou tepelnou izolací. Děj popisuje tzv. Poissonův zákon, který zní

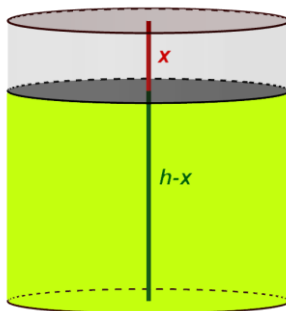
$$pV^\kappa = \text{konst.}, \quad (4.14)$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem a κ označuje Poissonovu konstantu.

4.2.1 Ukázkový příklad 6

Zadání:

Oxid uhličitý o teplotě $t_1 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ je uzavřen ve válci vysokém $h = 40\text{ cm}$ pod tlakem $p_1 = 0,1\text{ MPa}$. Plyn adiabaticky stlačíme, přičemž se píst posune o $x = 10\text{ cm}$. Jaká bude teplota t_2 a tlak p_2 oxidu uhličitého po stlačení? (Poissonova konstanta $\kappa_{\text{CO}_2} = 1,304$.)



Obrázek 9: Oxid uhličitý uzavřený ve válci. (Vlastní nákres.)

Řešení:

Nejprve si vyjádříme objemy V_1 před stlačení, V_2 po stlačení a jejich závislost. Jedná se o válec, proto počáteční objem V_1 bude

$$V_1 = \pi r^2 h.$$

Stlačíme-li píst, zmenšíme objem o $\pi r^2 x$. Konečný objem V_2 je roven

$$V_2 = \pi r^2 h - \pi r^2 x,$$

$$V_2 = \pi r^2 (h - x).$$

Záměrně si stanovíme závislost mezi objemy V_1 a V_2 .

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2 (h - x)}$$

$$V_2 = V_1 \frac{h - x}{h}$$

Dále vyjdeme z prvního termodynamického zákona. Jak již bylo řečeno, při adiabatickém ději nedochází k výměně tepla ($\delta Q = 0$), platí tedy

$$0 = nC_V dT + p(V) dV,$$

$$-nC_V dT = p(V) dV.$$

Neznáme počet molů n ani molární tepelnou kapacitu C_V . Navíc na pravé straně rovnice se vyskytuje tlak p , který je proměnný, a proto jej při aplikaci integrálu nemůžeme vytknout. Musíme tyto členy nahradit. Počet molů n nahradíme ze stavové rovnice, tzn.

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1}.$$

Užijeme-li vztahy (4.7) a (4.8) jako v předchozím příkladu, bude pro molární tepelnou kapacitu platit

$$C_V = \frac{R_m}{\kappa - 1}.$$

Uvedli jsme, že při adiabatickém ději je $pV^\kappa = konst.$ Závislost mezi počátečním tlakem p_1 , počátečním objemem V_1 a jakýmkoliv tlakem p , objemem V plynu je následující

$$pV^\kappa = p_1 V_1^\kappa,$$

$$p = \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa}.$$

Vše dosadíme do rovnice a integrujeme.

$$- \int_{T_1}^{T_2} \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} \frac{R_m}{\kappa - 1} dT = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} dV$$

Na levé straně se zkrátí R_m a vše ostatní můžeme vytknout před integrál, protože jsou to konstanty. Na pravé straně rovnice můžeme před integrál vytknout $p_1 V_1^\kappa$ (rovněž jde o konstanty). Vypočteme tabulkové integrály na obou stranách rovnice. Znaménko mínus vytkneme před zlomek, tzn. $\frac{1}{\kappa-1} = -\frac{1}{1-\kappa}$.

$$-\frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\kappa - 1} \int_{T_1}^{T_2} dT = p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\kappa} dV$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{1}{1 - \kappa} [T]_{T_1}^{T_2} = p_1 V_1^\kappa \frac{1}{1 - \kappa} [V^{1-\kappa}]_{V_1}^{V_2}$$

Dosadíme meze a celou rovnici vydělíme $\frac{p_1}{1-\kappa}$.

$$\frac{V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = V_1^\kappa (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa})$$

Objem V_2 neznáme, nahradíme jej z vyjádřené závislosti, tj. $V_2 = V_1 \frac{h-x}{h}$. Poté následuje několik algebraických úprav.

