



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

PROUDĚNÍ MAGNETICKÉ KAPALINY S APLIKACÍ BINGHAMOVA MODELU

THE FLOW OF MAGNETIC LIQUID WITH BINGHAM MODEL APPLICATION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Bc. JAN STEJSKAL

doc. Ing. MILOSLAV HALUZA, CSc.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Jan Stejskal

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Proudění magnetické kapaliny s aplikací Binghamova modelu

v anglickém jazyce:

The flow of magnetic liquid with Bingham model application

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Proudění kapaliny s měnící se dynamickou viskozitou je popsáno Binghamovým modelem. Tento model laminárního proudění má také dán profil rychlosti v průřezu. Budou hledány jeho vlastnosti v prostoru kruhového průřezu, také s vloženým hřídelem, i v prostoru mezi rovnoběžnými stěnami. Model proudění bude odvozován analyticky, budou použita i numerická řešení.

Cíle diplomové práce:

Nalézt vlastnosti profilů rychlostí magnetické kapaliny, studie reologických modelů kapaliny, vlastnosti Binghamovy kapaliny a její využití v technické praxi, popis magnetické kapaliny a zdůvodnění jejího binghamského chování, řešení proudění Binghamské kapaliny v zadaných příkladech. Provedení literární rešerše.

Seznam odborné literatury:

[1] Janalík, J.: Hydrodynamika a hydrodynamické stroje, skripta VŠB - TU Ostrava, 2008

[2] Dvořák, L.: Vlastnosti tekutin, skripta VŠB - TU Ostrava, 2010

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 22.11.2012

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Hlavním tématem této práce jsou magnetické kapaliny. Jedná se o specifický typ kapalin, který bývá pro účely zjednodušeného popisu jejich chování považován za kapalinu binghamskou.

Magnetické kapaliny jsou řešeny z hlediska jejich reologických vlastností, jejich chování a využití v technické praxi.

Hlavním úkolem je aplikace Binghamova modelu na magnetické kapaliny za předpokladu, že tento model na magnetické kapaliny aplikovat s dobrou přesností lze. V práci je odvozen matematický popis chování binghamských kapalin a řešena otázka toho, za jakých podmínek může být tento uvažován jako platný pro kapaliny magnetické. Popisem chování se rozumí odvození matematického aparátu, kterým je možné proudění tohoto typu tekutin popsat.

Proudění binghamských kapalin je vyšetřováno v některých zjednodušených případech s uvažováním laminárního proudění. Analytické výsledky jsou za účelem ověření správnosti porovnány s výsledky numerických simulací provedených v CFD nástroji Fluent.

Klíčová slova

Magnetická kapalina, Binghamova kapalina, neneutonská kapalina, analytické řešení proudění, numerické řešení proudění.

Abstract

Main topic of this thesis are magnetic fluids. These are specific type of fluids which can simplistically be considered as Bingham fluids.

Main issues regarding the magnetic fluids mentioned in this thesis are: rheological properties of the magnetic fluids, behaviour of the magnetic fluids and the use of the magnetic fluids in industrial applications.

Main goal is to apply Bingham's model on the magnetic fluids assuming that this model can be applied with a good accuracy. Equations which describe behaviour of the Bingham fluids are constructed. Some assumptions which have to be respected to use this analytical equations for magnetic fluids are formulated.

Flow of bingham fluid is analytically solved in some simplified cases with consideration of laminar flow. Analytical results are confronted with numerical ones obtained from CFD software Fluent for the purpose of verification.

Keywords

Magnetic fluid, Bingham's fluid, non-newtonian fluid, analytical solution of flow, numerical solution of flow.

Bibliografická citace

STEJSKAL, J.: *Proudění magnetické kapaliny s aplikací Binghamova modelu.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 104 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.

Čestné prohlášení

Na tomto místě čestně prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma „Proudění magnetické tekutiny s aplikací Binghamova modelu“ vypracoval sám s požitím uvedené literatury a pod vedením vedoucího DP.

V Brně dne:

Bc. Jan Stejskal

Poděkování

Děkuji všem, kteří mi byli při tvorbě této práce jakkoli nápomocni.

Děkuji svým blízkým za podporu nejen při vypracovávání DP, ale i během celé doby mého studia.

Můj dík patří zejména panu doc. Ing. Miloslavu Haluzovi, CSc. za jeho cenné rady a připomínky, díky kterým jsem byl schopen tuto práci dokončit.

Obsah

1 Úvod.....	13
2 Viskózní tekutiny.....	14
2.1 Definice viskozity.....	14
2.2 Rozdělení viskózních kapalin z hlediska reologie.....	15
2.2.1 Newtonské kapaliny.....	15
2.2.2 Nenewtonské kapaliny.....	16
2.3 Časově nezávislé nenewtonské kapaliny.....	16
2.3.1 Binghamské kapaliny.....	17
2.3.2 Dilatantní kapaliny.....	19
2.3.3 Pseudoplastické kapaliny.....	19
2.3.4 Skutečné plastické nenewtonské kapaliny.....	19
3 Magnetické kapaliny.....	20
3.1 Popis magnetických kapalin.....	20
3.2 Aplikace magnetických kapalin v praxi.....	25
3.2.1 Ferohydrodynamické těsnění.....	25
3.2.2 Tlumiče využívající magnetickou kapalinu.....	28
3.2.3 Reprodukory s magnetickou kapalinou.....	29
3.2.4 Lékařské aplikace.....	29
3.2.5 Další aplikace.....	30
3.3 Zdravotní závadnost magnetických kapalin.....	30
4 Magnetické pole.....	31
5 Magnetická kapalina jako kapalina binghamská.....	32
6 Matematické odvození.....	39
6.1 Newtonská kapalina.....	39
6.1.1 Proudění v doméně popsané kartézským souřadným systémem.....	40
6.1.2 Proudění mezi statickými rovnoběžnými deskami.....	42
6.1.3 Proudění mezi pohyblivými rovnoběžnými deskami.....	45
6.1.4 Proudění v doméně popsané válcovými souřadnicemi.....	48
6.1.5 Proudění v obecném kruhovém potrubí.....	49
6.1.6 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem.....	51
6.1.7 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.....	55

6.2 Binghamská kapalina	57
6.2.1 Obecné odvození pohybové rovnice binghamské kapaliny v kartézských souřadnicích	58
6.2.2 Proudění mezi statickými rovnoběžnými deskami.....	59
6.2.3 Proudění mezi pohyblivými rovnoběžnými deskami.....	65
6.2.4 Proudění v doméně popsané válcovými souřadnicemi	74
6.2.5 Proudění v obecném kruhovém potrubí	75
6.2.6 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem.....	78
6.2.7 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.....	84
7 Numerické simulace proudění binghamské kapaliny.....	90
8 Zhodnocení výsledků	94
9 Závěr.....	95
10 Seznam použité literatury	97
11 Seznam použitých znaků	99
12 Seznam obrázků	100
13 Seznam grafů.....	102
14 Seznam tabulek	102
15 Přílohy	103

1 Úvod

Myšlenka kapaliny, jejíž vlastnosti a tok je možno ovlivňovat parametry působícího magnetického pole, pochází ze šedesátých let dvacátého století. Od chvíle, kdy byla tato myšlenka realizována, našly magnetické kapaliny uplatnění v mnoha průmyslových odvětvích. Některá technická řešení využívající vlastností magnetických kapalin si za tuto dobu našla cestu do věcí denní potřeby, nicméně potenciál těchto materiálů nebyl do dnešního dne plně vyžit.

Prvním z úkolů této práce je provedení literární rešerše na téma binghamských, potažmo magnetických kapalin. Tato rešerše bude provedena zejména za účelem seznámení se se stávajícími možnostmi použití magnetických kapalin v praxi a potenciálem těchto látek do budoucna. Z tohoto hlediska je důležitá studie vlastností a charakteristických jevů týkajících se právě magnetických kapalin, s čímž souvisí studium reologických modelů kapalin. K tomuto je přistoupeno z důvodu zařazení magnetických kapalin z reologického hlediska. Z tohoto přidružení vyplynou základní vztahy, které je možno použít k jejich popisu.

U magnetických kapalin se předpokládá nenewtonské chování a k popisu jejich proudění není možno použít matematický aparát běžně užívaný pro popis tekutin newtonských. Matematický popis tohoto specifického typu kapalin a jejich proudění je typickým problémem fluidního inženýrství.

K tomu, aby mohly být navrženy nové aplikace magnetických kapalin, případně zdokonaleny ty stávající, je třeba detailně porozumět jejich chování. Jedním z hlavních cílů této práce je odvození odpovídajících matematických vztahů, na jejichž základě je možné provést rozbor chování tohoto typu kapalin. Proudění bude řešeno v několika typických doménách. Nejdůležitější částí odvození je získání rovnic rychlostních profilů a průběhu smykového napětí v řezu doménou. Poté, co budou tyto rovnice formulovány, může být přistoupeno k vykreslení rychlostních profilů při proudění za daných podmínek, což je z hlediska porozumění proudění daného typu kapalin poměrně stěžejní záležitost. Znalost průběhu smykového napětí je potom důležitá z hlediska reologie.

Proudění nenewtonských kapalin je také možno řešit numericky pomocí CFD. V rámci této práce bude toto řešení provedeno v CFD softwaru Fluent společnosti ANSYS, Inc. Účelem srovnání výsledků numerických simulací a analytických vztahů bude zejména ověření správnosti odvozených rovnic.

2 Viskózní tekutiny

Pod pojem tekutiny je podle Dvořáka [1] možno souhrnně řadit vzdušniny a kapaliny. Jedná se o látky, které se vyznačují tekutostí a tyto materiály tedy nemají vlastní tvar. Na rozdíl od látek pevných nevytvářejí krystalickou mřížku. [1]

V této práci budou dále řešeny pouze kapaliny. Dvořák v [1] obecně definuje kapaliny jako kapalné látky nemající vlastní tvar, hromadící se ve spodní části pevné nádoby a tvořící volnou hladinu.

2.1 Definice viskozity

Viskozita je charakteristická vlastnost všech skutečných tekutin. Rozumíme jí odpor vůči změně tvaru. Pokud dochází k pohybu dvou sousedních vrstev skutečné kapaliny rozdílnými rychlostmi, vzniká v místě kontaktu těchto vrstev vlivem viskozity smykové tření. Tato vlastnost se projevuje pouze v případě silové nerovnováhy tekutiny při přizpůsobování silám na tekutinu působícím. V případě silové rovnováhy se viskozita neuplatňuje. [2], [3], [4]

V případě uvažování ideální tekutiny je viskozita nulová. [3], [5]

Podle Brdičky [6] je možné z molekulárního hlediska vysvětlit síly viskozity přitažlivými interakcemi mezi molekulami sousedních částí kapalin s různou makroskopickou rychlostí. Tekutiny s většími přitažlivými silami mezi molekulami mají tedy větší viskozitu. Některé důsledky viskózních sil jsou označovány jako vnitřní tření tekutin. Podle Mikulíka [4] se viskozita tekutiny projevuje také tím, že zeslabuje rozdíl vzájemných rychlostí v pohybující se tekutině, v čemž je možno pozorovat určitou analogii s třecími silami.

Viskozita, jako vlastnost tekutin je závislá na teplotě. S rostoucí teplotou klesá viskozita reálných tekutin přibližně exponenciálně a při ochlazování se naopak viskozita z důvodu shlukování částic do větších celků zvyšuje. [1], [5]

Tečné napětí je definováno rovnicí (1), kde τ je tečné napětí, η rozumíme dynamickou viskozitou a člen $\frac{dv}{dy}$ udává příčný gradient rychlosti. Tato rovnice bývá označována jako Newtonův zákon viskozity. Tekutiny, které se tímto zákonem řídí, bývají nazývány newtonovské. O těchto tekutinách blíže pojednává kapitola 2.2.1. [1], [2], [3]

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

Jedná se o lineární model chování viskózní kapaliny formulovaný Newtonem.

Vyjádřením η z této rovnice je možno získat rovnici popisující dynamickou viskozitu. Jednotkou dynamické viskozity je *Pa.s*.

Podělením dynamické viskozity hustotou ρ dostaneme takzvanou kinematickou viskozitu, která bývá nejčastěji značena ν . Jednotkou dynamické viskozity je $m^2.s$. [2], [3]

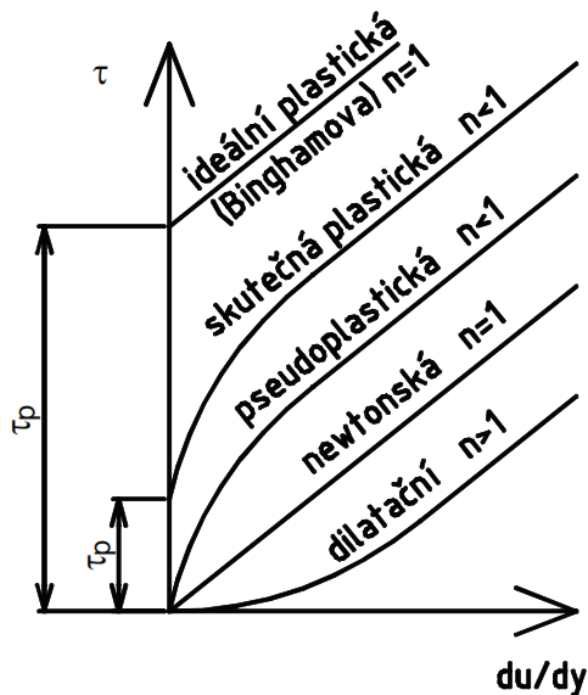
$$\eta = \frac{\nu}{\rho} \quad (2)$$

2.2 Rozdělení viskózních kapalin z hlediska reologie

Reologie je vědní obor, který se zabývá studiem a popisem látek z hlediska deformačních vlastností. Zkoumá tedy vnitřní reakce látek při působení vnějšího silového zatížení a jejich tokové vlastnosti [7].

Pohlédneme-li na reálné kapaliny z hlediska mechanických deformačních vlastností, je možno definovat základní rozdělení na ty, k jejichž popisu dostačuje lineární Newtonův zákon viskozity a na ty, jejichž chování je třeba popisovat složitějšími matematickými modely. [1], [3]

Základním rozdílem mezi těmito dvěma výše zmíněnými typy kapalin je tvar takzvané reologické křivky, což je závislost smykového napětí na příčném gradientu rychlosti. [1], [5]



Obr. 1: Závislost smykového napětí na příčném gradientu rychlosti jednotlivých typů kapalin. Zdroj [1], str. 35.

2.2.1 Newtonské kapaliny

Jedná se o lineární viskózní kapaliny. Chování této skupiny kapalin lze z hlediska viskozity popsat lineárním Newtonovým modelem. Pro takovéto kapaliny se zavádí

takzvaná Newtonova (výše uvedena jako dynamická) viskozita η , což je vlastně koeficient úměrnosti mezi smykovým napětím τ a příčným gradientem rychlosti $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Viskozita těchto kapalin je obecně závislá na okamžité teplotě a tlaku kapaliny. V čase je nezávislá na napěťovém a deformačním stavu kapaliny. Jedná se o zjednodušený případ, nicméně je dostačující k popisu většiny běžných plynů a kapalin (z kapalin např. voda, ze vzdušnin vzduch...). [1], [2], [3]

2.2.2 Nenewtonské kapaliny

Chování těchto kapalin není možné popsat lineárním Newtonovým zákonem. Rozdělují se do dalších několika skupin. U těchto kapalin hovoříme o zdánlivé (nenewtonské) viskozitě. Hodnota tohoto parametru je obecně závislá na rychlosti smyku v kapalině, předchází deformační historii kapaliny a několika dalších parametrech. Neřídí se tedy pouze tlakem a teplotou, jak je tomu v případě newtonské viskozity. [1], [3], [5]

Nenewtonské kapaliny je z hlediska časové závislosti možno rozdělit do následujících tří základních skupin. [8]

- a) Časově nezávislé – Rychlost smyku závisí pouze na smykovém napětí.
- b) Časově závislé – Závislost mezi smykovým napětím a rychlostí smyku je závislá na době zatěžování kapaliny daným smykovým zatížením. Tato závislost může být také funkcí předchozí historie zatěžování kapaliny.

Tyto kapaliny rozdělujeme dále na tixotropní, jejichž smykové napětí s časem klesá, a reopektické, jejichž smykové napětí v čase naopak vzrůstá. [1]

- c) Viskoelastické kapaliny – U tohoto typu kapalin je možné pozorovat jak elastickomechanické vlastnosti těles, tak viskózní vlastnosti typické pro kapaliny.

Po odlehčení se tyto kapaliny částečně elasticky zpětně přetvořují.

Vzhledem k tomu, že je tato práce zaměřena na zkoumání kapalin zařaditelných mezi časově nezávislé nenewtonské kapaliny, bude prostor dále věnován již jen tomuto typu kapalin.

2.3 Časově nezávislé nenewtonské kapaliny

Tento typ nenewtonských kapalin lze podle Dvořáka [1] obecně popsat rozšířeným von Ostwaldovým mocninovým zákonem často uváděným jako Herschel-Bulkleyova rovnice (3).

$$\tau = \tau_p + k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^n \quad (3)$$

Parametr k je podle Dvořáka [1] takzvaný faktor konzistence a parametr n bývá označován jako index toku. Oba tyto parametry jsou charakteristické pro danou kapalinu a charakterizují její materiálové vlastnosti. Dvořák v [1] dále uvádí parametr τ_p a nazývá jej počáteční smykové napětí. Tento parametr může vyjadřovat například mez tečení nebo mez kluzu a je nezávislý na rychlosti smyku.

2.3.1 Binghamské kapaliny

Křivka tečení těchto kapalin je přímka, mající nenulovou hodnotu počátečního smykového napětí τ_p . Pro binghamské kapaliny bývá tento parametr označován τ_0 a nazývá se mez tečení, dynamická mez toku, případně počáteční smykové napětí. [3] V angličtině je tento parametr označován výhradně slovním spojením yield stress.

Parametr k je pro binghamské kapaliny roven binghamské viskozitě. Tato materiálová charakteristika je popsána dále v této kapitole.

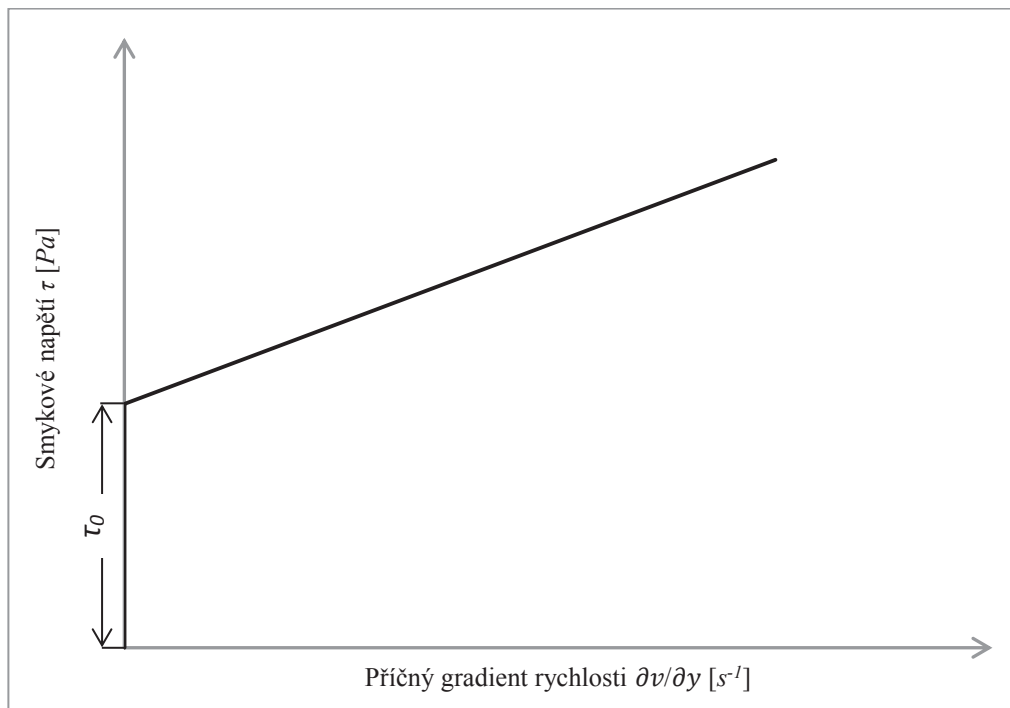
Pro koeficienty n a τ_p v Herschel-Bulkleyově rovnici (3) platí pro Binghamovu kapalinu:

$$\tau_p = \tau_0 \neq 0, n = 1$$

Do této skupiny je možné zařadit například olejové barvy, některá mazadla, čokoládu, zubní pastu atd. Za binghamskou kapalinu může být považována také široká škála suspenzí, zejména různé kaly, bahno a v neposlední řadě také magnetické tekutiny. [3], [1]

Chování tohoto typu kapalin je možné rozdělit do dvou oblastí. [1], [5]

- Napětí v kapalině je menší než mez toku kapaliny τ_0 .
Kapalina je seskupena do struktury, která má určitou tuhost a odolává deformačním pohybům. Látka tedy „teče“ jako pevné těleso.
- Napětí v kapalině je vyšší než mez toku kapaliny τ_0 .
Jakmile napětí v binghamské kapalině překročí kritickou hodnotu τ_0 , začne tato plně téci a její chování v této oblasti vykazuje lineární newtonské vlastnosti.



Graf 1: Závislost tečného napětí na příčném gradientu rychlosti obecné binghamské kapaliny. Ilustrativní případ.

V souvislosti s binghamskými kapalinami je nutno zmínit rozdíl mezi zdánlivou viskozitou a binghamskou viskozitou značenou η_B .

Zdánlivá viskozita je vlastnost kapaliny, která je konstantní při uvažování Newtonova modelu chování a při určité rychlosti smyku. Binghamská kapalina má tedy z principu nekonečný počet hodnot zdánlivé viskozity závislých na okamžité rychlosti smyku v kapalině. Binghamská viskozita značená η_B je jednoduše směrnice lineární části reogramu binghamské kapaliny (*Graf 1*) pro $\tau > \tau_0$. [1], [3], [9]

Z výše uvedeného vyplývá, že nemá smysl provádět jednoduché měření viskozity binghamské kapaliny pomocí viskozimetru tak, jak je zvykem u kapaliny newtonské. Zdánlivá viskozita binghamské kapaliny je přibližně rovna viskozitě binghamské pouze při velkých rychlostech smyku v kapalině. [3], [9]

Následující odstavce vycházejí z článku [10] pojednávajícím o čerpání kalů a suspenzí, které je možno považovat za binghamskou kapalinu. Některé závěry a předpoklady mohou být ale jistě uvažovány jako obecně platné pro jakoukoliv binghamskou kapalinu.

U binghamských kapalin se někdy provádí takzvaný „slump plate test“. Pomocí tohoto testu je možné stanovit hodnotu meze toku τ_0 . Základem je horizontální deska, na níž je vyznačena stupnice ve formě několika soustředných kruhů. Do středu této stupnice je umístěn váleček naplněný měřenou kapalinou. Po odstranění válečku dochází k roztečení kapaliny po desce. Měřicí kruh, u kterého se tečení dané kapaliny zastaví, ukazuje hodnotu kritického smykového napětí. O čím vzdálenější kruh se jedná, tím nižší je hodnota τ_0 . Tento test je často prováděn při potřebě čerpání vysoce nenevtonské kapaliny za účelem indikace možných problémů při čerpání. V případě suspenzní směsi se pomocí tohoto testu určuje koncentrace částic, při které již může být čerpání problematické. [10]

Pro vyšetřování režimu proudění binghamské kapaliny byl experimentálně zjištěn vzorec (4), kterým je možno zjistit kritickou rychlost proudění v trubce, při které dochází k přechodu z laminárního do turbulentního režimu. [10]

$$v_k = 0,4 + 22,1 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (4)$$

Kde τ_0 je mez toku proudící kapaliny a ρ je její hustota.

V případě laminárního proudění v trubce je možné z Buckinghamovy rovnice snadno určit třecí ztrátu. Tlaková ztráta na metr délky je dána vztahem (5). [10]

$$\frac{p}{L} = 5,33 * \frac{\tau_0}{D} + 32 * \eta_B * \frac{v}{D^2} \quad (5)$$

Kde v je rychlost proudění v trubce, D vnitřní průměr trubky a η_B je binghamská viskozita tekutiny.

V případě turbulentního režimu proudění při vysokých rychlostech je ztráta při proudění binghamské kapaliny v praxi často odhadována přibližně jako 1,1 násobek ztráty při proudění vody za stejných podmínek. Turbulence rozbíjí binghamskou strukturu a kapalina se chová téměř podle Newtonova zákona s viskozitou přibližně rovnou viskozitě binghamské. [10]

Z literatury [10] byly získány charakteristické parametry suspenzních směsí, které je možno považovat za binghamské kapaliny. Některé jsou uvedeny v příloze této práce v tabulce *Tab. P1*.

2.3.2 Dilatantní kapaliny

Dilatantní kapaliny (někdy označovány jako kapaliny dilatační) mají nulovou hodnotu počátečního smykového napětí a jejich neneutonská viskozita s rostoucí smykovou rychlostí vzrůstá. Proto se někdy nazývají jako houšnoucí tekutiny. [1], [3]

$$\tau_p = 0, n > 1$$

Do této skupiny je možné řadit např. tekuté písky, beton, med, škrob ve vodě. [1], [5]

2.3.3 Pseudoplastické kapaliny

Smykově řídnuocí kapaliny. Tento typ kapalin má stejně jako v případě kapalin dilatantních nulovou hodnotu počátečního smykového napětí, ale jejich zdánlivá viskozita klesá se vzrůstající smykovou rychlostí. [1], [3]

Pseudoplasticita je reciproky děj k dilataci. [3]

Pro koeficienty n a τ_p v Herschel-Bulkleyově rovnici (3) pro pseudoplastickou kapalinu platí:

$$\tau_p = 0, n < 1$$

Je možné sem zařadit disperzní roztoky, kaučuky, mazadla, barvy a vysokomolekulární polymery. [1], [3]

2.3.4 Skutečné plastické neneutonské kapaliny

Tyto kapaliny mají nenulovou hodnotu počátečního smykového napětí podobně jako kapaliny binghamské, nicméně po jejím překročení se skutečná plastická kapaliny chová na rozdíl od kapalin binghamských nelineárně. [1], [3]

Tyto kapaliny do jisté míry tečou, ale po odstranění napětí se částečně vrací do původního tvaru. [3]

Pro koeficienty n a τ_p v Herschel-Bulkleyově rovnici (3) v tomto případě platí:

$$\tau_p \neq 0, n < 1$$

Nejtypičtějším zástupcem tohoto typu kapalin je krev. [4]

3 Magnetické kapaliny

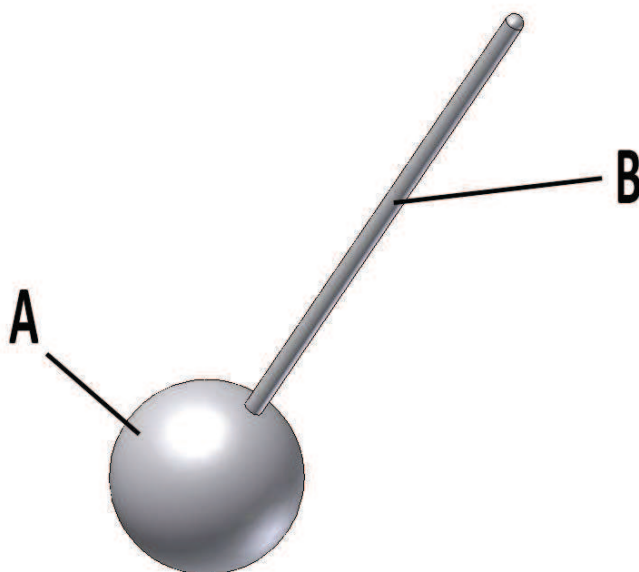
3.1 Popis magnetických kapalin

V celé této kapitole, věnující se popisu vlastností magnetických kapalin, je čerpáno z Mayerova článku [11].

O magnetických kapalinách, neboli ferokapalinách se mluví cca od 60. let dvacátého století, kdy byly vyvinuty v americkém NASA pro potřeby kosmického průmyslu.

Jde o poměrně specifický typ kapalin, jejichž některé vlastnosti jsou ovlivněny feromagnetickými (magnetické atomy v krystalové mřížce jsou shodně orientovány), nebo ferimagnetickými (magnetické částice v krystalové mřížce jsou orientovány proti sobě) částicemi obsaženými ve struktuře těchto látek. Jedná se tedy o suspenzi těchto magnetických částic rozptýlených v nosné kapalině. Velikost těchto částic bývá řádově v nanometrech a mají přibližně kulový tvar. Objemové zastoupení magnetických pevných částic v typické ferokapalině se pohybuje cca kolem 5 %. Nanočástice jsou v naprosté většině případů z práškového železa, případně z niklu, či feritu.

Za účelem zabránění shlukování rozptýlených částic mívají tyto obal tvořený detergentní polymerní povrchovou vrstvou. Toto shlukování (agregace) je nežádoucí zejména z důvodu narušení koloidní stability dané ferokapaliny. Detergent je materiál, jehož struktura je tvořena dvěma částmi: hydrofilní hlavou a hydrofobním ocasem. Hydrofilní hlavy jednotlivých řetězců polymeru jsou pevně svázány s magnetickou nanočásticí, zatímco hydrofobní ocasy jsou vázány v nosné kapalině. Tato chemická úprava zajišťuje odpuzivé síly mezi nanočásticemi a podstatně tedy eliminuje nebezpečí výše zmíněné agregace. Objemově obsahuje typická ferokapalina kolem 10 % detergentu.



Obr. 2: Detergentní částice.

A – hydrofilní hlava, B – hydrofobní ocas.

Mechanické a chemické vlastnosti jsou dány nosnou kapalinou, zatímco vlastnosti magnetické určují výhradně typ, koncentrace a velikost nanočástic. Každá jedna nanočástice se v kapalině chová jako miniaturní permanentní magnet mající svůj vlastní magnetický moment. Za předpokladu, že na kapalinu není působeno magnetickým polem, pohybují se nanočástice Brownovým pohybem, jejich póly jsou náhodně orientovány a kapalina jako celek vykazuje nemagnetické vlastnosti. Začne-li však na magnetickou kapalinu působit magnetické pole, dojde k polarizaci jednotlivých nanočástic a ty se začnou natáčet do směru magnetického pole, čímž se kapalina stává magneticky aktivní.

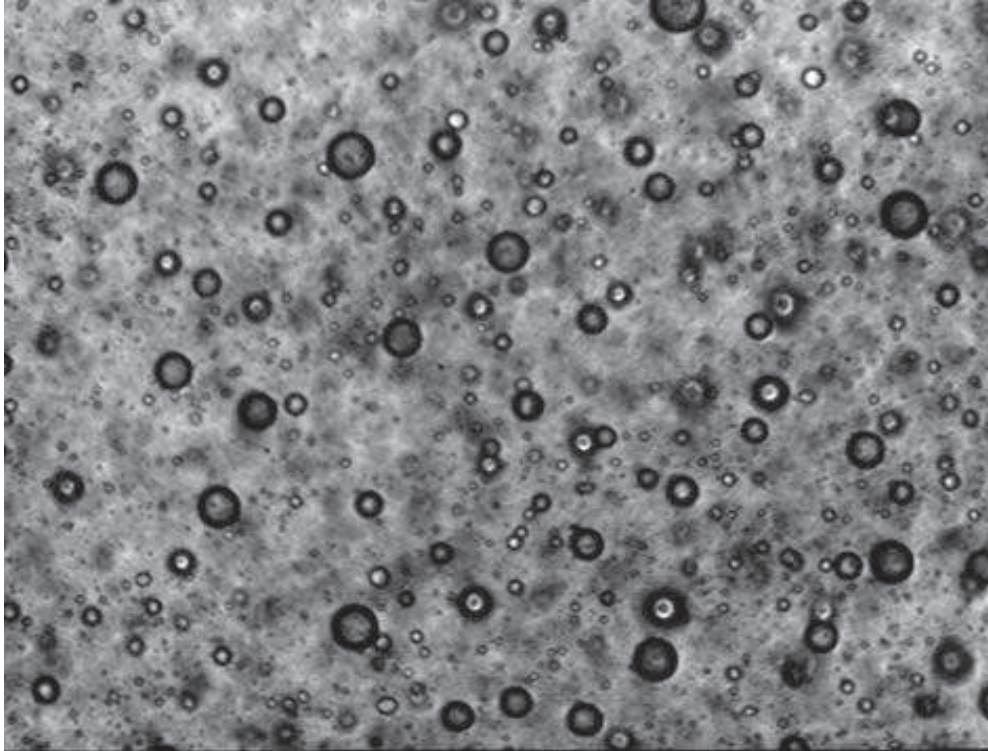
Magnetické kapaliny vykazují podobné chování jako paramagnetika - látky, které jsou přitahovány magnetickým polem, ale bez přítomnosti vnějšího magnetického působení nejsou schopny udržet si svoje magnetické vlastnosti. Závislost magnetické indukce těchto kapalin na intenzitě vnějšího magnetického pole je ovšem obdobná jako u feromagnetik, kdy se zvyšováním intenzity vnějšího pole roste magnetická indukce až do určité hodnoty, kterou nazýváme stavem saturace.

Magnetické vlastnosti těchto kapalin jsou závislé na teplotě, a ačkoli rozsah pracovní teploty běžných ferokapalin je pro běžné použití naprosto dostačující (cca -150°C až 200°C) je třeba brát změnu magnetických vlastností s teplotou v potaz. Významným bodem z hlediska teploty je takzvaná Currieho teplota, při níž dochází ke ztrátě magnetických vlastností ferokapaliny. Tato hodnota je závislá zejména na materiálu, z něhož jsou suspendované nanočástice.

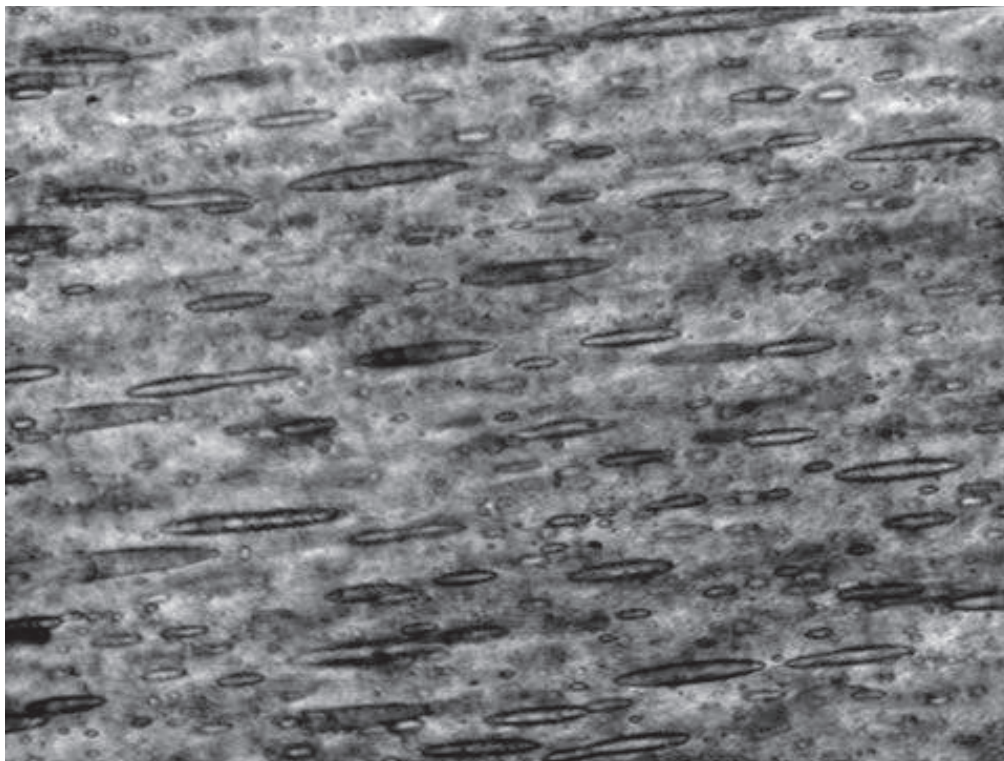
Termální stabilita magnetické tekutiny je závislá na hustotě rozptýlených nanočástic. Tyto nanočástice se chovají jako katalyzátor a produkují volné radikály, které vedou ke křížení molekulárních řetězců a k tuhnutí ferokapaliny. Katalyzační aktivita nanočástic roste s rostoucí teplotou, z čehož plyne, že při vyšších teplotách tuhnou magnetické kapaliny rychleji než při teplotách nízkých. [12]

Změny teploty mají za následek také postupné chemické znehodnocování detergentní vrstvy na nanočásticích a tedy k postupnou destabilizaci ferokapaliny. Vystavení vysokým teplotám, či změnám teploty se tedy podstatně odráží v délce životnosti magnetických kapalin, což může být mnohdy významné omezení z hlediska použití v reálné technické aplikaci.

