UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Anna Kotková

Geometrické úlohy v soutěži Matematický klokan

Olomouc 2023 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne _______________ _______________________

Bc. Anna Kotková

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. vedoucímu mé diplomové práce, za odborné rady. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Miroslavě Poláchové za pomoc při výzkumné části na ZŠ Stupkova v Olomouci.

Obsah

Úvod

V diplomové práci se zabývám geometrickými úlohami ze soutěže Matematický klokan. Geometrické úlohy nejsou na školách příliš oblíbené, ale v soutěži Matematický klokan se je snaží uchopit zábavnou formou, a proto jsem si dané téma vybrala. Úlohy jsou zajímavé a dají se řešit několika různými způsoby. V práci jsem se věnovala geometrickým úlohám z kategorií Benjamín a Kadet, které odpovídají věkové kategorii žáků 2. stupně základních škol.

V teoretické části své práce se věnuji historii této soutěže, jejímu vzniku a jak se dostala až k nám do České republiky. Dále se věnuji organizaci soutěže, jejím kategoriím, pravidlům a cílům jaké soutěž má.

V praktické části jsem vybrala z každé kategorie několik geometrických úloh o různé obtížnosti a řeším dané úlohy různými způsoby, které podrobně popisuji. Většina řešení je doplněna i o obrázek, ve kterém je znázorněna hlavní myšlenka, která vedla k řešení. Veškeré obrázky uvedené v praktické části jsem sama vytvářela v programu Geogebra.

Druhá část praktické části obsahuje výzkumnou část, kde jsou ukázány dva testy o čtyřech úlohách, které byly předány žákům 2. stupně ZŠ Stupkova v Olomouci. Žáci nejenom kroužkovali odpovědi, ale psali i postupy, jakými danou úlohu řešili. Tyto postupy jsou v práci ukázány a graficky vyhodnoceny. Následně jsem srovnávala způsoby řešení, které žáci zvolili.

Cílem mé diplomové práce je ukázat, že geometrické úlohy se dají řešit několika možnými způsoby. Dále je cílem diplomové práce rozebrat testy nejen podle toho, zda žáci odpověděli správně, ale jaký způsob řešení si k tomu vybrali.

I. Teoretická část

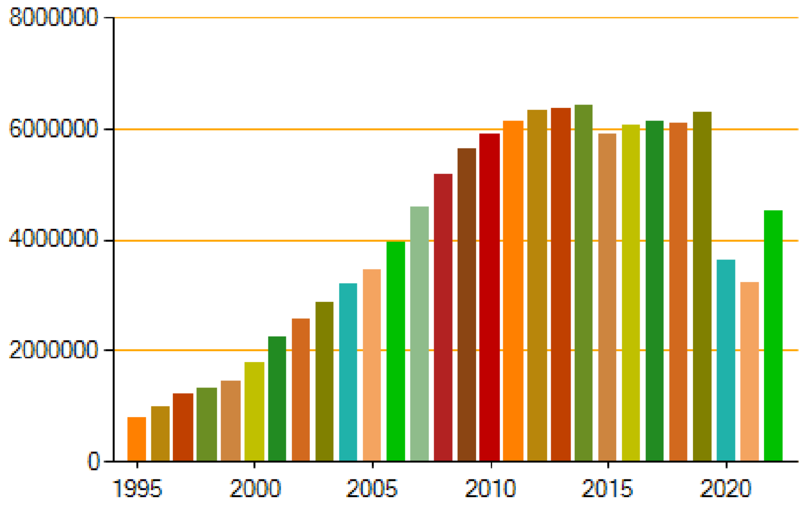
1. Soutěž matematický klokan

1.1. Historie soutěže Matematický klokan

Soutěž Matematický klokan je jednou z největších matematických soutěží na světě a její historie sahá až do 80. let minulého století, kdy tuto soutěž představil australský učitel matematiky Peter O'Halloran jako nový druh matematické soutěže, jejímž základním prvkem byl didaktický test s výběrem odpovědí. Jeho záměrem bylo vytvořit soutěž, která bude pro matematiku získávat „normální“ žáky, tedy pro žáky, kteří nejsou nejtalentovanější matematici. Chtěl ukázat, že matematika nemusí být vždy nudná, nezáživná nebo dokonce obávaný školní předmět. Chtěl žákům poskytnout radost ze soutěžení při kterém budou řešit netradiční úlohy, které se v učebnicích moc nevyskytují. Na testové otázky se odpovídalo jednotně prostřednictvím počítače, který test současně opravil a vyhodnotil. Soutěžit tedy mohlo tisíce žáků napříč celou Austrálií, kde jediným omezením bylo připojení k internetu (Vaněk, Calábek, Nocar 2018).

Skupina francouzských matematiků se inspirovala australským příkladem a v roce 1991 soutěž zorganizovala s názvem „Kangaroo“. Symbolem této soutěže se stal právě australský klokan. V prvním ročníku se soutěže zúčastnilo 120 000 žáků ve věku 15-16 let. V následujících letech byla soutěž zorganizovaná i pro jiné věkové kategorie. O rok později byla soutěž uskutečněna i v Polsku, Rumunsku, Bulharsku a v několika dalších zemích Evropy, tedy soutěž, která proběhla 15.května 1991 ve Francii, považujeme za „evropský“ start soutěže (Novák, 2005).

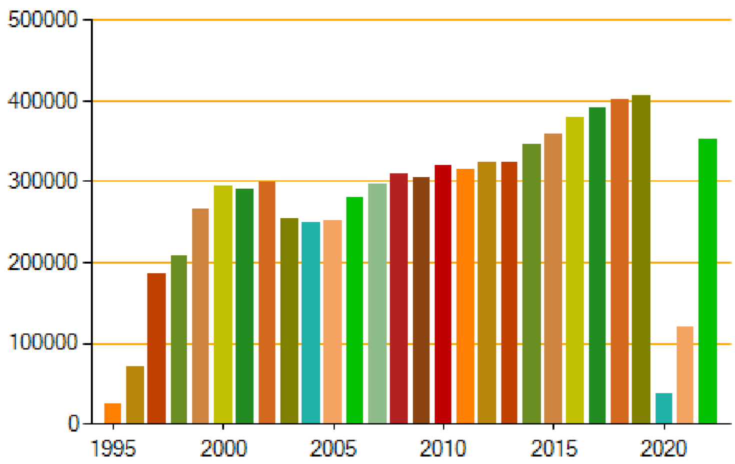
Mezinárodní dimenzi získala soutěž v roce 1994, kde ve francouzském Štrasburku vnikla mezinárodní asociace s názvem „Kangourou sans frontières“, která sdružovala 11 evropských zemí (Francie, Španělsko, Velká Británie, Itálie, Polsko, Maďarsko, Slovinsko, Nizozemí, Rusko, Moldávie, Lucemburko). Byly přijaty Stanovy asociace, formulována pravidla soutěže a postupně ustanoveny jednotlivé kategorie. V průběhu let se postupně zpřesňovala pravidla soutěže: počet úloh, časový limit, možnost používání kalkulátorů. Počet zemí, které se soutěže účastnili se rychle zvyšoval (Novák, 2005).



Graf 1: Graf znázorňující počet účastníků soutěže celosvětově
(Zdroj: Association Kangourou sans Frontieres, Statistics, 2023)

V České republice se soutěž poprvé uskutečnila 23. března 1995. Pořadateli této soutěže se stali ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého a Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Od roku 1997 se jedná o oficiální soutěž zařazenou mezi soutěže podporované MŠMT ČR. Účast v soutěži je pro všechny české účastníky bezplatná, protože je dotována příspěvky MŠMT ČR a JČMF, které pokrývají náklady na organizaci i ceny pro vítěze jednotlivých kategorií (Novák, 2005).

Prvního ročníku uskutečněným v České republice se účastnily pouze vybrané školy v území Olomouckého a Moravskoslezského kraje. Do této soutěže se zapojilo přibližně 25 000 žáků různých kategorií. Všechny kategorie měly strukturu 10 + 10 + 10 úloh a vyhrazený čas byl 75 minut na SŠ 90 minut. V roce 2002 nastala změna, kdy snížili počet úloh na dnešních 8+8+8 úloh, rozdělených bodově podle obtížnosti na 3 bodové, 4 bodové a 5 bodové (Vaněk, Calábek, Nocar 2018).



Graf 2: Graf znázorňující počet účastníků soutěže v České republice
(Zdroj: Association Kangourou sans Frontieres, Statistics, 2023)

1.2. Organizace soutěže

Organizace související s Klokanem probíhají celý rok. Koncem června na pravidelné schůzi českého republikového výboru Klokana, jsou garanti jednotlivých kategorií vyzváni, aby do konce srpna připravili několik úloh. Klokanské úlohy by měli být vtipné, krátké s výběrem možností. Úlohy, které vytvoří přeloží do anglického jazyka a na začátku září odešlou pořadatelům každoročního setkání pořadatelů Klokana v jednotlivých zemích, kteří jsou sdruženi v mezinárodní asociaci. Hlavním cílem setkání je vybrat ze zaslaných návrhů úloh pro každou kategorii. Do konce kalendářního roku je pak třeba úlohy přeložit do češtiny a přizpůsobit našim podmínkám. Vzhledem k odlišnosti školních osnov a kurikulí je dovoleno pozměnit maximálně 5 úloh v kategorii (Novák, 2005).

Soutěž je jednorázová a individuální. Na školách všech pořadatelských zemí se soutěž koná ve stejný den (obvykle v pátek) a stejnou hodinu, v třetí březnový týden. Zadání úloh se předávám učitelům matematiky. Žáci mají 60 minut na vyřešení 24 úloh, kromě kategorie cvrček, kde mají žáci 40 minut na 12 úloh. Úlohy jsou seřazeny ve třech skupinách podle obtížnosti. Žáci své odpovědi zaznamenávají do záznamových archů (tzv. Karty odpovědí). Tyto archy pak učitelé matematiky opravují a vyhodnocují výsledky. Následně zpracují statistiky školy (počet účastníků a bodů) každé kategorie. Tyto statistiky se dostávají do celostátního zpracování. Výsledky jednotlivých kategorií jsou pak na přelomu května a června zveřejněny na internetových stránkách (Novák, 2005).

1.3. Kategorie soutěže

Soutěže se mohou účastnit žáci od 2. ročníků ZŠ až po 4. ročník SŠ v 6 kategoriích rozdělených podle věku.

Kategorie této soutěže jsou následovné:

1. CVRČEK – kategorie určena pro žáky 2. a 3. tříd ZŠ (kategorie zavedena až v roce 2005)
2. KLOKÁNEK – kategorie určena pro žáky 4. a 5. tříd ZŠ
3. BENJAMÍN – kategorie určena pro žáky 6. a 7. tříd ZŠ a žáky 1. a 2. ročníku osmiletých gymnázií
4. KADET – kategorie určena pro žáky 8. a 9. tříd ZŠ, 3. a 4. ročníků osmiletých gymnázií a 1. a 2. ročníku šestiletých gymnázií
5. JUNIOR – kategorie určena pro žáky 1. a 2. ročníku SŠ, 5. a 6. ročníků osmiletých gymnázií a 3. a 4. ročník šestiletých gymnázií
6. STUDENT – kategorie určena pro žáky 3. a 4. ročníku SŠ, 7. a 8. ročník osmiletých gymnázií a 5. a 6. ročník šestiletých gymnázií

(Organizační řád soutěže Matematický klokan, 2023)

1.4. Cíle soutěže

Cílem soutěže je zapojit do soutěže různé žáky, tedy nejen žáky, kteří jsou talentovaní, ale i žáky, kteří nemají k matematice tak blízký vztah. Soutěž matematický klokan se svým zaměřením snaží především rozvíjet zájem žáků o matematiku, snaží se v žácích vzbudit pozitivní vztah k matematice jako školnímu předmětu. Soutěž umožňuje poskytnout příležitost vyzkoušet si své možnosti, schopnosti a matematické dovednosti porovnat se svými vrstevníky v celostátním či mezinárodním srovnání (Novák, 2005).

1.5. Pravidla soutěže

Kategorie Cvrček

Soutěže se účastní žáci 2. a 3. tříd ZŠ. Soutěžní test obsahuje 18 úloh, které jsou rozděleny podle obtížnosti: 1. – 6. úloha je za 3 body, 7. – 12. úloha je 4 body a 13. – 18. úloha je za 5 bodů. Žáci mají na vyřešení 60 minut. Za každou správnou odpověď získají příslušný počet bodů, za každou nezodpovězenou úlohu body neztratí ani nezískají a za nesprávnou odpověď se jim odečítá 1 bod. Každý žák vybírá správnou odpověď z nabízených 5 možností, kde správná je vždy pouze 1 odpověď. Každý žák vstupuje do testu s 18 body, což znamená, že nemůže získat záporný počet bodů ani když budou všechny odpovědi nesprávné. Maximálně mohou získat 90 bodů (Pravidla soutěže matematický klokan – kategorie Cvrček, 2023).

Kategorie Klokánek, Benjamín, Kadet

Soutěže se účastní žáci 4. a 5. tříd ZŠ (Klokánek), 6. a 7. tříd ZŠ a 1. a 2. ročníku osmiletého gymnázia (Benjamín), 8. a 9. tříd ZŠ, 3. a 4. ročníku osmiletého gymnázia a 1. a 2. ročníku šestiletého gymnázia (Kadet). Žáci mají na zpracování čas 60 minut + 15 minut organizační práce. Soutěžní test obsahuje 24 úloh, které jsou rozděleny podle obtížnosti: 1.-8. úloha je za 3 body, 9. – 16. úloha je za 4 body a 17. – 24. úloha je za 5 bodů. Za každou správnou odpověď získají příslušný počet bodů, za každou nezodpovězenou úlohu body neztratí ani nezískají a za nesprávnou odpověď se jim odečítá 1 bod. Každý žák vybírá správnou odpověď z nabízených 5 možností, kde správná je vždy pouze 1 odpověď. Každých žák v různých kategoriích vstupuje do testu s 24 body, což znamená, že nemůže získat záporný počet bodů i kdyby měl všechny odpovědi nesprávné. Maximálně žáci mohou získat 120 bodů. Při řešení není dovoleno používat kalkulačky, tabulky ani jinou literaturu (Pravidla soutěže matematický klokan – kategorie Klokánek, Benjamín, Kadet, 2023).

Kategorie Junior, Student

Soutěže se účastní žáci 1. a 2. ročníku SŠ, 3. a 4. ročníku šestiletého gymnázia, žáci 5. a 6. ročníku osmiletého gymnázia (Junior) a žáci 3. a 4. ročníku SŠ, 5. a 6, ročníku šestiletého gymnázia, 7. a 8. ročníku osmiletého gymnázia (Student). Žáci mají na zpracování testu 75 minut + 15 minut na organizační práce. Soutěžní test obsahuje 24 úloh, které jsou rozděleny podle obtížnosti: 1.-8. úloha je za 3 body, 9. – 16. úloha je za 4 body a 17. – 24. úloha je za 5 bodů. Za každou správnou odpověď získají příslušný počet bodů, za každou nezodpovězenou úlohu body neztratí ani nezískají a za nesprávnou odpověď se jim odečítá 1 bod. Každý žák vybírá správnou odpověď z nabízených 5 možností, kde správná je vždy pouze 1 odpověď. Každý žák z obou zmíněných kategorií vstupuje do testu s 24 body, tedy nemůže získat záporný počet bodů i kdyby měl všechny odpovědi nesprávné. Během testu není dovoleno používat kalkulačky, tabulky ani jinou literaturu (Pravidla soutěže matematický klokan – kategorie Junior, Student, 2023).

1.6. Řešení úloh v soutěži Matematický klokan

Úlohy v soutěži Matematický klokan jsou obvykle označovány jako nestandartní úlohy. Žáci musí sami najít způsob řešení, který není známý a řešitel pak k výsledku často dochází originálním způsobem. K vyřešení úlohy existuje více možných způsobů:

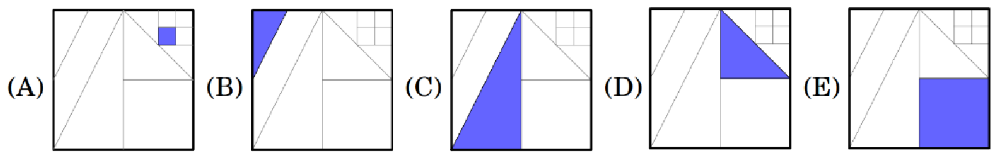
1) Správným řešením
2) Vylučovací metodou, při které eliminuje nevyhovující z nabízených odpovědí
3) Postupným vyzkoušením jednotlivých odpovědí
4) Tipem, kde pravděpodobnost úspěchu je 20 %, ale za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod
   (Vaněk, Calábek, Nocar, 2018)

II. Praktická část

2. Geometrické úlohy z kategorie Benjamín

2.1. Úlohy za 3 body

1) (2021,8) Čtverce na obrázcích jsou rozděleny úsečkami na části. Úsečky jsou vždy vedeny buď z krajního bodu jiné úsečky, nebo z jejího středu. Na kterém obrázku je vybarvena právě $\frac{1}{8}$ celého čtverce?



<u>Řešení 1:</u>

Čtverec je rozdělen svislou čarou na 2 obdélníky, tedy přesně na dvě poloviny. Tyto dva obdélníky můžeme rozdělit na poloviny, buď jako v řešení (C) nebo jako v řešení (E), tím získáváme $\frac{1}{4}$ a tyto dvě řešení můžeme vyloučit. Abychom získali $\frac{1}{8}$ musíme tyto čtvrtiny ještě rozpůlit. V řešení (D) vidíme rozpůlený čtverec, který představoval $\frac{1}{4}$, proto můžeme jednoznačně říct, že řešení (D) je správné řešení.

Kdybychom tímto způsobem probírali řešení (A) a (B). došli bychom k závěru, že řešení (A) představuje $\frac{1}{64}$ a řešení (B) představuje $\frac{1}{16}$.

<u>Řešení 2:</u>

Můžeme postupovat tak, že celý čtverec složíme z daných částí v řešení. Tedy rozebereme-li každou možnost postupně, pak:

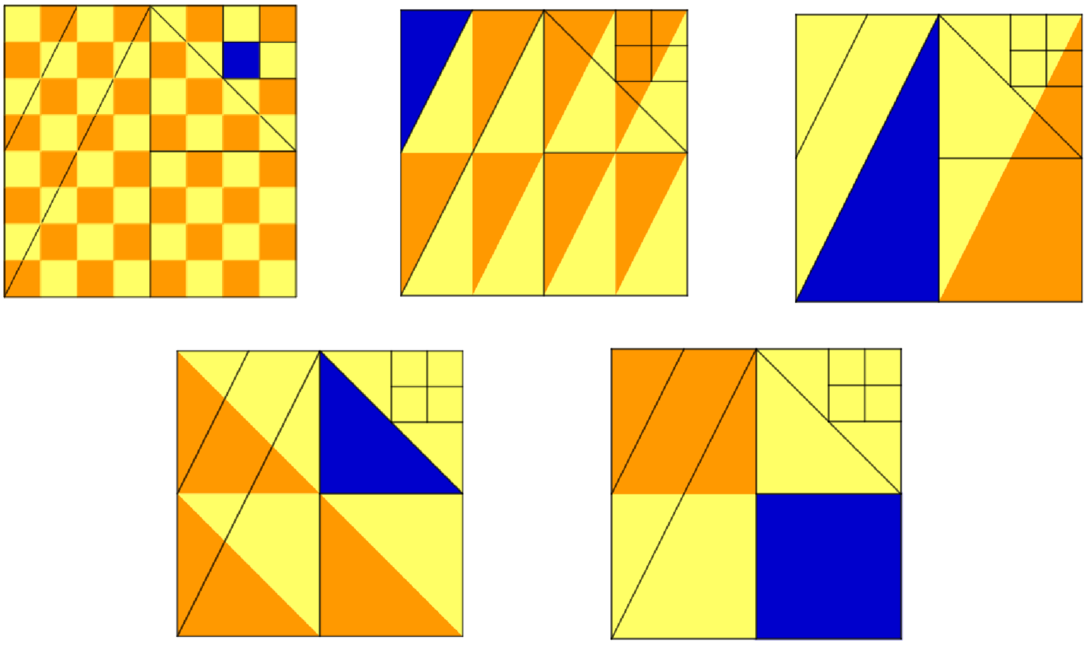
V řešení (A) vybarvená část představuje jeden čtvereček z 64 čtverečků, tedy $\frac{1}{64}$ čtverce.

V řešení (B) vybarvená část představuje jeden trojúhelník z 16 trojúhelníků, tedy $\frac{1}{16}$ čtverce.

V řešení (C) vybarvená část představuje jeden trojúhelník ze čtyř, tedy $\frac{1}{4}$ čtverce.

V řešení (D) vybarvená část představuje jeden trojúhelník z osmi, tedy $\frac{1}{8}$ čtverce, a tedy i správné řešení.

V řešení (E) vybarvená část představuje jeden čtverec ze čtyř, tedy $\frac{1}{4}$ čtverce.



Řešení 3:

Dalším možným způsobem, jak tuto úlohu řešit je přes výpočet jednotlivých obsahů. Žák si může zvolit délku strany čtverce a vypočítat, tak obsah celého čtverce, protože části jsou rozděleny úsečkami, které jsou vždy vedeny z krajního bodu jiné úsečky nebo z jejího středu.

Nejjednodušší je si zvolit délku strany na 8 j, pak obsah celého čtverce je: $S = a^2 = 8^2 = 64\ \mathrm{j}^2$.

Odpověď (A) má jeden čtvereček, jehož délka strany odpovídá $\frac{1}{8}$ strany čtverce, tedy 1 j, pak je jeho obsah: $S = a^2 = 1^2 = 1\ \mathrm{j}^2$ a jeho část odpovídá $\frac{1}{64}$ čtverce.

Odpověď (B) má jeden pravoúhlý trojúhelník, kde jedna jeho odvěsna je rovna polovině délky strany čtverce, tedy 4 j a druhá jeho odvěsna je rovna čtvrtině délky strany čtverce, tedy 2 j, pak jeho obsah je: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ j^2 a jeho část odpovídá $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$ čtverce.

Odpověď (C) má jeden pravoúhlý trojúhelník, kde jedna jeho odvěsna je rovna polovině délky strany čtverce, tedy 4 j a druhá jeho odvěsna je rovna délce strany čtverce, tedy 8 j, pak jeho obsah je: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$ j^2 a jeho část odpovídá $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ čtverce.

Odpověď (D) má jeden rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, kde obě jeho odvěsny mají délku rovnou polovině délky strany čtverce, tedy 4 j, pak jeho obsah je: $S = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ j^2 a jeho část odpovídá $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ čtverce, což je i správné řešení.

Odpověď (E) má jeden čtverec, který má stranu rovnu polovině délky stany původního čtverce, tedy 4 j, pak jeho obsah je: $S = a^2 = 4^2 = 16$ j^2 a jeho část je stejně jako u řešení (C) rovna $\frac{1}{4}$ čtverce.

2) (2007,6) Dřevěnou krychli o objemu 1 m^3 rozřežeme na menší krychle o objemu 1 dm^3. Tyto krychle stavíme jednu na druhou do vysoké „věže“. Určete nejvyšší možnou výšku této věže.

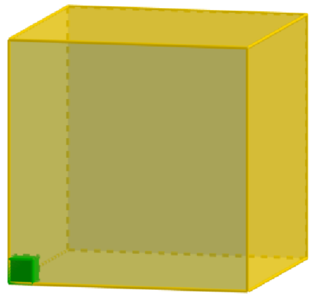
(A) 1 m

(B) 10 m

(C) 110 m

(D) 1000 m

(E) 100 m



Řešení 1:

Dřevěná krychle o objemu 1 m^3 má hranu o délce 1 m a menší krychle o objemu 1 dm^3 má hranu o délce 1 dm = 0,1 m, což je desetina velikosti hrany velké krychle. Zajímá nás na kolik malých krychlí byla dřevěná krychle rozřezaná. Na jednu hranu velké krychle se vejde 10 malých krychlí, takže velká krychle je složena z 10x10x10 malých krychlí, tedy z 1000 krychlí, kde jedna krychle má délku hrany 1 dm. Věž byla složena ze všech krychlí, takže byla vysoká 1000 dm = 100 m. Správná odpověď je (E).

Řešení 2:

Dřevěná krychle má objem 1 m^3, a protože věž je složena ze všech malých krychlí na které byla velká krychle rozřezaná, pak musí mít věž stejný objem. Věž má tvar čtyřbokého hranolu se čtvercovou podstavou, objem takového hranolu vypočítáme jako: $V = S_p \cdot v = a \cdot a \cdot v$, výšku hranolu pak po vyjádření vypočítáme: $v = \frac{V}{S_p} = \frac{V}{a \cdot a}$, kde S_p je obsah podstavy.

Menší krychle, ze kterých je věž poskládána, má objem 1 dm^3, tedy velikost hrany této krychle je 1 dm = 0,1 m. Povrch jedné stěny této krychle je 1 dm^2 = 0,01 m^2, což je současně i obsah podstavy.

Výšku věže můžeme vypočítat: $v = \frac{V}{S_p} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \text{ m}$. Správná odpověď je (E).

Řešení 3:

Dřevěnou krychli rozřezali na krychličky o objemu 1 dm^3, tyto krychličky mají obsah podstavy 1 dm^2. Co kdyby nerozřezali krychli na kostičky, ale na hranoly, které budou mít podstavu stejnou jako krychličky, tedy právě 1 dm^2. Pokud bychom na sebe naskládali tyto hranoly, výsledek bude stejně vysoký jako věž z krychliček.

Dřevěná krychle má objem 1 m^3, tedy jedna hrana má délku 1 m. Výška jednoho hranolu na který byla krychle rozřezána je shodná s délkou hrany dřevěné krychle. Hranoly mají výšku 1 m a obsah podstavy 1 dm^2. Otázkou je kolik takových hranolů na sebe budeme stavět.

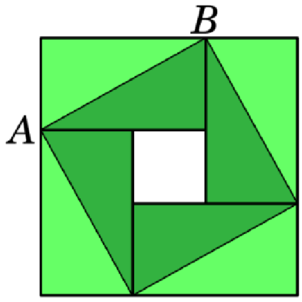
Dřevěná krychle má podstavu 1 m^2 = 100 dm^2. Hranol má obsah podstavy1 dm^2, což znamená, že na 100 dm^2 máme 100 hranolů.

Postavíme-li na sebe 100 shodných hranolů, kde každý hranol je vysoký 1 m, tak získáme věž o výšce 100 m. Správná odpověď je (E).

2.2. Úlohy za 4 body

1) (2020,14) Velký čtverec na obrázku je složen ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obsah velkého čtverce je 49 cm^2 a délka úhlopříčky *AB* jednoho z obdélníků je 5 cm. Vypočítej obsah malého čtverce.

(A) 1 cm^2
(B) 4 cm^2
(C) 9 cm^2
(D) 16 cm^2
(E) 25 cm^2



Řešení 1:

Jednou z možností je vypočítat obsah menšího čtverce uvnitř velkého čtverce, který má vyznačené vrcholy *A* a *B*. Obsah tohoto čtverce, můžeme vypočítat, protože známe délku jeho stran, která je 5 cm. Obsah menšího čtverce je: $S = a^2 = 5^2 = 25\ \mathrm{cm}^2$. Když odečteme obsah menšího čtverce od obsahu velkého čtverce, získáme obsah 2 obdélníků (čtyř polovin obdélníků, tedy přesně 2 obdélníků). Obsah 2 obdélníků je tedy $S_0 = 49 - 25 = 24\ \mathrm{cm}^2$. Velký čtverec je složen ze 4 obdélníků a jednoho malého čtverce. Obsah malého čtverce tedy získáme tak, že od obsahu velkého čtverce odečteme obsah 4 obdélníků. $S_č = 49 - (24 + 24) = 1\ \mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (A).

Řešení 2:

Protože známe obsah velkého čtverce, známe i délku jeho strany. $a = \sqrt{49} = 7\ \mathrm{cm}$. Strana velkého čtverce je složena z jedné dlouhé strany obdélníku a jedné krátké strany obdélníku. Úhlopříčka v obdélníku je současně i přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, kde součet odvěsen je 7 cm. Musí platit Pythagorova věta $a^2 + b^2 = c^2$, takže součet druhých mocnin obou odvěsen musí být roven 25. Možnosti, které mohou nastat jsou kombinace stran 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4. V případě 1 a 6 by byl součet druhých mocnin roven 37, což není 25. Pokud by se jednalo o kombinaci 2 a 5, pak by součet druhých mocnin by roven 29, takže jediná správná kombinace je 3 a 4, kde součet druhých mocnin je skutečně 25.

