UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vězňovo dilema

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:
Petr Sušovský
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje, ze kterých jsem při zpracování práce čerpal.

……………………………..

Sušovský Petr

V Olomouci dne 8. dubna 2010

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat hlavně své vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D. za spolupráci, odbornou pomoc a čas strávený při konzultacích. Také bych rád poděkoval rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Na počátku 20. století se skupina významným matematiků (Antoine Augustin Cournot, Emile Borel, Ernst Zermelo a Hugo Steinhause) snažila najít optimální postupy (strategie) při řešení určitých situací. Optimální strategií se přitom rozumí takový postup, díky kterému dosáhne daný subjekt největšího uspokojení (např. maximalizuje zisk nebo minimalizuje ztrátu). Pokud není subjekt při svém rozhodování ovlivněn rozhodnutím nikoho jiného, je situace celkem snadná. Pokud však výsledek závisí nejen na rozhodnutí onoho subjektu, ale i na rozhodnutí někoho dalšího, dostáváme se do situace, která se řeší pomocí tzv. teorie her.

Velkou zásluhu na rozvoji v oblasti teorie her měl především John Nash, který zavedl důležité termíny, jakými jsou např. nekooperativní a kooperativní hry nebo rovnovážný bod hry. Za zavedení rozlišení mezi kooperativními a nekooperativními hrami a také za vyvinutí Nashova ekvilibria získal John Nash v roce 1994 Nobelovou cenu za ekonomii.

Předložená bakalářská práce by měla čtenáři poskytnout stručný úvod do problematiky nekooperativních her, podrobněji jej seznámit s jednou konkrétní nekooperativní hrou, tzv. Vězňovým dilematem, a ukázat možné aplikace této hry.

V první kapitole se obecně zabývám teorií nekooperativních her. Vysvětluji v ní základní pojmy, jakými jsou např. hra v normálním tvaru, rovnovážné strategie nebo strategie smíšené. Zmíněné pojmy jsem zde ilustroval vlastními příklady.

Ve druhé kapitole jsem se soustředil na speciální typ nekooperativní hry – Vězňovo dilema. Nastínil jsem v ní nejen samotný problém Vězňova dilematu, ale také uvedl příklady aplikací, kde se s Vězňovým dilematem můžeme setkat.

Významnou částí druhé kapitoly je podrobně analyzovaný Cournotův model monopolu a duopolu. V tomto spojitém modelu jsem se snažil ukázat, že se i duopolisté chovají jako soupeři neboli jako „vězni“ ve Vězňově dilematu.

Doufám, že se čtenářům bude tato práce líbit a také jim přiblíží pohled do oblasti teorie her a Vězňova dilematu.

1. Teorie nekooperativních her

Všichni se každý den ocitáme v situacích, kdy musíme zvolit vhodný postup, abychom dospěli k co nejlepšímu výsledku. Jestliže tento výsledek závisí jenom na nás nebo na více dalších vlivech, které můžeme předvídat s určitou pravděpodobností, ale které nejsou vzájemně závislé na rozhodnutí kohokoli jiného, pak je situace poměrně jasná. Když se však do rozhodování vloží ještě nějaká další osoba, obracíme se k tzv. *teorii her*.

Teorie her vytváří a analyzuje modely situací, ve kterých dochází k interakci alespoň dvou racionálních entit, často s protichůdnými zájmy. Této interakci se pak říká *hra* a jejími *hráči* jsou ony entity. Hrou v tomto smyslu může být třeba partie pokeru, studená válka, veřejná aukce nebo jednání nad podmínkami smlouvy.

Pokud se jednotliví hráči mohou vzájemně domlouvat a spolupracovat, nazývá se daná hra jako *kooperativní*. U *nekooperativních* her se naopak předpokládá, že hráči nemohou vytvářet koalice ani si nějak doplňovat informace o hře domluvou. U těchto her může existovat překážka v komunikaci daná charakterem prostředí, v němž se hra odehrává, nebo to může být přímo zakázáno určitým předpisem nebo zákonem.

V následujícím textu si nejprve zavedeme základní pojmy týkající se teorie nekooperativních her a dále se budeme blíže věnovat speciálnímu typu této hry – hře dvou hráčů s konečnými množinami strategií.

Definice a tvrzení uvedená v 1. kapitole byla převzata z literatury [10,14] a jsou ilustrována vlastními příklady.

1.1 Hra v normálním tvaru a rovnovážné strategie

V obecných případech her se uvažuje užitková (výplatní) funkce, která každému možnému výsledku hry přiřadí *n*-tici reálných čísel vyjadřující užitek pro jednotlivé hráče. Tradičně se kladným číslem vyjadřuje zisk, záporným pak ztráta.

Definice 1. Nechť je dána konečná neprázdná *n*-prvková množina $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$, dále n neprázdných množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. *Hrou n hráčů v normálním tvaru* budeme rozumět uspořádanou $(2n + 1)$-tici

$$\{Q; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1(s_1, s_2, \ldots, s_n), u_2(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots, u_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)\}.$$

Množinu Q nazveme *množinou hráčů*, množinu S_i nazveme *prostorem strategií hráče i*, prvek $s_i \in S_i$ nazveme *strategií hráče i* a funkci $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ nazveme *výplatní funkcí hráče i*. Je-li hodnota *výplatní funkce* pro daného hráče kladná, hovoříme o *zisku*, je-li záporná, hovoříme o *ztrátě*.

Klíčovým pojmem při analýze her je takzvané *Nashovo ekvilibrium* (*rovnovážný bod hry*). Toto ekvilibrium je definováno jako soubor strategií jednotlivých hráčů takový, že žádný hráč nemůže získat změnou své strategie, pokud ji změní jen on sám.

Definice 2. *n*-tice strategií $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ se nazývá *rovnovážným bodem hry* (*Nashovým ekvilibriem*), právě když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Strategie s_i^* se nazývá *rovnovážná strategie hráče i*.

Nashovo ekvilibrium tedy udává strategie, kterými se budou řídit racionální hráči, kteří věří, že i ostatní hráči uvažují racionálně a jsou dostatečně inteligentní na to, aby tyto strategie dokázali najít. V praxi to jsou zřejmě někdy těžko splnitelné požadavky. Nicméně z dlouhodobého hlediska jsou ospravedlnitelné, neboť hráči iracionální či nedostatečně inteligentní ve hře moc dlouho nevydrží. V ekonomických hrách jim dojdou peníze, v evolučních hrách zase nejsou geny takovýchto jedinců předávány dalším generacím.

Princip Nashova ekvilibria pomohl teoreticky vysvětlit mnoho jevů v ekonomii, evoluční biologii a sociologii. V praxi se Nashových metod používá při vyjednáváních, na aukcích, při plánování válečných strategií a samozřejmě také k analýze hazardních her.

Poznamenejme, že přestože jsou strategie v Nashově ekvilibriu v jistém smyslu optimální, nemusí vést k efektivnímu výsledku, jak uvidíme např. u *Vězňova dilematu*.

Příklad 1. Hra dvou hráčů v normálním tvaru.

Uvažujme následující hru dvou hráčů s nekonečnými množinami strategií: $Q = \{1,2\}$, $S_1 = \langle 2,3 \rangle$, $S_2 = \langle 2,3 \rangle$, $u_1(s_1, s_2) = s_1 \bullet s_2$, $u_2(s_1, s_2) = s_1/s_2$ a pokusme se najít rovnovážný bod této hry.

Řešení: Z první výplatní funkce je zřejmé, že pro 1. hráče je nejlepší zvolit hodnotu $s_1^* = 3$ (aby hodnota součinu byla co největší) a z druhé výplatní funkce je zřejmé, že pro 2. hráče je nejlepší zvolit hodnotu $s_2^* = 2$ (aby hodnota podílu byla co největší). Z těchto nalezených hodnot vytvoříme rovnovážný bod $(s_1^*, s_2^*) = (3,2)$.

Definice 3. Hra v normálním tvaru, v níž pro všechna $s_i \in S_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, platí

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1,\ldots,s_n) = K,$$

kde K je konstanta nezávislá na volbě strategií $s_1,\ldots,s_n$ se nazývá *hra s konstantním součtem*.

Poznámka 1. Je-li $K = 0$, jedná se o hru s nulovým součtem – hra s nulovým součtem je taková hra, při které je součet užitků všech n hráčů nulový pro každý možný výsledek hry. To u hry dvou hráčů znamená, že co jeden hráč získá, druhý tratí (např. u pokeru). Jestliže součet výplatních funkcí závisí na zvolených strategiích, jedná se o *hru s nekonstantním součtem*.

Podrobnější informace o Nashovém ekvilibriu a hře v normálním tvaru lze najít v např. literatuře [2, 5, 11].

1.2 Konečná hra v normálním tvaru

Konečnou hrou se rozumí hra, v níž každý hráč má konečný prostor strategií, tj. hra, v níž jsou množiny S_1, $S_2,\ldots$, S_n konečné. V opačném případě označujeme hru jako *nekonečnou*.

Poznamenejme, že hra z Příkladu 1 byla nekonečná. Aby byla konečná, musely by mít S_1 a S_2 konečný počet strategií, např. $S_1 = \{2,3\}$ a $S_2 = \{2,3\}$.

Jak už jsme se zmínili dříve, snaží se teorie her nalézt v každé hře rovnovážný bod (ve smyslu Definice 2), v němž hráči volí takové strategie, že žádný z nich nemá důvod svou strategii změnit za předpokladu, že nikdo z ostatních svou strategii nezmění. Ne vždy ale rovnovážný bod ve smyslu Definice 2 existuje. Z tohoto důvodu byly zavedeny tzv. *smíšené strategie*, které udávají, s jakou pravděpodobností mají hráči volit jednotlivé strategie, aby dosáhli co největšího zisku.