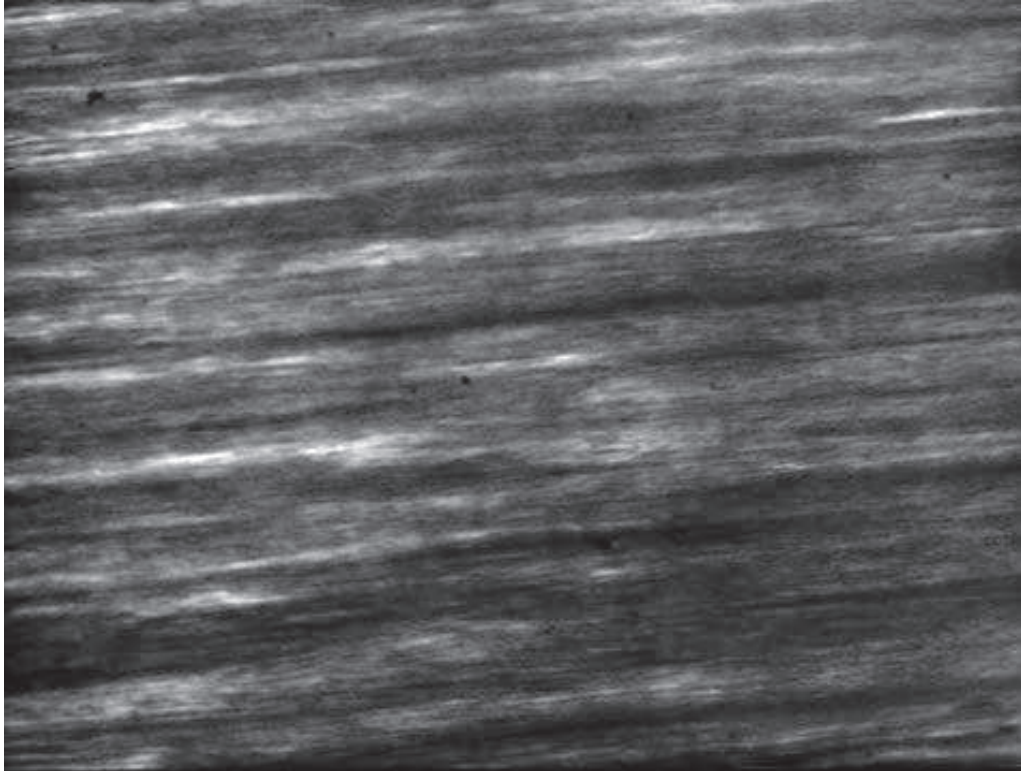
Největším rozdílem ferokapalin oproti běžným kapalinám je, jak již bylo zmíněno, že některé jejich vlastnosti jsou ovlivněny působením vnějšího magnetického pole. V technické praxi bývá v největší míře využíváno proměnnosti viskozity ferokapalin v závislosti na intenzitě vnějšího působícího magnetického pole. S rostoucí intenzitou roste i viskozita ferokapalin, což bývá označováno jako magnetoviskozní jev. Detergentní vrstva na površích magnetických nanočástic potom zajišťuje, že zůstává ferokapalina tekutá i při působení velice silného magnetického pole. Změna viskozity ferokapaliny při změně intenzity magnetického pole je velice rychlá (řádově milisekundy), což je pro technické použití těchto látek směrodatné.



*Obr. 3: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny bez působení magnetického pole.
Zdroj: [13].*



Obr. 4: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny při působení slabého magnetického pole (4mT). Zdroj: [13].

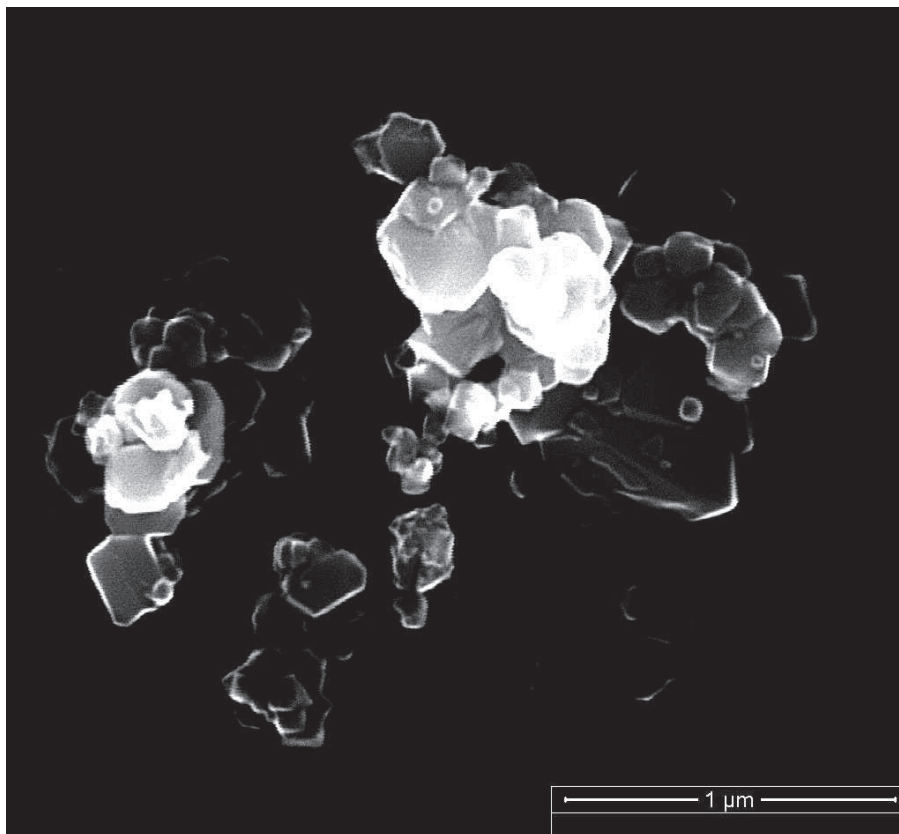


Obr. 5: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny při působení magnetického pole o maximální možné velikosti magnetické indukce vzhledem k saturačním vlastnostem dané magnetické kapaliny (30mT). Zdroj: [13].

Další z charakteristických vlastností ferokapalin, pro něž jsou často využívány, je změna optických vlastností v závislosti na působícím magnetickém poli.

Důležitým faktem pro použití ferokapalin v praxi je i to, že má časový průběh působícího magnetického pole přímý vliv na chování magnetické kapaliny. V případě vystavení ferokapaliny časově proměnnému poli dochází vždy k ohřevu této kapaliny vlivem ztrát, které vznikají při neustálém přemagnetování nanočástic. Poměrně častým jevem je také takzvaná negativní viskozita, kdy magnetická kapalina vykazuje ve střídavém poli určitou frekvenci a s rostoucí intenzitou tohoto pole nedochází k nárůstu viskozity, nýbrž k jejímu snižování.

Zvláštním typem magnetických kapalin jsou takzvané magnetoreologické kapaliny, které se od klasických ferokapalin odlišují velikostí obsažených magnetických částic. V případě magnetoreologických kapalin mluvíme o rozměrech v řádu mikrometrů. Hmotnostní zastoupení pevných magnetických částic v magnetoreologické kapalině se pohybuje okolo 70%. Nejedná se tedy o koloidní suspenzi a veškeré částice jsou z magnetického hlediska na rozdíl od nanočástic ve ferokapalinách multidoménové.



Obr. 6: Mikroskopický snímek magnetických částic magnetoreologické kapaliny (Zvětšeno 50 000x). Zdroj: [14].

Chování magnetoreologických kapalin se z hlediska změny viskozity oproti feroKapalinám velice liší. Při působení vnějšího magnetického pole na tento typ magnetické kapaliny dochází k obrovskému nárůstu viskozity a kapalina téměř ztrácí svoji tekutost. Tohoto se s oblibou využívá v mnoha aplikacích. Velice limitujícím faktorem pro používání magnetoreologických kapalin v praxi je ovšem vysoká míra jejich nestability.

V dnešní době je na trhu běžně k dostání několik různých druhů magnetických kapalin nabízených zejména pro zábavu, případně domácí pokusy. Existují i poměrně jednoduché postupy, kterými je možné magnetickou kapalinu vyrobit z běžně dostupných surovin. Poloamatérský postup na výrobu magnetické kapaliny je popsán například v [12].

Jedním z největších světových výrobců magnetických kapalin je americká společnost Ferrotec [15], která se výrobou magnetických kapalin zabývá již od roku 1968. V její nabídce je možné nalézt magnetické kapaliny pro reproduktory, pro těsnění a samozřejmě také pro vzdělávací účely. V nabídce jsou jak feroKapaliny využívající jako nosnou kapalinu olej, tak vodu. Je možné koupit také samotné nanočástice. Z oficiálních stránek této společnosti byly získány parametry některých typických magnetických tekutin uvedených příloze této práce v tabulce *Tab. P2*. Vzhledem k obchodní politice společnosti není bohužel možné získat parametry magnetických kapalin používaných v magnetických těsněních, které by vzhledem k tématu této práce byly jistě přínosné.

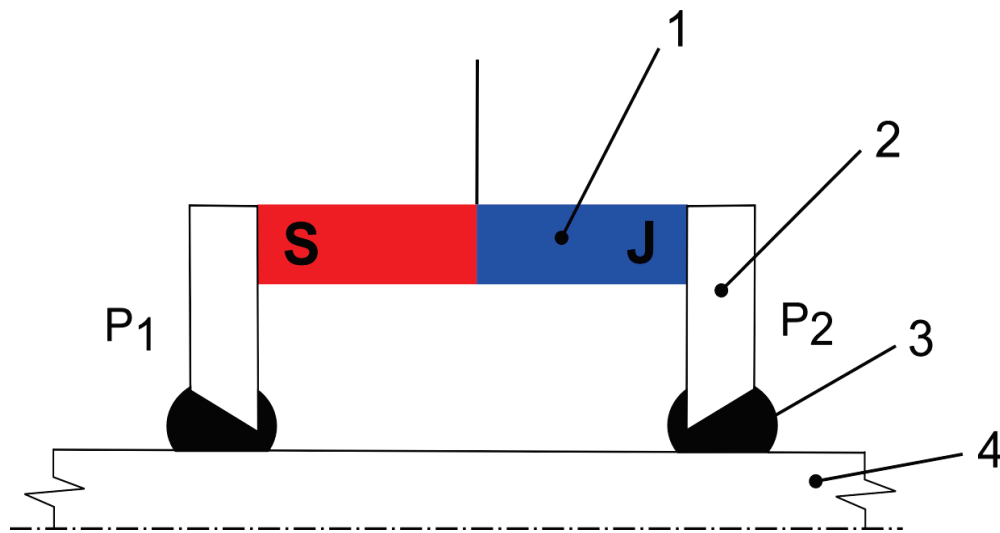
3.2 Aplikace magnetických kapalin v praxi

Celá tato kapitola vychází z druhé části Mayerova článku o magnetických kapalinách a jejich použití [16].

3.2.1 Ferohydrodynamické těsnění

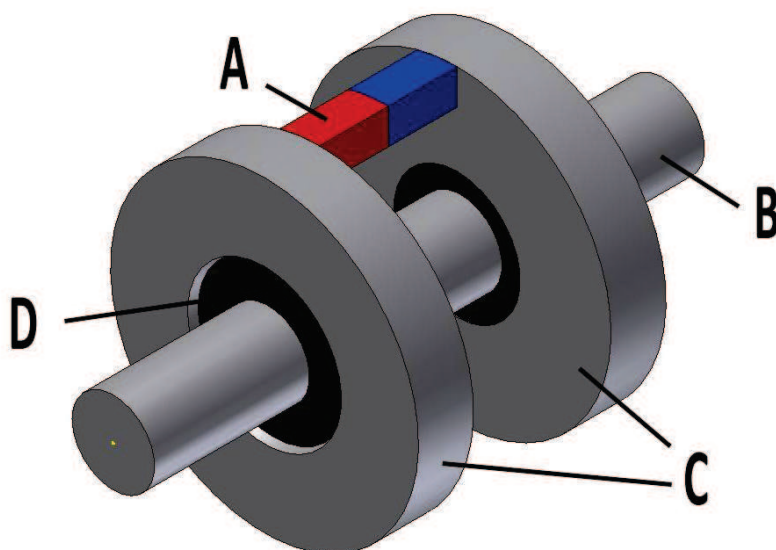
Ferohydrodynamické těsnění je jedna z nejstarších a nejrozšířenějších aplikací ferokapalin. Tento typ řešení je v dnešní době používán v leteckém průmyslu, u astronomických přístrojů, u technických výrobků pracujících v toxickém, případně velice prašném prostředí a v neposlední řadě je toto těsnění hojně používáno u vakuových čerpadel. Toto těsnění je řešeno jinak pro aplikaci na magneticky vodivou a jinak na magneticky nevodivou hřídel.

Schéma ferohydrodynamického těsnění magneticky vodivé hřídele je na *Obr. 7*. Mezi hřídelí a pólovými nástavci permanentního magnetu je velice úzká mezera, v níž je koncentrováno magnetické pole. Po aplikaci ferokapaliny do této mezery dochází k její pevné fixaci magnetickým polem. Takovéto technologicky snadné řešení těsnění je schopno udržet i relativně velké přetlaky. Tento způsob je s výhodou používán i v prašných a agresivních prostředích, kde je třeba aplikovat protiprachová těsnění. Nevýhodou ferohydrodynamického těsnění mohou být omezení v podobě průměru hřídele (cca do 10 cm) a počtu otáček (cca do 6000 min^{-1}). Dalším problémem je potřeba chlazení ferokapaliny při vyšších teplotách, aby nedocházelo k jejímu znehodnocování a podstatnému zkrácování životnosti ferohydrodynamického těsnění.



Obr. 7: Těsnění magneticky vodivé hřídele ferokapalinou.

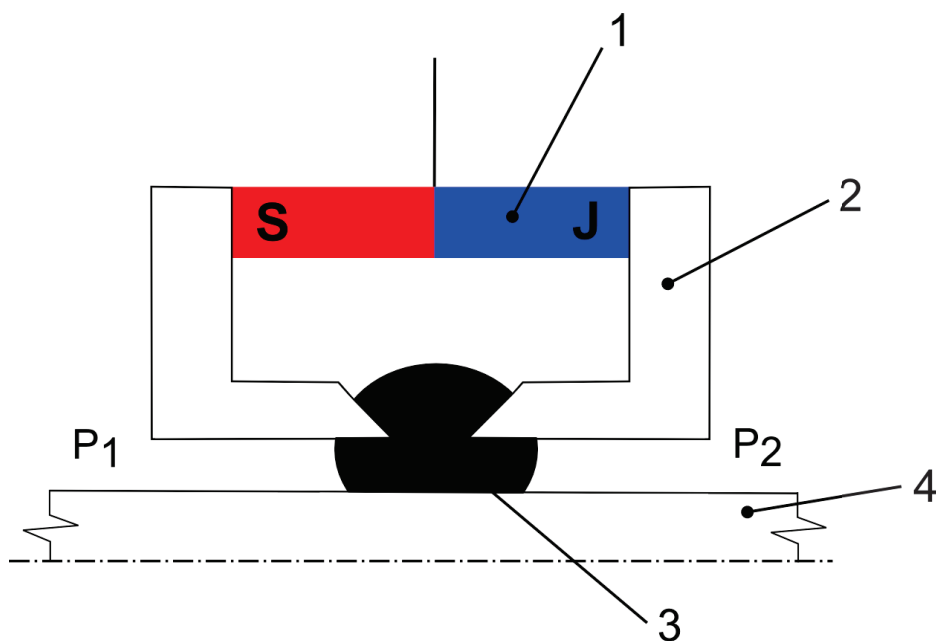
1 - permanentní magnet, 2 - pólový nástavec, 3 - ferokapalina, 4 - magneticky vodivá hřídel, P_1 - tlak na první straně těsnění, P_2 - tlak na druhé straně těsnění (obecně rozdílný od P_1)



Obr. 8: Těsnění magneticky vodivé hřídele ferokapalinou.

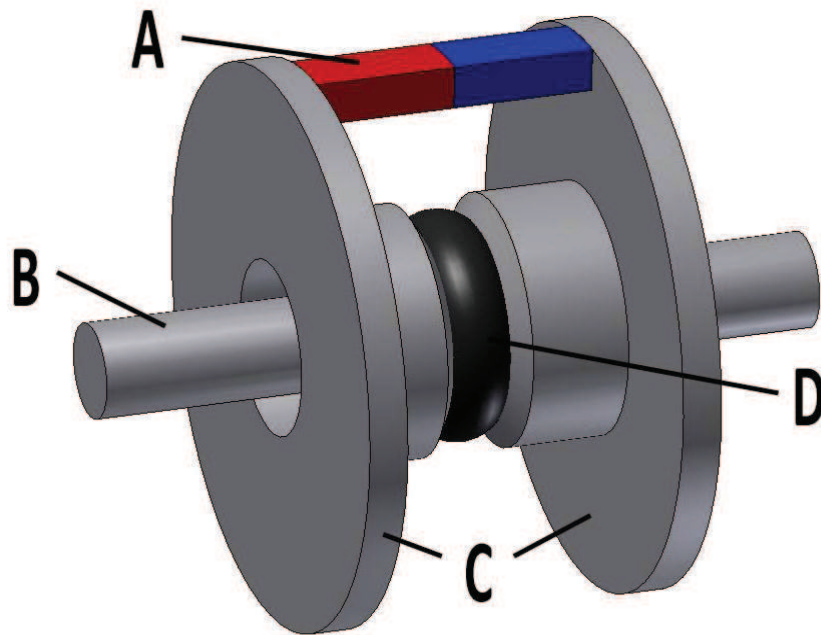
A – permanentní magnet, B – magneticky vodivá hřídel, C – pólové nástavce, D – těsnící ferokapalina.

Největší rozdíl v těsnění magneticky nevodivé hřídele oproti hřídeli magneticky vodivé je ve tvaru pólových nástavců. Magnetické pole v tomto případě neprochází skrz hřídel, nýbrž je vytvářeno mezi dvěma pólovými nástavci tvaru L. Schéma tohoto těsnění je na Obr. 9.



Obr. 9: Schéma těsnění magneticky nevodivé hřídele ferokapalinou.

1 - permanentní magnet, 2 - pólový nástavec, 3 - ferokapalina, 4 - magneticky nevodivá hřídel, P_1 - tlak na první straně těsnění, P_2 - tlak na druhé straně těsnění (obecně rozdílný od P_1)



Obr. 10: Těsnění magneticky nevodivé hřídele ferokapalinou.

A – permanentní magnet, **B** – magneticky nevodivá hřídel, **C** – pólové nástavce, **D** – těsnící ferokapalina.



Obr. 11: Ferohydrodynamické těsnění. Zdroj: [15].

Ferohydrodynamické těsnění má oproti klasickým mechanickým těsněním několik nesporných výhod. Tento systém je konstrukčně jednodušší než klasické těsnění, z čehož vyplývá, že je i levnější. Zároveň jsou těsnění ferokapalinou velice spolehlivá. Ferokapalina sama o sobě působí jako lubrikant a tření mezi těsněním a hřídelí je tedy mnohokrát menší než v případě mechanického těsnění. Výrobci udávaná životnost ferohydrodynamického těsnění se pohybuje okolo deseti až patnácti let. Výhodou je i velký rozsah pracovních teplot (cca -100 až 200 °C).

O problematice ferohydrodynamického těsnění pojednává například Ravaud v práci [17].

3.2.2 Tlumiče využívající magnetickou kapalinu

Tlumič obecně disipuje kinetickou energii z kmitání a chvění mechanických součástí strojů do tepelné energie. Fero kapaliny, případně magnetoreologické kapaliny, jsou s oblibou používány pro konstrukci velice účinných tlumičů s proměnným tlumením. Do cívky tlumiče je přiváděn proudový signál, čímž je ovlivňováno magnetické pole působící na fero kapalinu v tlumiči. Změna magnetického pole způsobuje změnu viskozity fero kapaliny a tím i podstatně ovlivňuje tlumení celého tlumiče. V porovnání s klasickými hydraulickými tlumiči dosahuje ferohydraulický tlumič nesrovnatelně lepších výsledků při aplikaci v prostředí s proměnnou frekvencí a amplitudou vibrací.

Ferohydraulické tlumiče se používají například v měřicích přístrojích, v automatických pračkách a v dalších velice různorodých aplikacích. Největší perspektivu má ovšem tento typ tlumičů v automobilovém průmyslu.

To, že je ferohydraulický tlumič schopen reagovat velice rychle (cca kolem 0,005 s), jej předurčuje k výhodnému použití pro tlumení vlivu nerovností vozovky u automobilů. Účinné tlumení zvyšuje stabilitu vozu, zkracuje brzdovou dráhu a v neposlední řadě prodlužuje životnost pneumatik. Dobré ferohydraulické tlumení také snižuje přenos vibrací do kabiny automobilu a zvyšuje tak pohodlí při pohybu po vozovce.

Americký koncern General Motors osazuje těmito tlumiči některé typy automobilů Cadillac a Corvette. Tento systém je nazýván MagneRide (tlumič na *Obr. 12*) a byl vyvinut společností Delphi. Z evropských automobilek využívá tento systém automobilka Audi pro poslední řady svých sportovních modelů TT a R8 a také italská automobilka Ferrari v modelu Ferrari 599 GTB Fiorano představeném v roce 2006. [18]

V systému MagneRide je používána magnetoreologická kapalina obsahující 20 až 40 hmotnostních procent železných částic. Nosnou kapalinou je nejčastěji minerální olej, syntetický olej, voda, nebo glykol. V kombinaci s elektronickou řídicí jednotkou poskytují tyto tlumiče výborné požadované vlastnosti a také možnost měnit velikost magnetického pole tuhost tlumičů. Největší nevýhodou tohoto systému je jeho cena, která předurčuje jeho použití zatím pouze v nejluxusnějších a nejdražších modelech automobilů. [18]



Obr. 12: Automobilový tlumič systému MagneRide. Zdroj: [18].

V automobilovém průmyslu je dnes používáno několik typů tlumičů využívajících specifických vlastností magnetických kapalin. Jednotlivé typy se liší vlastnostmi použité magnetické kapaliny a samozřejmě technickým provedením.

Velice účinné ferohydraulické tlumení je dnes používáno také pro eliminaci výchylek sedadel nákladních vozů.

3.2.3 Reproduktry s magnetickou kapalinou

Toto technické řešení pochází již ze 70. let dvacátého století. Konstrukce takového reproduktoru je stejná jako u klasických reproduktorů s tím rozdílem, že cívka napájená akustickým signálem nekmitá ve vzduchu, nýbrž právě v magnetické kapalině. Fero kapalina je v této mezeře držena silným magnetickým polem permanentního magnetu, který je součástí každého reproduktoru.

Cívka je magnetickou kapalinou v tomto případě mnohem lépe chlazená, než při vyplnění mezery vzduchem, z čehož plyne výrazné zvětšení akustického výkonu při zachování stávajících rozměrů reproduktoru. Kmitání cívky je fero kapalinou také výrazně tlumeno, což se odráží příznivě v kvalitě akustické reprodukce.

Dříve zmíněná společnost Ferrotec z USA vyvinula mnoho typů magnetických kapalin přímo za účelem použití v audiotechnice. Výrobní řada pro použití v audiotechnice je velice široká a společnost nabízí opravdu velkou škálu fero kapalin odlišujících se typickými vlastnostmi, které se při použití v reproduktoru promítají na výsledném charakteru zvuku.

3.2.4 Lékařské aplikace

Magnetické kapaliny umožňují cíleně aplikovat medikamenty v těle pacientů. Léčivo je navázáno na povrch nanočástic magnetické kapaliny a poté pomocí vnějšího magnetického pole navedeno krevním řečištěm do potřebné oblasti, kde je možné ho po potřebnou dobu udržet. Magnetické kapaliny lze bezproblémově použít jako kontrastní látku při vyšetření magnetickou rezonancí.

Lidem s postiženou sítnicí může magnetická kapalina potencionálně zachránit zrak. Sítnice bývá nejčastěji poškozena následkem nemoci, nebo úrazu. V hraničních případech může poškození sítnice znamenat oslepnutí. Aplikací ferrofluidu pod sítnicí je možno dostat tuto do požadované pozice. Nejčastěji bývala k tomuto účelu užívána silikonová tekutina, ale magnetická kapalina může být použita se stejnou, případně lepší úspěšností. Největší výhodou použití fero kapaliny je to, že může být magnetickým polem navedena do míst oka, kam se není možno žádným jiným způsobem dostat. [19]

Specifickým použitím magnetických tekutin v lékařské praxi je takzvaná hypertermie. Magnetická kapalina je navedena do nádorové tkáně pacienta a je na ni krátkodobě působeno vysokofrekvenčním proměnným polem s frekvencí f okolo 50 kHz až 1,2 MHz . Jak bylo zmíněno v kapitole 3.1, opakovaným přemagnetováním nanočástic dochází vlivem ztrát k ohřevu magnetické kapaliny a tím k cílené destrukci zasažené tkáně. Při této aplikaci musí být kapalina komponována tak, aby bylo eliminováno

nebezpečí jejího přehřátí a tím destrukce zdravé tkáně. Tato technologie by v některých případech mohla plně nahradit dnes užívanou a pro organismus zatěžující chemoterapii. [20]

3.2.5 Další aplikace

Bylo by možné najít mnoho dalších aplikací magnetických kapalin. Fero kapaliny jsou používány například při separaci neželezných kovů z odpadů, nebo při konstrukci výkonových transformátorů s magnetickou kapalinou jako chladícím médiem. Magnetoreologické kapaliny zmíněné v kapitole 3.1 bývají použity například v poměrně rozšířených magnetických spojkách.

3.3 Zdravotní závadnost magnetických kapalin

Magnetické kapaliny jsou dnes ve velké míře diskutovány z hlediska jejich zdravotní závadnosti.

Jedná se o velice závažné téma týkající se nejen magnetických kapalin, ale obecně všech materiálů obsahujících nanočástice. Je možno nalézt několik vědeckých prací zabývajících se touto problematikou (např. Delgadova práce [21]).

V roce 2008 byly v USA v rámci National Nanotechnology Initiative formulovány některá z hlavních témat výzkumu v oblasti bezpečnosti nanomateriálů [22]. Tato témata dobře ilustrují hlavní aspekty potenciální závadnosti fero kapalin obsahujících nanočástice ve vztahu k lidskému organismu.

Hlavní témata výzkumu potenciální škodlivosti nanomateriálů podle [22]:

- Porozumění tomu, jak probíhá absorpce a transport nanomateriálů lidským tělem.
- Formulace metod, kterými by bylo možné posuzovat vystavení lidského těla nanomateriálu.
- Provedení laboratorních pokusů za účelem predikce reakce lidského těla na dlouhodobé působení nanomateriálu.
- Určení mechanismů uplatňujících se při kontaktu nanočástic s lidským tělem na molekulární úrovni, buněčné úrovni a na úrovni tkání.
- Formulace závislosti mezi vlastnostmi nanomateriálů a jejich schopnosti vniknout do lidského těla dýchacím a zažívacím traktem, případně kůží či sliznicemi.

Literatura (např. [20]) se většinou zabývá obecně všemi nanomateriály. Nepodařilo se bohužel dohledat žádnou práci zaměřenou pouze na magnetické kapaliny obsahující magnetické nanočástice.

V souvislosti s použitím magnetických kapalin v medicíně je třeba vznést na tuto kapalinu některé požadavky, jejichž nesplnění by potenciální použití těchto látek v lékařství vylučovalo. Magnetické nanočástice musejí být netoxické, chemicky stabilní, musejí mít uniformní velikost a musejí mít schopnost dobře se rozptýlit ve vodném prostředí. Z těchto důvodů se v magnetických kapalinách určených pro aplikaci

v medicínském prostředí používá na výrobu magnetických nanočástic zejména magnetit a maghemit. Jedná se o oxidy železa, které je lidské tělo po ukončení léčby schopno vyloučit za pomoci jater. [20], [21]

Po zavedení magnetické kapaliny do těla nesmí při působení magnetického pole v žádném případě dojít k shlukování nanočástic. Pokud by došlo k vytvoření částicových shluků v kapalině, mohly by tyto v krajním případě vést až k embolii.

4 Magnetické pole

Obecný popis magnetického pole a jeho vlastností je možno dohledat v mnoha publikacích věnujících se obecně elektrice a elektromagnetizmu. Tato kapitola vychází z Tirpákovy publikace [23] a z vlastních rukopisných poznámek z přednášek doc. Ing. Pavla Vorla, Ph.D. k předmětu Elektronika.

Magnetické pole je oblast, kde dochází k působení magnetických sil. Podle charakteru je možné rozdělit magnetické pole na stacionární a nestacionární. Stacionárním polem rozumíme pole časově neproměnné, zatímco nestacionární pole se vždy vyznačuje proměnlivostí v čase.

Magnetické pole vzniká například kolem zmagnetovaných látek.

Magnetické pole je možné názorně popsat magnetickými indukčními čarami. Tyto čáry jsou jakousi obdobou siločar definovaných pro elektrické pole. Magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené křivky, které leží v rovině kolmě na vektor rychlosti pohybu náboje.

Základní fyzikální veličina definující magnetické pole je magnetická indukce značená B . Magnetickou indukci lze definovat pomocí následujících úvah.

Na bodový náboj vyskytující se v magnetickém poli, který je v klidu nepůsobí žádná síla vyvolaná tímto polem.

Pohybuje-li se tento bodový náboj magnetickým polem, potom na něj pole působí magnetickou silou, jejíž velikost je závislá na velikosti náboje a také na rychlosti a směru jeho pohybu. Tato síla je nazývána silou Lorentzovou. Platí následující vztah (6).

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6)$$

Kde q značí sledovaný bodový náboj, \vec{v} je vektor rychlosti jeho pohybu a konečně \vec{B} je magnetická indukce, což je základní veličina popisující vlastnosti magnetického pole.

Ze vztahu (6) plyne také, že je-li vektor rychlosti náboje rovnoběžný s vektorem magnetické indukce pole, pak je Lorentzova síla rovna nule.

Magnetická indukce je definována právě rovnicí (6). Touto rovnicí je plně definována také jednotka magnetické indukce, Tesla. Magnetické pole má hodnotu magnetické indukce $1T$, pokud vyvolá při působení na náboj o velikosti 1 coulomb, pohybující se kolmo na vektor magnetické indukce rychlostí $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, Lorentzovu sílu o velikosti 1 newton.

Tesla je poměrně velká jednotka. V běžných technických aplikacích se velikost magnetického pole pohybuje maximálně v jednotkách tesla. Například ve vzduchové mezeře reproduktoru bývá velikost magnetického pole nejčastěji v rozsahu $1 - 2 T$ a například magnetická indukce pole produkovaného magnetickou rezonancí se pohybuje mezi 1,5 a 3 Tesla.

5 Magnetická kapalina jako kapalina binghamská

Proudění magnetické kapaliny je z reologického hlediska poměrně složitá záležitost. Je samozřejmé, že reologické vlastnosti magnetické kapaliny jsou závislé na složení dané kapaliny. Tyto vlastnosti jsou ve velké míře závislé na použité nosné kapalině. Magnetická kapalina na bázi oleje si bude v některých případech do jisté míry zachovávat reologické vlastnosti daného oleje stejně jako kapalina na bázi vody bude při proudění vykazovat některé vlastnosti vody.

Nosná kapalina je jen jedním ze dvou základních faktorů ovlivňujících základní vlastnosti magnetické kapaliny. Druhým faktorem je velikost, typ a množství rozptýlených magnetických částic. Naprosto jinak se bude chovat ferokapalina obsahující pevné částice o velikosti řádově v nanometrech a naprosto jinak magnetoreologická kapalina obsahující částice několikanásobně větší. Stejně tak se bude v základních parametrech lišit ferokapalina obsahující nízký hmotnostní zlomek feročástic od kapaliny s hmotnostním zlomkem vysokým.

Ve společnosti Ferrotec [15] například nenewtonské chování jimi vyráběných ferokapalin bez působení magnetického pole v daných technických aplikacích vůbec neuvažují.

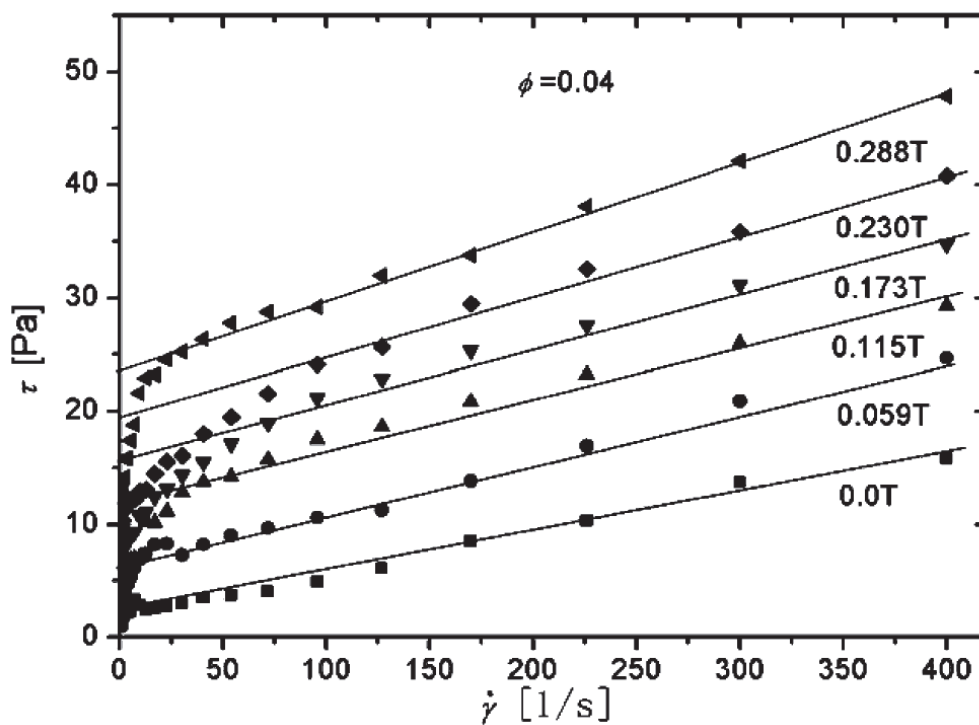
Jediným zaručeným způsobem, jak analyzovat a popsat relevantně vlastnosti a potažmo proudění určité magnetické kapaliny, je opřít tuto analýzu o provedený experiment. Celá tato kapitola je založena na článku publikovaném Yangem [9], který spolu se spoluautory provedl syntézu a následné důkladné proměření ferokapaliny na bázi vody. Je potřeba znovu zmínit, že veškeré skutečnosti formulované v této kapitole jsou platné pouze pro danou ferokapalinu. V žádném případě nemohou být brány jako obecně použitelné pro jakýkoliv typ magnetoreologické kapaliny. Zároveň nemusí tyto skutečnosti odpovídat ani chování jiných typů ferokapalin než, té, která byla v [9] studována. Tato práce [9] nejen že poskytuje jakousi představu o chování ferokapaliny podloženou experimentem, ale je to také zdroj, z kterého jsou brány parametry této kapaliny, které budou použity v této práci dále při numerickém řešení proudění ferokapaliny. Je obecně problematické dohledat jakýkoliv relevantní zdroj, z něhož by bylo možné získat parametry jakékoliv magnetické kapaliny, které by byly použitelné pro řešení této kapaliny jako kapaliny binghamské.