Když strany obdélníku jsou 3 cm a 4 cm, pak obsah obdélníku je: $S = a \cdot b = 3 \cdot 4 = 12\ \mathrm{cm}^2$. Velký čtverec je složen ze 4 obdélníků a jednoho malého čtverce. Pro zjištění obsahu malého čtverce stačí odečíst od obsahu velkého čtverce čtyři obdélníky. $S_č = 49 - 4 \cdot 12 = 1\ \mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (A).

<u>Řešení 3:</u>

Podobně jako u řešení 2 nejprve zjistíme strany obdélníků pomocí Pythagorovy věty. Obdélník má strany dlouhé 3 cm a 4 cm. Na obrázku vidíme, že každý obdélník má delší stranu složenou z jedné strany bílého čtverce a kratší strany obdélníku. Delší strana je dlouhá 4 cm a kratší strana je dlouhá 3 cm. Délku strany bílého čtverce určíme rozdílem stran obdélníku: $a = 4 - 3 = 1\ \mathrm{cm}$. Když známe délku čtverce můžeme vypočítat jeho obsah: $S = a^2 = 1^2 = 1\ \mathrm{cm}^2$.

2) (2011,12) V obdélníku jsou umístěny čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Urči součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků.

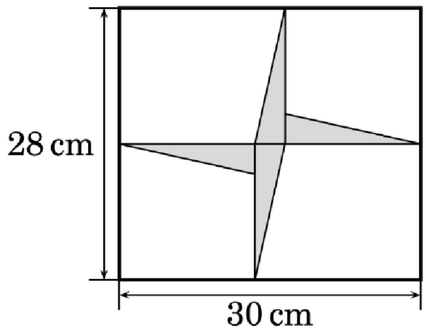
(A) 46 cm^2

(B) 52 cm^2

(C) 54 cm^2

(D) 56 cm^2

(E) 64 cm^2



Řešení 1:

Abychom vypočítali obsah trojúhelníku potřebujeme znát délku podstavy a velikost výšky k dané podstavě.

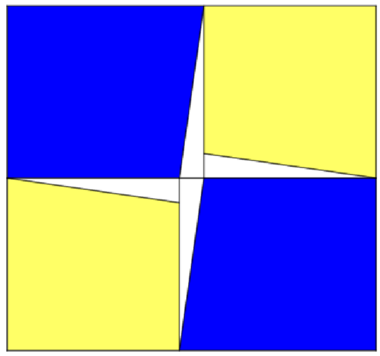
Na obrázku vidíme dva trojúhelníky, které mají podstavy spojené, vidíme, že dohromady mají výšku 28 cm, z toho je zřejmé, že výška jednoho trojúhelníku bude poloviční, tedy 14 cm. Delší strana obdélníku je složena z délky dvou výšek trojúhelníku a jedné délky podstavy. Délku podstavy tedy můžeme dopočítat a její velikost bude: $a = 30 - 2 \cdot 14 = 2\ \mathrm{cm}$.

Obsah těchto čtyř trojúhelníku je: $S = 4 \cdot \frac{a \cdot v}{2} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 14}{2} = 56\ \mathrm{cm}^2$ (D).

Řešení 2:

Obdélník na obrázku je složen ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků a 4 lichoběžníků. Obsah čtyř trojúhelníků můžeme vypočítat tak, že od obsahu obdélníku odečteme obsah lichoběžníků. Lichoběžníky nejsou všechny stejné, jak můžeme vidět, jsou dva menší a dva větší. Na výpočet obsahu lichoběžníku potřebujeme znát výšku, a délky obou základen.

Pro menší (žlutý) lichoběžník je výška v rovna polovině kratší strany obdélníka tedy 14 cm, základna a je také rovna polovině kratší strany obdélníka, což je 14 cm a základna c je rovna polovině kratší strany obdélníka bez 2 cm (bez velikosti podstavy trojúhelníka), tedy 12 cm. Obsah menšího lichoběžníka vypočítáme: $S_m = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = \frac{(14+12)\cdot 14}{2} = 182\ \mathrm{cm}^2$.



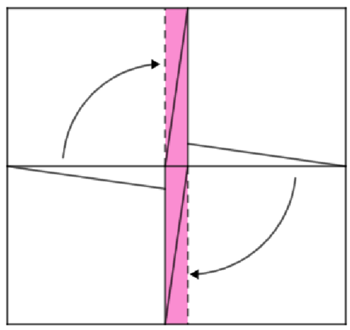
Pro větší (modrý) lichoběžník je výška v rovna polovině kratší strany obdélníka, tedy 14 cm. Základna a je rovna velikosti delší strany obdélníka bez 14 cm (výška menšího lichoběžníka), což je 16 cm. Základna c má stejnou velikost jako výška menšího lichoběžníka, tedy 14 cm. Obsah většího lichoběžníka vypočítáme: $S_v = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = \frac{(16+14)\cdot 14}{2} = 210\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah obdélníka je: $S_o = 30 \cdot 28 = 840\ \mathrm{cm}^2$. Protože už známe obsahy lichoběžníků můžeme vypočítat obsah čtyř shodných trojúhelníků:

$$S = S_o - 2\cdot S_m - 2\cdot S_v = 840 - 2\cdot 182 - 2\cdot 210 = 56\ \mathrm{cm}^2\ \text{(D)}.$$

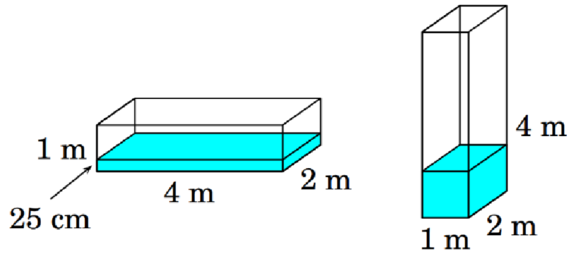
Řešení 3:

Všechny čtyři pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné a pokud je k sobě přiložíme, pak nám vznikne obdélník (jako na obrázku vpravo). Delší strana a nově vzniklého obdélníku je 28 cm, tuto informaci známe již ze zadání. Kratší strana obdélníka je dána rozdílem 30 cm a 28 cm (odečítáme od strany původního obdélníka výšku dvou trojúhelníků). Kratší strana obdélníku tedy je: $b = 30 - 28 = 2\ \mathrm{cm}$. Protože známe obě strany vzniklého obdélníku, můžeme vypočítat jeho obsah: $S = a \cdot b = 28 \cdot 2 = 56\ \mathrm{cm}^2$.



3) (2022, 10) Nádrž na vodu tvaru kvádru má rozměry 4 m x 2 m x 1 m a je napuštěna vodou do výšky 25 cm. Nádrž otočíme tak, aby podstava byla 1 m x 2 m. Do jaké výšky bude sahat hladina vody?

(A) 25 cm
(B) 50 cm
(C) 75 cm
(D) 1 m
(E) 1,25 m



Řešení 1:

Nejprve vypočítáme, jaký je objem vody v kvádru, protože objem se při otočení nezmění. Objem vody vypočítáme: $V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 2\ \mathrm{m}^3$. Objem vody v přetočeném kvádru je tedy také 2 m^3. Nás zajímá, do jaké výšky voda sahá, proto vyjádříme jednu stranu ze vzorce pro výpočet objemu kvádru a výšku vypočítáme: $h = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1\ \mathrm{m}$. Správná odpověď je tedy (D).

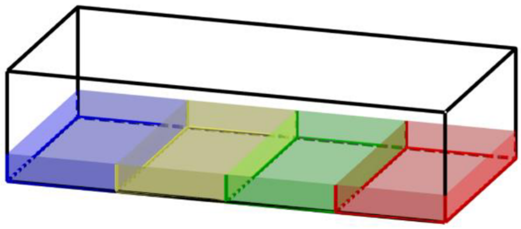
Řešení 2:

Vypočítáme celkový objem kvádru a jakou část tvoří objem vody v kvádru. Část, kterou tvoří voda v kvádru bude stejná nezávisle na tom, jak bude kvádr natočen. Celkový objem kvádru je: $V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8\ \mathrm{m}^3$. Objem vody v kvádru je: $V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 2\ \mathrm{m}^3$. Poměr objemu vody ku celkovému objemu kvádru je 2:8 tedy 1:4, voda teda tvoří čtvrtinu objemu kvádru. Otočený kvádr má výšku 4 metry a víme, že voda bude sahat do čtvrtiny výšky, tedy do výšky 1 m, správná odpověď je (D).

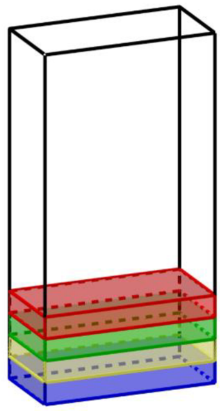
Řešení 3:

Podobně, jako u řešení 2 můžeme řešit příklad i bez výpočtu objemu. Budeme se věnovat pouze tomu, do jaké výšky voda sahá a v jakém je poměru k výšce kvádru. Voda sahá do výšky 0,25 m z celkové výšky kvádru 1 m. 0,25:1 můžeme upravit na 1:4, voda tedy sahá do $\frac{1}{4}$ výšky kvádru a stejně tomu tak bude i v přetočeném kvádru. Voda bude sahat do $\frac{1}{4}$ výšky kvádru, výška kvádru je v tomto případě 4 m, proto voda bude sahat do výšky 1 m (D).

Řešení 4:



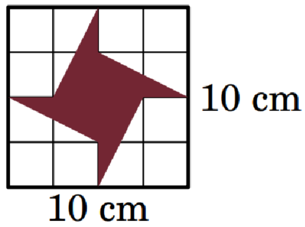
Tuto úlohu lze řešit i tak, že si představíme, že voda v kvádru zmrzla a má pevný tvar o rozměrech 4 m x 2 m x 0,25 m. Tento kvádr ledu nyní musíme rozřezat tak aby se vešel do kvádru o rozměrech podstavy 1 m x 2 m.



Můžeme je nařezat na 4 díly o rozměrech 1 m x 2 m x 0,25 m (pro přehlednost jsou dílky na obrázku barevně rozlišené). Nyní tyto dílky naskládáme na sebe do převráceného kvádru. Dali jsme na sebe 4 dílky o výšce 0,25 m. Výška vody tedy sahá do výšky 1 m (D).

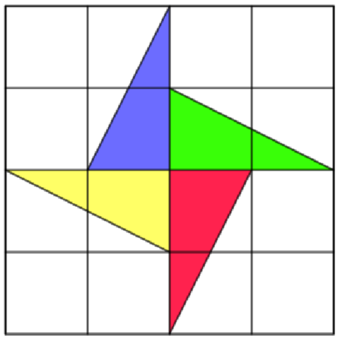
4) (2022,12) Na obrázku je čtverec o obsahu 100 cm^2 s čtvercovou sítí. Která hodnota odpovídá obsahu tmavě vyznačené plochy?

(A) 20 cm^2
(B) 25 cm^2
(C) 30 cm^2
(D) 35 cm^2
(E) 40 cm^2



Řešení 1:

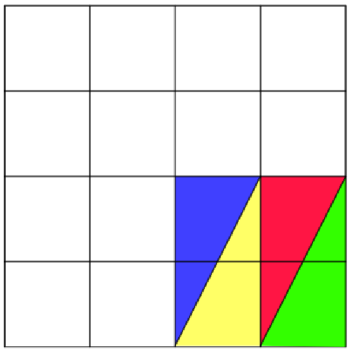
Když se podíváme na obrázek, tak můžeme vidět, že vyznačená plocha je složena ze čtyř shodných trojúhelníků. Pro zjištění, jaká hodnota odpovídá obsahu vyznačené plochy nám tedy stačí vypočítat obsah jednoho z trojúhelníků, který poté vynásobíme počtem trojúhelníků, tedy čtyřmi.



K výpočtu obsahu jednoho trojúhelníku využijeme čtvercovou síť. Velký čtverec má stranu o délce 10 cm. Jedna strana velkého čtverce je složena ze 4 malých čtverců, proto je délka strany malého čtverce 2,5 cm.

Trojúhelník, jehož obsah potřebujeme vypočítat je pravoúhlý, a proto k výpočtu jeho obsahu potřebujeme znát délky jeho odvěsen. Kratší odvěsna a má délku shodnou se stranou jednoho malého čtverce, tedy 2,5 cm. Delší odvěsna b má délku shodnou se dvěma stranami malého čtverce, tedy 5 cm. Obsah jednoho trojúhelníku je: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 5}{2} = 6{,}25\ \mathrm{cm}^2$ Obsah čtyř trojúhelníků, tedy obsah vyznačené části je: $S_v = 4 \cdot 6{,}25 = 25\ \mathrm{cm}^2$ (B).

Řešení 2:



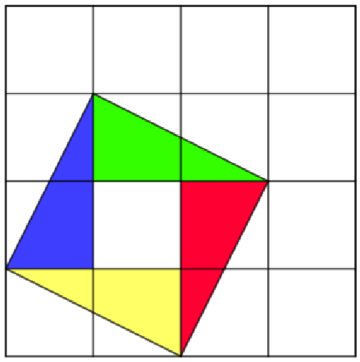
Vyznačená plocha je složena ze 4 shodných pravoúhlých trojúhelníků. Pokud tyto trojúhelníky přeskládáme (tak jako na obrázku), vznikne nám čtverec.

Plochu vyznačeného čtverce můžeme spočítat několika způsoby. Jednou z možností je určit strany vzniklého čtverce. Strana čtverce je složena ze dvou malých čtverců, tedy délka strany čtverce je 5 cm.

Obsah vyznačeného čtverce je: $S = a^2 = 5^2 = 25\ \mathrm{cm}^2$(B).

Další možností je vypočítat obsah vyznačeného čtverce jako část z velkého čtverce. Obsah velkého čtverce je 100 cm^2. Vyznačený čtverec tvoří přesně $\frac{1}{4}$ velkého čtverce. $\frac{1}{4}$ ze 100 je 25, obsah vyznačené části je 25 cm^2 (B).

Řešení 3:



Další z možností, jak tento příklad řešit je podobně jako v řešení 2 přeskládáme v čtvercové síti trojúhelníky, tak aby nám vznikl útvar, u kterého umíme vypočítat obsah.

Pokud trojúhelníky přeskládáme tak, jak můžeme vidět na obrázku vznikne nám čtverec ve kterém je jeden z čtverců sítě. K výpočtu obsahu vzniklého čtverce potřebujeme zjistit délku jeho strany.

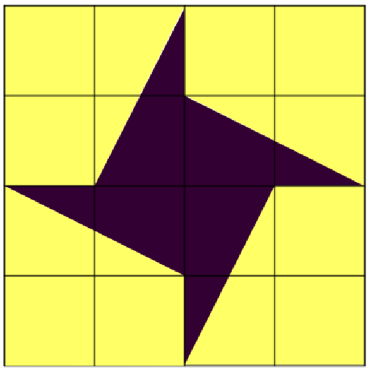
Strana nově vzniklého čtverce je shodná s délkou přepony pravoúhlého trojúhelníka, ze kterých se čtverec skládá. Délku přepony trojúhelníka vypočítáme pomocí Pythagorovi věty. Délky odvěsen zjistíme díky čtvercové síti. Kratší odvěsna a má délku 2,5 cm a delší odvěsna b má délku 5 cm. Délka přepony c je: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 5^2} = \sqrt{6{,}25 + 25} = \sqrt{31{,}25}\ \mathrm{cm}$.

Obsah vzniklého čtverce je: $S_v = \sqrt{31{,}25}^{\,2} = 31{,}25\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah jednoho čtverce z čtvercové sítě je: $S_č = 2{,}5^2 = 6{,}25\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah vyznačené části vypočítáme jako rozdíl obsahu vzniklého čtverce a obsahu jednoho čtverce z čtvercové sítě: $S = S_v - S_č = 31{,}25 - 6{,}25 = 25\ \mathrm{cm}^2$ (B).

<u>**Řešení 4:**</u>



Vyznačená plocha má tvar nekonvexního osmiúhelníku, pokud v něm hned neuvidíme 4 shodné pravoúhlé trojúhelníky, tak se můžeme zaměřit na útvary, které zůstanou ve čtvercové síti, když vyznačenou plochu odstraníme.

Pokud bychom odebrali nekonvexní osmiúhelník, zůstanou nám ve čtvercové síti 4 pravoúhlé lichoběžníky. Když od obsahu velkého čtverce odečteme obsahy těchto lichoběžníků, získáme obsah námi hledané vyznačené plochy.

K výpočtu obsahu jednoho lichoběžníku potřebujeme znát délky jeho základen a, c a velikost výšky $v.$ Délka jeho delší základny a je 5 cm (délka dvou dílku z čtvercové sítě), délka jeho kratší základny c je 2,5 cm (délka jednoho dílku z čtvercové sítě). Velikost výšky v je 5 cm (délka dvou dílků z čtvercové sítě). Obsah jednoho lichoběžníku: $S_{1L} = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = \frac{(5+2{,}5)\cdot 5}{2} = 18{,}75\ \mathrm{cm}^2$. Obsah čtyř lichoběžníků je potom: $S_L = 4 \cdot S_{1L} = 4 \cdot 18{,}75 = 75\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah vyznačené plochy vypočítáme rozdílem obsahu čtverce a čtyř lichoběžníků, kde obsah čtverce je 100 cm^2. $S_v = S_č - S_L = 100 - 75 = 25\ \mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (B).

2.3. Úlohy za 5 bodů

1) (2004,17) V obrázku určete poměr obsahů bílé a vybarvené části.

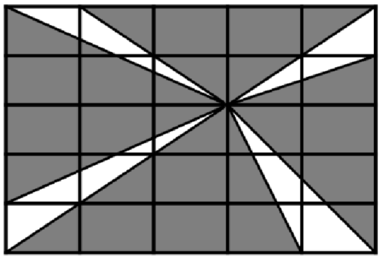
(A) 1:4

(B) 1:5

(C) 1:6

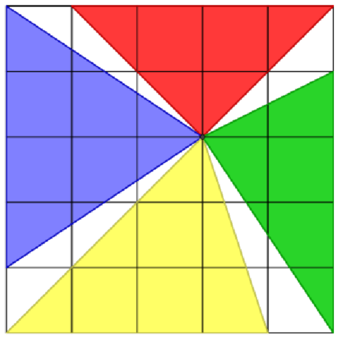
(D) 2:5

(E) 2:7



Řešení 1:

Protože se jedná o poměr obsahů můžeme si řešení usnadnit a z obdelníkové sítě (u které neznáme rozměry) uděláme jednotkovou čtvercovou síť, kde obsah jednoho čtverečku bude $1\ \mathrm{j}^2$.



Celkový obsah vypočítáme jednoduše, jako obsah čtverce, kde strana čtverce je 5 j. $S = a^2 = 5^2 = 25\ \mathrm{j}^2$

Obsah vybarvené části vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých trojúhelníků. (Pro přehlednost jsem jednotlivé trojúhelníky rozdělila barevně)

Obsah červeného trojúhelníku: $S_č = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\ \mathrm{j}^2$

Obsah zeleného trojúhelníku: $S_z = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\ \mathrm{j}^2$

Obsah žlutého trojúhelníku: $S_ž = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ \mathrm{j}^2$

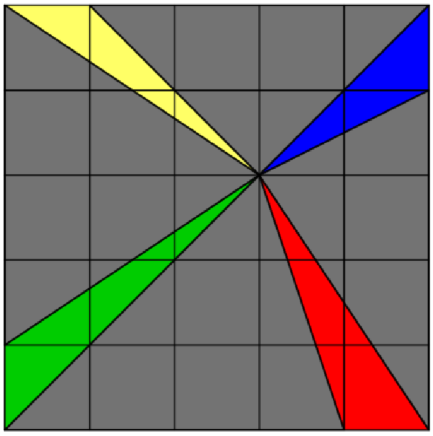
Obsah modrého trojúhelníku: $S_m = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ \mathrm{j}^2$

Obsah vybarvené části: $S_v = S_č + S_z + S_ž + S_m = 4 + 4 + 6 + 6 = 20\ \mathrm{j}^2$

Obsah bílé části vypočítáme jako rozdíl celkového obsahu a obsahu vybarvených částí: $S_b = S - S_v = 25 - 20 = 5\ \mathrm{j}^2$

Poměr obsahů bílé a vybarvené části je 5:20, což je po úpravě 1:4 (A).

Řešení 2:



Stejně jako v řešení 1 využijeme toho že se jedná o výpočet poměru a upravíme si síť na jednotkovou čtvercovou, kde obsah jednoho čtverečku bude 1 j^2.

Obsah bílé části můžeme určit tak, že vypočítáme obsahy jednotlivých trojúhelníků.

Obsah červeného trojúhelníku: $S_č = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5\ \text{j}^2$.

Obsah modrého trojúhelníku: $S_m = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\ \text{j}^2$.

Obsah žlutého trojúhelníku: $S_ž = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\ \text{j}^2$.

Obsah zeleného trojúhelníku: $S_z = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5\ \text{j}^2$.

Obsah bílé části: $S_b = S_č + S_m + S_ž + S_z = 1{,}5 + 1 + 1 + 1{,}5 = 5\,\text{j}^2$.

Celkový obsah vypočítáme jako obsah čtverce o straně 5 j: $S = a^2 = 5^2 = 25\,\text{j}^2$.

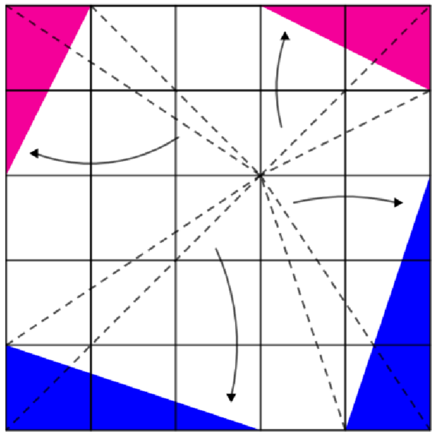
Obsah vybarvené části určíme rozdílem celkového obsahu a obsahu bílé části: $S_v = S - S_b = 25 - 5 = 20\ \text{j}^2$.

Poměr obsahů bílé a vybarvené části je 5:20, což je po úpravě 1:4 (A).

Řešení 3:

Bílé trojúhelníky si v síti můžeme pro lepší představu upravit na pravoúhlé trojúhelníky. Obsah zůstane stejný a tedy i poměr bílé a tmavé části bude zachovaný.

Všimneme si že nám vznikli dva menší (růžové) trojúhelníky, které dohromady tvoří obdelník přes dva čtverečky. Dále nám vznikly dva větší (modré) trojúhelníky, které dohromady tvoří obdélník přes 3 čtverečky. Dohromady je bílá část tvořena 5 čtverečky. Zbytek z celkové části nám tvoří tmavá část, která zasahuje do 20 čtverečků.



Poměr obsahů bílé a vybarvené části je 5:20, což je po úpravě 1:4 (A).

Řešení 4:

Úkol můžeme řešit i vylučovacím způsobem z možných řešení.

Síť je tvořena 25 obdelníčky. Velice pravděpodobně bude součet čísel z poměru dělit číslo 25 beze zbytku.

V řešení (A) máme poměr 1:4, $1 + 4 = 5$ a 25 je dělitelné 5. Řešení (A) by mohlo být správným řešením.

V řešení (B) máme poměr 1:5, $1 + 5 = 6$ a 25 není dělitelné 5. Řešení (B) není správným řešením.

V řešení (C) máme poměr 1:6, $1 + 6 = 7$ a 25 není dělitelné 7. Řešení (C) není sprývným řešením.

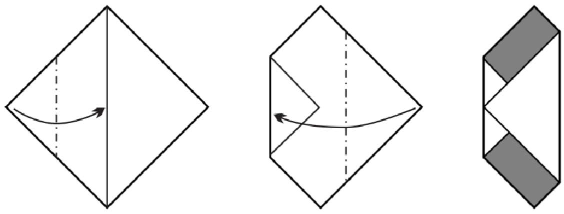
V řešení (D) máme poměr 2:5, $2 + 5 = 7$ a 25 není dělitelné 7. Řešení (D) není správným řešením.

V řešení (E) máme poměr 2:7, $2 + 7 = 9$ a 25 není dělitelné 9. Řešení (E) není správným řešením.

Jedíné možné řešení je řešení (A).

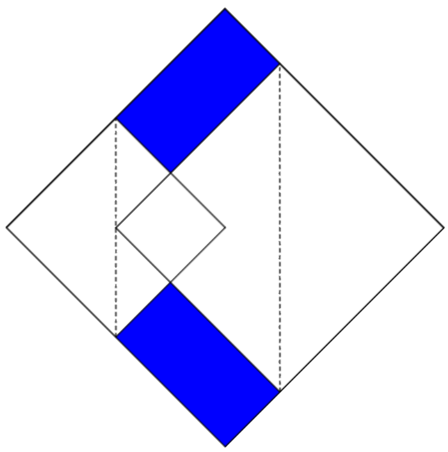
2) (2012,23) Čtverec vystřižený z listu papíru byl dvakrát přeložen tak, jak je znázorněno na obrázku. Určete součet obsahů zvýrazněných obdélníků, jestliže obsah původního čtverce byl 64 cm^2.

(A) 8 cm^2
(B) 10 cm^2
(C) 12 cm^2
(D) 14 cm^2
(E) 16 cm^2



<u>Řešení 1:</u>

Jestliže obsah původního čtverce byl 64 cm^2, pak můžeme jednoduše určit velikost délky jeho strany a to jako $a = \sqrt{64} = 8\,\text{cm}$. V prvním kroku došlo k přehnutí jednoho rohu do středu čtverce a v druhém kroku došlo k přehnutí protějšího rohu až do protějšího ohybu. Jedním z možných řešení je vypočítat obsah vzniklých čtverců a ten odečíst od původního čtverce.



Po prvním ohybu vznikne čtverec, který má stranu dlouhou 4 cm. Obsah tohoto čtverce je: . $S_1 = a^2 = 4^2 = 16\,\text{cm}^2$.

Po druhém ohybu vznikne čtverec, jehož strana tvoří $\frac{3}{4}$ z původního čtverce, tedy 6 cm. Obsah tohoto čtverce je $S_2 = a^2 = 6^2 = 36\,\text{cm}^2$.

Protože se čtverce překrývají tak musíme vzít v úvahu tu část obsahu kterou mají společnou. Společná část těchto tvou čtverců je čtverec, který má stranu dlouhou 2 cm (polovina strany čtverce vzniklého po prvním ohybu). Obsah tohoto čtverce je $S_3 = 2^2 = 4\,\text{cm}^2$.

Obsah, který je třeba z původního čtverce odečíst je $S_o = S_1 + S_2 - S_3 = 16 + 36 - 4 = 48\,\text{cm}^2$. Součet obsahů zvýrazněných obdélníků je tedy $S_v = S - S_o = 64 - 48 = 16\ \text{cm}^2$. Správné řešení je (E) 16 cm^2.

Řešení 2:

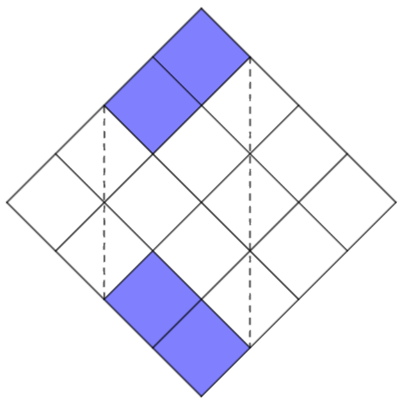
Stejně jako v řešení 1 vyjdeme z informace, kde obsah čtverce je 64 cm² a určíme tak délku jedné strany jako $\sqrt{64} = 8\ \mathrm{cm}$. Budeme počítat přímo obsah jednoho z obdélníků, který nakonec zdvojnásobíme, protože vzniklé obdélníky jsou shodné.

První ohyb (po přehnutí do středu papíru) vznikne přesně v polovině strany. Na obrázku můžeme vidět, že delší strana obdélníku náleží čtverci a odpovídá právě polovině strany čtverce, tedy delší strana čtverce je dlouhá 4 cm.

