Univerzita Hradec Králové

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Obsahy geometrických útvarů v různých přístupech k výuce matematiky

Diplomová práce

Autorka:	Michaela Zlatová
Studijní program:	Učitelství pro 2. stupeň ZŠ – matematika
	Učitelství pro 2. stupeň ZŠ – ruský jazyk a literatura
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponentka práce:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Hradec Králové 2022

Univerzita Hradec Králové
Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Michaela Zlatová**
Studium:	P17P0253
Studijní program:	M7503 Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 2. stupeň ZŠ - matematika, Učitelství pro 2. stupeň ZŠ - ruský jazyk
Název diplomové práce:	**Obsahy geometrických útvarů v různých přístupech k výuce matematiky**
Název diplomové práce AJ:	Area of geometric shapes in various approaches to teaching mathematics

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Studie je věnována výpočtům obsahu rovinných geometrických útvarů v matematice na druhém stupni základní školy. Soustřeďuje se na zavedení geometrických útvarů, zdůvodňuje jejich vlastnosti a příslušné vzorce. Analyzuje transmisivní a konstruktivistické přístupy k výuce daného tématu, učebnice a metodické postupy. Práce navazuje na dosavadní pedagogická šetření a předkládá výsledky vlastní výzkumné činnosti realizované na vybraných základních školách.

VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001. Pedagogická praxe.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.

Vybrané učebnice matematiky pro druhý stupeň základní školy.

Další literatura bude upřesněna v průběhu konzultací.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponent:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 11.2.2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Obsahy geometrických útvarů v různých přístupech k výuce matematiky vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne 30. 5. 2022

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu diplomové práce panu Mgr. Lukáši Vízkovi, Ph.D. za odborné vedení práce, jeho rady, připomínky a ochotu.

Anotace

ZLATOVÁ, Michaela. *Obsahy geometrických útvarů v různých přístupech k výuce matematiky*. Hradec Králové: Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové, 2022, 97 s. Diplomová závěrečná práce.

Diplomová práce se zaměřuje na žákovské porozumění určení obsahu rovinného obrazce. Úvodní část se věnuje mechanismu poznávacího procesu žáka podle teorie generického modelu, která usiluje o procedurální a konceptuální porozumění žáka. Dále je charakterizován pojmotvorný proces míry v geometrii a jeho dílčí fáze. Cílem práce je popsat strategie žáků osmého ročníku základních škol a odpovídajícího ročníku víceletých gymnázií a identifikovat jejich nejčastější miskoncepce, které se projevují při řešení úloh, týkajících se tématu obsahu rovinných útvarů. Za účelem naplnění tohoto cíle byla zvolena kvalitativní metodologie se sběrem dat pomocí kvazistandardizovaného didaktického testu.

Klíčová slova: teorie generického modelu, konceptuální porozumění, pojmotvorný proces míry, obsah rovinných útvarů

Annotation

ZLATOVÁ, Michaela. *Area of Geometric Shapes in Various Approaches to Teaching Mathematics.* Hradec Králové: Faculty of Education, University of Hradec Králové, 2022. 97 pp. Diploma Degree Thesis.

The diploma thesis focuses on pupils' understanding of finding the area of plane figures. The introductory part describes the mechanism of the pupil's cognitive process based on the generic model which seeks for pupil's procedural and conceptual understanding. Subsequently, the concept formation processes of geometric measurement and its partial phases are characterized. The aim of the work is to describe the strategies of eighth graders and corresponding grades of grammar schools, and identify their most common misconceptions which appear during tests concerned with the area of plane figures. In order to reach this goal, qualitative methodology with data collection using a quasi-standardized didactic test was chosen.

Keywords: theory of generic models, conceptual knowledge, concept formation process regarding area, area of geometric shapes

Obsah

Úvod

Určení obsahu rovinného obrazce je téma probírané napříč matematickým vzděláváním na prvním i druhém stupni základních škol. Podle Rámcového vzdělávacího programu (2017) mají žáci prvního stupně zjistit obsah rovinného útvaru odečtením ze čtvercové sítě, žáci druhého stupně obsah základních rovinných útvarů odhadují a počítají. Jedná se o oblast matematiky, která nachází široké uplatnění v reálném životě.

Navzdory tomu, že toto téma lze vhodně ilustrovat i v praxi, většina prvostupňových a také druhostupňových základoškolských učitelů, kteří se zúčastnili výzkumu Rendla a kol. (2013), jej považuje za problematické. Na tato zjištění navázal výzkum Vondrové (2015), jenž byl zaměřen na žáky druhého stupně a jejich strategie při řešení úloh, týkajících se obsahu rovinných obrazců. Protože se ukázalo, že již pochopení pojmu obsah činí žákům potíže, Tůmová (2017) sestavila hypotetickou učební trajektorii pro obsah (a také objem) a na základě smíšeného výzkumného designu identifikovala kritická místa žáků v této trajektorii.

Na výše uvedené výzkumy navazuje praktická část této diplomové práce. Na základě rešerše učebnic a výsledků z dostupných studií byl sestaven kvazistandardizovaný didaktický test, jenž byl zadáván žákům osmého ročníku základních škol a odpovídajícího ročníku víceletých gymnázií. Záměrem tohoto kvalitativního výzkumu je popsat strategie žáků při řešení úloh na určení obsahu obrazce, identifikovat nejčastější miskoncepce, které se projevují v řešeních žáků, a zjistit potenciální příčiny žákovských obtíží. K naplnění cíle byla zvolena deskriptivní analýza dat. Výsledky výzkumu jsou prezentovány v páté kapitole. Čtvrtá kapitola podrobněji popisuje metodologii výzkumu a též obsahuje a priori analýzu úloh zařazených do didaktického testu.

Úvodní tři kapitoly jsou teoretického zaměření. První se věnuje mechanismu poznávacího a pojmotvorného procesu v matematice, jelikož znalost tohoto procesu napomáhá předurčovat a specifikovat příčiny žákova eventuálního neporozumění. V této práci je charakterizován způsob konstrukce matematických poznatků podle teorie generického modelu (Hejný 2014), jejímž principem je, aby si sám žák budoval a propojoval poznatky, čímž získává procedurální a konceptuální porozumění. Těmito pojmy se zabývá druhá kapitola, ve které jsou v návaznosti na teorii generického modelu specifikovány také formální a neformální znalosti.

První dvě kapitoly mají obecný charakter, zatímco třetí se již konkrétně zaměřuje na pojmotvorný proces míry podle Vondrové (2015), skládající se ze čtyř fází. Tato kapitola zahrnuje detailnější specifikaci vybraných fází a jejich dílčích částí. Poznatky z teoretické části práce jsou využity ve výzkumné zprávě při deskripci žákovských řešení a jejich miskoncepcí.

1 Teorie generického modelu

Didaktika matematiky se dle Hejného (2004, 2007) přibližně od 80. let 20. století zaměřuje na poznávací proces žáka, a to z toho důvodu, že znalosti studentů jsou často pouhými formálními poznatky[1]. Jednou z mnoha teorií, které popisují mechanismus poznávacího procesu, je teorie generického modelu (TGM), jež je podrobněji charakterizována v této kapitole.

Základy teorie generického modelu vyvíjel v letech 1942 až 1977 Vít Hejný. Jeho cílem bylo nalézt metodu, která zlepší situaci u žáků, z nichž většina matematice „nerozumí“. Namísto snahy o porozumění se u takových žáků objevuje tendence učit se danou látku a způsoby řešení souvisejících úloh zpaměti. Na práci Víta Hejného navázal řadou výzkumů jeho syn Milan Hejný – nejprve v bratislavské výzkumné skupině, později na Katedře matematiky a didaktiky matematiky pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. (Hejný 2014)

Mechanismus poznávacího procesu žáka je užitečným nástrojem nejen při výzkumech[2], ale též ve výuce při hledání příčin chyb žáků a také při volbě postupů a výukových strategií, které předcházejí vzniku formálních poznatků (Hejný 2004). Vít Hejný byl přesvědčen, že znalost zákonitostí poznávacího procesu pomůže učiteli zefektivnit jeho výuku (Hejný 2014).

Pedagogické zkušenosti Víta Hejného, experimentální vyučování Milana Hejného i některé myšlenky J. Piageta, L. P. Vygotského[3] a dalších autorů byly podkladem pro vznik mechanismu poznávacího procesu v matematice (Hejný 2004). Tato teorie se stala východiskem při tvorbě učebnic pro 1. až 5. ročník, vytvořených Milanem Hejným a kolektivem v letech 2007 až 2011 a vydaných v nakladatelství Fraus (Hejný 2014).

V současnosti je mechanismus poznávacího procesu základem edukační strategie označované termínem *výuka orientovaná na budování schémat* (VOBS), viz podkapitola

[1] Formálním poznatkem Hejný (2014) nazývá klastr prvků v dlouhodobé paměti, který se neopírá o modely izolované a generické. Viz podkapitola 2.2.
[2] Vondrová a kol. (2015) uvádí, že v současnosti jsou nejčastěji při empirickém výzkumu v didaktice matematiky využívány dvě teorie: Brousseova teorie didaktických situací a teorie pojmotvorného procesu, přičemž v českém prostředí se nejčastěji využívá TGM.
[3] Využita byla Piagetova metoda popisu kognitivního vývoje pomocí vývojových etap a změn, které jsou s vývojem spjaty. Myšlenky pojmového učení, vnitřní řeči a vnitřní nervové činnosti byly převzaty z prací L. P. Vygotského. (Hejný 2004)

1.6.1. Žákův poznávací proces je zahrnut i do *desatera konstruktivismu* uvedeného v publikaci Milana Hejného a Františka Kuřiny (2009) *Dítě, škola a matematika.*

Teorie generického modelu, která charakterizuje žákovské uchopování a následné budování matematických poznatků, se skládá z pěti etap (hladin) a dvou zdvihů (hladinových přechodů). První etapu poznávacího procesu reprezentuje *motivace*, která by měla být přítomna nejen na počátku, ale i v průběhu procesu poznávání a objevování. Druhou etapu tvoří *izolované modely*, na něž ve třetí etapě navazuje *generický model*, přičemž mezi přechodem od modelů izolovaných k modelu generickému dochází k prvnímu mentálnímu zdvihu, jenž je nazýván *zobecněním*. Po generickém modelu následuje další mentální zdvih, tentokrát se jedná o *abstrakční zdvih*, jehož výsledkem je *abstraktní poznatek*. Do poznávacího procesu patří také *krystalizace*. Tímto termínem se označuje zařazování nových poznatků do již vytvořených poznatkových struktur. (Hejný a Kuřina 2009, Hejný 2014)

Poznávací proces teorie generického modelu lze znázornit schématem (Obrázek 1.1). Kognitivní posuny představují znaky 1→ (zobecnění) a 2→ (abstrakce). Posloupnost hladin reflektuje časový průběh poznávacího procesu, avšak není pravdou, že by tvorba hladin probíhala postupně. Nová zkušenost se většinou otiskuje do několika hladin najednou (Jirotková 2012). V následujících podkapitolách jsou jednotlivé etapy TGM popsány detailněji.

<table>
<tr><td rowspan="2">motivace</td><td>→</td><td>izolované modely</td><td>1→</td><td>generický model
procesuální → konceptuální</td><td>2→</td><td>abstraktní poznatek</td></tr>
<tr><td colspan="6">krystalizace</td></tr>
</table>

Obrázek 1.1: Schéma teorie generického modelu (Hejný 2014, s. 73)

1.1 Motivace

Při tvorbě matematických poznatků, které si podle TGM konstruuje sám žák, hraje zásadní roli motivace. Bez ní a touhy se učit si žák žádnou poznatkovou strukturu nevybuduje. (Hejný a Kuřina 2009)

„Žák, který má vnitřní potřebu poznávat, poznává intenzivněji, hlouběji a komplexněji než ten, který je k poznávání nucen.“ (Hejný 2014, s. 42) Poznatky získané na základě vlastních zkušeností může žák zakomponovat do již stávající poznatkové *struktury*. Namísto toho žák, jenž pouze pasivně přijímá informace, získává tzv. *formální poznatky*.

Takové poznatky nejsou podepřeny žádnými zkušenostmi, a tudíž není možné je zařadit do poznatkových struktur.

Zvídavé dítě, zkoumající svět kolem sebe, často zpozoruje nějakou činnost, již si chce samo také vyzkoušet. Podněcuje jej k tomu jeho vnitřní motivace. Jirotková (2012) a Hejný (2014) hovoří o vzniku motivace k poznávání z rozporu mezi současným stavem „nevím“ a „chtěl bych vědět“. Motivace dítěte je nestálá a má silnou potřebu nápodoby (Hejný a Kuřina 2009). Dítě je však třeba podporovat a snažit se mu porozumět, aby mohlo nabývat nových zkušeností.

Ve školním prostředí se dítě často ocitá pod tlakem vnější motivace (stimulace). Pro žáky bývá zdrojem motivace dobrá známka, ať již z důvodů snahy zalíbení se učiteli nebo snahy udělat radost rodičům (Hejný a Kuřina 2009, Hejný 2014). Hejný (2014) uvádí, že žáci motivovaní touhou objevovat matematická poznání jsou spíše výjimkou než pravidlem.

Učitelé se snaží děti zaujmout volbou úloh se zajímavým kontextem, které se žákům zdají být atraktivní. Ačkoli se jedná o účinný způsob motivace, je nutné podotknout, že se podaří docílit pouze krátkodobého zaujetí – stejně jako v případě soutěží. Avšak při soutěžích jsou děti pod časovým presem a uspějí jen ti nejrychlejší. Jedni se po ní cítí frustrovaně, druzí zažívají úspěch. (Hejný 2014)

Úspěch spojený s možností aplikace dosavadních znalostí žáka patří mezi nejefektivnější motivační faktory. Zároveň žák kromě úspěchu ze správného řešení přiměřeně náročné úlohy[4] cítí radost. Učitel, jenž ve třídě využívá tyto přiměřené úlohy k motivaci, se potýká s problémem individualizace výuky, jelikož učí různě zdatné žáky. Učiteli mohou usnadnit situaci učebnice, ve kterých se nachází úlohy se stoupající obtížností. (Hejný 2014)

1.2 Izolované modely

Hejný (2014, s. 47) uvádí, že *„izolovaný model[5] je konkrétní případ příští znalosti“*. Žák při práci s konkrétními případy budoucího poznání postupně získává první zkušenosti.

[4] Přiměřeně náročná úloha spočívá ve vhodném výběru obtížnosti pro konkrétního jedince. Úloha je takové náročnosti, že ji žák vyřeší a současně má z překonání problému radost. (Hejný 2014)

[5] V dřívějších pracích Milana Hejného je namísto pojmu izolované modely uváděn termín *separované modely*.

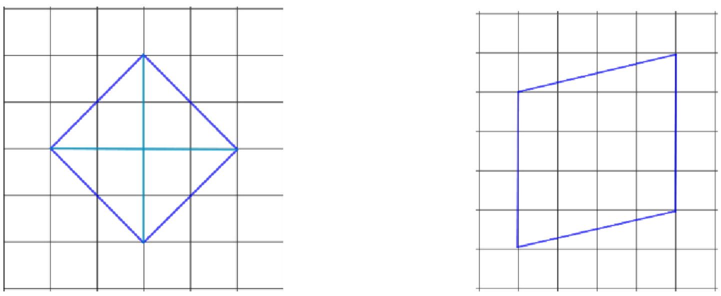
V této etapě neprobíhá pouze sbírání zkušeností, ale mnohdy také dochází k vyjasňování termínů a k prozkoumání, zda skutečně konkrétní případ náleží k danému problému.

Výsledné poznání dítěte se stává stabilnějším v souvislosti s narůstající kvantitou různorodých izolovaných modelů, mezi kterými představují důležitou roli následující typy: modely překvapivé, modely zdánlivé a ne-modely[6] (Hejný 2004, Jirotková 2012).

Překvapivé modely zahrnují modely objektů, které se na první pohled zdají nevyhovující nebo jejichž existence nebyla předpokládána. Například čtverec s úhlopříčkami ve svislé a vodorovné poloze na obrázku (Obrázek 1.2 – vlevo) je překvapivým modelem čtverce. Překvapivé je pro studenty i objevení trojúhelníku s každou stranou delší než 100 cm s obsahem 1 cm^2. (Hejný 2004)

Zdánlivým modelem se nazývá takový model, který není modelem daného objektu, pouze se tak jeví. K ilustraci zdánlivého modelu využijeme opět obrázek 1.2 – vlevo. Tentokrát lze ovšem tento model označit za zdánlivý, protože často bývá považován za kosočtverec, ačkoli se jedná pouze o čtverec, který není zakreslen ve své typické poloze. (Jirotková 2012, Hejný 2004)

Ne-model představuje doplněk zkoumaného jevu. Například při zavádění pojmu konvexní mnohoúhelník je vhodné ukázat i nekonvexní mnohoúhelník, který se pro danou situaci stává ne-modelem (Hejný 2004). K výše zmiňovanému čtverci lze nalézt i ne-model (Obrázek 1.2 – vpravo).



Obrázek 1.2: Ilustrace modelu zdánlivého a překvapivého; ilustrace ne-modelu (Jirotková 2012, s. 92)

Doba trvání etapy izolovaných modelů se může lišit s ohledem na matematickou vyzrálost žáka. Délka této etapy taktéž souvisí se složitostí poznatku: čím složitější problém, tím je delší. Na základě výzkumů Hejný (2014) rozdělil etapu izolovaných

[6] Hejný a Jirotková (1999) ve své dřívější publikaci užívají termíny „též-modely“ pro modely překvapivé a „jakoby-modely“ pro modely zdánlivé.

modelů na čtyři[7] podetapy, přičemž ne v každém poznávacím procesu jsou všechny podetapy zahrnuty.

V počáteční podetapě se první konkrétní zkušenost s modelem usadí ve vědomí a vzniká tak zárodek příštího pojmu nebo poznatku. Ve druhé podetapě probíhá seznámení se s dalšími izolovanými modely, které prozatím nejsou propojeny. (Hejný 2014, Hejný a Kuřina 2009) *„Běžně se stává, že si jistý jev uvědomíme, až když jej potkáme podruhé nebo potřetí.“* (Hejný 2014, s. 48)

Klíčovým stadiem je třetí podetapa, při které dochází k poznání vzájemné souvislosti některých modelů. Tyto modely se shlukují do skupin a oddělují se od ostatních. V závěrečné fázi se vytvářejí komunity izolovaných modelů na základě zjištění podstaty „stejnosti“ modelů. (Hejný 2014, Hejný a Kuřina 2009)

1.3 Generický model

Generický model[8] vzniká kognitivním zdvihem (zobecněním) z komunity izolovaných modelů. Tento model bývá prototypem části, nebo všech izolovaných modelů (Hejný 2004). Generický model nelze žákům předat, jelikož si jej každý na základě svých zkušeností buduje sám. Úkolem učitele je pouze předkládat vhodné izolované modely (úlohy), které žáka mohou dovést k objevení generického modelu (Vondrová 2019).

Objevením generického modelu je završen proces *zobecnění*, přičemž žák získává poznatek vyšší a abstraktnější úrovně oproti dosavadním zkušenostem. Nicméně v hladině generických modelů se ještě nejedná o celkovou abstrakci s využitím symbolů jazyka matematiky. Generický model stále využívá názornosti. Například pro číslo čtyři mohou být generickým modelem čtyři prsty nebo čtyři korálky na počítadle. (Hejný a Kuřina 2009)

Zobecnění je důležitým milníkem v procesu poznávání, jelikož přináší do vědomí něco nového. Konstrukci generického modelu často doprovází AHA-efekt a radost z objevu. Úspěch se stává pro žáka motivací k dalšímu objevování a prožívání okamžiků radosti v matematice. (Hejný 2004)

[7] Hejný (2004) uvádí pět podetap izolovaných modelů, přičemž podetapa, která se nevyskytuje v pozdějším dělení izolovaných modelů, je zaměřena na obohacování izolovaných modelů i v případě, že ve vědomí člověka je již vytvořen generický model, nebo dokonce i abstraktní poznatek.
[8] Dříve Hejný užíval namísto termínu generický model pojem *univerzální model*.

