



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A MULTIMÉDIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF COMPUTER GRAPHICS AND MULTIMEDIA

ČASOVĚ-FREKVENČNÍ ANALÝZA SIGNÁLU

TIME-FREQUENCY SIGNAL ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MATEJ KUBALA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. DAVID BAŘINA

BRNO 2014

Abstrakt

Tato práce se zabývá tématem časově-frekvenční analýzy signálu. Budou vysvětleny základní pojmy z oblasti spracování a spektrální analýzy signálů, speciálně zaměřené na převod z časové oblasti do oblasti frekvenční a naopak. Hlavním zaměřením práce je podrobně vysvětlit a porovnat dvě nejznámější metody, přesněji Fourierovu a vlnkovou transformaci. Výsledky bude možné demonstrovat na implementované aplikaci, která načítá zvukovou nahrávku a určí pomocí uvedených metod frekvenci v zadaném čase.

Abstract

This bachelor thesis is dealing with explanation of time-frequency signal analysis. Basic definitions and terms of signal processing and spectral analysis will be explained, especially focused on transfer time domain into frequency and inverse. The main objective of thesis is to explain in detail and compare two of the most popular methods, Fourier transform and Wavelet transform. Results will be illustrated on implemented application, which loads sound record and computes frequency in specific time using these methods.

Klíčová slova

Signál, frekvence, vlnka, Fourierova transformace, vlnková transformace.

Keywords

Signal, frequency, wavelet, Fourier transform, wavelet transform.

Citace

Matej Kubala: Časově-frekvenční analýza signálu, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2014

Časově-frekvenční analýza signálu

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Davida Bařinu.

.....
Matej Kubala
28. května 2014

Poděkování

Touto cestou bych bych chtěl poděkovat svému vedúcemu pánovi Ing. Davidovi Bařinovi, který ma vždy ochotne viedol a snažil sa mi pomôcť za každých okolností. Taktiež bych bych sa chtěl poděkovat mame, která ma neustále podporovala.

© Matej Kubala, 2014.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1	Úvod	2
2	Časovo-frekvenčná analýza signálu	3
2.1	Signály a systémy	3
2.2	Fourierova rada	6
2.3	Fourierova transformácia	9
2.4	Vlnková transformácia	14
2.5	Rozklad signálu do časovo-frekvenčnej roviny	19
2.6	Aplikácie časovo-frekvenčnej analýzy	20
2.7	Porovnanie Fourierovej a vlnkovej transformácie	21
3	Implementácia	22
3.1	Rozbor práce	22
3.2	Spracovanie wav súboru a dataset signálov	22
3.3	Metodika testovania	26
3.4	Dosiahnuté výsledky s úspešnosť	27
4	Záver	30

Kapitola 1

Úvod

V dnešnom digitálnom svete sú signály všade okolo nás a pri ich spracovaní je potrebné im správne rozumieť. Signály totiž nesú so sebou veľké množstvo informácií, z ktorých je častokrát veľmi obtiažne vybrať práve tie potrebné a podstatné. Bežne používanou praktikou je konverzia analógového signálu na digitálny, ktorý je spracovaný počítačom. Reálny signál je potrebné navzorkovať a nakvantovať, aby sa získali diskkrétne hodnoty signálu. To však nie je všetko. Aby bolo možné zistiť vlastnosti signálu alebo jeho frekvenčnú doménu, je potrebné signál spracovať. Spracovaním signálu sa rozumie aj zdanlivo jednoduchá činnosť ako spracovanie zvuku či obrázkov. Mnohé informácie bývajú v signále skryté a preto je potrebné signál transformovať do inej podoby. V tejto práci bude vysvetlené spracovanie zvuku pomocou dvoch najznámejších metód - transformácií. Výklad bude venovaný nielen Fourierovej, ale aj pomerne novej vlnkovej transformácii. Budú ukázané spoločné vlastnosti a princípy, ako aj odlišnosti. Overí sa predpoklad, že čím je skúmaná vzorka menšia, tým je jednoduchšia a obsahuje menej koeficientov. Jej spracovanie je rýchlejšie a jednoduchšie, ale za cenu stúpajúcich pamäťových nárokov. Taktiež sa dokáže, že každý zložený signál sa dá rozložiť do elementárnych signálov.

Jedným z hlavných cieľov tejto práce je navrhnúť, naimplementovať a na jednotlivých testovacích signáloch otestovať aplikáciu, ktorá pomocou krátkodobej Fourierovej transformácie alebo vlnkovej transformácie určí frekvenciu v danom čase. Súčasťou sú taktiež zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny, takže vlastnosti signálu je možné aj vizuálne pozorovať.

Práca je štruktúrne rozdelená do jednotlivých kapitol. Druhá kapitola slúži ako teoretický podklad práce. V úvode budú spomenuté základné fakty o systémoch a signáloch, a ich rozdelení. Neskôr bude vysvetlená časovo-frekvenčná analýza signálu na základe dvoch najpoužívanejších metód, a to Fourierovu a vlnkovú transformáciu. V ďalšej kapitole bude rozobraná programová časť, rozbor a analýza problému a na koniec budú zhrnuté a demonštrované dosiahnuté výsledky.

Kapitola 2

Časovo-frekvenčná analýza signálu

Zaujmom tejto kapitoly bude podať teoretický výklad z oblasti teórie signálov a transformácií. V začiatku bude reč o základných pojmoch a faktoch. Najprv bude čitateľ oboznámený s tým, čo sú to signály, ich rozdelení a základných vlastnostiach. Nasledovať bude výklad Fourierovej rady a jej použitia. Hlavným sťažiením bude Fourierova analýza, teda prechod k Fourierovej transformácii. Nasledne sa výklad bude venovať vlnkovej teórii, konkrétne vlnkám a vlnkovej transformácii. Obe transformácie budú vysvetlené v základnom priestore $L^1(\mathbb{R})$.

2.1 Signály a systémy

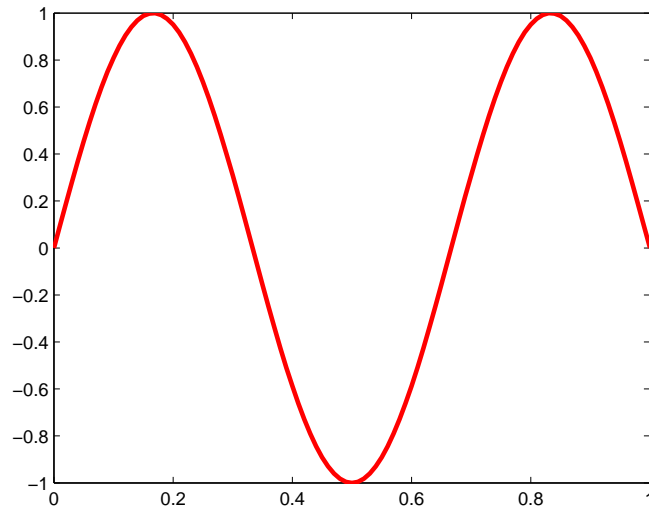
Za signál je považovaná ľubovoľná fyzikálna veličina, ktorá má 1 alebo viac nezávislých premenných (väčšinou čas) a jednu závislú premennú [11]. Ďalšia definícia je, že signál je fyzikálna kvantita nesúca informáciu. Matematický pohľad považuje signály za funkcie, ktoré prevádzajú premennú z množiny T na hodnoty množiny A . Množina T reprezentuje spojitý prípadne diskretný čas, za množinu A sa považuje obor reálnych čísiel, komplexných čísiel alebo aj vektor čísiel prípadne hodnôt [2]. Na obrázku 2.1 je grafické porovnanie spojitého a diskretného signálu. V tejto práci budú za signály myslené predovšetkým zvukové signály, hoci vzťahy a definície platia pre všetky signály. V reálnom svete signály sú reprezentované v časovej doméne. Aj ľudské ucho integruje v čase.

Základné delenie signálov podľa charakteru množiny T :

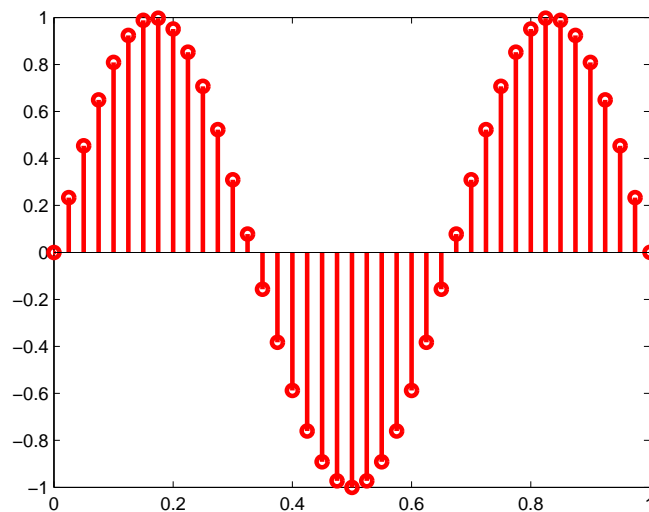
- Signály so spojitým časom
- Signály s diskretným časom

Pre signály so spojitým časom platí, že $t \in \mathbb{R}$, teda signál je definovaný na celom definičnom obore a označuje sa $s(t)$. Jeho hlavnou vlastnosťou je náväznosť, je presne definovaný v každom okamžiku [8]. Pre výpočet frekvenčného spektra sa využívajú transformácie, ktoré sú usporiadané na spojitý signál. Medzi najznámejšie patrí Fourierova transformácia a spojitá vlnková transformácia, ktoré budú podrobne vysvetlené v 2.3 a 2.4.

Signály s diskretným časom sú definované iba pre $n \in \mathbb{Z}$, to znamená len v deterministicky diskretných časových okamihoch a tvoria postupnosť funkčných hodnôt. Označujú sa $s[n]$. Hlavný rozdiel od spojitého signálu je práve nespojitosť [8]. V bežnom živote sa vyskytujú prevažne analógové signály napr. elektrické alebo akustické. Aby tieto spojité signály mohli byť strojom spracovateľné, je potrebné ich pretvoriť na diskretné. To sa



(a) spojitý signál



(b) diskrétny signál

Obrázek 2.1: Základné rozdelenie signálov

docieli navzorkovaním signálu pomocou A/D prevodníka so vzorkovacou frekvenciou f_s . Analógovo-číslícový prevodník musí spĺňať Nyquist-Shannonov teorém, ináč by dochádzalo k aliasingu. Nyquist-Shannonov teorém je popísaný vzťahom 2.1. Vzorkovacia frekvencia musí byť teda aspoň 2krát vyššia ako najvyššia frekvencia v danom signále. K získaniu konkrétnych hodnôt signálu z navzorkovaných sa využíva kvantizácia. Záleží od vlastností A/D prevodníka, s akou presnosťou sú získané diskkrétne hodnoty [16]. Signály majú rôzne vlastnosti ako energiu či výkon, týmto vlastnostiam však v tejto práci nebude venovaná pozornosť.

$$f < \frac{f_s}{2} \quad (2.1)$$

Ďalšie delenie signálov je na deterministické a náhodné. Deterministické signály bývajú presne popísané nejakým vzťahom alebo rovnicou, na rozdiel od náhodných pri ktorých to nie je možné. Náhodné signály sú charakterizované iba pomocou parametrov [2]. Príkladom deterministického signálu je napr. jednotkový impulz, nazývaný aj Diracov impulz, ktorého matematická definícia je vyjadrená vzťahom 2.2. Tento signál je nekonečne úzky, nekonečne vysoký a má mocnosť s hodnotou 1. V praxi sa využíva na vzorkovanie signálu.