Definice 4. Uvažujme konečnou hru n hráčů v normálním tvaru. Počet prvků prostoru strategií S_i libovolného hráče i označíme symbolem m_i, tj. $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \ldots, s_{mi}^i\}$. *Smíšenou strategií* hráče i se rozumí vektor pravděpodobností

$$p^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{mi}^i), \quad \text{kde}$$

$$p_j^i \geq 0 \text{ pro všechna } 1 \leq j \leq m_i \text{ a } \sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1.$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož j-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí j-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli popsat takto: „použij strategii $s_1^i \in S_i$ s pravděpodobností p_1^i,…, použij strategii $s_{mi}^i \in S_i$ s pravděpodobností p_{mi}^i."

Pro odlišení se prvky prostoru strategií S_i nazývají *ryzí strategie*.

Doplňující informace o konečné hře v normálním tvaru lze nalézt např. v literatuře [4].

1.3 Dvojmaticová hra

Je-li speciálně množina hráčů $Q = \{1,2\}$ a prostory strategií jsou konečné množiny, hovoříme o *dvojmaticové hře*. Přestože se jedná jen o speciální případ, uvedeme zde základní definice z předchozích částí znovu.

Definice 5. *Dvojmaticovou hru* budeme rozumět hru dvou hráčů, kde

- Hráč 1 má konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- Hráč 2 má konečnou množinu strategií $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$
- Při volbě strategií (s_i, t_j) je výhra prvního hráče $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ a výhra druhého hráče $b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$; u_1, u_2 se nazývají *výplatní funkce.*

Hodnoty výplatních funkcí budeme v tomto případě znázorňovat pomocí dvojmatice:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	…	t_n
	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	…	(a_{1n}, b_{1n})
Hráč 1	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	…	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	……	……	……	……
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	…	(a_{mn}, b_{mn})

Hodnoty výplatních funkcí můžeme také znárodnit zvlášť pro jednotlivé hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice A se nazývá *matice hry hráče 1*, matice B se nazývá *matice hry hráče 2***.**

Definice 6. Dvojice strategií (s^*, t^*) se nazývá *rovnovážný bod hry dvou hráčů*, právě když platí:

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } s \in S$$

a zároveň

$$u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } t \in T.$$

Poznámka 2. Snadno se ověří, že je-li (s_i, t_j) rovnovážný bod dvojmaticové hry, pak

- a_{ij} je největší prvek ve sloupci j matice A, tj. $a_{ij} = \{max\ a_{kj}, k = 1, 2, ...m\}$

a zároveň

- b_{ij} je největší prvek v řádku i matice B, tj. $b_{ij} = \{max\ b_{ik}, k = 1, 2, ..., n\}$.

Příklad 2. Uvažujme hru určenou dvojmaticí

Hráč 2

Hráč 1	Strategie	t_1	t_2
	s_1	(2,2)	(1,-2)
	s_2	$\boxed{(3, 1)}$	(4, -3)

a pokusme se najít rovnovážné body této hry. Nejdříve uplatníme první podmínku: V prvním sloupci je vyšší hodnota a_{21} než a_{11}, a v druhém sloupci je vyšší hodnota a_{22} než a_{12}. Na základě těchto informací zjistíme, že rovnovážným bodem bude buď (s_2, t_1) nebo (s_2, t_2). Dále uplatníme druhou podmínku pro výskyt rovnovážného bodu. V prvním řádku je vyšší hodnota b_{11} než b_{12}, a v druhém řádku je vyšší hodnota b_{21} než b_{22}. Z této podmínky nám vyplývá, že rovnovážným bodem bude (s_1, t_1) nebo (s_2, t_1). Tyto podmínky však musí platit zároveň, a proto je rovnovážným bodem bod (s_2, t_1).

Příklad 3. Pan Novotný si chce postavit vilu (V) za 20 miliónů Kč a garáž (G) za 10 miliónů Kč. O získání zakázek na jejich stavbu se ucházejí dvě firmy - spol. BETON a spol. CIHLA. Žádná z firem přitom nemá kapacitní možnosti na vybudování vily i garáže v plném rozsahu. Každá z firem může panu Novotnému nabídnout buď stavbu jednoho z objektů, nebo nabídnout kooperaci na obou. Podle došlých nabídek rozdělí pan Novotný zakázky takto:

1. Když se bude o stavbu jedné celé budovy ucházet pouze jedna společnost, získá tuto zakázku v plné výši.
2. Když se o stavbu jedné budovy budou ucházet obě společnosti a o druhou žádná, nabídne pan Novotný kooperaci oběma společnostem a zakázky si rozdělí takto: společnost BETON získá 60% a společnost CIHLA 40%, protože společnost BETON je známější.
3. Když jedna společnost bude chtít postavit celou budovu sama a druhá společnost nabídne kooperaci na obou, rozdělí se zakázky takto:
   - Společnost, která nabízí stavbu celé vily, obdrží 65% této zakázky a druhá 35%.
   - Když se bude jednat o garáž, společnost, která ji nabídla postavit samostatně, obdrží 70% této zakázky a druhá společnost obdrží zbylých 30% této zakázky.

   Na stavbě zbývající budovy se budou podílet v obou případech současně a zisk za ni si rozdělí BETON : CIHLA = 60% : 40%.
4. Když obě dvě společnosti nabídnou kooperaci, rozdělí se obě zakázky v poměru BETON : CIHLA = 60% : 40%.

Řešení: Výsledky při jednotlivých volbách strategií se dají zapsat do dvojmatice:

CIHLA

	Strategie	Vila	Garáž	Kooperace
BETON	Vila	$\boxed{(18,12)}$	(20,10)	(19,11)
	Garáž	(10,20)	(18,12)	(19,11)
	Kooperace	(13,17)	(15,15)	(18,12)

Z podmínek pro rovnovážný bod vyplývá, že rovnovážným bodem je dvojice strategií (Vila, Vila), při jejichž volbě získá spol. Beton zakázku za 18 mil. Kč a spol. Cihla za 12 mil. Kč. a touto dvojicí strategií by se měly společnosti Cihla a Beton řídit.

1.4 Smíšené strategie

Jak jsme se již zmínili v předchozím textu, existují hry, ve kterých se nevyskytuje rovnovážný bod přímo v ryzích strategiích. Právě tento případ nastává v následujícím příkladu.

Příklad 4. Uvažujme hru danou dvojmaticí:

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	(2,-3)	(1,4)
	s_2	(1,1)	(3,0)

Z podmínek pro výskyt rovnovážného bodu je patrné, že žádná ryzí strategie není rovnovážným bodem této hry.

Existují však smíšené strategie, které udávají pravděpodobnosti, s nimiž jednotliví hráči volí své ryzí strategie. Tyto smíšené strategie problém neexistence rovnovážného bodu v ryzích strategiích odstraní.

Definice 7. *Smíšené strategie* hráčů 1 a 2 jsou vektory pravděpodobnosti *p, q*, pro které platí:

$$p = (p_1, p_2,\ldots, p_m); \quad p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1,$$

$$q = (q_1, q_2,\ldots, q_n); \quad q_j \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou definovány vztahy:

Hráč 1: $\Pi_1(p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$

Hráč 2: $\Pi_2(p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$

Je zřejmé, že ryzí strategie odpovídají smíšeným strategiím

$$(1,0,\ldots, 0), (0, 1,\ldots 0), \ldots, (0, 0,\ldots 1).$$

Věta 1: Ve smíšených strategií má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.

Důkaz tohoto tvrzení pomocí Kakutaniho věty o pevném bodě lze nalézt např. v [12].

Rovnovážná strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědí jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^* pak si druhý hráč odchýlením od t^* nemůže polepšit, podobně první si nemůže polepšit odchýlením od s^*, zvolí-li druhý strategii t^*.

Definice 8. *Nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t hráče 2* se rozumí množina

$$R_1(t) = \{s^* \in S;\ u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S\}.$$

Obdobně, *nejlepší odpovědí hráče 2 na strategii s hráče 1* se rozumí množina

$$R_2(s) = \{t^* \in T;\ u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T\}.$$

Věta 2. (s^*, t^*) je rovnovážný bod, právě když platí:

$$s^* = R_1(t^*) \quad \text{a zároveň} \quad t^* = R_2(s^*).$$

Důkaz Podle definice je $s^* = R_1(t^*)$ právě když pro každé $s \in S$ platí:

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*).$$

Podobně $t^* = R_2(s^*)$ právě když pro každé $t \in T$ platí:

$$u_2(s^*, t^*) \geq u_2(s^*, t).$$

Dohromady tak získáme přesně podmínku pro rovnovážný bod.

□

Má-li každý hráč z hráčů na výběr pouze dvě strategie, představují množiny R_1 a R_2 křivky v rovině – tzv. *reakční křivky*. Hledáme-li rovnovážný bod, postupujeme tak, že sestrojíme *reakční křivky* a nalezneme jejich *průsečík*.

Příklad 5. Vychází se z Příkladu 2.

Pro hráče 1 je nejlepší odpovědí na strategii t_1 hráče 2 strategie s_2

$$R_1(t_1) = s_2$$

a taky nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_2 je strategie s_2

$$R_1(t_2) = s_2.$$

Pro hráče 2 je nejlepší odpovědí na strategii s_1 hráče 1 strategie t_1

$$R_2(s_1) = t_1$$

a také nejlepší odpovědí hráče 2 na strategii s_2 je strategie t_1

$$R_2(s_2) = t_1.$$

Z toho vyplývá, že rovnovážný bod je (s_2, t_1).