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = V_1^{\kappa-1} \left(\frac{V_1(h-x)}{h} \right)^{1-\kappa} - V_1^{\kappa-1} V_1^{1-\kappa}$$

$$\frac{T_2}{T_1} - 1 = \left(\frac{h-x}{h}\right)^{1-\kappa} - 1$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{h-x}{h}\right)^{1-\kappa}$$

Ještě je potřeba dopočítat výsledný tlak p_2 . Opět vyjdeme z $pV^\kappa = konst.$

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa.$$

Dosadíme za V_2 a vyjádříme tlak p_2

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 \left(V_1 \frac{h-x}{h}\right)^\kappa,$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{h}{h-x}\right)^\kappa.$$

Hodnoty ze zadání je nutno před dosazením převést na základní jednotky.

$$T_1 = 20 + 273,15 = 293,15 \text{ K}$$

$$h = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$x = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$p_1 = 0,1 \text{ MPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

Dosadíme do získaných vzorců a pro lepší představu převedeme teplotu na °C.

$$T_2 = 293,15 \cdot \left(\frac{0,4 - 0,1}{0,4}\right)^{1-1,304}$$

$$T_2 \doteq 320 \text{ K},$$

$$t_2 \doteq 47 \text{ °C},$$

$$p_2 = 10^5 \left(\frac{0,4}{0,4 - 0,1}\right)^{1,304}$$

$$p_2 \doteq 145\,519 \text{ Pa}$$

Závěr:

Stlačením pístu jsme zvýšili teplotu oxidu uhličitého na 47 °C a také zvýšili tlak na 145 519 Pa.

4.3 Izotermický děj

Izotermický děj je proces, při kterém soustava přechází z jednoho stavu do druhého. Jak už název napovídá, přechod se koná za konstantní teploty T . Platí tedy $dT = 0$. Soustava, která prochází izotermickým dějem, získává od okolí teplo, které následně spotřebovává na práci. Děj je popsán tzv. Boyle-Mariottovým zákonem

$$pV = konst., \tag{4.15}$$

kde p je tlak a V je objem.

4.3.1 Příklad k procvičení 5

Vodík H_2 o hmotnosti $m = 3$ g a teplotě $t = -10$ °C uzavřeme do nádoby a stlačíme. Počáteční tlak byl $p_1 = 0,3$ MPa, tlak po stlačení $p_2 = 0,6$ MPa. Jaké teplo Q musíme odebrat, aby tento děj probíhal izotermicky? (Molární hmotnost vodíku $m_{mH_2} = 2$ kg · mol⁻¹.)
[$Q = -2\,271$ J]

4.4 Izobarický děj

Izobarický děj je obdobou izotermického děje. Rozdíl spočívá v tom, že soustava při přechodu mezi jednotlivými stavy nezachovává svou teplotu T , ale svůj tlak p . Děj popisuje tzv. Gay-Lussacův zákon, který zní

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}, \quad (4.16)$$

kde V je objem a T je teplota.

4.4.1 Ukázkový příklad 7

Zadání:

V nádobě je uzavřeno 2 kg chloru o teplotě 25 °C. Jestliže jej izobaricky stlačíme, zvýší se jeho teplota na dvojnásobek. Určete velikost tepla, které chlor přijal, jestliže jsme vykonali práci $1,7 \cdot 10^4$ J. ($c_{pCl_2} = 481$ J · kg⁻¹ · K⁻¹, $\kappa_{Cl_2} = 1,355$)

Řešení:

Teplo, které chlor přijme, vychází ze vztahu (4.12)

$$\delta Q = nC_V dT + p(V)dV,$$

kde $p(V) dV = \delta W$ a $nC_V dT = dU$.

V uvedeném vzorci je δW práce, kterou koná plyn. V zadání je ale zmíněna práce konána námi. Práce plynu je v takovém případě rovna naší práci s opačným znaménkem, tzn.

$$\delta W = -1,7 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

Abychom určili teplo, které chlor přijme, musíme ještě dopočítat změnu jeho vnitřní energie.

$$dU = nC_V dT$$

Počet molů ani molární tepelná kapacita v zadání není uvedena. Využijeme tedy vzorce (4.5), (4.6) a nakonec (4.4).

$$dU = \frac{m}{m_m} c_V m_m dT$$

$$dU = \frac{m}{m_m} \frac{c_p}{\kappa} m_m dT$$

Molární hmotnost se vykrátí. Po krácení můžeme integrovat. Konstanty m , c_p a κ vytkneme před integrál a dostáváme tabulkový integrál.

$$dU = m \frac{c_p}{\kappa} \int_{T_1}^{2T_1} dT$$

$$dU = \frac{m c_p}{\kappa} [T]_{T_1}^{2T_1}$$

$$dU = \frac{m c_p}{\kappa} T_1$$

Dosadíme hodnoty ze zadání.

$$dU = \frac{2 \cdot 481}{1,355} \cdot 298,15$$

$$dU \doteq 2,1 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Teplo, které chlor přijal, je následující

$$Q = 2,1 \cdot 10^5 + (-1,7 \cdot 10^4),$$

$$Q = 19,3 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

Závěr:

Chlor přijal teplo o velikosti $19,3 \cdot 10^4 \text{ J}$.