$$\delta(x) = \begin{cases} x = 0 & \infty \\ x \neq 0 & 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Posledné dôležité a asi najviac intuitívne delenie signálov je delenie signálov na periodické a neperiodické. Periodický signál je taký, pri ktorom je možné nájsť také T alebo N , aby platili podmienky pre spojitý signál 2.3 a pre diskretný 2.4. Pokiaľ neplatia, jedná sa o neperiodický signál, ktorý sa v čase neopakuje. Pri periodických signáloch je dôležitá základná perióda T_1 alebo N_1 . Je to najmenšia hodnota pre ktorú platí podmienka periodicity, čo dokazuje, že signál sa opakuje po základnej perióde.

$$s(t + T) = s(t) \quad (2.3)$$

$$s[n + N] = s[n] \quad (2.4)$$

Harmonické signály patria medzi najjednoduchšie periodické signály. Bývajú vyjadrené pomocou goniometrických funkcií sínus alebo kosínus 2.5, 2.6. Dajú sa vyjadriť ako súčet dvoch komplexne združených exponenciál, tzn. dvoch rotujúcich vektorov s polovičnou amplitúdou reálneho signálu, pričom jedna rotuje kladným smerom a druhá záporným. V súčte sa premietnu do reálnej osi. Táto vlasnosť sa využije pri Fourierových radách a transformáciach opísaných v 2.2 a 2.3.

$$s(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (2.5)$$

$$s[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) \quad (2.6)$$

Systém je spojenie komponentov, subsystémov alebo zariadení pre spracovanie informácií alebo pokynov. Iná definícia znie, že systém je ľubovoľný proces, ktorého výsledkom je transformácia vstupných signálov na výstupné, pričom systém spracováva signály predpísaným spôsobom. Z matematického hľadiska je systém mapovanie N vstupných signálov na M výstupných. Všeobecne, za systém sa považuje zariadenie, na ktorého vstup sa privedie vstupný signál, signál sa zanalyzuje prípadne upraví, a pošle sa ako výstupný signál na výstup systému. Opäť sa rozlišuje, či sa jedná o spojitý alebo diskretný systém. Spojité systémy sa značia $x(t) \rightarrow y(t)$ a matematicky sú popísané pomocou diferenciálnych rovníc. Diskrétny systémy sa značia $x[n] \rightarrow y[n]$ a popisujú sa pomocou diferenčných rovníc. Systémy sa taktiež rozlišujú na systémy s pamäťou a bez pamäte. Základný rozdiel medzi nimi je, že systémy s pamäťou sú schopné si zapamätať vstup a výstup, zatiaľ čo systémy bez pamäte reagujú iba na svoj súčasný vstup. Existujú aj iné delenia systémov. Podľa linearity na lineárne a nelineárne, podľa počtu premenných na jednorozmerné a viacrozmerné, podľa premenlivosti v čase na invariantné a variantné [8].

Medzi vlastnosti systémov patrí kauzalita, stabilita, časová invariantnosť a linearita. Kauzalita je vlastnosť, keď systém reaguje iba na svoj súčasný alebo minulý stav, systém však „nevidí do budúcnosti“. Stabilitou opísanou rovnicou 2.7 sa chápe, že obmedzený vstup produkuje vždy len obmedzený výstup. Časová invariantnosť 2.8 znamená, že systém sa chová rovnako aj keď ho posuneme v čase.

$$\begin{aligned} \exists A, B \in \mathbb{R}^+ &\implies |x(t)| < A \rightarrow |y(t)| < B \\ \exists A, B \in \mathbb{R}^+ &\implies |x[n]| < A \rightarrow |y[n]| < B \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x(t) \rightarrow y(t) &\implies x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \\ x[n] \rightarrow y[n] &\implies x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Posledná vlastnosť, ktorá bude popísaná je linearita. Linearita využíva aditivitu a homogenitu. Aditivita znamená, keď sa na vstup privedú 2 rôzne signály a sčítajú sa, výstupom bude upravený signál, ktorý je možné získať ako súčet upravených signálov. Tie sú totožné so signálmi, ktoré by sa získali keby sa pustia pôvodné signály systémom samostatne. Homogenita alebo *scaling* znamená, že pokiaľ sa pôvodný signál vynásobí konštantou, výstupom bude opäť upravený signál, ale vynásobený tou istou konštantou. Spomínané dve vlastnosti sú zapísané pomocou rovníc 2.9.

$$\begin{aligned} ax_1(t) + bx_2(t) &\rightarrow ay_1(t) + by_2(t) \\ ax_1[n] + bx_2[n] &\rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Linearita má nepopierateľný význam pri spracovaní signálov. Používa sa pri analýze systému, pretože umožňuje rozložiť zložité signály na jednoduchšie, tie prejdú jednotlivo systémom a výstup vďaka aditivite sa získa ako súčet jednotlivých reakcií. Spomínané vlastnosti využijem pri implementácii programu.

2.2 Fourierova rada

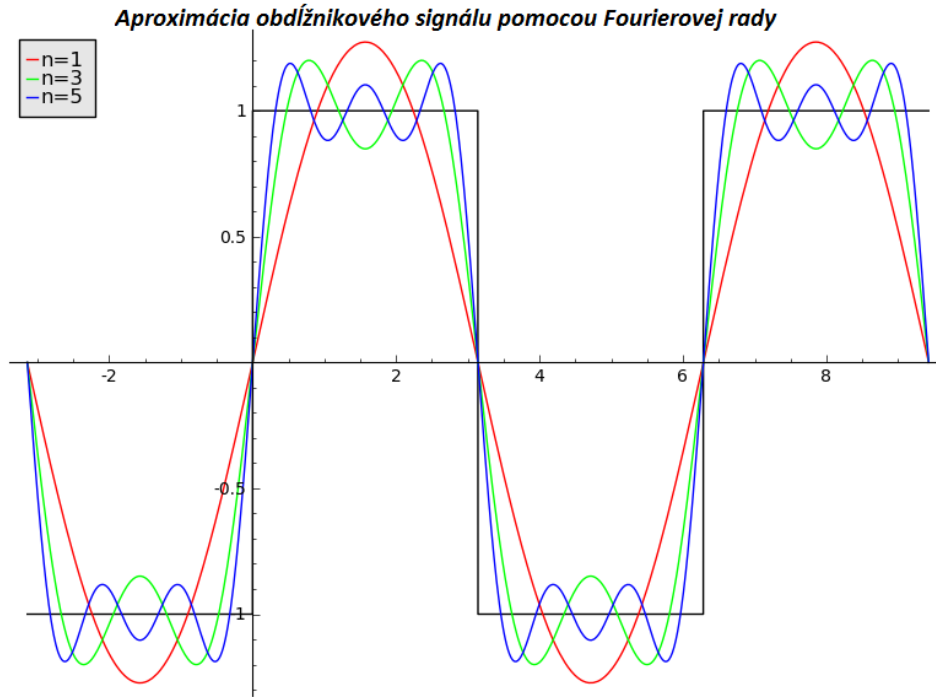
Celé to začalo v 1807, kedy J-B.J. Fourier vydal pamäť týkajúcu sa tepelných tokov. Preslávil sa predovšetkým Fourierovým radom (z angličtiny *Fourier series*), ktorý sa stal prevratom nielen v matematike ale aj v iných oblastiach. Hlavnou myšlienkou je, že ľubovoľná periodická funkcia sa dá vyjadriť ako rad komplexných exponenciál [10]. Tento rad rieši otázku, ako aproximovať nejakú funkciu pomocou základných funkcií, čo je znázornené na obrázku 2.2. Proces nájdenia takého polynómu, ktorý najlepšie aproximuje danú funkciu nazývame harmonická analýza. Fourierova rada slúži k vyjadreniu funkcie pomocou goniometrických funkcií, a je to teoretický základ pre analýzu signálu vo frekvenčnej oblasti. Jej hlavné využitie je pri študovaní chovania funkcií a samozrejme aj pri spracovaní signálov [4]. Metóda sa stala populárnou, pretože výpočet koeficientov Fourierovej rady, spätná syntéza a násobenie je oveľa rýchlejšie než pri konvolúcii.

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.10)$$

Rovnica 2.10 je trigonometrický nekonečný rad známy aj ako Fourierov rad [6], ktorého jednotlivé koeficienty sú vypočítané pomocou rovníc 2.11 a 2.12.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n \in N_0 \quad (2.11)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, n \in N \quad (2.12)$$



Obrázek 2.2: Fourierova rada

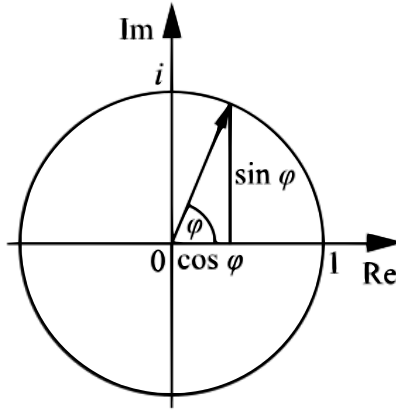
Častokrát je možné sa stretnúť s exponenciálnym vyjadrením Fourierovej rady. Keď vstúpi exponenciála do LTI systému, výstupom bude opäť exponenciála vynásobená nejakým komplexným číslom. Môže sa tak vyjadriť napr. ľubovoľná kosínusovka s ľubovoľnou fázou a amplitúdou [9]. Pre odvodenie sa využívajú Eulerove vzťahy pre sinus 2.14 a kosínus 2.13.

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (2.13)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (2.14)$$

Nech je daný vzorec pre obecnú kosínusovku 2.15. Po roznásobení a rozpísaní podľa Eulerovho vzorca odvodeného podľa obrázka 2.3 sa dá pozorovať, že určité časti sa menia v čase a iné nie. Tie, čo sa nemenia a teda nefigurujú pri nich čas sa nazývajú komplexné konštanty. V tomto prípade sú to koeficienty 2.16.

$$C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = \frac{C_1}{2} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + \frac{C_1}{2} e^{-j(\omega_1 t + \phi_1)} =$$



Obrázek 2.3: Odvodenie Eulerových rovníc

$$\frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 t} \quad (2.15)$$

$$c_1 = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1}$$

$$c_{-1} = \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} \quad (2.16)$$

Pri exponenciálnom vyjadrení rady býva hľadaný rozklad do tvaru sumy komplexných exponenciál, ako je popísané rovnicou 2.17, ktorú je možné rozpísať do tvaru 2.18. Vo vzorci sa dajú pozorovať vlastnosti, konkrétne že koeficienty 2.21 a 2.22 sú si navzájom komplexne združené, okrem nulového 2.20. Ten je združený sám so sebou [4].

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.17)$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) \quad (2.18)$$

Vo vzorci 2.18 je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ základná kruhová frekvencia a $e^{jk\omega_0 t}$ pre $k \in Z$ sú harmonicky vzťahované komplexné exponenciály. Jednotlivé koeficienty sa vypočítajú ako integrál cez periódu 2.19, je jedno ktorá je zvolená.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.19)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.20)$$

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k + jb_k), k \in N \quad (2.21)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - jb_k), k \in N \quad (2.22)$$

Vlastnosti koeficientov Fourierovej rady:

- c_k a c_{-k} sú komplexne združené - rovnaké absolútne hodnoty a opačné fázy
- c_0 je komplexne združený sám so sebou, je to rovnomerná zložka signálu

Koeficienty sa zakresľujú pomocou dvoch obrázkov, jeden vyjadruje modul a druhý argument. Miesta a hodnoty, kde sa vyskytujú koeficienty vo frekvenčnej oblasti sa nazývajú spektrum. Spektrum periodického signálu je čiarové - obsahuje len izolované zložky s frekvenciami, ktoré sú násobkami základnej frekvencie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Pokiaľ sa signál zúži, spektrum sa rozťahne a naopak.