Na pomezí izolovaných modelů a modelu generického se nachází hraniční typ modelu, který se nazývá *vzor*. Vzor lze použít při modelování a řešení standardních problémů, avšak nelze jej upotřebit v situacích, které vyžadují konstruování nového typu izolovaných modelů. Užití vzoru pouze při řešení standardních úloh je zapříčiněno tím, že se nejedná o plnohodnotný generický model, protože nevznikl kognitivním zdvihem z komunity izolovaných modelů. (Hejný a Kuřina 2009)

„Vzor, který se do vědomí žáka dostal sdělením, nemá sílu univerzálního modelu.“ (Hejný a Kuřina 2009, s. 134) Avšak i ze vzoru se může stát generický model. Tuto změnu Hejný a Kuřina (2009) nazývají ***oživením vzoru***, přičemž oživením označují všechny kognitivní zdvihy, jejichž myšlenka se ve vědomí žáka ocitla pouze sdělením a díky osvojení se v důsledku mentální konstrukce dostane na vyšší úroveň porozumění.

1.3.1 Procesuální a konceptuální generické modely

Z komunity izolovaných modelů si žák běžně vytváří nejprve *procesuální generický model*, ze kterého později vykrystalizuje *konceptuální generický model*. Avšak nevyzývá-li úloha k nalezení posloupnosti čísel, nebo tato posloupnost neexistuje, žák ihned objevuje konceptuální generický model (Hejný 2014).

Hejný a Vondrová (1999) vymezují přívlastky procesuální a konceptuální v souladu s jejich filozofickým významem. Výraz *procesuální* zahrnuje dynamické obsahy, aktivity a stavy vědomí, ve kterých hraje rozhodující roli čas, časová posloupnost. Nadčasovost obsahů a stavů našeho vědomí bývá označována slovem *konceptuální*. Při výuce učitel žákům předkládá jak procesy, tak i koncepty. Například řešení lineárních rovnic je procesem, zatímco pojem funkce se vysvětluje tak, aby se ve vědomí žáků vytvořil koncept tohoto pojmu.

Procesuální generický model se pojí s úlohami, jejichž zadání obsahuje jistou posloupnost a úkolem řešitele je zjistit, na základě jakých pravidel daná posloupnost platí. Pokud žák objeví předpis posloupnosti, ve kterém musí k vypočítání libovolného členu znát hodnoty předchozích členů, jedná se o procesuální generický model. A naopak, pokud žák nalezne pravidlo, díky němuž dokáže určit jakýkoli člen posloupnosti bez znalosti předcházejících případů, opět objevuje generický model, nyní již na konceptuální úrovni. (Hejný 2014)

Generický model je v poznávacím procesu nejen prototypem komunity izolovaných modelů, ale také se stává východiskem pro generické modely vyšší úrovně a pro abstraktní poznání. Přítomnost generických modelů zajišťuje kvalitu matematických znalostí, přičemž ve většině případů lze rozlišovat znalosti procedurální a konceptuální, jimž se věnuje podkapitola 2.1.

1.4 Abstraktní poznatek

Z generického modelu se kognitivním zdvihem, který nazýváme *abstrakcí*, vytvoří ve vědomí *abstraktní poznatek* (Hejný 2014). Ten vzniká oproštěním se od předmětných představ, přičemž často při přechodu na abstraktnější úroveň dochází ke změně jazyka (Hejný a Kuřina 2009). Jestliže byl tento poznatek vykonstruován díky abstrakčnímu zdvihu z generického modelu, hovoříme o *abstraktní znalosti*. V opačném případě, v němž se poznatek do vědomí dostává pouze jako informace, se jedná pouze o *formální poznatek* (Hejný 2014).

Z abstraktní znalosti se může v jiném poznávacím procesu stát model generický nebo izolovaný. Funkci daného poznatku (izolovaný model, generický model, abstraktní poznatek) určuje jeho role v konkrétním poznávacím procesu a v poznatkové struktuře jedince. (Hejný a Kuřina 2009)

Abstraktní poznatek využívá jazyka písmen, s nímž se žáci důkladně seznamují na druhém stupni základní školy, avšak již žáci prvního stupně se setkávají s jazykem písmen, a to při řešení rovnic nebo při použití písmen ve vzorcích pro výpočet obvodů a obsahů daných objektů (Hejný 2014). Změna jazyka je pro žáky náročná. Dochází k situacím, kdy žáci užívají písmena pouze v nacvičených situacích bez jakéhokoli dalšího vhledu. V literatuře (srov. Huang a Witz 2011, Zacharos 2006, Kordaki 2003, Kospentaris a kol. 2011, Kordaki a Potari 1998, Puspita a Ng 2022, Herendiné-Kónya 2015) se učitelé a výzkumníci zmiňují o předčasné algebraizaci, která je překážkou v uchopování nejrůznějších situací.

Jazyk písmen může usnadnit hledání generických modelů zobecněním z komunity izolovaných modelů. Uspíší-li učitel okamžik objevení generického modelu tím, že poznatek žákům sám představí, docílí pouze toho, že žáci vyřeší shodné situace na úrovni obdobné vzorovému příkladu, avšak nebudou vědět „proč to tak je“ a „proč to funguje“. Pravděpodobně také již nepřekonají úlohy složitějšího typu, jelikož si nevybudovali příslušný generický model. (Hejný 2014)

Hejný a Kuřina (2009) na základě dlouholetých zkušeností vyjadřují svá přesvědčení o významu činností učitele, které podporují rozvoj žákovských schopností a které žáky podněcují k novým objevům. Zkušený a trpělivý učitel povzbuzuje intelektuálně sebevědomého žáka v jeho spekulativním myšlení. Následně sdílí radost z žákovského objevu, který náležitě ocení, což ovlivní následující objevné pokusy.

1.5 Krystalizace

Ke *krystalizaci* poznatku dochází od okamžiku, kdy se ve vědomí žáka objeví generický model (ve výjimečných případech i tehdy, když se objeví izolovaný model). *„Krystalizace probíhá permanentně a jejím hlavním cílem je vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi jednotlivými poznatky.“* (Hejný 2014, s. 73) Proces krystalizace spočívá v usazení nového poznatku ve dvou i více oblastech vědomí žáka (Hejný 2014).

Nový poznatek, který vznikl konstrukcí z izolovaných modelů, se v mysli žáka přirozeně propojuje s již známým na úrovni jak izolovaných a generických modelů, tak i abstraktních znalostí. V některých případech způsobuje krystalizace restrukturalizaci části kognitivní struktury (Hejný a Kuřina 2009). Krystalizace je dlouhodobý proces, při kterém se jakýkoli poznatek pojí s již známým a v budoucnu se spojí s žákovými nově nabytými znalostmi (Vondrová 2019).

Hejný (2014) za přirozený důsledek krystalizace považuje *automatizaci*, ačkoli není přímou součástí TGM. *„Automatizace uvolňuje intelektuální energii člověka pro jinou, náročnější činnost.“* (Hejný a Kuřina 2009, s. 142) Při řešení náročných úloh se pozornost soustředí především na výběr vhodné strategie, zatímco zautomatizované kalkulativní kroky jsou podnikány s nepatrným výdejem intelektuální energie (Hejný a Kuřina 2009).

Automatizace spojů probíhá u žáků individuálně a nelze ji uspěchat. Je důležité, aby žák dosáhl porozumění namísto toho, aby si vybrané spoje pouze namemoroval. Rendl a Páchová (2013) upozorňují na rozdíl mezi automatizací a mechanickým osvojením, který spočívá právě v porozumění. Žáci se zautomatizovanými spoji dokáží své postupy vysvětlit, naopak porozumění schází těm, kteří poznatky pouze přijali bez opory izolovaných a generických modelů.

1.6 Schéma

Žákem získané izolované modely se ukládají do mentálního prostoru, jenž Hejný (2014) nazývá *proto-schématem*. Zobecněním komunity izolovaných modelů vzniká generický model. Právě generické modely se stávají jádrem *schémat* (Hejný 2007).

Koncepce schématu je též součástí teorií pojmotvorného procesu (srov. teorie proceptu D. Talla a E. Graye (1994), Dubinského (1991) APOS teorie). Hejný (2014) matematickým schématem označuje mentální prostor, který obsahuje *klastry*[9] informací relevantní k porozumění[10].

Schéma, vznikající současně s objevením generického modelu, zahrnuje skupiny generických modelů (konceptů) a jejich vazby. Kvalitu matematických schémat ovlivňuje množství těchto modelů a vazeb mezi nimi. Elementy schémat jsou dynamicky organizovány. Soubory generických modelů disponují jistou variabilitou – menší schémata se propojují a vytvářejí schémata obsáhlejší. Dynamičnost schématu se projevuje také v situacích, při nichž nový izolovaný model nezapadá do žákova aktuálně vybudovaného schématu. (Hejný 2007)

Sdružováním schémat, zakládajícím se na nalézání vztahů mezi schématy, vznikají schémata obecnějšího charakteru, k jejichž zformování napomáhají *proto-struktury*. Proto-struktura se týká období transformace schématu ve strukturu. Schéma obsahuje intuitivní porozumění matematice. Proto-struktura již představuje kvalitní schéma s tendencí strukturace. *Struktura* se zakládá na axiomatickém porozumění. (Hejný 2014)

Hejný (2007, s. 92) strukturou nazývá *„... relativně ucelený systém pojmů a propojujících je vztahů, jehož prvky jsou přesně vymezeny a popsány pomocí aspoň jednoho formalizovaného jazyka."* Přechod od schématu ke struktuře, tedy od znalostí intuitivních ke znalostem abstraktním, vycházejících z definic, tvrzení a jejich důkazů, koresponduje s obdobím přestupu žáka z prvního stupně na druhý (Hejný 2014). Generické modely, tvořící schémata, se obohacují a abstrakcí z nich vznikají abstraktní poznatky, obsahující formální zápisy. Žák abstrahuje své dosavadní poznatky, které vzhledem k objeveným vztahům organizuje, čímž se začíná formovat struktura. Zárodky procesu strukturace a následného utváření struktury se vyskytují již u prvostupňových žáků (Hejný 2014).

---

[9] Klastr představuje *„... soubor zatím nediferencovaných, ale jistým principem společně uhnízděných zkušeností a izolovaných modelů (informací), jež náleží jednomu schématu, nebo proto schématu."* (Hejný 2014, s. 86)

[10] Hejný charakterizuje schéma na základě jeho vymezení americkým psychologem R. J. Gerrigem, které vychází ze shlukování informací do smysluplných sekcí.

1.6.1 Vyučování orientované na budování schémat

Vyučování orientované na budování schémat (VOBS) je konstruktivistický edukační styl, usilující o maximální zapojení žáků do procesu vzdělávání. Žáci systematicky pracují v didaktických prostředích[11], která podporují rozvoj a budování schémat (Hejný 2007).

Vyučovací metoda orientovaná na budování schémat je synonymem pro „Hejného metodu“ (Budování schémat, c2022). Učitel má v edukačním stylu VOBS významnou funkci, jelikož rozhoduje o organizaci procesu výuky (Hejný 2014). Učivo je koncentrováno do sítí úloh ve vhodných didaktických prostředích, jež napomáhají konstrukci schémat.

Hejný (2014) vlastnosti schémat popisuje tezemi (viz Příloha A), z nichž odvíjí principy, podle kterých učitel organizuje výuku. Koncepce vyučovacího procesu se zakládá na udržování optimálního pracovního klimatu. Učitel zadává žákům přiměřené úlohy, o jejichž řešení žáci mohou vést diskuse. Inspiraci a podporu pro učitelův výběr je možno nalézt v učebnicích matematiky pro první a druhý stupeň základních škol, publikovaných společností H-mat, o.p.s. (Učebnice a pomůcky, c2022).

[11] Přehled a charakteristiku didaktických prostředí, která se podílejí na budování schémat, lze nalézt na blogu o Hejného metodě (srov. Didaktická prostředí, c2018).

2 Porozumění

V předchozí kapitole byl popsán mechanismus žákovské konstrukce matematických poznatků. Učitel díky znalosti poznávacího procesu může lépe chápat žákovy obtíže a předcházet jim vhodnou koncepcí výuky matematiky. Teorie generického modelu není jedinou teorií, která se věnuje poznávacímu a pojmotvornému procesu v matematice, avšak v Česku, Slovensku a Polsku je velmi využívána (Vondrová 2019). Mezi další pojmotvorné teorie, které se uplatňují ve výzkumech, patří: teorie abstrakce v kontextu, APOS[12] teorie (Dubinsky 1991), teorie proceptu Davida Talla a Edieho Graye (1994) (Vondrová a kol. 2015, Vondrová 2019).

Teorie generického modelu je zcela v souladu s konstruktivistickými přístupy k vyučování, které podněcují žáka k budování poznatků na základě vlastních zkušeností. Nedostatečné porozumění se v této teorii označuje termínem *mechanické porozumění*. Znalosti uchopené pouze pamětí bez opory modelů jsou zahrnovány do mechanického porozumění (Hejný 2014).

Porozumění není dichotomické (Vondrová 2019, Barmby a kol. 2008). Bez kontextu nelze jednoznačně určit význam sousloví „žák, který něčemu nerozumí“. Tento žák opravdu může mít nedostatečné znalosti. Nicméně také může nastat moment, kdy žák znalost má, avšak neumí ji za daných okolností využít. V takovém případě v souvislosti s uvedenou TGM se jedná o *formální poznatek* nebo o znalost spadající do *mechanického porozumění*.

Skemp (1976) rozlišoval porozumění instrumentální a relační, která bychom mohli označit za protipóly kontinua porozumění. *Instrumentální porozumění* spočívá v prosté aplikaci pravidel bez prokázání znalosti „proč je lze využít“ a „proč fungují“. *Relační porozumění* se projevuje u žáka, který chápe, zná a vysvětlí důvody, proč lze zvolená pravidla použít. Další autoři, kteří na Skempa navazují, již neuplatňují jeho striktní rozdělení porozumění. Namísto toho porozumění považují za kontinuum, což se odráží v jejich pojetí konceptuálních a procedurálních znalostí.

---

[12] Název je zkratkou slov: akce, proces, objekt a schéma.

2.1 Konceptuální a procedurální znalosti

J. Hiebert a P. Lefevre (1986 cit. dle Vondrové 2019, s. 19) stanovují *konceptuální znalosti* jako „[…] *znalosti bohaté na vztahy. Lze si je představit jako propojenou pavučinu znalostí, síť, v níž jsou vztahy stejně důležité jako oddělené informace. Vztahy prostupují jednotlivými fakty a tvrzeními, takže jsou všechny informace spojené v síti.*“ Konceptuální znalost tedy zahrnuje znalost pochopení abstraktních pojmů a obecných principů (Rittle-Johnson a kol. 2015).

Procedurální znalosti Hiebert a Lefevre (1986 cit. dle Vondrové 2019, s. 19) charakterizují následovně: „*Jeden typ procedurálních znalostí je obeznámenost s jednotlivými symboly systému a se syntaktickými konvencemi, kterými vznikají přijatelné konfigurace symbolů. Dalším typem procedurálních znalostí jsou pravidla nebo procedury pro řešení matematických úloh. Mnoho z procedur, které žáci ovládají, sestává zřejmě z řetězení návodů, jak manipulovat se symboly.*“ Rittle-Johnson a kol. (2015) shrnují procedurální znalost jako znalost série kroků (procedur), které se provádějí k dosažní cíle a které se rozvíjí v praxi při řešení problémů. Součástí procedurálních znalostí nejsou pouze vědomé algoritmy, ale také schopnost, jak tyto algoritmy rozpoznat (Star 2005). Totéž platí i pro pojmy spadající do konceptuálních znalostí.

J. R. Star (2005) se vymezuje oproti definicím Hieberta a Lefevre (1986), kritizuje především vztahovou bohatost předdefinovanou pouze pro konceptuální porozumění. Tvrdí, že znalost konceptů nemusí být nutně bohatá na vztahy, a že naopak některé procesní znalosti jsou na vztahy bohaté. Star (2005, s. 408) navrhuje zavést hlubokou procedurální znalost jako „[…] *znalost procedur, která je spojena s porozuměním, flexibilitou a kritickým posuzováním a která se odlišuje od znalosti pojmů (ale může s ní být spojena).*“[13] Tyto hluboké procedurální znalosti by měly být cílem jakékoli úrovně vzdělávání (Star 2005).

Existují zásadní spory o vzájemném vlivu mezi procedurálními a konceptuálními znalostmi. Vyskytují se názory, že primární roli ve výuce zastávají konceptuální znalosti, zatímco procedurální znalosti se jeví druhotnými. Na druhou stranu je stále mnoho učitelů přesvědčeno, že právě procedurální dovednosti hrají při výuce klíčovou roli. (Star 2005)

[13] „*Deep procedural knowledge would be knowledge of procedures that is associated with comprehension, flexibility, and critical judgment and that is distinct from (but possibly related to) knowledge of concepts.*“ (Star 2005, s. 408)

Ačkoli vznikají studie zaměřené pouze na konceptuální či procedurální znalosti, často není možné tyto dva typy znalostí jednoznačně rozlišit, jelikož jsou na sobě vzájemně závislé (Vondrová 2019). Vzhledem k provázanosti procedurálních a konceptuálních znalostí zavedli D. Tall a E. Gray (1994) teorii proceptu. Klíčový termín teorie – procept, je složením anglických slov process a concept.

Tall a Gray (1994 cit. dle Hejného 2014, s. 35) ve své práci vysvětlují termín procept následovně: *„V této stati uvažujeme o dualitě mezi procesem a konceptem v matematice, zvláště o té, v níž se stejný znakový systém používá i jako proces (jakým je sčítání dvou čísel 3 + 2) i jako produkt tohoto procesu (součet 3 + 2). Dvojznačnost zápisu umožňuje myslícímu člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, jímž nějakou úlohu řeší, ke konceptu, s nímž pracuje jako s částí širšího schématu. Znak, který přirozeně reprezentuje amalgám dvojznačnosti proces / koncept nazýváme ‚procept'"*.

Pohledem teorie proceptu žák, chápající symbol $3 + 2$ jako výzvu ke sčítání, na tento symbol nahlíží procesuálně. Žák, který symbol $3 + 2$ posuzuje z hlediska stavu, má pouze konceptuální přístup. Ovšem žák, jenž daný symbol využívá vzhledem k situaci jako proces nebo stav, si již vytvořil procept. (Hejný a Vondrová 1999)

Součástí definice proceptu Talla a Graye (1994) je zmínka o jeho vícevrstevnatosti. Autoři rozlišují procepty elementární a obecné, přičemž vztah mezi těmito procepty lze připodobnit k relaci izolovaného modelu a modelu generického ve výše popsané teorii generického modelu (Hejný 2007).

Všeobecně panuje přesvědčení, že vztah mezi konceptuálními a procedurálními znalostmi je jednosměrný, a to takový, že konceptuální znalosti vedou ke znalostem procedurálním (Rittle-Johnson a kol. 2015). Varianta, že procedurální znalosti rozvíjí znalosti konceptuální, byla považována za nesmyslnou. Avšak Rittle-Johnson a kol. (2015) uvádějí řadu longitudinálních i experimentálních studií, díky nimž dokazují, že vztahy mezi procedurálními a konceptuálními znalostmi jsou obousměrné. Zlepšení procedurálních znalostí může přispívat k rozvoji znalostí konceptuálních a naopak.

Ačkoli se potvrdilo, že mezi procedurálními a konceptuálními znalostmi existuje obousměrný vztah, učitelé se ocitají před obtížným dilematem – volbou, zda je lepší postupovat od znalostí konceptuálních k procedurálním, či opačně. Dosud neexistuje žádný „návod", jenž by určoval vhodné rozvrstvení mezi pojmy a postupy. Některé studie podporují tvrzení, že alespoň na začátku výuky by neměla být současně prováděna výuka postupů a pojmů. Další experimentální studie v úvodu výuky jistého tématu preferují krátkou konceptuální lekci namísto procedurální. Mimo jiné bylo zjištěno, že opakování pojmů a postupů mezi lekcemi je efektivnější než rozsáhlá výuka pojmů, následovaná obšírnou výukou postupů. (Rittle-Johnson a kol. 2015)

2.2 Formální a neformální znalosti

S porozuměním v matematice úzce souvisí formální a neformální poznatek. Charakteristika těchto pojmů vychází z mechanismu poznávacího procesu teorie generického modelu. *„Abstraktní znalost, která je opřena o izolované a univerzální modely, je neformální. Znalost, jež tuto oporu postrádá, která je uchována pouze pamětí, je formální.“* (Hejný a Kuřina 2009, s. 149)

Dle Hejného (2014) nelze libovolně zaměňovat, či snad ztotožňovat pojmy znalost a poznatek. Hejný od sebe odlišuje nejen znalost a poznatek, ale také informaci a formální poznatek.[14] Vzhledem k zaměření této kapitoly se jako zásadní jeví diferenciace znalosti a formálního poznatku. Tyto dva pojmy se od sebe liší způsobem, jímž pronikly do vědomí. Znalost vzniká na základě intelektuální činnosti jedince, jenž vytváří vlastní konstrukce, které vychází z předchozích zkušeností promítnutých do izolovaných a generických modelů. Opakem znalosti je formální poznatek, kterému schází opora v již existujících izolovaných a generických modelech.