Příklad 6. Vychází se z Příkladu 4.

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	(2,-3)	(1,4)
	s_2	(1,1)	(3,0)

Podle definic nejlepších odpovědí plyne, že:

$$R_1(t_1) = s_1,\ R_1(t_2) = s_2,\ R_2(s_1) = t_2,\ R_2(s_2) = t_1$$

Z toho vyplývá, že žádná ze strategií není nejlepší odpovědí jedna na druhou, a proto je nutné vycházet ze smíšených strategií.

Hráč 2

Hráč 1	Strategie	t_1	t_2	
	s_1	(2,-3)	(1,4)	***p***
	s_2	(1,1)	(3,0)	**1-*p***
		q	**1-*q***	

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned} \Pi_1(p, q) &= 2pq + p(1-q) + q(1-p) + 3(1-p)(1-q) \\ &= 2pq + p - pq + q - qp + 3 - 3q - 3p + 3pq \\ &= 3pq - 2p - 2q + 3 \\ &= p(3q - 2) - 2q + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(p, q) &= -3pq + 4p(1-q) + q(1-p) + 0(1-p)(1-q) \\ &= -3pq + 4p - 4pq + q - qp \\ &= -8qp + 4p + q \\ &= q(-8p + 1) + 4p \end{aligned}$$

Hledáme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé volby pravděpodobnosti q:

Je-li $\boxed{0 \leq q < \frac{2}{3}}$ pak $\Pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, tj. funkce *klesající*. Největší hodnotu tedy bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tj. pro $p = 0$. V tomto případě tedy platí, že $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ pak $\Pi_1\left(p, \frac{2}{3}\right) = 0$ je *konstantní funkce*. Ať zvolí 1. hráč p libovolně, bude v tomto případě jeho očekávaná výhra stále stejná. Platí tedy, že $R_1\left(\frac{2}{3}\right) = \langle 0,1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{2}{3} < q \leq 1}$, pak $\Pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, tj. funkcí *rostoucí*. Největší hodnotu pak bude nabývat, když $p = 1$. V tomto případě tedy platí, že $R_1(q) = 1$.

Obdobně platí i pro hodnoty p:

$R_2(p) = \langle 0,1 \rangle$ pro $p = \frac{1}{8}$

$R_2(p) = 1$ pro $p \in \left\langle 0, \frac{1}{8} \right)$

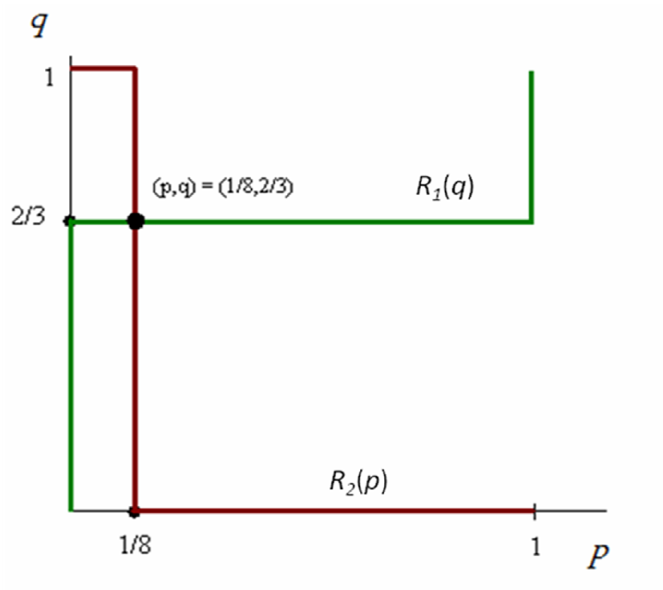
$R_2(p) = 0$ pro $p \in \left(\frac{1}{8}, 1 \right\rangle$

Souhrnně jsme tedy získali následující předpisy pro nejlepší odpovědi jednotlivých hráčů:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq q < \frac{2}{3} \\ \langle 0,1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{2}{3} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{2}{3} < q \leq 1 \end{cases}$$

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq p < \frac{1}{8} \\ \langle 0,1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{8} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{8} < p \leq 1 \end{cases}$$

Reakční křivky, jejichž průsečíkem je hledaný rovnovážný bod, vypadají takto



Z grafu reakčních křivek vyplývá, že rovnovážný bod je tedy:

$$((p,\ 1\text{-}p),(q,\ 1\text{-}q)) = \left(\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right).$$

Když se budou hráči držet svých rovnovážných strategií, očekávaná výhra prvního hráče bude $\frac{5}{3}$ a druhého hráče $\frac{1}{2}$.

Je obvyklé, že hráči mají na výběr více než 2 varianty. V takovémto případě se k nalezení rovnovážných bodů používá mj. následující obecný návod pro nalezení smíšeného rovnovážného bodu (viz např. [14]):

- Uvažujme dvojmaticovou hru s maticemi A, B.
- Očekávané hodnoty výplatních funkcí lze vyjádřit jako funkce proměnných p_1, p_2,…, p_{m-1}; q_1, q_2,…,q_{n-1}, a to na základě vztahů

$$p_m = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{m-1}), \qquad q_n = 1 - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1}).$$

- Uvažujme soustavu rovnic:

$$\frac{\partial \pi_1(p,q)}{\partial p_i} = 0 \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, 2,\ldots, m-1$$

$$\frac{\partial \pi_2(p,q)}{\partial q_j} = 0 \quad \text{pro všechna} \quad j = 1, 2,\ldots, n-1$$

- Potom každé řešení soustavy

$$p = (p_1, p_2,\ldots, p_m); \qquad q = (q_1, q_2,\ldots, q_n),$$

kde

$$p_i \geq 0, \quad q_j \geq 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2,\ldots, m-1, j = 1, 2,\ldots, n-1$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{m-1} \leq 1, \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} \leq 1$$

představuje *rovnovážný bod hry ve smíšených strategiích.*

Příklad 7. Vycházíme opět z Příkladu 4, ale tentokrát budeme rovnovážný bod hledat výše uvedeným obecným postupem bez využití reakčních křivek.

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	
Hráč 1	s_1	(2,-3)	(1,4)	***p***
	s_2	(1,1)	(3,0)	**1-*p***
		q	**1-*q***	

$\Pi_1(p, q) = 2pq + p(1-q) + q(1-p) + 3(1-p)(1-q)$

$\Pi_1(p, q) = 2pq + p - pq + q - qp + 3 - 3q - 3p + 3pq$

$\Pi_1(p, q) = 3pq - 2p - 2q + 3$

$\Pi_1(p, q) = p(3q - 2) - 2q + 3$

$\Pi_2(p, q) = -3pq + 4p(1-q) + q(1-p) + 0(1-p)(1-q)$

$\Pi_2(p, q) = -3pq + 4p - 4pq + q - qp$

$\Pi_2(p, q) = -8qp + 4p + q$

$\Pi_2(p, q) = q(-8p + 1) + 4p$

$$\frac{\partial \pi_1(p,q)}{\partial p} = 3q - 2 \qquad \frac{\partial \pi_2(p,q)}{\partial q} = -8p + 1$$

Když vypočítané parciální derivace položíme rovny nule, dostáváme výsledek, že $q = \frac{2}{3}$ a $p = \frac{1}{8}$.

Takže i podle tohoto postupu nám vyjde rovnovážný bod stejně jako v Příkladu 6, tj. rovnovážný bod $((p, 1\text{-}p), (q, 1\text{-}q)) = \left(\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$.

Obvykle si jednotliví hráči vybírají z více než jen ze dvou strategií, jak tomu bylo v předchozích příkladech. Situaci s tříprvkovými množinami strategií si ilustrujeme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad 8. Máme dva hráče, každý má u sebe tři lístky, na kterých jsou nakresleny obrázky: slon, kočka, myš. Oba zároveň vyberou jeden ze svých lístků. Pokud vyberou oba lístek se stejným obrázkem, vybírají znovu. Zvolí-li zároveň kočku a slona, vítězí slon (protože se kočka bojí slona). Jestliže vyberou kočku a myš, vítězí kočka (protože se myš bojí kočky). A když zvolí slona a myš, vítězí myš (protože se slon bojí myši).
Při hře přitom získá vítězný hráč 2 Kč a jeho poražený soupeř 2 Kč ztratí.

Abychom nalezli rovnovážné body takto definované hry, přepíšeme si hru pro přehlednost do maticového tvaru:.

Hráč 2

	Strategie	Slon	Kočka	Myš	
Hráč 1	Slon	(0,0)	(2,-2)	(-2,2)	p_1
	Kočka	(-2,2)	(0,0)	(2,-2)	p_2
	Myš	(2,-2)	(-2,2)	(0,0)	$1 - p_1 - p_2$
		q_1	q_2	$1 - q_1 - q_2$	

Z maticového vyjádření vidíme, že daná hra nemá rovnovážné body v ryzích strategiích. Budeme tedy hledat rovnovážné body ve strategiích smíšených.