Druhý ohyb (po přehnutí do $\frac{1}{4}$ úhlopříčky čtverce) vznikne v $\frac{1}{4}$ strany čtverce. Na obrázku opět můžeme vidět, že kratší strana obdélníku náleží čtverci a odpovídá právě $\frac{1}{4}$ strany čtverce, tedy kratší strana čtverce je dlouhá 2 cm.

Obdélník má rozměry 4 cm x 2 cm, nyní můžeme vypočítat jeho obsah: $S = a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8\ \mathrm{cm}^2$. Obsah dvou obdélníků bude 16 cm² (E)

Řešení 3:

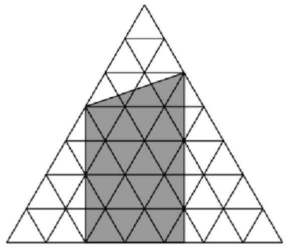


Pro lepší představivost si můžeme z papíru udělat čtvercovou síť. Obsah čtverce je 64 cm². Ve čtvercové síti 4 x 4 čtverečky zaujímají vyznačené obdélníky 4 čtverečky z celkových 16 čtverečků.

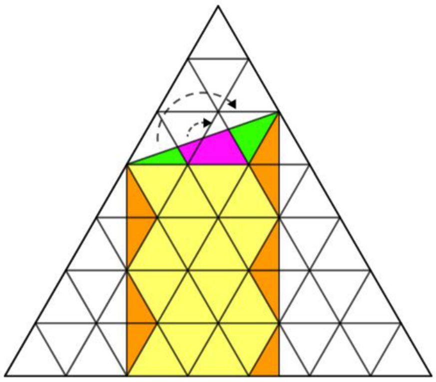
Obsah vyznačených obdélníků tvoří $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ z celkového obsahu čtverce. Výsledný obsah spočítáme jako $\frac{1}{4}$ z 64. Správná odpověď je tedy 16 cm² (E).

3) (2005, 20) Na obrázku mají všechny malé rovnostranné trojúhelníky obsah 1 cm². Určete obsah tmavého čtyřúhelníka.

(A) 20 cm²
(B) 20,5 cm²
(C) 22,5 cm²
(D) 25 cm²
(E) 32 cm²



<u>Řešení 1:</u>



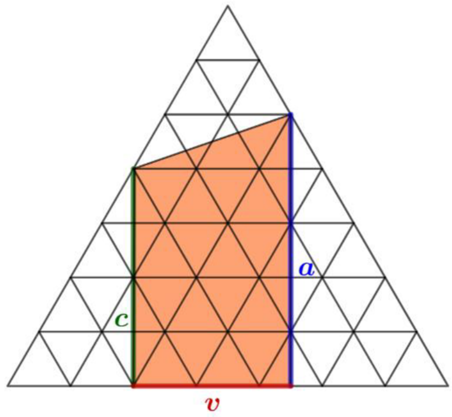
Čtyřúhelník je poskládám z několika rovnostranných trojúhelníků, o kterých víme že mají všechny trojúhelníky obsah 1cm². Kdybychom zjistili z kolika rovnostranných trojúhelníků se skládá čtyřúhelník zjistíme i jeho obsah.

Nejprve najdeme celé trojúhelníky (žluté), které leží uvnitř čtyřúhelníka. Takových trojúhelníků je 16. Čtyřúhelník se dále skládá z několika polovin trojúhelníků (oranžové), kde 2 poloviny dají dohromady 1 rovnostranný trojúhelník. Ve čtyřúhelníku najdeme 9 takových polovin, tedy 4,5 trojúhelníků. Poslední části, které musíme do obsahu čtyřúhelníku přičíst (růžová a zelená), musíme nejprve složit dohromady, čímž získáme 2 trojúhelníky (jak můžeme vidět na obrázku).

Dohromady se čtyřúhelník skládá z 22,5 trojúhelníků, protože má jeden trojúhelník obsah 1 cm², pak je obsah čtyřúhelníku roven 22,5 cm². Správná opověď je (C).

Řešení 2:

Tento čtyřúhelník můžeme také pojmenovat jako pravoúhlý lichoběžník. Abychom vypočítali obsah lichoběžníku potřebujeme znát délky jeho základen a výšky. Potřebujeme vypočítat délku strany rovnostranného trojúhelníku a jeho výšku.



Obsah rovnostranného trojúhelníku je: $S = \frac{a \cdot v}{2}$.

Výšku v rovnostranném trojúhelníku vyjádříme v závislosti na délce strany pomocí Pythagorovy věty: $v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$

$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$

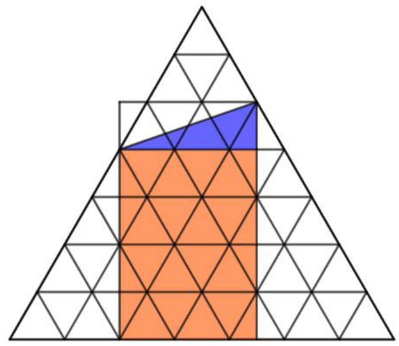
Obsah rovnostranného trojúhelníku závislém pouze na jeho délce strany: $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} S} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\ \mathrm{cm} \cong 1{,}52\ \mathrm{cm}.$

Výška v trojúhelníku je: $v = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3}\ \mathrm{cm} \cong 1{,}32\ \mathrm{cm}.$

Délka základny *a* je složena z 5 trojúhelníkových výšek, délka základny c je složena ze 4 trojúhelníkových výšek a výška v lichoběžníku je složena z 2,5 trojúhelníkových stran.

Obsah lichoběžníku vypočítáme: $S_L = \frac{(a_L + c_L) \cdot v_L}{2} = \frac{(5v + 4v) \cdot 2{,}5a}{2} = \frac{(5 \cdot \sqrt[4]{3} + 4 \cdot \sqrt[4]{3}) \cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \frac{5}{\sqrt[4]{3}}}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (C).

Řešení 3:

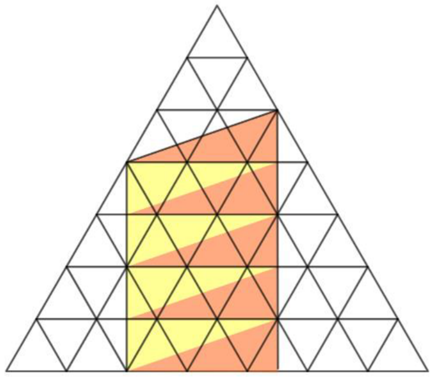


Čtyřúhelník si můžeme rozdělit na obdélník a pravoúhlý trojúhelník. Vypočítáme každému útvaru obsah zvlášť a následně je sečteme. Jednotlivé obsahy můžeme počítat podobně jako v řešení 1 pomocí počtu rovnostranných trojúhelníků nebo podobně jako v řešení 2 ze znalosti délek stran.

a) Obsah obdélníků budeme počítat tak, že vypočítáme, kolik obsahuje rovnostranných trojúhelníků, u nichž známe jejich obsah. Obdélník se skládá z 16 celých trojúhelníků a z 8 polovin trojúhelníků, které dohromady tvoří 4 trojúhelníky. Obdélník se tedy skládá z 20 trojúhelníků.
Obsah trojúhelníku je viditelně polovina obdélníku (na obrázku ukázáno), který je poskládán ze 4 trojúhelníků a 2 polovin trojúhelníků, dohromady je obdélník z 5 trojúhelníků, a protože je trojúhelní jeho polovinou, tak je trojúhelník složen z 2,5 trojúhelníků. Čtyřúhelník je poskládán z 22,5 trojúhelníků má tedy 22,5 cm^2.

b) Z řešení 2 víme, že délka strany trojúhelníka je $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\ \mathrm{cm}$ a jeho výška je $v = \sqrt[4]{3}\ \mathrm{cm}$. Obdélník má strany $k = 2{,}5a$ a $l = 4v$. Obsah obdélníku je: $S_o = k \cdot l = 2{,}5a \cdot 4v = 2{,}5 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{3} = 20\ \mathrm{cm}^2$.
Trojúhelník má odvěsny $k = 2{,}5a$ a $v = v$. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je: $S_T = \frac{k \cdot v}{2} = \frac{2{,}5a \cdot v}{2} = \frac{2{,}5 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[4]{3}}{2} = 2{,}5\ \mathrm{cm}^2$.
Dohromady má čtyřúhelník obsah 22,5 cm^2.

Řešení 4:



Čtyřúhelník je složen z 9 shodných trojúhelníků, které musí mít i shodný obsah. Těchto 9 shodných trojúhelníků má dohromady obsah roven jednomu z 5 možných obsahů. Správný obsah musí být dělitelný 9. Můžeme vyloučit řešení která tuto podmínku nesplňují.

Řešení (A): $20:9 = 2,\overline{2}$ - Řešení (A) nemůže být správný výsledek, protože obsah po dělení 9 je periodický.

Řešení (B): $20,5:9 = 2,2\overline{7}$ - Řešení (B) nemůže být správný výsledek, protože obsah po dělení 9 je periodický.

Řešení (C): $22,5:9 = 2,5$ – Řešení (C) může být správný výsledek, obsah po dělení 9 by mohl odpovídat obsahu jednoho trojúhelníka.

Řešení (D): $25:9 = 2,\overline{7}$ - Řešení (D) nemůže být správný výsledek, protože obsah po dělení 9 je periodický.

Řešení (E): $32:9 = 3,\overline{7}$- Řešení (E) nemůže být správný výsledek, protože obsah po dělení 9 je periodický.

Jediná možná správná odpověď je (C).

4) (2009, 19) Délka strany čtverce *ABCD* je rovna 10 cm. Vzdálenost bodů *N* a *M* je 6 cm. Bílé části čtverce *ABCD* jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky nebo shodné čtverce. Vypočítej obsah vybarvené části čtverce *ABCD.*

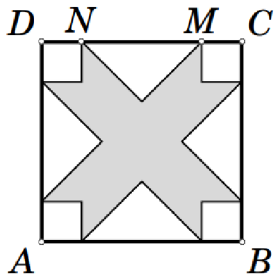
(A) 42 cm²

(B) 46 cm²

(C) 48 cm²

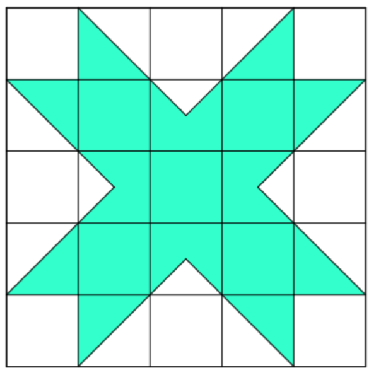
(D) 52 cm²

(E) 58 cm²



<u>Řešení 1:</u>

Ve čtverci *ABCD* o délce strany 10 cm si vytvoříme čtvercovou síť, kde délka strany jednoho čtverce bude 2 cm. Ze čtvercové sítě můžeme vypočítat obsah vybarvené části.



Vybarvená část je složena z celých čtverců, pravoúhlých trojúhelníků a nekonvexních pětiúhelníků. Protože všechny tyto útvary náleží čtvercové síti můžeme jednoduše vypočítat jejich objem celých čtverců je 5, pravoúhlých trojúhelníků je 8, nekonvexní pětiúhelníky jsou 4.

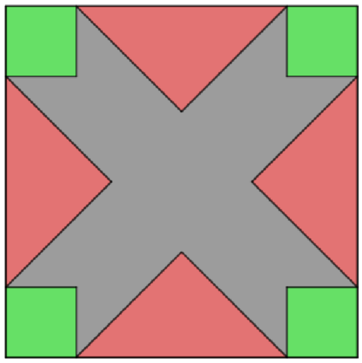
Obsah 5 čtverců je: $S_1 = 5 \cdot a^2 = 5 \cdot 2^2 = 20\ \text{cm}^2$.

Obsah 8 pravoúhlých trojúhelníků je: $S_2 = 8 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = 8 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 16\ \text{cm}^2$.

Obsah 4 nekonvexních pětiúhelníků je roven $\frac{3}{4}$ obsahu 4 čtverců: $S_3 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot a^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2^2 = 12\ \text{cm}^2$.

Obsah vybarvené části je: $S = 20 + 16 + 12 = 48\ \text{cm}^2$. Správná odpověď je (C).

Řešení 2:



Vybarvenou část vypočítáme tak že od obsahu čtverce odečteme 4 shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky a 4 shodné čtverce.

Délka základny pavoúhlého rovnoramenného trojúhelníka je 6 cm, abychom vypočítali jeho obsah potřebujeme znát ještě velikost výšky v trojúhelníku nebo délky jeho odvěsen. Pomocí Pythagorovi věty vypočítáme velikost odvěsen: $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{2} \rightarrow a = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$ cm.

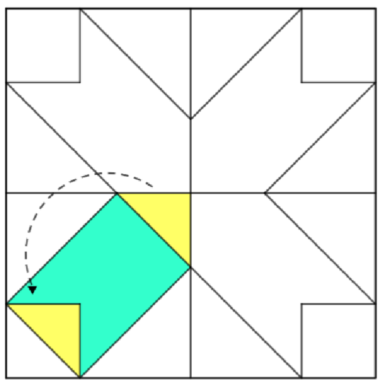
Obsah 4 trojúhelníků: $S_T = 4 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}}}{2} = 2 \cdot \frac{36}{2} = 36 \text{ cm}^2$.

Délku strany jednoho čtverce určíme z informací ze zadání. Víme, že délka strany velkého čtverce je 10 cm a známe i délku základny rovnoramenného trojúhelníka, která je 6 cm. Rozdíl strany velkého čtverce a základny trojúhelníka nám dá 2-krát délku strany malého čtverce. $k = \frac{10-6}{2} = 2$ cm. Obsah 4 shodných čtverců je: $S_č = 4 \cdot k^2 = 4 \cdot 2^2 = 16 \text{ cm}^2$.

Obsah velkého čtverce: $S_{vč} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$.

Obsah vybarvené části: $S = S_{vč} - S_T - S_č = 100 - 36 - 16 = 48 \text{ cm}^2$.

Řešení 3:



Vybarvený obrazec je složen ze 4 stejných „šipek“. Pokud bychom „hrot šipky“ přesunuli na její druhý konec, pak získáme obdélník. Kratší strana tohoto vzniklého obdélníka je úhlopříčkou malého čtverce a delší strana tohoto obdélníka je jedno rameno pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka.

Délku kratší strany vypočítáme pomocí Pythagorovy věty: $u^2 = k^2 + k^2 \rightarrow u = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}k = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$.

Délku ramene trojúhelníka vypočítáme také pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{2} \rightarrow a = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\ \mathrm{cm}$.

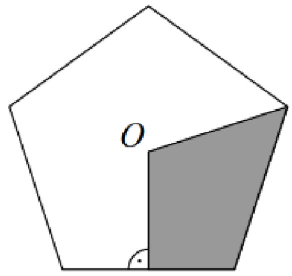
Obsah 4 obdélníků je: $S = 4 \cdot u \cdot a = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 48\ \mathrm{cm}^2$.

3. Geometrické úlohy z kategorie Kadet

3.1. Úlohy za 3 body

1) (2006, 2) Bod *O* je středem pravidelného pětiúhelníku. Kolik procent pětiúhelníku je vyznačeno?

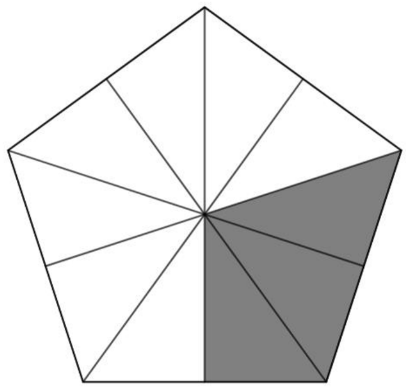
(A) 10 %
(B) 20 %
(C) 25 %
(D) 30 %
(E) 40 %



<u>Řešení 1:</u>

Nejjednodušším řešením je rozdělit si tento pětiúhelník na 10 stejných pravoúhlých trojúhelníků (jako na obrázku vpravo).

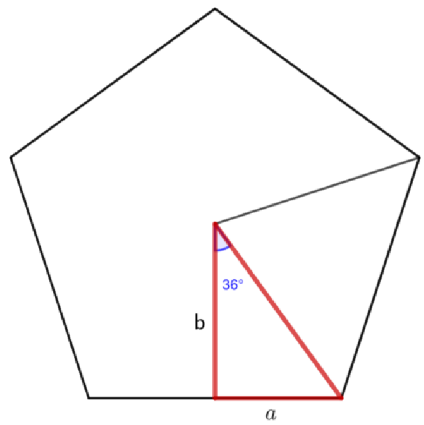
Nyní máme pětiúhelník rozdělen na 10 stejných částí z nichž jsou 3 vyznačené. 3 trojúhelníky z 10 trojúhelníků tvoří přesně 30 % z pětiúhelníku. Správná odpověď je (D).



<u>Řešení 2:</u>

Řešení, které je pravděpodobně zbytečně složité, ale může se objevit, protože žáci neradi počítají obecně, tak si i my zvolíme libovolnou délku strany pětiúhelníku a s tou budeme příklad řešit. Vypočítáme celkový obsah pětiúhelníku a následně vypočítáme vyznačenou část, která je složena z jednoho rovnoramenného trojúhelníku a jednoho pravoúhlého, který má délku přepony stejně dlouhou jako rameno rovnoramenného trojúhelníka. Jakmile budeme znát oba obsahy můžeme vypočítat kolik procent vyznačená část tvoří.

Nejprve si musíme uvědomit, že pětiúhelník je tvořen pěti rovnoramennými trojúhelníky, které musím mít stejné vnitřní úhly. Velikost úhlu, který svírají jeho ramena je roven pětině plného úhlu tedy: $\frac{360°}{5} = 72°$. Abychom si dobře zvolili délku strany trojúhelníka, tak využijeme toho, že rovnoramenný trojúhelník je složen ze dvou osově souměrných pravoúhlých trojúhelníků, u které ho nás budou zajímat odvěsny, díky nimž vypočítáme obsah.



Po odvěsny musí platit: $tg(36°) = \frac{protilehlá\ odvěsna-a}{přilehlá\ odvěsna-b} \rightarrow a = b \cdot tg(36°)$.

Obsah jednoho pravoúhlého trojúhelníku: $S_p = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{b^2 \cdot tg(36°)}{2}$.

Obsah jednoho rovnoramenného trojúhelníku: $S_r = 2 \cdot S_p = b^2 \cdot tg(36°)$

Obsah celého pětiúhelníku: $S_5 = 5 \cdot S_r = 5 \cdot b^2 \cdot tg(36°)$.

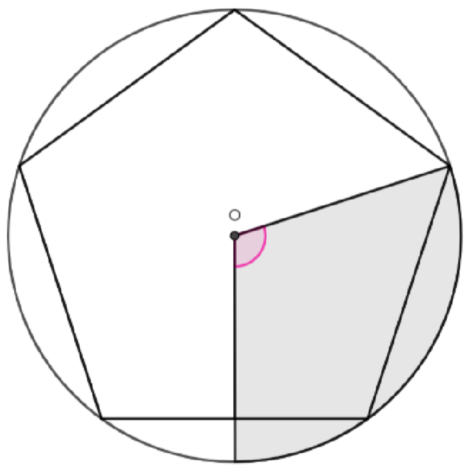
Vyznačená část je tvořena jedním rovnoramenným trojúhelníkem a jedním pravoúhlým trojúhelníkem. Její obsah je: $S_v = S_r + S_p = b^2 \cdot tg(36°) + \frac{b^2 \cdot tg(36°)}{2} = b^2 \cdot tg(36°)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3b^2 \cdot tg(36°)}{2}$.

Obecně máme vyjádřen výpočet obsahu pro celý pětiúhelník a pro vyznačenou část v něm. Nyní můžeme za b dosadit nejjednoduševji 1 a vypočítat jednotlivé obsahy a pak vypočítat jakou procentuální část tvoří.

$$S_5 = 5 \cdot 1 \cdot 0{,}7265 \cong 3{,}63\ \mathrm{cm}^2; S_v = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0{,}7265}{2} \cong 1{,}09\ \mathrm{cm}^2.$$

Vyznačená část v procentech je: $p = \frac{1{,}09}{3{,}63} \cdot 100 = 30\ \%$ (D).

Řešení 3:



Pětiúhelníku bychom mohli opsat kružnici a vypočítat pak obsah kruhové výseče. Vybarvená část v pětiúhelníku bude procentuálně odpovídat vybarvené kruhové výseči.

Abychom vypočítali obsah kruhové výseče musíme určit velikost středového úhlu. Velikost středové úhlu, který je dán nad obloukem 2 vedlejších vrcholů pětiúhelníku je: $\frac{360°}{5} = 72°$. Středový úhel kruhové výseče je dán nad obloukem jedné a půl strany pětiúhelníku, velikost středové úhlu je tedy: $72° + 36° = 108°$.

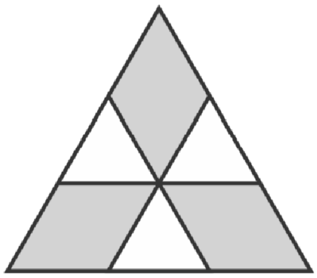
Obsah kruhu: $S_k = \pi \cdot r^2$

Obsah kruhové výseče: $S_v = \frac{108°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$

Vyznačená část v procentech: $p = \frac{S_v}{S_k} \cdot 100 = \frac{\frac{108°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2}{\pi \cdot r^2} \cdot 100 = \frac{108°}{360°} \cdot 100 = \frac{3°}{10°} \cdot 100 = 30\ \%$ (D).

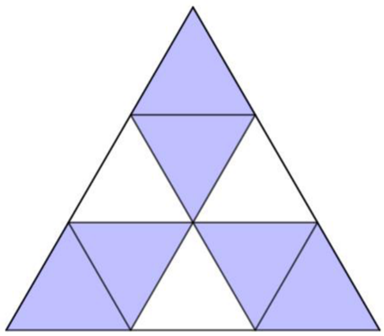
2) (2013, 1) Velký trojúhelník na obrázku je rovnostranný a jeho obsah je 9 cm^2. Úsečky jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku a jejich krajními body rozdělují jeho strany na tři stejně dlouhé části. Vypočítejte obsah vybarvené části.

(A) 1
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7



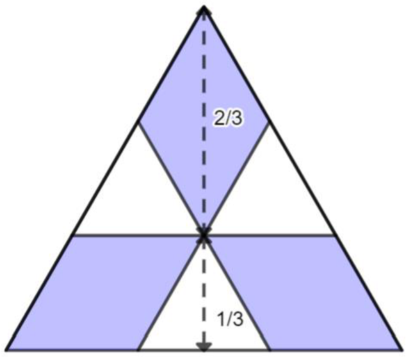
<u>Řešení 1:</u>

Ze zadání víme, že velký rovnostranný trojúhelník má obsah 9 cm^2. Úsečky, které rozdělují trojúhelník jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku a rozdělují jeho strany na tři stejně dlouhé části. Velký trojúhelník je složen ze 3 shodných rovnostranných trojúhelníků a 3 shodných kosočtverců. Kosočtverce můžeme rozdělit na 2 shodné rovnostranné trojúhelníky, tedy velký rovnostranný trojúhelník je složen z 9 shodných rovnostranných trojúhelníků (jak můžeme vidět na obrázku).



Velký trojúhelník má obsah 9 cm^2, je složen z 9 trojúhelníků, z čehož vyplívá, že jednotlivé menší trojúhelníky mají obsah 1 cm^2. Abychom vypočítali obsah vybarvené části, stačí spočítat vybarvené trojúhelníky. Obsah vybarvené části je 6 cm^2 (D), protože vybarvených trojúhelníků je právě 6.

Řešení 2:



Rovnostranný trojúhelník má obsah 9 cm^2 a je rozdělen na 3 shodné rovnostranné trojúhelníky a 3 shodné kosočtverce, které mají společný vrchol v těžišti velkého trojúhelníku.

Těžiště v rovnostranném trojúhelníku rozděluje vzdálenost vrcholu od protilehlé strany přesně na $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ délky výšky trojúhelníku.

K výpočtu vybarvené části nám bude stačit vypočítat obsah jednoho kosočtverce, který poté vynásobíme třikrát. Pro výpočet obsahu kosočtverce potřebujeme znát délku jeho strany, která odpovídá $\frac{1}{3}$ délky stany velkého trojúhelníka a jeho výšku, která odpovídá $\frac{1}{3}$ délce výšky velkého trojúhelníku. Abychom určili délku strany trojúhelníka vyjdeme ze vzorce pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníka. $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ a Pythagorovi věty pro výpočet výšky v trojúhelníku: $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} \rightarrow a = \frac{2S}{v_a} = \frac{2S}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2S}{\sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}} = \frac{2S}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}}} = \frac{2S}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

$$a = \frac{4S}{\sqrt{3}a} \rightarrow a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{\sqrt{3}}} \cong 4{,}56 \text{ cm}$$

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4{,}56^2 - \left(\frac{4{,}56}{2}\right)^2} \cong 3{,}95 \text{ cm}$$

Obsah jednoho kosočtverce: $S_k = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v_a = \frac{1}{3}4{,}56 \cdot \frac{1}{3}3{,}95 \cong 2 \text{ cm}^2$.

Obsah vybarvené části je roven 3 kosočtvercům, tedy je roven 6 cm^2. Správná odpověď je (D).

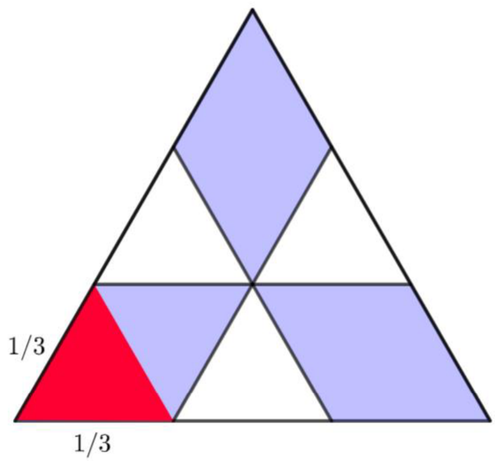
Řešení 3:

Podobně jako u řešení 2 bychom vypočítali velikost strany a výšky trojúhelníka. Což z výpočtu v řešení 2 je: $a \cong 4{,}56\ \mathrm{cm}, v_a \cong 3{,}95\ \mathrm{cm}$. Abychom určili obsah vybarvené části, tak od celkového obsahu odečteme obsah 3 menších shodných rovnostranných trojúhelníků, jejichž obsah vypočítáme:

$S_t = \frac{\frac{1}{3}\cdot a \cdot \frac{1}{3}\cdot v_a}{2} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 4{,}56 \cdot \frac{1}{3}\cdot 3{,}95}{2} \cong\ 1\ \mathrm{cm}^2.$

Obsah vybarvené části je pak: $S_v = 9 - 3 \cdot 1 = 6\ \mathrm{cm}^2(\mathrm{D})$.

Řešení 4:



Úlohu můžeme řešit i s využitím podobnosti rovnostranných trojúhelníků. Úsečky v trojúhelníku rozdělují jeho strany na 3 stejně dlouhé části, z čehož plyne že délka strany menšího trojúhelníka uvnitř velkého je třetinová oproti délce strany velkého trojúhelníka.

Z podobnosti vyplývá, že i obsah malého trojúhelníka bude odpovídat $\frac{1}{9}$ obsahu velkého trojúhelníka, protože obsah zmenšujeme plošně, tedy ve 2 dimenzích. Obsah jednoho malého trojúhelníka je pak 1 cm^2.

Nyní můžeme úlohu dořešit buď jako v řešení 1 (vybarvených trojúhelníku je 6) nebo jako v řešení 3 (od celkového obsahu odečteme 3 trojúhelníky). V obou případech dojdeme k závěru, že správný výsledek obsahu vybarvené části je 6 cm^2 (D).

3) (2019, 7) Velký čtverec na obrázku je úsečkami rozdělen na menší čtverce. Určete, jaká část velkého čtverce je vyznačena tmavě.