Diagnostikuje-li učitel u žáka formální poznatek, měl by s ohledem na žákovy schopnosti postupovat tak, aby došlo k oživení formálních poznatků, což vzhledem k charakteristice tohoto poznatku znamená, že by učitel měl žákovi zadat přiměřeně náročné úlohy, které budou předpokladem pro izolované a později i generické modely (Hejný 2014). Tento přístup Hejný (2014, s. 55) nazval „zživotňováním formálního poznatku“ a popisuje jej jako „[…] *proces propojování formálního poznatku s jinými poznatky, zejména*

[14] Hejný (2014, s. 54) tyto termíny definuje následovně:

- *„Poznatek je každý prvek nebo klastr prvků v dlouhodobé paměti člověka.*
- *Informace je poznatek, který do paměti vstoupil zvenčí a oporu v již existujících izolovaných modelech a generických modelech si teprve musí hledat; mnohdy k tomuto hledání ale ani nedochází.*
- *Znalost je poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů.*
- *Formální poznatek (mechanical knowledge) je informace, která mohla být znalostí.“*

s izolovanými a generickými modely.“ Z formální znalosti se tak postupně stává znalost spojená s porozuměním, tedy neformální.

Hlavní příčinou formálního poznatku je učitelem zvolený edukační styl výuky, a to především styl transmisivní (Hejný a Vondrová 1999). Učitel v transmisivním vyučování předává informace, které si žáci musí zapamatovat a následně aplikovat ve standardních úlohách. Naopak konstruktivistický edukační styl podporuje žáka v objevování, tudíž žákovi poskytuje potřebný prostor k vybudování abstraktních znalostí s oporou v izolovaných a generických modelech (Hejný a Kuřina 2009).

Rendl a Páchová (2013) na základě rozhovorů s učiteli podotýkají, že mnozí učitelé vychází z vlastního přesvědčení, které spočívá v nutnosti učit děti některé věci zpaměti, protože by jinak z matematiky nevěděly nic. Zároveň z výpovědí pedagogů vyplynulo, že pokud se jim vysvětlení zdá příliš komplikované, případně jej nelze vhodně znázornit, uchylují se k učení zpaměti, což ovšem nevede k žákovskému porozumění a žáci tak získávají pouze formální poznatek.

K formálnímu poznání dochází i tehdy, pokud není žákům poskytnut dostatečný čas k vytvoření si abstraktní znalosti z izolovaných a generických modelů. Zároveň vznik formálního poznatku nastává i v momentech, kdy se žák příliš brzy střetne s abstraktní znalostí a nemůže ji propojit s již užívanými poznatky. Tehdy žák nemá jinou možnost, než že novou vědomost uchopí pouze memorováním. (Hejný a Kuřina 2009)

3 Pojmotvorný proces míry v geometrii

Tato kapitola se zaměřuje na schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii podle N. Vondrové (2015). Dílčí podkapitoly popisují vybrané etapy pojmotvorného procesu míry, a to konkrétně zachování míry, strukturaci plochy a multiplikativní uvažování, které jsou předpokladem pro porozumění výpočtu obsahu. Poslední podkapitola se věnuje čtvercové síti, jež bývá užívána jako didaktický prostředek v rámci výuky obsahu.

Proces uchopení míry popsala Vondrová (2015) a reprezentuje jej následující schéma (Obrázek 3.1). Ačkoli se ze znázorněného schématu může zdát, že se jedná o lineární proces, není tomu tak. Nelinearita tohoto procesu vyplývá z praxe, kdy *„žáci, kteří již znají vzorec pro vypočítání obsahu obdélníku, se vrací zpět a zvědomují si podstatu tohoto vzorce, uvědomují si, které atributy jsou v multiplikativním vztahu“* (Vondrová 2015, s. 255). Uchopení míry je složitý proces a je třeba se k jednotlivým fázím opětovně vracet – obzvlášť při budování nových pojmů a poznatků.

I. Zachování (konzervace) míry	⇔	II. Jednotka míry	⇔	III. Numerické procesy	⇔	IV. Algebraická reprezentace
• Porovnávání útvarů • Rozdělování a seskupování do nových celků • Uvědomění si, že se pak míra nemění • Práce s komplementem		• Výběr jednotky míry • Iterace zvolené jednotky (opakované pokládání na měřený útvar) • Tvorba menších a složených jednotek • Iterace menších a složených jednotek • Odečítání míry z dané mříže		• Uvědomění si atributů, na kterých míra záleží • Uvědomění si povahy vztahu mezi nimi (např. multiplikativní vztah mezi velikostmi stran/výšek) • Zobecnění na délky vyjádřené reálnými čísly • Koordinace vizuální a číselné reprezentace míry		• Slovní popis zobecněných numerických procesů • Vyjádření vzorcem • Uvědomění si vztahů mezi vzorci pro základní útvary • Koordinace vizuální a algebraické reprezentace

Obrázek 3.1: Schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii (Vondrová 2015, s. 255)

První fáze se zaměřuje na *konzervaci míry*, čímž se rozumí rozdělení útvarů na části, které se přeskupí, přičemž je zřejmé, že celkový obsah obrazce se navzdory transformaci jednotlivých částí nezměnil (Vondrová 2019). Zachování plochy spolu s pochopením významu míry jsou nezbytnými předpoklady pro zběhlost v měřeních a ve výpočtech obsahu (Kordaki a Potari 1998).

K pochopení konzervace míry napomáhají úlohy spojené s manipulativní činností, jež se zaměřují na porovnávání obsahů útvarů za pomoci např. překrytí, rozdělení obrazce na části, které se následně přeskupí apod. (Vondrová 2019). Tyto počáteční úlohy představují izolované modely v teorii generického modelu.

Do první části pojmotvorného procesu míry patří též práce s komplementem, která spočívá v přesunu části zkoumaného útvaru, přičemž tato změna zapříčiní vznik nového a známějšího objektu se shodným obsahem (Vondrová 2019). Práce s komplementem je hojně využívána při odvozování vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku, kosodélníku, lichoběžníku a dalších.

Volba jednotky míry a její iterace ztvárňuje klíčovou roli při procesu měření. Je důležité, aby žáci pracovali s různými druhy jednotek, ne pouze se čtvercem o obsahu 1 cm^2. Jednotkou může být libovolný tvar, či jen nějaká jeho část. Po strukturaci prostoru následuje zjištění počtu jednotek, jehož zobecněním (generickým modelem) je multiplikativní struktura. (Vondrová 2019)

S multiplikativním vztahem souvisí numerické výpočty obsahu obrazce, přičemž důraz je kladen na porozumění vztahu mezi jednotlivými parametry: mezi dvěma stranami, mezi stranou a výškou apod. Při přechodu od multiplikativní struktury k numerickým procesům s využitím multiplikativních vztahů se může vyskytnout potíž, jež spočívá ve výpočtech s užitím kladných reálných čísel namísto čísel přirozených, uplatňovaných v předešlé fázi pojmotvorného procesu. (Vondrová 2019) Proces, který je spojen se zobecněním multiplikativního vztahu, jenž je nezbytným předpokladem pro porozumění vzorcům pro výpočet obsahu, popisuje podkapitola 3.3.

V poslední fázi se dle terminologie teorie generického modelu dostáváme na úroveň abstraktní znalosti, jelikož se zde objevuje jazyk algebry k popisu abstraktního uchopení multiplikativní struktury pomocí vzorců. Jestliže vzorec ve vědomí žáka nevznikl ze zkušeností získaných z výše popsaných fází pojmotvorného procesu míry a byl pouze memorován, jedná se o formální poznatek.

Celý pojmotvorný proces míry by měl být doprovázen motivací žáků. Této motivace učitel může dosáhnout volbou přiměřeně náročných úloh, které se zároveň stanou podklady pro vytvoření izolovaných a generických modelů či abstraktních znalostí. Ovšem úloha, která spočívá v prostém výpočtu obsahu nějakého předmětu, nemůže namotivovat žáky k přemýšlení a touze po nových objevech (Kamii a Kysh 2006).

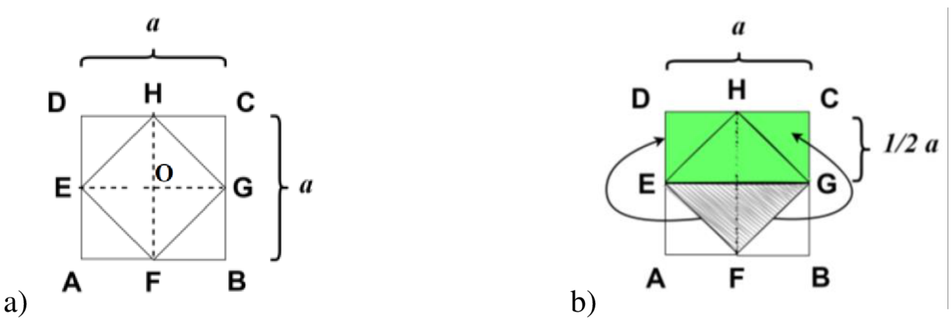
V následujících podkapitolách jsou s oporou ve vybraných studiích blíže popsány stadia konzervace plochy a její strukturace se zaměřením na multiplikativní uvažování.

3.1 Zachování (konzervace) míry

Pojem *konzervace* představuje kvantitativní neměnnost hodnoty plochy obrazce, zatímco samotný obrazec může být přeskupen na plochu kvalitativně odlišnou. Zachování míry tedy znamená, že plocha obrazce, skládající se z částí organizovaných jedním způsobem, se při přeuspořádání těchto částí nezmění. Dílčí části jsou konzervovány a z kombinací jejich transformací se vytváří rozličné útvary. (Kospentaris a kol. 2011)

Mezi klíčové koncepty pro porozumění zachování míry patří kompenzace (práce s komplementem), vztah část-celek, reverzibilita a tranzitivita (Kospentaris a kol. 2011, Puspita a Ng 2022). Zároveň Kordaki (2003) a Kospentaris a kol. (2011) považují porozumění zachování plochy za zásadní při vývoji, pochopení konceptu měření plochy a multiplikativních struktur (zavedení vzorců).

Význam výše uvedených klíčových pojmů pro porozumění zachování míry ilustruje následující ukázka. Na obrázku (Obrázek 3.2a) je vyobrazen čtverec $ABCD$ o straně délky a. Do čtverce $ABCD$ je vepsán čtverec $EFGH$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce $ABCD$. Plocha čtverce $ABCD$ je a^2. Jaký je obsah čtverce $EFGH$ a jak jej lze určit s využitím nástrojů pro zachování plochy?



Obrázek 3.2: Zachování míry – strategie komplementu (Puspita a Ng 2022, s. 33)

Ze vztahu *část-celek* vyplývá, že čtverec $EFGH$ je součástí čtverce $ABCD$ a zároveň, že čtverec $EFGH$ lze rozložit na dva trojúhelníky, a to například na trojúhelníky EFG a EGH. Využijeme-li *práce s komplementem*, přeskupením trojúhelníku EFG tak, aby vznikl obdélník $EGCD$[15] (Obrázek 3.2b) o ploše $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a$, získáváme rozměr míry čtverce $EFGH$. (Puspita a Ng 2022)

Vztah *část-celek* se využívá k analyzování částí obrazce, které vytváří komponenty jiného celku. Upotřebení tohoto spojení nacházíme také při práci s „jinými“ jednotkami měření, kdy se za základní jednotku nepovažuje jednotkový čtverec, ale například jeho polovina ve formě pravoúhlého trojúhelníku.

Reverzibilita v souvislosti s konzervací míry znamená, že transformovaný obrazec může být vrácen do původního tvaru (Puspita a Ng 2022). Tudíž z obdélníku $EGCD$ přesunutím trojúhelníků EDH a GCH znovu vznikne trojúhelník EFG, resp. čtverec $EFGH$.

Myšlenku *tranzitivity* vystihují následující výroky: obsah obdélníku $EGCD$ je shodný s obsahem čtverce $EFGH$, obsah obdélníku $EGCD$ je roven polovině obsahu čtverce $ABCD$, tudíž obsah čtverce $EFGH$ je roven polovině obsahu čtverce $ABCD$. Tranzitivita se tedy uplatňuje při vyvozování závěrů s využitím relace „$A = B$ a $B = C$, pak $A = C$“ (Puspita a Ng 2022).

K porozumění zachování míry přispívají aktivity spojené s manipulativní činností žáka, poskytující možnosti prozkoumávání tvarů o stejné oblasti (Kloboučková a Vondrová 2019). Žáci vhodnou manipulací získávají obrazce o stejných obsazích – konstruují si izolované modely.

Kompetentní nástroj pro vytváření nových izolovaných modelů, vedoucích ke konceptu zachování míry, představuje prostředí dynamické geometrie (Kordaki a Potari 1998, Kordaki 2003, Vaníček 2009, Kospentaris a kol. 2011). Kordaki a Potari (1998) uvádějí, že se žáci díky automatickým transformacím, jež jsou součástí počítačového programu, setkávají s řadami ekvivalentních tvarů, přičemž žákovské zdůvodnění ekvivalence těchto tvarů vede k objevení základních vztahů konzervace míry.

Konkrétní typ zkoumaných tříd ekvivalentních útvarů ovlivňuje pochopení zachování míry pouze pro tento druh studovaných modelů (Kospentaris a kol. 2011). Jestliže si žáci uvědomí závislost zachování obsahu rovnoběžníků, tato zjištění se automaticky nepropojují se zachováním obsahu trojúhelníků nebo nepravidelných útvarů. Je pak třeba

[15] Trojúhelníky EDH a EFG kompenzují obsah původního trojúhelníku EFG.

pracovat se sadami ekvivalentních trojúhelníků (resp. jiných ekvivalentních obrazců) k nalezení podstaty zachování obsahu u tohoto typu útvaru.

3.2 Strukturace plochy

Iterace (opakování) vhodně zvolené jednotky dle Vondrové (2015) spadá do druhé fáze pojmotvorného procesu míry v geometrii. Vybranou jednotkou, která má stejnou dimenzi jako daná míra, se bez překrývání a mezer pokryje měřený útvar (Janda a kol. 2020). Tímto procesem se utvoří *strukturace prostoru*. Přičemž Battista a kol. (1998) zjistili, že s pomocí strukturace lze pochopit, jak žáci řeší početní úlohy zaměřené na určení obsahu.

V případě dvourozměrného prostoru dochází k iteraci jednotky ve dvou směrech, čímž se zkonstruuje obdélníková mřížka – pole (Vondrová 2015). Toto pravoúhlé krytí vzniká zpočátku na základě manipulace s „dlaždicemi“, a to nejčastěji ve tvaru čtverce, které se stávají měrnými jednotkami (Huang a Witz 2013). Případně mohou žáci pracovat s útvarem vyznačeným přímo ve čtvercové síti (Janda a kol. 2020). Mezi nezbytné dovednosti žáků při strukturaci plochy patří též sestrojení a organizace kongruentních jednotek do řádků a sloupců bez jakýchkoli vnějších náznaků nápomoci (manipulace s jednotkami, využití již vytvořené čtvercové sítě).

Na základě počtu (čtvercových) „dlaždic“, nacházejících se v obdélníkové mříži, žák určí obsah obrazce. Výsledný počet měrných jednotek žák zjistí pouhým spočítáním „dlaždic“ jednu po druhé, nebo si uvědomí strukturu pole (každý řádek, každý sloupec má shodný počet jednotek) a využije násobení k určení počtu jednotek, obsažených ve zkoumaném útvaru.

Jakmile žák získá dostatek zkušeností se strukturací prostoru a se stanovením počtu jednotek, pak k výpočtu nevyužívá ilustrativní nástroje – „dlaždice“ nebo zakreslení obdélníkové mříže do zadaného útvaru (Battista a kol. 1998, Outhred a Mitchelmore 2000). Tehdy žák při zjišťování počtu jednotek pracuje jen ve svých představách.

Manipulace s „dlaždicemi“ reprezentuje plochu a zároveň napomáhá k určení výsledného počtu jednotek v obrazci. Avšak existují i jistá úskalí, spočívající ve volbě materiálu „dlaždice“. Outhred a Mitchelmore (2000) uvádějí, že žáci zvládli pokrýt plochu lépe dřevěnými (pevnými) „dlaždicemi“ než papírovými, protože materiál předurčuje strukturu pole, jelikož zabraňuje překrývání. Tudíž žák, jenž správně vytvořil obdélníkovou mříž z dřevěných dlaždic, nemusí umět tuto mříž zakreslit a nemusí rozumět její struktuře.

Z výše uvedeného vyplývá, že při přechodu od manipulace s konkrétními nástroji k pouhému vyobrazení strukturace plochy nedochází automaticky a že tento posun je velmi náročný. Grafická znázornění strukturace plochy jsou považována za zásadní prostředek při zkoumání porozumění strukturaci obdélníkových polí (Outhred a Mitchelmore 2000). Tato znázornění nijak nepředurčují organizaci a výběr vhodných jednotek, tudíž žákovo grafické zpracování strukturace zcela odráží jeho dosavadní porozumění struktuře obdélníkové mříže.

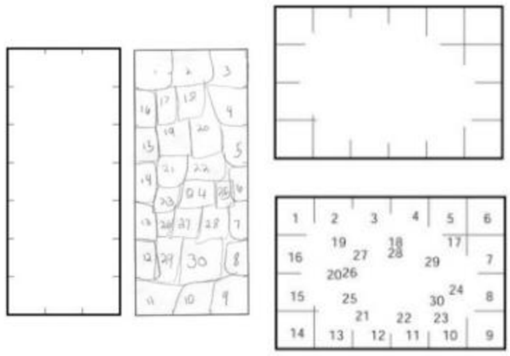
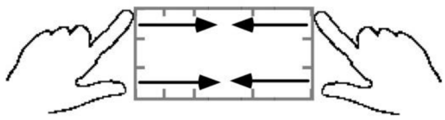
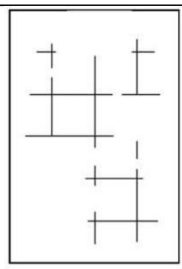
V souvislosti s obtížemi žáků při určení obsahu obrazce vzniklo množství studií, které se této problematice věnují. Některé z nich (Outhred a Mitchelmore 2000, Battista a kol. 1998, Battista 2004, Sarama a Clements 2009 ad.) zkoumají zejména strategie žáků při zjišťování obsahu, na jejichž základě vytvářejí jednotlivé vývojové úrovně. Následující podkapitola tyto úrovně blíže popisuje na základě studie Battisty (2004).

3.2.1 Výzkum Michaela T. Battisty zaměřený na plochu

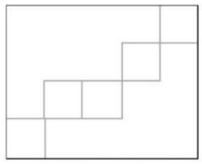
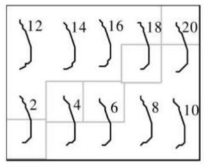
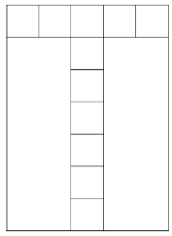
Battista (2004) strukturoval kognitivní vývoj žáků v oblasti míry na základě využití strategie pravoúhlého krytí. Vytvořil sedm úrovní, jejichž přehled spolu se základní charakteristikou je sumarizován v tabulce (Obrázek 3.3). Avšak sám Battista (2004) podotýká, že tyto úrovně jsou pouze orientační. Žák nemusí projít každou úrovní – některé může přeskočit. Případně se může stát, že žákovo působení na dané úrovni je tak krátkodobé, že jej ani nelze detekovat.