Očekávané hodnoty výhry jsou pro každé $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$, kde $p_3 = 1 - p_2 - p_2$, $q_3 = 1 - q_1 - q_2$, definovány takto:

$$\Pi_1(p, q) = 2p_1q_2 - 2p_1(1 - q_1 - q_2) - 2p_2q_1 + 2p_2(1 - q_1 - q_2) + 2q_1(1 - p_1 - p_2) - 2q_2(1 - p_1 - p_2)$$

$$\Pi_1(p, q) = 6p_1q_2 - 6p_2q_1 + 2p_2 + 2q_1 - 2p_1 - 2q_2$$

$$\Pi_2(p, q) = -2p_1q_2 + 2p_1(1 - q_1 - q_2) + 2p_2q_1 - 2p_2(1 - q_1 - q_2) - 2q_1(1 - p_1 - p_2) + 2q_2(1 - p_1 - p_2)$$

$$\Pi_2(p, q) = -6p_1q_2 + 6p_2q_1 - 2p_2 - 2q_1 + 2p_1 + 2q_2$$

Parciální derivace podle jednotlivých proměnných jsou následující:

$$\frac{\partial \pi_1(p,q)}{\partial p_1} = 6q_2 - 2 \qquad \frac{\partial \pi_1(p,q)}{\partial p_2} = -6q_1 + 2$$

$$\frac{\partial \pi_2(p,q)}{\partial q_1} = 6p_2 - 2 \qquad \frac{\partial \pi_2(p,q)}{\partial q_2} = -6p_1 + 2$$

Abychom našli rovnovážný bod, položíme parciální derivace rovny nule:

$$6q_2 - 2 = 0 \qquad -6q_1 + 2 = 0$$
$$6p_2 - 2 = 0 \qquad -6p_1 + 2 = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$, $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$.

Proto je rovnovážným bodem uvažované hry vektor

$$(p, q) = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

Doplňující informace ohledně smíšených strategií lze najít např. v literatuře [5].

1.5 Hry s více rovnovážnými body

V předchozích příkladech se ve strategiích (smíšených i ryzích) vyskytoval jenom jeden rovnovážný bod. V některých případech se však může objevit i větší počet rovnovážných bodů, a pak je nutné řešit otázku, který z těchto rovnovážný bodů je optimální.

Definice 9. Nechť (q, p) je rovnovážný bod dvojmaticové hry, pro který platí:

$$\pi_1(p,q) \geq \pi_1(r,s) \quad \text{a zároveň} \quad \pi_2(p,q) \geq \pi_2(r,s)$$

pro libovolný rovnovážný bod (r,s) této hry. Potom se (p,q) nazývá *dominujícím rovnovážným bodem.*

Poznámka 3. Když se však objeví ve hře jen jeden rovnovážný bod, pak je dominujícím.

Příklad 9. Uvažujme hru danou dvojmaticí

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	(4,-2)	$\boxed{(7,2)}$
	s_2	<u>(5,1)</u>	(2,0)

V této hře se vyskytují dva rovnovážné body: (s_2, t_1) a (s_1, t_2). Protože však platí: 7>5, a 2>1, bod (s_1, t_2) je dominující rovnovážný bod.

Příklad 10. „Sourozenecká hádka“

Máme malého bratra a malou sestru, kterým rodiče slíbili, že za určité peníze si mohou vybrat jednu hračku, kterou jim koupí. Samozřejmě se bratr se sestrou nemohou domluvit. Bratr chce fotbalový míč a sestra chce panenku Barbie. Jestliže koupí míč, bude mít z toho samozřejmě větší radost bratr. Když koupí panenku, bude mít z toho větší radost zase sestra. Pokud se nedohodnou, nekoupí jim rodiče hračku žádnou, a tak žádný z nich nic neztratí ani nezíská – proto bude v tomto případě hodnota obou výplatních funkcí rovna 0. Naopak, dohodnou-li se na nějaké hračce, přinese to jednomu z nich velkou radost, kterou ohodnotíme ziskem ve výši 4. Druhému z nich přinese dohoda radost menší – sice nezískal vytouženou hračku, ale může si bez omezení hrát se staršími společnými hračkami, o které se předtím se sourozencem dohadovali.

Z matematického hlediska můžeme tuto situaci znázornit do následující dvojmatice:

		Bratr	
	Strategie	Míč	Panenka
Sestra	Míč	(2,4)	(0,0)
	Panenka	(0,0)	(4,2)

$\Pi_1(p, q) = 2pq + 4(1 - p)(1 - q)$

$\Pi_1(p, q) = 2pq + 4 – 4q – 4p + 4pq$

$\Pi_1(p, q) = 6pq – 4p – 4q + 4$

$\Pi_2(p, q) = 4pq + 2(1 - p)(1 - q)$

$\Pi_2(p, q) = 4pq + 2 – 2q – 2p + 2pq$

$\Pi_2(p, q) = 6pq – 2p – 2q + 2$

Existují zde dva rovnovážné body v ryzích strategiích (míč, míč) a (panenka, panenka) a jeden rovnovážný bod ve smíšených strategiích $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$, kterému odpovídají očekávané hodnoty $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$. (Rovnovážný bod ve smíšených strategií jsem zjistil podle obecného návodu.) Žádný z rovnovážných bodů přitom není dominující.

Může se ovšem také stát, že ve hře bude i více dominujících rovnovážných bodů.

Příklad 11. Uvažujme hru danou dvojmaticí

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	t_3
Hráč 1	s_1	$\boxed{(10,9)}$	(5,3)	(-1,-3)
	s_2	(8,3)	$\underline{(7,4)}$	(8,0)
	s_3	(-1,-3)	(6,3)	$\boxed{(10,9)}$

Zde jsou 3 rovnovážné body: (s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3). Ale podle definice o dominujícím rovnovážném bodě jsou pouze dva body dominující - (s_1, t_1) a (s_3, t_3). Pokud se však hráči předem nedomluví (nemají možnost) a zvolí strategie (s_1, t_3) a (s_3, t_1), dosáhnou nejhoršího výsledku, který může nastat. Z tohoto důvodu se definuje speciální typ dominujících rovnovážných bodů - *záměnný rovnovážný bod*.

Definice 10. Rovnovážné body (p, q), (p^*,q^*) dvojmaticové hry se nazývají *záměnné*, jestliže

$$\pi_1(p,q) = \pi_1(p^*,q^*) = \pi_1(p^*,q) = \pi_1(p,q^*)$$

a současně

$$\pi_2(p,q) = \pi_2(p^*,q^*) = \pi_2(p^*,q) = \pi_2(p,q^*)$$

Příklad 12. Vychází se z příkladu 11, ale trochu se od něho liší

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	t_3
Hráč 1	s_1	$\boxed{(10,9)}$	(5,3)	$\boxed{(10,9)}$
	s_2	(8,3)	$\underline{(7,4)}$	(8,0)
	s_3	$\boxed{(10,9)}$	(6,3)	$\boxed{(10,9)}$

V tomto konkrétním příkladě jsou všechny dominující body (s_1, t_1), (s_1,t_3), (s_3, t_1) a (s_3, t_3) záměnné, a tedy optimální.

Definice 11. *Optimální body hry* se nazývají všechny záměnné dominující rovnovážné body dané hry. Existují-li v dané hře tyto body, nazývá se hra *řešitelná*.

Další informace ohledně dominujících rovnovážných bodů lze nalézt např. v literatuře [1].

2. Vězňovo dilema

Typickým příkladem nekooperativních her je tzv. Vězňovo dilema (viz např. [7, 9, 11]). Jako Vězňovo dilema je označována situace, kdy jsou dva vězni drženi ve dvou oddělených celách. Z toho vyplývá, že nemají možnost mezi sebou komunikovat, a tudíž nemohou spolupracovat (kooperovat) na svých výpovědích. Každý z nich se může řídit jednou z těchto strategií: *zapírat* nebo *přiznat se*.

Nastane-li situace, kdy budou oba zapírat, odsedí si ve vězení kratší dobu, protože na jejich usvědčení ze závažného zločinu nebude mít policie dostatek důkazů a budou usvědčeni pouze ze zločinu méně závažného. Oba dva vězni si v tomto případě odnesou trest ve výši x let. Pokud se však jeden z vězňů přizná a zároveň udá druhého vězně, doba pobytu ve vězení se mu (jakožto odměna za udání spolupachatele) zkrátí a stráví ve vězení pouze y let. Avšak vězni, který stále zapíral a nepřiznal se, bude doba pobytu ve vězení prodloužena na z let, protože již má policie dostatek důkazů pro jeho usvědčení ze závažnějšího trestného činu. Poslední možností je, že se oba dva vězni přiznají. Jakmile nastane tato situace, budou oba dva vězni odsouzeni na w let. Tato situace se dá charakterizovat následující dvojmaticí

Vězeň B

	Strategie	Zapírat	Přiznat se
Vězeň A	Zapírat	$(-x,-x)$	$(-z,-y)$
	Přiznat se	$(-y,-z)$	$(-w,-w)$

Přičemž platí následující vztah:

$$y < x < w < z.$$

Tato situace nám ukazuje dilema, které vzniká mezi vězni proto, že se nemohou mezi sebou domluvit na již zmíněných strategiích. Pro každého z nich je nejlepší se přiznat a zároveň udat toho druhého. Jenomže žádný z vězňů neví, jak bude reagovat druhý vězeň. Kdyby se mohli domluvit, tak nejlepšími strategiemi by pro oba vězně bylo (zapírat, zapírat), přičemž by oba ve vězení strávili x let.

Jedná se však o nekooperativní hru, tudíž se vězni mezi sebou nemohou domluvit a taky si nemohou být jistí solidaritou toho druhého. Vzniká zde tudíž riziko zrady. Oba dva vězni mají strach, že když bude jeden z nich zapírat, tak ten druhý zradí a udá ho. V tomto případě by si vězeň, který se přiznal, odseděl pouze *y* let, kdežto udaný vězeň by strávil ve vězení daleko více, a to *z* let. Proto si každý zvolí jistotu tím, že se přizná a bude odsouzen na *w* let, než aby byl zrazen a strávil tak ve vězení podstatně delší dobu.

Nyní si ukážeme (víceméně jenom pro zajímavost) tuto situaci v konkrétních číslech a ověříme si, že strategie (přiznat se, přiznat se) je, i při konkrétní volbě čísel *x, y, z, w,* rovnovážným bodem:

Příklad 13.