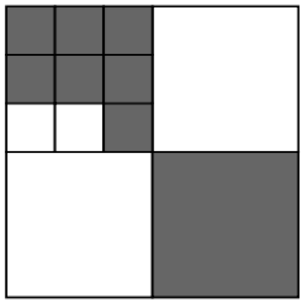
(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{2}{5}$

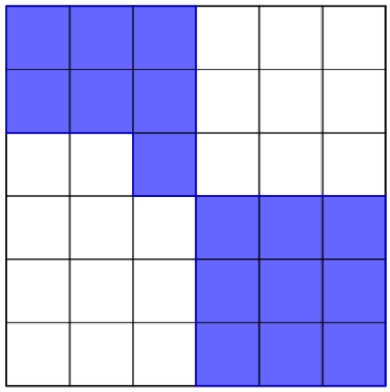
(C) $\frac{4}{7}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{5}{12}$



<u>Řešení 1:</u>

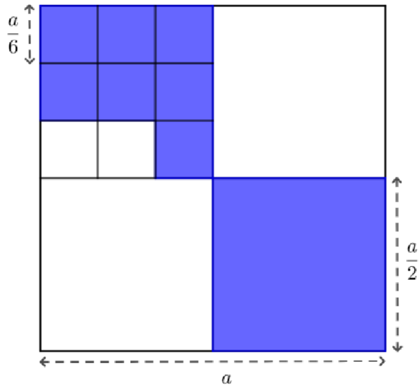


Úlohu si upravíme na čtvercovou síť, která je již v zadání naznačena, protože jeden ze 4 čtverců velkého čtverce je rozdělen na 9 malých čtverečků. Toto rozdělení zachováme a tím dostaneme čtvercovou síť 6 x 6.

Nyní stačí spočítat z kolika čtverečků je síť složena a kolik čtvreců z této sítě je tmavě vyznačeno.

Čtvercová síť o rozměrech 6 x 6 je složena právě z 36 čtverců. Tmavě vyznačené čtverce spočítáme (z obrázku) a zjistíme, že těchto čtverců je 16. To znamená, že vyznačených čtverců je 16 z 36: $\frac{16}{36} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. Správná odpověď je (D).

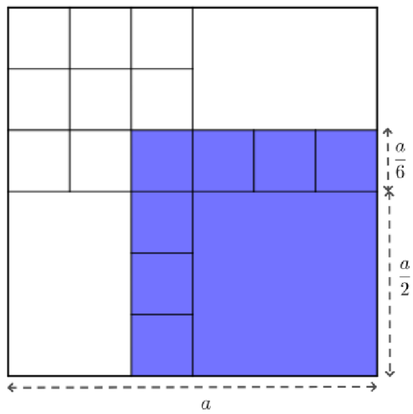
Řešení 2:



Řekněme, že velký čtverec má stranu o délce a, tento čtverec je složen ze 4 shodných menších čtverců, pak tyto čtverce mají stranu o délce $\frac{a}{2}$. Jeden z těchto menších čtverců je složen z 9 shodných čtverečků, pak délka stran těchto čtverečků je $\frac{a}{6}$. Určili jsme si rozměry jednotlivých čtverců, nynímůžeme vypočítat jaký mají dohromady obsah.

Obsah vyznačené části je složen z jednoho menšího čtverce a 7 malých čtverečků. Jejich obsah je roven: $S_v = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + 7 \cdot \frac{a^2}{36} = \frac{9a^2+7a^2}{36} = \frac{16}{36}a^2 = \frac{4}{9}a^2$. Obsah vyznačených částí tvoří $\frac{4}{9}$ z velkého čtverce. Správná odpověď je (D).

Řešení 3:

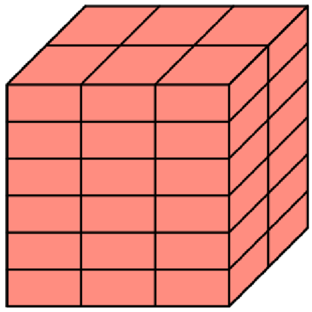


Další z možností, jak úlohu řešit, je upravit si rozmístění čtverců. V původním zadání, se nachází jeden menší čtverec a 7 malých čtverečků. Pokud si úlohu upravíme, můžeme získat pouze jeden větší čtverec a počítat jeho obsah.

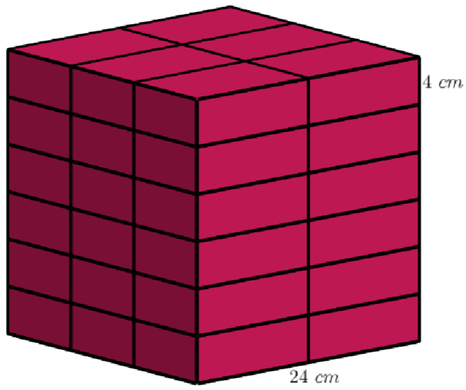
Přeskládáním čtverečků nám vznikne jeden větší čtverec o délce strany $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{6}\right) = \frac{4}{6}a = \frac{2}{3}a$. Obsah tohoto čtverce je: $S = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2$. Obsah vyznačené části tvoří $\frac{4}{9}$ z velkého čtverce. Správná odpověď je pak (D).

4) (2022, 5) Robin poskládal krychli na obrázku ze stejných cihliček, jejichž nejkratší hrana má délku 4 cm. Jaké rozměry (v cm) měly cihličky?

(A) 4 x 6 x 12
(B) 4 x 6 x 16
(C) 4 x 8 x 12
(D) 4 x 8 x 16
(E) 4 x 12 x 16



Řešení 1:



Nejprve určíme, která hrana cihličky je nejkratší. Krychle má všechny hrany stejně dlouhé, proto nejkratší hrana cihličky musí být ta, která je na hraně krychle nejvíce krát. Jedna hrana krychle je tvořena 6 cihličkami nad sebou. Cihličky mají výšku, jako nejkratší rozměr, tedy výška cihličky je 4 cm. Protože je hrana krychle postavena ze 6 cihliček nad sebou, je hrana krychle velká: $a = 6 \cdot 4 = 24$ cm.

Druhá hrana krychle je sestavena ze 3 cihliček vedle sebe. Protože délka hrany krychle je 24 cm, tak šířka cihličky je: $b = 24 : 3 = 8$ cm.

Třetí hrana krychle je sestavena ze 2 cihliček za sebou. Protože délka hrany krychle je 24 cm, tak hloubka cihličky je: $c = 24 : 2 = 12$ cm.

Rozměry cihličky jsou 4 x 8 x 12, správná odpověď je (C).

Řešení 2:

Krychle je tvořena několika kvádrovými cihličkami. Na výšku je počet cihliček 6 na šířku jsou 3 a na hloubku 2. Součin každého rozměru a počtu cihliček ve směru rozměru (A x B x C) musí být stejný: $6A = 3B = 2C$. Pokud budeme zkoušet dosazovat různé odpovědi dojdeme na správné řešení.

Odpověď (A): A x B x C = 4 x 6 x 12 → $6A = 3B = 2C$; $6 \cdot 4 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot 12 \rightarrow 24 \neq 18 \neq 24$. Neplatí podmínka, kterou jsme si určili, odpověď (A) není správná.

Odpověď (B): A x B x C = 4 x 6 x 16 → $6A = 3B = 2C$; $6 \cdot 4 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot 16 \rightarrow 24 \neq 18 \neq 48$. Neplatí podmínka, kterou jsme si určili, odpověď (B) není správná.

Odpověď (C): A x B x C = 4 x 8 x 12 → $6A = 3B = 2C$; $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 12 \rightarrow 24 = 24 = 24$. Podmínka, kterou jsme si určili platí, odpověď (C) je správná.

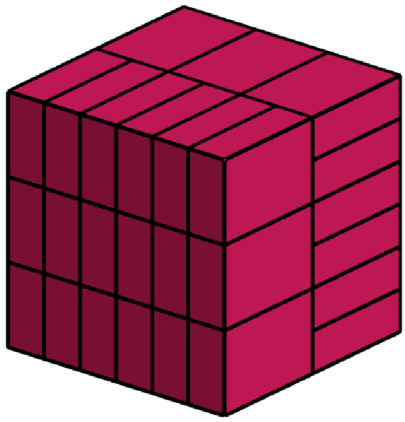
Odpověď (D): A x B x C = 4 x 8 x 16 → $6A = 3B = 2C$; $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 16 \rightarrow 24 = 24 \neq 48$. Neplatí podmínka, kterou jsme si určili, odpověď (D) není správná.

Odpověď (E): A x B x C = 4 x 12 x 16 → $6A = 3B = 2C$; $6 \cdot 4 = 3 \cdot 12 = 3 \cdot 16 \rightarrow 24 \neq 36 \neq 48$. Neplatí podmínka, kterou jsme si určili, odpověď (E) není správná.

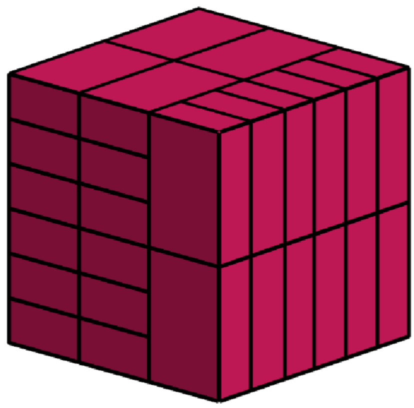
Jediná odpověď, která odpovídá podmínce je odpověď (C), která je správná.

Řešení 3:

K řešení můžeme přistupovat i z pohledu, že daná krychle je zvláštní druh Rubikovy kostky a my můžeme s kostkou manipulovat a její stěny otáčet. Nejkratší hrana cihličky má 4 cm, díky čemuž určíme rozměry ostatních hran cihličky.



Otočíme-li přední stěnu krychle doleva, tak se dostane 6 cihliček k 3 cihličkám. Dílky musí hezky zapadat, takže musí platit i rovnost, kde hrany *A* šesti cihliček musí být rovny hranám *B* tří cihliček. Na jednu cihličku o rozměru *B* musí být přesně 2 cihličky o rozměru *A*. Protože rozměr *A* je nejmenší (4 cm) tak tok rozměr *B* je: $B = 2 \cdot A = 2 \cdot 4 = 8\ \mathrm{cm}$.



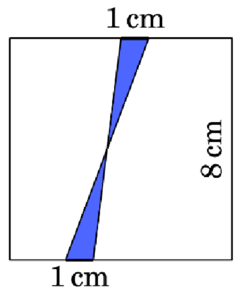
Otočíme-li pravou stěnu krychle doprava, tak dostaneme 6 cihliček k 2 cihličkám. Dílky musí zapadat do sebe, tedy musí platit rovnost, kde hrany *A* šesti cihliček musí být rovny hranám *C* dvou cihliček. Na jednu cihličku o rozměru *C* musí být přesně 3 cihličky o rozměru *A*. Rozměr *C* musí být roven: $C = 3 \cdot A = 3 \cdot 4 = 12\ \mathrm{cm}$.

Správné rozměry cihliček jsou: 4 x 8 x 12, tedy (C).

3.2. Úlohy za 4 body

1) (2017,14) Na protějších stranách čtverce se stranou délky 8 cm leží dvě úsečky délky 1 cm. Jejich koncové body jsou spojeny úsečkami tak, jak vidíte na obrázku. Určete obsah tmavého obrazce.

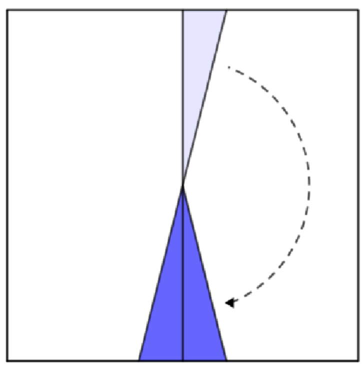
(A) 2 cm^2
(B) 4 cm^2
(C) 6,4 cm^2
(D) 8 cm^2
(E) 10 cm^2



Řešení 1:

Obsah tmavého obrazce tvoří dva středově souměrné trojúhelníky s podstavou délky 1 cm. Úsečky se protínají v jednom bodě, který je současně společným vrcholem obou trojúhelníků. Tento společný vrchol bude ležet v polovině vzdálenosti dvou protilehlých stran čtverce tedy ve vzdálenosti 4 cm. Pro výpočet obsahu trojúhelníka potřebujeme znát velikost jeho podstavy a velikost výšky k podstavě. Pro výpočet obsahu znám vše a obsah jednoho trojúhelníku je: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2\ \mathrm{cm}^2$. Obsah tmavého obrazce jsou pak 4 cm^2, správné řešení je (B).

Řešení 2:



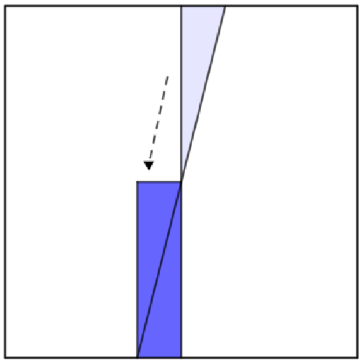
Ve speciálním případu by strany trojúhelníků ležely na společné úsečce, které je kolmá k protilehlým stranám. V takovém případě jsou trojúhelníky nejen středově souměrné, ale i pravoúhlé.

Můžeme si řešení usnadnit a to tak, že jeden z trojúhelníků překlopíme k druhému trojúhelníku (jak můžeme vidět na obrázku), čímž vznikne jeden rovnoramenný trojúhelník.

K výpočtu obsahu vzniklého trojúhelníku potřebujeme znát délku základny a velikost výšky k dané základně. Základna je dlouhá 2 cm (složena ze dvou úseček o 1 cm). Velikost výšky je kolmá vzdálenost od základny po vrchol trojúhelníka, kterému náleží střed středové souměrnosti, proto musí mít výška poloviční vzdálenost vůči stranám čtverce, tedy 4 cm.

Obsah trojúhelníka je: $S = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,\mathrm{cm}^2$. Správnou odpovědí je (B).

Řešení 3:



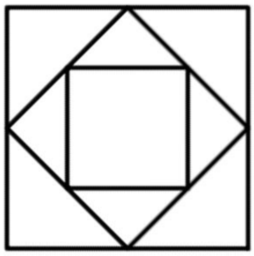
Ve speciálním případě podobně jako v řešení 2, můžeme dostat dva středově souměrné pravoúhlé trojúhelníky. Po složení dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků dostaneme vždy obdélník (speciálně čtverec).

Pokud složíme dohromady tyto dva trojúhelníky (jako na obrázku) získáme obdélník. Pro výpočet obsahu obdélníku potřebujeme znát délky jeho stran. Jeho kratší strana má délku 1 cm a jeho delší strana má délku odpovídající polovině strany čtverce, ted 4 cm.

Obsah vyznačeného obdélníka: $S = 1 \cdot 4 = 4\,\mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (B).

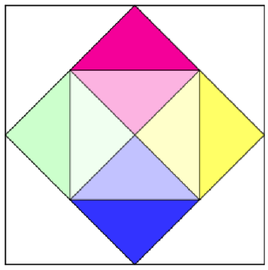
2) (2011,11) Na obrázku jsou tři čtverce. Vrcholy prostředního čtverce leží ve středech stran velkého čtverce. Vrcholy malého čtverce leží ve středech stran prostředního čtverce. Obsah malého čtverce z tohoto obrázku je 6 cm^2. Vypočítejte rozdíl obsahů velkého a prostředního čtverce.

(A) 6 cm^2
(B) 9 cm^2
(C) 12 cm^2
(D) 15 cm^2
(E) 18 cm^2

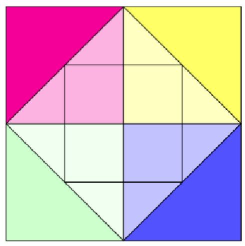


Řešení 1:

Při řešení budeme vycházet z informace, že vrcholy vnitřních čtverců leží právě uprostřed stran větších čtverců, tedy nejmenší čtverec má vrcholy přesně uprostřed prostředního čtverce a prostřední čtverec má vrcholy přesně uprostřed velkého čtverce.



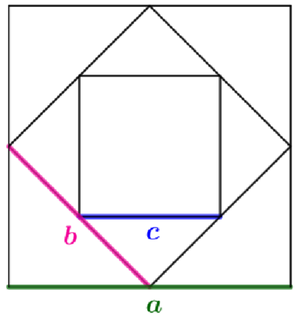
Nejmenší čtverec můžeme složit ze 4 shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků (jak můžeme vidět na obrázku). Rozdíl obsahu prostředního a malého čtverce můžeme vyjádřit právě těmito 4 shodnými trojúhelníky. Z toho plyne že prostřední čtverec má obsah stejně velký jako obsah 2 malých čtverců: $S_b = 2 \cdot S_c = 2 \cdot 6 = 12\ \mathrm{cm}^2$.



Podobně i prostřední čtverec můžeme složit ze 4 shodných provoúhlých rovnoramenných trojúhelníků (jak můžeme vidět na obrázku). Rozdíl obsahu velkého a prostředního čtverce můžeme vyjádřit právě těmito 4 shodnými trojúhelníky. Z toho plyne, že velký čtverec má obsah stejně velký jako obsah 2 prostředních čtverců: $S_a = 2 \cdot S_b = 2 \cdot 12 = 24\ \mathrm{cm}^2$.

Rozdíl obsahů velkého a prostředního čtverce je: $\Delta S = S_a - S_b = 24 - 12 = 12\ \mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (C).

Řešení 2:



Úlohu můžeme řešit výpočtem, kde budeme vycházet z toho, že známe ze zadání obsah nejmenšího čtverce. Abychom od sebe mohli odečíst obsahy velkého a prostředního čtverce, tak musíme znát velikost jejich obsahů. K určení velikosti jejich obsahů potřebujeme znát délku strany jednotlivých čtverců.

Stranu nejmenšího čtverce *c* určíme pomocí jeho obsahu: $S_c = c^2$

$c = \sqrt{S_c} = \sqrt{6}\,\mathrm{cm}.$

Stranu prostředního čtverce b vypočítáme pomocí strany menšího čtverce c. Strana c je přeponou vzhledem ke středům dvou stran prostředního čtverce. Platí Pythagorova věta: $c^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, vyjádříme stranu b

$$c^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 2 \cdot \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2} \to b^2 = 2c^2$$

$$b = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$$

Obsah prostředního čtverce už můžeme vypočítat: $S_b = b^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\,\mathrm{cm}^2.$

Stranu velkého čtverce a vypočítáme pomocí strany prostředního čtverce b. Strana b je přeponou vzhledem ke středům dvou stran velkého čtverce. Platí Pythagorova věta: $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, vyjádříme stranu a :

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \to a^2 = 2b^2$$

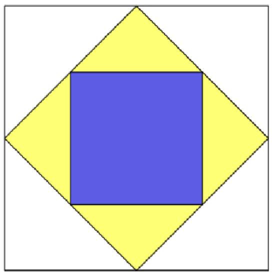
$$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$$

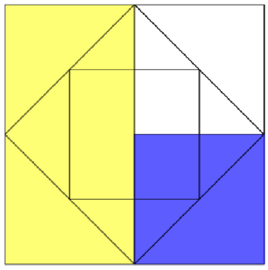
Obsah velkého čtverce už můžeme vypočítat: $S_a = a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24\,\mathrm{cm}^2.$

Rozdíl obsahů velkého a prostředního čtverce je: $\Delta S = S_a - S_b = 24 - 12 = 12\,\mathrm{cm}^2$. Správná odpověď je (C).

Řešení 3:

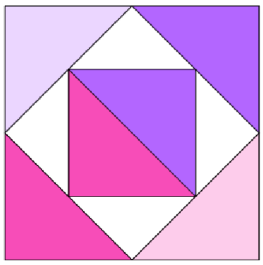
Podobnými úvahami jako v řešení 1 bychom mohli dojít k závěru, že obsah malého čtverce je $\frac{1}{2}$ obsahu prostředního čtverce a obsah prostředního čtverce je $\frac{1}{2}$ obsahu velkého čtverce. Z čehož vyplývá, že obsah malého čtverce je $\frac{1}{4}$ obsahu velkého čtverce.





Pro lepší představivost si můžeme obrázek upravit. Je z něho patrné, že rozdíl obsahů velkého a prostředního čtverce je právě polovina obsahu velkého čtverce. Ze zadání známe obsah malého čtverce, který je 6 cm^2. Z původních úvah víme, že obsah malého čtverce je právě $\frac{1}{4}$ obsahu velkého čtverce. Obsah velkého čtverce je tedy: $S_a = 4 \cdot S_c = 4 \cdot 6 = 24\ \mathrm{cm}^2$. Polovina obsahu velkého čtverce je pak 12 cm^2, což je i rozdíl obsahů velkého a prostředního čtverce. Správná odpověď je (C).

Řešení 4:



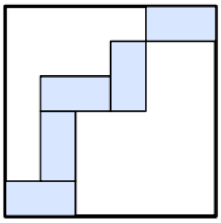
Malý čtverec můžeme složit ze 2 shodných rovnoramenných trojúhelníků (jak můžeme vidět na obrázku). Rozdíl velkého a prostředního trojúhelníku můžeme vyjádřit právě 4 těmito trojúhelníky.

Obsah jednoho trojúhelníku je $\frac{1}{2}$ obsahu malého čtverce, tedy 3 cm^2. Obsah 4 trojúhelníků je pak: $S = 4 \cdot S_t = 4 \cdot 3 = 12\ \mathrm{cm}^2$.

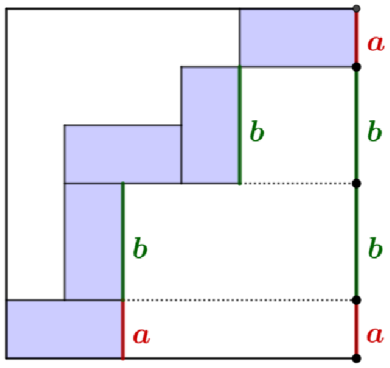
Správná odpověď je (C).

3) (2014, 11) Pět shodných obdélníků je umístěno ve čtverci s délkou strany 24 cm tak, jak je znázorněno na obrázku. Vypočítejte obsah jednoho obdélníku.

(A) 12 cm^2
(B) 16 cm^2
(C) 18 cm^2
(D) 24 cm^2
(E) 32 cm^2

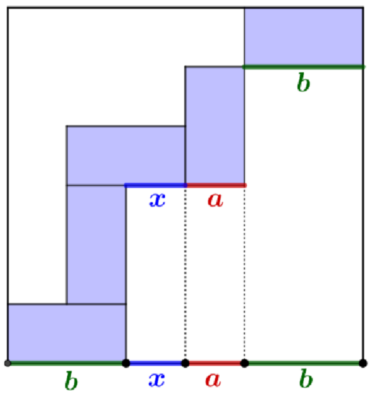


Řešení 1:



Při řešení vyjdeme z toho, že známe délku strany čtverce 24 cm a budeme hledat vztah mezi délkou strany čtverce a délkami stran obdélníku.

Kdybychom posunuli všechny obdélníky na pravou strany čtverce, tak nám strany obdélníků vyplní celou stranu čtverce. Všimneme si, jakou stranou se obdélník čtvercové strany dotýká (krátkou nebo dlouhou). Strana čtverce je tedy složena ze dvou krátkých stran a obdélníka a dvou dlouhých stran b obdélníka. Z toho plyne, že strana čtverce je stejně dlouhá jako obvod jednoho obdélníka. Platí tedy: $2a + 2b = 24$ cm.



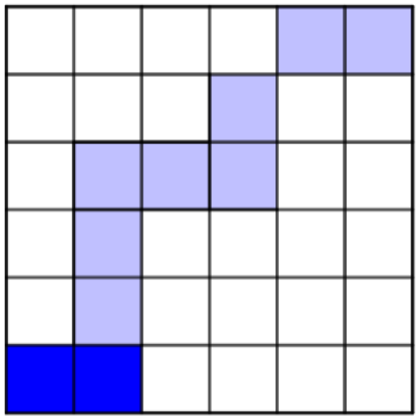
Z jiného pohledu je strana čtverce složena ze dvou dlouhých stran b obdélníka, jedné krátké strany a obdélníka a rozdílu dlouhé a krátké strany obdélníka. Platí tedy: $2b + a + x = 24$ cm.

Strany čtverce jsou stejně dlouhé proto musí platit: $2a + 2b = 2b + a + x \rightarrow a = x$. Strana b je rovna $2a$. Velikost strany a po vyjádření: $2a + 2b = 24 \text{ cm} \rightarrow 2a + 4a = 24 \text{ cm} \rightarrow 6a = 24 \text{ cm} \rightarrow a = 4 \text{ cm}$, potom $b = 2a \rightarrow b = 8$ cm.

Obsah jednoho obdélníka: $S = a \cdot b = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2$ (E).

Řešení 2:

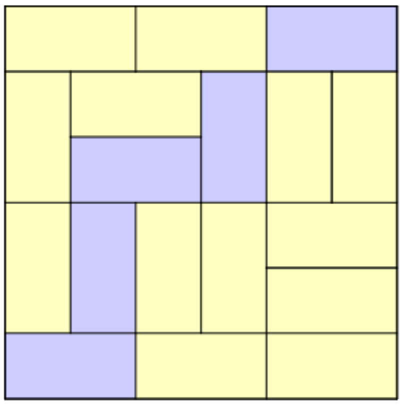
Úloha se dá upravit na čtvercovou síť o rozměrech 6 x 6 čtverečků. Abychom vypočítali obsah jednoho obdélníka potřebujeme vypočítat obsah dvou čtverečků.



Délka strany čtverce je 24 cm, proto je délka strany jednoho čtverečku 4 cm $\left(\frac{1}{6}\text{ z }24\text{ cm}\right)$. Obsah jednoho čtverečku: $S_{č} = a^2 = 4^2 = 16\text{ cm}^2$. Obsah 2 čtverečků je pak $S = 2S_{č} = 2 \cdot 16 = 32\text{ cm}^2$ (E).

Řešení 3:

Další z možností je doplnit do čtverce další shodné obdélníky, kterými vyplníme celý čtverec, obsah těchto obdélníků bude roven obsahu čtverce.



Obsah čtver $S_{č} = a^2 = 24^2 = 576\text{ cm}^2$. Celkový počet obdélníků ve čtverci (podle obrázku) je 18. Obsah jednoho obdélníku pak bude: $S = \frac{576}{18} = 32\text{ cm}^2$ (E).

3.4. Úlohy za 5 bodů

1) (2005, 17) Spočítejte obsah obdélníku *DBEF*, který je nakreslen na obrázku.

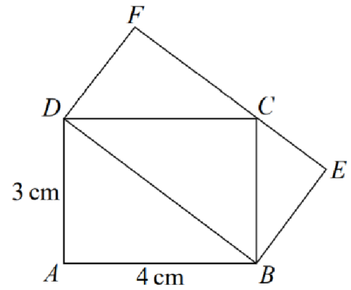
(A) 10 cm^2

(B) 12 cm^2

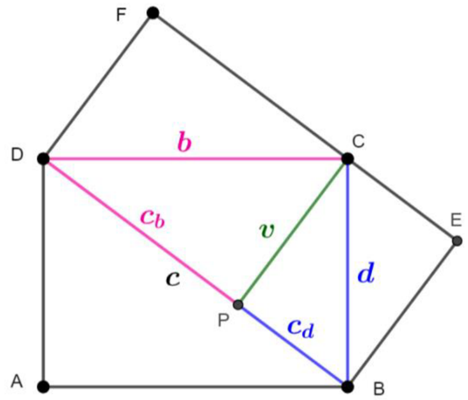
(C) 13 cm^2

(D) 14 cm^2

(E) 16 cm^2



Řešení 1:



Abychom vypočítali obsah obdélníku *DBEF*, tak potřebujeme znát délky jeho stran délku strany *DB* vypočítáme pomocí Pythagorovi věty a na výpočet délky strany *EB* využijeme Euklidovy věty.

Nejprve vypočítáme úhlopříčku *DB,* která je současně přeponou v trojúhelníku *ABD.* S využitím Pythagorovi věty vypočítáme přeponu *DB*:

$$|DB|^2 = |AD|^2 + |AB|^2$$

$$|DB| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Pomocí Euklidovy věty o odvěsně vypočítáme délku úsečky c_d.

$$|BC|^2 = |DB| \cdot |PB| \rightarrow d^2 = c \cdot c_d$$

$$c_d = \frac{d^2}{c} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8 \text{ cm}$$

Délku úsečky c_b určíme rozdílem délky úsečky c a c_d : $c_b = c - c_d = 5 - 1{,}8 = 3{,}2$ cm.