Při korektním výpočtu měrných jednotek z obdélníkové mřížky žák uplatňuje mimo jiné také následující kognitivní procesy: konstruování a užití mentálních modelů, prostorové strukturování, lokalizaci jednotek a jejich organizaci do komplexnějších komponentů. Tyto procesy Battista (2004) využívá při interpretaci žákovských myšlenek pro objasnění konkrétních kognitivních úrovní.

Mentální modely žák utváří abstrakcí s užitím vhodné *strukturace* plochy. Dle teorie generického modelu se tyto modely řadí do abstraktních poznatků. Proces *lokalizace jednotek* označuje koordinaci umístění jednotek nejprve podél hranic zkoumané oblasti. Současně se projevuje porozumění dvourozměrnému prostoru v rámci práce se „souřadnicovým systémem“, jenž vznikl spolu s bezchybně strukturovanou obdélníkovou mřížkou. Umístění jakékoli jednotky lze tedy přesně popsat z hlediska její příslušnosti k řádkům a sloupcům. Proces *organizace jednotek do komplexnějších komponentů* spočívá v seskupení základních měrných jednotek do komponent (složených jednotek), jejichž iterováním vznikne kompletní útvar (obdélníková mřížka).

Úroveň	Charakteristika	Ukázka typické strukturace plochy[16]
1 Absence procesů lokalizace jednotek a jejich organizace do komponent	Žák nezvládá organizovat jednotky do komponent (řádků / sloupců). Není schopen lokalizovat všechny měrné jednotky ve dvoudimenzionálním poli. Nedostatečná strukturace zabraňuje zjištění správného počtu jednotek v poli.	
2 Počátek využívání procesů lokalizace jednotek a jejich organizace do komponent	Žák začíná organizovat pole z hlediska složených jednotek (řádky, sloupce). Žák dokáže rozeznat ekvivalentní komponenty.	Počátek strukturace dle řádků, nacházejících se přímo u hranic útvaru. Pochopení ekvivalence těchto řádků. Nedokonalá lokalizace jednotek uvnitř útvaru. 
3 Eliminace chyb při dvojím započtení jednotky, které způsobuje nedostatečná koordinace	Žák z různých jednodimenzionálních perspektiv rozpozná lokalizaci shodné jednotky. Již nezapočítá rohový čtverec dvakrát (součást sloupce, součást řádku).	 Ekvivalence krajních řádků i sloupců bez dvojitého započtení jakékoli jednotky. Přetrvává nedostatečná lokalizace jednotek uvnitř pole.
4 Strukturace pole na základě využití maximálních kompozit, avšak není vyvinuta dostatečná koordinace při jejich iteraci	Žák strukturuje obdélníkovou mřížku podle sloupců nebo podle řádků. Lokalizace těchto kompozit kvůli nedostatečné koordinaci řádků a sloupců není přesná.	Nedostatečná koordinace iterace řádků a sloupců. Při strukturaci pole žák umístění komponenty často pouze odhaduje.

[16] Ilustrační obrázky jsou s výjimkou posledního převzaty z Battistovy studie (2004, s. 193-199).

5	Úspěšně zakončen proces lokalizace jednotek, avšak při výčtu jednotek dochází k chybám, jelikož se při výpočtu nevyužívají maximální komponenty	Strukturace pole je abstrahována, žák již pracuje s mentálním modelem. Zjištění počtu jednotek bývá často chybné, což zapříčiňuje neefektivní využití komponent. Žáci při výčtu jednotek často zapomenou, u které jednotky skončili s počítáním. Strategii pouhého výčtu jednotek nelze zobecnit, tudíž není vhodná pro rozměrné obdélníkové mříže.	  Bezchybná strukturace pole. Při počítání měrných jednotek žák nepracuje s maximálními složenými jednotkami. Dopouští se chyb.
6	Koordinace procesu lokalizace jednotek a jejich bezchybné organizace do komponent	Žák plochu strukturuje na bázi řádků a sloupců. Počet jednotek zjistí bez manipulativní opory.	 Po názorné ukázce vlastností obrazce (počet jednotek v jakémkoli řádku a sloupci) žák zvládne vyčíslit počet jednotek v poli na základě měrných jednotek obsažených v jednotlivých komponentech.
7	Abstraktní schéma strukturace umožňuje pochopení vztahu mezi numerickým procesem a prostorovým uspořádáním	Počet měrných jednotek v poli žák určí vynásobením počtu řad s počtem sloupců. Abstrakce strukturace poskytuje možnost aplikace zobecněných postupů i při práci s jednotkami odlišnými od základních.	Počet jednotek v poli žák určí vynásobením jeho délky se šířkou, přičemž žák s ohledem na zkušenosti se strukturací pole tomuto (zobecněnému) postupu rozumí.

Obrázek 3.3: Úrovně rozvoje žáků v oblasti míry dle Battisty (2004, s. 193-201)

Později Battista (2007) předkládá učební trajektorii pro obsah, v níž rozlišuje numerické a nenumerické uvažování, jež se na nejvyšší úrovni rozvoje sjednocují. Toto propojení umožňuje zjištění míry i pro nepravidelné útvary. Battistův návrh zahrnuje i strukturaci plochy – bez zmínky o jejím dělení na jednotlivé podúrovně.

Battistovou (2007) komplexní koncepcí se inspirovala Tůmová (2017) při vlastním sestavování učební trajektorie pro obsah. Tůmová do učební trajektorie zakomponovala strategii práce s komplementem. Mezi paralelní způsoby numerického a nenumerického uvažování doplnila šipku, kterou naznačuje závažnost propojení těchto linií uvažování. Učební trajektorie pro obsah dle Tůmové je uvedena v příloze B.

3.3 Multiplikativní vztah mezi délkami

Organizací obdélníkové plochy do řádko-sloupcové struktury si žák postupně uvědomuje, že každý řádek obsahuje stejný počet jednotek a každý sloupec rovněž. Taková strukturace plochy úzce souvisí s určením počtu jednotek v poli (Battista a kol. 1998). Nejdříve se počet jednotek v poli stanovuje na základě aditivity měrných jednotek. Později při práci se složenými jednotkami (řádky, resp. sloupce) lze počet jednotek v poli vypočítat nejen opakovaným sčítáním, ale také užitím násobení (Huang a Witz 2013, Clark a Kamii 1996). Outhred a Mitchelmore (2000) tvrdí, že nejsofistikovanější metodou pro zjištění počtu jednotek v poli je vyčíslit jejich počet pomocí násobení.

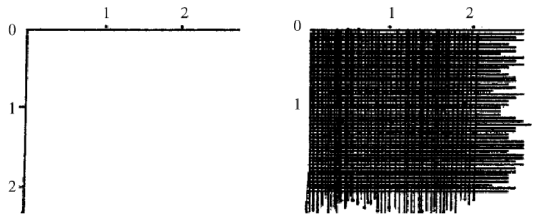
Obdélníková mřížka je považována za klíčový model pro aplikaci multiplikativního uvažování (Battista a kol. 1998, Barmby 2009). Zároveň Outhred a Mitchelmore (1992) ve svém výzkumu zjistili, že se zvyšující se kvalitou strategie pravoúhlého krytí narůstá využití multiplikativního myšlení při určení počtu měrných jednotek v poli.

3.3.1 Měrná jednotka obsahu – čtverec

Pokrývání měřeného útvaru „dlaždicemi“ ve tvaru čtverce podporuje výpočet obsahu užitím násobení délky a šířky daného útvaru. Avšak z různých studií (srov. Zacharos 2006, Kamii a Kysh 2006) vyplývá, že mnoha žákům koncept „délka × šířka“ v kontextu měření plochy nedává smysl. Dílčím závěrem výzkumu Kamii a Kysh (2006) je zjištění, že pro zúčastněné žáky 4. až 8. ročníku není čtverec měrnou jednotkou obsahu.

Objasnění příčin žákovských obtíží při neporozumění konceptu „délka × šířka“ podává již Piaget a kol. (1960). Tvrdí, že problém spočívá v pochopení toho, že vynásobením dvou čar – délky a šířky, vznikne plocha. K porozumění konceptu „délka × šířka“ je dle Piageta a kol. (1960) nezbytné vytvoření představy plochy, kterou rozdělují „nekonečně blízké čáry“ (viz Obrázek 3.4).

Jakmile jsou žáci schopni uvažovat o nekonečnu, mohou se začít zamýšlet nad představou „nekonečně blízkých čar“ a postupně si tak konstruovat rozčlenění plochy těmito čarami. Když žák tuto ideu strukturace plochy pochopí, může to znamenat, že mu již dává smysl koncept „délka × šířka“. Tudíž může čtverec chápat jako měrnou jednotku obsahu. (Kamii a Kysh 2006)



Obrázek 3.4: Představa plochy rozdělené „nekonečně blízkými čarami“ (Kamii a Kysh 2006, s. 108)

3.3.2 Porozumění vzorcům

Huang (2014) na základě výzkumu s tchajwanskými žáky třetích a čtvrtých ročníků zjistila, že při počáteční výuce výpočtů obsahů je multiplikativní uvažování zásadním faktorem pro efektivní řešení úloh zaměřených na určení obsahu. Právě multiplikativní uvažování spolu se strukturací plochy představují stěžejní pilíře k vytvoření a porozumění vzorcům pro výpočet obsahu obdélníku (Huang a Witz 2011).

Formulace vzorce již využívá jazyka algebry. Pro žáky může být tato změna problematická, jelikož přechází od modelů, spojených s manipulativní činností, přes modely vizuálně reprezentované (grafická strukturace plochy) k modelům abstraktním (Huang a Witz 2013, Vondrová a Žalská 2013). Tedy podle teorie generického modelu žák díky zkušenostem s izolovanými modely získá jejich zobecněním generický model, z nějž abstrakcí vzniká abstraktní znalost (vzorec).

Porozumění vzorcům na výpočet obsahu, se odvíjí od znalostí geometrických útvarů a jejich vlastností, od zkušeností s geometrickými transformacemi a v neposlední řadě také od procedurální zběhlosti ve výpočtech (Huang a Witz 2011). Procedurální zběhlost souvisí s aplikací vzorců a s řešením úloh podle naučených algoritmů. Mnozí učitelé při výuce míry často kladou důraz především na procedurální dovednosti žáků namísto toho, aby usilovali o jejich konceptuální porozumění (Rendl a Páchová 2013, Huang a Witz 2011).

Tendence upřednostňovat vzorce a algoritmizaci způsobuje, že žáci zobecňují využití vzorce pro výpočet obsahu obdélníku, na nějž navazují vzorce k určení obsahu trojúhelníku, rovnoběžníku a lichoběžníku. Někteří žáci samotný koncept „délka × šířka“ zaměňují za obsah, tudíž pak tuto definici aplikují i při výpočtech obsahu dalších rovinných útvarů (Zacharos 2006, Bjørkås a Van den Heuvel-Panhuizen 2019).

Předpokládá se, že žáci, jež chápou strukturaci plochy a mají rozvinuté multiplikativní uvažování, lépe porozumí vzorcům a jejich aplikaci v úlohách (Huang a Witz 2013). Tyto žákovské dovednosti se následně projeví především při aplikaci vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníků a rovnoběžníků.

3.4 Čtvercová síť

V rámci výuky poskytuje čtvercová síť široké využití nejen v oblasti geometrie, ale i aritmetiky (Hejný a Jirotková 1999). Podle Vondrové (2015) je čtvercová síť vhodným prostředkem při objevování izolovaných modelů během prvních dvou fází pojmotvorného procesu míry.

Čtverečkovaný papír v oblasti rovinné geometrie reprezentuje různé geometrické útvary a jejich vlastnosti (Vighi 2005, Hejný a Jirotková 1999, Jirotková 2012). Čtvercovou síť lze také využít jako nástroj pro měření plochy (Herendiné-Kónya 2015, Vighi 2005). Umístění geometrických útvarů do čtvercové sítě může žákům usnadnit porozumění výpočtu obsahu obrazce[17] (De Bock a kol. 2002).

3.4.1 Obsah mřížového útvaru

Zakreslení rovinného obrazce do čtvercové sítě umožňuje výpočet obsahu jakéhokoli mřížového mnohoúhelníku[18] (Hejný a Kuřina 2009). K následnému určení obsahu daného útvaru se často využívá vyjádření, sestávající se z počtu jednotkových čtverců sítě. V teorii pojmotvorného procesu dle Vondrové (2015) a také v Battistově (2004) popisu úrovní žáka v oblasti míry se obsah obrazce zjišťuje nejprve pomocí čtvercové sítě. Po nabytí zkušeností z prostředí čtvercové sítě následuje odvozování vzorců základních rovinných útvarů.

Obsah rovinného obrazce, vyznačeného ve čtvercové síti, může žák stanovit mnoha způsoby řešení bez použití vzorců. Zkušenosti získané z činností s konkrétními modely žák využije při konstruování abstraktní znalosti, tedy při formulaci vzorců pro výpočet obsahu jednotlivých rovinných obrazců (Hejný a Kuřina 2009). Tento proces od

[17] V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (2017) se uvádí, že očekávaným výstupem prvostupňového žáka v oblasti geometrie v rovině a v prostoru je mimo jiné určení obsahu obrazce právě pomocí čtvercové sítě.

[18] *„Mnohoúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body, nazýváme mřížový."* (Hejný a Jirotková 1999, s. 18)

konkrétních (izolovaných) modelů k popisu abstraktních reprezentací podporuje žákovo porozumění vzorcům.

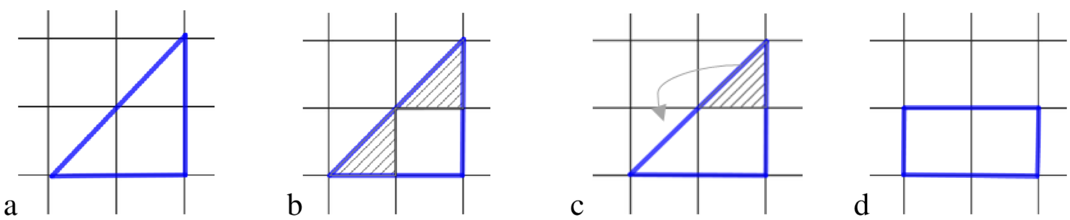
Hejný a Jirotková (1999) uvádí tři možnosti, jimiž lze určit obsah trojúhelníku na obrázku (Obrázek 3.5a) bez použití vzorce. Lze využít metody rozkladu, stříhání, nebo doplňování.

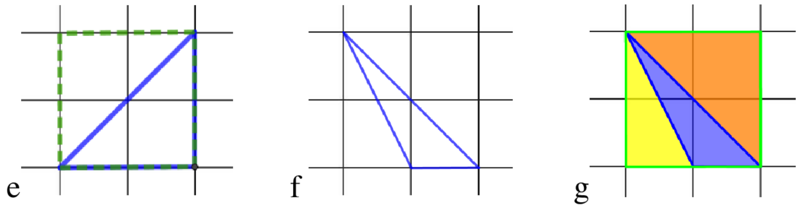
Metoda rozkladu spočívá v rozdělení trojúhelníku podle jednotkových čtverců. Tedy z obrázku (Obrázek 3.5b) vyplývá, že zkoumaný trojúhelník obsahuje jeden jednotkový čtverec a dva shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, které dohromady reprezentují též jeden jednotkový čtverec.

Metoda stříhání představuje manipulativní činnost – obdobu práce s komplementem. Ze zadaného trojúhelníku (Obrázek 3.5a) se přesune jeden pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník (Obrázek 3.5c) tak, aby jeho přemístěním vznikl obdélník (Obrázek 3.5d) se shodným obsahem jako zadaný trojúhelník.

Metoda doplňování tkví v doplnění rovnoběžníku k danému trojúhelníku (Obrázek 3.5e). Nejprve se určí obsah čtverce, z něhož jeho polovina je právě hledaný obsah zadaného trojúhelníku. Zobecněním této metody vzniká *metoda rámování* (Hejný a Jirotková 1999).

Metoda rámování se zakládá na „orámování“ zadaného obrazce, jehož obsah je třeba určit, nejčastěji obdélníkem nebo čtvercem. Od obsahu tohoto doplněného útvaru se odečtou obsahy jeho dílčích ploch tak, aby se zjistil obsah zadaného útvaru. Tuto metodu ilustruje obrázek (Obrázek 3.5f), na kterém je třeba určit obsah modrého trojúhelníku. Tento trojúhelník se orámuje čtvercem (Obrázek 3.5g), jehož plocha zahrnuje 4 jednotkové čtverce. Ke zjištění obsahu modrého trojúhelníku se od obsahu čtverce odečtou obsahy žlutého trojúhelníku (1 jednotkový čtverec) a oranžového trojúhelníku (2 jednotkové čtverce). Tedy výsledný obsah modrého trojúhelníku je 1 jednotkový čtverec ($4 - 1 - 2 = 1$).





Obrázek 3.5: Metody řešení obsahu trojúhelníku bez použití vzorců (inspirováno prací Hejného a Jirotkové (1999))

Obsah jednoduchého mřížového mnohoúhelníku[19] lze určit také pomocí *Pickovy formule*. Tato formule vyplývá ze vztahu mezi počtem vnitřních a hraničních bodů mřížového mnohoúhelníku. Znění Pickovy formule je možné odvodit na základě zkušeností s dostatečným množstvím izolovaných modelů mřížových mnohoúhelníků (srov. Hejný a Jirotková 1999, Jirotková 2012).

Holíková (2016, s. 312) předkládá Pickovu formuli následovně: *„Obsah jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech, je roven* $S = I + \frac{B}{2} - 1$, *kde* I *je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a* B *je počet mřížových bodů na jeho hranici.“* Aplikujeme-li Pickovu formuli na výpočet obsahu trojúhelníku z obrázku (Obrázek 3.5a), pak $I = 0$, $B = 6$. Tudíž obsah trojúhelníku spočítáme dosazením do vztahu $S = I + \frac{B}{2} - 1$. Konkrétně pro trojúhelník na obrázku (Obrázek 3.5a) platí, že $S = 0 + \frac{6}{2} - 1 = 2$. Tedy obsah tohoto trojúhelníku je roven dvěma jednotkovým čtvercům.

3.4.2 Geodeska

Čtvercová síť uzpůsobená k manipulativní činnosti se nazývá *geodeska* (geoboard). Geodesku, kterou v roce 1952 představil pedagog a matematik Caleb Gattegno, tvoří destička pravidelně pokrytá kolíky, uspořádanými nejčastěji do tvaru čtvercové sítě (Žilková 2010). Původně se tyto didaktické pomůcky vyráběly ze dřevěné desky, do které byly do poloviny zatlučeny hřebíčky, reprezentující pravidelnou síť (Sibya 2020). V současnosti je k dostání také plastové provedení geodesky (Žilková 2010). Na vystupující kolíky se upevňují barevné gumičky. Manipulací s gumičkami na geodesce vznikají různé útvary.

Žilková (2010) kategorizuje geodesky na základě uspořádání kolíků na destičce na:

- čtvercové: kolíky tvoří čtvercovou mříž,

[19] *„Jednoduchý mnohoúhelník je mnohoúhelník, jehož hranice je uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná. To také znamená, že uvnitř jednoduchého mnohoúhelníku nejsou žádné díry.“* (Holíková 2016, s. 312)

- trojúhelníkové: mříž se sestává ze shodných rovnostranných trojúhelníků,
- kruhové: kolíky představují vrcholy pravidelného mnohoúhelníku, jsou rozestavěné „do kružnice".

K uvedeným modelům geodesek existují jejich virtuální alternativy. Prostředí, která poskytují možnost virtuální práce s geodeskou, popsala Vojtíšková (2019).

Gattegno využíval svůj vynález v rámci dynamického přístupu k vyučování geometrie (Žilková 2010). Geodeska pozitivně ovlivňuje efektivitu výuky (Rahmiati 2016, Freire a kol. 2018). Lze ji uplatnit při výuce matematických vět a vzorců nejen z oblasti geometrie, ale také algebry (Sibya 2020).

Vhodné začlenění geodesky do výuky může zvýšit motivaci žáků. (Freire a kol. 2018, Rahmiati 2016, Sibya 2020). Geodeska podporuje aktivní učení žáků a napomáhá rozvoji jejich konceptuálního porozumění (Sibya 2020). Žáci na geodesce řeší úlohy, představující izolované modely. Na základě těchto zkušeností si žáci konstruují nové znalosti, ať již na úrovni generických modelů, nebo abstraktních poznatků.