Celý postup výroby analyzované ferokapaliny je uveden v [9]. Magnetické nanočástice jsou vyrobeny z oxidu železnato-železitého, který je možno najít i v přírodě jako minerál magnetit. Feročástice mají téměř sférický tvar a jejich průměr se pohybuje kolem 13 nm. Jako detergent je použit tetrametyl amonný. Na základě znalosti hustoty

magnetických částic byly syntetizovány magnetické kapaliny se třemi různými objemovými zlomky feročástic. Hodnoty těchto objemových zlomků jsou $\phi = 0,04$, $0,07$ a $0,14$. [9]

Na těchto ferokapalinách bylo provedeno měření magnetoreologických parametrů. Měření bylo prováděno takzvaným parallel-plates reometrem upraveným tak, aby bylo možno na kapalinu působit magnetickým polem o daných parametrech. Základem tohoto reometru jsou, jak již anglické označení napovídá, dvě rovnoběžné desky umístěné v určité vzdálenosti od sebe, mezi něž se aplikuje měřená kapalina. Bylo provedeno měření při působení statického magnetického pole i pole proměnného. Z hlediska závěrů jsou pro tuto práci zásadní měření při působení statického magnetického pole.

Při měření magnetické kapaliny ve statickém magnetickém poli bylo měřeno smykové napětí při změně rychlosti smyku, která byla logaritmicky měněna od $0,1$ do 400 s^{-1} . Toto měření bylo prováděno také pro různou velikost magnetické indukce působícího magnetického pole v rozsahu 0 až $0,288$ tesla. [9]



Graf 2: Reologické křivky získané na základě experimentu pro ferokapalinu o objemovém zlomku feronanočástic 0,04. Zdroj: [9].

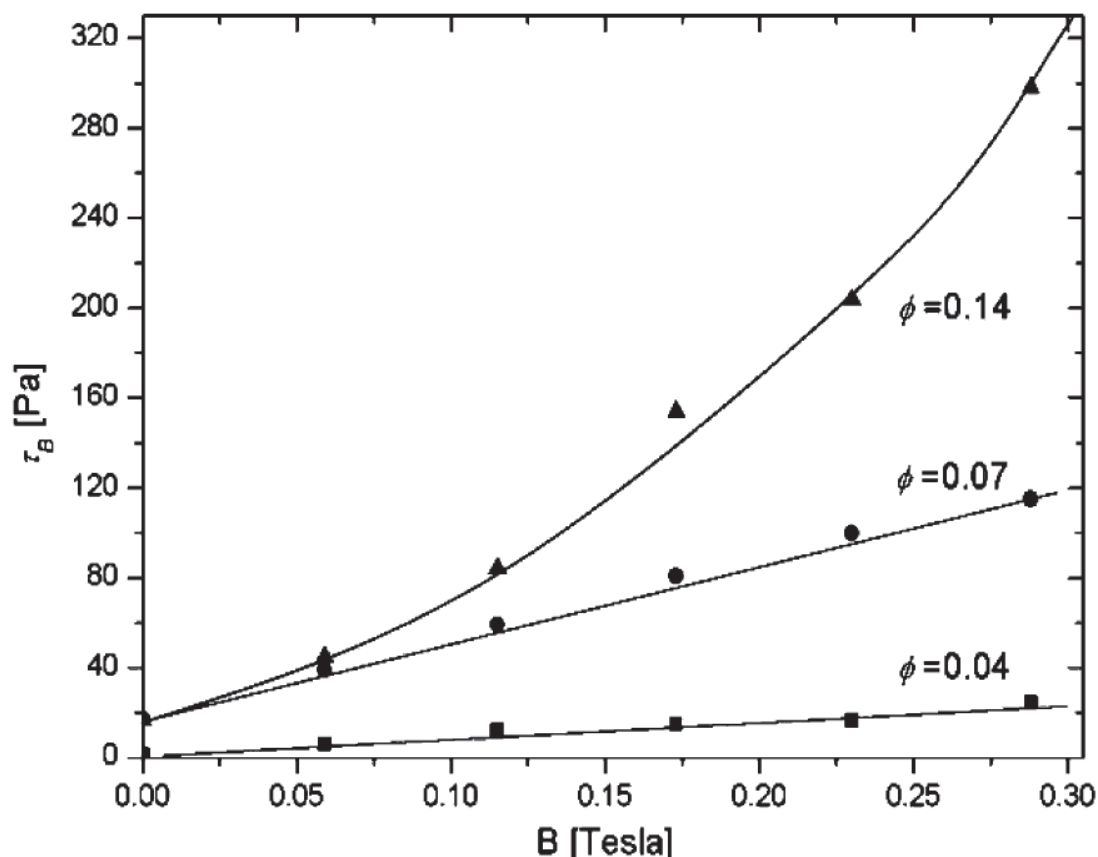
Reogramy pro ferokapaliny s objemovým zlomkem nanočástic o velikost $0,07$ a $0,14$ je možno dohledat v [9].

Na základě měření provedeného v [9] je možno říci, že tento typ ferokapaliny nelze považovat výhradně za ideální binghamskou kapalinu. Dříve bylo formulováno, že τ_0 pro binghamskou kapalinu je hodnota smykového napětí, kterou kapalina vykazuje při nulové rychlosti smyku v této kapalině. Z experimentálních dat na Graf 2 vyplývá, že

tuto hodnotu není možné pro danou ferokapalinu určit, jelikož nevykazuje žádné τ_0 , dokud nezačne proudit. Na základě výše uvedeného reogramu lze o kapalině říci, že před dosažením τ_0 „nepoteče“ tato jako tuhé těleso, nicméně jako kapalina s viskozitou o jiné hodnotě než po překročení meze toku τ_0 . Hodnota viskozity pro τ menší než τ_0 je ve všech případech evidentně vyšší než viskozita, kterou kapalina vykazuje pro oblast vyšších smykových napětí než τ_0 . Označení parametru τ_0 jako mez toku je tedy pro tento případ mírně zavádějící a vhodnější by bylo označit jej například jako prahové, nebo přechodové smykové napětí.

Extrapolací měřených dat do hodnoty nulové rychlosti smyku bylo možno získat imaginární hodnotu meze toku τ_0 . Hodnoty tohoto parametru pro řešené kapaliny jsou vyneseny dále v tabulce *Tab. 1*.

Z *Graf 3* je očividné, že hodnota imaginárního τ_0 se mění v závislosti na velikosti magnetické indukce působícího pole. Tato skutečnost je dána vytvořením řetězců nanoferočástic ve směru působícího magnetického pole. Je tedy samozřejmé, že hodnota τ_0 je pro tuto kapalinu ve velké míře závislá i na množství magnetických nanočástic v kapalině.



Graf 3: Závislost imaginární meze toku ferokapaliny na velikosti magnetické indukce pro jednotlivé hodnoty ϕ . Zdroj: [9].

Tab. 1: Imaginární mez toku měřených ferokapalin při různých parametrech působícího magnetického pole. Zdroj dat: [9].

Objemový zlomek nanočástic φ [-]	0,04	0,07	0,14
Magnetická indukce pole B [T]	Kritické smykové napětí τ_0 [Pa]		
0	1,09	18,7	18,7
0,058	6,09	42,3	47,2
0,115	13	62,7	90
0,173	15,9	80,5	159
0,23	17,8	103	210
0,288	25,2	116	283

Binghamskou viskozitu kapaliny pro jednotlivé hodnoty B lze potom získat jako směrnici extrapoláčnic přímek z *Graf 2*. Hodnoty η_B byly odečteny a jsou shrnuty v tabulce *Tab. 2*. Z této tabulky je očividné, že binghamská viskozita je, stejně jako τ_0 , závislá na velikosti B a zejména pak na objemovém zlomku ϕ pevných částic ve ferokapalině.

Tab. 2: Binghamská viskozita měřených ferokapalin při různých parametrech působícího magnetického pole. Zdroj dat: [21].

Objemový zlomek nanočástic φ [-]	0,04	0,07	0,14
Magnetická indukce pole B [T]	Binghamská viskozita η_B [Pa.s]		
0	0,0405	0,0710	0,1108
0,058	0,0436	0,6833	0,1420
0,115	0,0433	0,0703	0,1556
0,173	0,0478	0,0700	0,1350
0,23	0,0580	0,0517	0,1500
0,288	0,0593	0,0667	0,1667

Z výše uvedených dat je možno získat i reologické parametry dané magnetické kapaliny, kterými je možno kapalinu popsat při neuvažování ideálního binghamského chování za použití upravené Herschel-Bulkleyovi rovnice.

Pro magnetickou kapalinu s objemovým zlomkem nanočástic 0,04 při působení magnetického pole o velikosti magnetické indukce 0,288 T byly určeny následující parametry.

Kritická rychlost smyku $\dot{\gamma}_k = 26 \text{ s}^{-1}$.

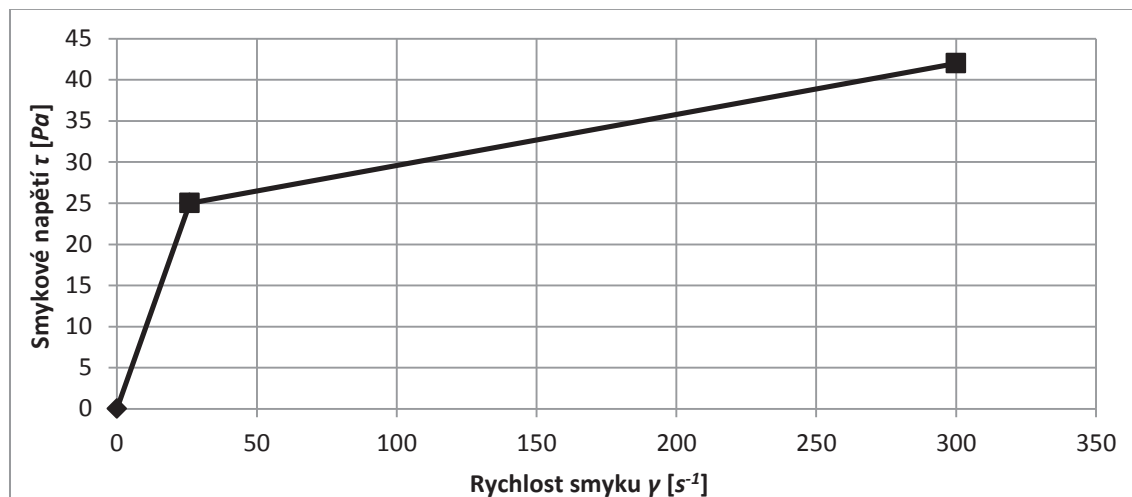
Viskozita v oblasti kde $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_k$ $\eta_{B1} = 0,9165 \text{ Pa.s}$.

Viskozita kapaliny v oblasti kde $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_k$ $\eta_{B2} = 0,0628 \text{ Pa.s}$.

Reogram získaný přibližnou aproximací dat z [9] při uvažování výše uvedených parametrů dané kapaliny je uveden na *Graf 4*.

Přímka popisující závislost smykového napětí na rychlosti smyku v oblasti, kde jsou rychlosti smyku nižší než kritická rychlost smyku, která je pro tento případ určena hodnotou $\dot{\gamma}_k = 26 \text{ s}^{-1}$ je dána rovnicí $y = 0,9165x$.

Aproximační přímka z oblasti nadkritických rychlostí smyku je popsána rovnicí přímky ve tvaru $y = 0,063x + 23,387$.



Graf 4: Aproximovaný reogram magnetické kapaliny řešené v [9].

Pro porovnání chování této binghamské kapaliny s chováním kapaliny newtonské je možno určit takzvanou zdánlivou viskozitu, která je v [9] značena η_{app} . V případě binghamské kapaliny se jedná v podstatě o jakýsi přepočítání binghamské viskozity na viskozitu newtonskou. Rozdíl mezi binghamskou a zdánlivou viskozitou binghamské kapaliny byl zmíněn v kapitole 2.3.1.

Z Newtonova zákona viskozity plyne, že zdánlivá viskozita je definována jako podíl smykového napětí a rychlosti smyku. [1]

Uvažujeme-li ferokapalinu jako kapalinu binghamskou, uvažujeme pro ni platnost rovnice (7).

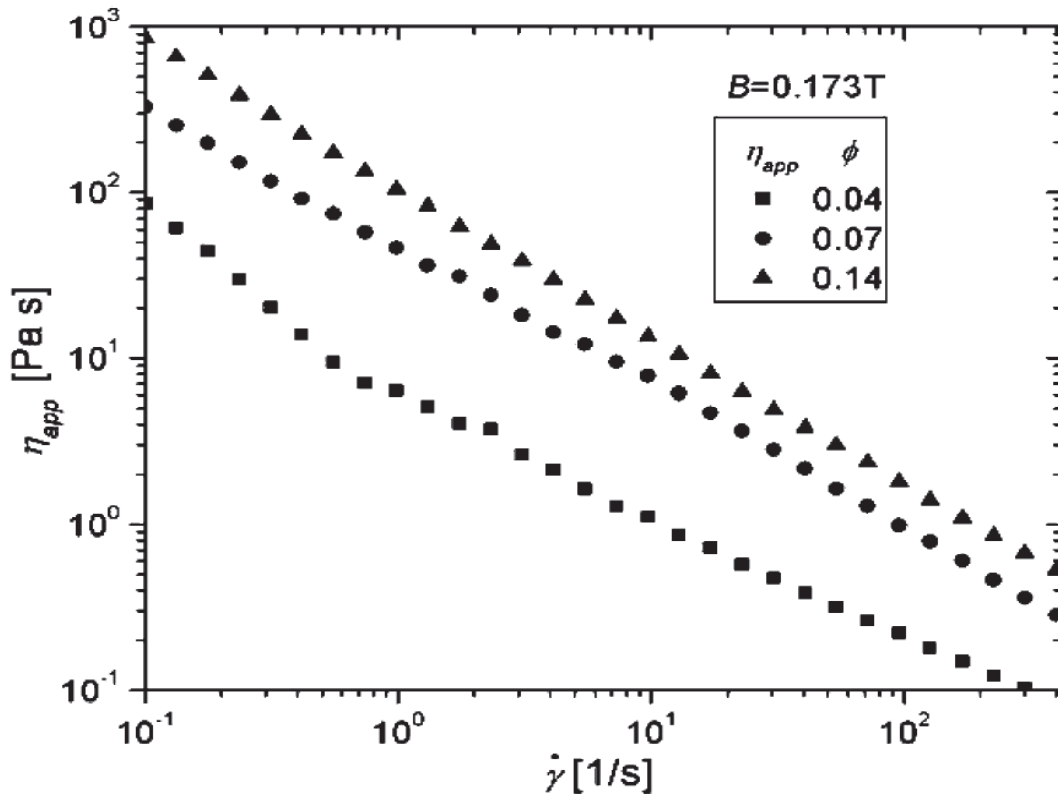
$$\tau = \tau_0 + \eta_B \dot{\gamma} \quad (7)$$

Kde $\dot{\gamma}$ v rovnici (7) vyjadřuje derivaci rychlosti podle příčné souřadnice y .

Zdánlivá viskozita binghamské kapaliny je pak na základě předchozí úvahy a rovnice (7) rovna (8).

$$\eta_{app} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \eta_B \quad (8)$$

V práci [9] je potom zdánlivá viskozita (8) vynesena v grafu v logaritmických osách v závislosti na rychlosti smyku v kapalině při působení pole o magnetické indukci 0,173. (Graf 5).



Graf 5: Závislost zdánlivé viskozity na rychlosti smyku. Zdroj: [9].

Jak je uvedeno i v [9], považujeme-li η_B za směrnici lineární části závislosti τ na rychlosti smyku, může být tato považována za konstantní. Z rovnice (8) potom plyne, že se zvyšující se rychlostí smyku $\dot{\gamma}$ se hodnota zdánlivé viskozity bude blížit k hodnotě η_B . Binghamská viskozita je tedy spodní limitní hodnota zdánlivé viskozity.

Na základě výše uvedeného je možno říci, že pro danou magnetickou kapalinu při uvažování konstantní velikosti magnetické indukce působícího pole lze s přípuštěním jisté nepřesnosti použít Binghamův model viskozity. Tato nepřesnost je dána tím, že reogramy získané z měření musí být prokládány a extrapolovány, aby bylo možno získat binghamské reologické parametry konkrétní magnetické kapaliny při daných podmínkách. Je ovšem zřejmé, že i přes drobné nepřesnosti je binghamský model vzhledem k jeho relativní jednoduchosti pro popis této kapaliny vhodný.

Rozbor magnetoreologických vlastností feroKapalin provedl například i Saldivar-Guerrero v [24]. Pravdou je, že se tato práce nezabývá klasickou feroKapalinou, nicméně poměrně specifickým typem těchto Kapalin, takzvanou inverzní feroKapalinou. Jak může být v této zprávě [24] dohledáno, závěry o chování řešené kapaliny formulované Saldivar-Guerrero jsou v základních věcech shodné s těmi formulovanými v [9].

Je možno dohledat další literaturu zabývající se reologickými, případně magnetickými vlastnostmi různých druhů feroKapalin a magnetoreologických Kapalin.

Rozbor reologického chování magnetoreologických kapalin je možno najít například v [25]. V této technické zprávě je možno dohledat závislosti kritického smykového napětí τ_0 na velikosti působícího magnetického pole a smykového napětí na rychlosti smyku. Chování těchto kapalin je podle Tanga [25] do jisté míry podobné chování ferokapalin, nicméně hodnoty magnetoreologických parametrů těchto kapalin se pohybují řádově mnohem výše. Podobné závěry jsou dohledatelné v pracích zaštiťovaných americkou společností Lord Corporation (např. [26]).

Z dalších prací zabývajících se danou problematikou lze zmínit Chaudhuriho zprávu [27], která řeší určování a odhad reologických parametrů ferokapalin za využití genetických algoritmů.

6 Matematické odvození

V této kapitole je uveden matematický popis proudění newtonských a binghamských kapalin v kruhovém potrubí a mezi rovnoběžnými deskami.

Ačkoli není řešení problematiky proudění newtonské kapaliny přímo součástí zadání této práce, bylo k němu přistoupeno zejména za účelem podrobného pochopení dané problematiky. Postup řešení proudění binghamské kapaliny je v mnoha aspektech shodný s tím pro kapalinu newtonskou a logicky na něj navazuje, případně jej rozšiřuje. Aby tato práce mohla sloužit jako ucelený přehled o chování binghamské kapaliny, její součástí by jistě mělo být přímé srovnání s chováním kapalin newtonských.

Pro oba typy kapaliny a pro různé typy domén bude řešen rychlostní profil, rozložení smykového napětí v řezu, kde je plně vyvinuté proudění, průtok doménou a střední rychlost.

Rychlostní profily a rozložení smykového napětí po průřezu doménou budou vykresleny pro názornost za pomoci programu Microsoft Excel. Pomocí tohoto programu budou určeny také hodnoty průtoku a střední rychlosti z odvozených vzorců pro jednotlivé případy.

Průběhy rychlosti i smykového napětí budou ve všech případech porovnány s průběhy získanými z numerických simulací řešených CFD programem Fluent. O řešení pomocí Fluentu pojednává dále kapitola 7.

6.1 Newtonská kapalina

Popis proudění newtonské kapaliny vychází z Navier-Stokesovy rovnice. Obecně se jedná o rovnici silové rovnováhy viskózní kapaliny obecně vyjadřující zákon zachování hybnosti. Tato rovnice je platná neomezeně pro laminární proudění viskózní nestlačitelné kapaliny a je ji také možno použít pro popis okamžitého stavu turbulentního proudění. [5], [6]

Navier-Stokesova rovnice bude řešena v kartézských souřadnicích pro proudění mezi paralelními deskami a ve válcových souřadnicích pro proudění v kruhovém potrubí.

Je uvažována platnost rovnice kontinuity.

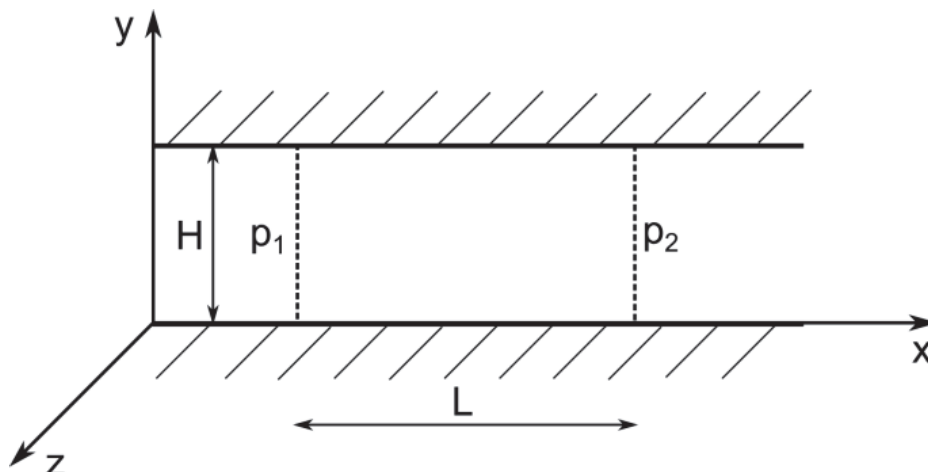
Analytické vztahy pro popis proudění newtonské kapaliny byly již odvozeny v mnoha různých publikacích věnujících se hydromechanice (např. [2], [5], [6]). V následující kapitole jsou uváděny již pouze finální tvary jednotlivých vztahů doplněny odvozením některých dílčích výrazů.

Pro řešení rovnic pomocí programu Microsoft Excel byly použity následující fyzikální parametry newtonské kapaliny – vody při 20°C.

$$\text{Hustota } \rho = 998,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$\text{Dynamická viskozita } \eta = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

6.1.1 Proudění v doméně popsané kartézským souřadným systémem



Obr. 13: Kartézský souřadný systém a schéma domény – statické desky.

Jsou uvažovány následující předpoklady:

- Jedná se o čistě laminární proudění.
- Jedná se o stacionární, tedy časově ustálené proudění.
- Jedná se o proudění nestlačitelné kapaliny.
- Uvažujeme 1D proudění ve směru osy x .
- Paralelní desky jsou ve směru z nekonečně dlouhé.
- Jedinou objemovou silou působící na kapalinu je síla gravitační F_g vznikající působením gravitačního zrychlení g .
- Jedná se o horizontální proudění a vliv gravitační síly je tedy zanedbáván.
- Proudění je způsobováno tlakovým spádem v ose x .

Obecný tvar Navier-Stokesovy rovnice uváděný například Janalíkem v [2] na str.41, nebo Brdičkou v [6] je (9).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{a}_0 \quad (9)$$

Jednotlivé členy Navier-Stokesovy rovnice mají následující význam [2]:

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ - Místní zrychlení. Změna rychlosti v čase.
- $\vec{v} \nabla \vec{v}$ - Konvektivní zrychlení. Změna rychlosti v rámci celého rychlostního pole. Tento člen vzniká jako důsledek použití Eulerova popisu kontinua.
- $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ - Zrychlení vyvolané tlakovým spádem.
- $\nu \nabla^2 \vec{v}$ - Zrychlení vznikající v důsledku viskozity kapaliny.
- \vec{a}_0 - Zrychlení vnějších objemových sil.

Navier-Stokesova může být několika kroky při uvažování výše zmíněných předpokladů upravena do tvaru (10).

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (10)$$

Po vynásobení rovnice (10) hustotou ρ , při uvažování platnosti výrazu (2) a provedení separace proměnných dostáváme rovnici (11).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (11)$$

Je očividné, že platí (12).

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

Z výrazu (12) plyne lineární tlaková závislost (13).

$$p = A + Bx \quad (13)$$

Zavádíme okrajové podmínky (14.1) a (14.2) a tyto dosazujeme do (13).

$$x = 0: p = p_1 \quad (14.1)$$

$$x = L: p = p_2 \quad (14.2)$$

Z okrajových podmínek získáme výrazy pro konstanty A a B (15.1) a (15.2).

$$A = p_1 \quad (15.1)$$

$$B = \frac{p_2 - p_1}{L} \quad (15.2)$$

Dosadíme-li (15.1) a (15.2) do rovnice (13) dostáváme pro tlak následující výraz.

$$p = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{L} x \quad (16)$$

Po upravení (16) a zavedení Δp jako rozdílu p_2 a p_1 získáme lineární tlakovou závislost (17).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L} \quad (17)$$

Tento výraz (17) je dosazen do rovnice (11) a tato je dvakrát integrována přes y . Výsledkem je rovnice (18), která je pro jednotlivé případy proudění mezi paralelními deskami řešena dosazením okrajových podmínek. Po dosazení okrajových podmínek

dostáváme rovnici rychlostního profilu newtonské kapaliny při proudění za daných podmínek.

$$v_x = -\frac{\Delta p}{2\eta L}y^2 + K_1y + K_2 \quad (18)$$

6.1.2 Proudění mezi statickými rovnoběžnými deskami

Analytické vztahy popisující proudění klasické Newtonovské kapaliny mezi paralelními deskami již byly mnohokrát publikovány.

Rovnice rychlostního profilu při proudění newtonské kapaliny mezi statickými paralelními deskami je podle Janalíka v [5] vyjádřena rovnicí (19).

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta L}y(H - y) \quad (19)$$

Jedná se o rovnici paraboly popisující parabolický rychlostní profil. Pro určení souřadnice odpovídající maximální rychlosti ve směru x je třeba položit derivaci v_x rovnu nule. Tato souřadnice je potom:

$$y_{vmax} = \frac{H}{2} \quad (20)$$

Což je ze symetrické podstaty této úlohy logické.

Průtok danou doménou je roven integrálu z v_x přes plochu domény S (21).

$$Q = \int_0^H v_x b \, dy \quad (21)$$

Pro průtok kapaliny mezi řešenými rovnoběžnými deskami při uvažování hloubky domény b uvádí Janalík v [5] na str. 55 vztah (22).

$$Q = \frac{\Delta p}{12\eta L}H^3 b \quad (22)$$

Střední profilová rychlost je obecně vyjádřena vztahem (23)

$$v_s = \frac{Q}{S} \quad (23)$$

S je v rovnici (23) plocha příčného průřezu domény. Tato plocha je pro uvažování případu paralelních desek vyjádřena vztahem (24).

$$S = Hb \quad (24)$$

Po dosazení (22) a (24) do rovnice (23) dostáváme výsledný vztah (25) pro střední profilovou rychlost, který je možno najít i v [5] na str. 55.

$$v_s = \frac{\Delta p}{12\eta L} H^2 \quad (25)$$

Pro popis laminárního proudění newtonské kapaliny je možno použít Newtonův zákon viskozity (1).

Rozložení smykového napětí v řešené doméně je potom při uvažování platnosti rovnice (1) a dosazení derivace rovnice (19) podle y dáno následujícím výrazem (26).

$$\tau = \frac{\Delta p}{L} \left(\frac{H}{2} - y \right) \quad (26)$$

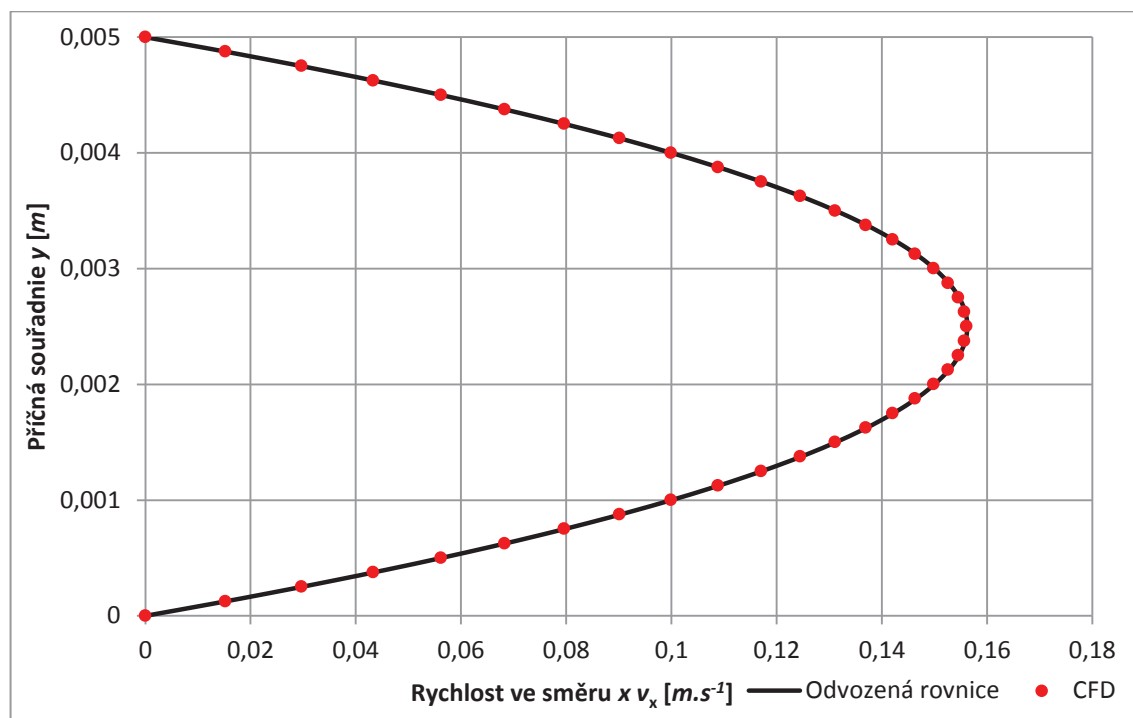
Rozměry této domény byly zavedeny následujícím způsobem.

Příčná vzdálenost desek $H = 0,005 \text{ m}$.

Šířka domény $b = 0,01 \text{ m}$.

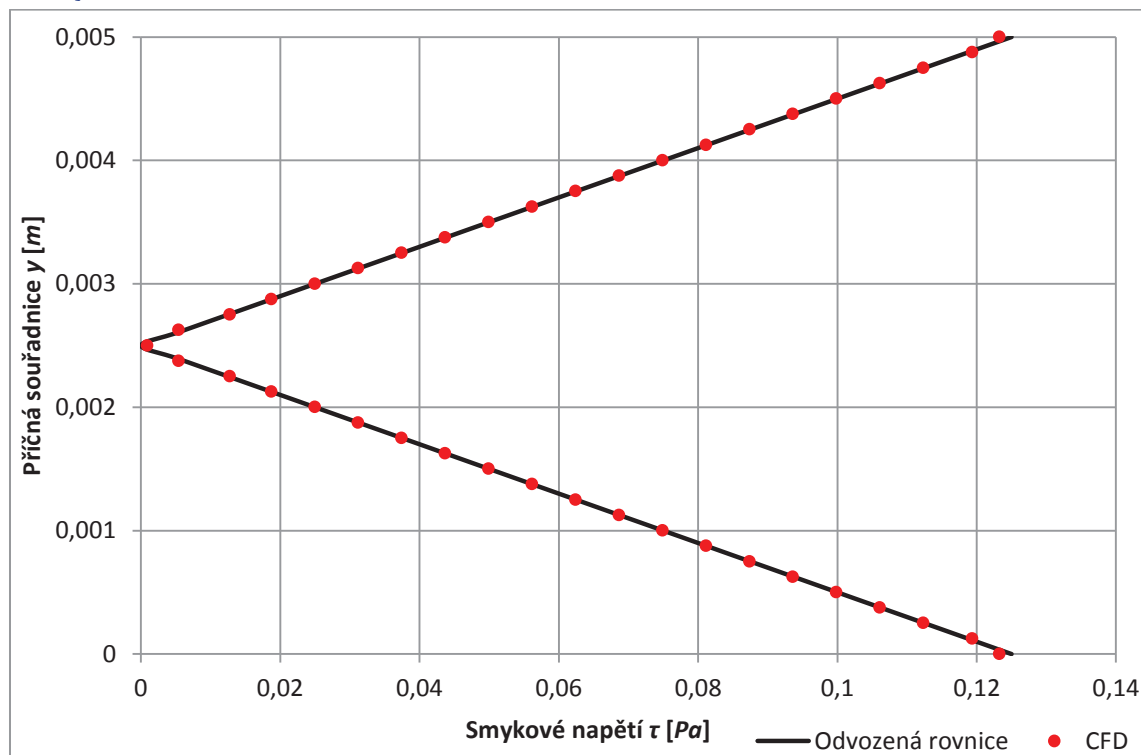
Tlakový spád Δp v doméně byl uvažován 50 Pa na 1 m délky L .

Rychlostní profil popsáný rovnicí (19) je vykreslen na Obr. 14. Červenými tečkami je vykreslen rychlostní profil získaný z Fluentu. Stejným způsobem budou hodnoty získané numerickým řešením interpertovány v kontextu s analytickými výsledky i v dalších případech.



Obr. 14: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.

Rozložení smykového napětí v této doméně popisuje rovnice (26), jeho průběh a srovnání s hodnotami spočtenými Fluentem je na Obr. 15.



Obr. 15: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.

Průtok doménou byl z rovnice (22) určen jako $Q = 5,2083 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední profilová rychlost je potom rovna podle (25) $v_s = 0,10412 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hydraulický průměr domény, který je obecně dán vzorcem (27) byl pro tuto doménu určen na hodnotu $D_H = 0,0067 \text{ m}$.

$$D_H = \frac{4S}{O} \quad (27)$$

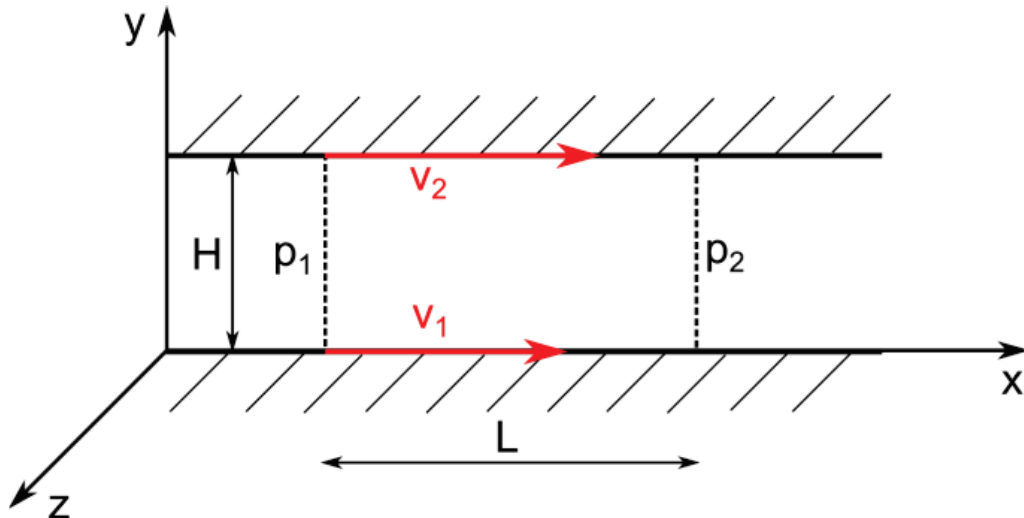
Kde S ve vzorci (27) značí průtočnou plochu a O značí omočený obvod domény.

Bezrozměrné Reynoldsovo číslo, jehož určením je možno ověřit, zda se jedná o laminární, přechodové, či turbulentní proudění je obecně definováno rovnicí (28).

$$Re = \frac{v_s D_H}{\nu} \quad (28)$$

Reynoldsovo číslo je potom pro dané parametry rovno hodnotě $Re = 693$, což je číslo dostatečně nízké a značí, že se s největší pravděpodobností jedná o laminární proudění. Použití daných rovnic je tedy adekvátní.

6.1.3 Proudění mezi pohyblivými rovnoběžnými deskami



Obr. 16: Kartézský souřadný systém a schéma domény – pohyblivé desky.

Pro odvození vztahů popisujících proudění newtonské kapaliny v této doméně je možno vycházet ze stejných rovnic jako v případě z kapitoly 6.1.2.

Jediný rozdíl oproti odvození uvedenému v již zmíněné kapitole 6.1.2. je v okrajových podmínkách platných pro danou úlohu.

Janalík řeší v [5] případ, kdy je proudění mezi paralelními deskami vyvoláno tlakovým spádem a zároveň pohybem jedné ze stěn. Vztahy uvedené v této kapitole jsou rozšířeny na možnost pohybu obou desek. Rychlost pohybu desek může mít v tomto případě v rámci směru x libovolnou orientaci, stejně tak jako může být nulová. V případě nulové v_1 i v_2 se dále odvozené vztahy zjednodušují na vztahy uvedené v kapitole 6.1.2.