Aby Fourierova rada konvergovala, musia platiť Dirichletove podmienky [13]:

1. signál $x(t)$ musí byť integrovateľný, to znamená $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ musí existovať
2. signál $x(t)$ a jeho transformácia $X_{FT}(f)$ sú jednodnotové, neexistujú 2 hodnoty v rovnakom čase alebo frekvencii
3. signál $x(t)$ musí byť obmedzene variabilný
4. signál $x(t)$ a jeho transformácia $X_{FT}(f)$ musia mať na každom konečnom intervale konečný počet nespojitostí

Doteraz bola reč o spojitých signáloch, pre diskrétnu existuje diskrétna Fourierova rada. Používa sa pri frekvenčnej analýze periodických signálov v diskrétnom čase. Podobne ako u spojitých signálov je vyjadrená sumou komplexných exponenciál na násobkoch základnej kruhovej frekvencie $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. Je možné vyjadriť ľubovoľný periodický signál s diskrétnym časom, ako opisuje rovnica 2.23. Koeficienty tejto rady nazývané aj spektrum diskrétno periodického signálu vypočítame pomocou vzťahu 2.24.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\{N\}} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.23)$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=\{N\}} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.24)$$

2.3 Fourierova transformácia

Zvukové signály sú reprezentované v časovej doméne. Tá však neobsahuje dostatočné množstvo informácií. Ďalšie informácie sa získajú pomocou analýzy signálu a to konkrétne transformovaním signálu do ine podoby. Všeobecne platí, že každá transformácia transformuje vstupný signál do novej reprezentácie, v ktorej je možné lepšie odhaliť a skúmať vlastnosti signálu. Matematicky popísané, transformácia T signálu $f(t)$ sa dá vyjadriť ako integrál násobenia tohto signálu s jadrom transformácie ψ . Inverzná transformácia je definovaná obdobne, ako integrál súčinu inverzného kernelu a transformácie T . Všeobecné vzťahy priamej a spätnej transformácie sú definované rovnicami 2.25 a 2.26 [5].

$$T(n) = \int f(t)\psi(t, n) dt \quad (2.25)$$

$$f(t) = \int T(n)\psi^{-1}(n, t) dn \quad (2.26)$$

Jednou z najznámejších transformácií je Fourierova transformácia, ktorej myšlienka a princíp je analogický s Fourierovou radou a je to vlastne jej rozšírenie pre neperiodické signály. Fourierova transformácia sa využíva v prípade, keď je potrebné zistiť, aké frekvenčné zložky obsahuje signál. Výsledkom je teda frekvenčná informácia - vieme určiť aké frekvencie sa v signále vyskytujú. Chýba však časová informácia - nedá sa určiť kedy sa daná frekvencia vyskytla [5]. Fourierova transformácia sa využíva hlavne pri spracovaní signálov, kedy transformuje signál z časovej oblasti do frekvenčnej. Opäť sa rozlišuje na spojité a diskrétnu transformáciu. Je to teda nástroj, ktorý rozloží signál na alternatívnu reprezentáciu, ktorá je vyjadrená sínusmi a kosínusmi. Je vhodná predovšetkým pre stacionárne signály. Na nestacionárne, neperiodické alebo signály so šumom je lepšie použiť metódy s lokálnou analýzou akými sú napr. krátkodobá Fourierova transformácia 2.3.3 alebo vlnková transformácia 2.4.2.

2.3.1 Spojitá Fourierova transformácia

Spojité transformácia (z angličtiny *Fourier transform*) transformuje signál so spojitým časom $x(t)$ na spektrálnu funkciu $X(j\omega)$. Signál nemusí byť periodický tak ako pri Fourierovej rade. Na rozdiel od koeficientov Fourierovej rady, spektrálna funkcia $X(j\omega)$ je naozaj funkcia definovaná pre všetky kruhové frekvencie ω a spojitá v každom čase. Vzťah popisujúci spojité Fourierovu transformáciu je vyjadrený rovnicou 2.27. $X(j\omega)$ sa nazýva aj obraz signálu $x(t)$ a má vlastnosť $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$. Pre reálne signály platí párna symetria $\Re X_k = \Re X_{N-k}$, nepárna v imaginárnych $\Im X_k = -\Im X_{N-k}$ [16].

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.27)$$

Aby Fourierova transformácia konvergovala, musia platiť tieto podmienky konvergenie [5]:

1. signál musí byť obmedzený konštantou $M < \infty$, $|x(t)| < M$ - signál nemusí mať konečnú energiu
2. signál môže obsahovať jednotkové impulzy - využíva sa pri vzorkovaní

Pre FT periodického signálu zapísaného pomocou Fourierovej rady sa môže napísať

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1) \quad (2.28)$$

Spätná Fourierova transformácia slúži na rekonštrukciu pôvodného signálu pomocou reverzného výpočtu.

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t} d\omega \quad (2.29)$$

2.3.2 Diskrétna Fourierova transformácia a FFT

Ďalším prípadom je Fourierova transformácia s diskrétnym časom (z angličtiny *discrete time Fourier transform*), ktorá sa využíva na spektrálnu analýzu diskrétnych signálov. Je to prakticky Fourierova transformácia aplikovaná na diskrétny rad komplexných čísiel. DTFT je vždy periodická, preto sa zvykne značiť $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a je popísaná vzťahom 2.30. Je to funkcia definovaná pre všetky ω , signál môže byť akýkoľvek [8]. Existuje iba jedna, ale je možné ju zobraziť s rôznymi frekvenčnými osami, napr. s normovanými alebo obyčajnými frekvenciami.

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.30)$$

Spätnou DTFT opäť získame pôvodný signál, a je definovaná vzťahom

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega})e^{+j\omega n} d\omega \quad (2.31)$$

Vo výpočetnej technike sa v skutočnosti počíta diskrétnu Fourierovu transformáciu (z anglického *discrete Fourier transform*). Pri diskrétnej Fourierovej rade mohol nastať problém, že sa mohol vyskytnúť nekonečne dlhý signál a teda pre výpočetné stroje s obmedzenými možnosťami neprekonateľný problém. Vstupný signál sa navzorkuje, určí sa veľkosť okna a nad týmito vzorkami sa uskutoční DFT. DFT transformuje sekvenciu pevnej dĺžky N na inú sekvenciu dĺžky N - pracuje sa už s obmedzeným množstvom dát [4]. Ďalší vývoj transformácie bola rýchla Fourierova transformácia, ktorá v súčasnosti patrí medzi najpoužívanejšie transformácie [4].

Priamy vzorec býva označovaný $x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$ a je popísaný rovnicou 2.32. Spätná transformácia sa značí $X[k] \xrightarrow{DFT^{-1}} x[n]$ a je definovaná 2.33.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.32)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.33)$$

Výpočet DFT podľa vzorca 2.32 vyžaduje N^2 operácií s komplexnými číslami. V roku 1965 Cooley a Tuckey vymysleli algoritmus, tzv. rýchla Fourierova transformácia (z anglického *fast Fourier transform*), výsledkom čoho bolo zredukovanie výpočetných operácií na $N \log N$. FFT je prakticky DFT, len iná, rýchlejšia a efektívnejšia implementácia, ktorej princíp je založený na symetrii a periodicite. Riadi sa heslom „rozdeľ a panuj”, kedy pôvodný signál s dĺžkou N rozdelí na 2 sekvencie s dĺžkou $N/2$ a uskutoční DFT. Tento krok sa rekurzívne opakuje. Matematicky sa to dá veľmi ľahko dokázať rozpísaním podľa vzorca, matematickými úpravami ako vyňatie spoločného násobiteľa či vykrátením exponentov [4]. Výsledok býva často reprezentovaný grafom motýľ.

2.3.3 Krátkodobá Fourierova transformácia

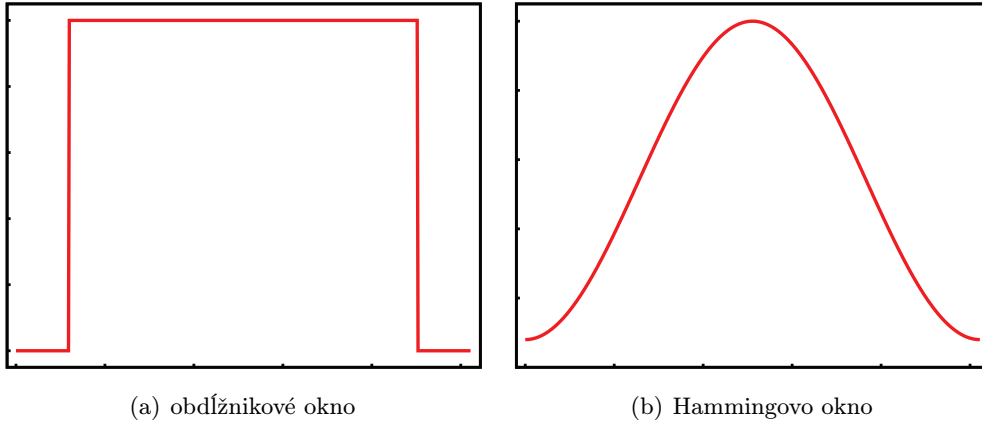
Krátkodobá Fourierova transformácia (z angličtiny *short time fourier transform*), patrí k lineárnej analýze nestacionárnych signálov. Na rozdiel od FT pomocou ktorej je získaný iba frekvenčný obsah, STFT je schopná tento nedostatok preklenúť a podať aj časovú informáciu.

Princíp transformácie spočíva v tom, že počíta FT nad vyseknutou časťou signálu, následne okno posúva po časovej osi až dovedy, kým neprejde po celom signále. Inými slovami, pôvodný signál je okienkovaný okienkovou funkciou určitej dĺžky centrovanej v čase τ . Výsledkom je časovo-frekvenčný obsah s konštantnou frekvenciou a fixnou veľkosťou okna [17]. Výsledky závisia predovšetkým od typu zvoleného okna, jeho veľkosti a posune po signále.

$$S f(u, \omega) = \langle f, g_{u, \omega} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - u)e^{-j\omega t} dt \quad (2.34)$$

Teraz prichádza vysvetlenie okna a okienkovania, ktoré bolo vyššie spomenuté. V počítači sa pracuje s obmedzenou veľkosťou pamäti, preto sa zaviedlo tzv. okienkovanie (z angličtiny *windowing*). Pomocou neho sa diskretný signál rozdelí na menšie úseky a nad nimi sa uskutoční výpočet [5]. Okná sú rôzne, delia sa podľa dĺžky prípadne váhy, napr. Gaussovo, Hammingovo alebo obdĺžnikové okno. Niektoré typy okien sú znázornené na obrázku 2.4. Matematicky povedané, okno je vlastne funkcia, ktorá má hodnoty v určitom intervale a inde je nulová. Pre výpočty sú vhodnejšie okná so zvonovitým tvarom, pretože dosahujú väčších presností pri určení frekvencie. Pre porovnanie, obdĺžnikové okno definované vzťahom 2.35, pri nespojitosti na prechodoch spôsobuje veľké skreslenie pri násobení.