4.5 Entropie

Entropie je fyzikální veličina, která popisuje stav dané soustavy a nezáleží na tom, jak do tohoto stavu přišla. Je definována jako podíl přírůstku tepla δQ při vratném ději a konstantní teploty T , tj.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.17)$$

Kromě toho, že změna entropie charakterizuje určitý děj, rovněž udává směr, kterým děj probíhal.

(Jednotka: $[S] = \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.)

4.5.1 Ukázkový příklad 8

Zadání:

Jak se změní entropie S , jestliže zahřejeme vodu o hmotnosti $m = 2 \text{ kg}$ z teploty $t_1 = 34^\circ \text{ C}$ na $t_2 = 73^\circ \text{ C}$? (Měrná tepelná kapacita vody $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (4.17) pro změnu entropie dS a prvního termodynamického zákona dle (4.12).

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + p(V) \frac{dV}{T}$$

Objem se nemění, tzn. $dV = 0$. Druhý člen rovnosti je proto roven nule a pro entropii platí

$$dS = nC_V \frac{dT}{T}.$$

Počet molů n nahradíme pomocí vzorce (4.5) a molární tepelnou kapacitu při konstantním objemu dle (4.6).

$$dS = \frac{m}{m_m} c_{H_2O} m_m \frac{dT}{T}$$

Molární hmotnost m_m se vykrátí, hmotnost m a měrná tepelná kapacita c_{H_2O} jsou konstanty.

Integrujeme následovně, pomocí tabulkových integrálů.

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = mc_{H_2O} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT$$

$$[S]_{S_1}^{S_2} = mc_{H_2O} [\ln T]_{T_1}^{T_2}$$

$$S_2 - S_1 = mc_{H_2O} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Jenom připomeneme, že rozdíl logaritmů $\ln T_2$ a $\ln T_1$ můžeme zapsat jako jejich podíl $\ln \frac{T_2}{T_1}$.

Výraz $S_2 - S_1$ označíme už známým ΔS , tzn. změna entropie.

$$\Delta S = mc_{H_2O} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Převédeme jednotky ze zadání na základní

$$T_1 = 34 + 273,15 = 307,15 \text{ K},$$

$$T_2 = 73 + 273,15 = 346,15 \text{ K},$$

a dosadíme do získaného vztahu.

$$\Delta S = 2 \cdot 4180 \cdot \ln \frac{346,15}{307,15}$$

$$\Delta S \doteq 999 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Závěr:

Po zahřátí vody se entropie změní o $999 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

4.5.2 Příklad k procvičení 6

O kolik se změní entropie ΔS ideálního plynu, necháme-li ho rozepnout do vakua (tzn. $dT = 0$) na trojnásobek původního objemu? Počáteční hodnoty: teplota $t_0 = 15\text{ °C}$, tlak $p_0 = 95\text{ kPa}$ a objem $V_0 = 0,5\text{ l}$. [$\Delta S \doteq 0,18\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$]

Tímto bychom ukončili kapitolu „Aplikace integrálů v termodynamice“. Nyní se přesuneme na další, zároveň poslední kapitolu této práce, a to jsou aplikace integrálů v elektřině a magnetismu.

5 Aplikace integrálů v elektřině a magnetismu

Elektřina je fyzikální obor zabývající se elektrickými ději a jevy. Magnetickými jevy a ději se pro změnu zabývá magnetismus. Pokud se tyto dva obory vzájemně prolínají, mluvíme o elektromagnetismu.

Ukážeme aplikace integrálů při výpočtu elektrického náboje a magnetické indukce. V této oblasti fyziky se dále integrály dají využít např. při výpočtu potenciálu pole, intenzity pole nebo indukovaného napětí. Opět uvedeme teorii, která přiblíží problematiku příkladů.

5.1 Elektrický náboj, elektrický proud

Elektrický náboj

Jak již bylo zmíněno, látky se skládají z jednotlivých částic (molekul, atomů, protonů, neutronů, elektronů atd.). Tyto částice mají několik charakteristických vlastností a jednou z nich je právě elektrický náboj. Ten může být kladný nebo záporný. Celkový náboj tělesa je pak určen součtem jednotlivých nábojů. Pokud převažují kladné náboje, říkáme, že těleso je nabitо kladně, převažují-li záporné náboje, je nabitо záporně. Jestliže je počet kladných nábojů roven počtu záporných nábojů, označujeme těleso jako elektricky neutrální.

Náboj částic je vždy násobkem tzv. elementárního náboje $e = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19}$ C. Elektrický náboj elektronu je roven elementárnímu náboji se záporným znaménkem.