Okrajové podmínky pro případ obou pohyblivých desek jsou definovány následujícím způsobem:

$$y = 0: v_x = v_1 \quad (29.1)$$

$$y = H: v_x = v_2 \quad (29.2)$$

Po aplikaci okrajových podmínek (29.1) a (29.2) do rovnice (18) dostáváme rovnici (30) popisující rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny mezi pohybujícími se paralelními deskami.

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta L} y(H - y) + \frac{y}{H} (v_2 - v_1) + v_1 \quad (30)$$

Položíme-li derivaci v_x podle y opět rovnu nule, získáváme souřadnici y_{vmax} odpovídající maximu rychlosti v rychlostním profilu.

$$y_{vmax} = \frac{\eta L}{H\Delta p} (v_2 - v_1) + \frac{H}{2} \quad (31)$$

Při uvažování hloubky domény b je průtok možno určit obdobně jako v předchozí kapitole, tedy integrací v_x přes plochu domény S .

$$Q = \frac{\Delta p}{12\eta L} H^3 b + Hb \left[\frac{(v_2 - v_1)}{2} + v_1 \right] \quad (32)$$

Střední průřezová rychlost je pro tento případ vyjádřena rovnicí (33).

$$v_s = \frac{\Delta p}{12\eta L} H^2 + \frac{(v_2 - v_1)}{2} + v_1 \quad (33)$$

Po aplikaci Newtonova zákona viskozity (1) dostáváme pro popis rozložení smykového napětí mezi pohybujícími se paralelními deskami rovnicí (34).

$$\tau = \frac{\Delta p}{L} \left(\frac{H}{2} - y \right) + \frac{\eta}{H} (v_2 - v_1) \quad (34)$$

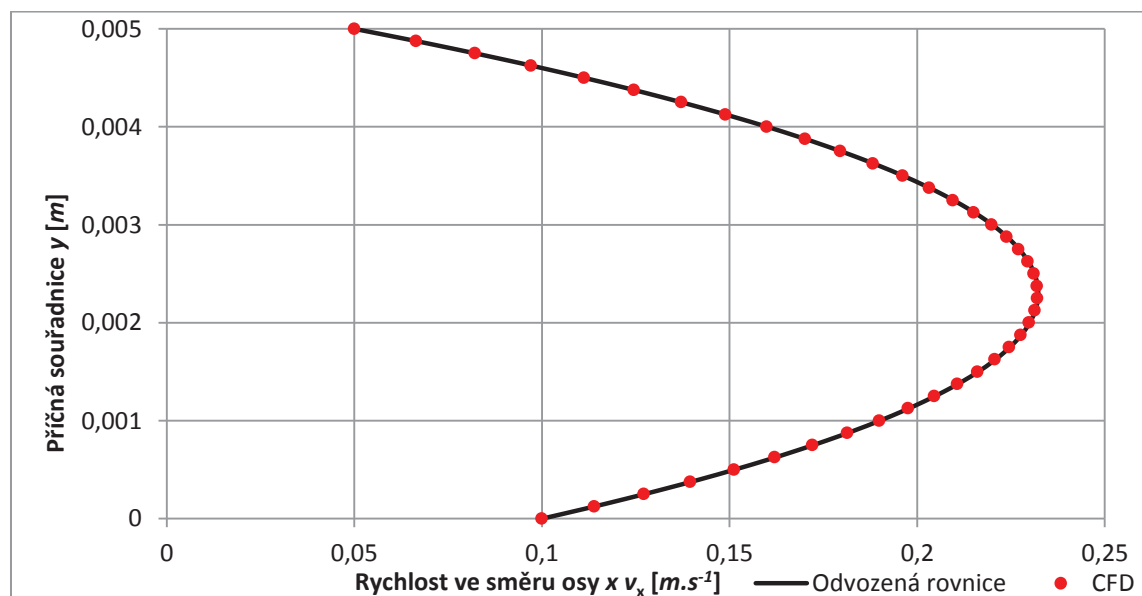
Rozměry domény zůstávají stejné jako v případě statických desek. Stejně tak velikost tlakového spádu.

Rychlost pohybu desek byla uvažována tak, jak je dále uvedeno.

Rychlost posunu spodní stěny $v_1 = 0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

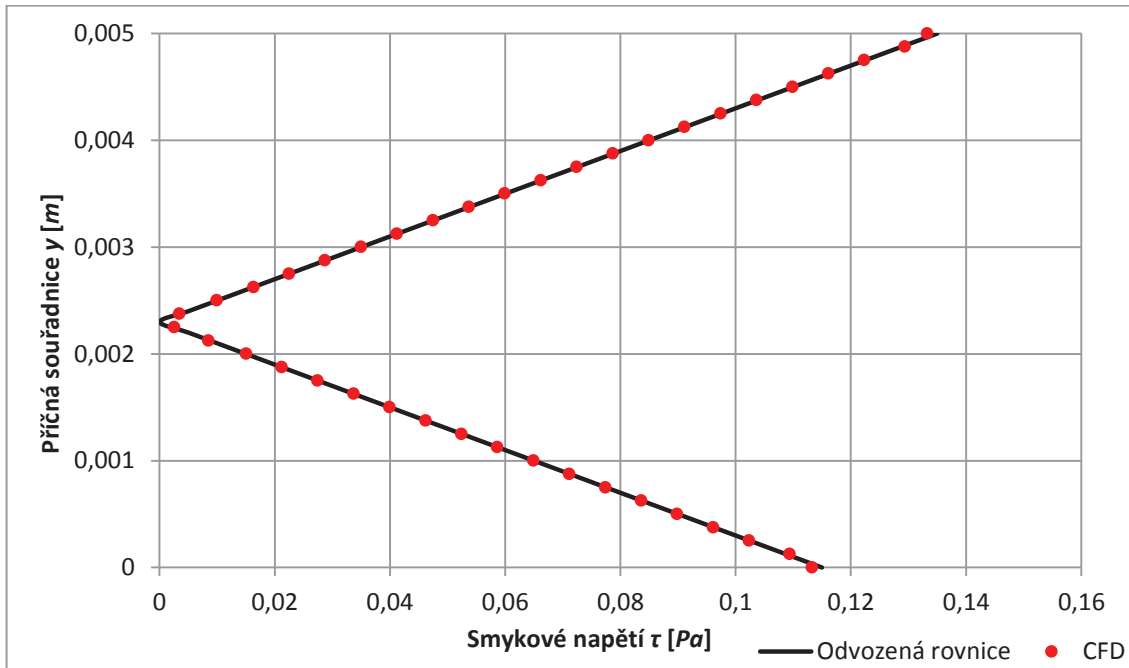
Rychlost posunu horní stěny $v_2 = 0,05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Rychlostní profil mezi pohybujícími se paralelními deskami je na základě rovnice (30) vykreslen na Obr. 17.



Obr. 17: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny mezi pohybujícími paralelními deskami.

Smykové napětí pro tento případ popisuje rovnice (34). Rozložení smykového napětí získané z rovnice (34) je vykresleno na Obr. 18.



Obr. 18: rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.

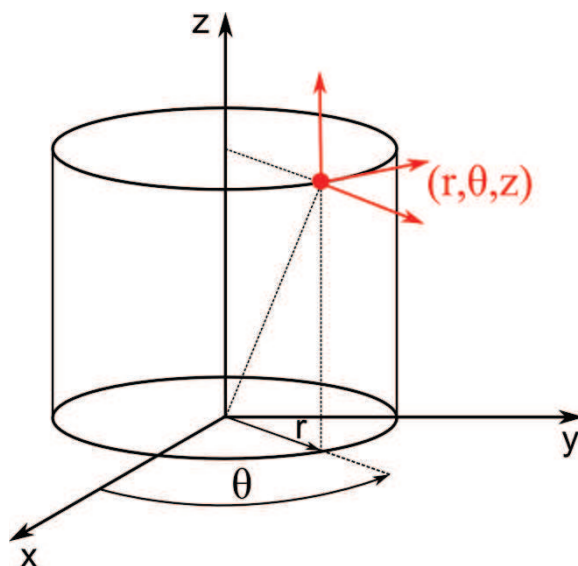
Průtok doménou je podle (32) pro tento případ roven $Q = 8,9583 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Hodnota střední profilové rychlosti byla potom určena z (33) jako $v_s = 0,1792 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hydraulický průměr této domény zůstává stejný jako v případě nepohyblivých desek.

Reynoldsovo číslo je v tomto případě rovno hodnotě $Re = 1192$, což je stále oblast laminárního proudění.

6.1.4 Proudění v doméně popsané válcovými souřadnicemi



Obr. 19: Válcový souřadný systém.

Pro proudění v této doméně jsou opět zaváděny následující předpoklady.

- Jedná se o čistě laminární proudění.
- Jedná se o stacionární, tedy časově ustálené proudění.
- Jedná se o proudění nestlačitelné kapaliny.
- Uvažujeme 1D proudění ve směru osy válce z .
- Jedinou objemovou silou působící na kapalinu je síla gravitační vznikající působením gravitačního zrychlení.
- Válec je horizontálně uložen. Jedná se o horizontální proudění a vliv gravitační síly je tedy zanedbáván.
- Proudění je způsobováno tlakovým spádem ve směru osy potrubí z .

Vychází se, stejně jako v případě proudění mezi paralelními deskami, z Navier-Stokesovy rovnice, která je pro tento případ transformována do válcových souřadnic. Místo souřadnic x, y, z , obsahuje válcový souřadný systém následující souřadnice:

- r - Ve směru kolmém na osu válce. Udává vzdálenost od osy válce z .
- z - Ve směru osy válce. Udává polohu na ose válce.
- θ - Úhlová souřadnice. Udává velikost úhlu mezi osou x a průmětem průvodiče bodu do roviny xy .

Ze tří složek Navier-Stokesovy rovnice je nejdůležitější ta do směru osy potrubí, tedy do směru z . Tato složka má ve válcových souřadnicích následující tvar (35). Složky příslušející souřadnicím r a θ zde nejsou uvedeny, jelikož nejsou pro řešení na základě výše zmíněných předpokladů důležité.

$$\frac{\partial v_z}{t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f_z \quad (35)$$

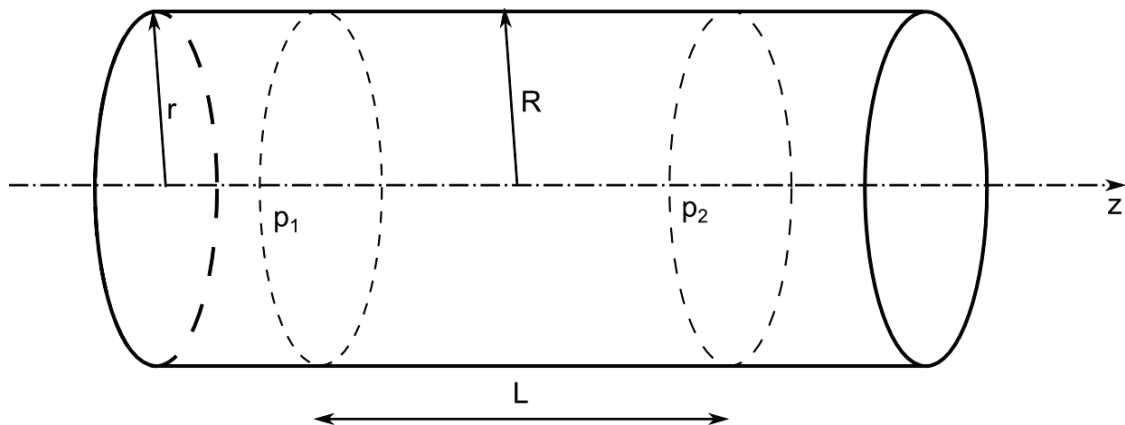
Výsledný tvar Navier-Stokesovy rovnice, který je dále řešen je (36).

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \quad (36)$$

Tato rovnice je dále řešena metodou variace konstanty. Rovnice (37) je potom obecným vyjádřením rozložení rychlostního pole při proudění v doméně popsané válcovými souřadnicemi.

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + K_1 \ln r + K_2 \quad (37)$$

6.1.5 Proudění v obecném kruhovém potrubí



Obr. 20: Orientace domény ve válcovém souřadném systému – kruhové potrubí.

Řešení tohoto problému uvádí kromě mnoha jiných autorů i Janalík v [2] a [5].

Výsledný tvar rovnice popisující rychlostní profil v kruhovém potrubí je podle Janalíka [2] na straně 45. dán vztahem (38).

$$v_z = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2) \quad (38)$$

Průtok je odvozen z následující obecně platné rovnice (39).

$$Q = \int_0^R v_z 2\pi r dr \quad (39)$$

Po dosazení rovnice (38) do rovnice (39) a zintegrování je získán pro průtok Q výraz (40).

$$Q = \frac{\Delta p}{8L\eta} \pi R^4 \quad (40)$$

Janalík uvádí tento vzorec (40) v [2] odvozený pro průměr potrubí d na str. 45.

Postup určení střední profilové rychlosti je stejný jako v případě paralelních desek. Do rovnice (23) je za průtok dosazen vztah (40). Plocha příčného průřezu je pro kruhové potrubí rovna (41).

$$S = \pi R^2 \quad (41)$$

Střední rychlost je potom dána rovnicí (42).

$$v_s = \frac{\Delta p}{8L\eta} R^2 \quad (42)$$

Pro smykové napětí uvádí Janalík opět v [2] na straně 44. Rovnicí (43).

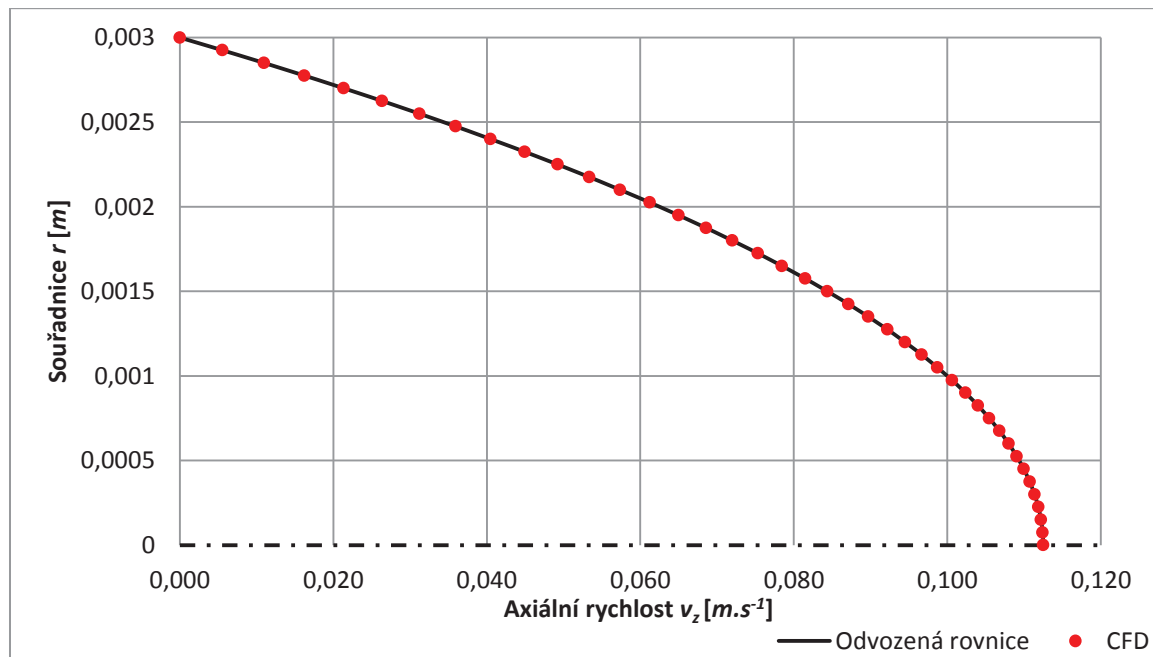
$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} r \quad (43)$$

Poloměr potrubí, kterým proudí newtonská kapalina, je uvažován jako $R = 0,003 \text{ m}$.

Vzhledem k tomu, že je doména i proudění v ní rotačně symetrické kolem osy potrubí z, veškeré průběhy hodnot jsou vykresleny pouze v rotačně symetrickém řezu.

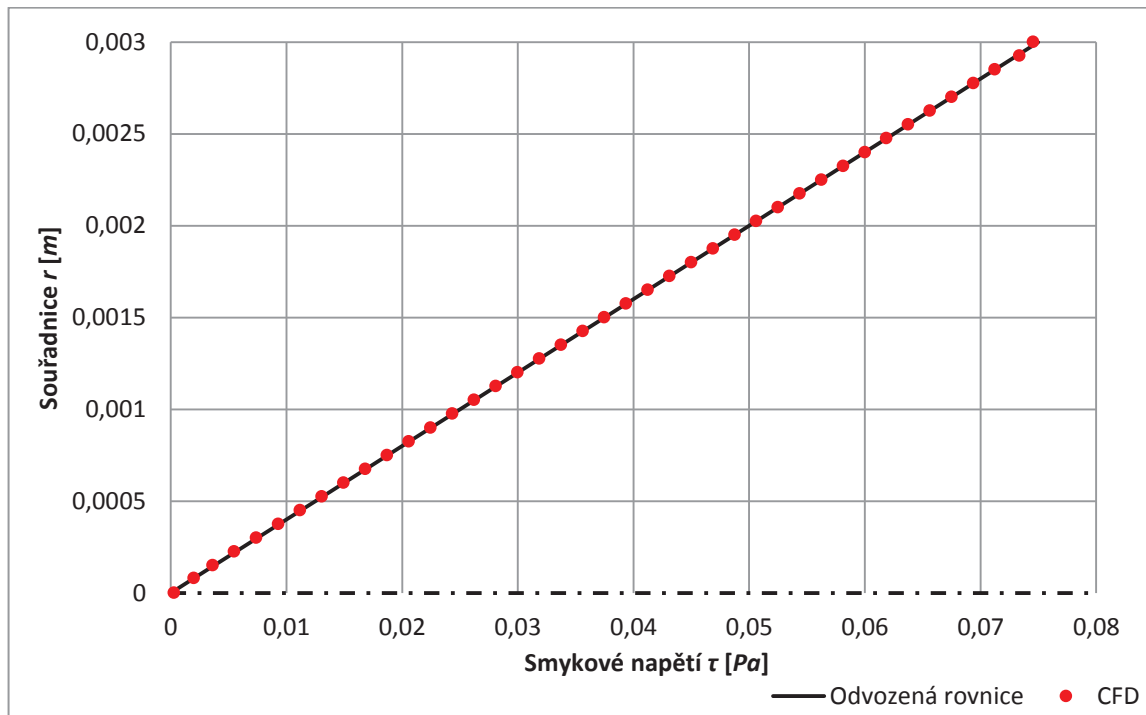
Tlakový spád je uvažován opět 50 Pa na 1 m délky L .

Rychlostní profil vykreslený na *Obr. 21*, je pro případ kruhového potrubí popsán rovnicí (38). Červeně jsou opět značeny výsledky získané z Fluentu.



Obr. 21: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí.

Pro popis rozložení smykového napětí v této doméně byla odvozena rovnice (43). Průběh smykového napětí je na *Obr. 22*.



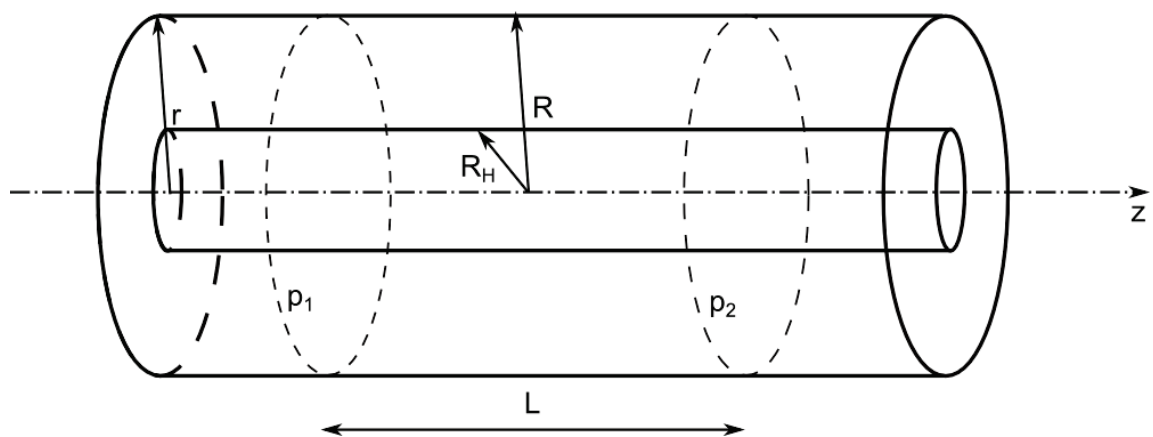
Obr. 22: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí.

Průtok potrubím byl pro dané parametry z (40) určen na hodnotu $Q = 1,594 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední rychlost je potom $v_s = 0,0563 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je dáno rovnicí (42).

Pro ověření laminárního proudění v doméně bylo opět určeno Reynoldsovo číslo, které je při proudění v tomto potrubí při těchto parametrech rovno $Re = 318$.

6.1.6 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem



Obr. 23: Kruhové potrubí se statickým hřídelem.

V tomto případě je v ose kruhového potrubí vložen nepohybující se hřídel. Tekutina tedy proudí pouze mezikružím mezi stěnou hřídele a stěnou potrubí.

Stejně jako v kapitole 6.1.5 se při odvození rovnice rychlostního profilu vychází z rovnice (37). Pro případ se statickým hřídelem jsou zavedeny rozdílné okrajové podmínky (44.1), (44.2).

$$r = R_H: v_z = 0 \quad (44.1)$$

$$r = R: v_z = 0 \quad (44.2)$$

Kde R_H je poloměr vloženého hřídele a R poloměr potrubí, v němž je hřídel vložen.

Okrajové podmínky jsou dosazeny do rovnice (37) a je získán tvar integračních konstant (45.1) a (45.2) pro okrajové podmínky (44.1) a (44.2).

$$K_1 = -\frac{\Delta p}{4L\eta} (R_H^2 - R^2) \frac{1}{\ln \frac{R}{R_H}} \quad (45.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4L\eta} R_H^2 + \frac{\Delta p}{4L\eta} (R_H^2 - R^2) \frac{\ln R_H}{\ln \frac{R}{R_H}} \quad (45.2)$$

Výsledný tvar rovnice rychlostního profilu při proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem je ve tvaru (46).

$$v_z = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R_H^2 - r^2) + \frac{\Delta p}{4L\eta} A \ln \frac{R_H}{r} \quad (46)$$

Konstanta A v rovnici (46) je zavedena jako:

$$A = \frac{(R_H^2 - R^2)}{\ln \frac{R}{R_H}} \quad (47)$$

Při určení průtoku vycházíme z rovnice (48). Za v_z v této rovnici dosazujeme výraz (46). Po jistých úpravách a zintegrování získáme rovnici (49) pro určení průtoku Q .

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} v_z 2\pi r dr \quad (48)$$

$$Q = \frac{\Delta p \pi}{4L\eta} [R_H^2 (R^2 - R_H^2) + 0,5 (R_H^4 - R^4) + A \ln(R_H) (R^2 - R_H^2) + A \{R_H^2 (\ln(R_H) - 0,5) - R^2 (\ln(R) - 0,5)\}] \quad (49)$$

Určení střední rychlosti je obdobné jako v předchozím případě. Do rovnice (23) je za průtok dosazen výraz (49) a za S plocha příčného průřezu domény (50).

$$S = \pi (R^2 - R_H^2) \quad (50)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o integrální charakteristiku a je poměrně jednoduché hodnotu střední rychlosti numericky vyčíslit, není zde finální rovnice pro určení střední rychlosti z důvodu složitosti explicitně uvedena.

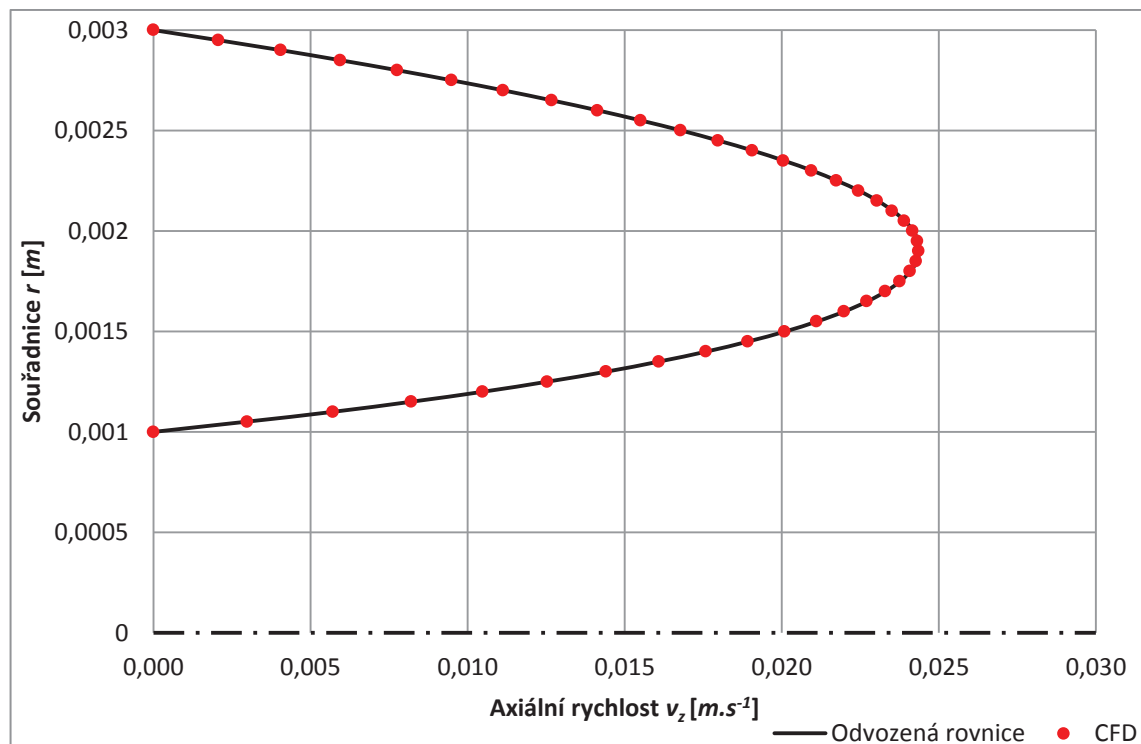
Po dosazení $\frac{dv_z}{dr}$ pro daný případ do rovnice (1) získáme rovnici (51) popisující smykové napětí.

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L}r + \frac{\Delta p}{4L}A\frac{1}{r} \quad (51)$$

V případě proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem je uvažováno stejné potrubí jako v předchozím v případě a v jeho ose je vložen statický hřídel o poloměru $R_H = 0,001 \text{ m}$.

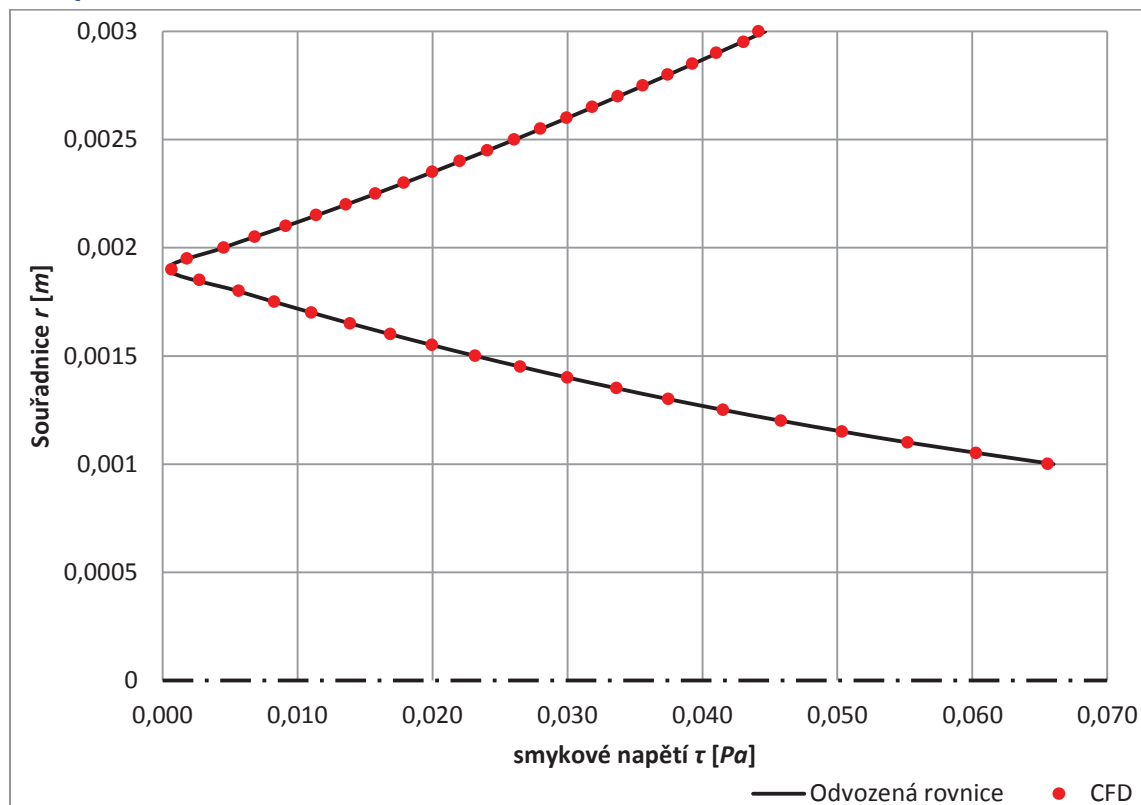
Spojitou černou čarou je opět značen průběh získaný z odvozených rovnic a červenými body jsou vyneseny hodnoty získané numerickou simulací.

Rychlostní profil je v tomto případě popsán rovnicí (46) a je znázorněn na Obr. 24.



Obr. 24: Rychlostní profil newtonské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.

Průběh smykového napětí v absolutní hodnotě popsáný rovnicí (51) je vyneseno spolu s hodnotami získanými numerickým výpočtem ve Fluentu na obrázku Obr. 25.



Obr. 25: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.

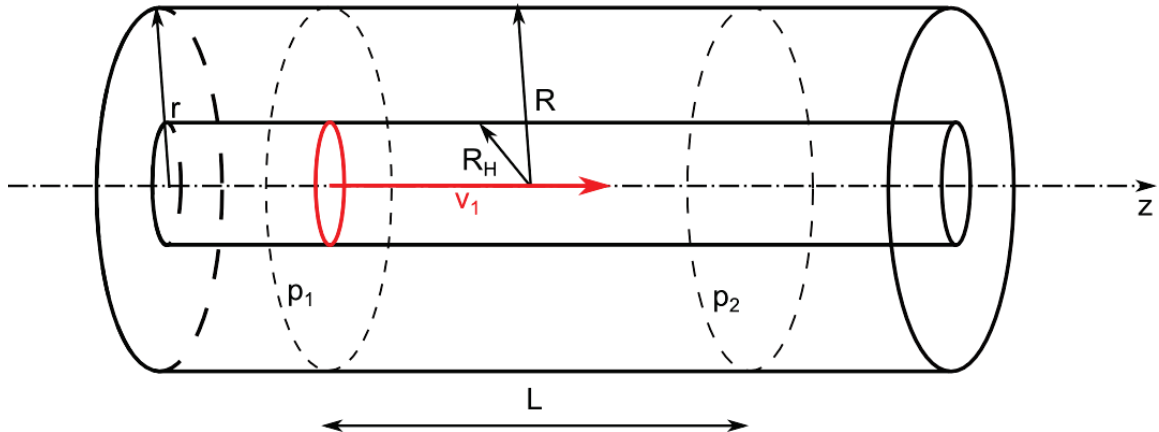
Průtok řešenou doménou byl pro tento případ ze vzorce (49) určen následovně.

$$Q = 4,0359 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Střední profilová rychlost byla určena na hodnotu $v_s = 0,0161 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vzhledem k tomu, že hraniční Reynoldsovo číslo pro přechod z laminárního do turbulentního proudění při proudění v mezikruží neodpovídá hodnotám, které je možno uvažovat při proudění v klasickém kruhovém potrubí, byla Reynoldsova čísla pro tento příklad určována jen orientačně a snahou bylo zavést veškeré parametry tak, aby se toto číslo pohybovalo v nízkých hodnotách, řádově v desítkách až stovkách.

6.1.7 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem



Obr. 26: Kruhové potrubí s taženým hřídelem.

V tomto případě je v ose kruhového potrubí vložen hřídel tažený konstantní rychlostí v_1 . Tekutina tedy proudí pouze mezikružím mezi stěnou hřídele a stěnou potrubí a její pohyb je ovlivňován i pohybem hřídele.

Postup odvození popisu proudění je naprosto shodný s případem statického hřídele. Rozdíl je samozřejmě v okrajových podmínkách.

$$r = R_H: v_z = v_1 \quad (52.1)$$

$$r = R: v_z = 0 \quad (52.2)$$

Kde v_1 je rychlost tažení vloženého hřídele.

Integrační konstanty K_1 a K_2 jsou v tomto případě rovny následujícím výrazům (53.1) a (53.2).

$$K_1 = \frac{v_1 - \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - R_H^2)}{\ln \frac{R_H}{R}} \quad (53.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2 - (v_1 - \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - R_H^2)) \frac{\ln R}{\ln \frac{R_H}{R}} \quad (53.2)$$

Rychlostní profil je potom popsán rovnicí (54).

$$v_z = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2) + K_1 \ln \frac{r}{R} \quad (54)$$

Z důvodu složitosti tvaru integrační konstanty K_1 a za účelem zpřehlednění jednotlivých rovnic není tato v rovnici (54), (55) a ani (56) explicitně vyjadřována.

Postup odvození rovnice pro výpočet průtoku (55) je stejný jako v kapitole 6.1.6.

$$Q = \frac{\Delta p}{4L\eta} \pi [R^2(R^2 - R_H^2) + 0,5(R_H^4 - R^2)] + \pi K_1 [\ln(R)(R_H^2 - R^2) + R^2(\ln(R) - 0,5) - R_H^2(\ln(R_H) - 0,5)] \quad (55)$$

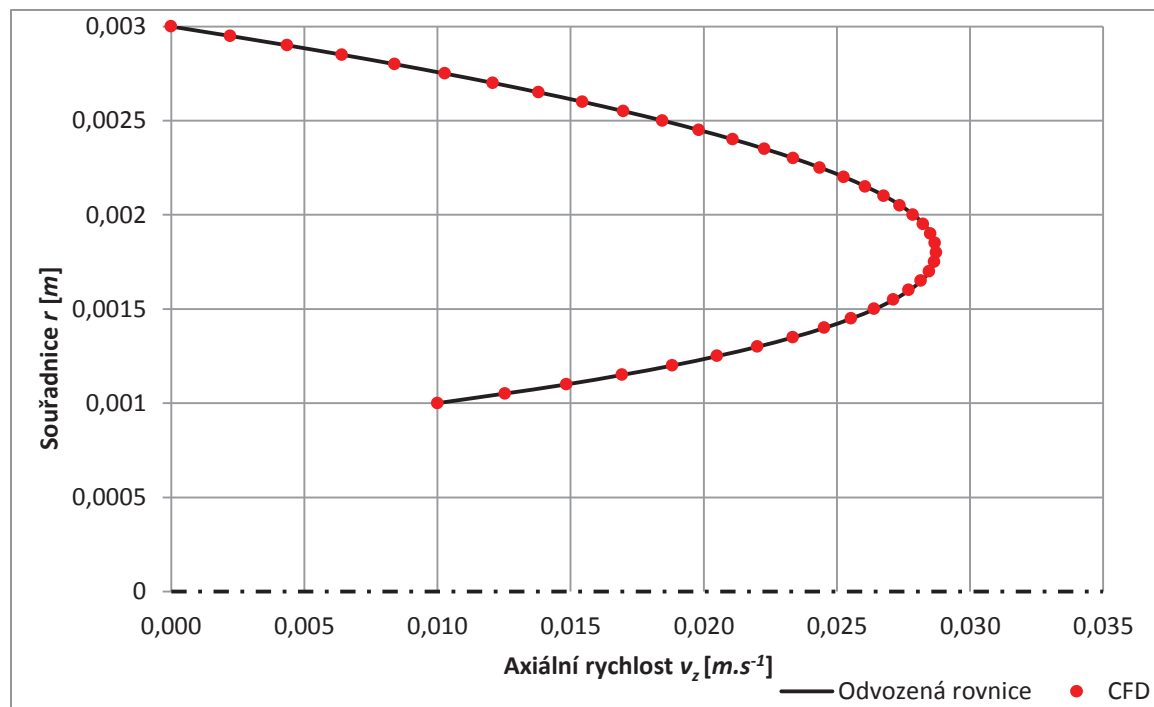
Pro určení střední rychlosti platí to stejné jako v předchozí kapitole 6.1.6. Do rovnice (23) je za průtok dosazena rovnice (55) a plocha příčného průřezu je určena stejně jako v kapitole 6.1.6.