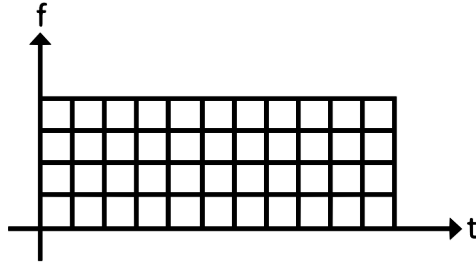
$$\omega(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |t| \leq \lambda/2 \\ 0 & \text{pre } |t| > \lambda/2 \end{cases} \quad (2.35)$$



Obrázek 2.4: Typy okien

Z hľadiska presnosti výpočtu je možné uberať sa dvoma smermi, a to so zameraním na dobré frekvenčné rozlíšenie alebo dobré časové rozlíšenie. To sa docieli zmenou veľkosti okna a prekryvom okien. Nie je možné dosiahnuť oboje. Tento fakt je známy ako Heisenbergov princíp neurčitosti [5]. Pokiaľ sa zvolí malá veľkosť okna, dosiahne sa dobré časové rozlíšenie ale frekvencie nie sú správne identifikované. Naopak, pri väčšej veľkosti okna sa detekuje dobré frekvenčné rozlíšenie, ale naopak sa stráca časová informácia. Pomocou STFT nie

je možné dosiahnuť oboje, preto je dôležité zvoliť si takú veľkosť okna, aby výsledky vyhovovali ako aj frekvenčným, tak aj časovým požiadavkam [17]. Obdobne je to pri voľbe prekryvu. Čím väčší prekryv sa zvolí, tým sú výsledky precíznejšie a pre analýzu zvukového signálu vhodnejšie. Treba však brať v úvahu aj to, že čím väčší prekryv, tým sa viac spotrebuje výpočetných zdrojov a pamäti. Medzi základné vlastnosti STFT teda patrí pevná veľkosť okna po celú dobu transformácie. Tým je dosiahnuté že Δt a Δf sú konštanty, a časovo-frekvenčná rovina je rozdelená ako je vidieť na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Časovo-frekvenčná rovina s konštantným rozdelením

Pokiaľ signál obsahuje nízke frekvencie ktoré väčšinou trvajú dlhšiu dobu, je dôležité klásť dôraz na dobré frekvenčné rozlíšenie. Naopak vysoké frekvencie trvajú krátku dobu, preto je vhodné zamerať sa na časovú presnosť. Vlastnosti STFT a hlavne nepresné výsledky aj pri kompromisnom zvolení veľkosti okna viedli k vlnkovej transformácii, ktorá bude vysvetlená v 2.4.

2.3.4 Gáborova transformácia

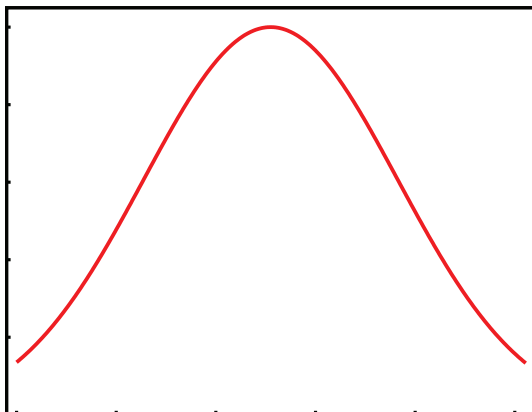
Špeciálnym prípadom STFT je Gáborova transformácia (z angličtiny *Gabor transform*) nazvaná podľa Dennisa Gabora, ktorá sa využíva hlavne na analýzu zvuku. Je to obdoba STFT, ktorá využíva Gaussovo okno znázornené na obrázku 2.6. GT môže byť interpretovaná ako zovšeobecnenie Fourierovho prístupu s optimalizovanými vlastnosťami pre výpočet. Výpočetný kernel tvorí už spomínané Gaussovo okno, ktoré je posúvané a modulované po signále. Gaussovo okno má počas celého výpočtu stabilnú veľkosť. Reálne a symetrické okno $g(t) = g(-t)$ je posúvané parametrom u a modulované frekvenciou ω

$$g_{u,\omega}(t) = e^{j\omega t} g(t - u) \quad (2.36)$$

V jednorozmernom prípade, Gáborova funkcia pozostáva z komplexnej exponenciály lokalizovanej okolo $x = 0$ obalenou Gaussovým oknom

$$g_{\alpha,\omega} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} e^{-j\omega x} \quad (2.37)$$

pre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a $\omega, x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha = (2\sigma^2)^{-1}$, σ^2 je rozptyl a ω je frekvencia [1]. Zvolené Gaussovo okno je najlepším oknom na časovo-frekvenčnú lokalizáciu z hľadiska Heisenbergovho princípu neurčitosti.



Obrázek 2.6: Gaussovo okno

Gáborova transformácia v $L^2(\mathbb{R})$ je definovaná [12]

$$G_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-b)e^{j\omega(x-b)} dx \quad (2.38)$$

kde $g(x)$ je okienková funkcia. Časovo-frekvenčný atóm sa môže teda vyjadriť ako

$$g_{(b,\omega)}(x) = g(x-b)e^{j\omega(x-b)} \quad (2.39)$$

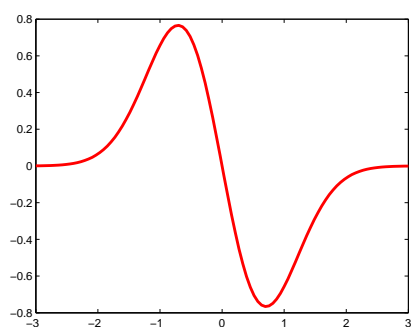
2.4 Vlnková transformácia

Vlnková transformácia (z anglického *wavelet transform*) má veľmi veľa spoločného s Fourierovou transformáciou. Je to alternatívna metóda spracovania signálov. Vlnka ako možný nástroj transformácie bola prvýkrát spomenutá Alfredom Haarom v roku 1909 [17]. Neskôr bolo objavené, že signál sa dá rozložiť na vlnkové koeficienty a pomocou nich sa dá zrekonštruovať pôvodný signál. Vlnkové bázy podobne ako pri Fourierových odhalujú vlastnosti signálu cez magnitúdu a koeficienty. Opäť sa rozdeľuje na spojitú alebo diskretnú transformáciu, no v tomto texte bude rozobratá iba spojitá transformácia. Princípom je rozpoznávanie podobných štruktúr[5]. Vlnková transformácia sa stala zaujímavou alternatívou Fourierovej transformácie v mnohých oblastiach a počet aplikácií a využitia tejto metódy rapídne narastá.

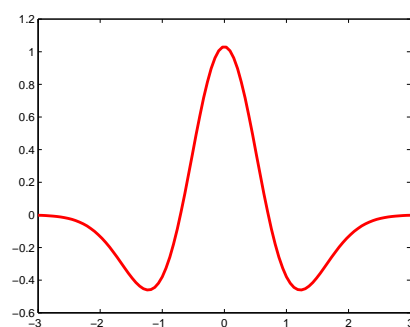
2.4.1 Vlnka a jej vlastnosti

Ako sám názov transformácie napovedá, dôležitým prvkom je samotná vlnka. Vlnka tvorí jadro a podstatu celej transformácie. Vlnková funkcia je malá vlnka, ktorá má kmitavý charakter a spĺňa určité kritériá. Vlnka je definovaná vlnkovou funkciou $\Psi(t)$ a funkciou mierky $\Phi(t)$. Stále platí, že čas ide proti frekvencii, to znamená ak sa chce pokryť dvojnásobok časovej domény, musí sa obetovať polovica šírky pásma vo frekvenčnej doméne. Na obrázku 2.7 je možné vidieť príklady niekoľkých vlniek. V skutočnosti ich existuje veľké množstvo, bývajú aj vlnky špecializované pre konkrétne aplikácie.

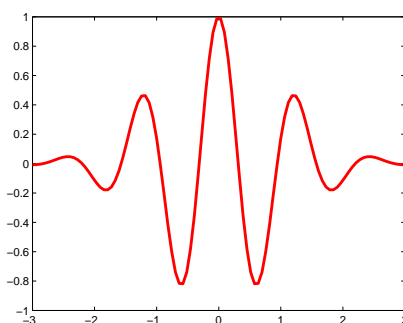
Na to aby sa vlnková funkcia mohla považovať za vlnku musia platiť nasledovné matematické podmienky [5]



(a) prvá derivácia Gaussovej vlnky



(b) Mexický klobúk



(c) Morletova vlnka

Obrázek 2.7: Niektoré typy vlniek

1. Vlnka musí mať konečnú energiu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (2.40)$$

2. Pokiaľ $\Psi(f)$ je Fourierova transformácia vlnky $\psi(t)$, musí platiť nasledovné

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty \quad (2.41)$$

Táto podmienka implikuje, že priemer musí byť nulový 2.42 a $\hat{\psi}$ nemá jednosmernú zložku 2.43, tým pádom aj hodnota C_ψ je závislá od zvolenej vlnky. C_ψ je známa ako konštanta prístupnosti.

3. Pre komplexnú vlnku musí byť Fourierova transformácia pre záporné frekvencie súčasne reálna a nulová

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.42)$$

$$\hat{\psi}(0) = 0 \quad (2.43)$$

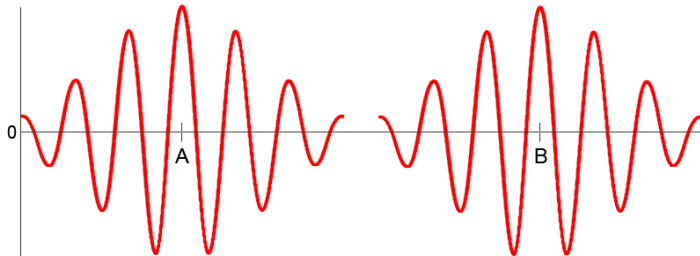
Vlastnosti vlnky sú popísané predovšetkým jej energetickým spektrom. Pri konvolúcii so signálom vlnka prepúšťa iba frekvencie v rámci nejakého intervalu - pásma, preto je nazývaná ako pásmový filter [14]. Pri transformácii sa budú vykonávať s vlnkou dve operácie, a to posun vlnky a jej škálovanie. Vlnku, s ktorou sa takto manipuluje sa nazýva materská vlnka, a od nej odvodené vlnky sú dcérske. Posun je vyjadrený parametrom u , rozšírenie parametrom s . Množinu takýchto vlniek je možné popísať vzťahom [5]

$$\mathcal{D} = \left\{ \psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right\}_{u \in \mathbb{R}, s > 0} \quad (2.44)$$

2.4.2 Spojitá vlnková transformácia

Spojité vlnková transformácia (z anglického *continuous wavelet transform*) je počítaná podobne ako FT, teda ako konvolúcia signálu a funkcie. Trigonometrické funkcie sú však nahradené vlnkou. Časová informácia je potom získaná posunom - transláciou vlnky po signále, znázornené na obrázku 2.8 [14]. Frekvenčná informácia sa získa škálovaním - stlačením a roztiahnutím vlnkovej funkcie. Škálovanie je ukázané na obrázku 2.9 [14]. Obor hodnôt parametru posunu a škály tvorí dvojrozmerný priestor, ktorý predstavuje doménu funkcie vlnkovej transformácie. Výsledkom CWT je časovo-frekvenčná informácia, globálne presnejšia s porovnaním STFT. Spojitá vlnková transformácia je definovaná rovnicou 2.45, kde \star značí komplexnú združenosť [15]. Môže sa parafrázovať ako integrál súčinu signálu a parametrizovanej vlnky cez celé trvanie signálu. Vlnkovú transformáciu je možné chápať ako cross-koreláciu signálu s vlnkami rôznych hodnôt parametru a dilatácie.