4 Metodologie výzkumu

Účelem výzkumu zařazeného do této diplomové práce je popsat, jaké strategie žáci osmého ročníku základních škol a odpovídajícího ročníku víceletých gymnázií uplatňují při řešení úloh o výpočtu obsahu. Současně má výzkum identifikovat, jakých chyb se tito žáci při řešení úloh dopouštějí. Metodologie výzkumu je zpracována podle Strausse a Corbinové (1999) a Švaříčka a Šeďové (2007).

Kvalitativní výzkum byl uskutečněn na základě kvazistandardizovaného didaktického testu (dle Chrásky 2007). Tvorbě úloh do tohoto testu předcházela analýza vybraných učebnic matematiky pro 2. stupeň základních škol. Záměrem této analýzy bylo získat přehled o tom, jak je v učebnicích téma obsahu a jeho výpočtu vysvětlováno a jaké typy úloh se v učebnicích nacházejí. Analyzovány byly učebnice z nakladatelství Prometheus od autorské dvojice Odvárko a Kadleček, jelikož z výzkumů Vondrové a Žalské (2013) a Hammerové (2015) vyplývá, že druhostupňoví učitelé matematiky při výuce nejčastěji využívají právě tyto učebnice. Dále byla zvolena sada učebnic A–F od nakladatelství H-mat, o.p.s., neboť se výzkumu účastnili i žáci vedeni podle „Hejného metody“. Součástí analýzy byly též učebnice a pracovní sešity vydavatelství Taktik, jelikož se jedná o jedny z nejnovějších učebnic matematiky na českém trhu.

Výzkumné otázky

1. Jaké strategie uplatňují žáci osmého ročníku při řešení úloh, zaměřených na obsah rovinných obrazců a jaké chyby a překážky se při řešení těchto úloh objevují?
2. Jaké nedostatky v procedurálních a konceptuálních znalostech se projevují v žákovských řešeních úloh, zaměřených na obsah rovinných obrazců?

Metoda sběru dat

Ke sběru dat byla zvolena metoda didaktického testu. Didaktický test lze charakterizovat jako *„nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky“* (Byčkovský 1984 cit. dle Pelikána 2011, s. 172). Na základě rešerše výstupů z obdobných studií a analýzy učebnic byla sestavena sada čtyř otevřených úloh, tvořící kvazistandardizovaný didaktický test (Příloha C). Ten obsahoval jak otevřené široké úlohy, tak i otevřené úlohy se stručnou odpovědí (dle Chrásky 2007).

Zadávání testu proběhlo v prosinci 2021 a lednu 2022. Žáci nebyli k testu předem připravováni. Testování se zúčastnily čtyři školy, celkem bylo otestováno 81 žáků osmého ročníku základní školy a odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Testování žáků proběhlo během jedné vyučovací hodiny. Čas na vypracování byl maximálně 40 minut, v předcházejících 5 minutách byly žákům sděleny instrukce. Žáci byli před testováním informováni, že jejich výsledky nebudou hodnoceny známkou. Zároveň jim bylo vysvětleno, že test je součástí výzkumu k diplomové práci, jejíž záměr byl žákům též objasněn. Závěrem byli žáci požádáni, aby si na řešení úloh dali záležet, jelikož získaná data budou dále zpracovávána.

Testování bylo rozděleno do dvou částí. Nejprve žáci obdrželi první část zadání – sérii gradovaných úloh. Po jejím vyplnění získali zbylé tři úlohy, u kterých se mohli sami rozhodnout, v jakém pořadí je budou řešit. Žáci při řešení úloh měli povoleno používat pouze psací potřeby.

4.1 Výběr výzkumného vzorku

Kvazistandardizovaný didaktický test byl zadán žákům osmého ročníku základních škol a odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Zpravidla se obsah rovinných obrazců (většinou kromě obsahu kruhu) učí již v sedmé třídě. Aby byla vyloučena neznalost žáků pramenící z rozdílné koncepce školního vzdělávacího programu, byli respondenti voleni z řad osmých ročníků.

Výběr respondentů proběhl na základě dostupnosti. Jediná podmínka, která jej ovlivňovala, se týkala různorodosti typu škol. S účastí na výzkumu souhlasily čtyři školy, a to tři základní školy a jedno šestileté gymnázium. Je třeba zmínit, že žáci jedné ze základních škol se od první třídy učili matematiku podle „Hejného metody“. Z každého typu škol byla testována pouze jedna třída žáků osmého ročníku. Testu se účastnili všichni přítomní žáci. S ohledem na zachování anonymity nejsou uváděna ani umístění (město a kraj), ani názvy škol.

Vzhledem k výzkumným otázkám a cílům výzkumu není záměrem rozlišovat vybrané respondenty podle druhu škol. Avšak pro zajímavost jsou některé výsledky vztaženy k žákům z konkrétních typů škol, což vyjadřují označení skupina A, skupina B, skupina C. Skupina A označuje žáky základní školy vyučované podle „Hejného metody“, zbylí žáci základních škol tvoří skupinu B. Do skupiny C jsou zařazeni žáci šestiletého gymnázia.

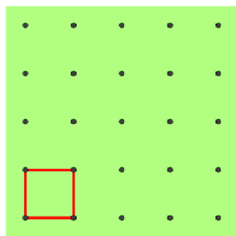
4.2 Výběr úloh a jejich a priori analýza

První částí testu je série gradovaných úloh, zaměřená na obsah základních rovinných útvarů ve vztahu k jejich obvodu. Žáci pracují ve čtvercové mříži, v níž je vždy vyobrazen jeden rovinný útvar (čtverec, obdélník a trojúhelník). Úkolem žáků je sestrojit útvar stejného typu o obsahu, který je určen poměrem vůči obsahu zadaného útvaru.

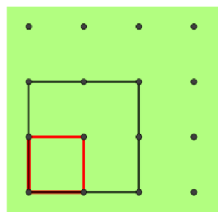
První úloha se zabývá čtvercem a zvětšením jeho plochy. Prověřuje žákovo pojetí vlivu změny obsahu čtverce ve vztahu k jeho obvodu. Zkoumá úroveň porozumění jednotce obsahu vzhledem k intuitivní tendenci lineárního řešení úlohy.

1.A Ve čtvercové mříži sestrojte **čtverec**, jehož **obsah** je **čtyřikrát větší** než **obsah** vyznačeného **čtverce**.

Vrcholy sestrojeného čtverce musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.



Čtverec se čtyřnásobným obsahem oproti obsahu červeně vyznačeného čtverce lze určit několika způsoby. Požadovaný čtverec lze získat pomocí „dlaždicování“, tedy iterací červeného čtverce. Plocha hledaného čtverce obsahuje čtyři červené čtverce ze zadání. Jiná metoda řešení této úlohy spočívá ve využití vzorce pro výpočet obsahu čtverce. Lze určit obsah červeného čtverce ($1 \cdot 1 = 1$ (j^2)) a také obsah čtverce, jehož obsah je čtyřikrát větší než obsah červeného čtverce ($4 \cdot 1 = 4$ (j^2)). Z takto zjištěného obsahu je možné stanovit délku strany nového čtverce, a to modulací vzorce pro výpočet obsahu čtverce ($\sqrt{4}$ (j) $= 2$ (j)). Další způsob řešení je založen na kvadratickém vztahu mezi délkou a obsahem, tzn. jestliže se délka strany zvětší k-krát, pak se plocha zvětší k^2-krát. Obsah hledaného čtverce je čtyřikrát (k^2-krát) větší. Délka jeho strany je tedy dvakrát (k-krát) větší než délka strany čtverce v zadání.



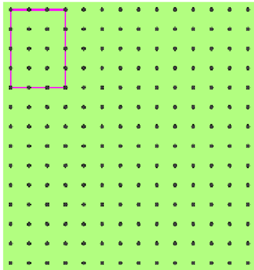
Obrázek 4.1: Řešení úlohy 1.A

Předpokládá se, že při řešení tohoto úkolu mohou žáci opomenout, že mezi obvodem obrazce a jeho obsahem existuje kvadratický vztah. Naopak namísto kvadratického vztahu aplikují vztah lineární. Tudíž zečtyřnásobí-li se obsah čtverce, délka jeho strany bude též čtyřikrát větší. Tento jev De Bock a kol. (1998) nazývají „iluzí linearity“. Dále může být pro žáky problematická absence jakéhokoli explicitně zadaného rozměru.

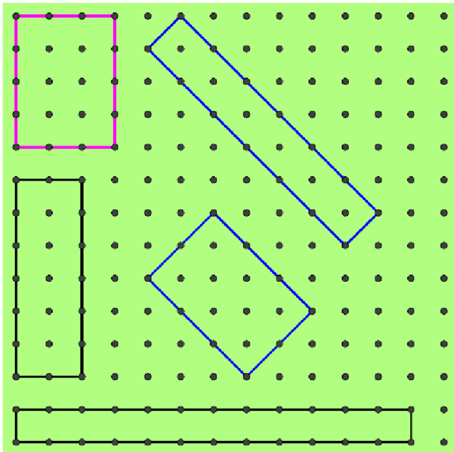
Druhé zadaní se týká konzervace plochy obrazce – obdélníku. Úkolem žáků je sestrojit co nejvíce obdélníků se stejným obsahem jako má zadaný obdélník, avšak s rozdílným tvarem. Úloha testuje žákovo porozumění dynamice vztahu mezi obrazci se shodným obsahem a jejich obvodem.

1.B Ve čtvercové mříži sestrojte **všechny obdélníky,** které mají **stejný obsah jako** vyznačený **obdélník,** ale mají navzájem **různý tvar.**

Vrcholy sestrojených obdélníků musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.



Ve čtvercové mříži lze sestavit čtyři obdélníky navzájem různého tvaru se shodným obsahem jako má zadaný obdélník (Obrázek 4.2), jejichž vrcholy leží na mřížových bodech. Úlohu lze řešit více způsoby. Jedním z nich je strukturace plochy zadaného obdélníku a následné přeskupení shodného počtu jednotkových čtverců, tvořících plochu zadaného obdélníku, do tvarově navzájem odlišných obdélníků. Strukturaci plochy zadaného obdélníku je možné uplatnit také při určení obsahu obdélníku ze zadání. Mají-li žáci dostatečně rozvinuté multiplikativní uvažování, mohou nalézt nové rozměry obdélníků se shodným obsahem, jako má zadaný obdélník. Dalším způsobem je využití vzorce pro výpočet obsahu obdélníku. Nejprve je třeba zjistit obsah zadaného obdélníku ($3\,\mathrm{j} \cdot 4\,\mathrm{j} = 12\,\mathrm{j}^2$). Následně je možné dosazováním konkrétních hodnot do vzorce dopočítat rozměry obdélníku o obsahu $12\,\mathrm{j}^2$. Nelze opomenout, že počet takových obdélníků limituje podmínka, že jejich vrcholy musí ležet na mřížových bodech. Při výpočtu je tedy možné uplatnit pouze ty hodnoty, které jsou rovny vzdálenostem mřížových bodů. Výše zmíněné splňují obdélníky o rozměrech $1\,\mathrm{j} \times 12\,\mathrm{j}$; $2\,\mathrm{j} \times 6\,\mathrm{j}$; $\sqrt{2}\,\mathrm{j} \times 6\sqrt{2}\,\mathrm{j}$; $2\sqrt{2}\,\mathrm{j} \times 3\sqrt{2}\,\mathrm{j}$.



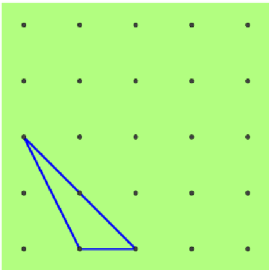
Obrázek 4.2: Kompletní řešení úlohy 1.B

Výsledné řešení žáků může zahrnovat obdélníky, jejichž obsah bude shodný s obsahem zadaného obdélníku, avšak nebudou mít různý tvar. Řešení žáků mohou být též ovlivněna záměnou významů pojmů obsah a obvod, tudíž žáci mohou svá řešení sestrojovat na základě shodnosti obvodu obdélníků namísto obsahu. Případně se žáci mohou domnívat, že zachová-li se plocha, zachová se také obvod. O existenci a vlivu této miskoncepce se zmiňují Dembo a kol. (1997). Žákům může činit potíže pracovat se čtvercovou (příp. trojúhelníkovou) jednotkou v souvislosti se strukturací plochy. Explicitně nevyjádřené rozměry mohou být pro žáky překážkou nejen při řešení pomocí aplikace vzorce pro výpočet obsahu obdélníku.

Sérii gradovaných úloh uzavírá úloha, která je opět zaměřena na zvětšení obsahu obrazce. Úkolem žáků je nalézt tři navzájem různé trojúhelníky s dvakrát větším obsahem, než má výchozí trojúhelník. Úloha testuje porozumění dynamičnosti proměnných trojúhelníku (stran a jejich výšek), na nichž závisí jeho obsah.

1.C Ve čtvercové mříži sestrojte **tři trojúhelníky** navzájem **různého tvaru**, jež **obsah** je **dvakrát větší** než **obsah** vyznačeného **trojúhelníku**.

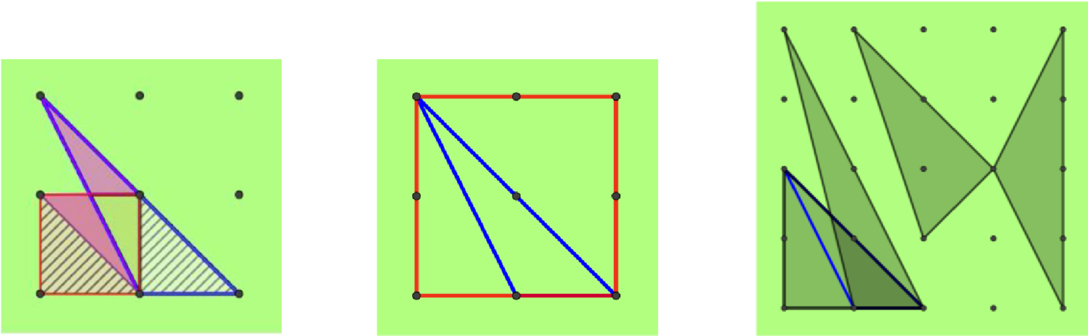
Vrcholy sestrojených trojúhelníků musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.



Existuje několik možností, jak sestrojit trojúhelníky s dvojnásobným obsahem vůči zadanému trojúhelníku. Uvědomují-li si žáci, že obsah trojúhelníku se odvíjí od velikosti jeho strany a od velikosti výšky na ni, mohou trojúhelníky s dvojnásobným obsahem nalézt pouhým zdvojnásobením délky strany, nebo zdvojnásobením výšky, nebo vynásobením délky strany a délky výšky odmocninou ze dvou, nebo zečtyřnásobením strany trojúhelníku a zmenšením příslušné výšky na polovinu atp.

V ostatních případech je nutné zjistit nejprve obsah zadaného trojúhelníku, což lze opět několika způsoby. Žáci mohou využít princip kompenzace, tedy přeskupit části čtvercových jednotek pro jednodušší určení obsahu zadaného trojúhelníku (Obrázek 4.3 – vlevo). Obsah modrého trojúhelníku lze zjistit též metodou rámování popsanou v podkapitole 3.4.1 (Obrázek 4.3 – uprostřed). Obsah je možné určit také pomocí vzorce.

Obsah modrého obrazce je roven jednotkovému čtverci, hledané trojúhelníky tedy budou mít obsah dvou jednotkových čtverců. K určení rozměrů těchto trojúhelníků lze rovněž využít vzorec. Také v tomto případě nelze opomenut, že vrcholy trojúhelníků musí ležet na mřížových bodech. Tudíž z vypočítaných rozměrů se mohou uplatnit pouze ty hodnoty, které jsou rovny vzdálenostem mřížových bodů (Obrázek 4.3 – vpravo).



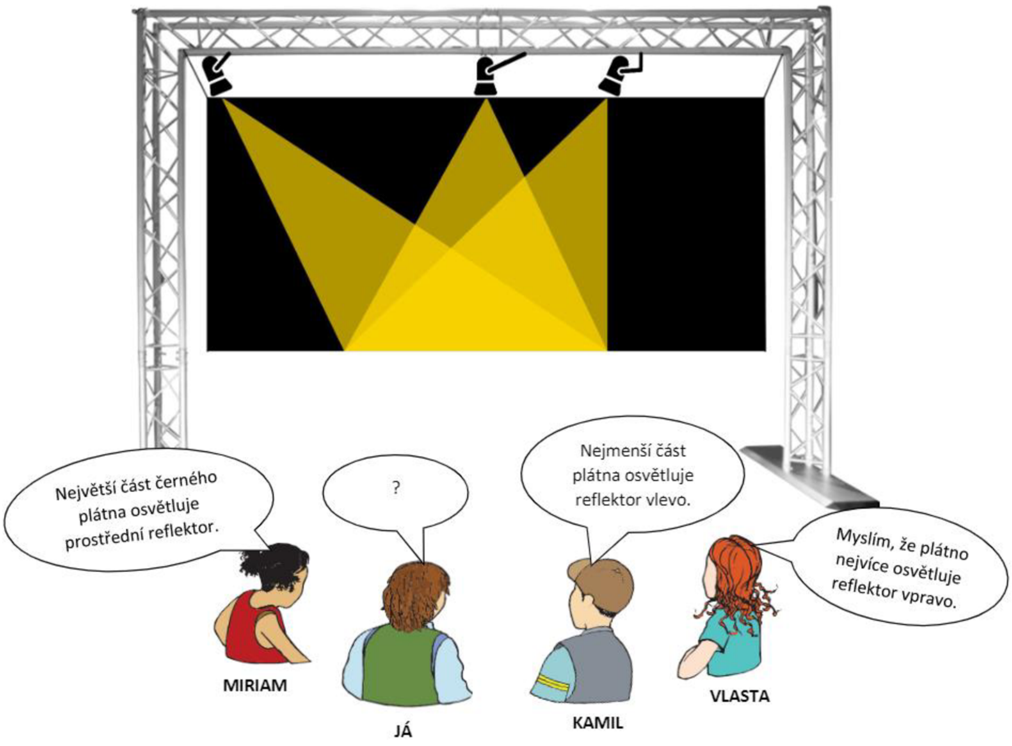
Obrázek 4.3: Princip kompenzace, metoda rámování, varianty řešení úlohy 1.C

Při řešení úlohy se u žáků mohou objevit potíže s určením výšky k vodorovné straně modrého trojúhelníku, a to především z toho důvodu, že neleží uvnitř trojúhelníku. Určí-li žáci správně délku strany a její výšky, dosadí tyto údaje do vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku. Ovšem mohou se objevit řešení, v nichž namísto vzorce pro určení obsahu trojúhelníku bude aplikován pouze vzorec pro výpočet obsahu obdélníku (Zacharos 2006, Bjørkås a Van den Heuvel-Panhuizen 2019). Při zvolení způsobu řešení bez stanovení obsahu modrého trojúhelníku mohou žáci podlehnout „iluzi linearity“. Tedy budou se domnívat, že ke zdvojnásobení plochy trojúhelníku je nutné zdvojnásobit jak jeho výšku, tak i stranu, ke které tato výška náleží.

Druhá úloha navazuje na úlohu 1.C, jelikož se implicitně zaměřuje na porovnávání trojúhelníků vzhledem k jejich obsahu. Námět pro tuto úlohu nenumerického charakteru byl převzat od Kospentarise a kol. (2011). Záměrem úlohy je prověřit konceptuální porozumění vzorci pro výpočet obsahu.

Zadání úlohy je vytvořeno podle výukové pomůcky zvané c*oncept cartoons*, která vznikla na konci 20. století ve Velké Británii. Záměrem autorů Brendy Keogh a Stuarta Naylora (1993 cit. dle Samkové 2019) bylo zlepšit zapojení žáků do vyučovacího procesu a zvýšit jejich motivaci. Concept cartoons představují speciální typ učebních úloh, které jsou reprezentovány ilustracemi. Obrázky concept cartoons znázorňují problémovou situaci a děti, které se k ní vyjadřují. Jejich názory jsou zaznamenány v bublinách. Při výuce se obrázek concept cartoon nejčastěji promítá na plátno a žáci o znázorněné problémové situaci diskutují na základě otázek typu *„Co si myslíš ty? Které děti na obrázku mají* *pravdu? Proč? Co můžeme doplnit do prázdné bubliny místo otazníku?"* (Samková 2019, s. 12).