Postup pro odvození rovnice smykového napětí (56) je opět stejný jako v případě předchozí kapitoly, s rozdílným výrazem pro $\frac{dv_z}{dr}$.

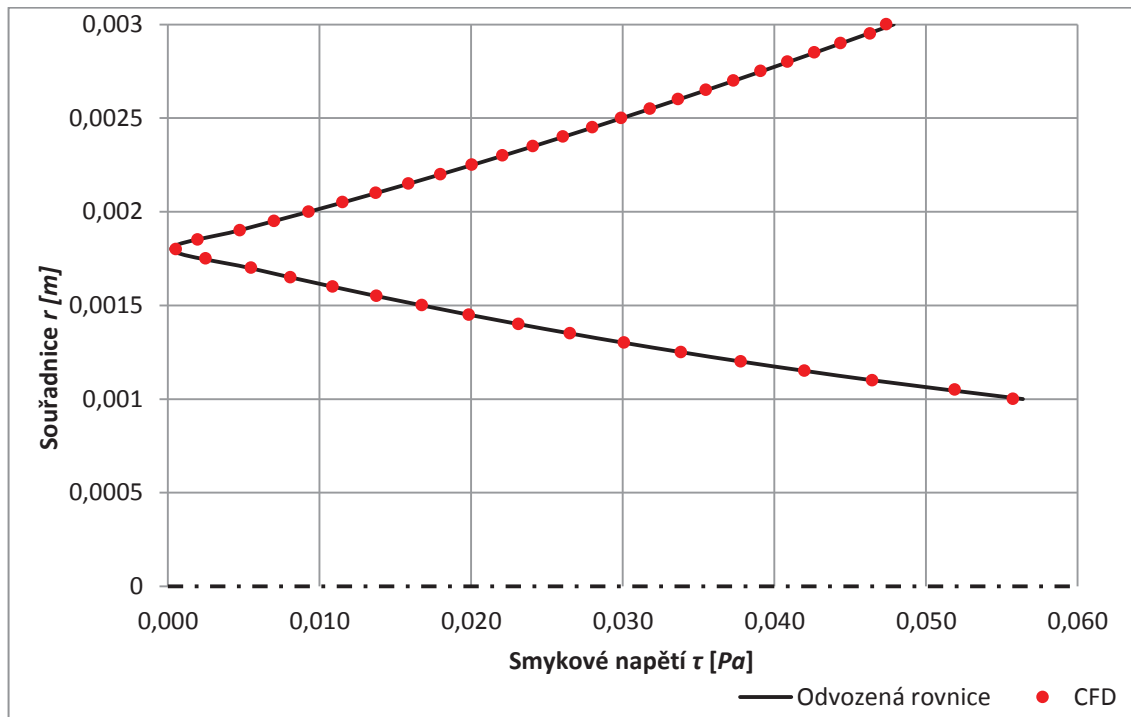
$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} r - \eta K_1 \frac{1}{r} \quad (56)$$

Rozměry domény, parametry kapaliny i tlakový spád zůstávají stejné jako v případě potrubí s vloženým statickým hřídelem. Jediným rozdílem pro případ řešený v této kapitole je, že se hřídel pohybuje konstantní rychlostí $v_I = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$ ve směru osy z.

Výsledky jsou dále opět znázorněny graficky.



Obr. 27: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen rychlostí 0,01 m/s.



Obr. 28: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen rychlostí 0,01 m/s.

Průtok je pro tento případ určen rovnicí (55) a byl vyčíslen na následující hodnotu.

$$Q = 4,86564 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Střední profilová rychlost byla potom určena na hodnotu $v_s = 0,0194 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro Reynoldsovo číslo platí to samé co pro doménu řešenou v předchozí kapitole.

6.2 Binghamská kapalina

Je zřejmé, že Newtonův zákon viskozity (1) již v tomto případě není možné použít. Z toho plyne, že není možné při odvození vycházet z Navier-Stokesovy rovnice. Navier-Stokesova rovnice je pro newtonskou kapalinu odvozena ze silové rovnováhy elementu kapaliny aplikací Newtonovy rovnice viskozity na tuto rovnici. Pro popis proudění binghamské kapaliny je třeba taktéž sestavit rovnici rovnováhy elementu kapaliny, ovšem na ni musí být aplikována rovnice viskozity binghamské kapaliny (57). Tato rovnice byla v této práci již zmíněna dříve a zde je znovu uváděna pro přehlednost.

$$\tau = \tau_0 \pm \eta_B \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (57)$$

Proudění binghamské tekutiny bylo simultánně s touto prací řešeno prof. Ing. Františkem Pochylým, CSc. a Ing. Hanou Krausovou. Některé závěry je tedy možno dohledat i v této výzkumné zprávě, která v době vypracování této práce ještě nebyla publikována.

Parametry binghamské kapaliny jsou získány z [9]. Je tedy řešena magnetická kapalina s konstantními parametry (při konstantní nebo nulové hodnotě magnetické indukce působícího magnetického pole). Tato kapalina je pro tento případ považována za ideální binghamskou kapalinu. Jedná se o parametry kapaliny popisované v [9] s objemovým zlomkem nanočástic 0,04 bez působení magnetického pole.

Binghamská viskozita $\eta_B = 0,0405 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Mez tečení $\tau_0 = 1,09 \text{ Pa}$.

Rozměry domény a stejně tak velikost tlakového spádu byly přizpůsobeny parametrům řešené kapaliny s ohledem na vypovídací hodnotu vykreslovaných veličin.

6.2.1 Obecné odvození pohybové rovnice binghamské kapaliny v kartézských souřadnicích

Obecnou rovnici silové rovnováhy elementu kapaliny je možno zapsat ve tvaru (58).

$$pdydb - \left(y + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydb + \tau dxdb - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dxdb = 0 \quad (58)$$

Kde db v rovnici (58) vyjadřuje délkový element ve směru šířky domény.

Po roznásobení a upravení rovnice (58) dostáváme diferenciální rovnici silové rovnováhy v kartézských souřadnicích (59).

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

Za derivaci smykového napětí podle souřadnice y je dosazena derivace rovnice (57), která vypadá následovně.

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\eta_B \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

V kapitole 6.1.2 byl odvozen výraz pro lineární tlakovou závislost (17), který je taktéž dosazen do rovnice (59). Po těchto úpravách dostáváme rovnici (60).

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\eta_B L} \quad (60)$$

Rovnice je dvakrát integrována přes souřadnici y a výsledkem je rovnice rychlostního profilu pro binghamskou kapalinu v kartézských souřadnicích (61).

$$v_x = -\frac{\Delta p}{2\eta_B L} y^2 + K_1 y + K_2 \quad (61)$$

6.2.2 Proudění mezi statickými rovnoběžnými deskami

Řešenou doménu je třeba rozdělit do tří oblastí.

Oblast I.: $y \in < 0; Y_0 >$

Kapalina vykazuje lineární chování.

Oblast II.: $y \in < Y_0; Y_1 >$

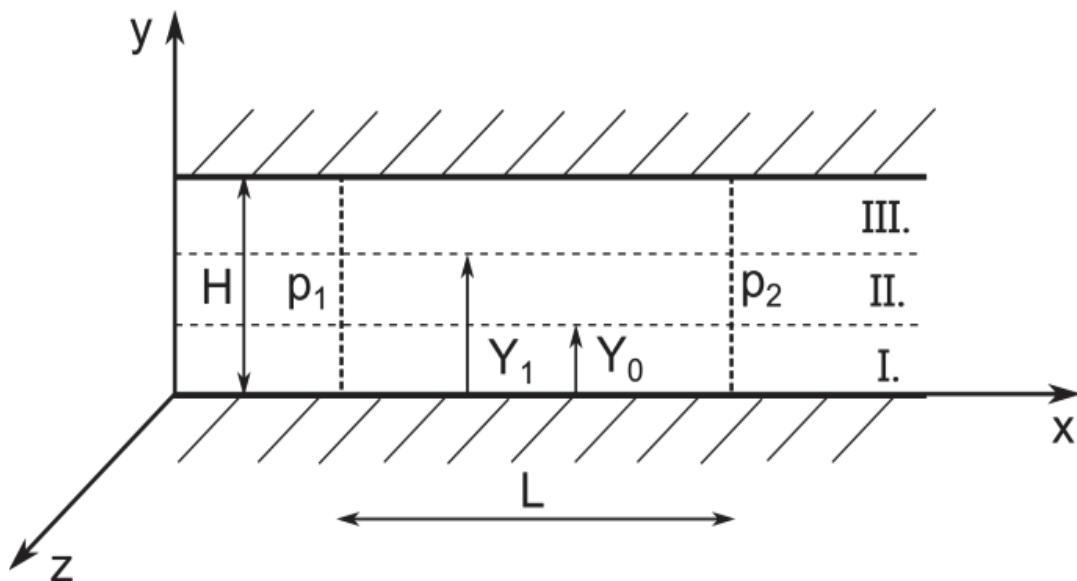
V celé této oblasti je smykové napětí $\tau = \tau_0$.

Rychlost je v celé oblasti II. konstantní.

Jedná se o oblast, kde kapalina proudí jako pevné těleso. Jinými slovy musí platit, že derivace rychlosti ve směru x podle souřadnice y je v celém tomto intervalu nulová.

Oblast III.: $y \in < Y_1; H >$

Kapalina vykazuje lineární chování. Je to oblast, v níž je proudění zrcadlově totožné s prouděním v oblasti I.



Obr. 29: Statické paralelní desky – binghamská kapalina.

Odvození rovnic popisujících proudění mezi statickými paralelními deskami vychází z rovnice (61) odvozené v předchozí kapitole.

Okrajové podmínky se pro tento případ podstatně liší od podmínek uváděných v předchozích kapitolách. Pro oblast I. je možno formulovat okrajové podmínky (62.1) a (62.2).

$$y = 0: v_x = 0 \quad (62.1)$$

$$y = Y_0: \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (62.2)$$

Na přechodu mezi oblastí I. a II. a oblastí II. a III. Musí být rychlostní profil spojitý a musí zde být tečné napojení, z čehož vyplývá okrajová podmínka (62.2).

Po dosazení okrajových podmínek (62.1) a (62.2) do rovnice (61) dostáváme vyjádření integračních konstant K_1 (63.1) a K_2 (63.2) a následně rovnici rychlostního profilu v intervalu I. (64).

$$K_1 = 0 \quad (63.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{\eta L} Y_0 \quad (63.2)$$

Rovnice rychlostního profilu má pro oblast $y \in < 0; Y_0 >$ následující tvar.

$$v_x = \frac{\Delta p}{\eta L} \left(Y_0 y - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (64)$$

Postup odvození rovnice rychlostního profilu pro oblast III. je naprosto identický s výše uvedeným postupem odvození pro oblast I.

Okrajové podmínky platné pro oblast III. jsou tyto:

$$y = Y_1: \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (65.1)$$

$$y = H: v_x = 0 \quad (65.2)$$

Pro integrační konstantu K_1 v tomto případě platí výraz (66.1).

$$K_1 = \frac{\Delta p}{\eta L} H^2 - K_2 H \quad (66.1)$$

Integrační konstanta K_2 je rovna výrazu (66.2).

$$K_2 = \frac{\Delta p}{\eta L} Y_1 \quad (66.2)$$

Rovnice rychlostního profilu v oblasti III. je vyjádřena rovnicí (67).

$$v_x = \frac{\Delta p}{\eta L} \left[\frac{1}{2} (H^2 - y^2) + Y_1 (y - H) \right] \quad (67)$$

Správnost rovnic (64) a (67) je možno dokázat ověřením rovnosti rychlostí na obou hranicích pevného jádra. Musí tedy platit (68).

$$v_{xI}(Y_0) = v_{xIII}(Y_1) \quad (68)$$

Dále platí:

$$Y_1 = H - Y_0 \quad (69)$$

Po dosazení Y_0 za y do rovnice (64), dosazení Y_1 za y v rovnici (67) a po zavedení výrazu (69), který plyne ze symetrie rychlostního profilu kolem střední roviny domény, dostáváme rovnost (70), kterou byla ověřena správnost rovnic (64) a (67).

$$\frac{1}{2} Y_0^2 = \frac{1}{2} Y_0^2 \quad (70)$$

Hranice pevného jádra Y_0 a Y_1 jsou pro nás v tuto chvíli stále neznámé. Víme ale, že v celé oblasti II. (včetně Y_0 a Y_1) je smykové napětí rovno τ_0 . Na základě této úvahy je možno formulovat silovou rovnováhu pro pevné jádro (71) a z této určit Y_1 a Y_0 .

$$\Delta p(Y_1 - Y_0) = 2L\tau_0 \quad (71)$$

Z rovnice (71) plyne, že:

$$Y_1 - Y_0 = \frac{2L\tau_0}{\Delta p} \quad (72)$$

Po dosazení rovnice (69) do (72) jsme již schopni určit obě hranice pevného jádra.

$$Y_0 = \frac{H}{2} - \frac{\tau_0 L}{\Delta p} \quad (73)$$

$$Y_1 = \frac{H}{2} + \frac{\tau_0 L}{\Delta p} \quad (74)$$

Odsud je možno určit šířku samotného pevného jádra δ .

$$\delta = \frac{2L\tau_0}{\Delta p} \quad (75)$$

Na základě rovnice (75) je možno říci, že tloušťka pevného jádra je lineární závislostí na τ_0 , a reciprokou závislostí na velikosti tlakového spádu. Z výše zmíněného vyplývá, že tloušťka pevného jádra není pro danou binghamskou kapalinu při proudění způsobeném pouze konstantním tlakovým spádem závislá na tvaru a velikosti domény, v níž kapalina proudí.

Z tvaru rovnic (73) a (74) také plyne, že je pevné jádro pro tento případ vždy symetrické kolem střední roviny řešené domény, která je v tomto případě dána souřadnicí $y = \frac{H}{2}$.

Jak již bylo výše řečeno, rychlost v_x v oblasti II. je konstantní a je ji možno určit například ze vztahu (76).

$$v_{xII} = \frac{\Delta p}{2\eta L} Y_0^2 \quad (76)$$

Průtok celou doménou je při uvažování tloušťky domény b určen součtem průtoků všemi třemi oblastmi. Platí tedy (77).

$$Q = Q_I + Q_{II} + Q_{III} \quad (77)$$

Pro jednotlivé průtoky platí rovnice (78.1), (78.2) a (78.3).

$$Q_I = \frac{\Delta p}{3\eta L} Y_0^3 b \quad (78.1)$$

$$Q_{II} = \frac{\Delta p}{2\eta L} Y_0^2 b (Y_1 - Y_0) \quad (78.2)$$

$$Q_{III} = \frac{\Delta p}{3\eta L} b (H^3 - H_1^3) - \frac{\Delta p}{2\eta L} Y_1^2 H^2 b + \frac{\Delta p}{\eta L} b (Y_1^2 H + \frac{1}{2} H^2 Y_1) \quad (78.3)$$

Střední profilová rychlost je potom podobně jako v předchozích kapitolách věnujících se proudění newtonské kapaliny určena rovnicí (23). Plocha domény je, stejně jako v kapitole 6.1.2, vyjádřena vztahem (24).

Při odvození rozložení smykového napětí po profilu vycházíme z rovnice (57). Smykové napětí je opět nutno řešit na každém z dříve zavedených intervalů zvlášť.

Rovnice profilu rychlosti v oblasti I. a III. jsou derivovány podle y a dosazeny do (57).

Interval I.:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\Delta p}{\eta L} Y_0 - \frac{\Delta p}{\eta L} y = \frac{\Delta p}{\eta L} (Y_0 - y)$$

Smykové napětí na tomto intervalu je potom rovno (79).

$$\tau = \tau_0 + \frac{\Delta p}{L} (Y_0 - y) \quad (79)$$

Pro určení hodnoty smykového napětí na spodní stěně dosadíme do rovnice (79) za y souřadnici spodní stěny, která je pro daný souřadný systém rovna nule.

$$\tau = \tau_0 + \frac{\Delta p}{L} Y_0 \quad (80)$$

Interval III.:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\Delta p}{\eta L} Y_1 - \frac{\Delta p}{\eta L} y = \frac{\Delta p}{\eta L} (Y_1 - y)$$

Pro smykové napětí v intervalu III. platí rovnice (81).

$$\tau = \tau_0 - \frac{\Delta p}{L} (Y_1 - y) \quad (81)$$

Podobně jako v případě intervalu I. je možno i na intervalu III. určit smykové napětí na stěně. V tomto případě se jedná o horní stěnu a její souřadnice y je rovna H .

$$\tau = \tau_0 + \frac{\Delta p}{L} (Y_1 - H) \quad (82)$$

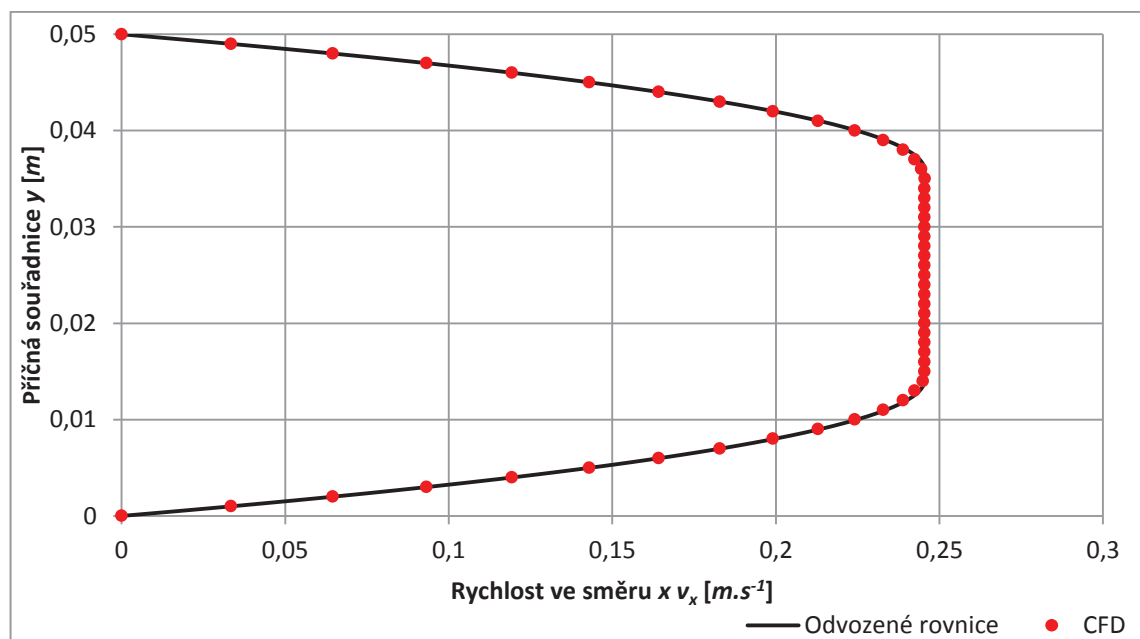
Dosadíme-li do rovnice (82) za Y_1 rovnici (69), dostáváme výraz totožný s (80). Smykové napětí na horní i dolní stěně má tedy stejnou hodnotu. Rozložení smykového napětí je, stejně jako rychlostní profil, symetrické kolem střední roviny domény o souřadnici $y = \frac{H}{2}$.

Na intervalu II. je smykové napětí rovno, jak už bylo řečeno, τ_0 .

Příčná vzdálenost paralelních desek je pro tento případ rovna $H = 0,05 \text{ m}$ a šířka řešené domény $b = 0,01 \text{ m}$.

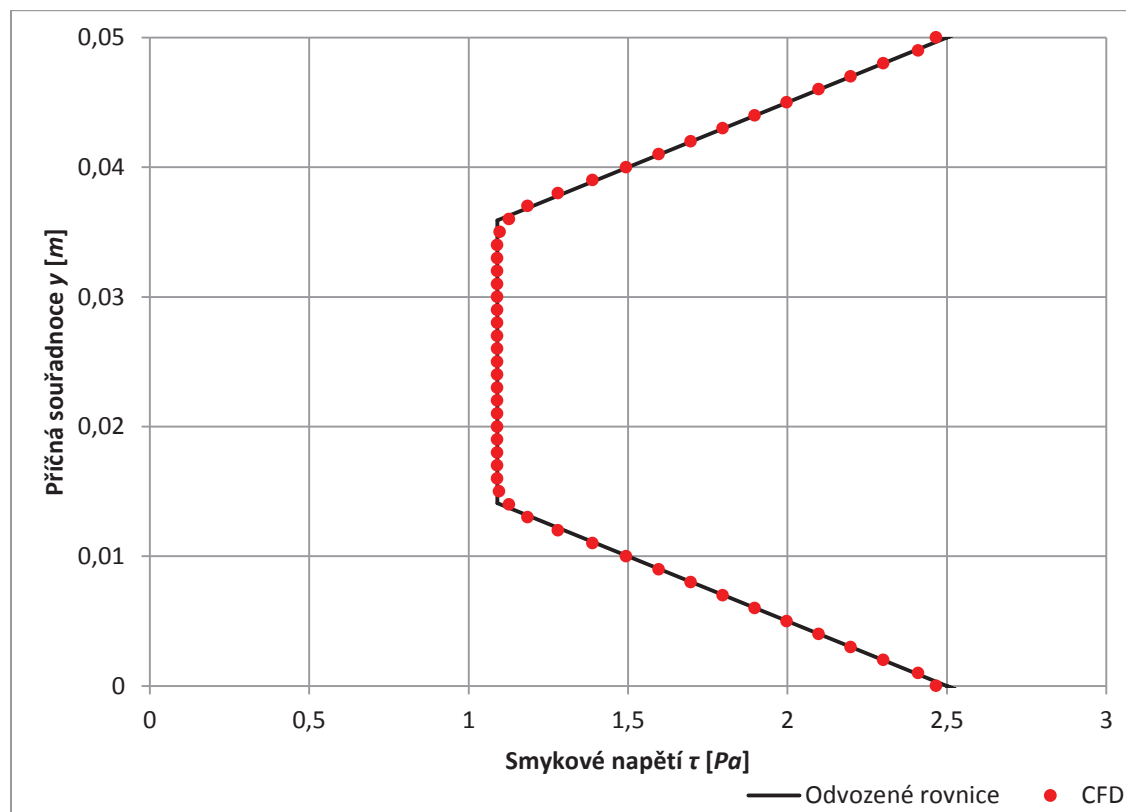
Tlakový spád je roven 100 Pa na 1 metr délky L .

Rychlostní profil binghamské kapaliny mezi paralelními statickými deskami je na Obr. 30. Rychlostní profil je v tomto případě popsán rovnicemi (64) a (67).



Obr. 30: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.

Rozložení smykového napětí popisují v tomto případě rovnice (80) a (81). Průběh smykového napětí je potom na *Obr. 31*.



Obr. 31: Rozložení smykového napětí v doměně při proudění binghamské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.

Hranice pevného jádra byly při daných parametrech určeny z rovnic (73) a (74) následně.

$$Y_0 = 0,0141 \text{ m.}$$

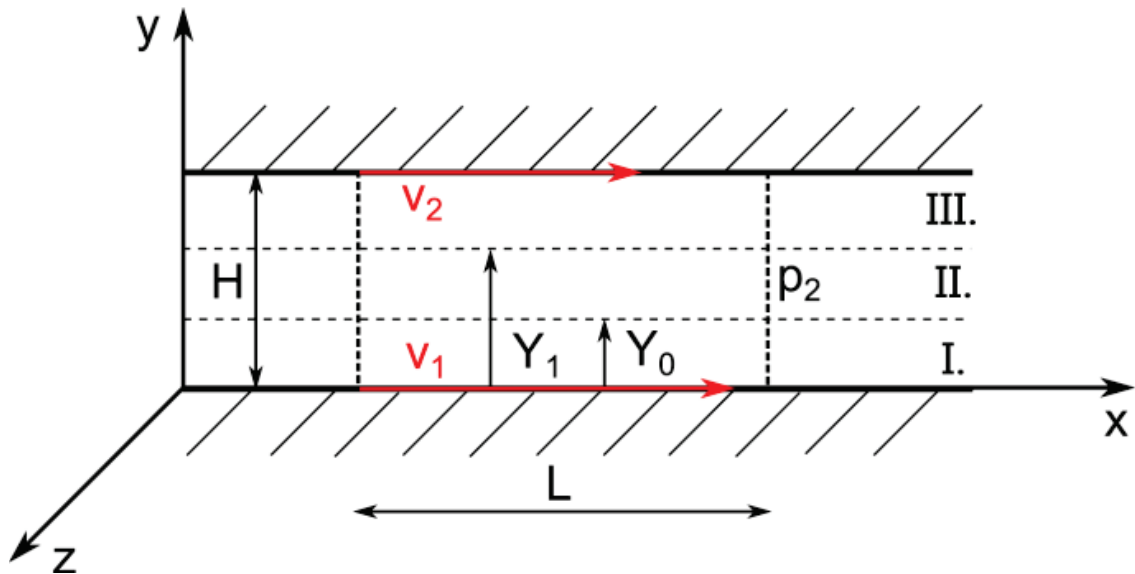
$$Y_1 = 0,0359 \text{ m.}$$

Tloušťka pevného jádra je tedy $\delta = 0,0218 \text{ m}$.

Celkový průtok doménou byl součtem výsledků rovnic (78.1), (78.2) a (78.3) určen na hodnotu $Q = 9,9721 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední profilová rychlost je potom z průtoku určena jako $v_s = 0,1993 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

6.2.3 Proudění mezi pohyblivými rovnoběžnými deskami



Obr. 32: Pohyblivé paralelní desky – binghamská kapalina

Na Obr. 32 je schématické znázornění řešené domény pro tento případ.

Postup odvození je totožný jako v kapitole 6.2.2.

Řešená doména je opět stejně jako v kapitole 6.2.2 rozdělena na tři oblasti.

Pro oblast I., kde $y \in < 0; Y_0 >$, jsou v případě pohyblivých desek platné okrajové podmínky (83.1) a (83.2).

$$y = 0, \quad v_x = v_1 \quad (83.1)$$

$$y = Y_0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (83.2)$$

Integrační konstanty pro oblast I. byly na základě (83.1) a (83.2) odvozeny následujícím způsobem.

$$K_1 = v_1 \quad (84.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{\eta L} Y_0 \quad (84.2)$$

Rovnici rychlostního profilu dostáváme dosazením (84.1) a (84.2) do (61).

$$v_x = \frac{\Delta p}{\eta L} \left(Y_0 y - \frac{1}{2} y^2 \right) + v_1 \quad (85)$$

Obdobně je rychlostní profil řešen v oblasti III., která je určena intervalem $y \in < Y_1, H >$. Okrajové podmínky pro tuto oblast jsou (86.1) a (86.2).

$$y = H, \quad v_x = v_2 \quad (86.1)$$

$$y = Y_1, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (86.2)$$

Samotná rovnice rychlostního profilu byla určena ve tvaru (87).

$$v_x = \frac{\Delta p}{\eta L} \left[\frac{1}{2} (H^2 - y^2) + Y_1 (y - H) \right] + v_2 \quad (87)$$

Oblast II. je opět oblastí, kde kapalina „teče“ jako pevné těleso. Z tohoto důvodu je rychlost konstantní v celém intervalu stejně jako v případě nepohyblivých desek. Smykové napětí v této oblasti je opět rovno τ_0 .

Rychlostní profil musí být na hranicích pevného jádra Y_0 a Y_1 opět tečně napojen a na těchto hranicích musí platit rovnost rychlostí. Toto bylo ošetřeno i v kapitole 6.2.1. Rovnice (68) musí být platná i v tomto případě, ale za rychlosti jsou zde dosazeny rovnice platné pro případ pohyblivých desek. Do rovnice (85) je za y dosazena souřadnice Y_0 a do rovnice (87) pak souřadnice Y_1 .

Vzhledem k tomu, že rychlosti stěn nemusejí být stejné, nelze již proudění v tomto případě označit za jednoznačně symetrické kolem střední roviny domény. Symetrie (69) již zde tedy nemusí platit. Rovnice (69) může být ale upravena do obecnějšího tvaru (88).

$$Y_1 = Y_0 + \delta \quad (88)$$

V rovnici (88) značí δ obecně šířku pevného jádra.

Po dosazení (85), (87) a (88) do rovnice (68), která musí platit i pro pohyblivé paralelní desky, jsme schopni vyjádřit rovnici pro určení Y_0 (89).

$$Y_0 = \frac{\eta L v_1}{\Delta p (H - \delta)} - \frac{\eta L v_2}{\Delta p (H - \delta)} + \frac{H - \delta}{2} \quad (89)$$

Dosazením rovnice (89) do rovnice (88) dostáváme rovnici pro určení Y_1 .

$$Y_1 = \frac{\eta L v_1}{\Delta p (H - \delta)} - \frac{\eta L v_2}{\Delta p (H - \delta)} + \frac{H + \delta}{2} \quad (90)$$

Uvažujeme, že pevným jádrem není vyplněná celá doména a tedy platí $\delta < H$. Na základě rovnic (89) a (90) je možno říci, že budou-li rychlosti stěn nulové, případně budou-li mít stejnou velikost, je pevné jádro o šířce δ umístěno, stejně jako v předchozím případě, přesně uprostřed domény a je symetrické kolem její střední roviny dané souřadnicí $y = \frac{H}{2}$.

Pakliže ovšem rychlosti v_1 a v_2 nebudou mít stejnou velikost, jádro se bude ve směru y posunovat směrem k desce s vyšší absolutní hodnotou velikosti rychlosti.

V kapitole 6.2.1 bylo odvozeno, že šířka jádra je závislá pouze na velikost tlakového spádu a na hodnotě meze toku τ_0 . Toto platí i v případě pohyblivých desek. Je ovšem samozřejmé, že lze kombinací rychlostí pohybu stěn dosáhnout stavu, kdy dojde k přimknutí pevného jádra k jedné ze stěn. Po dosažení tohoto stavu a bude-li se velikost absolutní hodnoty rozdílu rychlostí dále zvětšovat, bude docházet k zužování pevného jádra až do momentu, kdy toto plně zanikne.

Pokud uvažujeme, že k přimknutí spodní hranice pevného jádra Y_0 dochází, je-li Y_0 rovno nule, je možno formulovat následující vztah (91).

$$0 = \frac{\eta L v_1}{\Delta p(H - \delta)} - \frac{\eta L v_2}{\Delta p(H - \delta)} + \frac{H - \delta}{2} \quad (91)$$

Úpravou výrazu (91) dostáváme rovnici pro vyjádření rozdílu rychlostí, při nichž dojde k přimknutí pevného jádra ke spodní stěně.

$$v_1 - v_2 = \frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L} \quad (92)$$

Bude-li rozdíl v_0 a v_l menší než výraz na pravé straně rovnice (92), pevné jádro bude mít tloušťku určenou rovnicí (75) a bude umístěno v doméně v poloze určené vztahy (89) a (90).

V případě rovnosti levé a pravé strany rovnice (92) je jádro přimknuto k spodní stěně a jeho tloušťka je rovna souřadnici Y_l .

Pakliže tento rozdíl bude větší než pravá strana rovnice (92), jádro bude přimknuto ke spodní stěně a jeho šířka se bude při zvětšování rozdílu rychlostí snižovat až do chvíle, kdy úplně zanikne.

Šířka pevného jádra může být pro tento případ vyjádřena z rovnice (92) ve tvaru (93).

$$\delta = H - \sqrt{\frac{2\eta L}{\Delta p} |v_1 - v_2|} \quad (93)$$

Absolutní hodnota je v rovnici (93) zavedena z důvodu, že rychlosti mohou být i záporné.

Ve chvíli, kdy pevné jádro zaniká u spodní stěny, platí, že $Y_l = 0$ a je tedy možno položit rovnici (90) rovnu nule. Poté je možno vyjádřit rovnicí (94) pro rozdíl rychlostí, při němž zaniká jádro u spodní stěny domény. Vzhledem k tomu, že pevné jádro zaniká, je možno říci, že $\delta = 0$. Rovnice pro druhý kritický rozdíl rychlostí má potom následující tvar.

$$v_1 - v_2 = \frac{\Delta p H^2}{2\eta L} \quad (94)$$

V předchozích odstavcích byla vyřešena situace, kdy dochází k přilehnutí pevného jádra ke spodní stěně a případně jeho zániku u této stěny. Stejně tak může ale nastat situace, kdy pevné jádro přilehne k horní stěně a postupně zanikne zde. I pro tento případ mohou být určeny dvě kritické hodnoty rozdílů rychlostí v_1 a v_2 .

Pro určení rozdílů rychlostí, kdy dojde k přimknutí pevného jádra k horní stěně, je třeba položit $Y_l = H$.

$$H = \frac{\eta L v_1}{\Delta p (H - \delta)} - \frac{\eta L v_2}{\Delta p (H - \delta)} + \frac{H + \delta}{2} \quad (95)$$

Z rovnice (95) je potom možno vyjádřit pro rychlosti desek kritickou hodnotu jejich rozdílů.

$$v_1 - v_2 = -\frac{\Delta p (H - \delta)^2}{2\eta L} \quad (96)$$

Pravá strana rovnice (96) odpovídá záporné hodnotě pravé strany rovnice (92).

Tloušťka pevného jádra je v tuto chvíli z rovnice (88) vyjádřena rovnicí (97).

$$\delta = H - Y_0 \quad (97)$$

Stejně tak platí pro tloušťku pevného jádra pro tento případ, po zavedení absolutní hodnoty, vztah (93).

K zániknutí pevného jádra u horní stěny dochází, když $Y_0 = H$. Kritický rozdíl rychlostí při kterém k tomuto zániknutí dojde je dán rovnicí (98).

$$v_1 - v_2 = -\frac{\Delta p H^2}{2\eta L} \quad (98)$$

Proudění mezi pohybujícími se paralelními deskami je pro jednotlivé případy rychlosti pohybu stěn shrnuto v následující tabulce.

Tab. 3: Proudění mezi pohybujícími se paralelními deskami.

$v_1 = v_2$	Y_0 je dáno rovnicí (89).
	Y_l je dáno rovnicí (90).
	δ je dáno rovnicí (75).
	Pevné jádro je symetrické kolem středu domény.

V dalších případech je uvažováno $v_1 \neq v_2$.	
$-\frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L} < v_1 - v_2 < \frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L}$	Y_0 je dáno rovnicí (89).
	Y_I je dáno rovnicí (90).
	δ je dáno rovnicí (75).
	Pevné jádro není symetrické kolem středu domény.
$v_1 - v_2 = \frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L}$	Y_0 je rovno nule.
	Y_I je rovno δ .
	δ je dáno rovnicí (75).
	Pevné jádro přiléhá ke spodní stěně domény.
$v_1 - v_2 = -\frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L}$	Y_0 je dáno z rovnice (97).
	Y_I je rovno H .
	δ je dáno rovnicí (75).
	Pevné jádro přiléhá k horní stěně domény.
$\frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L} < v_1 - v_2 < \frac{\Delta p H^2}{2\eta L}$	Y_0 je rovno nule.
	Y_I je rovno δ .
	δ je dáno rovnicí (93).
	Pevné jádro je přimknuto ke spodní stěně, jeho šířka se zmenšuje.
$-\frac{\Delta p H^2}{2\eta L} < v_1 - v_2 < -\frac{\Delta p(H - \delta)^2}{2\eta L}$	Y_0 je dáno z rovnice (97).
	Y_I je rovno H .
	δ je dáno rovnicí (93).
	Pevné jádro je přimknuto k horní stěně, jeho šířka se zmenšuje.