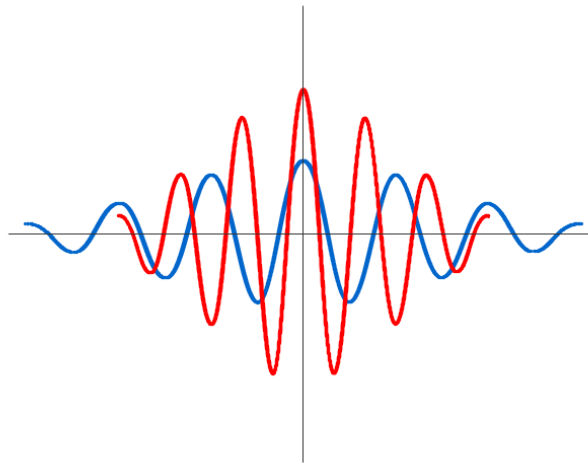
$$W f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (2.45)$$



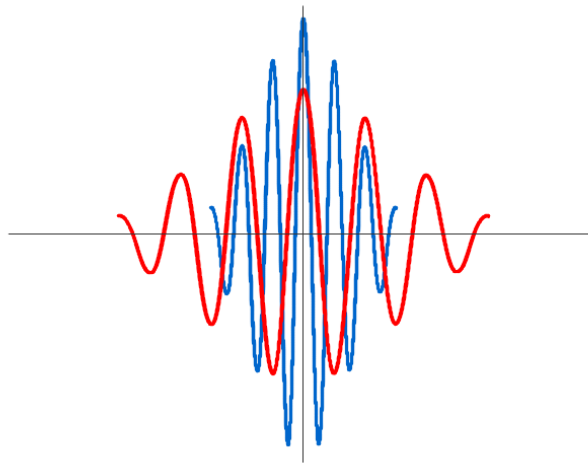
Obrázek 2.8: Translácia vlnky v čase

Podobnosť s STFT je myslená posúvaním vlnky po signále, v čom sa však líši je že veľkosť okna sa mení, a kvôli zachovaniu energie sa mení aj samotná vlnka. STFT je prakticky vlnková transformácia s nemennou veľkosťou okna. Na rozdiel od FT, má schopnosť reprezentovať signál s dobrou časovo-frekvenčnou lokalizáciou [5].

CWT využíva prístup nazývaný analýza s viacnásobným rozlíšením (z angličtiny *multiresolution analysis*). Znamená to, že signál je možné analyzovať na rôznych frekvenciách s rôznym rozlíšením. Inými slovami je to princíp vlnkovej transformácie. Zmena rozlíšenia v časovo-frekvenčnej rovine je na obrázku 2.12. Z obrázku plynie predpoklad, že nízke frekvencie trvajú celú dĺžku signálu, zatiaľ čo vysoké frekvencie trvajú len krátky okamih. Takýto prístup sa dnes bežne používa v reálnych aplikáciách [5].



(a) Dilatácia materskej vlnky



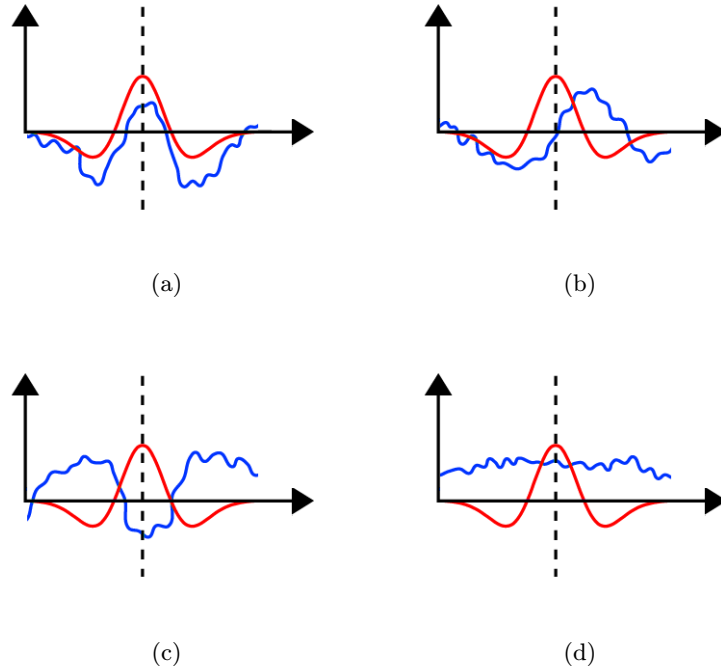
(b) Kontrakcia materskej vlnky

Obrázek 2.9: Škálovanie materskej vlnky

Ako bolo vyššie popísané, princípom transformácie je korelácia signálu a vlnkovej funkcie $\psi(t)$. Podobnosť signálu s vlnkovou funkciou je počítaná samostatne pre rozdielne časové úseky, výsledkom čoho je dvojrozmerná reprezentácia. Teraz sa zamerám na výklad výpočtu jedného bodu roviny, matematicky povedané integrálna transformácia skalárneho súčinu. Prechody signálu a vlnky nulou určujú neutrálny, negatívny alebo pozitívny príspevok. Oblasti kde vlnka aj signál majú zhodnú polaritu prispievajú kladne, pri opačnej polarite záporne. Nulový priebeh signálu alebo vlnky má za následok nulový prírastok [14].

Nech sú vlnka a signál veľmi podobné tvarovo aj prechodmi cez nulu tak ako je zobrazené na obrázku 2.10(a). Dostávame vysokú hodnotu vlnkovej transformácie v danom bode, pretože podobnosť je veľmi veľká. V druhom prípade 2.10(b) vlnka mierne predbieha signál, nie sú vo fáze. Pozitívne a negatívne príspevky sa vzájomne zrušia, čo má za následok nulový súčin. Obrázok 2.10(c) znázorňuje signál a vlnku v opačnej fáze, takže dostávame vysokú negatívnu hodnotu. V poslednom obrázku 2.10(d) je signál prakticky konštantný len s

malými výkyvmi a preto dostávame hodnotu blízku nule. Posúvaním vlnky po signále týmto spôsobom lokalizujeme frekvenciu v danom čase. Spojitá vlnková transformácia prebieha v nekonečne malých krokoch, čo je z hľadiska výpočetnej techniky nerealizovateľné. Pre implementáciu v počítači je preto nutné zvoliť dostatočnú presnosť, aby sme chyby mohli zanedbať.



Obrázek 2.10: Rozpoznávanie podobných štruktúr pri rôznych vzájomných polohách

V implementačnej časti používam Morletovu vlnku [3]. Je to vlnka pozostávajúca z komplexnej exponenciály násobená Gaussovým oknom. Jej definičný vzťah je nasledovný

$$g_{\alpha,\omega,a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha\omega} \left(\frac{x-b}{a} \right) \quad (2.46)$$

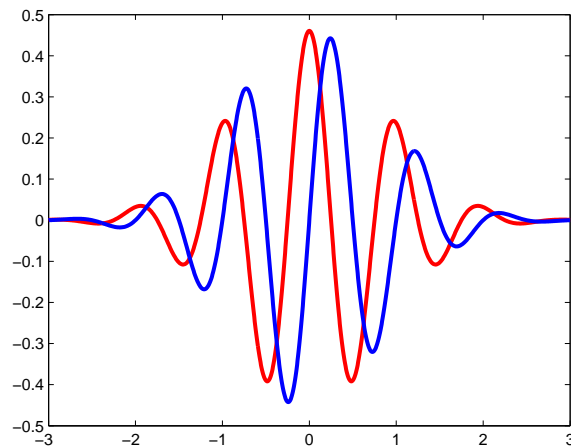
pre $a \in \mathbb{R}^+$ čo značí parameter škály a parameter posunu $b \in \mathbb{R}$. Platí konvencia, že materská vlnka je lokalizovaná okolo $x = 0$ a vlnka je normalizovaná $\|g\| = 1$. Je zobrazená na obrázku 2.11.

Komplexná Morletova vlnka je definovaná vzťahom 2.47 a závisí na dvoch parametroch. Hodnota f_b je parametrom okna a hodnota f_c znázorňuje frekvenciu vlnky. Bežne sa používajú hodnoty $f_b = 1.5$, $f_c = 1$ [7].

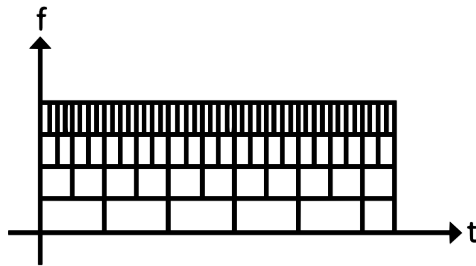
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2j\pi f_c x} e^{-\frac{x^2}{f_b}} \quad (2.47)$$

Spätná transformácia (z anglického *inverse continuous wavelet transform*) je vyjadrená vzťahom 2.48. Služi na spätnú rekonštrukciu pôvodného signálu pomocou vlnky použitej pri analýze signálu.

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_W(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) d\tau ds \quad (2.48)$$



Obrázek 2.11: Morletova vlnka - komplexné zobrazenie



Obrázek 2.12: Časovo-frekvenčná rovina s meniacim rozdelením

2.5 Rozklad signálu do časovo-frekvenčnej roviny

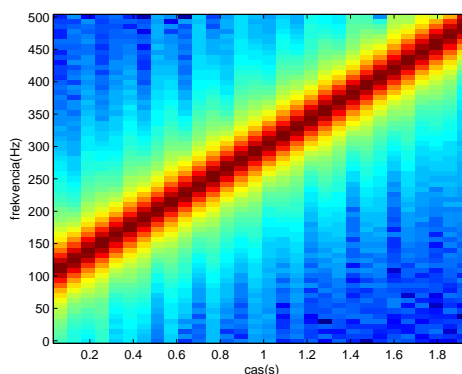
Reprezentácia signálu v časovej oblasti $x(t)$ je zvyčajne prvým a najprirodzenejším popisom signálu, pretože väčšina signálov je zaznamenávaná prijímačmi registrujúcimi variácie danej veličiny v závislosti od času. Každý signál môže byť znázornený v časovo-frekvenčnej rovine, ktorá charakterizuje rozdelenie energie signálu v čase a v frekvencii. Rozlíšenie v čase a frekvencii pre daný signál a jeho Fourierovu transformáciu je dané časovo-frekvenčným oknom. Toto okno popisuje, aké drobné detaily je možné zachytiť a sledovať. Výsledkom Fourierovej transformácie je tzv. spektrogram, ktorý vizuálne zobrazuje signál [5]. Je to rovina kde horizontálnu os tvorí čas a vertikálnu frekvencia. Spektrogram získame vypočítaním druhej mocniny magnitúdy. Na obrázku 2.13 je znázornený spektrogram signálu s lineárne narastajúcou frekvenciou s použitím okna o veľkosti 128 vzorkov získaný pomocou Matlabu.

Obdobne, pre vlnkovú transformáciu je charakteristické zobrazenie škálogram, ktoré je podobné spektrogramu.

Existuje mnoho spôsobov, ako možno signálu priradiť časovo-frekvenčnú reprezentáciu. Princiálne je ich možno rozdeliť do dvoch kategórii:

- atomické dekompozície
- energetické distribúcie

Atomické dekompozície umožňujú rozložiť signál na jeho elementárne časti, tzv. časovo-frekvenčné atómy, ktoré pri lineárnom rozklade tvoria bázy. TF reprezentácia je daná sústavou koeficientov, z ktorých každý je viazaný s jedným atómom. Energetické distribúcie umožňujú priamo získať distribúciu energie v časovo-frekvenčnej rovine. Distribúcie to umožňujú vďaka kvadratickému charakteru. Príkladom je Wignerova distribúcia [5].



Obrázek 2.13: Spektrogram signálu s rastúcou frekvenciou

2.6 Aplikácie časovo-frekvenčnej analýzy

Vďaka časovo-frekvenčnej analýze vznikol nemalý počet aplikácií, ktoré sú bežnou súčasťou života. Obe spomínané transformácie sa využívajú pri spracovaní zvuku a obrázkov, čo je prakticky základ multimédií. Mnohé princípy sa využívajú ale aj v biomedicíne, armáde alebo komunikácii.

Medzi bežné aplikácie patrí rôzne filtrovanie na základe frekvencií či prahov, odhad okamžitej frekvencie, fázový vokodér alebo rozpoznávanie reči.