(Jednotka: $[Q] = \text{C}$.)

Elektrický proud

Látka, ve které se mohou volně pohybovat nabitе částice, se nazývá vodič. Pokud se tyto nabitе částice pohybují uspořádaně převážně jedním směrem, říkáme, že vodičem prochází elektrický proud I . Proud je definován jako náboj dQ , který projde kolmým průřezem vodiče za dobu dt , tedy

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (5.1)$$

(Jednotka: $[I] = \text{A}$.)

5.1.1 Ukázkový příklad 9

Zadání:

Určete počet X volných elektronů, které projdou průřezem vodiče za 20 s, jestliže proud roste rovnoměrně od 0 A až po 10 A.

Řešení:

Náboj, který projde vodičem vyjádříme ze vztahu (5.1).

$$dQ = I dt$$

Neznáme závislost proudu na čase. Ze zadání víme, že je tato závislost lineární, takže bude platit

$$I = kt,$$

kde k je konstanta. Dále víme, že v čase $t = 20$ s bude velikost proudu rovna $I = 10$ A, tudíž

$$k = \frac{I}{t},$$

$$k = \frac{10}{20},$$

$$k = 0,5 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Proud protékající vodičem je dán vztahem

$$I = 0,5t.$$

Tudíž

$$dQ = 0,5t dt.$$

Dostáváme tabulkový integrál s mezemi od 0 s do 20 s.

$$Q = \int_0^{20} 0,5t dt$$

Integrujeme.

$$Q = 0,5 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{20}$$

$$Q = 0,5 \cdot \frac{20^2}{2}$$

$$Q = 100 \text{ C}$$

Ze stanovené velikosti náboje $Q = 100$ C určíme, kolik elektronů projde průřezem vodiče.

Víme, že náboj jednoho elektronu je roven elementárnímu náboji e . Počet prošlých elektronů bude

$$X = \left| \frac{Q}{e} \right|,$$

$$X = \left| \frac{100}{-1,602 \ 177 \ 33 \cdot 10^{-19}} \right|,$$

$$X \doteq 6,24 \cdot 10^{20} \text{ elektronů.}$$

Závěr:

Za 20 s projde průřezem vodičem $6,24 \cdot 10^{20}$ elektronů.

5.1.2 Příklad k procvičení 7

Proud, který protéká vodičem, je dán vztahem $I = 3 + 6t^2$ A. Určete velikost náboje, který projde vodičem v časovém intervalu $t \in \langle 2,8 \rangle$ s. [$Q = 1\,026$ C]

5.2 Magnetická indukce

Magnetické pole se tvoří kolem magnetů či vodičů, kterými prochází elektrický proud, a lze jej popsat veličinou nazývanou magnetická indukce.

Magnetická indukce B je definována jako síla F , kterou působí magnetické pole na pohybující se částici s nábojem Q rychlostí v . Píšeme

$$F = QvB.$$

Přeskočíme odvozování tzv. Biotova-Savartova-Laplaceova zákona (dále jen B-S-L zákon) pro magnetickou indukci z předchozího uvedeného, protože je nutná znalost relativistických transformací, a pouze jej uvedeme.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \alpha}{r^2}, \quad (5.2)$$

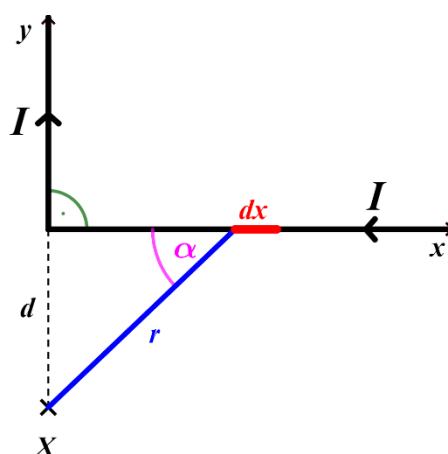
kde μ_0 je permeabilita vakua, I proud protékající vodičem, dx element délky vodiče, r vzdálenost od vodiče a α je úhel, který svírá průvodič r s vodičem. Konstanta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$.

(Jednotka: $[B] = \text{T}$.)

5.2.1 Ukázkový příklad 10

Zadání:

Proud o velikosti 20 A prochází nekonečně dlouhým vodičem, který je ohnut do pravého úhlu (obrázek 10). Jaká bude magnetická indukce v bodě X , je-li $d = 5$ cm?



Obrázek 10: Nekonečně dlouhý pravoúhlý vodič. (Vlastní nákres.)