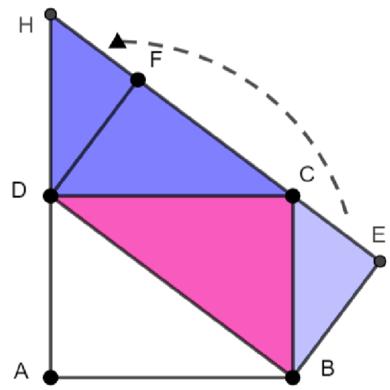
Výšku v trojúhelníku *BCD* vypočítáme pomocí Euklidově větě o výšce: $|PC|^2 = |DP| \cdot |PB| \rightarrow v^2 = c_b \cdot c_d$

$$v = \sqrt{c_b \cdot c_d} = \sqrt{3{,}2 \cdot 1{,}8} = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4 \text{ cm}.$$

Obsah obdélníku *DBEF* vypočítáme: $S = |DB| \cdot |BE| = 5 \cdot 2{,}4 = 12 \text{ cm}^2$.

Řešení 2:

Při řešení budeme vycházet z toho, že obsah trojúhleníku *BCD* tvoří polovinu obsahu obdélníku *ABCD*.



Obsah obdélníku *ABCD* je: $S_o = |AB| \cdot |AD| = 4 \cdot 3 = 12\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah trojúhelníku *BCD* je $\frac{1}{2}$ obsahu obdélníku *ABCD*, tedy: $S_t = \frac{S_o}{2} = \frac{12}{2} = 6\ \mathrm{cm}^2$.

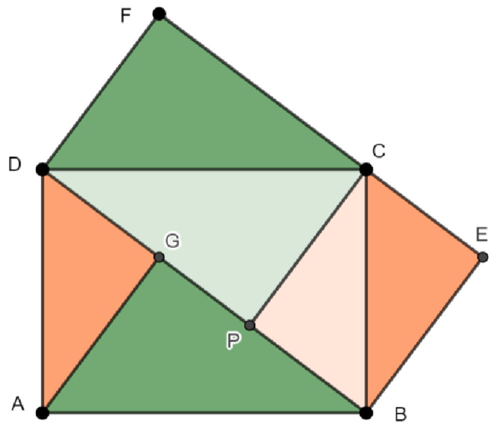
Pokud přesuneme trojúhelník *BEC* (jako na obrázku) vedle trojúhelníku *DCF*, získáme trojúhelník *DCH*. Trojúhelník *DCH* je shodný s trojúhelníkem *BCD*, to znamená, že tyto trojúhelníky mají stejný obsah.

Obdélník *DBEF* je složen ze dvou shodných trojúhelníků *BCD* a *DCH*. Obsah tohoto obdélníku je pak: $S = 2 \cdot S_t = 2 \cdot 6 = 12\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah obdélníku *ABCD* a obdélníku *DBEF* je shodný a je roven 12 cm^2.

Řešení 3:

Podobně jako v řešení 2 vycházíme z toho, že obsah trojúhelníku *BCD* je $\frac{1}{2}$ obsahu obdélníku *ABCD*.

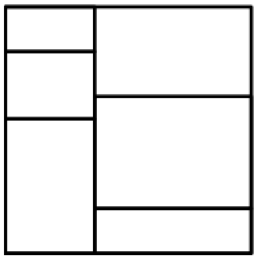


Obdélník *DBEF* můžeme rozdělit na 2 obdélníky *PBEC* a *DPCF*. Oba obdélníky jsou složeny ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků. Obdélník *PBEC* je tložen z trojúhelníku *PBC* a trojúhelníku *BEC*. Obdélník *DPCF* je složen z trojúhelníku *DPC* a trojúhelníku *DCF.* Pokud bychom tyto 4 trojúhelníky poskládali jinak (jako na obrázku) složíme obdélník *ABCD.*

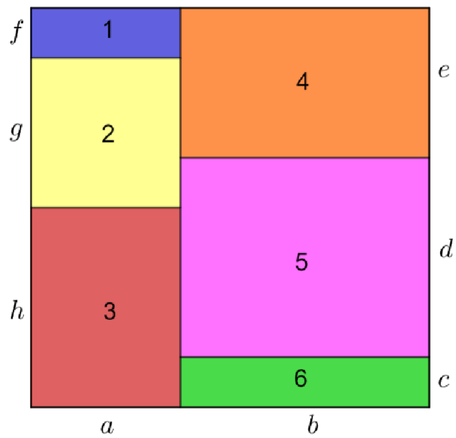
Obsah obdélníku *ABCD* je tedy stejný jako obsah obdélníku *DBEF* a to 12 cm^2, správná odpověď je tedy (B).

2) (2011, 23) Papírový čtverec na obrázku je rozstříhaný na 6 obdélníků. Součet obvodů těchto šesti obdélníků je 120 cm. Určete obsah původního čtverce papíru.

(A) 48 cm²
(B) 64 cm²
(C) 110,25 cm²
(D) 144 cm²
(E) 256 cm²



Řešení 1:



Máme 6 různých obdélníků, každý má jinou délku obvodu. Ze zadání víme že součet obvodů 6 obdélníku je 120 cm. Dále víme, že 6 obdélníků dohromady tvoří jeden čtverec. Z těchto informací poskládáme rovnice o 8 neznámých, které reprezentují jednotlivé strany každého z obdélníků.

$O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 + O_6 = 120$

$2a + 2f + 2a + 2g + 2a + 2h + 2b + 2e + 2b + 2d + 2b + 2c = 120$

$a + f + a + g + a + h + b + e + b + d + b + c = 60$

$3a + 3b + f + g + h + e + d + c = 60$

Strany čtverce musí být stejně dlouhé:

$f + g + h = a + b = c + d + e$

Dosadíme do předchozí rovnice:

$3a + 3b + (a + b) + (a + b) = 60$

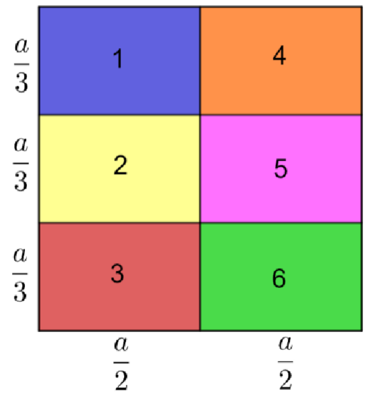
$5a + 5b = 60$

$a + b = 12$

Délka strany čtverce je 12 cm, obsah je tedy roven: $S = 12^2 = 144\ \mathrm{cm}^2$.

Řešení 2:

Úloha se dá zjednodušit na speciální případ, kdy mají všechny obdélníky stejné rozměry. Můžeme postupovat podobně jako v řešení 1, ale rovnice budou obsahovat pouze 1 neznámou, proto bude výpočet mnohem jednodušší.



$$2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}=120$$

$$6\cdot\left(2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}\right)=120$$

$$2\frac{a}{3}+2\frac{a}{2}=20$$

$$\frac{a}{3}+\frac{a}{2}=10$$

$$\frac{2a+3a}{6}=10$$

$$5a=60\rightarrow \mathrm{a}=12$$

Obsah čtverce o straně 12 cm vypočítáme: $S=12^2=144\ \mathrm{cm}^2$.

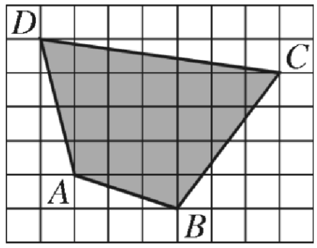
Řešení 3:

Podobně jako v řešení 2 vyjdeme ze speciálního případu, kde všechny obdélníky mají stejné rozměry. Když určíme rozměry jednoho obdélníku, pak stačí vypočítat obsah právě jednoho obdélníku, který vynásobíme 6 a tím získáme obsah čtverce.

Obvod 6 obdélníků je roven 120 cm, z toho plyne, že obvod jednoho obdélníku bude 20 cm. Strany obdélníku musí být v poměru 2:3 (zřejmé z obrázku v řešení 2) a součet stran a a b musí být roven 10. $a:b=2:3(2+3=5);a:b=4:6\,(4+6=10)$. Strana a je dlouhá 4 cm a strana b je dlouhá 6 cm. Obsah jednoho obdélníku je: $S_1=a\cdot b=4\cdot 6=24\ \mathrm{cm}^2$. Obsah 6 obdélníků: $S=6\cdot S_1=6\cdot 24=144\ \mathrm{cm}^2$(D).

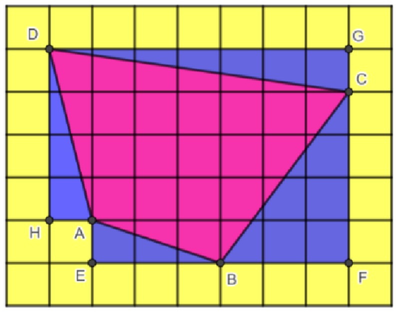
3) (2013, 17) Ve čtvercové síti na obrázku je vybarvený čtyřúhelník *ABCD.* Délka strany čtverečku je 2 cm. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku *ABCD.*

(A) 76 cm²
(B) 84 cm²
(C) 88 cm²
(D) 96 cm²
(E) 104 cm²



Řešení 1:

K řešení úlohy využijeme čtvercovou síť, kde je délka strany čtverečku 2 cm. Abychom vypočítali obsah čtyřúhelníku *ABCD* vypočítáme nejprve obsah celé sítě a odečteme obsah inverzního útvaru vzhledem k čtyřúhelníku *ABCD.*



Než začneme počítat najdeme na síti pravoúhlé trojúhelníky (modré), dále najdeme celé čtverečky (žluté). Obsah čtverečků spočítáme tak, že vypočítame obsah jednoho čtverečku a vynásobímeho počtem (žlutých) čtverečků.

Obsah celé čtvercové sítě: $S_{čs} = \ 9č \cdot 7č = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 = 252 \text{ cm}^2$.

Obsah (žlutých) čtverečků: $S_{žč} = N \cdot a^2 = 29 \cdot 2^2 = 116 \text{ cm}^2$.

Obsah (modrého) trojúhelníku *HAD*: $S_{HAD} = \frac{|HA| \cdot |HD|}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8 \text{ cm}^2$

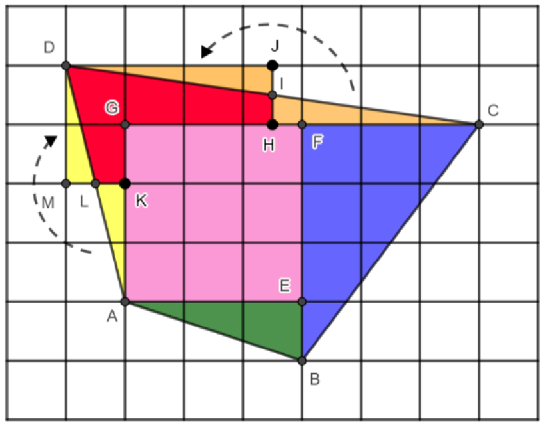
Obsah (modrého) trojúhelníku *EBA*: $S_{EBA} = \frac{|EB| \cdot |EA|}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}^2$

Obsah (modrého) trojúhelníku *BFC*: $S_{BFC} = \frac{|BF| \cdot |FC|}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$

Obsah (modrého) trojúhelníku *DCG*: $S_{DCG} = \frac{|DG| \cdot |CG|}{2} = \frac{14 \cdot 2}{2} = 14 \text{ cm}^2$

Obsah čtzřúhelníku *ABC:*$S = S_{čs} - S_{žč} - \ S_{HAD} - \ S_{EBA} - \ S_{BFC} - \ S_{DCG} = 252 - 116 - 8 - 6 - 24 - 14 = 84 \text{ cm}^2$ (B).

Řešení 2:



Obsah čtyřúhelníku *ABCD* můžeme vypočítat přímo, ale čtyřúhelník si rozdělíme na několik částí, které vypočítáme jednodušeji (Pro lepší přehlednost jsou jednotlivé útvary na obrázku barevně rozděleny).

Obsah (zeleného) trojúhelníku *ABE*: $S_{ABE} = \frac{|AE| \cdot |BE|}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}^2$

Obsah (modrého) trojúhelníku *BCF*: $S_{BCF} = \frac{|FC| \cdot |BF|}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$

Obsah (růžového) čtverce *AEFG*: $S_{AEFG} = |AE|^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

U zbylých útvarů (žlutého, oranžového a červeného) si pomůžeme úpravou do obdélníků. Trojúhelník (oranžový) *HCI* a trojúhelník (žlutý) *AKL* překlopíme, tak že vytvoří šestiúhelník *MKGHJD* (tento krok je viditelný na obrázku). Vzniklý šestiúhelník *MKGHJD* je složen z 4,5 čtverečků, jeho obsah vypočítáme: $S_{MKGHJD} = N \cdot a^2 = 4{,}5 \cdot 2^2 = 18 \text{ cm}^2$.

Obsah čtyřúhelníku *ABCD* je dán součtem jednotlivých obsahů: $S = S_{ABE} + S_{BCF} + S_{AEFG} + S_{MKGHJD} = 6 + 24 + 36 + 18 = 84 \text{ cm}^2$ (B).

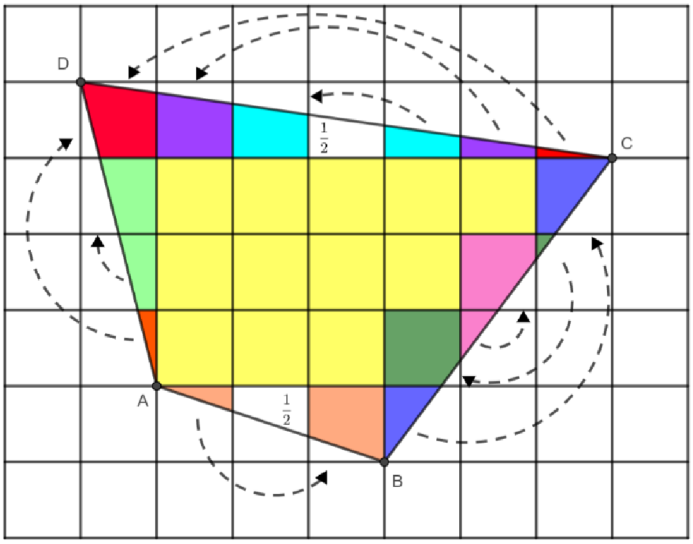
Řešení 3:

Využijeme toho, že čtyřúhelník se nachází ve čtvercové síti, takže jeho obsah je složený z čtverečků ať už celých nebo částečných. Pro vyřešení úlohy nám stačí spočítat z kolika čtverců se čtyřúhelník *ABCD* skládá.

Nejdříve najdeme celé (žluté) čtverce, kterých je 12. V dalších krocích budeme hledat dvojice, které dohromady vytvoří čtverec.

První dvojici (oranžovou) najdeme na straně *AB*, pokud bychom právě tyto dva dílky složili získáme celý čtverec. Další 3 dvojice (růžovou, tmavě zelenou a tmavě modrou) najdeme na straně *BC*, kde dohromady vytvoříme 3 čtverce. Na straně *CD* najdeme další dvě dvojice (světle modrou a fialovou), které dohromady vytvoří 2 čtverce. Poslední dvojici (světle zelenou) najdeme na straně *AD.* Zbývá trojice (červená), která dohromady vytvoří právě jeden čtverec. Z čtyřúhelníku chybí ještě dva dílečky, kde oba dílečky tvoří právě polovinu, čtverce, tedy dohromady poslední čtverec.

Nyní už stačí jednotlivé čtverce sečíst a vynýsobit je jejich obsahem. Čtyřúhelník je složen z 21 čtverců, jeho obsah je tedy: $S = N \cdot a^2 = 21 \cdot 2^2 = 84\ \mathrm{cm}^2$ (B).



5) (2019, 23) Body *P, Q* a *R* jsou po řadě středy stran *DA, BC* a *CD* čtverce *ABCD* a bod *S* je průsečíkem úseček *AQ* a *BP.* Určete, jakou část čtverce tvoří čtyřúhelník *ASBR.*

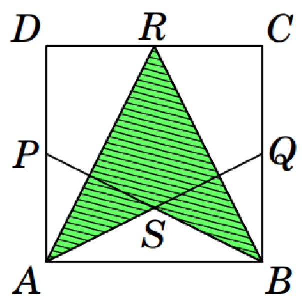
(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{7}{16}$

(E) $\frac{1}{2}$



Řešení 1:

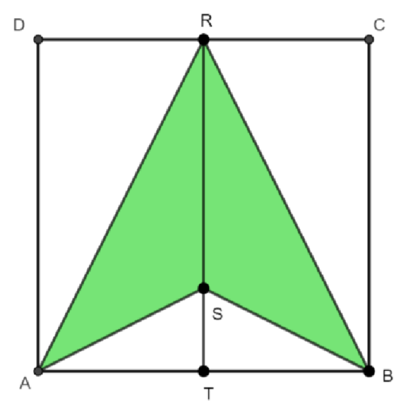
V řešení budeme vycházet z porovnávání oblastí ve čtverci *ABCD*.

Nejprve porovnáme trojúhelník *ABR* a čtverec *ABCD,* kde trojúhelník *ABR* je $\frac{1}{2}$ obsahu čtverce *ABCD*. Dále porovnáme trojúhelník *ABQ* a čtverec *ABCD*, kde trojúhelník *ABQ* je $\frac{1}{4}$ obsahu čtverce *ABCD*. Nakonec porovnáme trojúhelník *ABS* a trojúhelník *ABQ*, kde trojúhelník *ABS* je $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníku *ABQ*, z čehož vyplívá že trojúhelník *ABS* je $\frac{1}{8}$ obsahu čtverce *ABCD.*

Nyní můžeme od obsahu trojúhelníku *ABR* odečíst obsah trojúhelníku *ABS*: $S_{ASBR} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$, správná odpověď je (A).

Řešení 2:

Můžeme vycházet z toho, že čtyřúhelník *ASBR* je ve čtverci symetrický, a tedy stačí zjistit jakou část tvoří trojúhelník *ASR* v obdélníku *ATRD* nebo jakou část tvoří trojúhelník *BRS* v obdélníku *TBCR*.



Nyní můžeme zvolit dvě cesty výpočtu, a to buď podobně jako v řešení 1 řešit porovnáváním nebo využít toho, že při rozpůlení od sebe budeme odečítat dva pravoúhlé trojúhelníky.

a) Porovnáváme oblasti v obdélníku *ATRD.* Nejprve porovnáme trojúhelník *ATR* a obdélník *ATRD*, kde trojúhelník *ATR* je $\frac{1}{2}$ obsahu obdélníku *ATRD*. Porovnáme trojúhelník *ATS* a trojúhelník *ATR*, kde trojúhelník *ATS* je $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníku *ATR*, tedy trojúhelník *ATS* je $\frac{1}{8}$ obsahu obdélníku *ATRD*.

Nyní odečteme od části obsahu trojúhelníku *ATR* trojúhelník *ATS*: $S_{ASR} = S_{ATR} - S_{ATS} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$.

b) Máme dva pravoúhlé trojúhelníky *ATR* a *ATS*. Vyjádříme si obsah trojúhelníku *ATR* pomocí strany čtverce *ABCD*: $S_{ATR} = \frac{|AT|\cdot|TR|}{2} = \frac{\frac{a}{2}\cdot a}{2} = \frac{a^2}{4}$ a vyjádříme i trojúhelník *ATS* pomocí strany čtverce *ABCD*: $S_{ATS} = \frac{|AT|\cdot|TS|}{2} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{16}$.

Abychom určili obsah trojúhelníku *ASR* tak obsahy trojúhelníků *ATR* a *ATS*: $S_{ASR} = S_{ATR} - S_{ATS} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{4a^2-a^2}{16} = \frac{3a^2}{16}$.

Čtyřúhelník je složen ze dvou trojúhelníků, které jsou osově souměrné. Proto musíme obsah trojúhelníku *ASR* vynásobit 2. $S_{ASBR} = 2 \cdot S_{ATR} = 2 \cdot \frac{3a^2}{16} = \frac{3}{8}a^2$.

Obsah čtverce: $S_{č} = a^2$, proto je zřejmé, že čtyřúhelník *ASBR* tvoří $\frac{3}{8}$ čtverce *ABCD.*

<u>Řešení 3:</u>

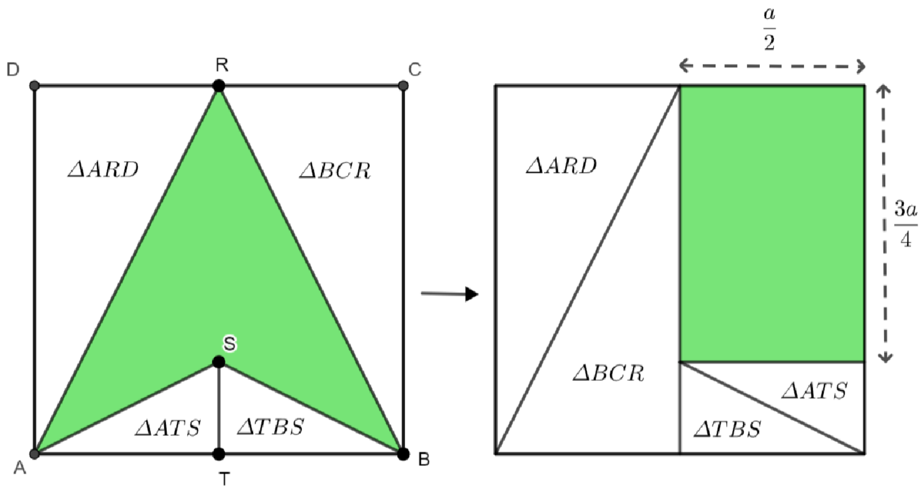
Úlohu lze řešit i takovým způsobem, že části, které nejsou zvýrazněné přeuspořádáme. Pokud zvolíme vhodné přeuspořádání, pak se z nekonvexního čtyřúhelníku může stát obdélník.

Trojúhelník *ARD* zůstane a k němu přesuneme trojúhelník *BCR*. Trojúhelníky *ARD* a *BCR* jsou pravoúhlé a osově souměrné, tedy při správné složení nám vznikne obdélník, který bude tvořit právě polovinu čtverce *ABCD.*

Trojúhelník *TBS* zůstane a k němu přesuneme trojúheelník *ATS.* Trojúhelníky *TBS* a *ATS* jsou pravoúhlé a osové souměrné, to znamená, že při správném uspořádání vznikne obdélník, který bude tvořit právě $\frac{1}{8}$ čtverce *ABCD.*

Zbývající část musí mít obsah shodný s obsahem původního nekonvexního čtyřúhelníku. Obsah tohoto čtyřúhelníku určíme pomocí výpočtu obsahu obdélníku (rozměry obdélníku určíme správným popisem obrázku): $S = \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3}{8} a^2$.

Čtyřúhelník *ASBR* tvoří $\frac{3}{8}$ čtverce *ABCD.*



4. Výzkumná část

Testy pro kategorii Benjamin a Kadet, byly vytvořeny každý ze 4 úloh (1 tříbodová, 2 čtyřbodové, 1 pětibodová), kde právě jednu úlohu měly stejnou. Test byl omezen z 24 úloh, pouze na 4, aby ho žáci stihli do 20 minut odevzdat. Byl krátký i z důvodu, protože po žácích byl požadován postup, který se u soutěže běžně nevyhodnocuje.

Testy byly rozdány žákům 6.- 9. tříd ZŠ Stupkova v Olomouci, během hodiny matematiky. Testy zadávala žákům Mgr. Miroslava Poláchová, z důvodu období nemocí ve škole nechtěli, abych se v budově více zdržovala, proto testy zadávala právě paní Mgr. Miroslava Poláchová. Vyplněné testy mi následně předala k vyhodnocení.

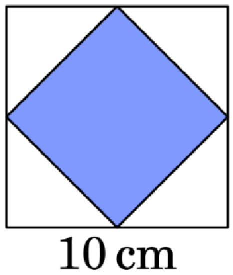
V kategorii Benjamín se testu zúčastnilo 53 žáků, kde bylo 26 žáků 6. třídy a 27 žáků 7. třídy. V kategorii Kadet se testu zúčastnilo 49 žáků, kde bylo 25 žáků 8. třídy a 24 žáků 9. třídy.

U výsledků se objevilo několik různých způsobů řešení dané úlohy. Tyto způsoby jsem v práci uvedla i s počtem řešitelů, kteří se touto cestou rozhodli úlohu řešit.

4.2. Test pro kategorii Benjamín

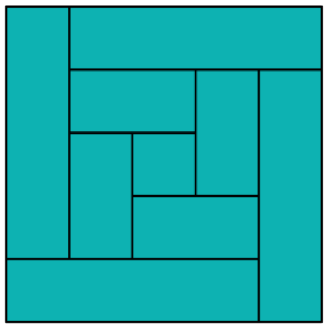
1) (2016,5) Katka narýsovala čtverec o délce strany 10 cm. Dále sestrojila menší čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce. Vypočti obsah menšího čtverce.

(A) 10 cm^2
(B) 20 cm^2
(C) 25 cm^2
(D) 40 cm^2
(E) 50 cm^2



2) (2018,16) Pavel rozřezal 8 cm širokou dřevěnou desku na 9 částí. Jedna část je čtverec o straně 8 cm a zbývající jsou obdélníky. Poté jednotlivé části seskládal dohromady, jak ukazuje obrázek. Určete délku původní desky.

(A) 150 cm
(B) 168 cm
(C) 196 cm
(D) 200 cm
(E) 232 cm



3) (2006, 14) Je dán obdélník *ABCD* o velikosti stran $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 1\,\mathrm{cm}$. Bod *E* je střed úsečky *AB*, *F* je střed úsečky *AE*, *G* je střed úsečky *AD* a *H* je střed úsečky *AG*. Urči obsah vybarveného obdélníku.

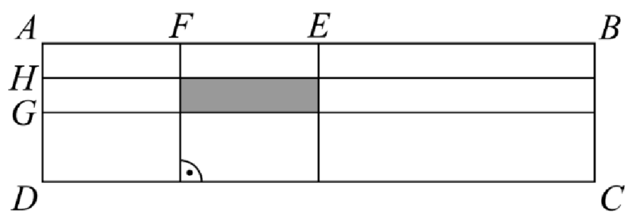
(A) $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$

(B) $1\,\mathrm{cm}^2$

(C) $\frac{1}{8}\,\mathrm{cm}^2$

(D) $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$

(E) $\frac{1}{16}\,\mathrm{cm}^2$



4) (Kadet 2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

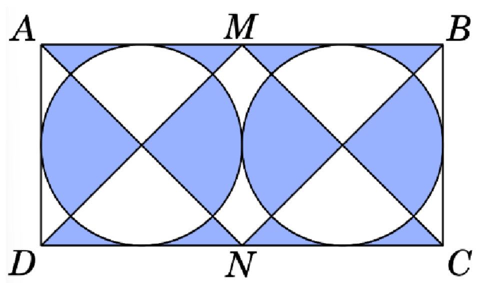
(A) 50 cm^2

(B) 80 cm^2

(C) 100 cm^2

(D) 120 cm^2

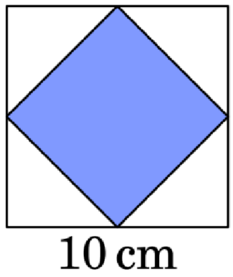
(E) 150 cm^2



4.2.1. Výsledky

1) (2016,5) Katka narýsovala čtverec o délce strany 10 cm. Dále sestrojila menší čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce. Vypočti obsah menšího čtverce.

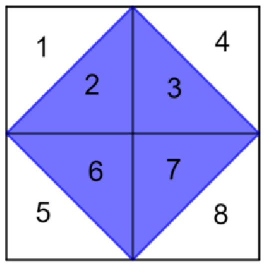
(A) 10 cm^2
(B) 20 cm^2
(C) 25 cm^2
(D) 40 cm^2
(E) 50 cm^2



Řešení 1:

Způsob, který si zvolila většina žáků byl takový, že si nejprve vypočítali obsah velkého čtverce $S_V = 10^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$. A protože menší čtverec je polovinou z velkého, tak správně obsah velkého čtverce vydělili dvěma.