2. Děti na obrázku odpovídaly na otázku: **Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?** Posuďte jejich tvrzení a zdůvodněte svoje rozhodnutí.



Zdroje obrázků použitých v concept cartoon viz poznámka pod čarou[20].

Tuto úlohu lze mimo jiné vyřešit aplikací Cavalieriho principu pro rovinné objekty. Při zdůvodňování tvrzení se projevuje deduktivní uvažování. Úplné řešení úlohy zahrnuje odpověď i s jejím objasněním. Všechny reflektory osvětlují stejnou část černého plátna – světlo každého z nich se na plátno „promítlo" jako trojúhelník. Všechny tři se shodují v délce jedné strany a ve velikosti k ní příslušející výšce. Z těchto údajů vyplývá, že trojúhelníky zaplňují stejnou část černého plátna. Tudíž všechny reflektory osvětlují stejnou část černého plátna.

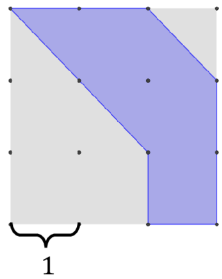
Již samotné zadání úlohy obrázkem concept cartoon může žákům způsobit obtíže. Zároveň se žáci sami musí rozhodnout, co a jak budou zkoumat. Komplikaci při řešení

[20] Šablony dětí převzaty z publikace (Dabell a kol. 2008: č. 4_1, č. 4_2, č. 4_5, č. 5_2), šablona zastřešení pódia (In: pngegg.com [online]. [cit. 2022-05-30]. Dostupné z: https://www.pngegg.com/en/png-weuzp), šablona reflektorů (In: svgrepo.com [online]. [cit. 2022-02-30]. Dostupné z: https://www.svgrepo.com/svg/149514/reflector)

může představovat absence jakéhokoli rozměru. Mohou se tedy objevit zdůvodnění založená pouze na vizuálním porovnání.

Třetí úloha je zaměřena na určení obsahu nekonvexního obrazce ve čtvercové mříži. Obdobnou úlohu, zabývající se výpočtem obsahu a také obvodu nekonvexního pravoúhelníku, do svého výzkumu zahrnuly např. Herendiné-Kónya (2015) a Tůmová (2017).

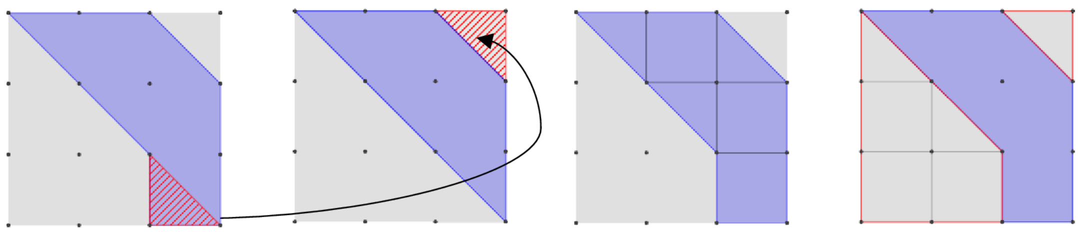
3. Vypočítejte obsah modrého obrazce, který je vyznačen ve čtvercové mříži.
Zakreslete a zapište postup svého řešení.



Obsah modrého obrazce lze zjistit několika způsoby. Jeden z těchto způsobů spočívá ve využití principu kompenzace: polovina čtverce z pravého spodního rohu geodesky (Obrázek 4.4 – vlevo) se přesune do pravého horního rohu. Z nekonvexního obrazce se stane trojúhelník (Obrázek 4.4 – druhý zleva), jehož obsah se shoduje s obsahem zadaného obrazce, jelikož princip kompenzace představuje jednu z hlavních metod konzervace plochy. Obsah zformovaného trojúhelníku lze vyjádřit buď jako polovinu obsahu šedého čtverce ($S_{\square} = 3 \cdot 3 = 9\,\mathrm{j}^2$; $S_{\Delta} = \frac{9}{2} = 4{,}5\,\mathrm{j}^2$), nebo jej lze spočítat vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníku ($S = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{j}^2$).

Druhá metoda využívá strukturaci plochy, tj. zakreslení čtvercové mříže, která vznikne iterací příslušného jednotkového čtverce (Obrázek 4.4 – druhý zprava). Obrazec pokrývají tři jednotkové čtverce a tři trojúhelníky, přičemž obsah trojúhelníku je polovinou obsahu jednotkového čtverce. Jiný způsob určení obsahu nekonvexního útvaru tkví v rozdělení tohoto útvaru na jednodušší geometrické útvary, u nichž se obsah zjistí buď strukturací jejich plochy, nebo vzorcem pro výpočet obsahu.

Další postup vychází z obsahu čtverce, v němž se modrý obrazec nachází ($S_{\square} = 3 \cdot 3 = 9\,\mathrm{j}^2$). Odečtením obsahu šedého lichoběžníku ($4\,\mathrm{j}^2$) a šedého trojúhelníku ($0{,}5\,\mathrm{j}^2$) od obsahu čtverce o rozměrech 3 × 3 (Obrázek 4.4 – vpravo) se určí obsah modrého obrazce ($9 - 4 - 0{,}5 = 4{,}5\,\mathrm{j}^2$).

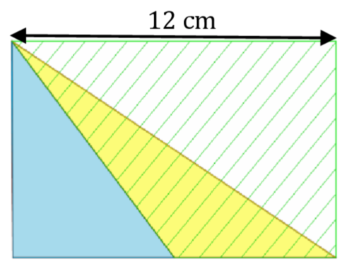


Obrázek 4.4: Ukázky způsobů řešení určení obsahu modrého obrazce (Úloha 3)

Tvar modrého obrazce, jehož obsah se má zjistit, může být pro žáky překážkou, jelikož se jedná o obecný, navíc nekonvexní mnohoúhelník, pro který neexistuje vzorec k výpočtu jeho obsahu. Pro žáky může být komplikací absence jakékoli konkrétní jednotky. Kromě toho je může mást, že ze zadání zjistí pouze vzdálenost dvou mřížových bodů. Tato informace může způsobit, že žáci se namísto výpočtu obsahu modrého obrazce budou soustředit na určení jeho obvodu. Mimo jiné se může stát, že žáci zamění význam obsahu a obvodu.

Zadání čtvrté, závěrečné úlohy bylo inspirováno ilustračními didaktickými testy z roku 2021 od organizace CERMAT (c2019), a to konkrétně kombinací osmé úlohy ze zadání pro deváté ročníky a sedmé ze zadání pro sedmé ročníky. Touto úlohou byla zkoumána flexibilita žáků při řešení úloh, jelikož součástí zadání byla pobídka k vyřešení téže úlohy jiným způsobem.

4. Obsah obdélníku na obrázku je 96 cm^2. Tento obdélník je rozdělen na tři trojúhelníky: modrý, žlutý a zbývající bílý. Obsahy modrého a žlutého trojúhelníku jsou shodné. Na obrázku je ještě zeleným šrafováním vyznačen lichoběžník.



Jaký je obsah žlutého trojúhelníku? A jaký obsah má zeleně vyšrafovaný lichoběžník? Vypočítejte a zaznamenejte postup řešení.

Zjistili jste obsah žlutého trojúhelníku a zeleně vyšrafovaného lichoběžníku? Dovedete úlohu vyřešit i jiným způsobem? Zkuste to!

Ze zadání úlohy vyplývá, že způsobů řešení existuje několik. Jeden z nich spočívá v aplikaci vzorců pro výpočet obsahu obdélníku, trojúhelníku a lichoběžníku. Nejprve se ze zadaného obsahu obdélníku dopočítá jeho šířka, jelikož součástí zadání je obrázek, ve kterém se nachází údaj o délce obdélníku. Ze vzorce pro obsah obdélníku se zjistí šířka obdélníku ($96\ cm^2 : 12\ cm = 8\ cm$). Nyní lze také dle vzorců dopočítat obsah žlutého trojúhelníku a zeleně vyšrafovaného lichoběžníku. Další způsob řešení se zakládá na vztazích mezi obsahy trojúhelníků, tvořících obdélník a jeho obsah. Součet obsahů žlutého a modrého trojúhelníku je roven obsahu bílého trojúhelníku. Obsah žlutého a modrého trojúhelníku je shodný. Obsah modrého (resp. žlutého) trojúhelníku je tedy roven čtvrtině zadaného obsahu obdélníku ($96 \text{ cm}^2 : 4 = 24 \text{ cm}^2$). Lichoběžník se skládá z bílého a žlutého trojúhelníku, jeho obsah je tedy trojnásobný oproti obsahu modrého trojúhelníku ($3 \cdot 24 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$). Mimo jiné lze určit obsah lichoběžníku odečtením obsahu modrého trojúhelníku od obsahu obdélníku ($96 \text{ cm}^2 - 24 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$). Stanovit obsah trojúhelníku a lichoběžníku lze i kombinací dosud uvedených způsobů.

Příliš silná tendence použít k řešení úlohy vzorce může být pro žáky překážkou (Vondrová 2015). Vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku mohou žáci chybně modifikovat do vztahu, v němž pouze vynásobí stranu a výšku, nebo vynásobí (někdy i sečtou) všechny tři strany trojúhelníku (Comiti a Moreira 1997, Vondrová a Žalská 2013). Další potenciální komplikaci představuje samotné zadání úlohy, jelikož údaje potřebné k řešení jsou zčásti obsaženy v textu a zčásti se nachází v ilustračním obrázku, který je nedílnou součástí zadání. Žáci však mohou obrázek opomenout.

4.3 Analýza a zpracování dat

Výsledky testu byly zapsány do tabulky v programu Microsoft Excel. V každém řádku tabulky se nacházely výsledky konkrétního žáka. Vzhledem k otevřenosti úloh se do tabulky zaznamenával nejen výsledek žákova řešení, ale i jeho postup, a to buď opisem, nebo doslovným přepisem. Následovalo otevřené kódování těchto dat. Nejprve byly k jednotlivým jevům přiřazeny pojmy, které je charakterizovaly. Obdobné pojmy se pak slučovaly do výzkumných kategorií. V průběhu porovnávání jednotlivých pojmů a kategorií docházelo k jejich vzájemné restrukturalizaci. Přehled zakódovaných řešení žáků, kteří jsou rozřazeni do skupin A, B a C, obsahuje příloha D.

Zakódovaná data byla kvalitativně analyzována metodou deskripce. Získaná data byla uspořádána a klasifikována. Klasifikaci dat popisuje výzkumná zpráva (kapitola 5), kterou tvoří čtyři podkapitoly. Jejich obsahem je specifikace častých nejen správných, ale i chybných jevů, vyplývajících z analýzy žákovských řešení.

Limity výzkumu

Realizovaný výzkum a jeho výsledky mají svá omezení. Vzhledem k vybranému vzorku respondentů a volbě kvalitativního výzkumu nelze získané výsledky generalizovat. Limitem výzkumu je též sběr dat metodou didaktického testu. Bylo by přínosné zkombinovat zvolenou metodu například s polostrukturovanými rozhovory se žáky. Dále by bylo možné podrobněji rozpracovat zadání některých úloh. Například by se obrázek concept cartoon mohl stát dynamickým modelem namísto statického. Také by bylo zajímavé pozorovat v prostředí čtvercové mříže úvahy žáků o konzervaci plochy jednotlivých rovinných obrazců.

5 Výzkumná zpráva

V této kapitole jsou shrnuty výsledky realizovaného výzkumu. Výzkumná zpráva je členěna podle kategorií, které se objevily v řešeních žáků napříč všemi zadanými úlohami. Nejprve jsou popsány jevy, které vyplývají ze vztahu mezi obsahem a obvodem. Následuje podkapitola týkající se plochy a její strukturace, která vychází z popisu pojmotvorného procesu míry uvedeného v teoretické části této práce. Další podkapitola se zabývá konceptuálním porozuměním žáků, jež se projevilo při porovnávání obsahu trojúhelníků. Závěrečná podkapitola shrnuje strategie žákovských řešení.

5.1 Vztah mezi obvodem a obsahem

Na vztah mezi obvodem a obsahem rovinných útvarů byla v testu explicitně zaměřena série gradovaných úloh, která tvořila první část kvazistandardizovaného didaktického testu. Nicméně vzhledem k provázanosti obvodu a obsahu nejen z hlediska didaktického, ale také v souvislosti s uplatněním shodných proměnných, vyskytujících se ve vzorcích jak pro obvod, tak pro obsah, se vztah mezi obvodem a obsahem projevil i v dalších úlohách.

V následujících podkapitolách jsou blíže popsány jednotlivé jevy, které se často objevovaly v řešeních žáků v souvislosti se vztahem mezi obvodem a obsahem geometrických útvarů.

5.1.1 Intuitivní pravidla

V řešeních žáků se výrazně projevilo užití intuitivních pravidel. Teorii intuitivních pravidel formulovaly Dina Tirosh a Ruth Stavy. Její využití spočívá v predikci a také v objasnění studentských řešení a jejich argumentace v úlohách z oblasti přírodních věd. Východiskem pro tuto teorii s uplatněním v komparativních úlohách jsou dvě základní intuitivní pravidla „*Více A – více B*“ a „*Stejné A – stejné B*“[21]. Nejen u studentů se projevuje výrazná tendence nadměrné aplikace těchto pravidel (Dembo a kol. 1997). Tvrzení učiněná na základě intuitivních pravidel jsou jejich tvůrci považována za přirozeně pravdivá a jejich platnost není nijak zdůvodňována (Van Dooren a kol. 2004).

[21] Originální znění těchto pravidel je „More *A* – more *B*“ a „Same *A* – same *B*“.

Více A – více B (More A – more B)

Pravidlo „Více A – více B“ se uplatňuje v situacích, v nichž se porovnávají objekty, které se od sebe liší v oblasti určité veličiny (A). Na základě této odlišnosti si řešitel mezi těmito dvěma předměty vytvoří vztah ($A_1 > A_2$), jenž ovlivní srovnávání dalších veličin (B), spojených s těmito předměty. Převažuje tendence tvrdit, že $B_1 > B_2$ (resp. $B_1 < B_2$), protože $A_1 > A_2$ (resp. $A_1 < A_2$). Tato intuitivní argumentace je často pravdivá, avšak existují i případy, kdy je pravidlo „Více A – více B“ nadužíváno (Van Dooren a kol. 2004). Typickým příkladem mylné aplikace tohoto pravidla se stal vztah mezi obvodem, obsahem a objemem zvětšovaných (resp. zmenšovaných) obrazců (De Bock a kol. 2002, Van Dooren a kol. 2005).

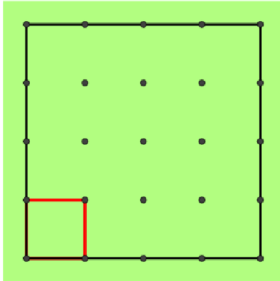
Úlohu zaměřenou na vztah mezi obvodem a obsahem, zvětší-li se plocha obrazce, uvádí již Platón. V dialogu *Menón* (Platón 2000) se Sókratés otroka ptá na obsah čtverce, jehož strana má dvě stopy. Otrok správně určí obsah tohoto čtverce i jeho dvojnásobku. Zádrhel nastává v momentě, kdy má otrok určit délku strany zdvojnásobeného čtverce. Otrok se domnívá, že délka strany nového čtverce bude dvojnásobná oproti straně výchozího čtverce.[22]

K získání dvojnásobného obsahu čtverce se otrok rozhodl zdvojnásobit stranu zadaného čtverce – předpokládal, že vztah mezi obvodem a obsahem je lineární. De Bock a kol. (1998, 2002) jev, spojovaný s aplikací lineárního vztahu na problém nelineárního charakteru, nazývají „iluzí linearity“. V matematice se lineární model objevuje často, což může u žáků vyvolat mylnou představu, že jakýkoli numerický vztah je lineární (De Bock a kol. 1998).

Iluze linearity se projevila také u respondentů tohoto výzkumu, a to především v úlohách týkajících se sestrojení obrazců s vícenásobným obsahem. Dále je třeba zmínit, že argumentace žáků ve druhé úloze, která testovala konceptuální porozumění zachování obsahu trojúhelníku, byla velmi pravděpodobně také ovlivněna intuitivními pravidly. Výpovědi žáků založené na předpokladu „Více A – více B“ nezahrnovaly pouze vztah mezi obvodem a obsahem. Veškerá zdůvodnění ohledně porovnávání obsahu trojúhelníků (Úloha 2) jsou zařazena do samostatné podkapitoly 5.3.2.

[22] Sókratés se s mylnou odpovědí otroka nespokojí a posloupností návodných otázek otrok nakonec zjišťuje délku strany čtverce, aby jeho obsah byl dvojnásobný oproti původně zadanému čtverci.

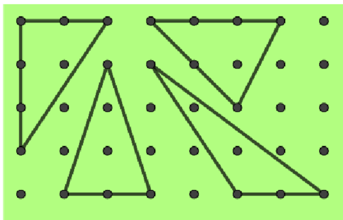
Při sestrojení čtverce, který bude mít čtyřnásobný obsah vůči zadanému čtyřúhelníku (Úloha 1.A) se iluze linearity vyskytla v řešeních žáků základních škol (skupina B[23]). Tito žáci si neuvědomili, že vztah mezi obvodem a obsahem není lineární, ale kvadratický. Jelikož byl požadován čtyřnásobný obsah, žáci původní stranu čtverce čtyřikrát zvětšili (Obrázek 5.1). Avšak nelze vyloučit, že namísto iluze linearity se u žáků projevila pouhá záměna pojmů obsah a obvod (viz podkapitola 5.1.2). Iluze linearity se neprojevila ani u skupiny A, ani u skupiny C.



Obrázek 5.1: Iluze linearity – čtverec

Při překonávání tendence využít intuitivní pravidlo mohlo žákům pomoci zadání formou ilustrace. To lze zpozorovat u jednoho z respondentů, který nejprve zakreslil čtverec o délce strany 4 jednotky. Pak toto řešení vygumoval a sestrojil čtverec se čtyřnásobným obsahem vůči zadanému čtverci. Navzdory možnosti vizuální kontroly se vyskytla řešení, která nejspíše vznikla právě na základě „iluze linearity“. Tsamir (2003) a Van Dooren a kol. (2005) svými výzkumy potvrdili, že pro mnoho studentů má poskytování nákresů pozitivní vliv na řešení neproporcionálních úloh. Van Dooren a kol. (2005, 2007) dále dodávají, že výkon žáků také zlepšují úlohy, spojující řešení nelineárních problémů s manipulativní činností.

Intuitivní pravidlo „Více A – více B“ se objevilo také v řešeních úlohy, v níž žáci měli sestrojit trojúhelníky s dvojnásobným obsahem (Úloha 1.C). Výsledkem aplikace tohoto pravidla vznikl trojúhelník s trojnásobným obsahem oproti původnímu obsahu zadaného trojúhelníku. Žáci vzhledem k požadavku dvojnásobného trojúhelníku zdvojnásobili nejen stranu, ale i výšku zadaného trojúhelníku. Častým výsledkem tohoto postupu byl tupoúhlý trojúhelník, ojediněle se vyskytl i ostroúhlý a rovnoramenný trojúhelník (Obrázek 5.2).



Obrázek 5.2: „Více A – Více B“ – trojúhelník

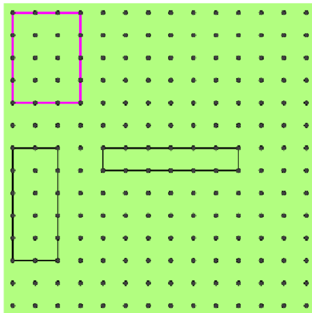
U některých žáků se iluze linearity objevila jak v úloze 1.A, tak i 1.C. Tito žáci si nejspíše neuvědomují existenci kvadratického vztahu mezi obvodem a obsahem. De Bock a kol.

[23] Skupina A označuje žáky základní školy vyučované podle „Hejného metody“, zbylí žáci základních škol tvoří skupinu B. Do skupiny C jsou zařazeni žáci šestiletého gymnázia.

(1998) tvrdí, že porozumění vztahům mezi obvodem, obsahem a objemem je většinou zdlouhavý a obtížný proces.