Řešení:

Uvažujme nejprve část, která „splývá“ s osou x . Aplikujeme B-S-L zákon (vzorec 5.2). Je očividné, že ve vzorci jsou „proměnnými“ element dx , úhel α a vzdálenost r . Abychom mohli integrovat, musíme tento problém odstranit. (μ_0 a I je konstantní.)

Vyjádríme kvadrát vzdálenosti r^2 pomocí goniometrické funkce sinus.

$$\sin \alpha = \frac{d}{r}$$

$$r = \frac{d}{\sin \alpha}$$

$$r^2 = \frac{d^2}{\sin^2 \alpha}$$

Obdobně vyjádříme element dx pomocí goniometrické funkce kotangens a pomocí derivace.

$$\cotg \alpha = \frac{x}{d}$$

$$x = d \cotg \alpha$$

$$dx = d \left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right)$$

Dosadíme do B-S-L zákona a vykrátíme.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) \frac{\sin^2 \alpha}{d^2} \sin \alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (-\sin \alpha d\alpha)$$

Než přejdeme k samotné integraci, zamysleme se nad mezemi integrálu. Pokud bychom element dx umístili do počátku souřadné soustavy, byla by velikost úhlu α rovna 90° , tedy $\frac{\pi}{2}$. Pokud bychom jej posouvali do nekonečna, stále by se zmenšoval až do nuly. Meze úhlu jsou proto $\alpha \in \langle \frac{\pi}{2}, 0 \rangle$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin \alpha) d\alpha$$

Dostáváme tabulkový integrál.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\cos \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

Nyní už stačí dosadit hodnoty ze zadání. Vzdálenost y převedeme na základní jednotky, tj. $d = 0,05$ m.

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{4 \cdot \pi \cdot 0,05}$$

$$B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

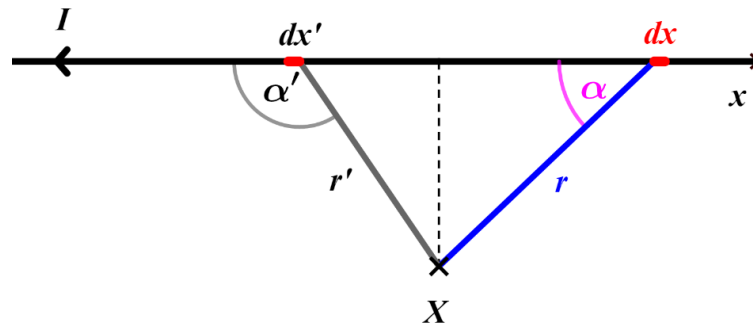
Část, která splývá s osou y nijak k magnetické intenzitě v bodě X nepřispívá, protože úhel α je na celé části roven $\frac{\pi}{2}$. (Rovněž integrál od $\alpha = \frac{\pi}{2}$ do $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je roven 0.)

Závěr:

Magnetická indukce v bodě X je $B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

5.2.2 Příklad k procvičení 8

Nekonečně dlouhým přímým vodičem prochází proud o velikosti 10 A. Jaká bude magnetická indukce v bodě X , je-li $d = 0,02 \text{ m}$ (obrázek 11)? [$1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$]



Obrázek 11: Nekonečně dlouhý přímý vodič. (Vlastní nákres.)

Závěr

V této bakalářské práci jsme se seznámili se zlomkem aplikací integrálního počtu ve fyzice, konkrétně v mechanice, termodynamice, elektřině a magnetismu. Jak již bylo několikrát zmíněno, užití je daleko rozsáhlejší, a to nejenom ve fyzice. Kromě matematické analýzy se studenti matematiky mohou při studiu setkat s integrály například v rámci předmětu zabývajícího se pravděpodobností a statistikou (např. při výpočtu distribuční funkce nebo hustoty pravděpodobnosti).

První dvě kapitoly se zabývaly integrály z pohledu matematiky, další tři pro změnu z pohledu využití ve fyzice. Obtížnost příkladů, které se nacházely v kapitolách 3 až 5, byla volena především s ohledem na cíl této práce. Předpokládali jsme, že studenti nestudují matematiku v kombinaci s fyzikou. I přes „nižší“ náročnost byly ukázkové příklady podrobně řešeny krok po kroku. Příklady k procvičení byly záměrně vybrány velmi podobné těm ukázkovým, a to díky teoretickým fyzikálním komentářům seznamujících čtenáře s danou problematikou, které jsou v práci uvedeny.

Pro lepší představu a jednodušší výklad je téměř polovina příkladů doplněna obrázky, které byly vytvářeny pomocí volně stažitelného programu Geogebra Klasik. Během zpracování jsem si připomněla některé jeho funkce a naučila se i pár nových, což považuji za velké plus do budoucna. Některé obrázky byly mírně poupraveny nástrojem Malování 3D, jenž je součástí Windows 10.