Podobné bylo řešení, kdy žáci rozdělili čtverec na 8 shodných trojúhelníků, kde pak udělali poměr 4:8 (4 tmavé trojúhelníky z celkových 8 trojúhelníků). Následně došli k závěru, že menší čtverec tvoří právě polovinu z velkého čtverce. Takže obsah musí být roven 50 cm^2.



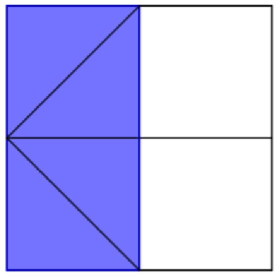
Řešení 2:

Způsob, který si moc žáků nevybralo, protože na první pohled asi není zřejmý. Žáci si vypočítali obsah jednoho z pravoúhlých trojúhelníků: $S_t = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Od obsahu velkého čtverce pak odečetli obsah čtyř trojúhelníků. $S = 100 - 4 \cdot 12{,}5 = 50\ \mathrm{cm}^2$.

Řešení 3:

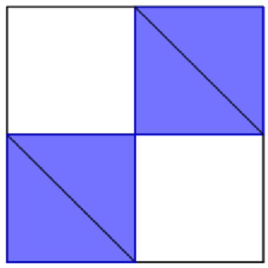
Dalším ze způsobů, jak úlohu vyřešit bylo nejprve si podle Pythagorovy věty vypočítat délku stany menšího čtverce $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Když už žáci znali délku strany čtverce potom mohli vypočítat jeho obsah: $S = \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50\ \mathrm{cm}^2$.

Řešení 4:



Mezi pěkný způsob řešení patřilo doplnění na obdélník. Žáci si menší čtverec rozdělili na 4 trojúhelníky a přeskládali je do obdélníku o stranách 5 cm a 10 cm. Obsah menšího čtverce pak vypočítali, jako obsah obdélníku: $S = 5 \cdot 10 = 50\ \mathrm{cm}^2$. Velmi pěkné a jednoduché řešení.

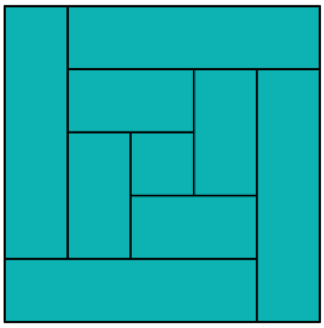
Řešení 5:



Podobně jako u řešení 4 si rozdělili čtverec na 4 trojúhelníky a z nich postavili 2 čtverce o stranách 5 cm. Vypočítali obsah jednoho ze vzniklých čtverců: $S = 5 \cdot 5 = 25\ \mathrm{cm}^2$. A protože vznikli dva malé čtverce tak obsah zdvojnásobili a dostali obsah hledaného čtverce 50 cm^2.

2) (2018,16) Pavel rozřezal 8 cm širokou dřevěnou desku na 9 částí. Jedna část je čtverec o straně 8 cm a zbývající jsou obdélníky. Poté jednotlivé části seskládal dohromady, jak ukazuje obrázek. Určete délku původní desky.

(A) 150 cm
(B) 168 cm
(C) 196 cm
(D) 200 cm
(E) 232 cm

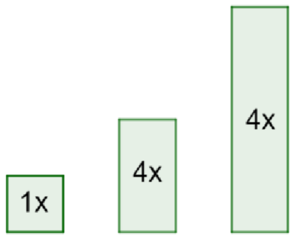


<u>Řešení 1:</u>

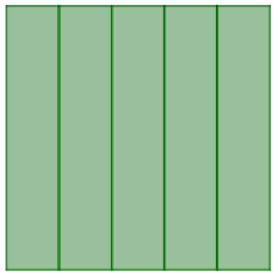
Žáci si desku rozdělili na 5x5 čtverečků o straně 8 cm. Když těchto 25 čtverečků dali do řady, tak získali původní desku. Délku původní desky pak vypočítalli jako součin počtu čtverečků a délky strany: $d = 25 \cdot 8 = 200$ cm.

<u>Řešení 2:</u>

Žáci si všimli, že deska byla rozřezaná na jeden čtverec o straně 8 cm, dále na 4 obdélníky o délce delší strany 16 cm a 4 obdélníky o délce delší strany 32 cm. N8sledně všechny tyto délky sečetli a tím získali délku původní desky: $d = 8 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 32 = 200$ cm.



Řeše ní 3:



Dalším řešením byla představa jiného rozřezání desky, a to na 5 stejných pruhů. Tyto pruhy naskládali vedle sebe a získali původní desku. Šířka těchto pruhů bude stejná jako šířka původní desky, tedy 8 cm. Délka jednotlivých pruhů bude 5krát větší než šířka, tedy 40 cm. Těchto 5 pruhů má dohromady délku původní desky: $d = 5 \cdot 40 = 200 \text{ cm}$.

Řešení 4:

Někteří žáci si uvědomili, že obsah čtvercové desky musí být stejný jako obsah původní dřevěné desky. Protože znali šířku původní desky, tak stačilo vypočítat obsah a podělit ho právě šířkou desky, čímž získali hodnotu pro velikost původní desky.

Nejprve žáci vypočítali obsah čtvercové desky, tak že určili podle obrázku délku strany čtverce jako 40 cm ($5 \cdot 8 \text{ cm}$). Obsah čtverce je tedy: $S_č = a^2 = 40^2 = 1600 \text{ cm}^2$. Z obsahu čtvercové desky vypočítali délku původní desky: $d = \frac{S_č}{š} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ cm}$.

3) (2006, 14) Je dán obdélník *ABCD* o velikosti stran $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|BC| = 1\,\text{cm}$. Bod *E* je střed úsečky *AB*, *F* je střed úsečky *AE*, *G* je střed úsečky *AD* a *H* je střed úsečky *AG*. Urči obsah vybarveného obdélníku.

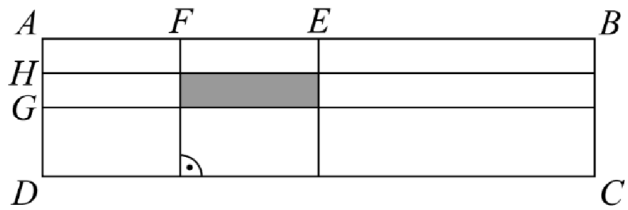
(A) $\mathbf{\frac{1}{4}\,cm^2}$

(B) $1\,\text{cm}^2$

(C) $\frac{1}{8}\,\text{cm}^2$

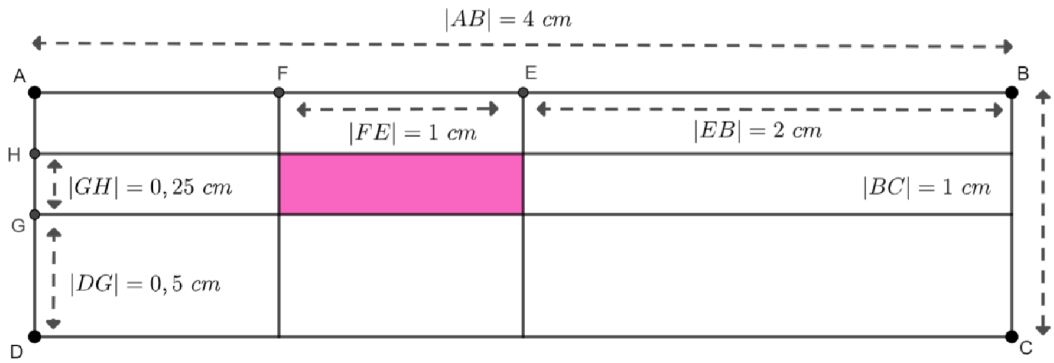
(D) $\frac{1}{2}\,\text{cm}^2$

(E) $\frac{1}{16}\,\text{cm}^2$



Řešení 1:

Většina žáků si podrobně popsala zadaný obrázek, tím zjistili, jaké jsou rozměry vybarveného obdélníku.



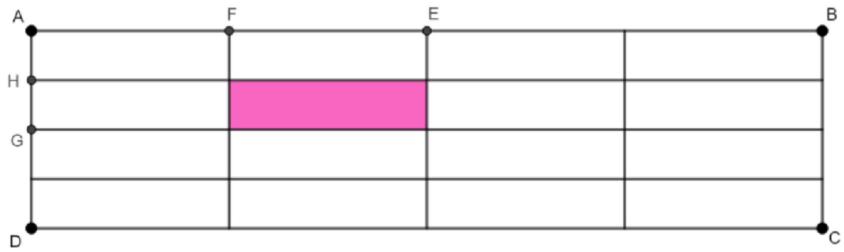
Po podrobném rozebrání obrázku žáci určili délku vybarveného obdélníku na 1 cm a jeho šířku na 0,25 cm. Obsah vybarveného obdélníku je tedy: $S = a \cdot b = 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25\ \text{cm}^2 = \frac{1}{4}\ \text{cm}^2$.

Někteří žáci nepotřebovali k řešení podrobný popis, stačilo jim si uvědomit, že polovina poloviny je čtvrtina, tím určili velikost úsečky *HG* a stejným způsobem určili i velikost úsečky *FE.*

Řešení 2:

Řešení které si zvolilo pár žáků vedlo přes výpočet obsahu velkého obdélníku. Nejprve si žáci vypočítali, jaký je obsah velkého obdélníku: $S_o = |AB| \cdot |BC| = 4 \cdot 1 = 4\ \mathrm{cm}^2$.

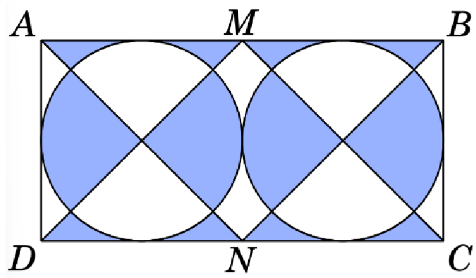
Dalším krokem bylo zjistit jakou část tvoří vybarvený obdélník ve velkém obdélníku. Aby tuto informaci zjistili, tak si z obdélníku utvořili obdélníkovou síť.



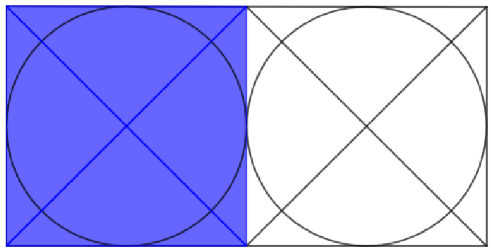
Síť je složena z 16 obdélníků z nichž pouze jeden je vyznačený. Vybarvený obdélník tedy tvoří $\frac{1}{16}$ z celkového obsahu velkého obdélníku. Obsah vybarvené části je $\frac{1}{16}$ z $4\ \mathrm{cm}^2$, což je $\frac{1}{4}\ \mathrm{cm}^2$.

4) (Kadet 2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

(A) 50 cm^2
(B) 80 cm^2
(C) 100 cm^2
(D) 120 cm^2
(E) 150 cm^2



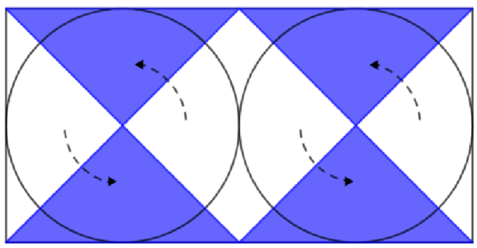
Řešení 1:



Jedno z nejčastěch řešení bylo takové, že si žáci spojili jednotlivé vyznačené dílky z obrázku do jednoho čtverce. Vypočítat obsah čtverce už je pak snadné.

Ze zadání žáci maí informaci, že průměr kruhu je 10 cm. Pro vzniklý čtverec platí, že průměr kruhu je shodný s délkou strany čtverce. Obsah čtverce žáci vypočítali: $S = a^2 = 10^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$.

Řešení 2:



Další řešení, které se objevovalo v testech, bylo takové, že žáci zvolili otočení vnitřních kruhů, čímž jim vznikli 4 shodné rovnoramenné trojúhelníky. Pro výpočet obsahu pak zvolili cestu výpočtu jednoho trojúhelníku, který následně zčtyřnásobili.

K výpočtu jednoho rovnoramenného trojúhelníku je třeba určit délku jeho základny a velikost výšky k dané základně. Délka jeho základny je stejná jako průměr kruhu, tedy délka základny a je dlouhá 10 cm. Velikost výšky je shodná s poloměrem kruhu, tedy velikost výšky v v rovnoramenném trojúhelníku je 5 cm.

Obsah jednoho rovnoramenného trojúhelníku žáci vypočítali: $S_t = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$. Obsah čtyř těchto trojúhelníků je pak: $S = 4 \cdot S_t = 4 \cdot 25 = 100 \text{ cm}^2$.

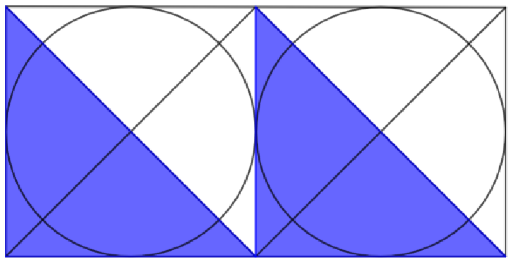
Řešení 3:

Řešení, které se objevovalo velmi často vycházelo z jednoduchého uvědomí, že vyznačená část je právě polovina z celkového obsahu obdélníku.

Žáci nejprve vypočítali celkový obsah obdélníku, kde strana a je dlouhá 20 cm (2 průměry kruhu) a strana b je dlouhá 10 cm (průměr kruhu). Obsah obdélníku je pak: $S_o = a \cdot b = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$. Protože vyznačená část je právě polovinou z celkouvého obsahu obdélnika, pak obsah vyznačené části je: $S = \frac{S_o}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ cm}^2$.

Řešení 4:

U pár žáků se objevilo řešení v podobě dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Žáci si podobně jako u předchozích způsobů řešení zvolili přemístění vyznačených části do takového tvaru, kde je výpočet obsahu jednoduchý.

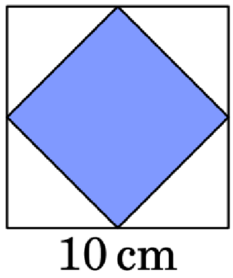


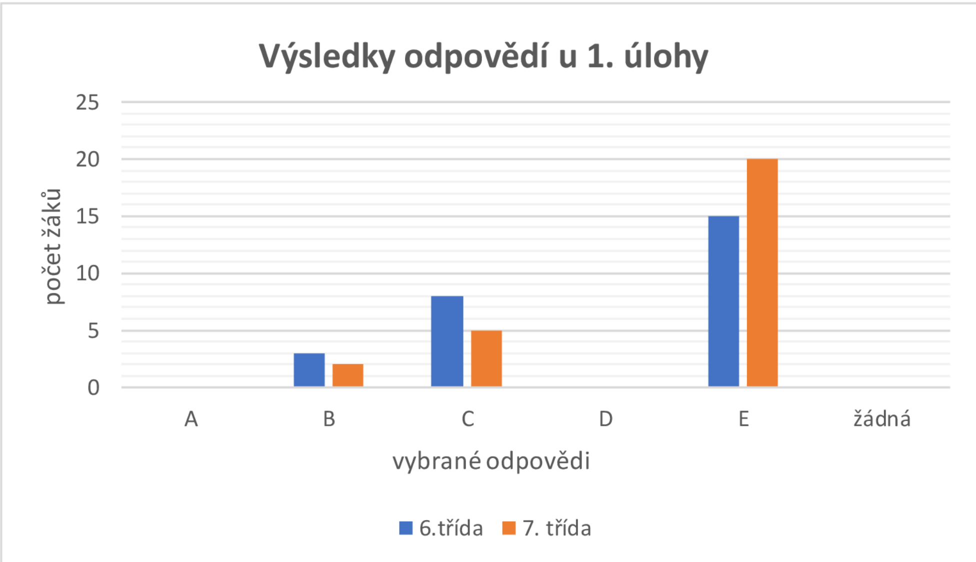
Žáci si přemístili některé vybarvené části, tak jak je vidět na obrázku, čímž získali 2 shodné trojúhelníky. K výpočtu obsahu jednoho trojúhelníku je třeba znát délku jeho odvěsen, protože se jedná o rovnoramenný trojúhelník tak jsou odvěsny stejně dlouhé a jejich délka je rovna velikosti průměru kruhu, tedy 10 cm. Obsah jednoho trojúhelníku je: $S_t = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$. Obsah vyznačené části je potom: $S = 2 \cdot S_t = 2 \cdot 50 = 100 \text{ cm}^2$.

4.2.2. Srovnání

1) (2016,5) Katka narýsovala čtverec o délce strany 10 cm. Dále sestrojila menší čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce. Vypočti obsah menšího čtverce.

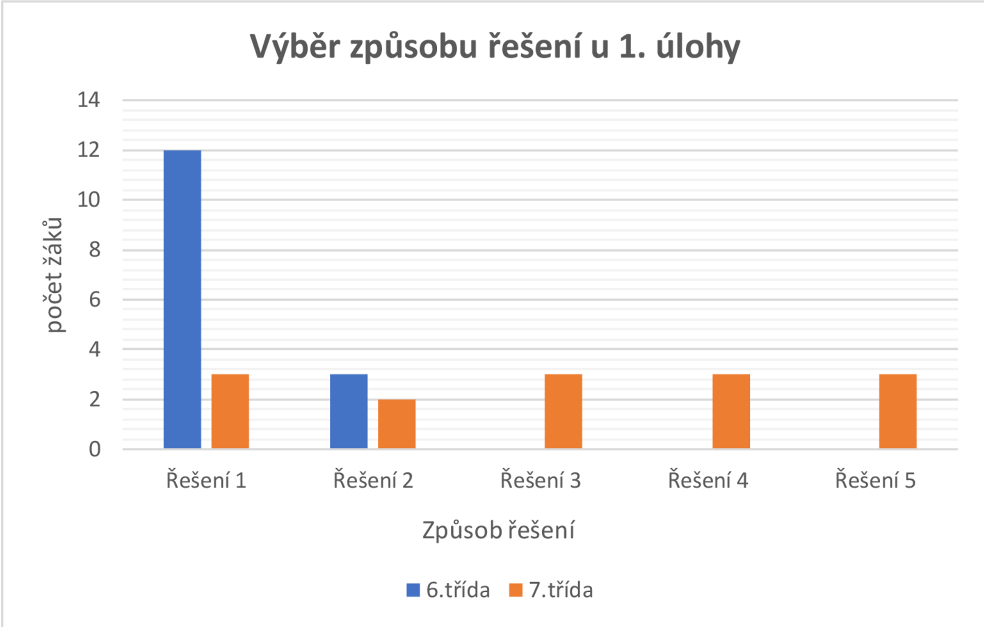
(A) 10 cm^2
(B) 20 cm^2
(C) 25 cm^2
(D) 40 cm^2
(E) 50 cm^2





Graf 3: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.1 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Správnou odpovědí v této úloze byla odpověď (E). Většina žáku právě tuto odpověď vybrala. Někteří žáci vybrali nesprávně odpověď (B) nebo (C). Přičemž podle postupů bylo zřejmé, že odpověď (B) zvolili, protože místo obsahu počítali obvod čtverce o straně 5 cm. Odpověď (C) žáci vybrali, protože si mysleli, že strana menšího čtverce je právě 5 cm, proto je obsah 25 cm^2. Tedy nejčastější chybou bylo nesprávné určení strany menšího čtverce.

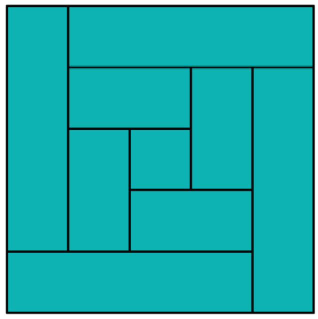


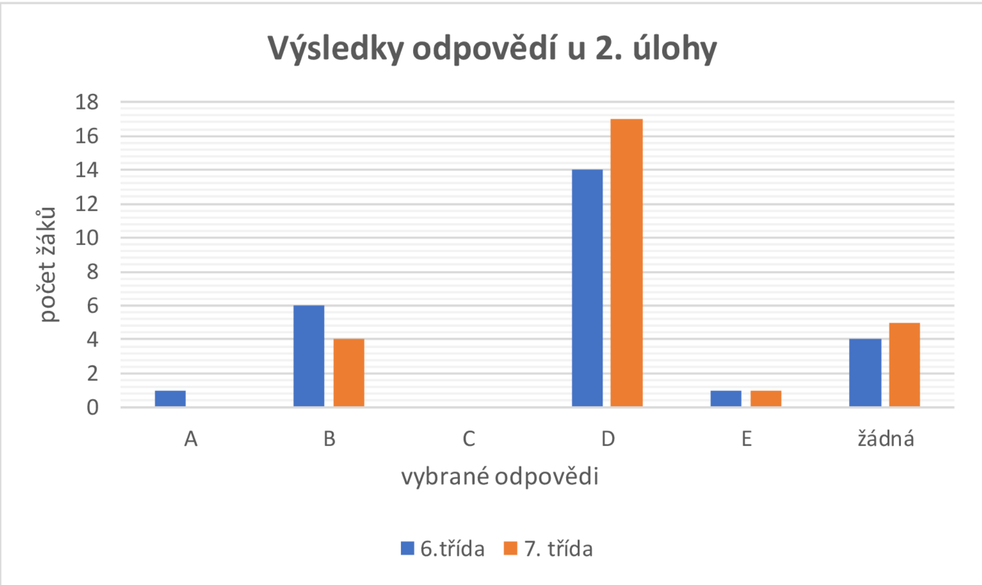
Graf 4: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.1 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Řešení, které zvolilo nejvíce žáků 6. třídy vycházelo z výpočtu obsahu čtverce a následného podělení 2. Zatímco žáci 7. třídy byli více kreativní, různými způsoby si upravovali čtverec, aby si zjednodušili výpočet.

2) (2018,16) Pavel rozřezal 8 cm širokou dřevěnou desku na 9 částí. Jedna část je čtverec o straně 8 cm a zbývající jsou obdélníky. Poté jednotlivé části seskládal dohromady, jak ukazuje obrázek. Určete délku původní desky.

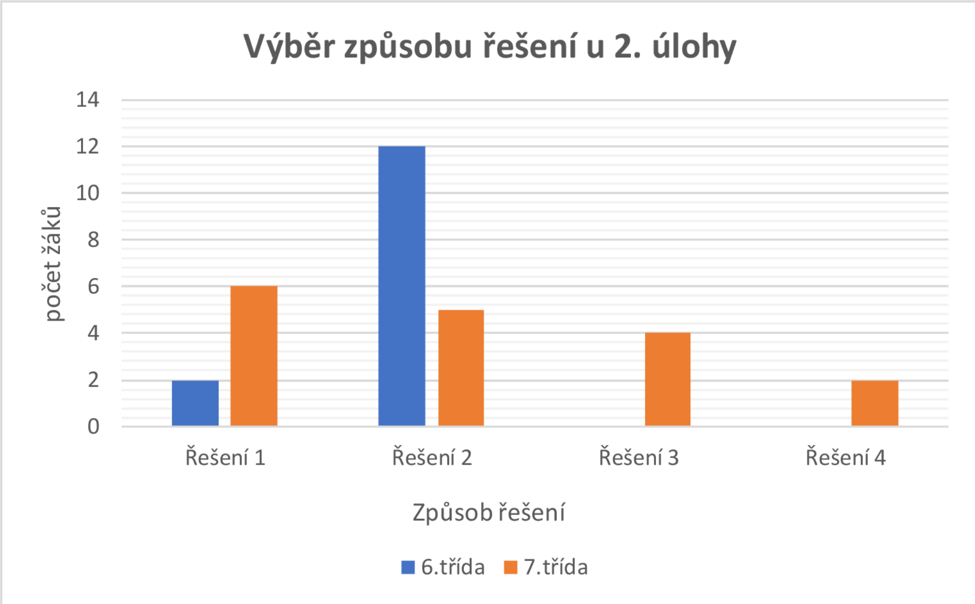
(A) 150 cm
(B) 168 cm
(C) 196 cm
(D) 200 cm
(E) 232 cm





Graf 5: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.2 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Správou odpovědí bylo (D), kterou zvolilo 31 žáků z 53, tedy přibližně 58 % žáků. Zbytek žáků během výpočtu udělalo buď početní chybu nebo špatně určili délky jednotlivých částí, které je pak vedly ke špatnému výsledku, velmi častou chybou bylo určení délky nejdelších desek na 24 cm, která ale byla 32 cm.



Graf 6: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.2 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Žáci 6. třídy si primárně zvolili způsob, při kterém našli stejné desky, počítali jejich délky stran a následně je sečetli, zatímco žáci 7. třídy opět ukázali svoji kreativitu a počítali příklad různými způsoby.

3) (2006, 14) Je dán obdélník *ABCD* o velikosti stran $|AB| = 4\ \mathrm{cm}$, $|BC| = 1\ \mathrm{cm}$. Bod *E* je střed úsečky *AB*, *F* je střed úsečky *AE*, *G* je střed úsečky *AD* a *H* je střed úsečky *AG*. Urči obsah vybarveného obdélníku.

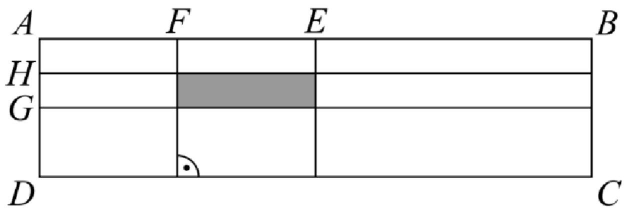
(A) $\mathbf{\frac{1}{4}\ cm^2}$

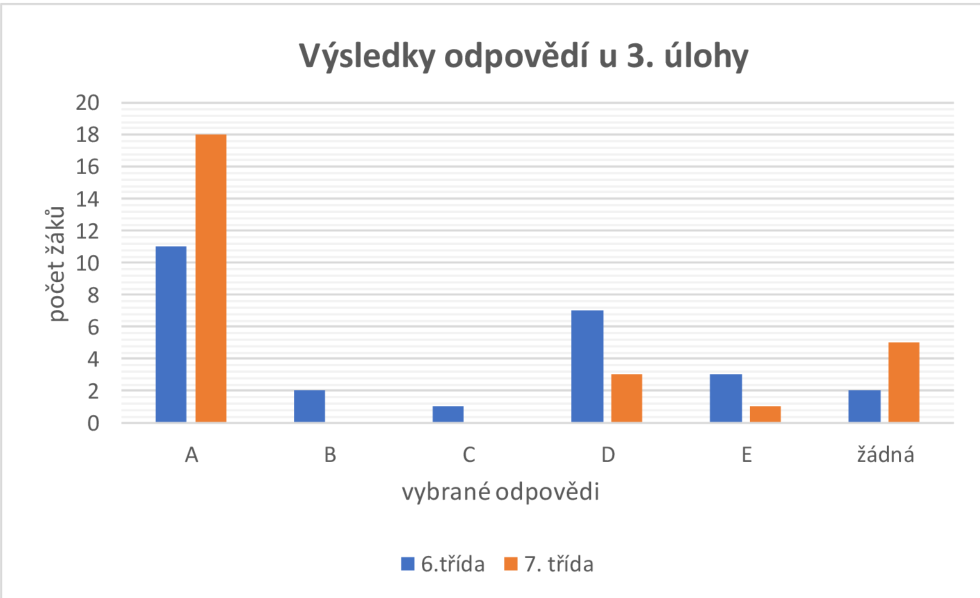
(B) $1\ \mathrm{cm}^2$

(C) $\frac{1}{8}\ \mathrm{cm}^2$

(D) $\frac{1}{2}\ \mathrm{cm}^2$

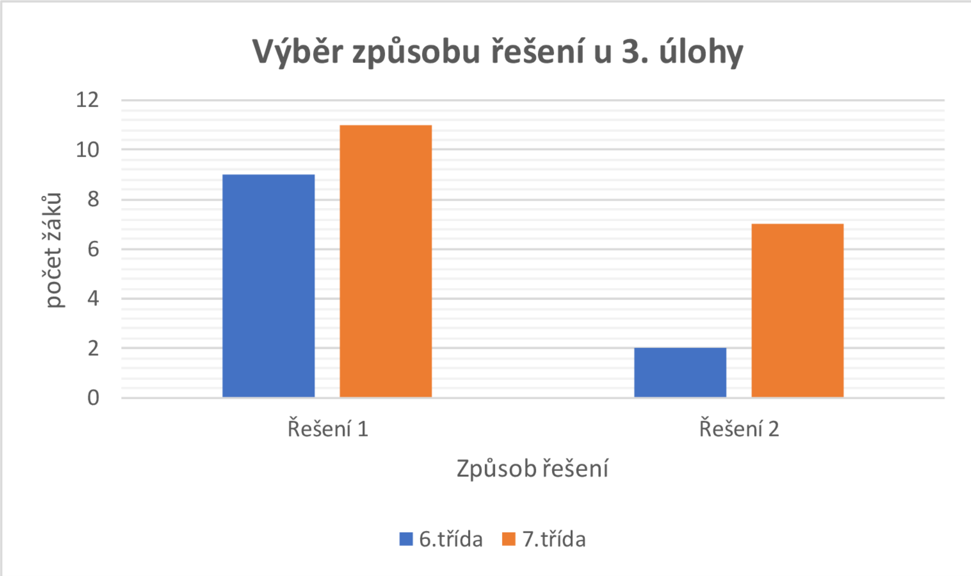
(E) $\frac{1}{16}\ \mathrm{cm}^2$





Graf 7: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.3 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

U třetí úlohy byly zřejmé rozdíly ve vzdělání, kde zlomky se probírají až v 7. třídě. Odpovědi u žáků 6. tříd byly velmi různorodé a velmi často se objevovala odpověď (D), i přestože měli v postupu výsledek 0,25, předpokládám, že právě kvůli neznalosti zlomků si spojili číslo 0,25 s $\frac{1}{2}$. Další velmi častá chyba, která se u žáků 6. tříd objevila spočívala v tom, že místo aby počítali obsah vyznačené části počítali, v jakém poměru je vyznačená část vzhledem k obsahu obdélníku.