Stejné A – stejné B (Same A – same B)

Při komparaci dvou objektů, které se shodují v konkrétní porovnávané veličině ($A_1 = A_2$) často dochází k přesvědčení, že i ostatní veličiny těchto předmětů si musí být taktéž rovny ($B_1 = B_2$). Toto intuitivní pravidlo „Stejné A – stejné B“ je mimo jiné spojováno se vztahem mezi obvodem a obsahem. V široké společnosti panuje mylná představa, že geometrické útvary se stejným obvodem musí mít i stejný obsah a naopak (Dembo a kol. 1997, D´Amore a Pinilla 2006). Dembo a kol. (1997) tvrdí, že vznik myšlenky o shodnosti obvodu a obsahu rovinných obrazců může být způsobený tím, že obvod a obsah se většinou učí ve stejném ročníku a že vzorce pro obvod a obsah jsou zpravidla určovány stejnými proměnnými. Proto se žáci mohou domnívat, že zůstane-li zachována rovnost obvodů rovinných obrazců, také obsahy těchto objektů si musí být rovny.



Obrázek 5.3: Miskoncepce „stejný obvod – stejný obsah“

Tato miskoncepce „stejného obvodu – stejného obsahu“ se projevila v řešeních žáků, a to při konstrukci rozličných obdélníků se shodným obsahem (Úloha 1.B). Žáci v domnění, že zachování obsahu bezprostředně souvisí se zachováním obvodu, sestrojovali obdélníky, jejichž obvod byl shodný s obvodem zadaného obdélníku. Řešení těchto žáků ve většině případů zahrnovala obdélník o rozměrech 2×5 a také 1×6 (Obrázek 5.3). Obvod obou těchto obdélníků se shodoval s obvodem zadaného obdélníku (tj. 14 j), avšak jejich obsah se vzájemně lišil, což bylo zřejmé i z vizuálního hlediska. Avšak Tsamir (2003) a Van Dooren a kol. (2004) tvrdí, že přesvědčení o platnosti intuitivního pravidla může být natolik pevné, že žáci nepotřebují svá zdůvodnění jakkoli dokazovat či ověřovat. Nicméně existuje i další možnost, proč žáci vytvořili obdélníky s rozměry 2×5 a také 1×6. Důvodem k sestrojení těchto obdélníků se mohla stát záměna významu obsahu a obvodu (viz podkapitola 5.1.2).

Ideu, že mezi obvodem a obsahem existuje lineární vztah a že shodný obvod dvou obrazců zaručuje i shodnost jejich obsahů, uplatňují nejen žáci, ale mnohdy dokonce i jejich učitelé (D´Amore a Pinilla 2006, Dembo a kol. 1997, Van Dooren a kol. 2007). Liping Ma (2021, s. 102) zkoumala odpovědi amerických a čínských učitelů na teorii žákyně, která tvrdí, že *„... se zvětšujícím se obvodem uzavřeného obrazce se rovněž zvětšuje jeho obsah.“* Reakce pedagogů na tvrzení žákyně byla různá. Někteří učitelé tvrzení rovnou přijali, jiní byli nerozhodní, nevěděli, jak postupovat. Ostatní učitelé se pokusili dokázat pravdivostní hodnotu výroku žákyně.

5.1.2 Záměna obvodu a obsahu

V řešeních žáků se často vyskytovaly chyby, které by mohly pramenit ze záměny mezi významem pojmů obsahu a obvodu, či jen ze záměny těchto dvou termínů. Záměrem této podkapitoly je představit potenciální příčiny, způsobující záměnu obvodu a obsahu. Následuje rozbor žákovských řešení, souvisejících se zmiňovanou záměnou. Tato řešení jsou rozdělena do dvou kategorií: záměna obsahu za obvod, konflikt obvodu a obsahu.

Konceptuální porozumění

„Většina tradičně koncipovaných učebnic neodděluje budování konceptu obsah a obvod od uvedení vzorce jako návodu na výpočet obsahu či obvodu.“ (Jirotková a Kloboučková 2013, s. 45) Pojmy jsou žákům vysvětlovány již v souvislosti se vzorci, které už ovšem užívají jazyka algebry. Často tedy žáci získají jen formální poznatek, který je uchopen pouze pamětí, namísto toho, aby si na základě svých zkušeností s izolovanými a generickými modely vytvořili abstraktní poznatek.

Následkem předčasného zavedení vzorců může u žáků vzniknout představa, že obsah (resp. obvod) je pouze číslo, jelikož vzorce jsou často vnímány procesuálně jako návod (Jirotková a kol. 2019, Comiti a Moreira 1997). Konceptuální náhled, že vzorce popisují vazby mezi několika parametry, často chybí (Jirotková a Kloboučková 2013). Tento přístup způsobuje, že si žáci pletou vzorce pro obsah a obvod právě kvůli povrchní znalosti procedur (Vondrová a Žalská 2013).

Jirotková a kol. (2019) svým výzkumem potvrdily, že je nutné budovat koncept obvodu nejprve porovnáváním délek hranic bez měření, teprve poté s udáním číselných hodnot (využitím pravítka). Žáci si díky manipulativním činnostem osvojí geometrický význam pojmu. Obdobný postup lze uplatnit i při zavádění pojmu obsah.

Terminologie

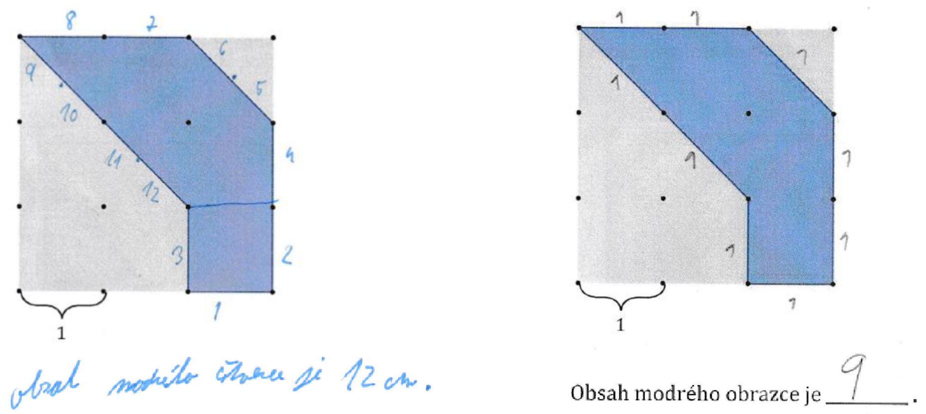
Běžná každodenní komunikace může zkomplikovat porozumění pojmům obvod a obsah (Dembo a kol. 1997, Jirotková a Kloboučková 2013). Tyto pojmy se totiž vyskytují v hovorovém jazyce, ale také v geometrické terminologii a v každém pojetí mají odlišný význam. Slovo „obsah“ se v hovorovém jazyce spojuje se souslovími (obsah lahve, obsah kapsy, obsah motoru), která nekorespondují s geometrickým významem pojmu obsah. Naopak chceme-li mluvit o obsahu např. pozemku, tak se v hovorovém jazyce často užívají slova typu plocha, výměra. (Jirotková a Kloboučková 2013, Jirotková a kol. 2019)

Příčinou záměny nebo také nerozlišování pojmů obvod a obsah může být běžný popis velikosti objektů. Mluví-li se o prostorném pokoji, již se nespecifikuje, zda to je pokoj s velkým obvodem nebo velkým obsahem. Uplatňování této kvalifikace může způsobovat domněnku, že obvod a obsah představují „to samé“. (Dembo a kol. 1997)

Záměna obsahu za obvod

Záměna obvodu a obsahu se nejvýrazněji projevila ve třetí úloze, jež se zaměřovala na výpočet obsahu modrého obrazce ve čtvercové mříži. Vzhledem ke způsobu sběru dat nelze specifikovat, zda se jednalo o záměnu termínů, nebo o záměnu významů pojmů obvod a obsah. Při řešení třetí úlohy zaměnili obsah za obvod pouze žáci základních škol (skupina A, skupina B).

Žáci zabývající se určením délky hranice modrého obrazce dosáhli různých výsledků, mezi nimiž byly nejčastěji hodnoty 9 a 12. Různorodost odpovědí byla zřejmě zapříčiněna chybným určením délky diagonální úsečky. Diagonální úsečka byla zpravidla počítána jako úsečka o délce 1 (Obrázek 5.4 – vpravo), nebo úsečka o délce 2, přičemž se stávalo, že si žáci na diagonální úsečku doplnili „chybějící“ mřížové body (Obrázek 5.4 – vlevo). Nikdo z žáků, kteří se zaměřili na výpočet délky hranice modrého obrazce, neurčil správně délku úsečky mezi diagonálně umístěnými body.

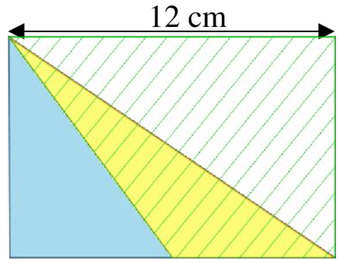


Obrázek 5.4: Úloha 3, záměna obvodu za obsah – práce s odmocninou

Nerozlišováním obvodu a obsahu, potenciálním zmatkem v terminologii pojmů obsah a obvod nebo záměnou významů těchto pojmů mohla vzniknout variabilní žákovská řešení úlohy 1.B, která byla zaměřena na sestrojení obdélníku se shodným obsahem jako má zadaný obdélník. Žáci například sestrojili obdélník, jehož obvod se shodoval s obsahem zadaného obdélníku anebo byl také řešením obdélník, jehož obsah se shodoval s obvodem zadaného obdélníku.

V úloze 1.B se mezi řešeními objevoval také obdélník o rozměrech 2×10. Příčinou konstrukce takového obdélníku může být aplikování *aditivního vzorce pro výpočet obsahu*. O tomto typu vzorce, který spočívá v určení plochy obdélníku sečtením jeho rozměrů, se zmiňují již Anderson a Cuneo (1978 cit. dle De Bock a kol. 2002).

Záměna obvodu a obsahu se vyskytla u několika žáků i při řešení úlohy, ve které měli žáci zjistit obsah žlutého trojúhelníku a zeleně vyšrafovaného lichoběžníku (Obrázek 5.5). Žáci základních škol (skupina A, skupina B) tak obsah trojúhelníku a lichoběžníku určili jako součet délek stran těchto útvarů, přičemž z řešení žáků často není patrné, jak tyto hodnoty získali.



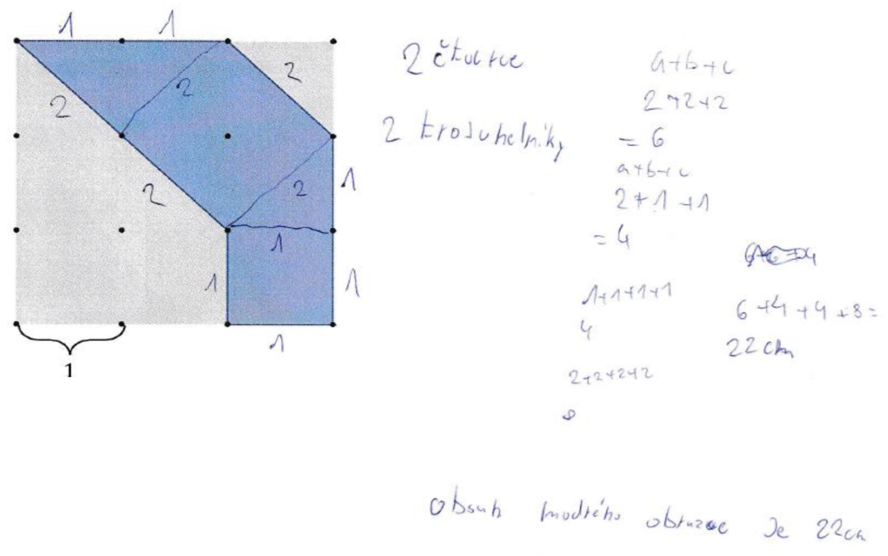
Obrázek 5.5: Ilustrační obrázek čtvrté úlohy

Konflikt obvodu a obsahu (Perimeter-area conflict)

Úkolem žáků ve třetí úloze bylo určit obsah modrého obrazce. Jedním ze způsobů řešení této úlohy je rozdělení nekonvexního obrazce na útvary, jejichž obsah lze zjistit např. výpočtem dle vzorce. Výsledný obsah modrého obrazce je určen součtem obsahů jednotlivých a vzájemně se nepřekrývajících geometrických útvarů, které tvoří plochu tohoto obrazce. Tento princip stanovení obsahu obrazce jako součtu obsahů dílčích útvarů se označuje pojmem *aditivita obsahu*.

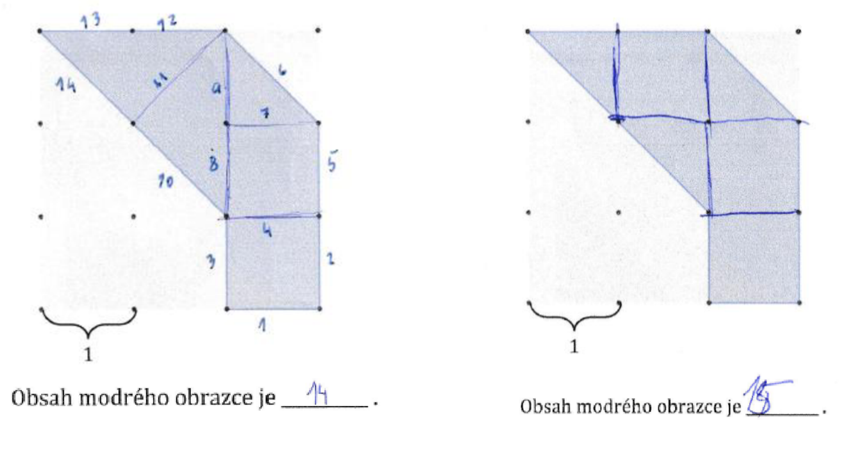
Konfliktem obvodu a obsahu Marchett a kol. (2005) nazývají jev, při kterém žáci ideu aditivity obsahu uplatní i na obvod. Konflikt obvodu a obsahu se tedy projevuje tím, že žáci obrazec rozdělí na části, spočítají jejich obvod a tyto obvody pak sečtou.

Konflikt obvodu a obsahu se projevil právě při řešení třetí úlohy. Řešení některých žáků obsahovala strukturaci modrého obrazce – rozdělení plochy modrého obrazce iterací čtverce o délce 1, nebo rozčlenění nekonvexního útvaru na základní rovinné útvary. Avšak žáci pak namísto výpočtu obsahu obrazce počítali obvody jednotlivých částí, které následně sečetli a získanou hodnotu považovali za obsah celého obrazce. Obrázek 5.6 ilustruje jeden z případů konfliktu obvodu a obsahu.



Obrázek 5.6: Konflikt obvodu a obsahu

Další typ řešení je velmi podobný konfliktu obvodu a obsahu. Mnozí žáci totiž rozdělili nekonvexní obrazec a pak spočítali počet všech zaznamenaných hranic, čímž zjistili obsah nekonvexního obrazce (Obrázek 5.7). To částečně odpovídá závěrům Kamii a Kysh (2006), které zjistily, že někteří žáci stanovují obsah nepravidelného útvaru jako počet sdílených stran mezi dílčími částmi obrazce.



Obrázek 5.7: Chybné určení obsahu modrého obrazce

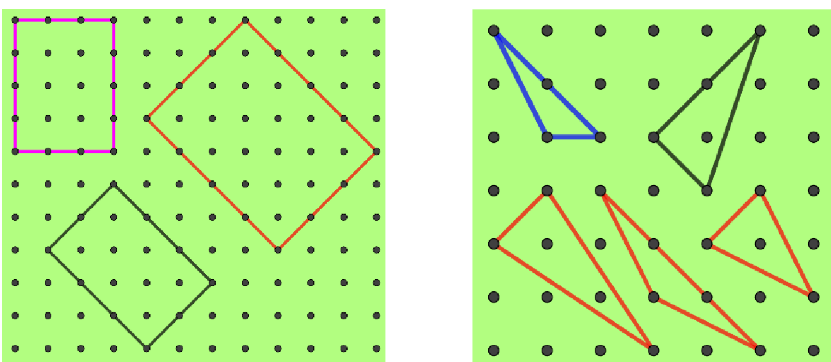
Diagonála a její velikost

Již bylo naznačeno, že práce s diagonální úsečkou činila žákům potíže. V následujících odstavcích jsou uvedeny konkrétní ukázky aplikace chybných rozměrů diagonální úsečky. Vighi (2005) uvádí, že příčinou problému určení délky diagonální úsečky může být tradiční pojetí práce se čtvercovou sítí, ve kterém bývá diagonální směr upozaďován. Takový přístup vede k představě, že čtvercovou mříž lze využít k posunutí pouze ve směru horizontálním a vertikálním

Problém s diagonálou a určením její délky se vyskytl při řešení úloh, které byly zadány právě v prostředí čtvercové mříže. Konkrétně se jedná o úlohy 1.B, 1.C a 3. V úlohách 1.B a 1.C žáci sami zakreslili úsečku diagonálně, zatímco ve třetí úloze už tyto úsečky byly součástí zadání a žáci tak určovali pouze jejich délku.

Úloha 1.B, v níž žáci měli sestrojit obdélníky stejného obsahu a jiného tvaru jako zadaný obdélník, zahrnovala dvě správná řešení, ve kterých byly obdélníky umístěny diagonálně ($\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$). Z celkového počtu respondentů pouze dva žáci sestrojili diagonálně umístěný obdélník ($2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$), který splňoval požadovaná kritéria. Ostatní žáci, kteří obdélník zkonstruovali diagonálně, nesplňovali podmínku o dodržení shodnosti obsahu. Poměr stran takových obdélníků se shodoval s poměrem stran zadaného obdélníku. Žáci mohli sestavit tento obdélník v domnění, že sestavují pouze další obdélník 3×4. To by ovšem znamenalo, že tito žáci si nejspíše neuvědomují odlišnost délky diagonální úsečky od úseček v horizontálním a vertikálním směru.

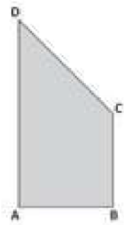
Taktéž v úloze 1.C byly součástí žákovských řešení trojúhelníky, z nichž některé jejich strany byly umístěny opět diagonálně. Správná řešení s využitím diagonály byla opět pouze dvě. Pokaždé se jednalo o trojúhelník se stranou o délce $\sqrt{2}$ a výška k této straně měla délku $2\sqrt{2}$. Ostatní řešení trojúhelníků s diagonálně umístěnými stranami byla chybná (Obrázek 5.8).



Obrázek 5.8: Příklady správného (černá hranice) a chybného (červená hranice) užití diagonály v úlohách 1.B a 1.C

Nejvýrazněji se chybné určení délky diagonální úsečky projevilo ve třetí úloze, a to především v situacích, kdy se žáci namísto obsahu modrého obrazce zabývali jeho obvodem, případně určovali obvod vyznačených dílčích částí modrého obrazce (konflikt obvodu a obsahu). Délka diagonální úsečky se často shodovala s délkou jednotkové úsečky. Mnohokrát byla délka diagonální úsečky zaměňována s dvojnásobkem délky jednotkové úsečky. Ojediněle se objevila řešení, v nichž žák pracoval s diagonálou, jejíž délku určil jako jeden a půl násobek délky jednotkové úsečky.

Problém žáků s diagonálními úsečkami a určením jejich délek potvrzují i další studie. Vighi (2005) zjistila, že žáci ztotožňovali délku diagonální úsečky s délkou jejího horizontálního, či vertikálního promítnutí. Z výsledků studie Jirotkové a kol. (2019) vyplývá, že délka šikmé úsečky CD lichoběžníku $ABCD$ (Obrázek 5.9) byla zaměňována s délkou vodorovné úsečky AB.



Obrázek 5.9: Problém diagonální úsečky (Jirotková a kol. 2019, s. 222)

Jednotky

Míra v geometrii úzce souvisí s problematikou převodů jednotek. Z výzkumu Rendla a Vondrové (2013) vyplynulo, že převody jednotek činí žákům problémy, a to především kvůli chybějícímu konceptuálnímu porozumění jednotkám. Nedostatečné konceptuální porozumění jednotkám se projevilo i ve výzkumu Tůmové (2017). Žákům činilo potíže vyřešit úlohu[24], která v zadání neobsahovala konkrétní jednotky.