Během psaní této práce jsem se snažila propojit získané znalosti obou studovaných oborů. Rovněž mi tato práce posloužila jako menší opakování probraného učiva nejenom z fyziky, ale i matematiky. Pevně věřím, že studenti, kteří případně nahlédnou do této práce rozšíří své znalosti o integrálním počtu a v budoucnu nebudou jako jeho aplikace uvádět pouze obsah plochy či objem rotačního tělesa.

Seznam použité literatury

- [1] BAJER, Jiří. Mechanika 1. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004, 321 s. ISBN 80-244-0819-8.
- [2] BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. Cvičení z fyziky pro matematiky. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1975, 217 s. Bez ISBN.
- [3] FUKA, Josef a Miroslava ŠIROKÁ. Cvičení z obecné fyziky I. 3. vydání. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1988, 232 s. Bez ISBN.
- [4] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1. Druhý dotisk 1. českého vydání. Praha: Prometheus, 2006. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.
- [5] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2. Dotisk 1. českého vydání. Praha: Prometheus, 2003. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.
- [6] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 3. Praha: Prometheus, 2003. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.
- [7] HOLUBOVÁ, Renata. Mechanika: studijní modul. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012, 83 s. ISBN 978-80-244-3298-4.
- [8] HOLUBOVÁ, Renata. Molekulová fyzika a termodynamika. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, 145 s. ISBN 978-80-244-3299-1.
- [9] JARNÍK, Vojtěch. Integrální počet (I). 5. nezměněné vydání. Praha: Academia, 1974, 244 s. Bez ISBN.
- [10] LAITCHOVÁ, Jitka. Matematická analýza 2: Integrální počet. 3. nezměněné vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009, 101 s. ISBN 978-80-244-2276-3.
- [11] MIKULČÁK, Jiří. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2007, 206 s. Pomocné knihy pro žáky (Prometheus). ISBN 978-80-7196-345-5.
- [12] TRÁVNÍČEK, Stanislav, Pavel CALÁBEK a Jaroslav ŠVRČEK. Matematická analýza I: (pro učitelské obory). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, 165 s. ISBN 978-80-244-4117-7.

Seznam použitého matematického značení

\mathbf{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbf{Z}	množina všech celých čísel
\mathbf{R}	množina všech reálných čísel
$f(x)$	funkce f jedné proměnné x
$f'(x)$	první derivace funkce f jedné proměnné x
$D(f)$	definiční obor funkce f
(a, b)	otevřený interval
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
∞	nekonečno
\forall	obecný kvantifikátor
\in	náleží
inf	infimum
lim	limita
max	maximum
sup	supremum
$\int f(x) dx$	neurčitý integrál funkce jedné proměnné x
$\int_a^b f(x) dx$	určitý integrál funkce jedné proměnné x s mezemi od a do b

Seznam použitého fyzikálního značení

<u>Symbol:</u>	<u>Jednotka:</u>	<u>Název veličiny:</u>
a	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	zrychlení
B	T	magnetická indukce
c	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	měrná tepelná kapacita
C	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	tepelná kapacita
C_p	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	molární tepelná kapacita při stálém p
C_V	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	molární tepelná kapacita při stálém V
F	N	síla
g	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	tíhové zrychlení
h	m	výška
I	A	proud
J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti
m	kg	hmotnost
m_m	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	molární hmotnost
n	mol	počet molů
N	-	počet atomů/ molekul
o	-	osa
p	Pa	tlak
Q	C	náboj
Q	J	teplo
r	m	vzdálenost od osy
s	m	dráha
S	m^2	plocha
S	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	entropie
t	s	čas
t	°C	Celsiova teplota
T	K	termodynamická teplota
U	J	vnitřní energie
v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	rychlost
V	m^3	objem
W	J	práce

ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota
Δx	-	změna veličiny x
dx	-	element (diferenciál) veličiny x
δx	-	neúplný diferenciál veličiny x

Seznam použitých fyzikálních konstant

Avogadrova konstanta	$N_A = 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molární plynová konstanta	$R_m = 8,314\,510 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Tíhové zrychlení	$g = 9,806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Elementární náboj	$e = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Permeabilita vakua	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$
Hustota hliníku Al	$\rho_{\text{Al}} = 2\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota mědi Cu	$\rho_{\text{Cu}} = 8\,930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota vody H ₂ O	$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota železa Fe	$\rho_{\text{Fe}} = 7\,860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Poissonova konstanta dusíku N ₂	$\kappa = 1,404$
Poissonova konstanta chloru Cl ₂	$\kappa = 1,355$
Poissonova konstanta oxidu uhličitého CO ₂	$\kappa = 1,304$
Měrná tepelná kapacita c_p chloru Cl ₂	$c_{p_{\text{Cl}_2}} = 481 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Měrná tepelná kapacita $c_{\text{H}_2\text{O}}$ vody H ₂ O	$c_{\text{H}_2\text{O}} = 4\,180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molární hmotnost vodíku H ₂	$m_{\text{mH}_2} = 2 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Seznam obrázků