Vězeň B

	Strategie	Zapírat	Přiznat se
Vězeň A	Zapírat	(-5,-5)	(-30,-2)
	Přiznat se	(-2,-30)	$\boxed{(-15,-15)}$

Protože -15 je největší hodnota v druhém sloupci, a -15 je rovněž největší hodnotou v druhém řádku, je dvojice strategií (přiznat se, přiznat se) rovnovážným bodem této hry. Dva racionálně uvažující vězni by si tedy zvolili strategii (přiznat se, přiznat se).

Obecně je Vězňovo dilema každá hra typu:

Hráč 2

	Strategie	Spolupráce	Zrada
Hráč 1	Spolupráce	(odměna, odměna)	(oškubání, pokušení)
	Zrada	(pokušení, oškubání)	(trest, trest)

kde platí vztah:

oškubání < trest < odměna < pokušení.

V obecném modelu Vězňova dilematu se vyskytují dva typy strategií, a to *spolupráce* a *zrada*. Dvojice strategií (spolupráce, spolupráce) označuje činnost dvou hráčů, kteří si navzájem pomáhají, a jejich činnost je ohodnocena částkou odměna. Další dvojici strategií máme (spolupráce, zrada). Touto dvojici označujeme činnost dvou hráčů, kdy první hráč spolupracuje a druhý ho přitom zradí (podlehne pokušení) – tzn. první hráč bude oškubán. Poslední dvojici strategií označujeme (zrada, zrada). To znamená, že oba dva hráči nespolupracují, a proto jsou oba dva potrestání.

V další kapitole si ukážeme, kde se s Vězňovým dilematem můžeme setkat v reálných aplikacích.

2.1. Aplikace Vězňova dilematu

Aplikace Vězňova dilematu nalézáme hlavně v matematice, ekonomii, sociologii a v evoluční biologii. Tento typ nekooperativní hry se v hojné míře vyskytuje i v našem reálném životě. A to hlavně v těch případech, kdy se člověk rozhoduje sám za sebe bez spolupráce s ostatními lidmi. Jedná se většinou o případy, kdy samotný jedinec váhá, jestli se má zachovat sobecky vůči ostatním lidem nebo jim vyjít vstříc. Existují však některé špatné vlastnosti lidí (nesolidarita, ziskuchtivost, nedůvěřivost), díky kterým se daný jedinec zachová sobecky. Zachovat se sobecky je pro daného člověka totiž často tou nejlepší variantou. Tuto variantu však použijí i ostatní lidé, kteří budou brát v úvahu také již zmíněné špatné vlastnosti, a proto „zachovat se sobecky“ nebude mít takový výhodný výsledek, jako kdyby tuto variantu použil jedinec sám.

Inspirace pro následující příklady v kapitole 2.1 byla nalezena v literatuře [3, 8, 14, 15].

Příklad 14. Představme si např. dům, který má více než jednoho obyvatele, a ve kterém se celková spotřeba vody dělí rovnoměrně. Pro všechny nájemníky je v jejich nejlepším zájmu šetřit vodou. Jenomže se může stát, že se objeví někdo, kdo šetřit vodou nebude. Voda se však platí rovnoměrně, a tudíž zde vzniká riziko, že ostatní nájemníci, kteří vodou šetřili, budou muset zaplatit i za spotřebu toho, kdo vodou nešetřil. Proto, než aby ostatní doplatili za plýtvání vody jednoho jedince, radši budou plýtvat taky, i za cenu toho, že zaplatí daleko více, než kdyby všichni šetřili.

Tuto situaci si můžeme názorně ukázat v konkrétních číslech, kdy budeme brát v úvahu pouze dva nájemníky:

Hodnoty v dvojmatici nám ukazují, jak vysoký užitek bude mít daný nájemník ze spotřeby vody (čím vyšší číslo, tím vyšší užitek). V tomto užitku je započítán i negativní užitek, který představuje zaplacení spotřeby vody:

Nájemník B

	Strategie	Šetřit	Nešetřit
Nájemník A	Šetřit	(4,4)	(2,5)
	Nešetřit	(5,2)	$\boxed{(3,3)}$

Když budou oba dva nájemníci šetřit vodou, tak jejich celkový užitek bude 4 jednotky. Jestliže však jeden nájemce vodou šetřit nebude a ten druhý ano, hodnota užitku šetřícího nájemce klesne na 2, protože zaplatí spotřebu vody za nájemce, který nešetřil. Druhému nájemci se užitek zvýší na 5 jednotek, poněvadž za část jím spotřebované vody už zaplatil první nájemce. Proto ani jeden nájemce nebude riskovat to, že bude platit za druhého a budou plýtvat oba dva.

Tento způsob se dá samozřejmě aplikovat na větší počet nájemníku než jen na dva.

Další aplikaci Vězňova dilematu si ukážeme na následujícím příkladu, který se týká renovace bytového fondu:

Příklad 15. Uvažujme dům, který má dva majitele - pana A a pana B, kteří spolu kvůli sporům z minulosti nekomunikují. Dům je zchátralý a potřebuje renovovat. Oba dva majitelé daného domu mají svůj kapitál uložený na vkladních knížkách. Když se tento kapitál sečte, tak postačí na renovaci jejich domu. Avšak každý majitel uvažuje sám za sebe, a tudíž se bude snažit maximalizovat pouze svůj zisk z kapitálu.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty zisku v jednotkách, zvlášť pro majitele A a zvlášť pro majitele B. Tento zisk je uváděn při použití různých strategií, tj. když se některý z nich rozhodne dům zrenovovat nebo když renovovat nebudou:

		Majitel B	
	Strategie	Renovovat	Nerenovovat
Majitel A	Renovovat	(15,15)	(6,17)
	Nerenovovat	(17,6)	$\boxed{(9,9)}$

Nejlepší variantou pro každého majitele domu je nerenovovat za podmínky, že druhý majitel renovovat bude. V tomto případě by majitel, který renovoval, měl zisk jenom 6 jednotek, protože by musel zaplatit za renovaci daleko více peněz, než kdyby se na renovaci podíleli oba dva. Na druhou stranu, majiteli, který nerenovoval, se zisk zvýší na 17 jednotek, a to proto, že jednak bude mít více kapitálu na vkladní knížce, a jednak z důvodu renovace od prvního majitele. Protože například, když bude pronajímat svou část domu, může z důvodu lepšího vzhledu domu žádat vyšší nájem.

Ovšem oba dva majitelé nejsou hloupí a nepodstoupí riziko, že zaplatí za renovaci velké peníze a druhý majitel z toho bude mít prospěch. Proto si opět oba dva zvolí jistotu tím, že radši nebudou renovovat a budou maximalizovat zisk pouze z výnosu z nerenovovaného domu a z kapitálu na vkladní knížce.

Tahle varianta je pro ně však z dlouhodobého hlediska ta nejhorší, protože pokud nebudou investovat peníze do modernizace domu pravidelně, může se jim stát, že dům bude chátrat, až bude zcela nepoužitelný. Na další renovace, které budou samozřejmě dražší, nemusí mít navíc v budoucnu peníze. Proto by bylo nejlepší, aby spolupracovali a renovovali oba dva. V tomto případě by se jim sice snížil kapitál na vkladních knížkách, ale ne zase o tolik, jako by to bylo v případě, kdyby renovoval pouze jeden majitel.

Na začátku této kapitoly jsme se zmínili o tom, že aplikace Vězňova dilematu se dají nalézt i v ekonomii. Nyní si uvedeme takovéhoto příklad takovéhoto chování u dvou producentů surové ropy.

Příklad 16. Pro zjednodušení uvažujme oligopol se dvěma členy, Saudskou Arábií a Íránem. Obě země jsou velmi bohaté a to mj. v důsledku vyvážení surové ropy. Tyto dvě země spolu uzavřely dohodu, že budou vyvážet menší množství ropy. Rozhodly se tak z toho důvodu, že chtějí, aby ceny ropy ve světě zůstaly vysoké. Velká produkce ropy by totiž měla za následek větší nabídku než poptávku. A aby tento přebytek ropy nabízející prodali, museli by snížit cenu za jednotku (za barel). Poté co země uzavřely dohodu o nízké produkci, bylo už jenom na nich, zda dohodu dodrží nebo budou tajně produkovat větší množství.

Po uzavření smlouvy se země rozhodují, zda poruší smlouvu, tj. budou vyrábět ve velkém množství, nebo smlouvu dodrží. Pokud budou Saudská Arábie i Írán respektovat smlouvu a budou vyrábět v malém množství, vydělají si obě dvě země stejně, a to 70 miliard dolarů. Jestliže Írán bude respektovat smlouvu a Saudská Arábie ne, znamená to pro ni, že si za velkou produkci vydělá 80 miliard dolarů, kdežto Írán pouze 40 miliard dolarů. Jestliže však Írán taky nedodrží smlouvu a bude vyrábět ve velkém, potom si Saudská Arábie vydělá při vysoké produkci 50 miliard dolarů a při nízké produkci 40 miliard dolarů.