Fázový vokodér je populárna aplikácia, ktorá využíva princípy priamej a inverznej STFT. Názov pochádza z anglickej skratky *Voice Coder* a pôvodne bol určený na kódovanie reči. Jej činnosť spočíva v spracovaní zvukových signálov, pričom mení dĺžku nahrávky ale zachováva výškové hladiny tónov a opačne, taktiež je možné meniť obsah spektra audiosignálov. Ako prvé sa vstupný signál zanalyzuje pomocou DFT. Nasleduje spracovanie signálu, ktorý sa moduluje a posledným krokom je spätná syntéza.

Ďalšou aplikáciou je odhad okamžitej frekvencie, ktorá sa využíva v radaroch, spracovaní reči alebo signálov a inde. Ako prvé je potrebné signál spracovať pomocou zvolenej transformácie. Transformovaním signálu sa odhalia skryté vlastnosti signálu. Jednotlivá transformácia obsahuje hodnoty, z ktorých je potrebné nájsť maximum. Jednou z variánt je vypočítať si gradient, a sledovať jeho deriváciu v čase. Pokiaľ je kladná, hrebeň stále stúpa.

Pokiaľ sa stane zápornou, detekovali sme maximum. Pomocou neho je možné vypočítať okamžitú frekvenciu.

Predpokladajme že $a(t)$ a $\theta(t)$ majú malé zmeny na intervaloch veľkosti s a $\theta'(t) \geq \Delta\omega/s$ tak, že nápravny člen $\epsilon(u, \omega)$ môžeme zanedbať. Nech $|\hat{g}(\omega)|$ je maximum $\omega = 0$, značí že pre každé u spektrogramu $|Sf(u, \omega)|^2 = |\langle f, g_{s,u,\omega} \rangle|^2$ je maximum na $\omega(u) = \theta'(u)$. Zodpovedajúce body $(u, \omega(u))$ v časovo-frekvenčnej rovine sa nazývajú hrebene. Frekvencia v hrebeni udáva okamžitú frekvenciu $\omega(u) = \theta'(u)$ a amplitúda je počítaná ako [5]

$$a(u) = \frac{2|Sf(u, \omega(u))|}{\sqrt{s}|\hat{g}(0)|} \quad (2.49)$$

Iná metóda spočíva v nájdení lokálnych maxim, ktorá je rozobratá v impelentačnej časti.

2.7 Porovnanie Fourierovej a vlnkovej transformácie

Po podrobnom výklade pricipov a fungovania oboch typov transformácií sa určite hodí ich porovnanie. Obe transformácie slúžia na rozklad signálu, aby bola možná jeho analýza a využívajú sa pri spracovaní zvuku. Transformácie podávajú informácie nielen o frekvenčných zložkách, ale aj ich časovej lokalizácii. Obidve transformácie fungujú na princípe násobenia jadra transformácie so signálom.

V prípade STFT je jadro tvorené okienkovou funkciou, v prípade CWT tvorí kernel materská vlnka. Za okienkovú funkciu môže byť zvolené ľubovoľné okno, v závislosti od výslednej aplikácie. Pokiaľ sa uvažuje Gáborova transformácia ako špeciálny typ STFT, oknom sa uvažuje Gaussova funkcia.

V rámci spojitej vlnkovej transformácie môže byť materská vlnka tiež špecifická od výslednej aplikácie, v mnohých prípadoch sa však využíva komplexná Morletova vlnka.

Čo sa samotnej transformácie týka, principiálne sú rovnaké. STFT používa počas celej doby transformácie pevnú veľkosť okna, okno posúva po signále a moduluje frekvenciu v rámci okienkovej funkcie. Okienkom sa vysekne časť vstupného signálu a nad ním sa počíta Fourierova transformácia. V dôsledku fixnej dĺžky okna, nie je možné správne detekovať aj vysoké aj nízke frekvencie. Tento jav sa nazýva Heisenbergov princíp neurčitosti. Časovo-frekvenčná rovina je zobrazená na obrázku 2.5.

Tieto nedostatky viedli k vytvoreniu vlnkovej transformácie, ktorá pri transformácii využíva meniacu dĺžku materskej vlnky. Materská vlnka je tak nielen modulovaná po signále, ale aj škálovaná. Škálovaním sa rozumie dilatácia a kontrakcia materskej vlnky a normovanie, aby energia vlnky ostala nemenná. Novovzniknuté vlnky nazývame dcérske. Takto uskutočnená transformácia dosahuje presnejšie výsledky ako STFT, práve vďaka meniacej sa veľkosti okna. Jej časovo-frekvenčná rovina je zobrazená na obrázku 2.12.

Zobrazením výsledkov Fourierovej transformácie je spektrogram. Pri vlnkovej transformácii sa toto zobrazenie nazýva škálogram.

Pre analýzu reálnych signálov je vhodnejšie využiť vlnkovú transformáciu, pretože vďaka premenlivej veľkosti okna je schopná detekovať nízke aj vysoké frekvencie v signále.

Kapitola 3

Implementácia

Súčasťou tejto práce je aj zdrojový kód jednoduchej aplikácie, ktorá určí frekvenciu v čase. Táto kapitola podrobne popíše postup akým som postupoval, jednotlivé problémy na ktoré som narazil a ich riešenie. Moja aplikácia je princípom systém, na ktorého vstup privediem diskretný zvukový signál v podobe wav súboru. Výsledkom je transformovaný signál, z ktorého určím výslednú frekvenciu. V programe využívam knižnice `libsndfile` a `fftw3`, ktoré je potrebné mať nainštalované pre správny chod aplikácie. Aplikácia bolá napísaná v jazyku C z vyvíjaná pod operačným systémom Linux.

3.1 Rozbor práce

Tak ako pri každej implementácii, je potrebné celkový problém rozložiť na jednotlivé podproblémy a tie postupne implementovať. Podproblémy môžem rozdeliť:

- spracovanie parametrov príkazovej riadky
- načítanie vstupného súboru do pamäte
- vykonanie zvolenej transformácie
- výpočet frekvencie v čase
- zobrazenie výsledkov

3.2 Spracovanie wav súboru a dataset signálov

Po spracovaní parametrov príkazovej riadky je potrebné načítať wav súbor do pamäte. To uskutočním pomocou knižnice `libsndfile`. Knižnica `libsndfile` je navrhnutá tak, aby bolo umožnené čítanie a zápis rôznych zvukových formátov cez jedno štandardné rozhranie. Spolu s dátami signálu získam pomocou knižnice aj základné informácie o signále, ako napr. dĺžka, počet vzorkov či vzorkovacia frekvencia. V mojej práci sú vstupné signály vo formáte wav. Konkrétne spracovávam jednokanálové signály s kódovaním 16 bitov. Vzorkovacia frekvencia môže byť rôzna. Pomocou funkcie `sf_readf_float` si uložíť hodnoty wav súboru do pola typu float.

Jednotlivé testovacie signály som si vygeneroval v programe Matlab. V datasete som sa pre jednoduchosť zameril na špecifické prípady signálov, aby bolo možné vidieť rozdiely

medzi nimi. Konkrétne je to signál s konštantnou frekvenciou, s frekvenciou ktorá sa skokom zdvojnásobí, s lineárne a exponenciálne rastúcou frekvenciou a nakoniec signál s dvoma frekvenciami. Uložený signál je možné pre kontrolu vykresliť v programe Gnuplot, tak ako je ukázané na obrázkoch 3.3 kde sú úseky jednotlivých signálov. Veľkosť pola, ktorom je signál uložený závisí od stupného signálu, jeho dĺžky a vzorkovacej frekvencie.

Pred samotným výpočtom je potrebné riešiť hraničné situácie. Signál upravím tak, že na začiatok a koniec pridám rad núl. Ich počet sa líši od použitia veľkosti okna. Tento krok som vykonal preto, aby okno bolo centrovane voči signálu, tzn. začínalo v čase 0.

Keď mám vstupný signál uložený a pripravený v pamäti, podľa zvoleného parametru môžem uskutočniť vybranú transformáciu. V mojej aplikácii implementujem konkrétne krátkodobú Fourierovu transformáciu a vlnkovú transformáciu. Výsledkom oboch transformácií je získaná frekvencia a zobrazenie časovo-frekvenčnej roviny.

3.2.1 Výpočet krátkodobej Fourierovej transformácie

Krátkodobú Fourierovu transformáciu som implementoval dvomi spôsobmi - pomocou skalárneho súčinu a pomocou knižnice `fftw3`.

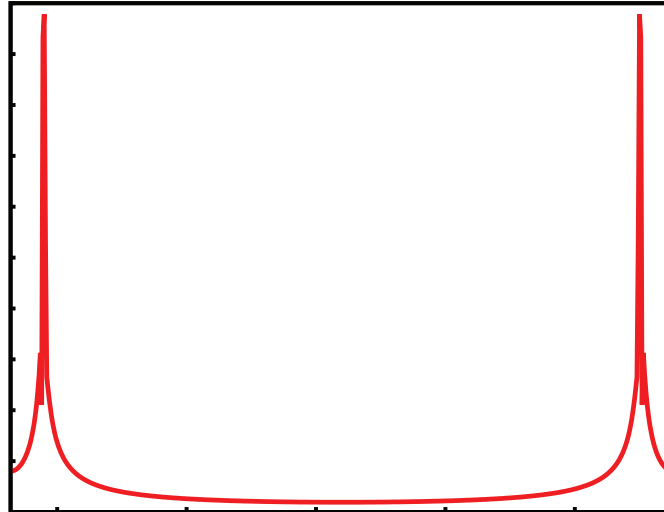
Prvý spôsob implementácie je za pomoci knižnice `fftw3`. Ako okienková funkcia mi slúži Gaussovo okno. Princíp transformácie spočíva v tom, že okno posúvam po signále až kým neprejdem celý signál.

Teraz popíšem jeden krok výpočtu. Okno získava hodnoty súčinu Gaussovej krivky a signálu, a tie pošlem do funkcie `fftw_execute`. Dotyčná funkcia pomocou funkcie `fftw_plan_dft_1d` uskutoční diskretnú Fourierovu transformáciu. Získavam tak rad komplexných čísel. Z neho je potrebné vypočítať magnitúdu ako

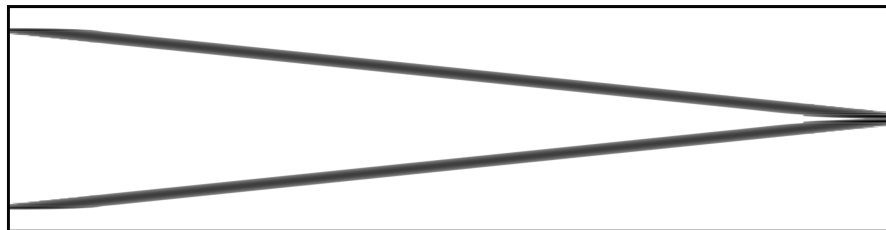
$$vysl.magn = \sqrt{vysl.real^2 + vysl.imag^2} \quad (3.1)$$

Magnitúdu, tentokrát už rad reálnych čísel, je opäť možné vykresliť v Gnuplote. Dostanem tak vizuálny výsledok 1 transformácie ako je znázornené na obrázku 3.1. Dáta transformácie si uloží do pamäte. Pred ďalším krokom posunem okno o parametrom zadaný posun a kroky opakujem. Na konci cyklu mám uložené v pamäti množstvo dát, pri veľkej vzorkovacej frekvencii sú to rádovo Gigabyty. Pri pozorovaní transformácie znázornenej 3.1 som natrafil na fakt, že knižnica počíta roviny symetricky okolo Nyquistovej frekvencie, preto nie je nutné ukladať celý výsledok transformácie ale len polovicu. Na obrázku 3.2 je ako dôkaz celá časovo-frekvenčná rovina aj so symetrickým signálom. Polovičným spracovaním ušetrim pamäťové aj výpočetné nároky a pomocou knižnice je výpočet transformácie vykonaný za pár sekúnd, v závislosti od vstupného signálu a veľkosti okna. Knižnica však počíta iba diskretné hodnoty frekvencií.