Obrázek 1: Geometrický význam horního součtu $S(\mathbf{D})$	9
Obrázek 2: Geometrický význam dolního součtu $s(\mathbf{D})$	9
Obrázek 3: Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(\mathbf{D})$	10
Obrázek 4: Zahradní bazén.....	19
Obrázek 5: Tenká nerezová deska ve tvaru 1/4 elipsy (šedá část).	20
Obrázek 6: Tyč z mědi a hliníku.....	22
Obrázek 7: Tenký homogenní drát ve tvaru čtverce.	23
Obrázek 8: Tenká železná tyč.....	25
Obrázek 9: Oxid uhličitý uzavřený ve válci.	30
Obrázek 10: Nekonečně dlouhý pravoúhlý vodič.	39
Obrázek 11: Nekonečně dlouhý přímý vodič.	41

Seznam příloh

Příloha 1. Řešení příkladů k procvičení

Příloha 1. Řešení příkladů k procvičení

1. **Vrh svislý vzhůru.** Doba, kdy letí kámen nahoru je rovna době, kdy kámen letí dolů. Stačí vypočítat dobu, kdy letí dolů (volný pád) a pak vynásobit dvěma.

$$(h = s_d = 5 \text{ m}; s_0 = 0 \text{ m}; t_0 = 0 \text{ s}; t_d = ? \text{ s}; t = 2t_d \text{ s})$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow at = \frac{ds}{dt}, \quad a = g$$

$$g \int_{t_0}^{t_d} t dt = \int_{s_0}^{s_d} ds$$

$$t_d = \sqrt{\frac{2s_d}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = 1 \text{ s}$$

$$t = 2t_d = 2 \text{ s}$$

2. **Práce čerpadla.**

$$(a = 5 \text{ m}; b = 4 \text{ m}; c = 2 \text{ m}; h = 1,8 \text{ m}; \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$m = \rho V \Rightarrow dm = \rho ab ds$$

$$\text{Práce vykonaná při vyčerpání } dm: dW = (\rho ab ds)gs$$

$$\text{Celková práce: } W = \rho abg \cdot \int_{c-h}^c s ds = \rho abg \left[\frac{s^2}{2} \right]_{c-h}^c = \frac{1}{2} \rho abg [c^2 - (c-h)^2]$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 998 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot [2 \cdot 1,8 \cdot 2 - 1,8^2] = 395 \text{ 000 J}$$

3. **Těžiště tyče.**

$$(l = 1 \text{ m}; \rho_{\text{Cu}} = 8 \text{ 930 kg} \cdot \text{m}^{-3}; \rho_{\text{Al}} = 2 \text{ 700 kg} \cdot \text{m}^{-3}; x_T = ? \text{ m})$$

$$x_T = \frac{1}{m} \int x dm$$

$$m = V\rho \Rightarrow dm = S dx \cdot \rho \Rightarrow dm_{\text{Cu}} = S\rho_{\text{Cu}} dx, dm_{\text{Al}} = S\rho_{\text{Al}} dx$$

$$m = m_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}} = S \frac{l}{4} \rho_{\text{Cu}} + S \frac{3l}{4} \rho_{\text{Al}} = \frac{Sl}{4} (\rho_{\text{Cu}} + 3\rho_{\text{Al}})$$

$$x_T = \frac{1}{m} \left(\int_0^{l/4} x dm_{\text{Cu}} + \int_{l/4}^l x dm_{\text{Al}} \right) = \frac{4}{Sl(\rho_{\text{Cu}} + 3\rho_{\text{Al}})} \left(\int_0^{l/4} x S\rho_{\text{Cu}} dx + \int_{l/4}^l x S\rho_{\text{Al}} dx \right)$$

$$x_T = \frac{4}{Sl(\rho_{\text{Cu}} + 3\rho_{\text{Al}})} \left(S\rho_{\text{Cu}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{l/4} + S\rho_{\text{Al}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/4}^l \right)$$

$$x_T = \frac{4}{1 \cdot (8 \text{ 930} + 3 \cdot 2 \text{ 700})} \left(8 \text{ 930} \cdot \frac{1}{32} + 2 \text{ 700} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right] \right)$$

$$x_T \doteq 0,363 \text{ m}$$

4. Moment setrvačnosti železné tyče.

$$(r = 1 \text{ m}; \rho_{\text{Fe}} = 7\,860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; J = ? \text{ kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$J = \int r^2 \, dm$$

$$dm = \rho \, dr$$

Osa o prochází středem tyče, proto $r \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

$$J = \int_{-1/2}^{1/2} r^2 \rho \, dr = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{7\,860}{3} \cdot \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] = \mathbf{655 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