$v_1 - v_2 \geq \frac{\Delta p H^2}{2\eta L}$	<p>Pevné jádro zaniká u spodní stěny domény.</p>
$v_1 - v_2 \leq -\frac{\Delta p H^2}{2\eta L}$	<p>Pevné jádro zaniká u horní stěny domény.</p>

Na základě faktů sumarizovaných v této tabulce lze rozšířit tvrzení o tloušťce pevného jádra z předchozí kapitoly, kde bylo uvažováno vždy symetrické umístění pevného jádra uprostřed řešené domény.

V případě, že je pevné jádro umístěno uvnitř domény a nedochází k jeho přimknutí ke stěně, má toto pro danou binghamskou kapalinu o neměnných reologických vlastnostech a při konstantním tlakovém spádu vyvolávajícím proudění vždy stejnou hodnotu. Pakliže je proudění ovlivněno dalším faktorem, kterým je v těchto případech rozuměn pohyb jedné nebo obou stěn domény, tloušťka jádra zůstává stejná do chvíle, než dojde k jeho přimknutí k pohybující se stěně. Pokud je rychlost pohybu stěny nadále zvyšována, dochází k zužování jádra a jeho tloušťku již nelze vyjádřit rovnicí (75).

Průtok doménou je určen opět součtem průtoků všemi třemi oblastmi (99.1), (99.2) a (99.3).

$$Q_I = \frac{\Delta p}{3\eta L} b Y_0^3 + v_0 b Y_0 \tag{99.1}$$

$$Q_{II} = \frac{\Delta p}{2\eta L} Y_0^2 b (Y_1 - Y_0) + v_0 b (Y_1 - Y_0) \tag{99.2}$$

$$Q_{III} = \frac{\Delta p}{\eta L} b \left[-\frac{1}{6} (H^3 - Y_1^3) + \frac{1}{2} (Y_1 H^2 - Y_1^3) + \frac{1}{2} (H^3 - Y_1 H^2) + (Y_1^2 H - Y_1 H^2) \right] + v_1 b (H - Y_1) \tag{99.3}$$

Je důležité si uvědomit, že v závislosti na hodnotě rozdílu rychlostí stěn se ne vždy musí v doméně všechny 3 oblasti vyskytovat.

Pro určení střední profilové rychlosti platí i v tomto případě rovnice (23).

Pro určení rozložení smykového napětí v doméně je zásadní, stejně jako v případě statických desek, rovnice (57). Řešení je taktéž rozděleno do tří intervalů, jejichž

hranice jsou Y_0 a Y_l . Určení těchto hranic pro jednotlivé rychlosti pohybu desek, potažmo pro jejich rozdíl, je shrnuto v tabulce *Tab. 3*.

Pro smykové napětí v intervalu I. je po zderivování rovnice (85) a dosazení do (57) určena rovnice (100).

$$\tau = \tau_0 + \frac{\Delta p}{L}(Y_0 - y) \quad (100)$$

Stejným způsobem je určena rovnice smykového napětí v intervalu III.

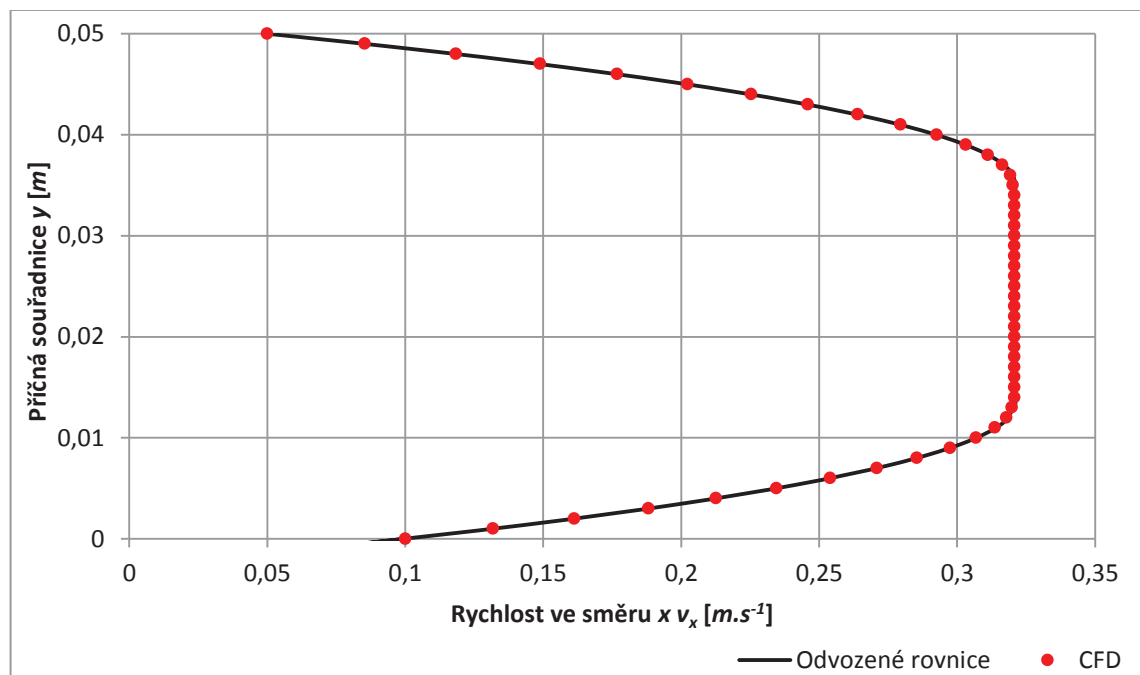
$$\tau = \tau_0 - \frac{\Delta p}{L}(Y_l - y) \quad (101)$$

V oblasti mezi Y_0 a Y_l je hodnota smykového napětí rovna přímo τ_0 .

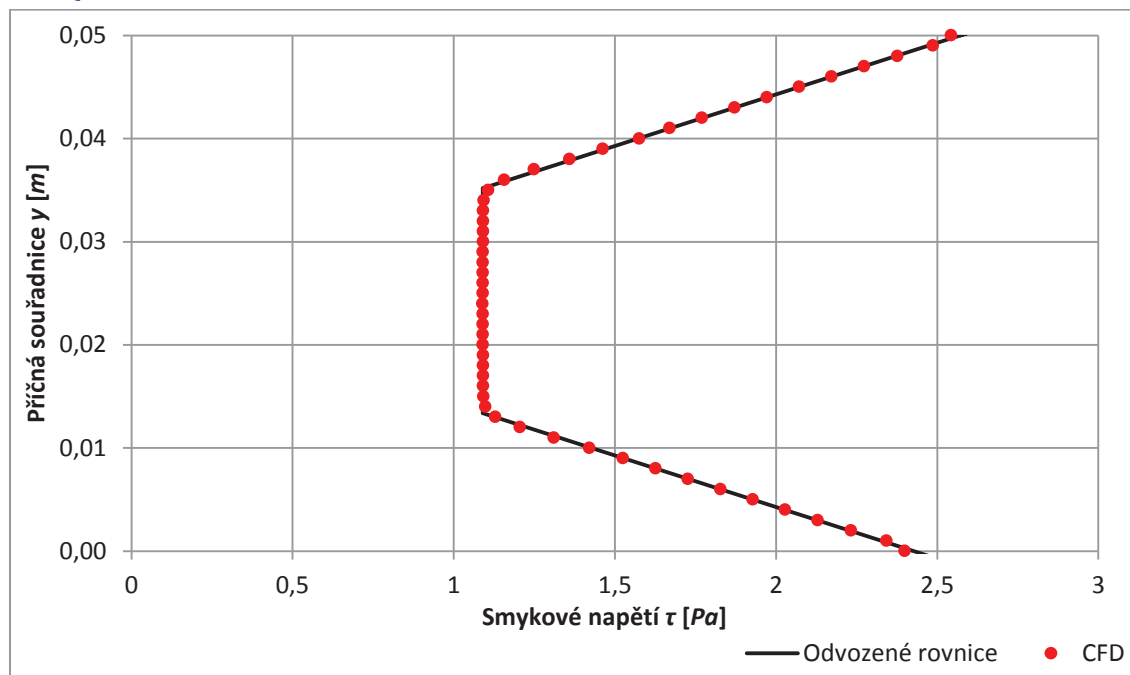
Rozměry domény i parametry binghamské kapaliny zůstávají stejné jako v případě desek statických.

Rychlost pohybu spodní desky je $v_l = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$.

Rychlost pohybu horní desky je potom $v_2 = 0,05 \text{ m.s}^{-1}$.



Obr. 33: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.



Obr. 34: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.

Hranice pevného jádra byly vyčísleny z rovnic (89) a (90) na následující hodnoty.

Spodní hranice $Y_0 = 0,0134 \text{ m}$.

Horní hranice $Y_1 = 0,0352 \text{ m}$.

Ačkoli tloušťka pevného jádra δ zůstala stejná jako v předchozím případě, z výše uvedených hodnot je očividné, že jádro již opravdu není umístěno ve středu řešené domény.

Průtok doménou je na základě rovnic (99.1), (99.2) a (99.3) dán jako $Q = 13,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední profilová rychlost je potom $v_s = 0,2746 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Kritické rozdíly rychlosti definované v kapitole 6.2.3 jsou vyčísleny na následující hodnoty.

Kritický rozdíl rychlostí, při kterém dochází k přimknutí pevného jádra ke spodní stěně, je z rovnice (92):

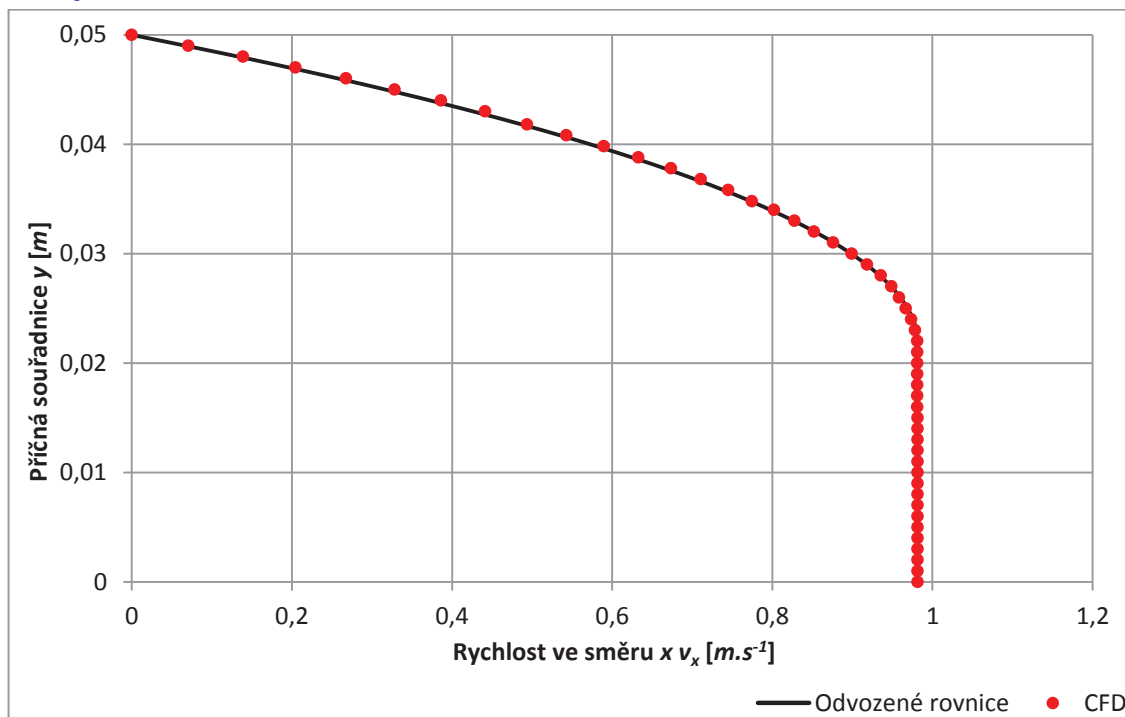
$$(v_1 - v_2)_{k1} = 0,9818 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tento stav je zobrazen na Obr. 35.

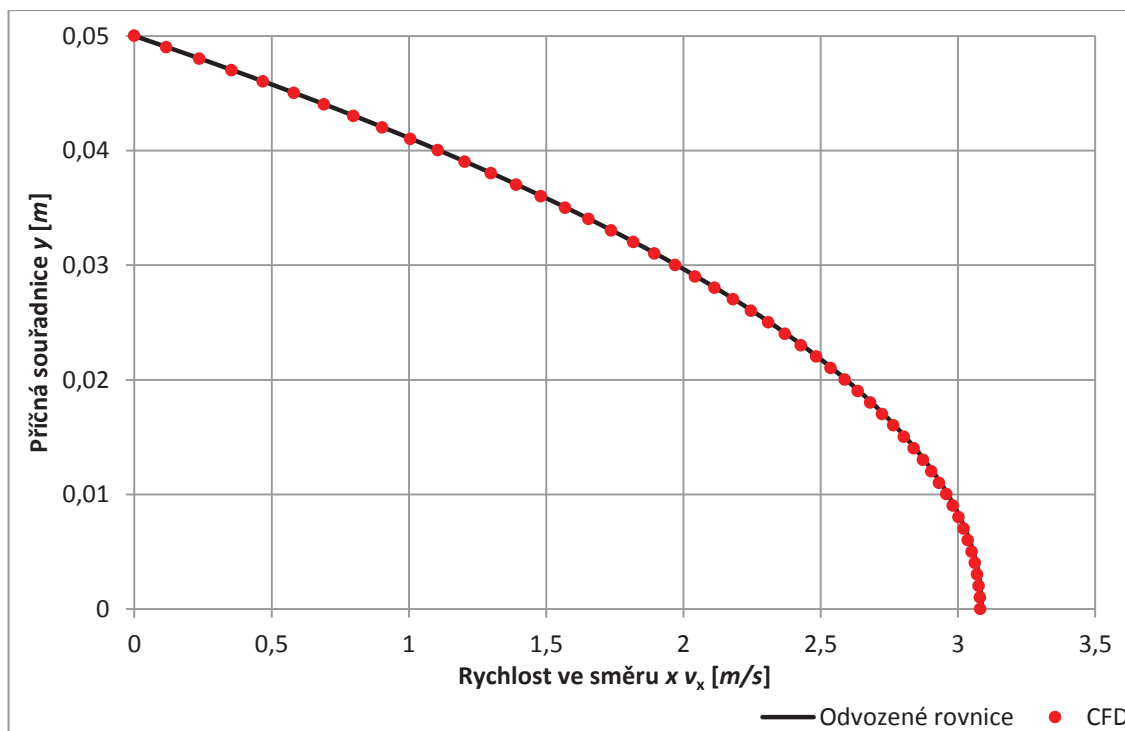
Podobně je určen kritický rozdíl rychlostí stěn, při kterém dochází k zániku pevného jádra u spodní stěny. Z rovnice (94) plyne následující.

$$(v_1 - v_2)_{k2} = 3,0864 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tato situace je potom zobrazena na Obr. 36.



Obr. 35: Rychlostní profil v okamžiku, kdy je rozdíl rychlostí desek roven první kritické hodnotě rozdílu a dochází k přimknutí pevného jádra ke stěně.



Obr. 36: Rychlostní profil v okamžiku, kdy je rozdíl rychlostí desek roven druhé kritické hodnotě rozdílu a dochází k zániku pevného jádra u spodní stěny.

6.2.4 Proudění v doméně popsané válcovými souřadnicemi

Obdobně jako v kapitole 6.2.1 je řešena silová rovnováha elementu kapaliny v dané doméně. V tomto případě se jedná o doménu popsanou válcovými souřadnicemi. Rovnice silové rovnováhy elementu ve válcových souřadnicích je uvedena dále (102).

$$p2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) 2\pi r dr + \tau 2\pi r dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr\right) 2\pi(r + dr) dz = 0 \quad (102)$$

Po roznásobení a upravení přechází rovnice (102) do tvaru (103).

$$-\frac{\partial p}{\partial z} r - \tau - \frac{\partial \tau}{\partial r} r = 0 \quad (103)$$

Rovnice popisující smykové napětí binghamské kapaliny je pro daný válcový souřadný systém přepsána do tvaru (104).

$$\tau = \tau_0 \pm \eta_B \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (104)$$

Analogicky uvažujeme lineární tlakovou závislost odvozenou dříve (17) a platnost Binghamova vztahu ve tvaru (104). Po dosazení (104), derivace rovnice (104) a vztahu (17) dostáváme rovnici ve tvaru (105).

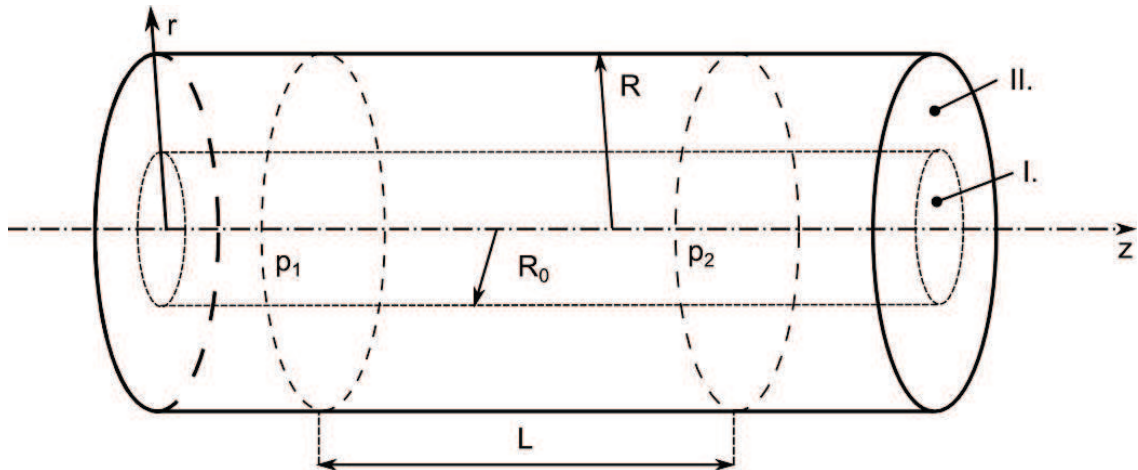
$$\frac{\Delta p}{L} r - \tau_0 + \eta_B \frac{\partial v_z}{\partial r} + \eta_B \frac{\partial v_z}{\partial r} r = 0 \quad (105)$$

Tvar rovnice (105) je upraven a po provedení dvojnásobné integrace přes r získáme finální tvar obecné rovnice rychlosti pro binghamskou kapalinu v kruhovém potrubí.

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta_B L} r^2 + \frac{\tau_0}{\eta_B} r + K_1 \ln r + K_2 \quad (106)$$

Rovnice (106) je základní rovnicí pro určení všech dalších charakteristik týkajících se proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí.

6.2.5 Proudění v obecném kruhovém potrubí



Obr. 37: Kruhové potrubí - binghamská kapalina.

Tato doména je při řešení proudění binghamské kapaliny rozdělena do dvou oblastí.

Oblast I. $r \in \langle 0 ; R_0 \rangle$

Oblast proudění jako pevné těleso.

Rychlost je konstantní.

Smykové napětí je rovno v celé oblasti τ_0 .

Oblast II. $r \in \langle R_0 ; R \rangle$

Oblast lineárního chování kapaliny.

Je samozřejmé, že proudění je v tomto případě rotačně symetrické kolem osy potrubí z .

Pro tuto doménu plyne ze symetrie nulovost integrační konstanty K_1 v rovnici (106).

Na intervalu $r \in \langle R_0 ; R \rangle$, tedy v oblasti II., je okrajová podmínka pro vyřešení druhé integrační konstanty K_2 dána podmínkou ulpívání na stěně potrubí.

$$r = R; v_z = 0 \quad (107)$$

Integrační konstanta K_2 je, při uvažování výše zmíněného předpokladu, po dosazení okrajové podmínky (107) do rovnice (106) určena rovnicí (108).

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} R^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R \quad (108)$$

Rovnice rychlostního profilu v oblasti II. je po dosazení nuly za K_1 a rovnice (108) za K_2 v rovnici (106) formulována ve tvaru (109).

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta_B} (R - r) \quad (109)$$

Hranice oblasti I. a II., tedy hraniční poloměr pevného jádra, je možno určit ze silové rovnováhy pevného jádra.

$$\Delta p \pi R_0^2 - \tau_0 2\pi R_0 L = 0 \quad (110)$$

Vyjádřením R_0 z rovnice (110) dostáváme rovnici (111), která určuje hodnotu poloměru hranice pevného jádra.

$$R_0 = \frac{2\tau_0 L}{\Delta p} \quad (111)$$

Rozložení smykového napětí v intervalu II. je určeno rovnicí (104), kde je za derivaci rychlosti podle poloměru dosazována derivace rovnice (109) podle poloměru r .

Rovnice popisující smykové napětí v oblasti II. je potom dána ve tvaru (112)

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} r \quad (112)$$

Rychlost proudění pevného jádra je logicky v celém intervalu $r \in \langle 0 ; R_0 \rangle$ stejná a může být zjištěna například určením rychlosti proudění na souřadnici R_0 . Dosadíme-li do rovnice (109) za r výraz R_0 a τ_0 vyjádříme pomocí rovnice (112), kde za r dosazujeme taktéž R_0 , dostáváme rovnici pro rychlost na hranici pevného jádra.

$$v_z(R_0) = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} (R - R_0)^2 \quad (113)$$

Průtok touto doménou je, podobně jako v předchozích případech, dán součtem průtoků oblastí I. a oblastí II.

Průtok oblastí I. (114.1) je dán násobkem rychlostí pevného jádra a plochy příčného průřezu pevného jádra.

$$Q_I = \frac{\Delta p \pi R^4}{4\eta_B L} \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^4 \right] \quad (114.1)$$

Průtok oblastí II. je potom určen integrálem rychlosti v_z přes plochu této oblasti.

$$Q_{II} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta_B L} \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right) - 2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{5}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 \right] \quad (114.2)$$

Celkový průtok řešeným potrubím je dán vztahem (115).

$$Q_I = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta_B L} \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 \right] \quad (115)$$

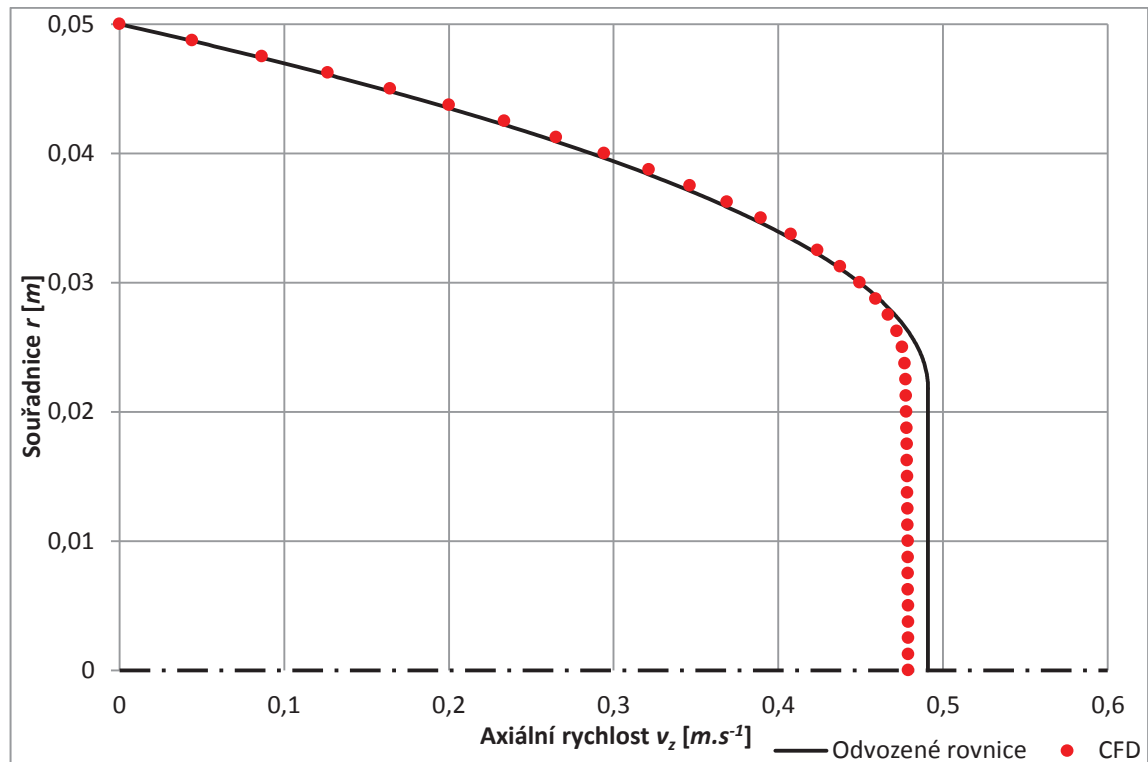
Střední průřezová rychlost je opět určena podělením celkového průtoku (115) plochou příčného průřezu domény.

$$v_s = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8 \eta_B L} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{R_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 \right] \quad (116)$$

Poloměr potrubí, v němž je proudění binghamské kapaliny řešeno, byl uvažován jako $R = 0,05 \text{ m}$.

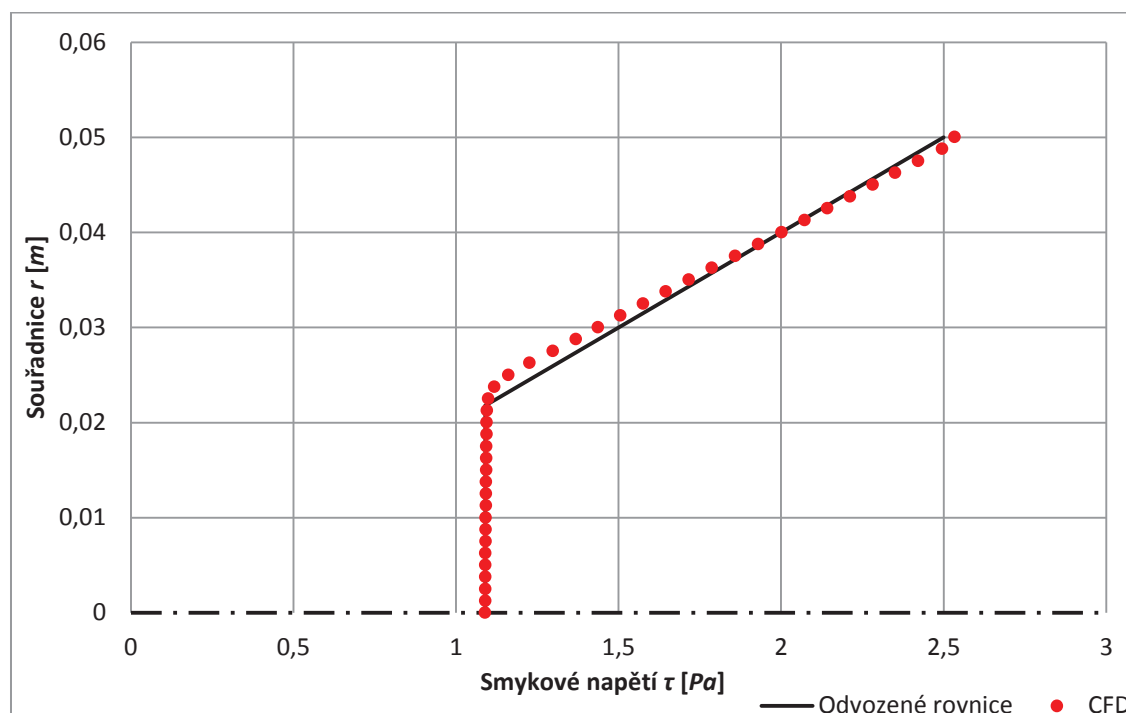
Tlakový spád je pro tento případ uvažován 100 Pa na 1 m délky.

Rychlostní profil, který je vykreslen na *Obr. 38* byl získán z rovnic (109) a (113). Červenou barvou je, stejně jako dříve, znázorněn rychlostní profil získaný numerickou simulací.



Obr. 38: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v obecném kruhovém potrubí.

Rozložení smykového napětí získané vykreslením průběhu rovnice (112) v řešené doméně je na *Obr. 39*.



Obr. 39: Rozložení smykového napětí při proudění binghamské kapaliny v obecném kruhovém potrubí.

Hranice pevného jádra byla z rovnice (111) vyčíslena na hodnotu $R_0 = 0,0218 \text{ m}$.

Průtok celou potrubní doménou je z rovnice (115) pro binghamskou kapalinu určen jako $Q = 0,00261 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední rychlost je potom rovnicí (116) dána hodnotou $v_s = 0,3323 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Z *Obr. 38* a *Obr. 39* je očividné, že mezi průběhy veličin získanými z analytických vztahů a z numerických simulací jsou jisté rozdíly.

V tuto chvíli není možno říci, zda se skutečnosti více blíží průběhy veličin získané z numerických simulací, nebo průběhy získané z odvozených vztahů. K ověření těchto výsledků by bylo třeba provést reologické měření a takto získaná data srovnat s průběhy veličin uvedenými výše v této práci.

Diference plyne z rozdílných parametrů jádra získaných z CFD a z analytiky. Jak je z výše uvedených obrázků patrné, tloušťka jádra je v obou případech mírně odlišná a z tohoto faktu plyne rozdílnost průběhů obou veličin.

6.2.6 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem

Podobně jako v případě newtonské kapaliny je i zde řešeno proudění v mezikruží mezi stěnou potrubí a statickým hřídelem vloženým v ose potrubí. Proudí samozřejmě binghamská kapalina.

Celá doména, již kapalina proudí, je opět rozdělena do tří oblastí.

Oblast I. $r \in \langle R_H; R_0 \rangle$

Oblast lineárního chování kapaliny.

Oblast II. $r \in \langle R_0; R_1 \rangle$

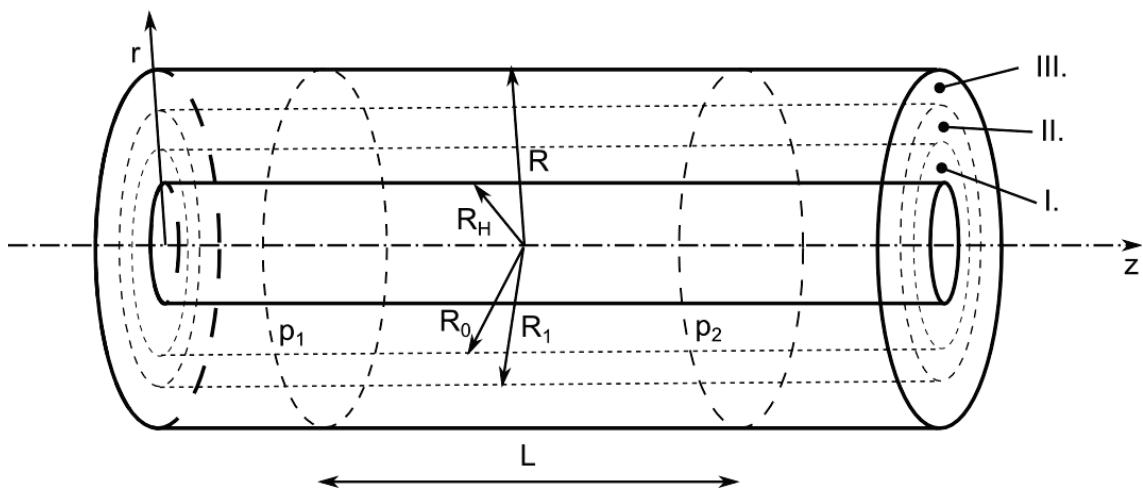
Oblast proudění jako pevné těleso.

Rychlost je konstantní.

Smykové napětí je rovno v celé oblasti τ_0 .

Oblast III. $r \in \langle R_1; R \rangle$

Oblast lineárního chování kapaliny.



Obr. 40: Řešená doména - kruhové potrubí s vloženým statickým hřídelem při proudění binghamské kapaliny.

Základní rovnicí pro odvození rovnic pro tento případ je opět rovnice (106). Z tvaru této rovnice plyne, že rychlostní profil nebude vlivem logaritmu symetrický jako v případě proudění mezi paralelními deskami, ačkoli symetrie kolem osy potrubí (potažmo osy vloženého hřídele) zůstává.

Okrajové podmínky pro oblast I, tedy oblast $r \in \langle R_H; R_0 \rangle$, jsou definovány následovně.

$$r = R_H; v_z = 0 \quad (117.1)$$

$$r = R_0; \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (117.2)$$

Dosazením okrajových podmínek (117.1) a (117.2) do rovnice (106) byly získány integrační konstanty K_1 a K_2 pro proudění binghamské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.

$$K_1 = \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \quad (118.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} R_H^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_H - \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 \ln R_H + \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \ln R_H \quad (118.2)$$

Rovnice popisující rychlostní profil v oblasti I. je po dosazení integračních konstant (118.1) a (118.2) do rovnice (106) vyjádřena rovnicí (119).

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta_B L} (r^2 - R_H^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B} (r - R_H) + \left(\frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \right) \ln \left(\frac{r}{R_H} \right) \quad (119)$$

Obdobně je odvozena rovnice rychlostního profilu pro oblast III. Okrajové podmínky pro tuto oblast jsou definovány dále.

$$r = R; \quad v_z = 0 \quad (120.1)$$

$$r = R_1; \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (120.2)$$

Integrační konstanty pro oblast III. jsou (121.1) a (121.2).

$$K_1 = \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_1^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_1 \quad (121.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} R^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R - \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_1^2 \ln R + \frac{\tau_0}{\eta_B} R_1 \ln R \quad (121.2)$$

Rovnice rychlostního profilu v této oblasti je potom (122).

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta_B L} (r^2 - R^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B} (r - R) + \left(\frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_1^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_1 \right) \ln \left(\frac{r}{R} \right) \quad (122)$$

V oblasti II. je rychlost konstantní a její hodnota může být získána dosazením R_0 za r do rovnice (119), případně dosazením R_I za r do rovnice (122).

Celkový průtok doménou je potom opět roven součtu průtoků třemi dříve zavedenými oblastmi. Průtok jednotlivými oblastmi je stejně jako v předchozích případech roven integrálu rovnice rychlostního profilu přes průtočnou plochu dané části domény.

Pro jednotlivé oblasti je průtok dán následujícími vztahy.

$$\begin{aligned} Q_I = & \frac{\Delta p \pi}{8\eta_B L} (R_H^4 - R_0^4) + \frac{\Delta p \pi}{4\eta_B L} R_H^2 (R_0^2 - R_H^2) + \frac{2\pi\tau_0}{3\eta_B} (R_0^3 - R_H^3) + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_H (R_H^2 - R_0^2) \\ & + \frac{\Delta p \pi}{2\eta_B L} R_0^2 [R_0^2 (\ln(R_0) - 0,5) - R_H^2 (\ln(R_H) - 0,5)] + \frac{\Delta p \pi}{2\eta_B L} R_0^2 [R_H^2 \ln(R_H) - R_0^2 \ln(R_H)] \\ & + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_0 [R_H^2 (\ln(R_H) - 0,5) - R_0^2 (\ln(R_0) - 0,5)] + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_0 [R_0^2 \ln(R_H) - R_H^2 \ln(R_H)] \end{aligned} \quad (123.1)$$

$$Q_{II} = v_{II} \pi (R_1^2 - R_0^2) \quad (123.2)$$

$$\begin{aligned}
 Q_I = & \frac{\Delta p \pi}{8 \eta_B L} (R_1^4 - R^4) + \frac{\Delta p \pi}{4 \eta_B L} R^2 (R^2 - R_1^2) + \frac{2 \pi \tau_0}{3 \eta_B} (R^3 - R_1^3) + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R (R_1^2 - R^2) \\
 & + \frac{\Delta p \pi}{2 \eta_B L} R_1^2 [R^2 (\ln(R) - 0,5) - R_1^2 (\ln(R_1) - 0,5)] + \frac{\Delta p \pi}{2 \eta_B L} R_1^2 [R_1^2 \ln(R) - R^2 \ln(R)] \\
 & + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R_1 [R_1^2 (\ln(R_1) - 0,5) - R^2 (\ln(R) - 0,5)] + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R_1 [R^2 \ln(R) - R_1^2 \ln(R)]
 \end{aligned} \quad (123.3)$$

Celkový průtok je tedy opět možno určit jako $Q = Q_I + Q_{II} + Q_{III}$.