Druhý spôsob implementácie je pomocou skalárneho súčinu, ktorá vychádza z definície transformácie. Ako okienková funkcia slúži opäť Gaussovo okno a pomocou nej okienkujem signál. Vynásobením Gaussovho okna a signálu získam vyseknutú časť signálu. Ďalšou potrebnou časťou transformácie je komplexná exponenciála. Tú som implementoval pomocou funkcií sínus a kosínus, tak ako ich definuje Eulerov vzťah. Pre každý jednotlivý riadok má komplexná exponenciála inú frekvenciu. Tú zvyšujem postupne od 0 až po π , resp. po polovicu vzorkovacej frekvencie. Takže v prvom kroku počítam s frekvenciou 0, v druhom



Obrázek 3.1: Logaritmicke vykreslené magnitudy 1 transformácie



Obrázek 3.2: Časovo-frekvenčná rovina signálu s lineárne narastajúcou frekvenciou

1 atď. Výsledkom skalárneho súčinu okna a komplexnej exponenciály získam 1 číslo a následne okno posuniem po signále. Túto činnosť opakujem až kým neprejdem celý signál. Získam tak hodnoty jedného riadka s jednou frekvenciou. Frekvenciu zvýšim a opísané kroky opakujem. Výstup je teda odlišný, získavam 1 riadok transformácie. Taktiež som musel vo výpočtoch použiť aritmetiku s komplexnými číslami.

Nech $x=a+bi$ a $y=c+di$. Číslo $z=x*y$ získam ako

$$z = (a + bi) * (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \quad (3.2)$$

V mojom prípade vstupný signál má vždy nulovú imaginárnu zložku, preto je výpočet možné zjednodušiť na

$$z = (a + bi) * (c + di) = ac + bci \quad (3.3)$$

Pri oboch spôsoboch dosahujem podobné výsledky, takže som prakticky dokázal eliminovať knižnicu. Výsledkom oboch transformácií je teda časovo-frekvenčná rovina, výsledky pred vykreslením je potrebné normalizovať prípadne preusporiadať. Metóda pomocou skalárneho súčinu je však vďaka násobeniu komplexných čísel a v každom riadku vytváraní komplexnej exponenciály výpočetne náročnejšia a o to pomalšia. Knižnica je pre tieto výpočty už optimalizovaná.

Na obrázku 3.1 a tiež na 3.2 môžeme pozorovať, že výsledky sú symetrické a že nie je potreba brať v zreteľ celé okno, ale postačí nám jeho polovičná veľkosť. Tento jav je zapríčinený tým, že výsledky Fourierovej transformácie sú zrkadlovo zobrazené okolo Nyquistovej frekvencie.

3.2.2 Výpočet vlnkovej transformácie

Ako ďalšiu transformáciu som implementoval vlnkovú transformáciu. Tá má základný princíp zhodný s krátkodobou Fourierovou transformáciou opísanou vyššie. Ako sám názov napovedá, základom je vlnka. Materskú vlnku vytvorím ako súčin Gaussovho okna a komplexnej exponenciály o zvolenej veľkosti a frekvencii. Dostanem tak vlnku, ktorá sa nazýva Morletova vlnka. Vstupný signál doplním nulami tak, aby bol vycentrovaný oproti materskej vlnke. Nasleduje cyklus prakticky zhodný s STFT, až na to že nezvyšujem frekvenciu ale rozťahujem okno. Tým, že rozťahujem vlnku, je potrebné ju aj škálovať kvôli zachovaniu energie.

Opäť vykonávam skalárny súčin vlnky a signálu, získam 1 číslo a vlnku posúvam po signále až kým ho celý neprejde. Získam tak jeden riadok roviny.

Nasleduje rozťahnutie okna, jeho veľkosť sa zväčší a nastáva škálovanie materskej vlnky. Jej frekvenciu vypočítam ako frekvenciu materskej vlnky delenou merítkom

$$f = f_c/a \quad (3.4)$$

Výsledky všetkých transformácií po usporiadaní môžem vykresliť pomocou knižnice `opencv`, a dostanem tak vizuálnu podobu časovo-frekvenčnej roviny. Tá slúži na kontrolu správnosti výsledkov, rovnako je tak možné sledovať priebeh signálu v čase, ako sa jeho frekvencia mení.

3.2.3 Detekcia hrebeňov a výpočet frekvencie

Ako bolo spomenuté vyššie, vstupný signál uloží do pola, pole spracujem pomocou zvolenej transformácie a získam tak transformovaný signál. To však neurčí jeho frekvenciu. Tú musím vypočítať na základe zvoleného času. Odporoval som, že pozícia maxima v transformácii súvisí s frekvenciou. Najprv je však potrebné nájsť tú správnu transformáciu. V poli mám uložené transformácie za sebou, po zadaní času viem presne ktorú transformáciu potrebujem.

Pre ilustráciu, nech má vstupný signál dĺžku 2 sekundy a vzorkovaciu frekvenciu 1000 vzorkov za sekundu. Celý signál tak pozostáva z 2000 vzorkov, čo je aj počet transformácií pri posune 1. Pri posune 2 by bol počet transformácií polovičný, teda 1000. Zvolím si čas zistenia frekvencie na 1 sekundu. Potrebujem sa teda dostať k tisícej transformácií. Nech je zvolená veľkosť okna 512 (bez Nyquistovej symetrie je veľkosť polovičná). Z pola transformácií si uloží práve tisíc transformácií, ktorá sa nachádza na pozícii $256 \cdot (1000-1) = 255744$. Do pomocného pola si uloží hodnoty vybranej transformácie. Tú si pre kontrolu môžem vykresliť.

Je vidno, že hodnoty transformácie stúpajú, na určitej pozícii dosiahnu maximum a potom klesajú. Práve pozícia maxima určuje frekvenciu v danej transformácii, teda v danom čase. Frekvenciu získam ako

$$f = \frac{\text{pozicia_maxima}}{\text{velkost_okna}} * \text{vzorkovacia_frekvencia} \quad (3.5)$$

To je v skratke princíp výpočtu frekvencie. Teraz ostáva otázkou, ako vyššie spomenuté maximum lokalizujem. Jedna z natívnych metód je hľadať maximum v rámci celej transformácie. Áno, toto riešenie správne lokalizuje polohu maxima, ale nájde vždy iba jedno. V prípade, že signál obsahuje viacej frekvencií ako 1, čo je bežný prípad, táto metóda zlyháva. Preto som volil postup hľadania lokálneho maxima. Vytvorím si akoby malé okienko o pevnej veľkosti, ním prechádzam vybranú transformáciu a v rámci neho hľadám maximum. Lokálne maximum si uloží, a okienko posunem o jeho polovičnú veľkosť. Po prejdení celej transformácie mám radu lokálnych maxím. V ňom pozorujem, že niektoré hodnoty sa opakujú dvakrát. Znamená to že aj po posune okna je lokálne maximum to isté, inými slovami našiel som lokálne maximum. Späťne zistím jeho pozíciu v transformácii a frekvenciu dopočítam vyššie spomenutým spôsobom.

3.3 Metodika testovania

Naimplementovaný program preložím pomocou súboru priloženého Makefile a spustím. Na vstup je potrebné zadať parametre a wav súbor. Teraz ukážem niekoľko príkladov spustenia.

```
./projekt -h
```

Takto spustený program vypíše užívateľovi na obrazovku nápovedu. Je tam základný popis aplikácie, ako sa má správne použiť a spôsoby spustenia. Tento parameter nie je možné kombinovať so žiadnym iným.

```
./projekt -i ton.wav
```

Táto voľba parametrov načíta vsutpný signál pomocou knižnice libsndfile a uloží do pola typu float. Dané pole je možné jednoduchým výpisom presmerovať do súboru a následne zobrazíť, tak ako bolo spomenuté v sekcii o spracovaní vstupov. Okrem iného na výstup vypíšem základné informácie o signále, konkrétne jeho dĺžku v sekundách, počet vzorkov a vzorkovaciu frekvenciu. Tieto údaje sú aj pre výpočet dôležité, preto ich zisťujem pri každom spustení programu, ale informácie vypisujem len pri tejto kombinácii parametrov.

```
./projekt -fstft ton.wav
```

Touto voľbou parametrov si volím krátkodobu Fourierovu transformáciu pomocou knižnice fftw3. Po spustení je potrebné, aby užívateľ zadal veľkosť okna, posunutie a čas, v ktorom chce zistiť frekvenciu. Výsledkom je v prípade vhodných parametrov časovo-frekvenčná rovina zobrazená knižnicou opencv. Preto vhodných parametrov, pretože v prípade že mám vzorkovaciu frekvenciu 8000, vstupný signál má dĺžku 8 sekúnd a zvolím posun okna o jeden vzorok, znamená to 64000 transformácií. Pri okne o veľkosti 1024 tak teoreticky získam rovinu o 64000 na 512 pixelov, čo samozrejme zobraziteľné nie je a knižnica opencv zlyháva. Pri zvolení väčšieho posunu, napr. 50 dostávam rovinu o veľkosti 1280 na 512, čo je už zobraziteľné. Obdobne to platí pri všetkých signáloch.

Ďalšiu informáciu, ktorú získam je frekvenčná informácia. Na výstup sa vypíše frekvencia, alebo frekvencie ktoré sa v danom čase nachádzajú.

./projekt -stft ton.wav

Obdobne ako v predošlom prípade, voľbou parametrov si volím výpočet krátkodobej Fourierovej transformácie, tentokrát však cez skalárny súčin. Opäť je potrebné aby užívateľ zadal veľkosť okna, posunutie v transformácii a čas v ktorom chce zistiť frekvencie. Táto voľba však zaberá omnoho viac výpočetného času. Výsledkom je časovo-frekvenčná rovina, kde je možné sledovať priebeh signálu v čase a výsledné frekvencie nachádzajúce sa v danom čase.

./projekt -cwt ton.wav

Spustením tejto varianty zvolím spracovanie signálu pomocou spojitej vlnkovej transformácie. Vytvorím materskú vlnku o zadanej veľkosti. Obdobne ako pri STFT, vlnkou prechádzam signál, vykonávam skalárny súčin a hodnoty si ukladam. Vlnku postupne škálujem a mením jej veľkosť. Výsledné výpočty sa zobrazia v časovo - škálovacej rovine. Výpočet frekvencie sa v tomto prípade neuskutoční, nepodarilo sa mi odladiť vlnkovú transformáciu natoľko, aby dávala správne výstupy.

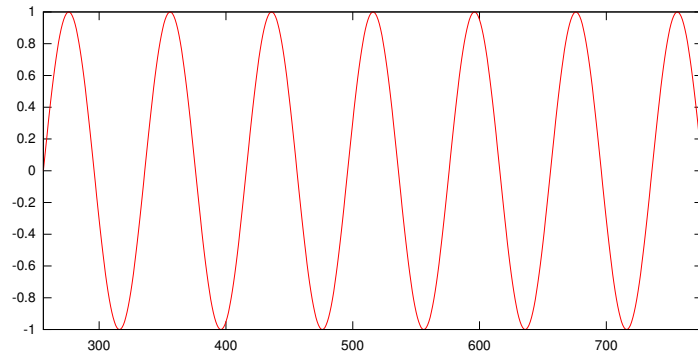
3.4 Dosiahnuté výsledky s úspešnosť

Výsledkom každej transformácie je časovo-frekvenčná rovina. V prípade krátkodobej Fourierovej transformácie za použitia knižnice `fftw3` dosahujem rýchle a pomerne presné výsledky. Presnosť sa líši od použitia veľkosti okna a taktiež posunu v transformácii. Každé zobrazenie roviny je možné uložiť ako png súbor.