Protože si např. Saudská Arábie nemůže být jistá tím, že Írán smlouvu neporuší, zvolí pro jistotu vyšší produkci ropy. Je jasné, že tak jak uvažuje Saudská Arábie, bude uvažovat i Írán. Z toho vyplývá, že obě země smlouvu poruší a budou produkovat ropu ve velkém množství. Výsledkem bude více vyprodukované ropy, ale s nižším ziskem.
Nyní si tuto situaci shrneme do následující dvojmatice:

		Írán	
	Strategie	Nízká produkce	Vysoká produkce
Saudská Arábie	Nízká produkce	(70,70)	(40,80)
	Vysoká produkce	(80,40)	$\boxed{(50,50)}$

Na tomto příkladu jsme si ukázali, proč mají oligopoly problém udržet si monopolní zisk. Obě dvě země totiž chtějí mít co největší zisk, a proto si zvolí vysokou produkci. Takže místo toho aby každý oligopolista měl monopolní zisk v hodnotě 70 miliard dolarů, bude mít zisk pouze v hodnotě 50 miliard dolarů.
Opět je zde rovnovážným bodem hodnota (Vysoká produkce, Vysoká produkce). Stejně jako v předchozích příkladech i zde platí, že oba dva hráči (duopolisté) se navzájem „zradí“.

Nyní si ukážeme další aplikaci Vězňova dilematu. Tentokrát se bude jednat o investování do reklam stejného zboží, a to bílého vína.

Příklad 17. Uvažujme dvě firmy (Sklepmistr a Veltlín), které vyrábějí bílé víno. Pro jednoduchost předpokládejme, že lidí, kteří rádi pijí bílé víno, je víceméně konstantní počet a že tito lidé se rozhodují pouze o tom, kterou značku si zakoupí. Aby zvýšily firmy poptávku právě po svých produktech, je samozřejmě nutné, aby investovaly do reklamy. Obě dvě firmy se samozřejmě snaží, aby jejich reklama byla co nejlepší a předčila reklamu konkurenční firmy. Tudíž pokud Sklepmistr uvede na trh kvalitní reklamu a Veltlín např. reklamu žádnou nebo nekvalitní, lze očekávat, že se zvýší poptávka po bílém víně Sklepmistr a výrazně klesne poptávka po Veltlínu.

Proto ani jedna firma nebude riskovat to, že její reklama bude méně kvalitní než reklama druhé firmy, a investuje do ní hodně. Tento výsledek samozřejmě nebude mít tak vysoký efekt jako v případě vysoké investice pouze jedné firmy. Sklepmistr i Veltlín sice mohou předpokládat, že při vyšších investicích do reklamy se o něco zvýší poptávka po bílém vínu, ale nesmí zapomenout, že při takto vysoce vynaložených investicích do reklamy vzniká riziko, že výnosy, které dosáhnou prodejem vína, budou pouze o něco vyšší než výdaje za masivní reklamu. Tuto situaci si můžeme shrnout do této dvojmatice:

Sklepmistr

	Strategie	Malá investice	Velká investice
Veltlín	Malá investice	(střední zisk, střední zisk)	(velmi nízký zisk, vysoký zisk)
	Velká investice	(vysoký zisk, velmi nízký zisk)	(nízký zisk, nízký zisk)

Reálné příklady Vězňova dilematu se objevovaly i v minulosti. Nyní si ukážeme možnou aplikaci ve zbrojení v tzv. „studené válce“ mezi SSSR a USA.

Příklad 18. Studená válka začala roku 1947 a skončila v roce 1991. Stály v ní proti sobě dvě velmoci - SSSR a USA. Obě velmoci se navzájem obviňovaly v prosazování různých politických ideologií (komunismus vs. imperialismus) a součástí této války byly také „závody“ ve zbrojení.

Každá země se totiž mohla rozhodnout, zda bude zbrojit nebo ne. Obě dvě dávaly přednost zbrojení, protože při větší palebné síle, by se staly velmi mocným státem a měly by ve světě větší vliv. Na druhou stranu menší palebná síla vyvolá méně konfliktů. To znamená, že by mohly mezi sebou „žít v bezpečí“. Z těchto úvah vyplývá, že dané země měly na výběr ze dvou strategií, a to *zbrojit* nebo *nezbrojit*. Tuto situaci si můžeme shrnout do následující dvojmatice:

USA

	Strategie	Nezbrojit	Zbrojit
SSSR	Nezbrojit	(bezpečný, bezpečný)	(slabý, mocný)
	Zbrojit	(mocný, slabý)	(ohrožený, ohrožený)

Jak už jsme zmínili, každá země měla na výběr, zda bude zbrojit nebo ne. Jestliže se např. SSSR rozhodl zbrojit, USA udělalo to samé a zbrojilo také, protože se nechtělo stát slabou zemí. Pokud však SSSR nezbrojilo, USA zbrojilo dál, protože chtělo využít situace a stát se mocnější zemí než SSSR. Z této úvahy je zřejmé, že pro obě dvě země byla dominující strategie zbrojit. Toto rozhodnutí mělo za následek nejenom neustále ohrožení, ale mělo i za následek vysoké náklady vyplývající ze zbrojení.

Tento problém se snažily USA a SSSR vyřešit různými dohodami nebo vyjednáváním o množství vyráběných zbraní a následnými kontrolami dodržování těchto zásad. Problém byl však v tom, že se ani jedna strana nebyla schopna domluvit na povoleném množství vyráběných zbraní. Obě země se totiž bály, že druhá strana nebude dohodu akceptovat a bude vyrábět větší množství, než na kterém se dohodly. Proto se i nadále zbrojilo v obou zemích.

Toto rozhodnutí se však stalo osudné pro SSSR. Neustále stoupající náklady na zbrojení měly za následek úpadek sovětského hospodářství. Finanční situace v SSSR byla nezvládatelná, protože se dostupné peněžní prostředky vynaložily pouze a jenom na obranu země. Výsledkem byl rozpad sovětského bloku.

Doposud jsme se zabývali aplikacemi Vězňova dilematu v převážně ekonomických situacích. Nyní si ukážeme, že se s podobnou situací můžeme setkat také v aplikacích neekonomických. Jako aplikaci Vězňova dilematu objevující se v evoluční biologii je uváděn model nazvaný *jestřáb a hrdlička*.

Příklad 19: Uvažujme populaci jednoho druhu, jejíž jedinci se při konfliktech řídí jednou ze dvou strategií, které nazveme *jestřáb* a *hrdlička*. Pojmenování je pouze obrazné a má vystihovat způsob chování při konfliktu: jestřáb bojuje vždy tvrdě a vzdává se jen tehdy, je-li vážně zraněn, hrdlička se přímým útokům raději vyhýbá.

Jedinci mohou bojovat prakticky o cokoliv, může se jednat např. o potravu, jiného jedince nebo výhodnou oblast pro život. Prostřednictvím boje se daný jedinec může stát udatnějším – tuto změnu označíme hodnotou V. Nebo se může zranit, a tím obrazně přijít o hodnotu, kterou označíme C. Platí přitom, že $V>C$. Poznamenejme, že celková zdatnost poraženého přitom nemusí být nulová, je pouze snížena o tuto hodnotu C, což v praxi znamená, že jedinec např. zůstává v horším teritoriu.

Nejdříve budeme uvažovat chování jestřábů. Budeme brát v potaz, že všichni zástupci jestřábů jsou nebojácní a bojují do konce zbytku svých sil. Proto, když se střetnou proti sobě dva jestřábi, vyhraje každý s pravděpodobností 50%. Naopak, když se proti sobě octnou dva jedinci chovající se jako hrdličky, bojí se boje, a proto budou sdílet oblast společně (rovným dílem). Pokud se střetne jestřáb s hrdličkou, dojde k boji, v němž je hrdlička zabita.

Tuto situaci si můžeme názorně znázornit v následující dvojmatici:

Strategie	Hrdlička	Jestřáb
Hrdlička	$\left(\frac{V}{2},\frac{V}{2}\right)$	$(0,V)$
Jestřáb	$(V,0)$	$\left(\frac{V-C}{2},\frac{V-C}{2}\right)$

Z matice je zřejmé, že rovnovážnou strategií je dvojice (Jestřáb, Jestřáb), přestože by pro skupinu jako celek bylo očividně výhodnější kooperovat a chovat se jako hrdličky.

Nalezená rovnovážná strategie odpovídá tomu, že z evolučního hlediska není strategie hrdlička nikdy tzv. evolučně stabilní, protože populace hrdliček muže být napadena jestřábem, jemuž se v populaci hrdliček daří lépe než hrdličkám samotným.

2.2 Cournotův model monopolu a duopolu

Jako spojitý příklad aplikace Vězňova dilematu je v literatuře (např. v [13, 14]) uváděn Cournotův model duopolu, v němž má poptávková funkce nejjednodušší tvar:

$$p + q = M, \qquad M >> c,$$

kde p je cena 1 kusu výrobku, q je poptávka na trhu po tomto výrobku, c jsou náklady na výrobu jednoho kusu a M je konstanta řádově mnohem vetší než c.

Na následujícím příkladu si ukážeme, že i v případě poněkud složitější poptávkové funkce ve tvaru

$$p + q^2 = M, \qquad M >> c,$$

bude situace obdobná. A tedy že, i přestože by bylo celkově pro duopolisty výhodnější vyrábět méně (ekvivalent strategie (Zapírat, Zapírat)), budou vyrábět množství větší s menším ziskem (obdoba strategie (Přiznat se, Přiznat se)). U vězňů byla nemožnost kooperace způsobena oddělenými celami, u duopolistů je zapříčiněna mj. tím, že dohody o vyráběném množství mezi producenty jsou, vzhledem k antimonopolním opatřením, zpravidla protizákonné.