Střední profilovou rychlost je potom možno určit stejně jako v předchozích případech podělením celkového průtoku plochou příčného průřezu průtočné části domény. Průtočná plocha je v tomto případě plocha mezikruží mezi stěnou hřídele a stěnou potrubí.

Rovnice popisující smykové napětí mohou být určeny v jednotlivých oblastech zderivováním rovnice rychlostního profilu platné pro danou oblast a dosazením této derivace do rovnice (104).

Pro oblast I. dostáváme po provedení výše uvedeného rovnici (124).

$$\tau = 2 \tau_0 - \frac{\Delta p}{2L} \left(r - R_0^2 \frac{1}{r} \right) - \tau_0 R_0 \frac{1}{r} \quad (124)$$

Na hranici pevného jádra R_0 musí být smykové napětí rovno hodnotě τ_0 . Dosazením R_0 za r v rovnici (124) je možno tento fakt ověřit.

Pro oblast III. je rovnice popisující smykové napětí dána ve tvaru (125).

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} (r - R_1^2) + \tau_0 R_1 \frac{1}{r} \quad (125)$$

Dosazením R_I za r opět ověřujeme, že na hranici pevného jádra R_I je smykové napětí rovno τ_0 .

Problém nastává při určení hranic pevného jádra R_0 a R_I . Jak bylo výše zmíněno, neplatí v tomto případě symetrie, které bylo využíváno v případě paralelních desek. Prvním krokem pro určení hranic pevného jádra je opět sestavení rovnice silové rovnováhy pevného jádra.

$$\Delta p \pi (R_1^2 - R_0^2) = \tau_0 2 \pi R_0 L + \tau_0 2 \pi R_1 L \quad (126)$$

Další rovnici potřebnou k určení hodnot R_0 a R_I dostáváme, stejně jako v předchozích případech, z předpokladu rovnosti rychlostí na obou hranicích pevného jádra.

$$v_{zI}(R_0) = v_{zIII}(R_1)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta p}{4\eta_B L}(R_0^2 - R_H^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B}(R_0 - R_H) + \left(\frac{\Delta p}{2\eta_B L}R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B}R_0\right) \ln\left(\frac{R_0}{R_H}\right) \\
 & = -\frac{\Delta p}{4\eta_B L}(R_1^2 - R^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B}(R_1 - R) + \left(\frac{\Delta p}{2\eta_B L}R_1^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B}R_1\right) \ln\left(\frac{R_1}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{127}$$

Po vyjádření této rovnosti z rovnic (119) a (122) získáváme rovnici (127) a společně s rovnicí (126) soustavu dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých R_0 a R_1 . Tuto soustavu je možno řešit numericky pro dané parametry.

Jednou z možností numerického řešení takovéto soustavy rovnic je takzvaná metoda jakobiánu, jejíž princip spočívá v převedení soustavy dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých na soustavu dvou rovnic lineárních. Vzhledem k podobě rovnic (126) a (127) je toto řešení poměrně komplikované a zdlouhavé.

Další možností jak tento problém vyřešit je zkombinovat odvozené rovnice s parametry získanými z numerické simulace provedené ve Fluentu. Provede se výpočet pomocí CFD a hranice pevného jádra získané analýzou rychlostního profilu získaného numerickým výpočtem se dosadí do odvozených rovnic. V tomto případě ale není možno využít k zadávání okrajových podmínek do Fluentu na vstup střední profilovou rychlost, protože tu nejsme bez znalosti souřadnic hranic pevného jádra schopni určit. Musely by tedy být voleny tlakové okrajové podmínky, což sebou přináší menší komplikace v podobě určení hodnoty dynamického tlaku. O této problematice je pojednáno v kapitole 7.

Možná nejméně elegantním, avšak rozhodně nejsnadnějším a nejrychlejším způsobem jak tento nelineární problém vyřešit, je iteračně za použití funkce „Řešitel“ dostupné v Excelu. Řešitel obsahuje modul CGC Nonlinear, který je určen přímo pro numerické řešení soustavy dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých. Jako podmínka je brána rovnost rychlostí na hranicích jádra. Horní hranice je vyjádřena ze silové rovnováhy a souřadnice spodní hranice je proměnný parametr, který je řešen.

Potrubí, v němž binghamská kapalina proudí, má poloměr $R = 0,05 \text{ m}$.

Poloměr vloženého statického hřídele $R_H = 0,01 \text{ m}$.

Tlakový spád Δp je pro tento případ uvažován 200 Pa na jeden metr délky.

Reologické parametry proudící kapaliny jsou stejné jako v předchozích kapitolách.

Spodní hranice pevného jádra byla pro tyto parametry pomocí řešitele numericky určena následovně.

$$R_0 = 0,02372 \text{ m.}$$

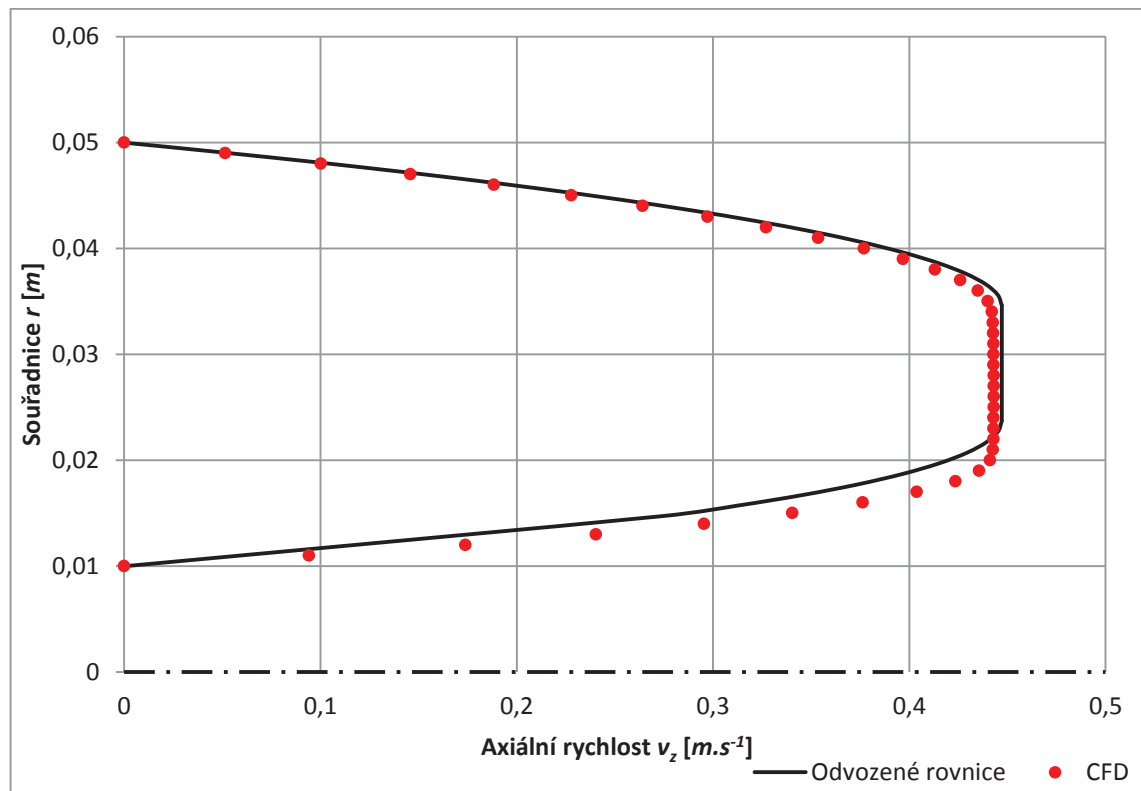
Horní hranice pevného byla určena jako $R_1 = 0,03462 \text{ m}$.

Šířka pevného jádra δ je pro danou binghamskou kapalinu při daném tlakovém spádu:

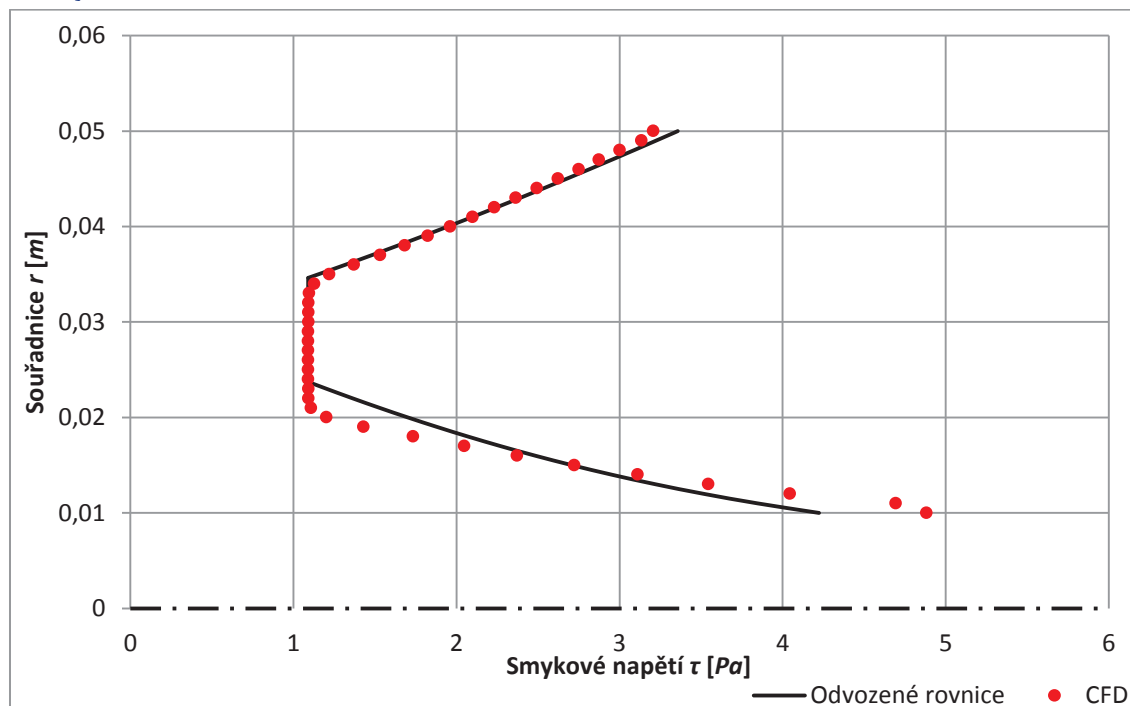
$$\delta = 0,0109 \text{ m.}$$

Celkový průtok touto doménou je na základě rovnic (123.1), (123.2) a (123.3) určen na hodnotu $Q = 0,002534 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední rychlost je potom dána hodnotou $v_s = 0,3362 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



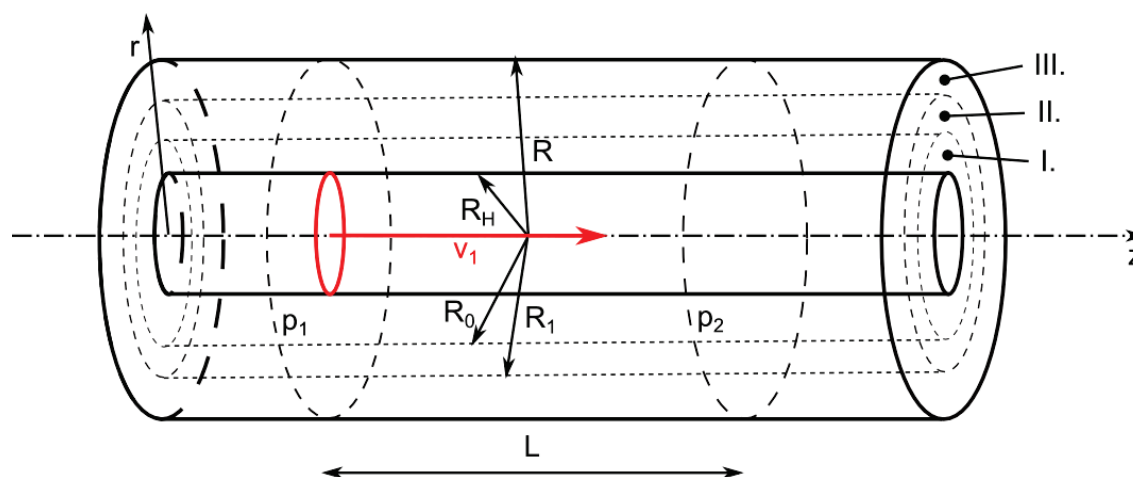
Obr. 41: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.



Obr. 42: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem.

Jak vidno, průběhy veličin získané na základě odvozených rovnic a z CFD se podobně jako v případě jednoduchého kruhového potrubí do jisté míry liší. Nejvýraznější rozdíl je v umístění pevného jádra v doméně. Z tohoto potom dále plyne i rozdílnost průběhů veličin v oblastech I. a III. Rozdíly rychlostí jsou dány rozdílností ploch příčných průřezů jednotlivých oblastí domény (I., II., III.).

6.2.7 Proudění v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem



Obr. 43: Řešená doména - potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen konstantní rychlostí při proudění binghamské kapaliny.

Doména zůstává stejná jako v předchozím případě s tím rozdílem, že hřídel vložený do osy potrubí je tažen konstantní rychlostí v_1 (viz Obr. 43). Rychlost tohoto hřídele tedy bude stejně jako v případě taženého hřídele v newtonské kapalině a v případě

pohyblivých desek ovlivňovat rychlost kapaliny proudící v doméně. Postup odvození rovnic je stejný jako v kapitole 6.2.6. Doména je rozdělena do tří oblastí naprosto shodně jako v předchozí kapitole a pro tyto jednotlivé oblasti je řešen rychlostní profil a rovnice smykového napětí.

V oblasti jedna I. jsou okrajové podmínky, na základě kterých je možno z rovnice (106) určit integrační konstanty pro tento případ, následující.

$$r = R_H; v_z = v_1 \quad (128.1)$$

$$r = R_0; \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (128.2)$$

Kde v_1 tedy vyjadřuje, jak již bylo zmíněno, rychlost tažení hřídele.

Integrační konstanty potom mají tvar (129.1) a (129.2).

$$K_1 = \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \quad (129.1)$$

$$K_2 = \frac{\Delta p}{4\eta_B L} R_H^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_H - \frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 \ln R_H + \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \ln R_H + v_1 \quad (129.2)$$

Rovnice rychlostního profilu pro oblast I. při proudění v mezikruží s taženým hřídelem je (130).

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta_B L} (r^2 - R_H^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B} (r - R_H) + \left(\frac{\Delta p}{2\eta_B L} R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \right) \ln \left(\frac{r}{R_H} \right) + v_1 \quad (130)$$

Okrajové podmínky použitelné pro řešení proudění v oblasti III. jsou naprosto shodné s těmi v kapitole 6.2.6. Z tohoto faktu plyne, že rovnice rychlostního profilu v oblasti III. má v tomto případě tvar shodný s rovnicí (122). Je ovšem samozřejmé, že hodnota R_I je stejně jako hodnota R_0 v případě oblasti I., vlivem pohybu hřídele odlišná.

Postup určení průtoku je tatáž stejný jako v předchozím případě. Následující tři rovnice vyjadřují průtok jednotlivými oblastmi průtočné domény.

$$\begin{aligned} Q_I = & \frac{\Delta p \pi}{8\eta_B L} (R_H^4 - R_0^4) + \frac{\Delta p \pi}{4\eta_B L} R_H^2 (R_0^2 - R_H^2) + \frac{2\pi\tau_0}{3\eta_B} (R_0^3 - R_H^3) + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_H (R_H^2 - R_0^2) \\ & + \frac{\Delta p \pi}{2\eta_B L} R_0^2 [R_0^2 (\ln(R_0) - 0,5) - R_H^2 (\ln(R_H) - 0,5)] + \frac{\Delta p \pi}{2\eta_B L} R_0^2 [R_H^2 \ln(R_H) - R_0^2 \ln(R_H)] \\ & + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_0 [R_H^2 (\ln(R_H) - 0,5) - R_0^2 (\ln(R_0) - 0,5)] + \frac{\pi\tau_0}{\eta_B} R_0 [R_0^2 \ln(R_H) - R_H^2 \ln(R_H)] \\ & + v_1 \pi (R_0^2 - R_H^2) \end{aligned} \quad (131.1)$$

$$Q_{II} = v_{II} \pi (R_1^2 - R_0^2) \quad (131.2)$$

$$\begin{aligned}
 Q_I = & \frac{\Delta p \pi}{8 \eta_B L} (R_1^4 - R^4) + \frac{\Delta p \pi}{4 \eta_B L} R^2 (R^2 - R_1^2) + \frac{2 \pi \tau_0}{3 \eta_B} (R^3 - R_1^3) + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R (R_1^2 - R^2) \\
 & + \frac{\Delta p \pi}{2 \eta_B L} R_1^2 [R^2 (\ln(R) - 0,5) - R_1^2 (\ln(R_1) - 0,5)] + \frac{\Delta p \pi}{2 \eta_B L} R_1^2 [R_1^2 \ln(R) - R^2 \ln(R)] \\
 & + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R_1 [R_1^2 (\ln(R_1) - 0,5) - R^2 (\ln(R) - 0,5)] + \frac{\pi \tau_0}{\eta_B} R_1 [R^2 \ln(R) - R_1^2 \ln(R)]
 \end{aligned} \quad (131.3)$$

Celkový průtok je potom opět dán součtem výsledků rovnic (131.1), (131.2) a (131.3).

Příčný průřez průtočné domény je stejně jako v předchozím případě mezikruží ohraničené stěnou hřídele a stěnou potrubí. Střední rychlost je opět podílem celkového průtoku a plochy příčného průřezu průtočné domény.

Rovnice popisující rozložení smykového napětí jsou stejné jako rovnice (124) a (125) v předchozí kapitole, jelikož po zderivování rychlostní rovnice (130) odpadá výraz v_I a rychlost hřídele již tedy v rovnicích pro smykové napětí explicitně nevystupuje. Rozdíl v rozložení smykového napětí bude oproti tomu pro proudění v mezikruží se statickým hřídelem dán opět rozdílností hodnot R_0 a R_I .

Co se určení hranic pevného jádra týče, postup je stejný jako v kapitole 6.2.6. Silová rovnováha pevného jádra platí ve stejném tvaru (126) i pro případ taženého hřídele, jen musí být opět dosazovány hodnoty R_0 a R_I platné pro případ taženého hřídele.

Opět je uvažována podmínka rovnosti rychlostí na hranicích pevného jádra (132). Vzhledem k tomu, že rychlost hřídele v rovnici rychlostního profilu pro oblast I. exaktně vystupuje, po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, podobné té v kapitole 6.2.6, je možno získat hodnoty hranic pevného jádra a následně určit rychlostní profil a rozložení smykového napětí v doméně.

$$\begin{aligned}
 v_{zI}(R_0) = v_{zIII}(R_1) \\
 - \frac{\Delta p}{4 \eta_B L} (R_0^2 - R_H^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B} (R_0 - R_H) + \left(\frac{\Delta p}{2 \eta_B L} R_0^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_0 \right) \ln \left(\frac{R_0}{R_H} \right) + v_1 \\
 = - \frac{\Delta p}{4 \eta_B L} (R_1^2 - R^2) + \frac{\tau_0}{\eta_B} (R_1 - R) + \left(\frac{\Delta p}{2 \eta_B L} R_1^2 - \frac{\tau_0}{\eta_B} R_1 \right) \ln \left(\frac{R_1}{R} \right)
 \end{aligned} \quad (132)$$

Hodnoty hranic pevného jádra je opět nutno, stejně jako v případě statického hřídele, řešit numericky. K řešení je opět soustava dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých. Tato soustava může být opět numericky řešena funkcí řešitel dostupnou v Excelu.

První kritickou rychlost pohybu hřídele, tedy rychlost při které dojde k přilnutí pevného jádra k hřídeli je možno určit z předpokladu, že souřadnice spodní hranice pevného jádra R_0 je rovna poloměru vloženého hřídele. Rychlost na horní hranici pevného jádra je v tuto chvíli rovna právě kritické hodnotě pohybu hřídele. Na základě těchto předpokladů je možno hodnotu této rychlosti numericky určit.

Podobnou úvahou je potom možno dojít k vyčíslení druhé kritické rychlosti hřídele, tedy rychlosti, při které dojde k zaniknutí pevného jádra u spodní stěny. Pro tento případ

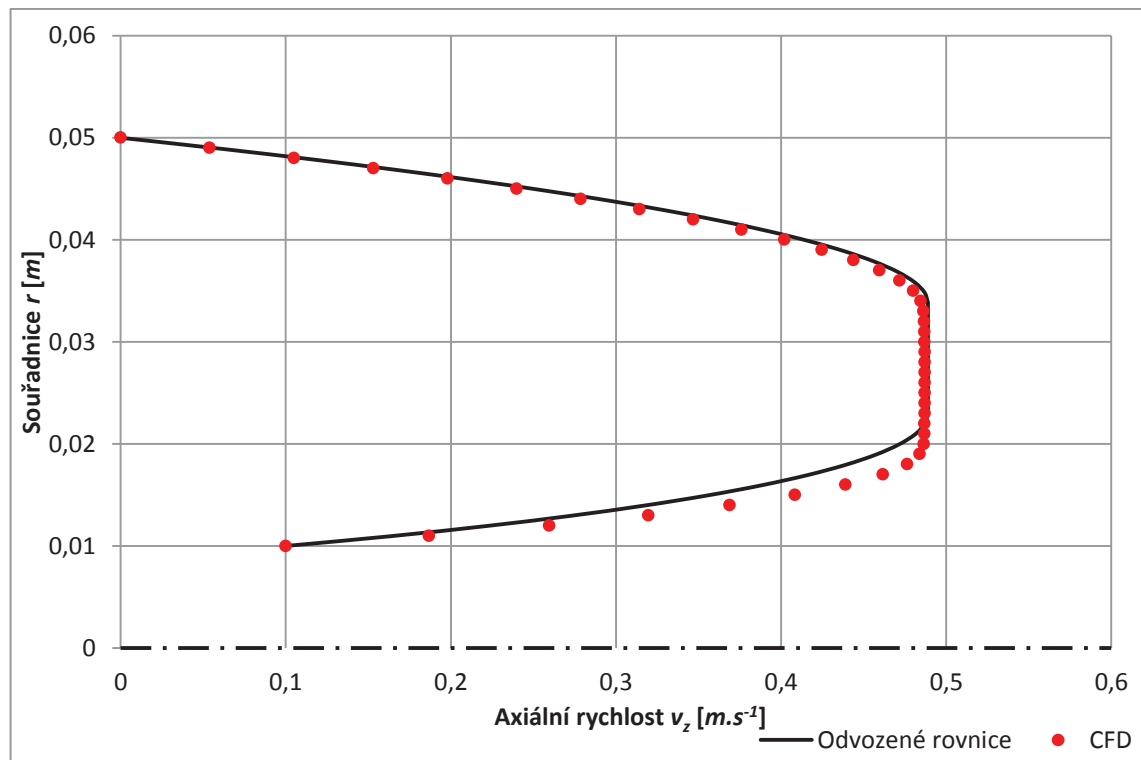
platí, že $R_I = R_H$. Tloušťka pevného jádra δ je v tuto chvíli nulová. Pomocí tabulkového editoru Excel je možno při aplikaci výše zmíněných podmínek hodnotu této rychlosti taktéž numericky určit.

Parametry potrubí i tlakového spádu zůstávají shodné s předchozím případem. Hřídel je tažena rychlostí $v_I = 0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ve směru osy z .

Hranice pevného jádra byly pro tento případ a pro dané parametry numericky určeny následovně:

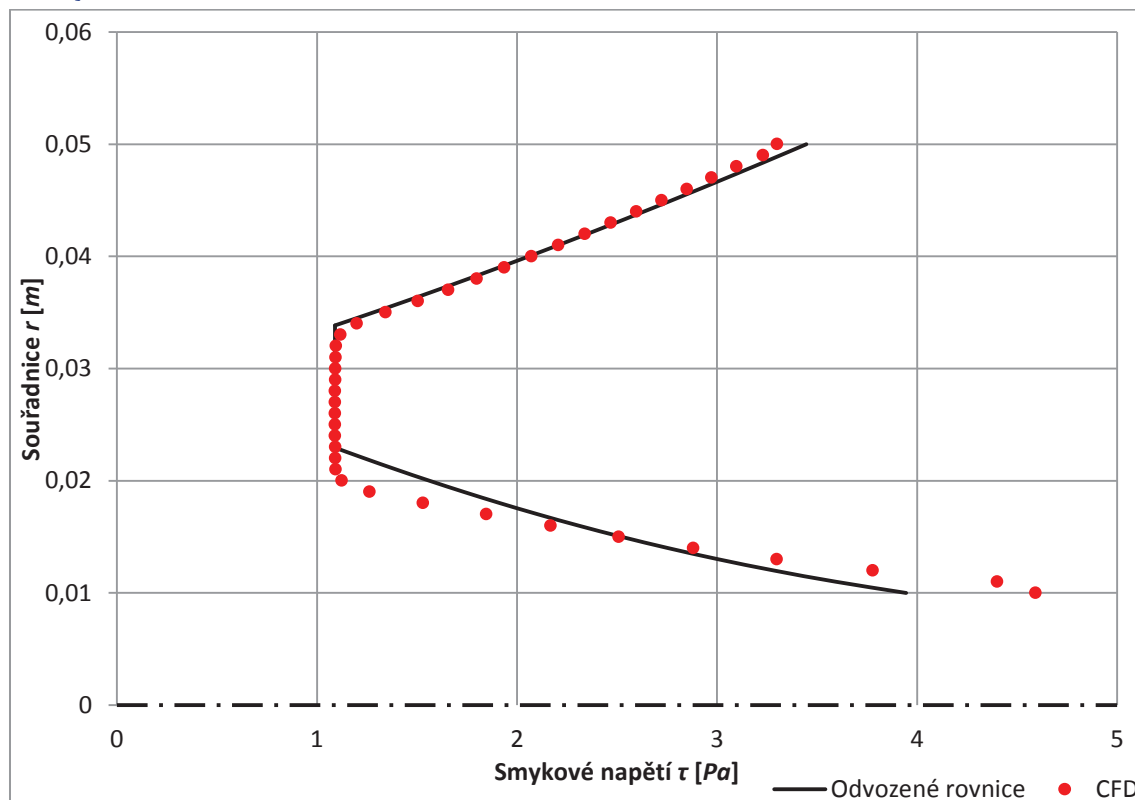
$$R_0 = 0,02295 \text{ m}$$

$$R_I = 0,03385 \text{ m}.$$



Obr. 44: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.

Na Obr. 44 je rychlostní profil získaný z analytických rovnic opět srovnán s rychlostním profilem získaným z numerické simulace.



Obr. 45: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.

Výsledky jsou podobné jako v případě binghamské kapaliny v kruhovém potrubí se statickým vloženým hřídelem. Opět je očividný rozdíl mezi numerikou a analytikou v umístění pevného jádra u z toho plynoucí rozdíly v průbězích rychlosti a smykového napětí v oblastech lineárního chování této kapaliny.

Průtok doménou byl pro tento případ z rovnic (131.1), (131.2) a (131.3) určen na hodnotu $Q = 0,002781 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Střední profilová rychlost byla potom vyčíslena na hodnotu $v_s = 0,3689 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hodnoty kritických rychlostí byly na základě odvozených rovnic numericky určeny následovně.

První kritická rychlost, při níž dochází k přilnutí pevného jádra ke stěně taženého hřídele:

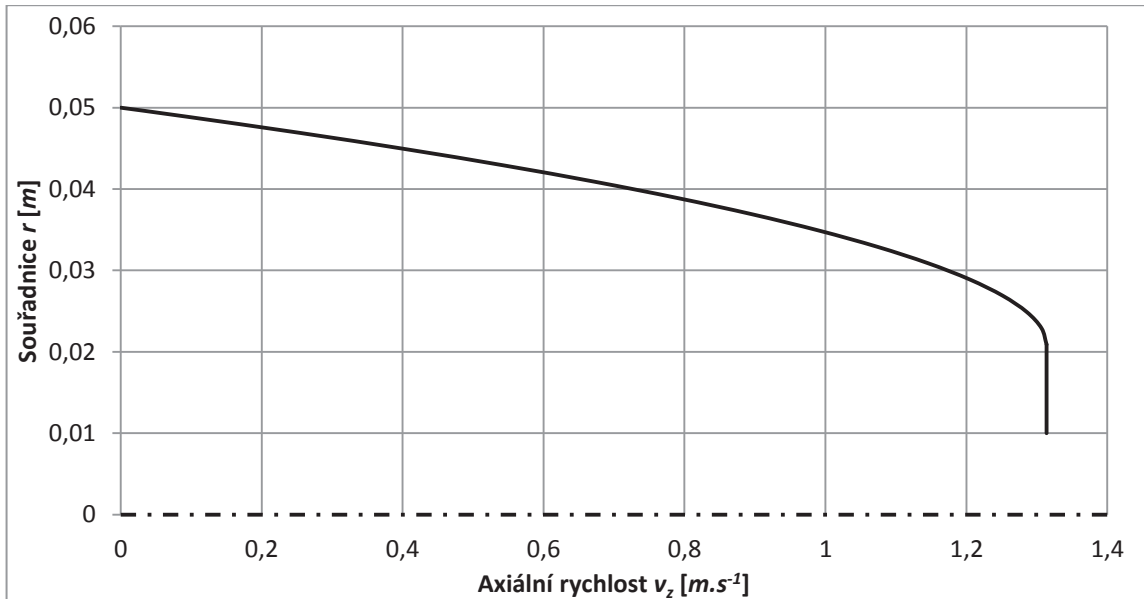
$$v_{k1} = 1,3138 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Druhá kritická rychlost, aneb rychlost pohybu hřídele při níž zaniká pevné jádro u stěny hřídele:

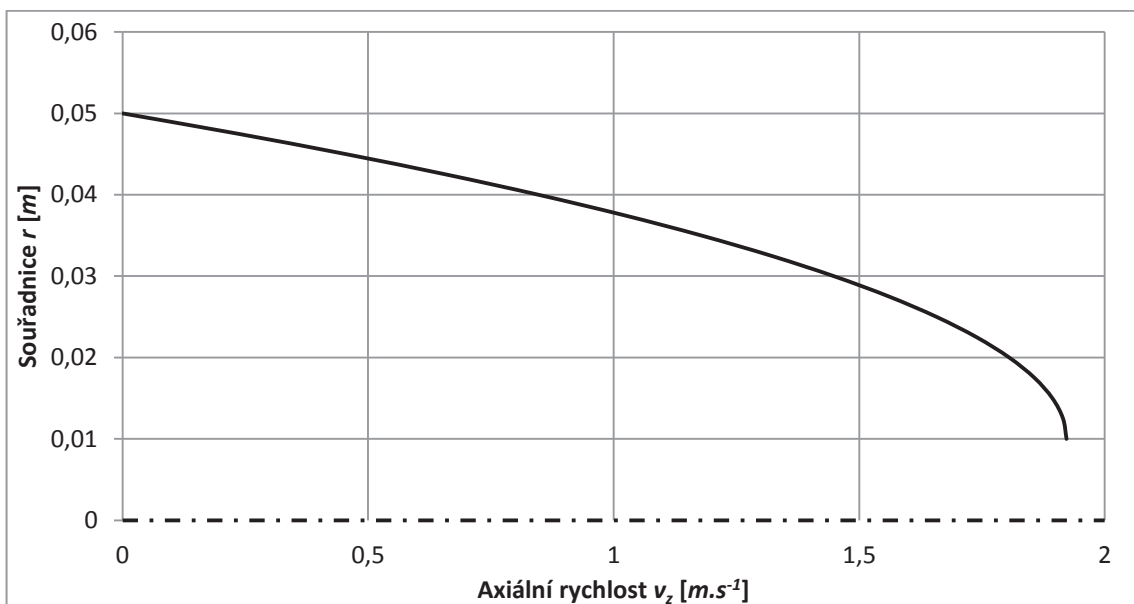
$$v_{k2} = 1,9222 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Na následujících dvou obrázcích jsou zobrazeny rychlostní profily ve chvíli, kdy se hřídel pohybuje kritickou rychlostí. Na Obr. 46 je zobrazen rychlostní profil ve chvíli,

kdy pevné jádro přilne ke stěně hřídele. Na *Obr. 47* je potom situace, při níž pevné jádro u stěny hřídele zaniká.



Obr. 46: Rychlostní profil binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem ve chvíli, kdy pevné jádro přiléhá ke stěně hřídele.



Obr. 47: Rychlostní profil binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem ve chvíli, kdy pevné jádro zaniká u stěny hřídele.

Vzhledem k tomu, že hodnoty získané z odvozených rovnic se od hodnot získaných z CFD mírně liší, nebyly kritické rychlosti pohybu hřídele numericky ověřovány ve Fluentu. Umístění jádra je ve výsledcích jiné, takže je samozřejmé, že kritické rychlosti získané z CFD by hodnotově neodpovídaly těm získaným na základě odvozených analytických vztahů.

7 Numerické simulace proudění binghamské kapaliny

Jak bylo dříve zmíněno, proudění bylo řešeno i numericky pomocí CFD. Byl použit program Fluent, z kterého byl získáván rychlostní profil a rozložení smykového napětí po doměně při proudění v doménách řešených v kapitole 6.

Bylo řešeno proudění jak newtonské, tak binghamské kapaliny.

Řešení Fluentem může sloužit jako jakási kontrola analytických vztahů odvozených v kapitole 6.

Parametry kapaliny, která byla řešena pomocí CFD jako kapalina binghamská byly získány z práce [9].

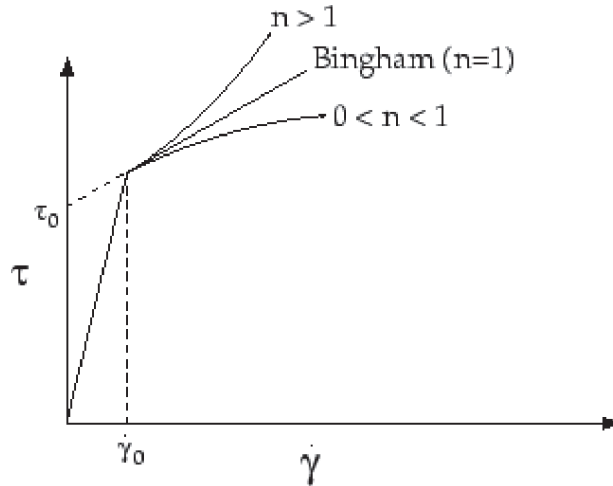
Vzhledem k tomu, že při numerickém odvození bylo přistoupeno i k odvození exaktního vzorce pro určení hodnoty průtoku v jednotlivých řešených případech, bylo možné použít při modelování ve Fluentu kombinaci okrajových podmínek *velocity inlet* (vstup do domény) a *pressure outlet* (výstup z domény). Tato výše zmíněná kombinace okrajových podmínek je velice výhodná jak z hlediska přesného zadávání vstupních parametrů, tak z hlediska dobré a rychlé konvergence. Bylo by samozřejmě možné použít kombinaci *OP pressure inlet* a *pressure outlet*. Problém se zadáváním tlakových okrajových podmínek spočívá v tom, že není možno tímto způsobem exaktně zadat rozdíl statického tlaku na definované délce. Na tlakovém vstupu je ve Fluentu zadáván totální tlak, jehož součástí je i dynamická tlaková složka. Je samozřejmě možné doiterovat se poměrně jednoduchým způsobem, při opakovaném provedení výpočtu ve Fluentu, k hodnotě totálního tlaku, kterou je na vstupu i s uvažováním dynamické složky nutno zadat. Tento způsob je však zdoluhavější a komplikovanější než cesta určení průtoku, ke které bylo v této práci přistoupeno. Určení průtoku, případně střední profilové rychlosti nebylo v řešených případech nijak výrazně náročné a proto bylo těchto integrálních charakteristik využito i při numerické CFD simulaci.