Graf 8: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.3 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Řešení 1 bylo častější, jak u žáků 6. třídy, tak 7. třídy, při tomto řešení si žáci zvolili cestu určení délek stran vyznačeného obdélníku, tedy počítali přímo daný obsah. Při řešení 2 se často objevovali chyby u žáků 6. tříd spojeny právě s poměrem vyznačené části a celého obdélníku.

4) (Kadet 2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

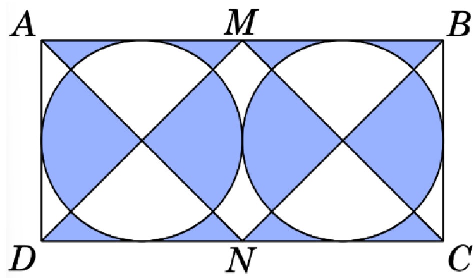
(A) 50 cm²

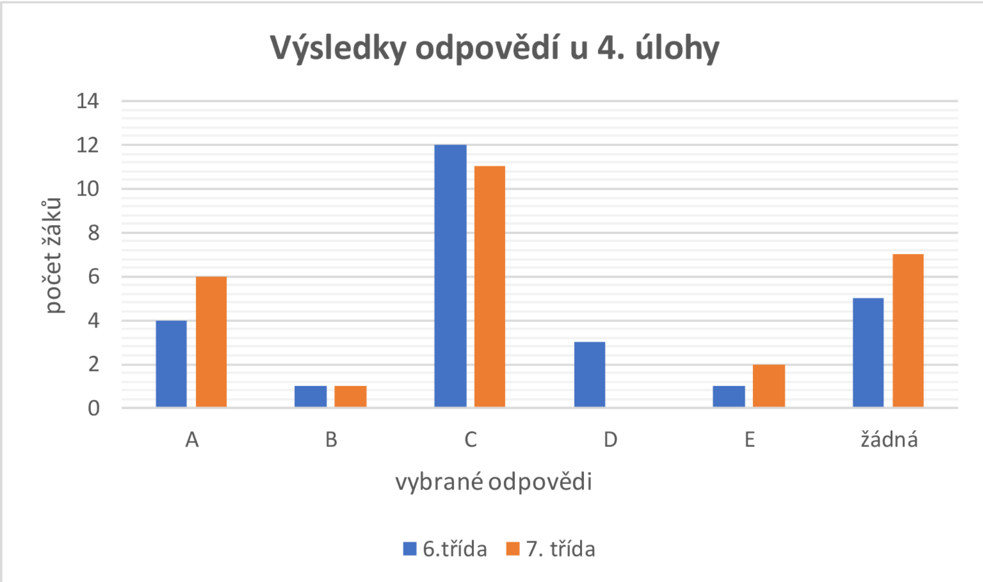
(B) 80 cm²

(C) 100 cm²

(D) 120 cm²

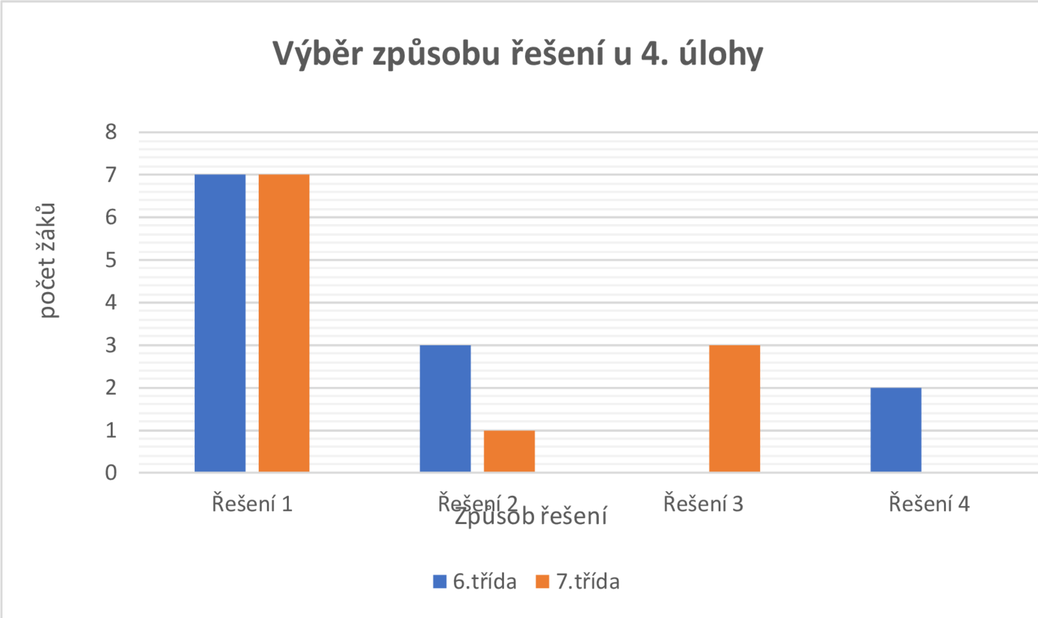
(E) 150 cm²





Graf 9: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.4 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Úloha 4 byla vybrána z kategorie Kadet, kde byla za 3 body. Správná odpověď byla (C), v této úloze ji vybralo pouze 43 % žáků. Žáci, kteří nevybrali odpověď (C) často počítali pouze obsah kruhu. 12 žáků ani odpověď nevybralo a 10 žáků počítalo místo poloviny čtvrtinu.



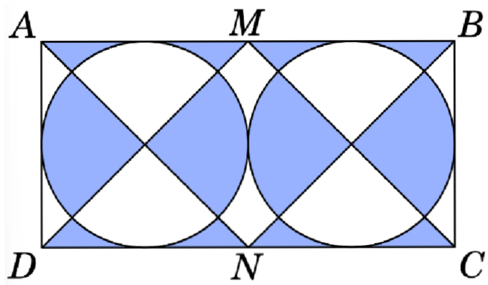
Graf 10: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.4 – Benjamín (Zdroj: vlastní)

Ti žáci, kteří úlohu vyřešili ji nejčastěji řešili, způsobem popsaným v řešení 1, tedy počítali obsah čtverce o délce strany 10 cm. Jiným způsobem byl výpočet obsahů rovnoramenných trojúhelníků.

4.3. Test pro kategorii Kadet

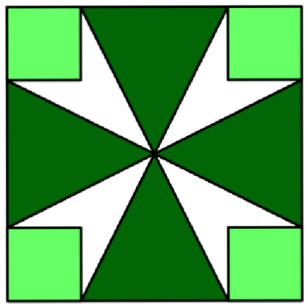
1) (2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

(A) 50 cm^2
(B) 80 cm^2
(C) 100 cm^2
(D) 120 cm^2
(E) 150 cm^2



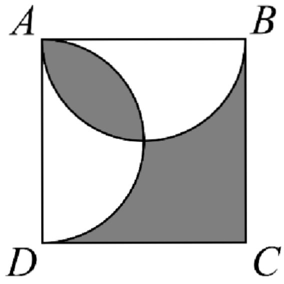
2) (2021, 10) Obsah velkého čtverce je 16 cm^2 a obsah každého malého čtverce je 1 cm^2. Určete obsah bílého květu.

(A) 3
(B) $\frac{7}{2}$
(C) 4
(D) $\frac{11}{2}$
(E) 6



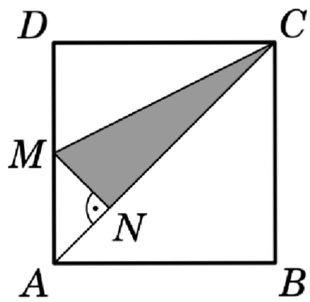
3) (2004, 17) Na obrázku je nakreslen čtverec a dvě půlkružnice s průměry *AB* a *AD.* Určete obsah tmavě zbarvené oblasti ohraničené těmito křivkami, když víte, že délka strany *AB* je 2.

(A) 1
(B) 2
(C) 2π
(D) $\frac{\pi}{2}$
(E) $\frac{3}{4}$



4) (2012, 18) Určete poměr obsahu šedého obrazce (trojúhelníku *MNC*) k obsahu čtverce *ABCD*, jestliže bod *M* je středem strany *AD* a úsečka *MN* je kolmá k úhlopříčce *AC.*

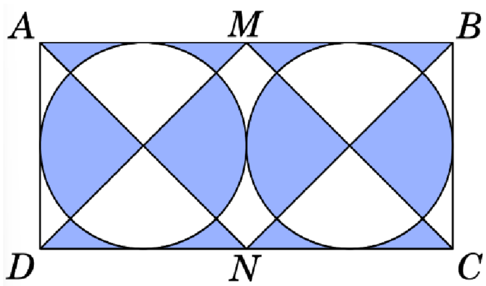
(A) 1:6
(B) 1:5
(C) 7:36
(D) 3:16
(E) 7:40



4.3.1. Výsledky

1) (2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

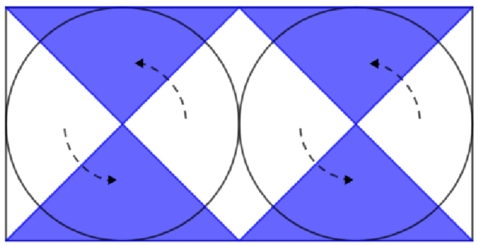
(A) 50 cm²
(B) 80 cm²
(C) 100 cm²
(D) 120 cm²
(E) 150 cm²



Řešení 1:

Nejčastějším řešením, které se objevovalo i u žáků 6. a 7. třídy, bylo uvědomění si, že vyznačená část je právě polovina obsahu obdélníka. Žáci si vypočítali obsah obdélníku $S_o = a \cdot b = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$ a ten pak vydělili dvěma $S = \frac{S_o}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ cm}^2$.

Řešení 2:



Další z řešení, které se objevovali i u žáků 6. a 7. tříd, bylo to, kde si žáci posunuli o 90° kruhy uvnitř obdélníku, čímž jim vznikli 4 shodné rovnoramenné trojúhelníky u kterých jen vypočítali nejprve obsah jednoho trojúhelníka: $S_t = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$.

Obsah vyznačené části je shodný s obsahem 4 trojúhelníků: $S = 4 \cdot S_t = 4 \cdot 25 = 100 \text{ cm}^2$.

Řešení 3:

Řešení, které se objevilo pouze u žáků 9. tříd vycházelo z obsahu kruhu. Žáci zvolili cestu, kde vypočítali pouze obsah kruhu a výsledek rozumně zaokrouhlili nahoru.

Žáci vypočítali obsah kruhu: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 \cong 78{,}54\ \mathrm{cm}^2$.

Nejbližší byla odpověď 80 cm^2, ale žáci si pravděpodobně uvědomili, že to je málo, neboť by přičetli pouze přibližně 1,5 cm^2. Proto volili další nejbližší odpověď (C) 100 cm^2.

Řešení 4:

Nejvíce zdlouhavý způsob, který se několikrát u žáků 9. třídy objevil, byl podrobný výpočet jednotlivých vyznačených částí.

Nejprve počítali, jaký je obsah čtvrtiny kruhu: $S_{čk} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} \cdot \pi \cong 19{,}63\ cm^2$. Tyto vyznačené části se v obdélníku objevují 4krát, proto výsledek vynásobili 4: $S_k = 4 \cdot S_{čk} \cong 78{,}54\ \mathrm{cm}^2$.

Dalším krokem byl výpočet zbylých částí. Žáci tyto části počítali jako rozdíl rovnoramenného trojúhelníku a čtvrtiny kruhu. Nejprve si vypočítali obsah trojúhelníku: $S_t = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\ \mathrm{cm}^2$. Od obsahu trojúhelníku odečetli již vypočítaný obsah čtvrtiny kruhu: $S_{zč} = S_t - S_{čk} = 25 - 19{,}63 = 5{,}37\ \mathrm{cm}^2$. Tyto vyznačené části se v obdélníku objevují 4krát, proto výsledek vynásobili 4: $S_z = 4 \cdot S_{zč} = 21{,}48\ \mathrm{cm}^2$.

Nakonec vypočtené obsahy sečetli: $S = S_k + S_z = 78{,}54 + 21{,}48 = 100{,}02\ \mathrm{cm}^2 \cong 100\ \mathrm{cm}^2$.

2) (2021, 10) Obsah velkého čtverce je 16 cm^2 a obsah každého malého čtverce je 1 cm^2. Určete obsah bílého květu.

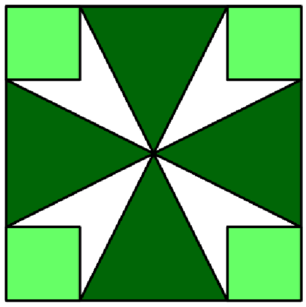
(A) 3

(B) $\frac{7}{2}$

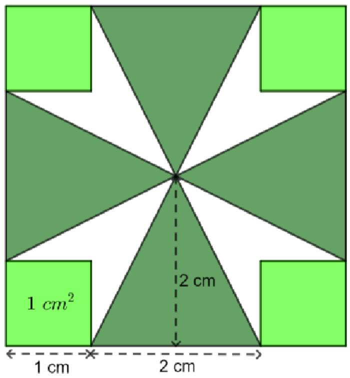
(C) $\mathbf{4}$

(D) $\frac{11}{2}$

(E) 6



Řešení 1:



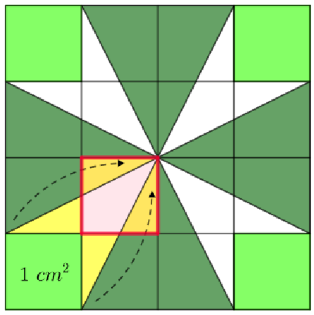
Nejčastější řešení, které žáci zvolili k vyřešení této úlohy. Místo aby počítali přímo obsah bílého květu, tak nejprve počítali obsahy ostatních útvarů ve čtverci a obsah bílého květu nakonec vypočítali, jako doplněk do čtverce.

Ze zadání žáci ví, že obsah velkého čtverce je 16 cm^2 a obsah každého malého čtverce je 1 cm^2. Díky těmto informacím se dá určit délka strany velkého čtverce na 4 cm a délka strany malého čtverce na 1 cm.

Aby žáci vypočítali obsah bílého květu, tak potřebovali ještě vypočítat obsahy rovnoramenných trojúhelníků. Základna rovnoramenného trojúhelníka je dlouhá 2 cm, k čemuž došli po odečtení 2 cm (2 stran malého čtverce) od délky strany velkého čtverce. Výška v rovnoramenném trojúhelníku je přesně polovina délky strany čtverce, tedy 2 cm. Obsah trojúhelníku je: $S_t = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah bílého květu pak vypočítali: $S = S_č - 4 \cdot S_t - 4 \cdot S_{mč} = 16 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 16 - 8 - 4 = 4\ \mathrm{cm}^2$.

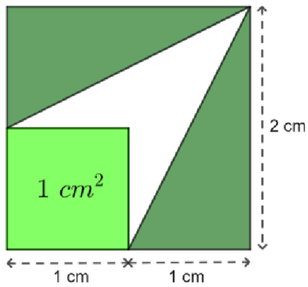
Řešení 2:



Další řešení, které se objevilo, bylo řešení s využitím čtvercové sítě. Žáci si přidělali do obrázku čtvercovou sít 4x4, kde má jeden čtverec obsah 1 cm^2.

Žáci si poupravili tvar bílého květu, takovým způsobem, že z jednoho „okvětního lístku“ vznikl jeden čtverec o obsahu 1 cm^2 (jako vidíme na obrázku). Bílý květ se skládá ze 4 „okvětních lístků“, proto obsah bílého květu jsou 4 cm^2.

Řešení 3:



Další způsob, který si žáci volili je podobný jako v řešení 1. Žáci si všimli toho, že obrázek je symetrický osově i středově. To znamená, že stačí vypočítat pouze obsah jedné ze 4 částí bílého květu, protože všechny čtyři části jsou stejné.

Jedenu část z květu žáci počítali, tak že si velký čtverec rozdělili na 4 menší čtverce, kde každému čtverci náleží kromě části bílého květu ještě malý čtverec a dva pravoúhlé trojúhelníky (jak je vidět na obrázku). Tento menší čtverec má obsah 4 cm^2. Žáci od tohoto čtverce odečítali obsah malého čtverce a dvou trojúhelníků, tedy podobně jako v řešení 1.

Obsah malého čtverce je 1 cm^2, a k výpočtu obsahu trojúhelníku, žáci potřebovali určit jeho výšku (2 cm) a délku jeho základny (1 cm). Obsah jednoho pravoúhlého trojúhelníku je pak: $S_t = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah jedné části bílého květu je tedy: $S_{1k} = S_č - S_{mč} - 2 \cdot S_t = 4 - 1 - 2 \cdot 1 = 1\ \mathrm{cm}^2$.

Obsah bílého květu je čtyřnásobný tedy: $S = 4 \cdot S_{1k} = 4 \cdot 1 = 4\ \mathrm{cm}^2$.

3) (2004, 17) Na obrázku je nakreslen čtverec a dvě půlkružnice s průměry *AB* a *AD.* Určete obsah tmavě zbarvené oblasti ohraničené těmito křivkami, když víte, že délka strany *AB* je 2.

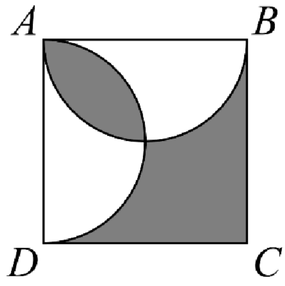
(A) 1

(B) $\mathbf{2}$

(C) $2\,\pi$

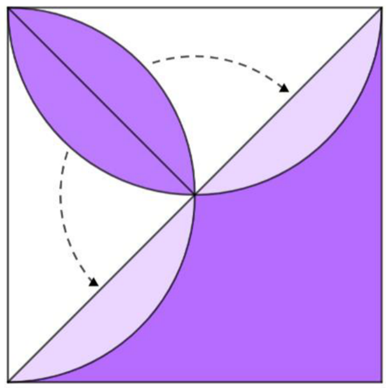
(D) $\frac{\pi}{2}$

(E) $\frac{3}{4}$



Řešení 1:

Jedno z řešení, které se objevovalo nejčasti bylo přemístění jedné části tmavě zbarvěné oblasti do tavru trojúhelníku, jehož obsah se dá jednoduše vypočítat.



Žáci tedy přemístili části tak, že jim vznikl pravoúhlý rovnostranný trojúhleník. K výpočtu obsahu tohoto trojúhelníku, žáci potřebovali znát délku jeho odvěsen, které jsou shodné s délkou strany čtverce.

Obsa tmavě zbarvené obůasti, pak žáci počítali: $S = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$

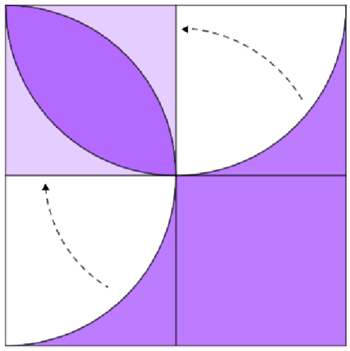
Řešení 2:

Nejčastější řešení,které se objevovalo neobsahovalo žádný složitější výpočet. Žáci si po prohlédnutí obrázku uvědomili, že tmavá část tvoří právě polovinu z obsahu čtverce.

Strana čtverce je ze zadání známá jako 2. Obsah čtverce je potom: $S_č = a \cdot a = 2 \cdot 2 = 4.$

Polovina čtverce o obsahu 4 je 2.

Řešení 3:



Další řešení, které se objevovalo, bylo rozdělení čtverce na čtyři menší čtevrce.

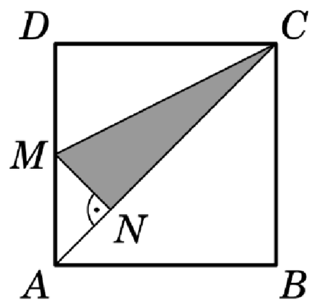
Žáci rozdělili čtverec na čtyři části a poté přesunuli 2 sférické trojúhelníky k jedné tmavé části tak, že vznikl čtverec.

Úloha se změnila na výpočet obsahu dvou shodných čtverců. Strana vzniklých čtverců má délku 1.

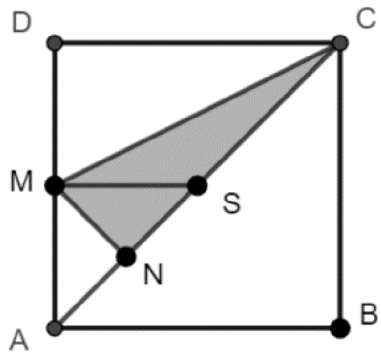
Obsah jednoho čtverce: $S_{č} = a \cdot a = 1 \cdot 1 = 1$. Obsah tmavé části, který je složen ze dvou čtverců je tedy: $S = 2 \cdot S_{č} = 2 \cdot 1 = 2$.

4) (2012, 18) Určete poměr obsahu šedého obrazce (trojúhelníku *MNC*) k obsahu čtverce *ABCD*, jestliže bod *M* je středem strany *AD* a úsečka *MN* je kolmá k úhlopříčce *AC.*

(A) 1:6
(B) 1:5
(C) 7:36
(D) 3:16
(E) 7:40



Řešení 1:



Řešení, které vycházelo z porovnávání částí si zvolilo několik žáků.

Nejprve porovnali trojúhelník *ACD* s čtvercem *ABCD*, kde trojúhelník *ACD* je $\frac{1}{2}$ obsahu čtverce *ABCD.*

Dále porovnali trojúhelník *ACM* a trojúhelník *ACD*, kde trojúhelník *ACM* je $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníku *ACD*, tedy trojúhelník *ACM* je $\frac{1}{4}$ obsahu čtverce *ABCD.*

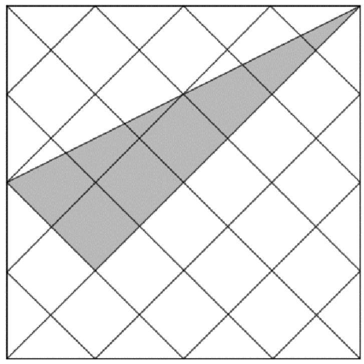
Dále porovnali trojúhelník *ASM* a trojúhelník *ACM*, kde trojúhelník *ASM* je $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníka *ACM,* tedy trojúhelník *ASM* je $\frac{1}{8}$ obsahu čtverce *ABCD.*

Nakonec porovnali trojúhelník *ANM* a trojúhelník *ASM*, kde trojúhelník *ANM* je $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníka *ASM,* tedy trojúhelník *ANM* je $\frac{1}{16}$ obsahu čtverce *ABCD.*

Obsah šedé části vypočítali tak, že od obsahu trojúhelníka *ACM* odečetli obsah trojúhelníka *AMN*: $S = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}$.

Poměr obsahu šedého obrazce k obsahu čtverce je 3:16.

Řešení 2:

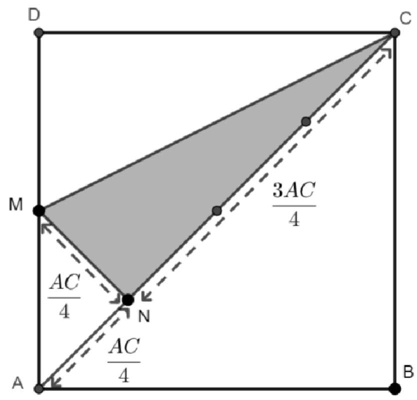


Někteří žáci zvolili zajímavě umístěnou síť (jak je vidět na obrázku). Tato síť rozdělila čtverec na 24 čtverců a 16 trojúhelníků, ze 2 trojúhelníků je 1 čtverec, tedy síť je složena z 32 čtverců.

Šedý obrazec je složen viditelně ze 3 čtverců a 2 shodných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna má velikost shodnou s jednou stranou čtverce a druhá odvěsna má velikost tří stran čtverce, dohromady tyto dva trojúhelníky tvoří obdélník, který je složen ze 3 čtverců.

Šedý obrazec je tedy složen z 6 čtverců z celkového počtu 32 čtverců sítě. Poměr je 6:32, po úpravě 3:16.

Řešení 3:



Několik žáků zvolili řešení, které je založeno na výpočtu obsahu.

Žáci si v obrázku vyznačili strany, které k výpočtu využijí a rozdělili je na části ($AN = \frac{AC}{4}$; $NC = \frac{3 \cdot AC}{4}$; $MN = \frac{AC}{4}$).

Nejprve si žáci vyjádřili úhlopříčku *AC*, kterou vyjádřili pomocí strany čtverce *a:* $|AC|^2 = a^2 + a^2 \rightarrow |AC|^2 = 2a^2 \rightarrow |AC| = \sqrt{2a^2} \rightarrow |AC| = a\sqrt{2}$

Obsah trojúhelníka pak žáci počítali:

$$S = \frac{|NC| \cdot |MN|}{2} = \frac{\frac{|AC|}{4} \cdot \frac{3 \cdot |AC|}{4}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{\frac{6a^2}{16}}{2} = \frac{3}{16}a^2$$

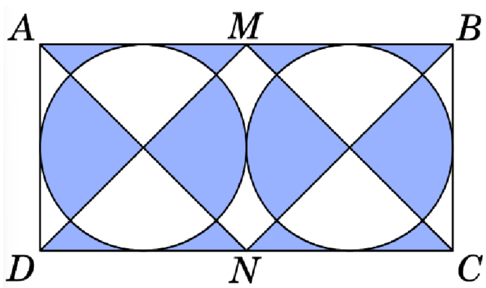
Obsah čtverce: $S_č = a^2$.