5. Izotermický děj.

$$(m = 3 \text{ g} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}; t_1 = -10 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T_1 = 283,15 \text{ K}; p_1 = 0,3 \cdot 10^6 \text{ Pa};$$

$$p_2 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ Pa}; m_{\text{mH}_2} = 2 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}; Q = ?)$$

$$dT = 0 \Rightarrow \delta Q = p(V)dV$$

$$pV = p_1 V_1 \Rightarrow p = \frac{p_1 V_1}{V}$$

$$p_1 V_1 = n R_m T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{n R_m T_1}{p_1} = \frac{m R_m T_1}{m_{\text{mH}_2} p_1}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = p(V)dV = \int p \, dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \, dV = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 \frac{m R_m T_1}{m_{\text{mH}_2} p_1} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = \frac{m R_m T_1}{m_{\text{mH}_2}} \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8,3 \cdot 283,15}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left(\frac{0,3 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$Q \doteq \mathbf{2\,271 \text{ J}}$$

6. Změna entropie.

$$(t_0 = 15 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T_0 = 288,15 \text{ K}; p_0 = 95 \cdot 10^3 \text{ Pa}; V_0 = 0,5 \text{ l} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \Delta S = ?$$

$$\text{J} \cdot \text{K}^{-1})$$

$$dT = 0 \Rightarrow dS = p(V) \frac{dV}{T_0}$$

$$V_1 = 3V_0$$

$$pV = p_0 V_0 \Rightarrow p = \frac{p_0 V_0}{V}$$

$$\Delta S = \int p \frac{dV}{T_0} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} \, dV = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{V_1}{V_0} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{3V_0}{V_0} = \frac{95 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{288,15} \ln 3$$

$$\Delta S = 0,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

7. Proud ve vodiči.

$$(I = 3 + 6t^2 \text{ A}; t \in \langle 2,8 \rangle \text{ s}; Q = ? \text{ C})$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

$$Q = \int_2^8 (3 + 6t^2) dt$$

$$Q = [3t + 2t^3]_2^8 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8^3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 = 24 + 1024 - 6 - 16 = 1026 \text{ C}$$

8. Magnetická indukce nekonečně dlouhého vodiče.

$$(I = 10 \text{ A}, y = 0,02 \text{ m}, B = ? \text{ T})$$

$$B = B_1 + B_2, \text{ kde } B_1 \in (-\infty, 0), B_2 \in (0, +\infty)$$

$$\text{Pro } B_1 \text{ i } B_2 \text{ platí } \sin \alpha = \frac{d}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{d^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$B_1: \cotg \alpha = \frac{-x}{d} \Rightarrow dx = \frac{d}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [-\cos \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

$$B_2: \cotg \alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow dx = -\frac{d}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (-\sin \alpha) d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\cos \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} + \frac{\mu_0 I}{4\pi d} = 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{\pi \cdot 0,02} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Monika Ondračková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2018
Název práce:	Aplikace integrálního počtu ve fyzice
Název v angličtině:	Applications of integral calculus in physics
Anotace práce:	Hlavním cílem této bakalářské práce je ukázat užití integrálního počtu ve fyzice. Práce je členěna do pěti kapitol. První dvě kapitoly tvoří matematický aparát obsahující, mimo jiné, pojmy primitivní funkce, neurčitý a určitý integrál. Zbylé tři kapitoly jsou zaměřeny na několik konkrétních aplikací ve fyzice, přesněji v mechanice, termodynamice, elektřině a magnetismu.
Klíčová slova:	Primitivní funkce, neurčitý integrál, určitý integrál, integrály v mechanice, integrály v termodynamice, integrály v elektřině, integrály v magnetismu.
Anotace v angličtině:	The main aim of this bachelor thesis is to show the use of integral calculus in physics. The thesis is divided into five chapters. The first two chapters consist of a mathematical apparatus containing, among other things, the terms of a primitive function, an indefinite and a definite integral. The remaining three chapters focus on several specific applications in physics, specifically in mechanics, thermodynamics, electricity and magnetism.
Klíčová slova v angličtině:	Primitive function, indefinite integral, definite integral, integrals in mechanics, integrals in thermodynamics, integrals in electricity, integrals in magnetism.
Přílohy vázané v práci	Příloha 1. Řešení příkladů k procvičení
Rozsah práce:	49 stran
Jazyk práce:	český jazyk