Vzhledem k tomu, že okrajová podmínka *velocity inlet* předepisuje na vstup pístový rychlostní profil, byly délky veškerých numericky řešených domén voleny tak, aby došlo k plnému vyvinutí rychlostního profilu a tento byl exportován v řezu, kde již proudění může být považováno za plně vyvinuté. Průběhy smykových napětí byly v jednotlivých případech získávány vždy ve stejném řezu jako rychlostní profil.

Vzhledem k symetričnosti proudění i okrajových podmínek lze veškeré řešené problémy zjednodušit na 2D úlohu. Veškeré případy proudění mezi paralelními deskami byly řešeny jako klasická 2D úloha. Pro řešení proudění v kruhovém potrubí byl použitý axisymetrický typ úlohy, tedy osová symetrie.

Pro modelování binghamské kapaliny je ve Fluentu dostupný dříve zmíněný Herschel-Bulkleyův model. Při jeho použití je numericky řešena rovnice (3). Tímto modelem je možno simulovat nejen binghamskou, ale i celou škálu jiných typů kapaliny. Tento model je ve Fluentu rozšířen o předpoklad, že rychost smyku, značená $\dot{\gamma}$, pro τ nižší než τ_0 nemusí být rovna nule. τ_0 v tomto případě neznačí pouze mez tečení, nýbrž hranici

rozhraní, kde dochází ke skokové změně binghamské viskozity η_B . Tohoto může být využito, protože na základě literatury [9] lze říci, že právě toto je vlastnost, kterou magnetická kapalina řešená v této práci v některých případech, jak je očividné například z Graf 2, vykazuje.



Obr. 48: Variace závislosti smykového napětí na rychlosti smyku podle Herschel-Bulkleyova modelu. Zdroj: [28].

Podle [28] je pro $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{krit}$ zdánlivá viskozita určena následující rovnicí (133).

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{krit}} \right)^{n-1} \quad (133)$$

Pro $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{krit}$ využívá podle [28] pro výpočet zdánlivé viskozity Fluent rovnici (134).

$$\eta = \tau_0 \frac{\left(2 - \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{krit}} \right)}{\dot{\gamma}_{krit}} + k \left[(2 - n) + (n - 1) \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{krit}} \right] \quad (134)$$

Jako vstupní parametry pro tento model je třeba zadat hodnotu součinitele konzistence k , hodnotu meze toku τ_0 , hodnotu exponentu n a hodnotu kritické rychlosti smyku $\dot{\gamma}_{krit}$. [28]

Kde $\dot{\gamma}$ značí v tomto případě, stejně jako dříve, příčnou derivaci rychlosti podle souřadnice y .

V kapitole 2.3.1 bylo uvedeno, že binghamské kapalině odpovídá v rovnici (3) exponent o hodnotě 1 a faktor konzistence k je pro binghamskou kapalinu roven přímo zdánlivé viskozitě η_B .

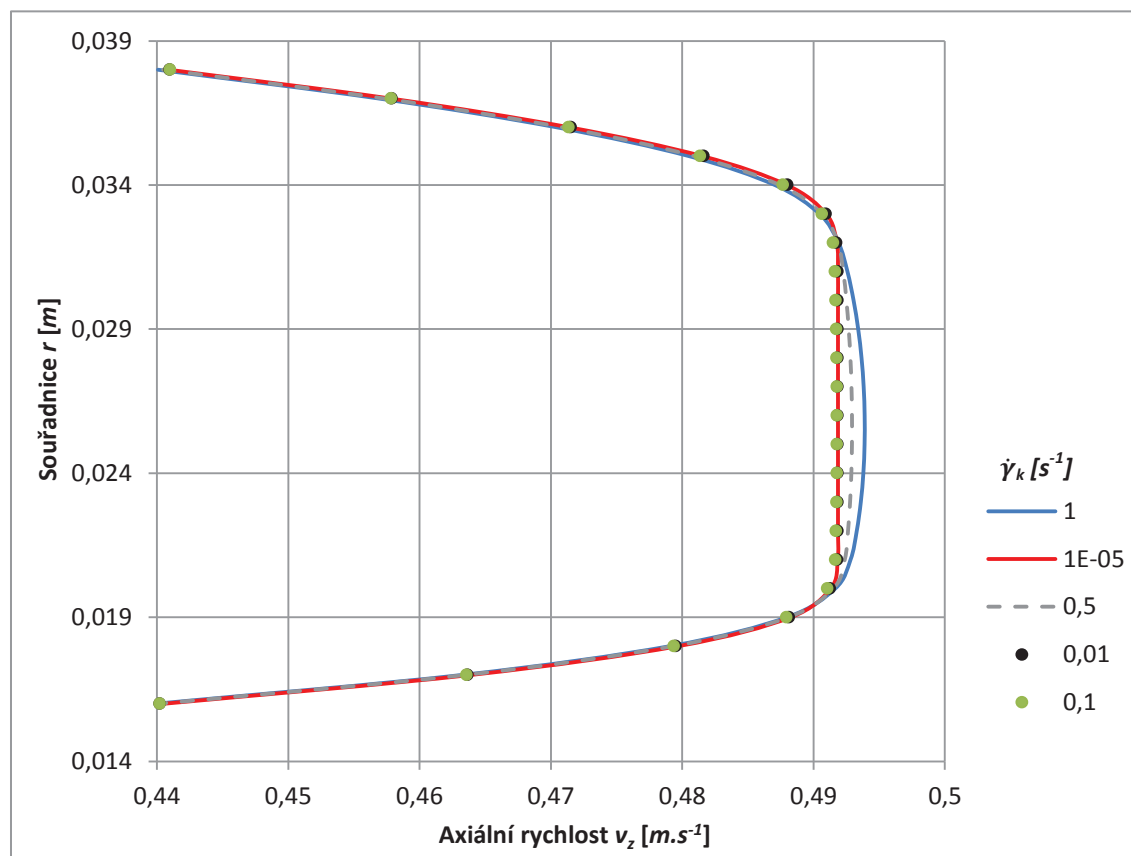
Za předpokladu ideální binghamské kapaliny je viskozita oblasti, kde je τ nižší než τ_0 , nekonečně vysoká (v této oblasti uvažujeme proudění jako ideálně tuhé těleso). Z této skutečnosti vyplývá, že hodnota $\dot{\gamma}_{krit}$ musí být nulová, nebo se limitně blížit nule.

Na následujícím obrázku (Obr. 49) je zobrazen tvar rychlostních profilů binghamské kapaliny při proudění v kruhovém potrubí získaný z Fluentu. Jednotlivé rychlostní

profily byly řešeny pro konstantní parametry binghamské kapaliny, ve stejné doméně i při stejném tlakovém spádu. Jediným rozdílem v jednotlivých případech je hodnota kritické smykové rychlosti zadávaná jako vstupní parametr do Herschel-Bulkleyova modelu. Jak bylo výše zmíněno, tato hodnota by se měla na základě teorie pro binghamskou kapalinu blížit co nejvíce k nule. Na obrázku je zobrazena pouze oblast pevného jádra a přechodu lineárních oblastí do oblasti pevného jádra. Zadaná hodnota kritické smykové rychlosti ovlivňuje právě pouze tuto část rychlostního profilu. Rychlostní profily ve zbytku domény jsou vzájemně shodné.

Na základě *Obr. 49* je možno říci, že pro dostatečně přesné namodelování chování binghamské kapaliny postačuje zadat do Herschel-Bulkleyova modelu hodnotu kritické rychlosti smyku 0,1. Při hodnotách nižších jsou již rychlostní profily velice podobné. Tato hodnota je volena také pro to, že s klesající hodnotou vstupní hodnoty γ_k stoupá doba potřebná k dostatečné konvergenci řešené úlohy.

S ohledem na co nejrychlejší konvergenci a dostatečnou přesnost výpočtu byla ve veškerých případech numerického řešení proudění binghamské kapaliny ve Fluentu v této práci volena kritická rychlost smyku 0,1 s^{-1} .



Obr. 49: Srovnání rychlostních profilů získaných numerickou simulací pro různé hodnoty kritické rychlosti smyku.

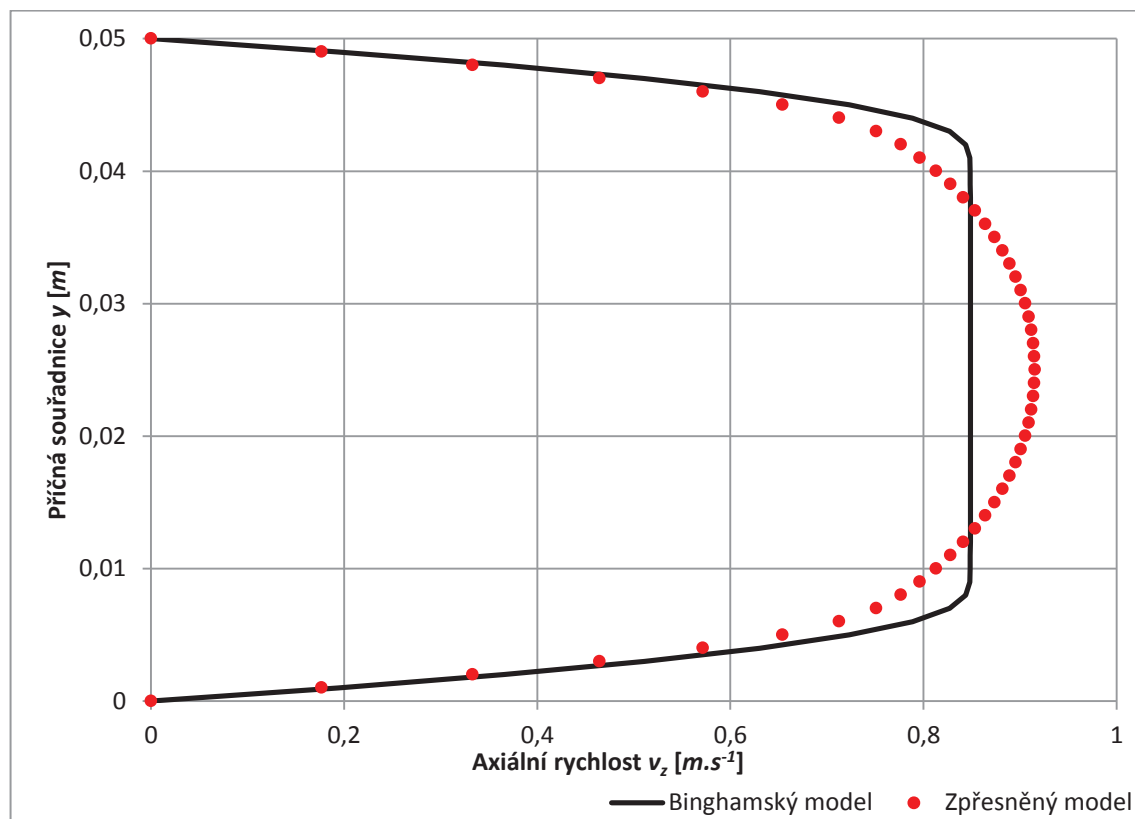
Rychlostní profil byl takto řešen právě pro kruhové napětí s vloženým hřídelem, aby bylo ověřeno, zda je možné, že jsou rozdíly v rychlostních profilech mezi analytickými

rovnícemi a numerickou simulací v kapitolách 6.2.6 a 6.2.7 ovlivnitelné změnou vstupní hodnoty kritické rychlosti smyku. Na základě *Obr. 49* je možno konstatovat, že do takové míry jak se tomu děje ve výše zmíněných kapalinách není možné hodnotou kritické smykové rychlosti tvar rychlostního profilu ovlivnit.

Neuvažujeme-li magnetickou kapalinu jako ideální kapalinu binghamskou, je možné z dat publikovaných Yangem v [9] určit přibližnou hodnotu $\dot{\gamma}_{krit}$ a modelovat tak proudění této kapaliny s vlastnostmi, které se velmi blíží experimentálně zjištěným datům v práci [9]. Tyto parametry jsou uvedeny v kapitole 5.

Z [9] byla získána veškerá data, která jsou potřeba k popisu reologických vlastností magnetické kapaliny, která je považována za kapalinu binghamskou. Stejně tak jsou zde k dohledání data získaná přímo z experimentu, díky čemuž je možno provést simulaci proudění dané magnetické kapaliny při uvažování ideálního binghamského chování a porovnat výsledky této simulace se simulací, při které je použit zpřesněný model, který popisuje chování této kapaliny v kontextu s naměřenými daty věrohodněji.

Srovnání rychlostních profilů získaných z výpočtů ve Fluentu za použití binghamského modelu a modelu založeného na reologickém měření provedeném v [9] pro ferokapalinu, jejíž parametry byly získány z [9], je uvedeno dále na *Obr. 50*.



Obr. 50: Srovnání rychlostních profilů daného typu Ferokapaliny při použití binghamského modelu a modelu zpřesněného.

Jak je z *Obr. 50* očividné, rychlostní profily jsou pro jednotlivé použité modely poměrně odlišné. Průběh vyznačený červenými tečkami, získaný použitím modelu

založeného na reologickém měření z [9] by měl realitě odpovídat více než rychlostní profil vyznačený spojitou černou čarou získaný za uvažování ideálního binghamského chování magnetické kapaliny.

Pravdou je, že byl z dat měřených v [9] vybrán poměrně extrémní případ. Pro danou magnetickou kapalinu proudící v poli o menší hodnotě B by se průběhy rychlostních profilů při použití těchto dvou modelů shodovaly ve větší míře.

Je samozřejmé, že k tomu, aby mohlo být proudění dané magnetické kapaliny simulováno takto zpřesněným modelem, je nutno získat reologické parametry této kapaliny reologickým měřením.

8 Zhodnocení výsledků

Rozložení veličin při proudění newtonské kapaliny je poměrně známá a již mnohokrát publikovaná věc (např. v [2], [5]). Co se newtonské kapaliny týče, je tedy na tomto místě možno konstatovat, že průběhy veličin získané na základě rovnic popisujících newtonskou kapalinu uvedené v této práci odpovídají předpokladům a v podstatě stoprocentně se shodují s průběhy získanými numerickou simulací v programu Fluent.

Průběhy rychlosti a smykového napětí při proudění binghamské kapaliny byly pro jednotlivé domény popsány odvozenými rovnicemi. Veškeré průběhy taktéž odpovídají předpokladům, které byly na základě teorie uvažovány. Průběhy veličin při proudění v doménách popsanych kartézskými souřadnicemi odpovídají jak tvarově tak hodnotově průběhům získaným z Fluentu.

Je tedy možno konstatovat, že proudění binghamské kapaliny může být popsáno rozdílně v dvou oblastech. V oblasti, kde smykové napětí v kapalině nedosahuje hodnoty kritického smykového napětí, proudí tato kapalina jako pevné tělo, tedy v celé této oblasti konstantní rychlostí. Na základě vztahů uvedených v této práci je možno určit v jednotlivých doménách souřadnice hranic tohoto pevného jádra, jeho šířku i rychlost, kterou toto pevné jádro proudí. V práci bylo dokázáno, že tloušťka pevného jádra nezávisí na tvaru domény, v které proudění probíhá. Tento parametr je pro dané případy závislý pouze na hodnotě meze toku binghamské kapaliny a za předpokladu, že je proudění způsobováno jen tlakovým spádem, závisí na hodnotě tohoto tlakovém spádu.

V oblasti, kde je smykové napětí v kapalině vyšší než hodnota τ_0 se kapalina opravdu chová lineárně a průběhy veličin v této oblasti je opět možno vykreslit na základě rovnic odvozených v rámci této práce. Průběhy smykových napětí dané Binghamovým vztahem správně korespondují s rychlostními profily.

Co se týče proudění binghamské kapaliny v doménách popsanych válcovými souřadnicemi, v rychlostních profilech získaných z analyticky odvozených rovnic a z CFD jsou mírné rozdíly. V současné chvíli není možno říci, který výpočet odpovídá více realitě. Pro posouzení shody teoretických průběhů s realitou by bylo třeba provést experiment se skutečnou binghamskou kapalinou.

Je možno konstatovat, že veškeré rozdíly v průbězích veličin jsou způsobeny rozdílnými parametry pevného jádra. Ať už se jedná o jeho tloušťku, nebo o jeho umístění v doméně.

9 Závěr

V rešeršní části této práce byly popsány základní reologické vlastnosti kapalin s hlavním zaměřením na kapaliny binghamské. Byly uvedeny některé příklady těchto kapalin a rozebráno jejich charakteristické chování.

Magnetické kapaliny jsou v práci rozebrány z hlediska jejich typických vlastností a jejich využitelnosti v praxi. Byly uvedeny některé příklady stávajícího použití těchto kapalin v současných průmyslových řešeních. Taktéž byla řešena použitelnost binghamského modelu na magnetické kapaliny v kontextu s reologickými měřeními provedenými v citované literatuře. Na základě faktů uvedených v této práci je možno říci, že pro ferokapalinu, jejíž parametry byly získány z citované literatury, je tento model použitelný s poměrně dobrou přesností vždy při uvažování působení magnetického pole o konstantní velikosti magnetické indukce. Tento fakt již ovšem nemusí být platný pro ferokapaliny, jejichž struktura se od kapaliny řešené v některých kapitolách této práce ve velké míře liší a stejně tak nemusí platit pro proudění magnetoreologických kapalin. Aby bylo možno posoudit použitelnost binghamského modelu na konkrétní magnetickou kapalinu, je třeba provést měření reologických parametrů dané magnetické kapaliny. Podstatná část rešeršní činnosti byla také zaměřena na popis chování magnetických kapalin, založený na závěrech některých předešlých vědeckých prací.

Matematicky bylo řešeno proudění newtonské a binghamské kapaliny mezi paralelními deskami a v kruhovém potrubí. Paralelní desky byly uvažovány jak statické, tak pohyblivé a kruhové potrubí bylo řešeno obecné, se statickým hřídelem vloženým v ose potrubí a s taženým hřídelem vloženým v ose potrubí.

Pro veškeré výše uvedené domény byl určen rychlostní profil, rozložení smykového napětí a exaktní vzorce pro určení průtoku a střední profilové rychlosti. Výsledky získané z odvozených rovnic byly srovnávány s výsledky získanými z numerických simulací provedených ve Fluentu.

V případě newtonské kapaliny byly některé rovnice, které již byly dříve v literatuře publikovány, z této literatury převzaty a byly dořešeny pouze rovnice, které v literatuře dohledatelné nejsou. Pro případ proudění kolem statického a taženého hřídele vloženého v ose potrubí byl odvozen celý matematický popis.

Pro popis binghamské kapaliny byly pro jednotlivé domény odvozeny všechny rovnice potřebné k popisu jejího proudění. Výsledky z těchto rovnic se s výsledky z CFD pro většinu případů velice přesně shodovaly. V případě proudění v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem jak statickým tak taženým bylo řešení vzhledem k nelinearitě a složitosti odvozených rovnic provedeno částečně numericky. V těchto dvou případech a v případě proudění v jednoduchém kruhovém potrubí se objevily odchylky v hodnotách

z odvozených rovnic a v hodnotách získaných z Fluentu. Tento problém se vyskytl pouze při proudění, které bylo popsáno válcovými souřadnicemi. V rámci této práce nebylo možno určit, zda je nepřesnost v odvozených rovnicích nebo v datech z numerických simulací. Tento rozpor je v práci rozebrán a zdokumentován. Posouzení přesnosti by bylo možno provést na základě srovnání s daty získanými z experimentu. Vyřešení tohoto problému by mohlo být námětem k dalšímu zkoumání

V poslední části práce byly studovány možnosti CFD nástroje Fluent na poli simulace proudění binghamské kapaliny. Veškeré analytické vztahy byly ověřeny numerickým výpočtem provedeným v tomto CFD nástroji. Parametry magnetické kapaliny potřebné pro numerickou simulaci jejího proudění při uvažování binghamského chování byly získány z citované literatury.

Celá tato práce je koncipována jako ucelený úvod do problematiky magnetických kapalin a jejich proudění a může sloužit jako odrazový můstek pro další a hlubší studium těchto kapalin.

10 Seznam použité literatury

- [1] DVOŘÁK, L.: *Vlastnosti tekutin*. [Skriptum] Ostrava : VŠB - TU Ostrava, 2011.
- [2] JANALÍK, J.: *Hydrodynamika a hydrodynamické stroje*. [Skriptum] Ostrava : VŠB - TU Ostrava, 2008.
- [3] JANALÍK, J.: *Viskozita tekutin a její měření*. [Skriptum] Ostrava : VŠB - TU Ostrava, 2010.
- [4] MIKULÍK, M.: *Mechanika tekutin, podklady ke studiu část I*. [Skriptum] Žilina : Žilinská univerzita v Žilině, 2009.
- [5] JANALÍK, J. a ŠTÁVA, P.: *Mechanika tekutin*. [Skriptum] Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 2002. 124 s. ISBN 80-248-0038-1
- [6] BRDIČKA, M.; SAMEK, L. a SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2011.
- [7] PIRKL, S.: *Metody měření reologických vlastností kapalin*. Ústav aplikované fyziky a matematiky. [Online] Univerzita Pardubice, 31. 5. 2005. [Citace: 11. 1. 2013.] <http://kf.upce.cz/Reologie%20a%20reometrie%20kapalin.doc>.
- [8] PRÁŠILOVÁ, A.: *Vliv reologie maziv na tloušťku mazacího filmu*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 28 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Ivan Křupka, Ph.D..
- [9] YANG, Y. a další.: *Magnetorheological Properties of Aqueous Ferrofluids*. [PDF] Singapore : School of Mechanical and Aerospace Engineering, Nanyang Technological University, 2005.
- [10] WEIR MINERALS DIVISION: *Weir Minerals Technical Bulletin #14, Pumping Non-Newtonian Slurries*. Weir Minerals. [Online] 28. 8. 2009. [Citace: 29. 11. 2012.] <http://www.weirminerals.com/PDF/Technical%20Bulletin%2014v.2%20-%20FINAL%200809.pdf>.
- [11] MAYER, D.: *Magnetické kapaliny a jejich použití (1. část)*. ELEKTRO. 2007, Sv. 3.
- [12] BOUŘ, P. a další: *Ferrofluid*. Fyzikální seminář. [Online] 4. 1. 2012. [Citace: 23. 1. 2013.] <http://fyzsem.fjfi.cvut.cz/2011-2012/Zima11/proc/ferrofluid.pdf>.
- [13] PONTON, A. a další: *MAGBIOMAT, Main results*. MAGBIOMAT. [Online] Marie Curie Actions IEF, 2011. [Citace: 2. 2 2013.] http://www.physique.univ-paris-diderot.fr/magbiomat/main_results.html.
- [14] NANO AT HOME: *An Experiment That You Can Try*. The Center for Nano- and Molecular Science and Technology. [Online] 17. 2. 2012. [Citace: 1. 12. 2012.] <http://www.tmi.utexas.edu/web/wp-content/uploads/Nano-at-Home-MR-Fluid3.pdf>.
- [15] FERROTEC: *Ferrofluid*. Ferrotec. [Online] 2. 2. 2009. [Citace: 1. 2. 2013.] <http://ferrofluid.ferrotec.com/products/ferrofluid/>.

- [16] MAYER, D.: *Magnetické kapaliny a jejich použití (2. část)*. ELEKTRO. 2007, Sv. 4.
- [17] RAVAUD, R. a další: *Mechanical Properties of Ferrofluids Applications: Centering Effect and Capacity of a Seal*. [Online] 21. 11. 2009. [Citace: 21. 1. 2013.] <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/39/27/84/PDF/paper-ferrofluid-applications.pdf>.
- [18] PATRASCU, D.: *How magnetorheological suspension works*. Autoevolution. [Online] 29. 7. 2009. [Citace: 15. 12. 2012.] <http://www.autoevolution.com/news/how-magnetorheological-suspension-works-8947.html>.
- [19] CRAINIC, N.: *Magnetic Nanofluids, Properties and Applications in Materials Science*. [Online] 1. 3. 2011. [Citace: 2. 3. 2013.] http://www.mesg.nl/wiki/images/3/3e/Lecture2011_06.pdf.
- [20] TOMBÁČZ, E.: *Magnetic particles in nanomedicine*. [Online] 25. 9. 2008. [Citace: 4. 2. 2013.] <http://www.ambbudapest.esteri.it/NR/rdonlyres/A0C6A5DE-05D5-4CD0-9F10-E1C0972F763C/0/Magneticparticlesinnanomedi.pdf>.
- [21] DELGADO, G.C.: *Economical potential and safety of nanomaterials*. [PDF] Ciudad de México : Interdisciplinary Research Centre on Sciences and Humanities, National Autonomous University of Mexico, 6. 5. 2009.
- [22] Subcommittee on Nanoscale Science, Engineering, and Technology, Committee on Technology, National Science and Technology Council: *Strategy for Nanotechnology-related Environmental, Health, and Safety Research*. [Online] 26. 3. 2008. [Citace: 17. 2. 2013.] http://www.nano.gov/sites/default/files/pub_resource/nni_ehs_research_strategy.pdf.
- [23] TIRPÁK, A.: *ELEKTROMAGNETIZMUS*. 2. opravená verze. [Skriptum] Bratislava : Univerzita Komenského Bratislava, 2004.
- [24] SALDIVAR-GUERRERO, R. a další: *Solid to liquid transition of inverse ferrofluids under shear*. [PDF] Bayreuth, Germany, 2005.
- [25] TANG, X.; ZHANG, X. a TAO, R.: *Structure-Enhanced Yield Stress of Magnetorheological Fluids*. [PDF] Worcester Polytechnic Institute : Journal of Applied Physics, 2000.
- [26] JOLLY, M. R.; BENDER, J. W. a CARLSON, J. D.: *Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluids*. [PDF] Cary, NC : Lord Corporation, 1998.
- [27] CHAUDHURI, A. a další.: *Rheological Parameter Estimation Ferrous Nanoparticle-based Magnetorheological Fluid using Genetic Algorithms*. [PDF] College Park : Department of Aerospace Engineering University of Maryland, 2006.
- [28] ANSYS, Inc.: *ANSYS FLUENT 12.0/12.1 Documentation*. [Softwarová dokumentace] ANSYS, Inc., 2009.

11 Seznam použitých znaků

<i>Symbol</i>	<i>Význam</i>	<i>Jednotka</i>
τ	Smykové napětí	[Pa]
η	Dynamická viskozita	[Pa.s]
ν	Kinematická viskozita	[m ² .s ⁻¹]
ρ	Hustota látky	[kg.m ⁻³]
τ_0	Mez toku (yield stress)	[Pa]
v	Rychlost	[m.s ⁻¹]
v_x	Rychlost ve směru osy x	[m.s ⁻¹]
v_z	Axiální rychlost	[m.s ⁻¹]
v_s	Střední rychlost	[m.s ⁻¹]
v_L, v_2	Rychlost pohybu desek, hřídele	[m.s ⁻¹]
η_B	Binghamova viskozita	[Pa.s]
p	Tlak	[Pa]
Δp	Přetlak	[Pa]
v_k	Kritická rychlost proudění v potrubí	[m/s]
L	Obecný délkový rozměr	[m]
D	Vnitřní průměr potrubí	[m]
R_H	Poloměr hřídele	[m]
CW	Koncentrace pevných částic	[%]
d	Průměrná velikost suspendovaných částic	[m]
B	Magnetická indukce	[T]
f	Frekvence	[Hz]
F_L	Lorentzova síla	[N]
q	Bodový nápoj	[C]
H	Příčná vzdálenost paralelních desek	[m]
g	Gravitační zrychlení	[m.s ⁻²]
F_g	Gravitační síla	[N]
t	Čas	[s]
R	Obecný poloměr	[m]
φ	Objemový zlomek nanočástic	[-]
$\dot{\gamma}$	Smyková rychlost	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_k$	Kritická smyková rychlost	[s ⁻¹]
η_{app}	Zdánlivá viskozita	[Pa.s]

<i>Symbol</i>	<i>Význam</i>	<i>Jednotka</i>
<i>a</i>	Zrychlení	$[m \cdot s^{-2}]$
<i>K</i>	Integrační konstanta	$[-]$
<i>b</i>	Obecná šířka domény	$[m]$
<i>Q</i>	Průtok	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
<i>S</i>	Plocha	$[m^2]$
<i>D_H</i>	Hydraulický průměr	$[m]$
<i>O</i>	Omočený obvod	$[m]$
<i>Re</i>	Reynoldsovo číslo	$[-]$

12 Seznam obrázků

<i>Obr. 1: Závislost smykového napětí na příčném gradientu rychlosti jednotlivých typů kapalin. Zdroj [1], str. 35.....</i>	<i>15</i>
<i>Obr. 2: Detergentní částice.....</i>	<i>20</i>
<i>Obr. 3: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny bez působení magnetického pole. Zdroj: [13].....</i>	<i>22</i>
<i>Obr. 4: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny při působení slabého magnetického pole (4mT). Zdroj: [13].....</i>	<i>22</i>
<i>Obr. 5: Mikroskopická struktura magnetické kapaliny při působení magnetického pole o maximální možné velikosti magnetické indukce vzhledem k saturačním vlastnostem dané magnetické kapaliny (30mT). Zdroj: [13].....</i>	<i>23</i>
<i>Obr. 6: Mikroskopický snímek magnetických částic magnetoreologické kapaliny (Zvětšeno 50 000x). Zdroj: [14].....</i>	<i>24</i>
<i>Obr. 7: Těsnění magneticky vodivé hřídele ferokapalinou.....</i>	<i>25</i>
<i>Obr. 8: Těsnění magneticky vodivé hřídele ferokapalinou.....</i>	<i>26</i>
<i>Obr. 9: Schéma těsnění magneticky nevodivé hřídele ferokapalinou.....</i>	<i>26</i>
<i>Obr. 10: Těsnění magneticky nevodivé hřídele ferokapalinou.....</i>	<i>27</i>
<i>Obr. 11: Ferohydrodynamické těsnění. Zdroj: [15].....</i>	<i>27</i>
<i>Obr. 12: Automobilový tlumič systému MagneRide. Zdroj: [10].....</i>	<i>28</i>
<i>Obr. 14: Kartézský souřadný systém a schéma domény – statické desky.....</i>	<i>40</i>
<i>Obr. 15: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.....</i>	<i>43</i>
<i>Obr. 16: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.....</i>	<i>44</i>
<i>Obr. 17: Kartézský souřadný systém a schéma domény – pohyblivé desky.....</i>	<i>45</i>
<i>Obr. 18: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.....</i>	<i>46</i>
<i>Obr. 19: rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.....</i>	<i>47</i>
<i>Obr. 20: Válcový souřadný systém.....</i>	<i>48</i>
<i>Obr. 21: Orientace domény ve válcovém souřadném systému – kruhové potrubí.....</i>	<i>49</i>

Obr. 22: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí.	50
Obr. 23: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí.	51
Obr. 24: Kruhové potrubí se statickým hřídelem.	51
Obr. 25: Rychlostní profil newtonské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.	53
Obr. 26: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění Newtonské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.	54
Obr. 27: Kruhové potrubí s taženým hřídelem.	55
Obr. 28: Rychlostní profil při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen rychlostí 0,01 m/s.	56
Obr. 29: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění newtonské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen rychlostí 0,01 m/s.	57
Obr. 30: Statické paralelní desky – binghamská kapalina.	59
Obr. 31: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.	63
Obr. 32: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny mezi paralelními statickými deskami.	64
Obr. 33: Pohyblivé paralelní desky – binghamská kapalina.	65
Obr. 34: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.	71
Obr. 35: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny mezi pohyblivými paralelními deskami.	72
Obr. 36: Rychlostní profil v okamžiku, kdy je rozdíl rychlostí desek roven první kritické hodnotě rozdílu a dochází k přimknutí pevného jádra ke stěně.	73
Obr. 37: Rychlostní profil v okamžiku, kdy je rozdíl rychlostí desek roven druhé kritické hodnotě rozdílu a dochází k zániku pevného jádra u spodní stěny.	73
Obr. 38: Kruhové potrubí - binghamská kapalina.	75
Obr. 39: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v obecném kruhovém potrubí.	77
Obr. 40: Rozložení smykového napětí při proudění binghamské kapaliny v obecném kruhovém potrubí.	78
Obr. 41: Řešená doména - kruhové potrubí s vloženým statickým hřídelem při proudění binghamské kapaliny.	79
Obr. 42: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v potrubí s vloženým statickým hřídelem.	83
Obr. 43: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým statickým hřídelem.	84
Obr. 44: Řešená doména - potrubí s vloženým hřídelem, který je tažen konstantní rychlostí při proudění binghamské kapaliny.	84
Obr. 45: Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.	87

<i>Obr. 46: Rozložení smykového napětí v doméně při proudění binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým taženým hřídelem.....</i>	<i>88</i>
<i>Obr. 47: Rychlostní profil binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem ve chvíli, kdy pevné jádro přiléhá ke stěně hřídele.</i>	<i>89</i>
<i>Obr. 48: Rychlostní profil binghamské kapaliny v kruhovém potrubí s vloženým hřídelem ve chvíli, kdy pevné jádro zaniká u stěny hřídele.....</i>	<i>89</i>
<i>Obr. 49: Variace závislosti smykového napětí na rychlosti smyku podle Herschel-Bulkleyova modelu. Zdroj: [28].....</i>	<i>91</i>
<i>Obr. 50: Srovnání rychlostních profilů získaných numerickou simulací pro různé hodnoty kritické rychlosti smyku.</i>	<i>92</i>
<i>Obr. 51: Srovnání rychlostních profilů daného typu Ferokapaliny při použití binghamského modelu a modelu zpřesněného.</i>	<i>93</i>

13 Seznam grafů

<i>Graf 1: Závislost tečného napětí na příčném gradientu rychlosti obecné binghamské kapaliny. Ilustrativní případ.....</i>	<i>17</i>
<i>Graf 2: Reologické křivky získané na základě experimentu pro ferokapalinu o objemovém zlomku feronanočástic 0,04. Zdroj: [9].</i>	<i>33</i>
<i>Graf 3: Závislost imaginární meze toku ferokapaliny na velikosti magnetické indukce pro jednotlivé hodnoty φ. Zdroj: [9].</i>	<i>34</i>
<i>Graf 4: Aproximovaný reogram magnetické kapaliny řešené v [9].....</i>	<i>36</i>
<i>Graf 5: Závislost zdánlivé viskozity na rychlosti smyku. Zdroj: [9].</i>	<i>37</i>

14 Seznam tabulek

<i>Tab. 1: Imaginární mez toku měřených ferokapalin při různých parametrech působícího magnetického pole. Zdroj dat: [9].</i>	<i>35</i>
<i>Tab. 2: Binghamská viskozita měřených ferokapalin při různých parametrech působícího magnetického pole. Zdroj dat: [21].....</i>	<i>35</i>
<i>Tab. 3: Proudění mezi pohybujícími se paralelními deskami.</i>	<i>68</i>

15 Přílohy

Tab. P1: Příklady některých suspenzí respektujících Binghamův model. Zdroj: [8].

Suspenze	Koncentrace pevných částic	Průměrná velikost částic	Mez toku	Binghamova viskozita
/	C_w [%]	d [μm]	τ_0 [Pa]	η_B [Pa.s]
Jemně drcené uhlí	49	40	1	0,005
Poléťavý popílek	64	70	8,84	1,304
Kaolinový jíl	32	0,8	20	0,03
Měděný koncentrát	48	35	19	0,018
Zinkový koncentrát	75	20	12	0,31
Uranové částičky	58	38	4	0,015
Částičky zlata	50	50	5	0,087
Částice minerálních písků	55	160	30	0,25
Fosfátové částice	37	10	28,5	0,014
Červené bahno	50	30	33,2	0,304

Tab. P2: Vlastnosti některých komerčních magnetických kapalin. Zdroj: [15]

Označení	Použití	Nosná látka	Magnetická saturace	Viskozita
/	/	/	[mT]	[mPa.s]
APG 311	Audiotechnika	Syntetický uhlovodík	11	70
APG 2140	Audiotechnika	Syntetický uhlovodík	22	4000
APG S51	Audiotechnika	Syntetický ester	38,5	500
EMG 911	Měřicí technika, medicína	Lehký uhlovodíkový olej	11	2
EMG 900	Měřicí technika, medicína	Lehký uhlovodíkový olej	99	60
EMG 304	Medicína, studijní účely	Voda	27,5	40
EMG 700	Magnetická analýza, medicína	Voda	32,5	<5