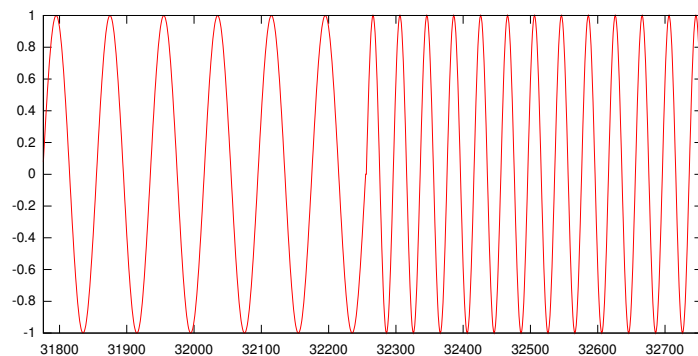
Pokiaľ volím krátkodobú Fourierovu transformáciu pomocou skalárneho súčinu, volím výpočetne náročnejšiu cestu. K výsledkom ako aj vykresleniu sa dopracujem za pomerne dlhý čas, čo sa dá v dnešnej dobe považovať za extrémne pomalé. Tento fakt je ovplyvnený početnými výpočtami, ktoré nie sú optimalizované tak ako v prípade knižnice. Jedným z riešení je aproximovať Gaussovu funkciu za pomoci IIR filtrov. Tento prístup sa dnes bežne využíva. Spočíva v tom, že transformácia sa rekurzívne počíta samostatne pre reálnu a samostatne pre imaginárnu časť. Taktiež transformácia nedáva správne výsledky pre všetky typy testovacích signálov. Má problémy hlavne s tými s veľkou vzorkovacou frekvenciou. Ničmenej, princípy krátkodobej Fourierovej transformácie sa mi podarilo úspešne naimplementovať pomocou dvoch metód.

V prípade spojitej vlnkovej transformácie sa mi však nepodarilo dosiahnuť želané výsledky. Transformácia je implementovaná podľa definície, no ani časovo-frekvenčná rovina, ani výsledné frekvencie nie sú adekvátne vstupom. Táto transformácia vo výsledku nie je odladená, nefunguje ani na základné typy testovacích signálov.

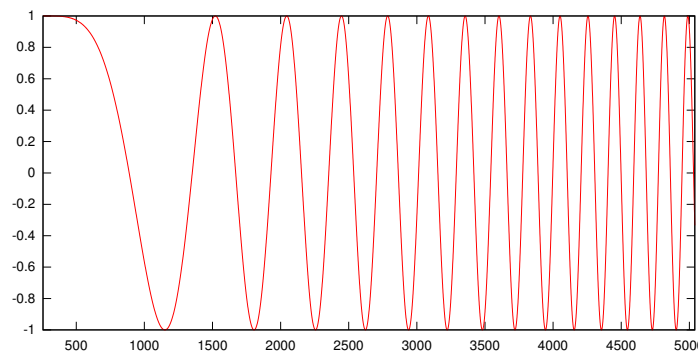
Výsledné už ošetrené časovo-frekvenčné roviny sú zobrazené na obrázkoch [3.4](#).



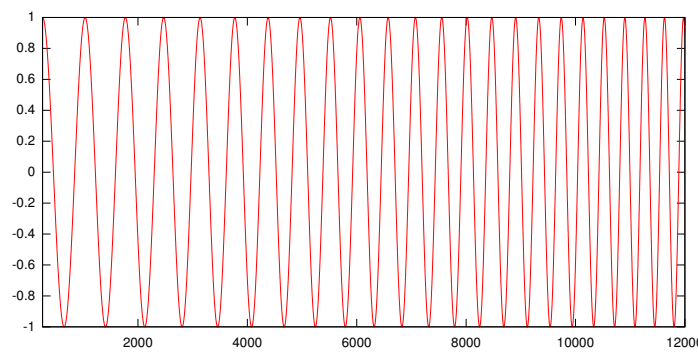
(a)



(b)



(c)

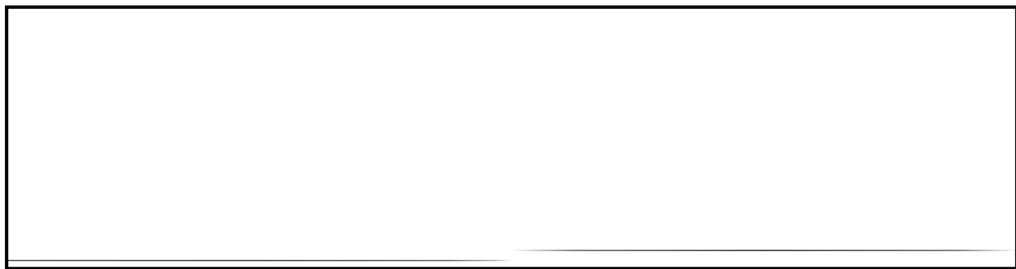


(d)

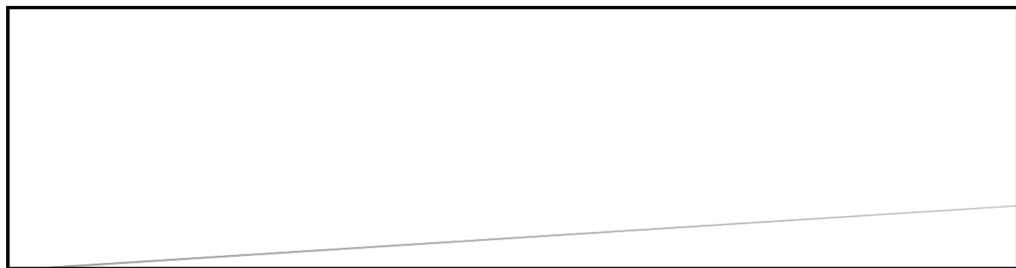
Obrázek 3.3: Vstupné signály: (a) signál s 1 stálou frekvenciou, (b) signál s frekvenciou, ktorá sa zdvojnásobí, (c) signál s lineárne rastúcou frekvenciou a (d) signál s exponenciálne rastúcou frekvenciou.



(a) signál s 1 stálou frekvenciou



(b) signál s frekvenciou, ktorá sa zdvojnásobí



(c) signál s lineárne rastúcou frekvenciou



(d) signál s exponenciálne rastúcou frekvenciou

Obrázek 3.4: Časovo-frekvenčné roviny signálov

Kapitola 4

Závěr

Táto bakalárska práca bola vypracovaná v priebehu dvoch semestrov, kedy v prvom semestri som naštudoval problematiku a v druhom nasledovala implementácia a experimentovanie.

Hlavným sťažením teórie bolo naštudovať a pochopiť fungovanie Fourierovych transformácií, kde som sa konkrétne zameril na krátkodobú Fourierovu transformáciu. Taktiež bolo potrebné pochopiť princípy ako funguje vlnková transformácia a v čom sa tieto dve transformácie líšia.

V praktickej časti bolo mojím zameraním naimplementovať v jazyku C spomenuté transformácie. Výsledkom je aplikácia, ktorá je schopná detekovať frekvencie v zadanom čase a pomocou grafických knižníc som schopný vykresliť časovo-frekvenčné roviny vstupných signálov. Nepodarilo sa mi však úspešne naimplementovať spojitú vlnkovú transformáciu.

Aplikácia pri vhodnom zvolení parametrov a vstupného signálu pracuje správne a dáva relevantné výsledky.

Do budúcnosti vidím priestor na lepšiu optimalizáciu, mnohé hraničné situácie nie sú ošetrované a môžu viesť k nesprávnemu fungovaniu aplikácie. Taktiež existujú lepšie a rýchlejšie mechanizmy na detekciu frekvencií akými sú napríklad IIR filtre. V prípade krátkodobej Fourierovej transformácie pomocou skalárneho súčinu je v budúcnosti možné postupovať nielen po diskretných hodnotách frekvencií tak ako je princíp knižnice `fftw`, ale aj oveľa jemnejšie. Obdobne to platí pri spojitých vlnkových transformáciách. Taktiež vidím priestor na odladenie a správnu implementáciu vlnkovej transformácie, ktorá sa dnes bežne používa. Ďalším vylepšením by bolo upravenie implementácie tak, aby sa zvládli transformovať nielen umelo vygenerované testovacie signály, ale aj reálne zvuky s vysokou vzorkovacou frekvenciou.

Aj keď časovo-frekvenčná analýza dnes už patrí preskúmaným oblastiam spracovania signálu s ktorou sa dennodenne stretávame pri spracovaní zvuku alebo obrázkov, pre mňa osobne to bola nová a veľmi zaujímavá téma.

Literatura

- [1] Bařina, D.: Gabor Wavelets in Image Processing. In *Proceedings of the 17th Conference STUDENT EEICT 2011*, Volume 3, Brno University of Technology, 2011, ISBN 978-80-214-4273-3, s. 522–526.
URL http://www.fit.vutbr.cz/research/view_pub.php?id=9598
- [2] doc. Dr. Ing. Jan Āernocký: Študijné materiály k predmetu ISS.
https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/ISS/public/pred/zakl_sig/zakl_sig.pdf, 2011 [cit. 2014-03-29].
- [3] Lee, D. T.; Yamamoto, A.: Wavelet Analysis: Theory and applications. *Hewlett Packard Journal*, 1994.
- [4] Lütfü Saribulut, A. T.; Tümay, M.: Fundamentals and literature review of Fourier transform in power quality issues. *Journal of Electrical and Electronics Engineering Research*, 2013, ISSN 2141-2367.
- [5] Mallat, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing : The Sparse Way. With contributions from Gabriel Peyré. 3rd edition.* Academic Press, 2009, ISBN 9780123743701.
- [6] Mejlbro, L.: *Fourier Series and Systems of Differential Equations and Eigenvalue Problems.* Leif Mejlbro & Ventus Publishing Aps, 2007, ISBN 978-87-7681-242-3.
- [7] Misiti, M.; Misiti, Y.; Oppenheim, G.; aj.: *Wavelets and their Applications.* ISTE Ltd, 2007, ISBN 978-1-905207-31-6.
- [8] Mitra, S. K.: *Digital Signal Processing, A Computer Approach, second edition.* McGraw-Hill, 2001, ISBN 978-0072522617.
- [9] Moskowitz, M. A.: *A Course in Complex Analysis in One Variable.* World Scientific Pub Co Inc, 2002, ISBN 978-9810247805.
- [10] Poularikas, A. D.: *The handbook of Formulas and Tables for Signal Processing.* CRC Press LLC, 1999, ISBN 0-8493-8579-2.
- [11] Poularikas, A. D.: *Transforms and Applications handbook, third edition.* CRC Press LLC, 2010, ISBN 978-1-4200-6652-4.
- [12] René A. Carmona, W. L. H.; Torrřsani, B.: Multiridge detection and time-frequency reconstruction. *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 47, No.2, February 1999.
- [13] Rukmangadachari, E.: *Engineering Mathematics, Volume 2.* Pearson Education India, 2012, ISBN 978-9810247805.

- [14] S. Addison, P.: *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*. IOP Publishing, 2002, ISBN 978-0750306928.
- [15] Sheng, Y.: *Wavelet transform, chpt 10 of The transforms and applications handbook, second edition*. CRC Press LLC, 2000, ISBN 978-0-8493-8595-7.
- [16] Smith, S. W.: *The scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, second edition*. California Technical Publishing, 1999, ISBN 0-9660176-6-8.
- [17] Steinbuch, P. D. I. M.; van de Molengraft, D. I. M.: *Wavelet theory and applications, a literature study*. <http://alexandria.tue.nl/repository/books/612762.pdf>, 2005.