Nejdříve uvažujme situaci, kdy daný výrobek vyrábí pouze jeden výrobce – čili monopolista. Znamená to tedy, že bude své výrobky prodávat za cenu:

$$p = M - q^2.$$

Tento monopolista se snaží maximalizovat svůj zisk $u(q)$ z prodeje při produkci q. Zisk při dané produkci q je dán výplatní funkci ve tvaru:

$$u(q)=(p - c)*q.$$

Jedná se však o monopolistu, proto za hodnotu p dosadíme takovou cenu výrobku, za jakou bude daný výrobce prodávat:

$$u(q)=(M - q^2 - c)*q.$$

Pro zjištění maximálního zisku použijeme první derivaci. Stanovíme si stacionární body a ověříme si, že skutečně v některém z nich nastává lokální maximum.

$$u(q)=(M - q^2 - c)*q = M*q - q^3 - c*q$$
$$u'(q)=M - 3q^2 - c$$

$$u'(q)=0 \quad \rightarrow \quad M - 3q^2 - c = 0 \quad \rightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{M-c}{3}}$$

Z tohoto výpočtu nám vycházejí dva stacionární body:

$q_1^* = \sqrt{\frac{M-c}{3}}$

$q_2^* = -\sqrt{\frac{M-c}{3}}$ → tento stacionární bod nebude brán v potaz, protože vyrábět záporné množství není možné.

O typu extrému rozhodneme pomocí druhé derivace.

$$u''(q) = -6q$$

Protože $u''(q_1^*) < 0$, má funkce v daném stacionárním bodu opravdu lokální maximum.

Z uvedených výpočtů nám vyplývá, že daný monopolista bude vyrábět množství v hodnotě:

$$q_1^* = \sqrt{\frac{M-c}{3}}.$$

Bude prodávat za cenu:

$$p = M - (q_1^*)^2 = M - \frac{M-c}{3} = \frac{2M+c}{3}.$$

Pokud do rovnice zisku dosadíme za q hodnotu q_1^*, získáme monopolní zisk o hodnotě:

$$u(q_1^*) = \left(M - \frac{M-c}{3} - c\right) * \sqrt{\frac{M-c}{3}} = \frac{3M - M + c - 3c}{3} * \sqrt{\frac{M-c}{3}} = \frac{2}{3}(M-c) * \sqrt{\frac{M-c}{3}}$$

Nyní se budeme zabývat situací, kdy se na trhu objeví dva výrobci jednoho výrobku. Bude se tedy jednat o tzv. duopol. U duopolu bude situace o to složitější, protože zisk jednoho výrobce nebude záviset pouze na jeho rozhodnutí (kolik bude vyrábět), ale i na rozhodnutí druhého výrobce (v tomto případě soupeře). Jedná se o nekooperativní hru, protože je ze zákona zakázáno domlouvat se o množství prodeje. Tento problém u monopolisty nemohl nastat, protože nikdo jiný daný výrobek nevyráběl.

Předpokládejme, že

1. výrobce bude vyrábět množství q_1
2. výrobce bude vyrábět množství q_2.

Samozřejmě bude platit vztah:

$$q = q_1 + q_2$$

Výplatní funkce obou výrobců (tj. funkce udávající zisky) budou vypadat takto:

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c)*q_1 = (M - (q_1 + q_2)^2 - c)* q_1$$
$$u_2(q_1, q_2) = (p - c)*q_2 = (M - (q_1 + q_2)^2 - c)* q_2$$

Našim cílem je najít optimální množství výrobku, které by měli oba dva výrobci vyrábět.

Nejdříve se budeme zabývat výplatní funkcí zisku prvního výrobce:

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c)*q_1 = (M - (q_1 + q_2)^2 - c)* q_1$$

Nyní tuto funkci upravíme, zderivujeme podle proměnné q_1 a najdeme stacionární body:

$$u_1(q_1, q_2) = (M - q_1^2 - 2q_1q_2 - q_2^2 - c)*q_1 = (Mq_1 - q_1^3 - 2q_1^2q_2 - q_2^2q_1 - cq_1)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = (M - 3q_1^2 - 4q_1q_2 - q_2^2 - c) \quad \rightarrow \quad - 3q_1^2 - 4q_1q_2 + M - q_2^2 - c = 0$$

Jedná se o kvadratickou rovnici s parametrem, kde parametr je hodnota q_2. Řešení této rovnice mají následující tvar:

$$q_1 = \frac{4q_2 \pm \sqrt{16q_2^2 + 12M - 12q_2^2 - 12c)}}{-6} = \frac{4q_2 \pm \sqrt{4q_2^2 + 12M - 12c}}{-6}$$
$$q_1 = -\frac{2}{3}q_2 \pm \frac{\sqrt{4(q_2^2 + 3M - 3c)}}{-6} = -\frac{2}{3}q_2 \pm \frac{\sqrt{q_2^2 + 3M - 3c}}{-3}$$

Z tohoto vztahu nám vycházejí dva stacionární body:

$$q_{11}^{*} = -\frac{2}{3}q_2 + \frac{\sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}}{3} \qquad\qquad q_{12}^{*} = -\frac{2}{3}q_2 - \frac{\sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}}{3}$$

Opět z logické úvahy můžeme vynechat bod q_{12}^{*}, protože není možné vyrábět záporné množství.

Dále se budeme zabývat výplatní funkcí zisku druhého výrobce:

$$u_2(q_1, q_2) = (p - c)*q_2 = (M - (q_1 + q_2)^2 - c)*\, q_2$$

Tuto funkci budeme derivovat podle proměnné q_2, pak dosadíme za proměnnou hodnotu q_1 hodnotu optimální q_{11}^{*} a nakonec najdeme stacionární body:

$$u_2(q_1, q_2) = (M - q_1^2 - 2q_1q_2 - q_2^2 - c)*q_2 = (Mq_2 - q_1^2q_2 - 2q_1q_2^2 - q_2^3 - cq_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = (M - q_1^2 - 4q_1q_2 - 3q_2^2 - c) \quad \rightarrow \quad -3q_2^2 - 4q_1q_2 + M - q_1^2 - c = 0$$

$$-3q_2^2 - 4\left(\frac{-2q_2 + \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}}{3}\right)q_2 + M - \left(\frac{-2q_2 + \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}}{3}\right)^2 - c = 0$$

$$q_2^{\,2}\left(-3 + \frac{8}{3} - \frac{1}{9} - \frac{4}{9}\right) + \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}\left(-\frac{4}{3}q_2 + \frac{4}{9}q_2\right) + M - \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}c - c = 0$$

$$q_2^{\,2}\left(\frac{-27 + 24 - 1 - 4}{9}\right) + \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}\left(\frac{-12 + 4}{9}q_2\right) + \left(\frac{3-1}{3}M\right) + \left(\frac{1-3}{3}c\right) = 0$$

$$-\frac{8}{9}q_2^{\,2} + \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}\left(-\frac{8}{9}q_2\right) + \frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c = 0$$

$$\frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c - \frac{8}{9}q_2^{\,2} = \sqrt{q_2^{\,2} + 3M - 3c}\left(\frac{8}{9}q_2\right) \qquad\qquad /^2$$

$$\left(\frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c\right)\left(\frac{8}{9}\right)q_2^{\,2} + \frac{64}{81}q_2^{\,4} = \left(q_2^{\,2} + 3M - 3c\right)\left(\frac{64}{81}\right)q_2^{\,2}$$

$$\left(\frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c\right)^2 - \frac{16}{9}q_2^{\,2}\left(\frac{2}{3}M - \frac{2}{3}c\right) + \frac{64}{81}q_2^{\,4} = \frac{64}{81}q_2^{\,4} + \frac{64}{27}q_2^{\,2}M - \frac{64}{27}q_2^{\,2}c$$

$$\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)^2-\frac{16}{9}q_2^{\,2}\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)=\frac{64}{27}q_2^{\,2}(M-c)$$

$$\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)^2=\frac{64}{27}q_2^{\,2}(M-c)+\frac{16}{9}q_2^{\,2}\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)^2=q_2^{\,2}\left(\frac{64}{27}M-\frac{64}{27}c+\frac{32}{27}M-\frac{32}{27}c\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)^2=q_2^{\,2}\left(\frac{96}{27}M-\frac{96}{27}c\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}c\right)^2=q_2^{\,2}\left(\frac{96M-96c}{27}\right)$$

$$q_2^{\,2}=\left(\frac{\frac{4}{9}M^2-\frac{8}{9}cM+\frac{4}{9}c^2}{\frac{96M-96c}{27}}\right)=\frac{27\left(\frac{4}{9}M^2-\frac{8}{9}cM+\frac{4}{9}c^2\right)}{96M-96c}=\left(\frac{12M^2-24cM+12c^2}{96M-96c}\right)$$

$$q_2^{\,2}=\frac{12\left(M^2-2cM+c^2\right)}{96(M-c)}\quad=\frac{1}{8}(M-c)$$

$$q_2=\pm\sqrt{\frac{1}{8}(M-c)}\rightarrow\pm\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}$$

$$q_{21}{}^{*}=\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\qquad\qquad q_{22}{}^{*}=-\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}$$

Celkově vyšly dva stacionární body. Z hlediska logické úvahy můžeme brát v potaz pouze bod $q_{21}{}^{*}$, bod $q_{22}{}^{*}$ nikoliv, protože nelze vyrábět záporné množství. To znamená, že pro druhého výrobce je optimální hodnota vyrábět množství $q_{21}{}^{*}$.