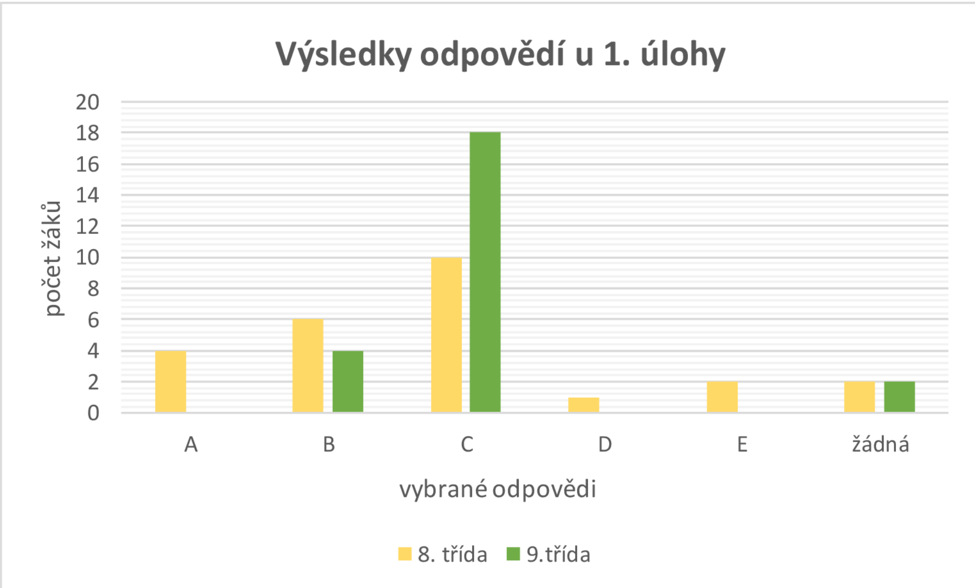
Poměr obsahu trojúhelníku a čtverce: $\frac{S}{S_č} = \frac{\frac{3}{16}a^2}{a^2} = \frac{3}{16} \rightarrow 3{:}\,16.$

4.3.2. Srovnání

1) (2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

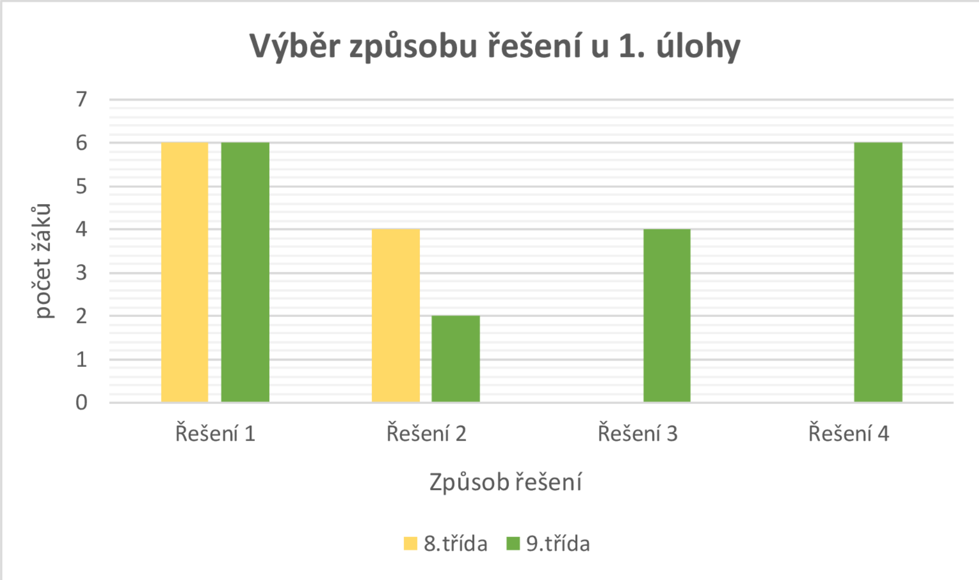
(A) 50 cm^2
(B) 80 cm^2
(C) 100 cm^2
(D) 120 cm^2
(E) 150 cm^2





Graf 11: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.1 – Kadet (Zdroj: vlastní)

Žáci 9. třídy si u tohoto úkolu vedli mnohem lépe než žáci 8. třídy. Žáci 9. třídy byli téměř neomylní, zatímco žáci 8. třídy volili různé odpovědi, kde nejčastější chyba, která se objevila byla taková, že žáci 8. třídy počítali místo poloviny obdélníku její čtvrtinu.



Graf 12: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.1 – Kadet
(Zdroj: vlastní)

Žáci 8. třídy, kteří úlohu vyřešili k ní došli pomocí 2 různých způsobů. Oproti tomu byli žáci 9. třídy o něco kreativnější a rozdělili se u výpočtu na 2 hlavní skupiny. Jedna skupina zvolila intuitivně řešení přes polovinu obdélníku a druhá skupina šla komplikovanější cestou, kde počítala každý jednotlivý kousek v obdélníku, který následně sečetli.

2) (2021, 10) Obsah velkého čtverce je 16 cm^2 a obsah každého malého čtverce je 1 cm^2. Určete obsah bílého květu.

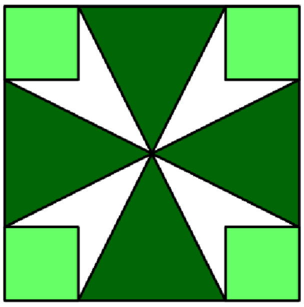
(A) 3

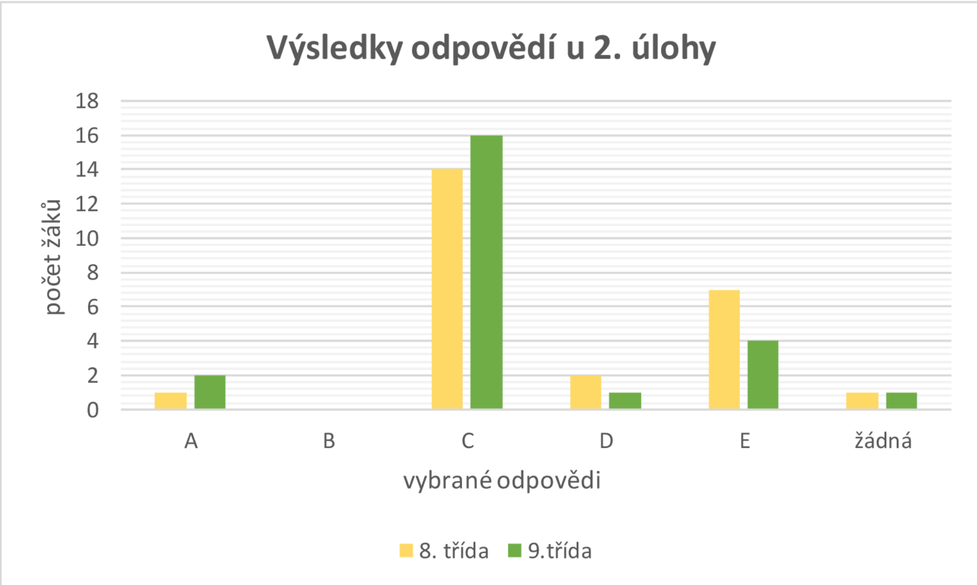
(B) $\frac{7}{2}$

(C) 4

(D) $\frac{11}{2}$

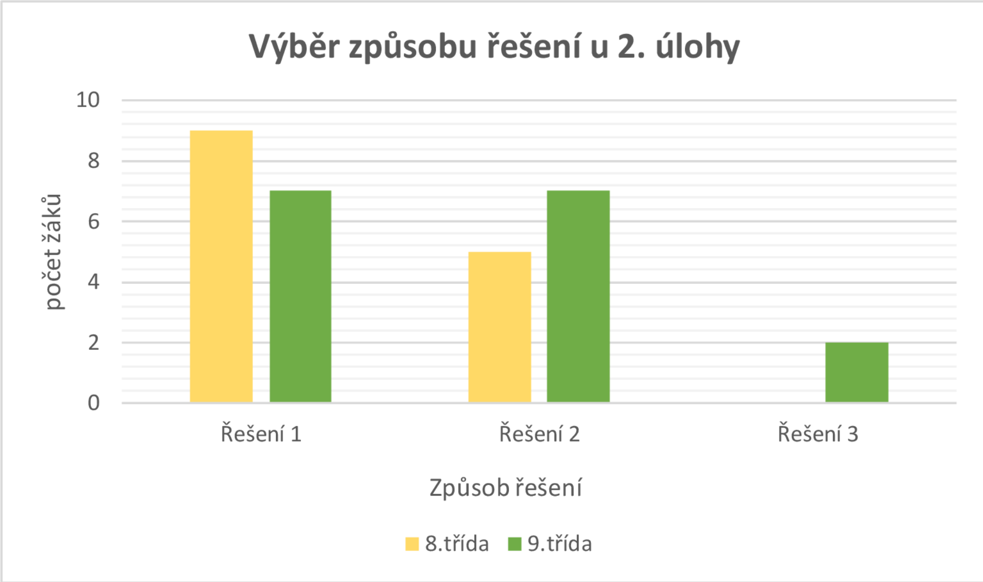
(E) 6





Graf 13: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.2 – Kadet (Zdroj: vlastní)

Úloha 2 měla nejčastější odpověď (C), která byla správná, v případě, že vybrali jinou odpověď žáci ani neuváděli postup, pravděpodobně nevěděli, jak úlohu řešit. V některých případech se objevila i početní chyba, která pak vedla na jiné řešení.



Graf 14: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.2 – Kadet
(Zdroj: vlastní)

U žáků 8. tříd se objevili pouze 2 řešení. Jedno vycházelo z výpočtu známých tvarů, které se následně odečetli od celkového obsahu. Druhé využilo čtvercovou síť. Pár žáků 9. třídy si všimlo symetrie daného obrázku a řešení si zjednodušili na výpočet čtvrtiny.

3) (2004, 17) Na obrázku je nakreslen čtverec a dvě půlkružnice s průměry *AB* a *AD.* Určete obsah tmavě zbarvené oblasti ohraničené těmito křivkami, když víte, že délka strany *AB* je 2.

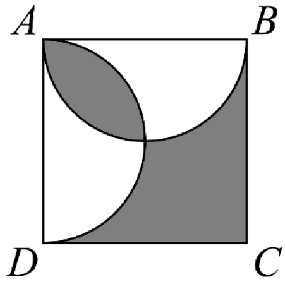
(A) 1

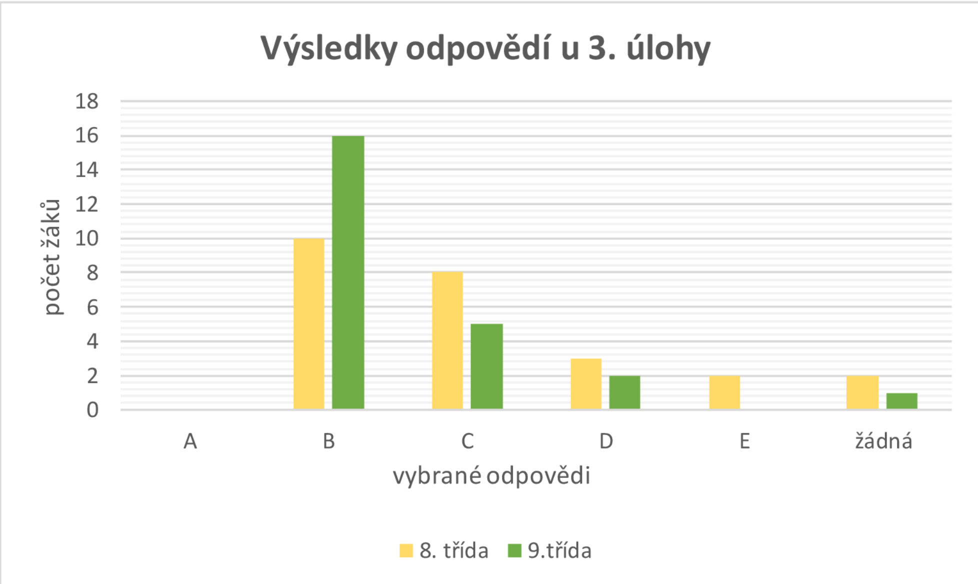
(B) $\mathbf{2}$

(C) 2π

(D) $\frac{\pi}{2}$

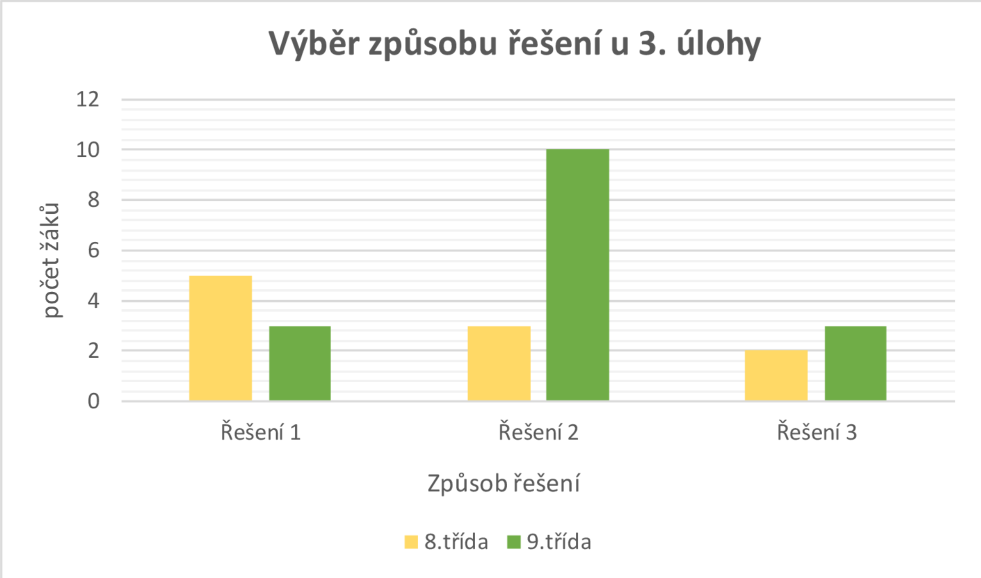
(E) $\frac{3}{4}$





Graf 15: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.2 – Kadet (Zdroj: vlastní)

U 3. úlohy žáci 8. i 9. třídy zvolili nejčastěji správně odpověď (B). Ti, kteří vybrali odpovědi (C) nebo (D) počítali tento příklad přes obsah kruhu a v horším případě přes obvod kruhu, proto vybrali tu odpověď, která obsahuje π.

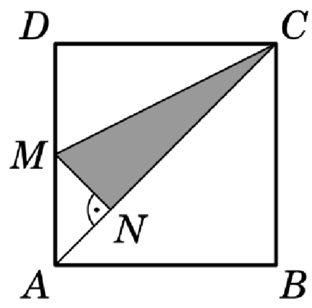


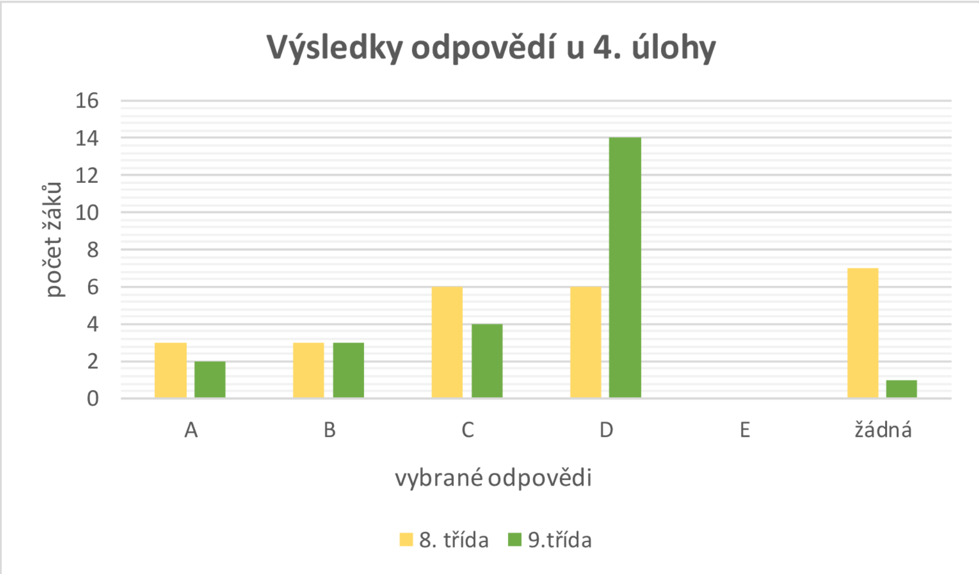
Graf 16: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.3 – Kadet
(Zdroj: vlastní)

Nejčastější způsob řešení vedl přes výpočet čtverce, kde obsah vybarvené části byl právě polovina jeho obsahu. Řešení 1, je v podstatě podobné, protože pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník je právě polovina čtverce. I přesto jsem řešení rozdělila, protože ne každý žák si tuto skutečnost při řešení uvědomil.

4) (2012, 18) Určete poměr obsahu šedého obrazce (trojúhelníku *MNC*) k obsahu čtverce *ABCD*, jestliže bod *M* je středem strany *AD* a úsečka *MN* je kolmá k úhlopříčce *AC*.

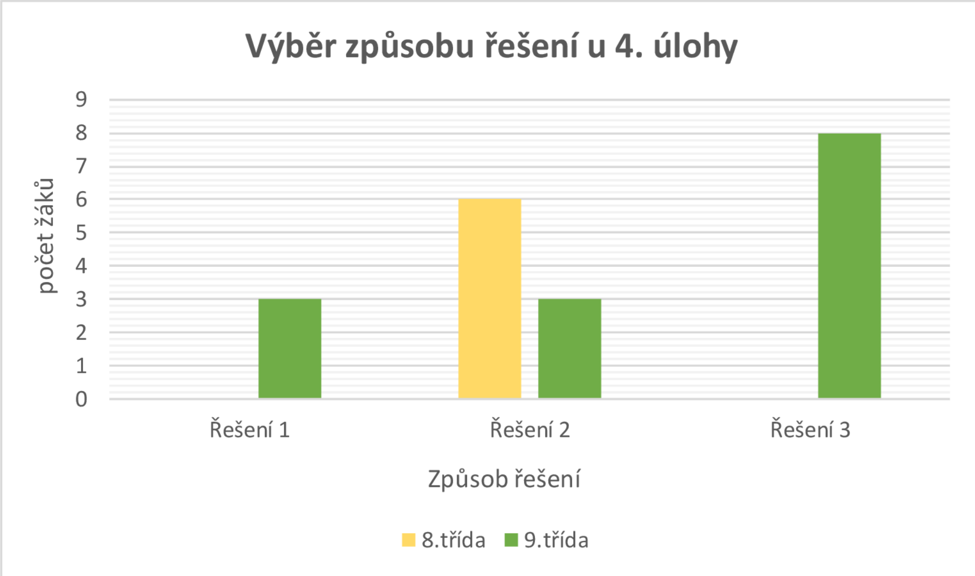
(A) 1:6
(B) 1:5
(C) 7:36
(D) 3:16
(E) 7:40





Graf 17: Graf znázorňující výsledky vybraných odpovědí u úlohy č.4 – Kadet (Zdroj: vlastní)

Úloha č. 4 byla pro žáky 8. tříd pravděpodobně velmi obtížná, pouze 6 žáků se dostalo ke správnému výsledku. Jejich řešení vedla často přes úvahu, že úsečka *NC* je stejně dlouhá jako úsečka *BC*. Oproti tomu žáci 9. třídy se vedli velmi dobře v řešení.



Graf 18: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u úlohy č.4 – Kadet
(Zdroj: vlastní)

Žáci 8. třídy se k řešení dostávali pouze jedním způsobem, pomocí sítě. Oproti tomu, žáci 9. třídy byli v řešení velmi kreativní, přesto řešení, které vedlo k výpočtu obsahu vyznačené části převládalo.

4.4. Srovnání společné úlohy

(2016, 7) Na obrázku jsou dva kruhy o průměru 10 cm, které se navzájem dotýkají a současně se dotýkají stran obdélníku *ABCD*; body *M* a *N* jsou středy jeho stran *AB* a *CD*. Vypočtěte součet obsahů tmavých ploch.

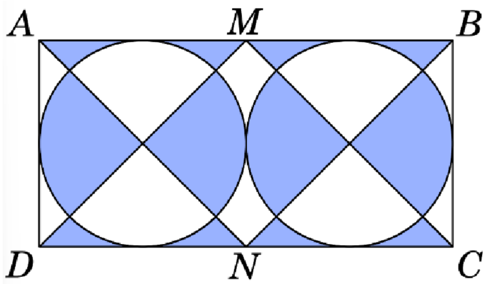
(F) 50 cm^2

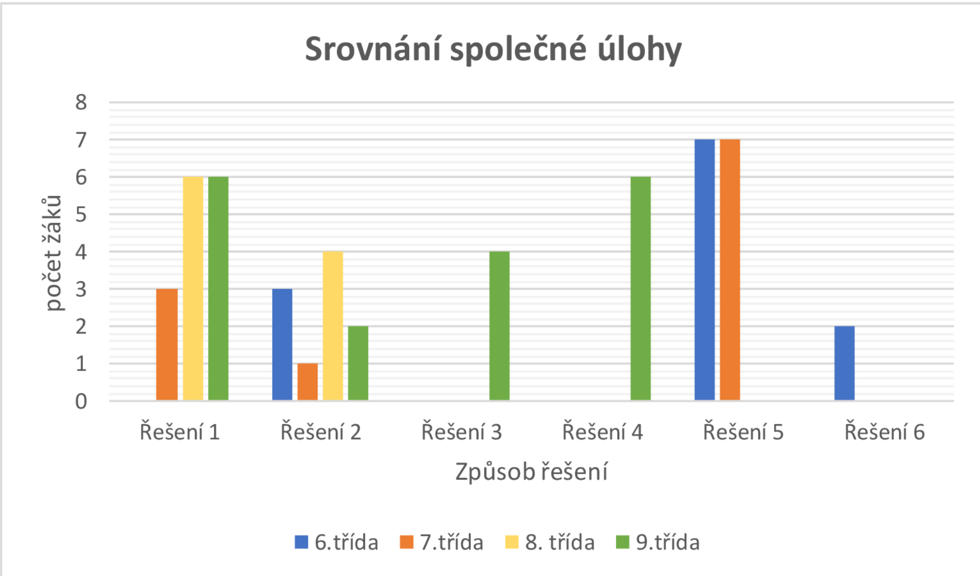
(G) 80 cm^2

(H) 100 cm^2

(I) 120 cm^2

(J) 150 cm^2





Graf 19: Graf znázorňující výběr způsobu řešení u společné úlohy (Zdroj: vlastní)

Řešení 1-4 se u Benjamína a Kadeta liší ve způsobu, proto tento graf (Graf 19) má Řešení 1-4 podle kategorie Kadet. Řešení 1 u Benjamína odpovídá v tomto grafu Řešení 5, Řešení 3 odpovídá, Řešení 1 a Řešení 4 odpovídá v tomto grafu Řešení 6. Řešení 2 se shodují u Benjamína i Kadeta.

Dva způsoby řešení měli žáci 6. a 7. tříd stejné jako žáci 8. a 9. tříd.

Závěr

Cílem mé práce bylo nabídnout různé způsoby řešení u geometrických úloh ze soutěže Matematický klokan. Celkem jsem vypracovala 21 úloh z ročníků 2004-2022, z kategorií Benjamín a Kadet. Každou úlohu jsem řešila alespoň třemi způsoby a u některých úloh jsem uvedla i více způsobů.

U některých řešení uvádím i upravené obrázky pro lepší představivost, jak byla úloha řešena. Veškeré obrázky, které jsou v praktické části uvedeny jsem vytvářela v programu Geogebra.

Výzkum probíhal na 2. stupni ZŠ Stupkova v Olomouci pod vedením Mgr. Miroslavy Poláchové, která testy v jednotlivých třídách žákům zadávala. Testy byly složeny ze 4 příkladů pro kategorii Benjamín i Kadet s tím, že jedna úloha byla společná.

Výzkum považuji za úspěšný, protože z jednotlivých postupů bylo vidět, že si žáci mohou vybrat různý způsob řešení. Tyto postupy při běžné soutěži Matematický klokan nevidíme, protože se veškeré odpovědi zaznamenávají pouze do záznamového archu, kde se označuje jen správná odpověď.

V úvodu mé práce jsem uvedla, že geometrické úlohy nejsou mezi žáky příliš oblíbené, což se mi potvrdilo i při vyhodnocování výsledků. Některým žákům se bohužel nepodařilo zadané úkoly ani vyřešit. Oproti tomu se najdou i jednotlivci, kteří měli všechny úlohy správně a mají ke geometrii dobrý vztah.

Seznam použité literatury

1. Vaněk, Vladimír & Nocar, David. (2022). POČÍTEJTE S KLOKANEM – BENJAMÍN [Učitel matematiky; ISSN 1210-9037]. 30. 160-174
2. HODAŇOVÁ, Jitka, Vladimír VANĚK a Radek HORENSKÝ. *Počítejte s Klokanem: kategorie "Kadet" : sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000-2004*. Olomouc: Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-178-.
3. Matematický klokan ČR. [online]. Olomouc [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: http:// matematickyklokan.net
4. VANĚK, V., CALÁBEK, P., NOCAR, D. České stopy v Matematickém klokanovi. Matematika-fyzika-informatika Vol 27, No 5 (2018). Olomouc: PROMETHEUS, 2018. ISSN 1805-7705.
5. NOVÁK, Bohumil, Josef MOLNÁR, Eva NOVÁKOVÁ a Dita NAVRÁTILOVÁ. *Deset let s Matematickým klokanem*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2005, 38 s. ISBN 8024411792.
6. Association Kangourou sans Frontières, Statistics . [online]. Paříž, 2019 [cit. 2023-03-20]. Dostupné z: http://www.aksf.org/statistics.xhtml
7. Matematický klokan: Matematický klokan 2004 [online]. Olomouc [cit. 2023-20-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2004.pdf
8. Matematický klokan: Matematický klokan 2005 [online]. Olomouc [cit. 2023-20-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2005.pdf
9. Matematický klokan: Matematický klokan 2006 [online]. Olomouc [cit. 2023-20-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2006.pdf
10. Matematický klokan: Matematický klokan 2007 [online]. Olomouc [cit. 2023-21-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2007.pdf
11. Matematický klokan: Matematický klokan 2009 [online]. Olomouc [cit. 2023-21-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2009.pdf

12. Matematický klokan: Matematický klokan 2011 [online]. Olomouc [cit. 2023-22-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2011.pdf
13. Matematický klokan: Matematický klokan 2012 [online]. Olomouc [cit. 2023-22-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2012.pdf
14. Matematický klokan: Matematický klokan 2013 [online]. Olomouc [cit. 2023-23-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2013.pdf
15. Matematický klokan: Matematický klokan 2014 [online]. Olomouc [cit. 2023-23-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2014.pdf
16. Matematický klokan: Matematický klokan 2016 [online]. Olomouc [cit. 2023-24-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2016.pdf
17. Matematický klokan: Matematický klokan 2017 [online]. Olomouc [cit. 2023-24-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2017.pdf
18. Matematický klokan: Matematický klokan 2018 [online]. Olomouc [cit. 2023-24-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2018.pdf
19. Matematický klokan: Matematický klokan 2019 [online]. Olomouc [cit. 2023-25-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2019.pdf
20. Matematický klokan: Matematický klokan 2020 [online]. Olomouc [cit. 2023-25-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2020.pdf
21. Matematický klokan: Matematický klokan 2021 [online]. Olomouc [cit. 2023-25-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2021.pdf
22. Matematický klokan: Matematický klokan 2022 [online]. Olomouc [cit. 2023-25-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2022.pdf

Seznam grafů

Anotace

Jméno a Příjmení:	Bc. Anna Kotková
Katedra nebo ústav:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Geometrické úlohy v soutěži Matematický klokan
Název práce v angličtině:	Geometric Tasks in the Math Kangaroo Contest
Anotace práce:	Diplomová práce je zaměřená na geometrické úlohy v soutěži Matematický klokan v kategoriích Benjamín a Kadet. V teoretické části je popsána soutěž Matematický klokan z pohledu historie, organizace, kategorií a pravidel. V praktické části je řešeno několika způsoby 21 geometrických úloh z kategorií Benjamín a Kadet. Výzkumná část se zabývá vyhodnocením testů, které byly předloženy žákům 6. – 9. ročníku ZŠ.
Klíčová slova:	Matematický klokan, geometrické příklady, řešení úloh, Benjamín, Kadet
Anotace práce v angličtině:	This master thesis focuses on geometric exercises in categories Benjamin and Kadet in a mathematics competition called Mathematic Kangaroo. The theoretical part describes the competition's history, organization, categories, and rules. In the empirical part 21 geometric exercises from categories Benjamin and Kadet are solved in several ways. The research part then

	focuses on the test evaluation of 6th to 9th-grade pupils in primary school.
Klíčová slova v angličtině:	Math Kangaroo, geometric tasks, task solution, Benjamin, Kadet
Přílohy vázané v práci:	0
Rozsah práce:	112
Jazyk práce:	Český jazyk