Dosadíme-li optimální hodnotu $q_{21}{}^{*}$ za q_2 do vzorce pro výpočet $q_{11}{}^{*}$, zjistíme tak optimální hodnotu vyráběného množství prvního výrobce.

$$q_{11}{}^{*}=-\frac{2}{3}q_{21}{}^{*}+\frac{\sqrt{q_{21}{}^{*2}+3M-3c}}{3}=-\frac{2}{3}*\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}+\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)^2+3M-3c}{3}}$$

$$q_{11}{}^{*}=\frac{-2\sqrt{2}}{12}\sqrt{M-c}+\frac{\sqrt{\frac{2M-2C}{16}+3M-3c}}{3}$$

$$q_{11}^{*} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{M-c}+\frac{\sqrt{\frac{50(M-c)}{16}}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{M-c}+\frac{5\sqrt{2}(M-c)}{12}$$

$$q_{11}^{*} = \sqrt{M-c}*\left(\frac{-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{12}\right)=\frac{3\sqrt{2(M-c)}}{12}=\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}$$

Z těchto výpočtů je patrné, že pro prvního a druhého výrobce vyšla stejná hodnota optimálního množství: $q_{11}^{*} = q_{21}^{*} = \frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}$.

Oba dva výrobci budou prodávat za cenu, která bude mít hodnotu:

$$p = M - (q_{11}^{*} + q_{21}^{*})^2 = M-\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}+\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)^2 = M-\frac{1}{4}2(M-c)$$

$$p = M-\frac{M-c}{2}=\frac{1}{2}(M+c).$$

Zisk jednoho výrobce bude mít hodnotu:

$$u_1(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) = u_2(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) = (M - (q_{11}^{*} + q_{21}^{*})^2 - \mathrm{c})*q_{11}^{*}$$

$$=\left(M-\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}+\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)^2-c\right)*\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)$$

$$=\left(M-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2(M-c)}\right)^2-c\right)*\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)=\left(M-\frac{2(M-c)}{4}-c\right)*\left(\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}\right)$$

$$=\left(M-\frac{M-c}{2}-c\right)*\frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)}=\left(\frac{M-c}{2}\right)*\frac{\sqrt{2(M-c)}}{4}$$

$$=\left(\frac{M-c}{2}\right)*\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{M-c}=\frac{\sqrt{2}}{8}(M-c)\sqrt{M-c}$$

Zisk obou výrobců bude tedy $u_1(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) + u_2(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(M-c)\sqrt{M-c}$

Když srovnáme zisk monopolisty a duopolistů, platí:

$$\frac{2}{3}(M-c) * \sqrt{\frac{M-c}{3}} > \frac{\sqrt{2}}{4}(M-c)\sqrt{M-c}\,.$$

Z této nerovnosti vyplývá, že pro duopolisty by bylo nejlepší uzavřít tajnou dohodu o vyráběném množství, a to takovou, že oba dva duopolisté vyrobí dohromady to, co vyrobí monopolista:

$q_{11}^{*} + q_{21}^{*} = q_1{*} = \sqrt{\frac{M-c}{3}}$ → což znamená, že by vyrobili méně, protože platí:

$$\sqrt{\frac{M-c}{3}} < \frac{1}{2}\sqrt{2(M-c)}$$

Zisk by si pak rozdělili rovnoměrně, a to v hodnotě:

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{3}(M-c) * \sqrt{\frac{M-c}{3}}\,.$$

Protože $\frac{1}{3}(M-c) * \sqrt{\frac{M-c}{3}} > \frac{\sqrt{2}}{8}(M-c)\sqrt{M-c}$, je zřejmé, že pokud mezi sebou uzavřou (zákonem nepovolenou) dohodu o vyráběném množství a budou vyrábět dohromady pouze to co monopolista, jejich zisk bude mít větší hodnotu, než kdyby vyráběli nekooperativně.

Nyní si tuto situaci ukážeme při konkrétních číselných hodnotách:

Příklad 20: Zvolíme si M = 602 a c = 2 a dále budeme dosazovat podle předchozích vztahů.

Pro monopol platí:

$$q_1{*} = \sqrt{\frac{M-c}{3}} = \sqrt{\frac{602-2}{3}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$p = \frac{2M+c}{3} = \frac{2*602+2}{3} = 402$$

$$u(q_1{*}) = \frac{2}{3}(M-c) * \sqrt{\frac{M-c}{3}} = \frac{2}{3}(602-2) * \sqrt{\frac{602-2}{3}} = 400\sqrt{200} = 4000\sqrt{2}$$

Pro duopol platí:

$$q_{11}^{*} = q_{21}^{*} = \frac{1}{4}\sqrt{2(M-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2(602-2)} = 5\sqrt{3}$$

$$p = \frac{1}{2}(M+c) = \frac{1}{2}(602+2) = 302$$

$$u_1(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) = u_2(q_{11}^{*}, q_{21}^{*}) = \frac{\sqrt{2}}{8}(M-c)\sqrt{M-c} = \frac{\sqrt{2}}{8}(602-2)*\sqrt{(602-2)} = 1500\sqrt{3}$$

Je zřejmé, že platí

$$10\sqrt{2} < 10\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad 4000\sqrt{2} > 3000\sqrt{3},$$

tj. že množství vyráběné monopolistou je menší, než množství vyráběné oběma duopolisty dohromady a zisk monopolisty je větší než součet zisků obou duopolistů. Z hlediska teorie her lze tedy popsanou situaci chápat jako variaci na Vězňovo dilema, protože duopolisté zvolí strategii „vyrábět víc s menším ziskem“ než aby vyráběli méně se ziskem větším. V takovéto situaci by totiž bylo pro každého z nich výhodné začít vyrábět víc než konkurent a tím si zvýšit na jeho úkor zisk svůj.

Závěr

Vězňovo dilema má nezanedbatelný význam a široké uplatnění v řadě sfér, jakými jsou např. historie, ekonomie nebo evoluční biologie. Ve své bakalářské práci jsem se zabýval nejen klasickým modelem Vězňova dilematu, ale ukázal jsem i konkrétní situace, ve kterých se Vězňovo dilema vyskytuje: studená válka, renovace domu, spory mezi Saudskou Arábii a Íránem atd.

Vězňovo dilema lze chápat jako důkaz toho, že se lidé za určitých okolností chovají sobecky, tj. pokud se nemohou předem domluvit, zvolí si „pro jistotu" strategie (zrada, zrada). Naštěstí to však není až tak úplně celá pravda, protože pokud se stejná rozhodovací situace bude neustále opakovat, tak zvolení zrady nebude pro „vězně" nejoptimálnější strategií. Tento poznatek ukázal v sedmdesátých letech biolog John Maynard-Smith, který si uvědomil, že celá hra se mění, hraje-li se opakovaně, a nikoli jednorázově. Vězni, v případě Maynarda-Smithe zvířata bojující o dominanci ve smečce, se totiž mohou učit z dosavadního průběhu hry a předchozího chování svých protihráčů.

Toto tzv. *opakované vězňovo dilema* lze velmi snadno modelovat na počítači a v sedmdesátých letech začali zejména sociologů a evoluční biologové vymýšlet nejrůznější typy strategií, tvořit příslušné počítačové programy a nechali tyto strategie opakovaně "soupeřit" mezi sebou. Jako nejúspěšnější se tehdy ukázala strategie kanadského politologa Anatola Rapoporta s názvem *Půjčka za oplátku*. Tato strategie v prvním kole vždy spolupracuje. V následujících kolech pak důsledně oplácí: spolupráci spoluprací, zradu zradou. Bylo ukázáno, že v dostatečně dlouhých hrách (je-li hra opakována alespoň stokrát) tato strategie vítězí, tj. v termínech Vězňova dilematu bude hráč řídící se touto strategií odsouzen na nejméně let.

Závěrem bych chtěl ještě říci, že při psaní této práce jsem si uvědomil, že se účastníkem nekooperativních her stává člověk zcela běžně, aniž by si to příliš uvědomoval. Díky této práci jsem rovněž pochopil základní principy a podstatu nekooperativní teorie her a také to, jak je termín Vězňovo dilema s těmito hrami spjato. Zjistil jsem, podle čeho a jakým způsobem se daný subjekt při výběru nejvhodnější strategie rozhoduje a jaký je rozdíl mezi čistými a smíšenými rovnovážnými strategiemi. Psaním této práce jsem se také naučil pracovat se zahraniční odbornou literaturou a zlepšil jsem si své slohové dovednosti.

Literatura

[1] Duncan Luce R., Raiffa H., *Games and decisions : introduction and critical survey*, New York : Dover, 1989

[2] Hušek R., Maňas M., *Matematické modely v ekonomii*, 1. vydání. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989

[3] Gregory Mankiw N., Taylor M. P., *Economics*, 1. vydání, London: Thomson Learning, 2006

[4] Maňas M., *Teorie her a optimální rozhodování*, 1. vydání, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1974

[5] Mendelson E., *Introducing game theory and its applications*, Boca Raton ; London ; New York : Chapman & Hall/CRC, 2004

[6] Morgestern O., Davis M. D., *Game theory : a nontechnical introduction*, Mineola : Dover, 1997

[7] Ordeshook P. C., *Game theory and political theory*, 1. vydání, Cambridge University: Press Syndicate, 1986

[8] Owen G., *Game theory*, 3. vydání, San Diego, CA : Academic Press, 1995

[9] Packel E. W., *The mathematics of games and gambling*, Washington : Mathematical Association of America, 1981

[10] Rubinstein A., Osborne J. M., *A course in game theory,* MALondon : MIT Press, 1994

[11] Straffin D. P., *Game theory and strategy*, Washingotn : Mathematical Association of America, 1993

[12] Tirole J., Fudenberg D., *Game theory*, MIT Press, 1991

[13] Webb N. J., *Game theory : decisions, interaction and evolution*, London : Springer, 2007

Internetové zdroje:

[14] *Nekooperativní hry* [online] dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/hry_nek.pdf [citováno dne: 12. 1. 2010]

[15] *Participace nájemníků* [online] dostupné z: http://seb.soc.cas.cz/publikace_download/publikace/sureuro_draft.pdf [citováno dne: 25. 1. 2010]