Problém způsobený absencí konkrétních jednotek se projevil i v tomto výzkumu, a to především v průběhu psaní testu. Žáci se při řešení třetí úlohy ptali, jakou jednotku mají použít. Tato otázka byla nejčastěji pokládána při psaní odpovědi, nebo při dokončení výpočtu. Tůmová (2017) se domnívá, že tyto problémy žáků se odvíjí od koncepce učebnic, které kladou velký důraz na přítomnost a správnost jednotek.

V zadání třetí úlohy byla určena jednotková úsečka o délce 1. Všichni žáci tento rozměr objevili, pracovali s ním. Avšak potíž nastala při stanovení jednotky vypočítaného obsahu obrazce. Většina žáků neuvedla žádnou jednotku při určení obsahu modrého obrazce. Nejčastěji udávanou jednotkou byla konkrétní jednotka obsahu, a to zpravidla cm^2. Odpovědi žáků zahrnovaly i konkrétní jednotky délky (cm), a to především tehdy, pokud se žák při řešení úlohy zabýval hranicemi obrazce a jeho dílčích částí.

[24] *„Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?“* (Tůmová 2017, s. 53)

Ze shromážděných dat vyplývá, že variabilitou jednotky se zabývali pouze čtyři žáci. Dva z nich jednotku obsahu modrého obrazce označili jako x^2. Další k výslednému rozměru ploch modrého obrazce připsal „čehosi²“. Poslední variantou jednotky obsahu bylo vyjádření obsahu pomocí jednotkového čtverce.

Při stanovení jednotky obsahu se objevily chyby i ve čtvrté úloze, která se zaměřovala na výpočet obsahu trojúhelníku a lichoběžníku. Žáci nejčastěji udávali správnou jednotku obsahu vzhledem k zadání. Ovšem vyskytlo se mnoho odpovědí, jež jednotku neobsahovaly. Dále někteří žáci opět namísto jednotky obsahu uváděli jednotku délky. Tuto chybu mohlo způsobit nedostatečné konceptuální porozumění, nebo záměna jednotek délky a obsahu, nebo záměna pojmů délky a obsahu, či také pouze nepozornost.

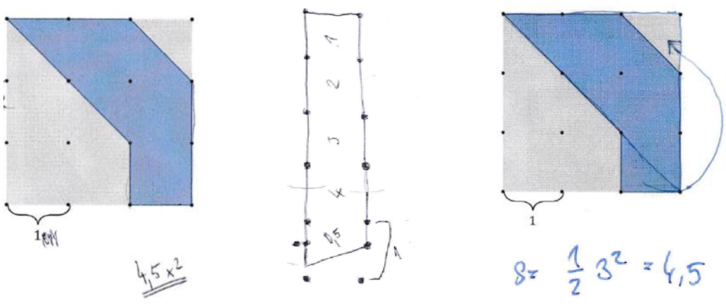
5.2 Plocha a její strukturace

Tato podkapitola poskytuje základní přehled řešení žáků, která se týkají plochy – její konzervace a strukturace.

Konzervace plochy

Konzervace plochy představuje první fázi pojmotvorného procesu míry dle Vondrové (2015). Tato fáze zahrnuje: rozdělování útvarů na části a jejich přeskupování do nových obrazců se stejným obsahem, porovnávání útvarů, princip kompenzace. Zachování míry blíže specifikuje podkapitola 3.1.

Třetí úlohu (zaměřenou na výpočet obsahu nekonvexního obrazce) někteří žáci řešili způsoby, jež poukazují na jejich porozumění konzervaci plochy. Tito žáci k určení plochy modrého obrazce aplikovali princip kompenzace, jehož využití znázornili ve svém řešení (Obrázek 5.10 – vpravo). Ojedinělé řešení třetí úlohy (Obrázek 5.10 – vlevo) je též příkladem porozumění konzervaci plochy. Žák složil iterované jednotky do pásu a určil jeho obsah, shodující se s obsahem modrého obrazce.



Obrázek 5.10: Ukázky konzervace plochy (Úloha 3)

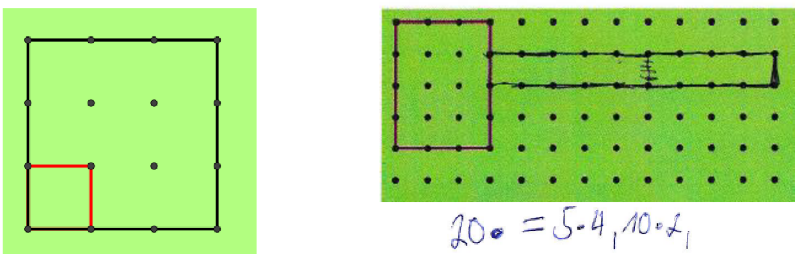
Porozumění konzervaci plochy explicitně ověřovaly úlohy 1.B a 2. Výsledky druhé úlohy jsou analyzovány v následující podkapitole. Opakované zaměření úloh na zachování plochy bylo uskutečněno proto, že pochopení zachování plochy je nutné ověřovat zvlášť u každého typu n-úhelníků (Kordaki 2003, Kospentaris a kol. 2011). Potvrzují to i výsledky získané z tohoto výzkumu.

Porozumění konzervaci plochy činilo potíže i třetině respondentů osmého ročníku ve výzkumu Kamii a Kysh (2006). Pro tyto žáky se plocha obrazce změnila, když byl stejný počet čtvercových jednotek přeuspořádán.

Čtverec jako jednotka obsahu

Kamii a Kysh (2006) zkoumaly konceptuální porozumění jednotce délky a jednotce obsahu. Součástí výzkumu byla úloha, v níž žáci měli porovnat dvě obdélníkové (3 × 3, 2 × 4) tabulky čokolády zadané na geodesce. Výsledky ukázaly, že většina žáků čtvrtých tříd obdélníky porovnala dle počtu jejich kolíčků namísto počtu čtverců. Ve vyšších ročnících tato chybovost klesala a zároveň se zvyšoval počet žáků, kteří obdélníky porovnávali na základě jednotky obsahu, tj. počítali čtverce.

Řešení na základě mřížových bodů se objevila u úloh 1.A a 1.B. V úloze 1.A, ve které měli žáci sestrojit čtverec čtyřnásobného obsahu oproti zadanému čtverci, někteří žáci sestrojili čtverec 3 × 3. Počet mřížových bodů tohoto čtverce je čtyřnásobný oproti počtu mřížových bodů zadaného čtverce (Obrázek 5.11 – vlevo). Sestrojit obdélník o stejném obsahu bylo zadáním úlohy 1.B. Avšak i zde se vyskytla řešení, která se odvíjela od počtu mřížových bodů, a to konkrétně obdélník 1 × 9. Zadaný obdélník 3 × 4 obsahoval 20 mřížových bodů (4 · 5), nový obdélník 1 × 9 se v počtu mřížových bodů (2 · 10) shodoval se zadaným obdélníkem. Tuto ideu porovnávání mřížových bodů jeden z žáků naznačil ve svém řešení (Obrázek 5.11 – vpravo).



Obrázek 5.11: Mřížové body jako jednotka obsahu

Strukturace plochy, multiplikativní uvažování

V pojmotvorném procesu míry dle Vondrové (2015) na konzervaci plochy navazuje jednotka míry. Iterací zvolené jednotky dochází ke strukturaci plochy. Vzniká obdélníkové pole, z něhož lze určit obsah obrazce jako počet iterovaných jednotek.

Strukturaci plochy iterováním jednotkového čtverce bylo možné identifikovat jako způsob řešení při určení obsahu modrého obrazce (Úloha 3). Tento postup dokládá konceptuální porozumění žáků čtverci jako jednotce obsahu. Ze získaných dat nelze vyloučit a ani potvrdit, že žáci při řešení dalších úloh využili abstraktní strukturace k získání správného výsledku.

Strukturace plochy byla velmi pravděpodobně využita také při argumentaci konzervace plochy trojúhelníků na obrázku concept cartoon (Úloha 2). Žák správně určil, že všechny reflektory osvětlují stejnou část černého plátna. Své tvrzení odůvodnil následovně: *„Když si představím na plátnu čtvercovou síť, tak vidím, že všechny trojúhelníky / paprsky reflektorů obsahují stejný počet čtverečků.“*

Battistův (2004) popis úrovní žáků v oblasti míry propojuje strukturaci plochy s porozuměním multiplikativnímu uvažování. Žák na nejvyšší úrovni určí obsah obdélníkové mříže vynásobením délky a šířky a dokáže svůj postup objasnit.

Avšak koncept délka × šířka pro určení obsahu obdélníku žáci často zobecňují (Kamii a Kysh 2006). Ukázalo se, že toto zobecnění se projevilo i u žáků účastnících se tohoto výzkumu. Obsah nekonvexního obrazce ve třetí úloze někteří žáci určili vynásobením stran. Také Kamii a Kysh (2006) ve svém výzkumu objevily toto zobecnění při určování obsahu nepravidelného obrazce.

5.3 Obrázek concept cartoon a odpovědi na otázku „Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?“

Druhá úloha byla zadána obrázkem concept cartoon. Úkolem žáků bylo nejprve posoudit tvrzení dětí na obrázku. Následně se sami žáci rozhodovali, který reflektor osvětluje největší část černého plátna. Jejich rozhodnutí bylo zpravidla zdůvodněno obdobným argumentem, jenž byl aplikován již při objasňování postojů k výrokům dětí na obrázku. Proto byly nejdůkladněji analyzovány argumenty žáků, podporující jejich vlastní přesvědčení.

U této úlohy se objevilo široké spektrum odpovědí. Mnoho žáků správně určilo, že všechny reflektory osvětlují stejnou část černého plátna. Avšak ne vždy byla tato rozhodnutí žáků kompletně objasněna. Na druhou stranu se též objevily četné názory a jejich objasnění, které vyjadřovaly přesvědčení žáků, že největší část černého plátna osvětluje reflektor vlevo / uprostřed / vpravo.

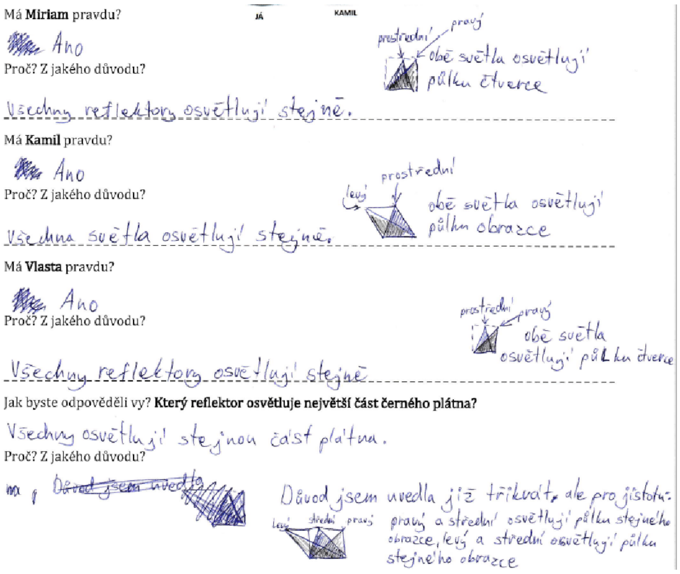
5.3.1 Argumenty odpovědi: „Všechny reflektory osvětlují stejnou část černého plátna."

Žáci, kteří vybrali tuto odpověď, svá rozhodnutí často zakládali na domněnce, že trojúhelníky, tj. světla reflektorů dopadající na plátno, mají stejný obsah. Avšak dále nerozvíjeli platnost svého tvrzení. Tudíž nelze posoudit, zda dokáží odůvodnit, proč se obsah trojúhelníků shoduje.

Argumenty některých žáků obsahovaly alespoň částečné zdůvodnění. Objasnění žáků se zakládala buď na myšlence, že světla všech reflektorů (trojúhelníky) končí ve stejných bodech, nebo že reflektory jsou umístěny ve stejné výšce. Žáci tedy tvrzení o shodnosti obsahů trojúhelníků vysvětlovali tím, že všechny tři trojúhelníky mají stejnou délku strany, nebo velikost výšky. Otázkou zůstává, zda se tito žáci opravdu domnívají, že obsah trojúhelníků lze porovnat buď dle délek stran, nebo dle velikostí výšek. Žáci totiž mohou rozumět konceptu zachování plochy trojúhelníku, avšak opomenuli shrnout všechny nezbytné podmínky.

Vyskytla se i řešení žáků, která kompletně vysvětlovala, proč mají trojúhelníky stejný obsah. Většina těchto odůvodnění využívala obrázku – vyznačení strany, kterou sdílí všechny trojúhelníky a výšky k ní příslušející. Žáci se v odpovědi odkazovali na vyznačené objekty a jejich shodnost, z čehož vyvozovali, že shodný je i obsah trojúhelníků.

Někteří žáci svá rozhodnutí podpořili zcela originálními argumenty. Obrázek 5.12 ilustruje jedno z velmi neobvyklých řešení obrázku concept cartoon. Shodnost obsahů trojúhelníků je vysvětlena na základě metody rámování a využití asociativního zákona. Nejprve jsou objasněny vztahy mezi pravým a prostředním trojúhelníkem, poté mezi trojúhelníkem levým a prostředním. Z těchto relací plyne, že trojúhelníky mají stejný obsah.


Má Miriam pravdu?
Ano
Proč? Z jakého důvodu?
Všechny reflektory osvětlují stejně.
Má Kamil pravdu?
Ano
Proč? Z jakého důvodu?
Všechna světla osvětlují stejně.
Má Vlasta pravdu?
Ano
Proč? Z jakého důvodu?
Všechny reflektory osvětlují stejně
Jak byste odpověděli vy? **Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?**
Všechny osvětlují stejnou část plátna.
Proč? Z jakého důvodu?
Důvod jsem uvedla již třikrát, ale pro jistotu: pravý a střední osvětlují půlku stejného obrazce, levý a střední osvětlují půlku stejného obrazce

Obrázek 5.12: Ukázka argumentace shodnosti obsahů trojúhelníků

5.3.2 Argumenty chybných názorů

V mylných domněnkách žáků se nejčastěji projevovala argumentace, která mohla být ovlivněna intuitivními pravidly. Koncepce mnohých žákovských tvrzení odpovídala pravidlu „Více *A* – více *B*“. Objasnění žákovských rozhodnutí často obsahovala argument, ve kterém byl obsah trojúhelníku posuzován na základě jeho obvodu. Žáci za trojúhelník s největším obsahem považovali ten, jenž má podle nich nejdelší stranu. Další možný projev intuitivního pravidla byl spojen se vzdáleností reflektoru od / ke středu plátna a s jeho sklonem. Mnozí žáci tvrdili, že nejvzdálenější reflektor, umístěný od středu plátna, osvětluje největší plochu.

Někteří žáci porovnávali plochy trojúhelníků podle akumulace světla. Všichni tito žáci se domnívali, že největší část černého plátna osvětluje prostřední reflektor. I tato argumentace by mohla být zapříčiněna aplikací intuitivního pravidla „Více *A* – více *B*“, tj. největší plochu černého plátna osvětluje trojúhelník, v němž se nejvýrazněji kumuluje světlo.

Domněnku, že intenzita světla má vliv na lidské mínění, potvrdil ve svém výzkumu se žáky mateřských a základních škol Levin (1992). Zjistil, že jasnost a velikost světla ovlivnila úsudek žáků při porovnávání světel z hlediska jejich doby svícení. Žáci se domnívali, že větší či jasnější žárovka svítila déle. Tato domněnka opět mohla vzniknout na základě intuitivního pravidla „Více *A* – více *B*“.

5.3.3 Související výzkum

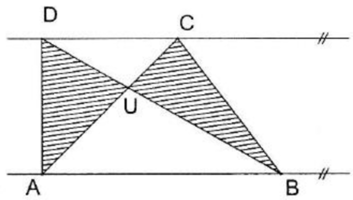
Kospentaris a kol. (2011) svou výzkumnou studii zaměřili na problematiku konzervace plochy. Účastníky výzkumu byli středoškolští a vysokoškolští studenti, kteří mimo jiné řešili úlohu, která byla předlohou pro vznik situace, jež je prezentována obrázkem concept cartoon.

Padesát účastníků (20 SŠ, 30 VŠ) výzkumu Kospentarise a kol. (2011) řešilo úlohu, v níž se porovnávaly plochy dvou trojúhelníků, které společně sdílely jednu stranu a velikost výšky na tuto stranu byla u obou trojúhelníků shodná. Při písemném řešení správně odpověděli a svou odpověď zdůvodnili pouze čtyři žáci. Ostatní řešení již byla chybná, či nedostatečně zdůvodněná. Špatné odpovědi byly ovlivněny intuitivními pravidly nebo vizuálními odhady.

Dále Kospentaris a kol. (2011) vedli s 21 studenty rozhovor, během kterého respondenti opět řešili výzkumné úlohy. Ukázalo se, že mnoha studentům chybí konceptuální porozumění výšce trojúhelníku. Absence tohoto porozumění žákům neumožňuje použít k řešení vzorec, jelikož úloha neobsahuje žádná konkrétní čísla, která by žáci mohli na místo proměnných dosadit.

Je třeba zmínit, že určitá shoda panuje mezi argumenty účastníků tohoto výzkumu a respondentů výzkumu Kospentarise a kol. Správné řešení a jeho zdůvodnění poskytlo v obou výzkumech velmi málo žáků (u Kospentarise a kol. 4 z 50, v tomto výzkumu 4 z 81). Avšak nelze opomenout, že mezi účastníky výzkumů je velký věkový rozdíl. V obou výzkumech byla chybná argumentace založena především na vizuálním vnímání, které ovlivňují intuitivní pravidla.

Úlohy ověřující porozumění výšce se ve výzkumech objevují často. Za zmínku stojí Kuřinova (2011) úloha o lichoběžníku (Obrázek 5.13), v níž se porovnává obsah dvou trojúhelníků, které vznikly úhlopříčným rozdělením lichoběžníku. Pro žáky jsou tyto úlohy neobvyklé a náročné, jelikož neobsahují žádné číselné údaje.[25]

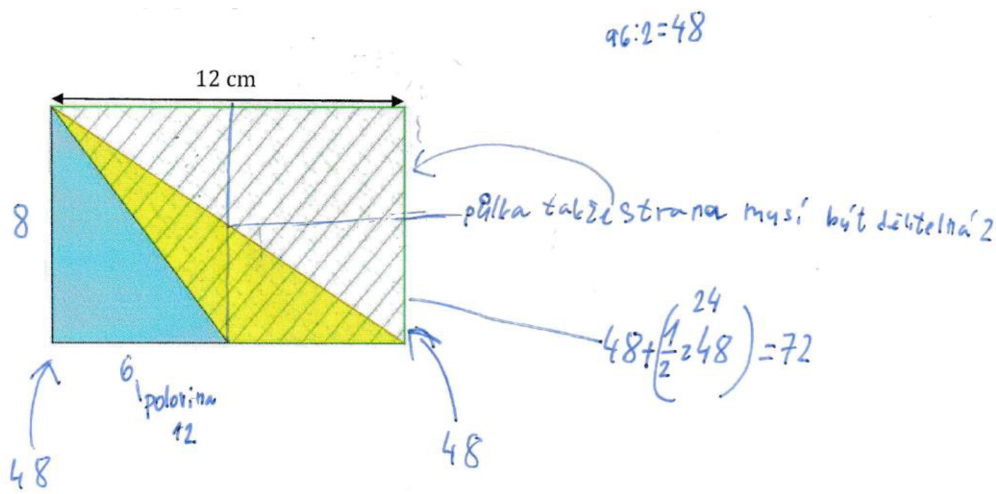


Obrázek 5.13: Úloha o lichoběžníku (Kuřina 2011, s. 168)

[25] Řešením úloh takového typu se ve své disertační práci zabývala Korečková (2015).

5.4 Řešitelská flexibilita

Flexibilita, a především originalita žáků se projevila v řešeních napříč všemi zadanými úlohami (Obrázek 5.10, Obrázek 5.12, Obrázek 5.14), ačkoli byla na flexibilitu žákovského řešení zaměřena pouze čtvrtá úloha. Většina žáků se rozhodla tuto úlohu řešit úvahou, nikoli pouhým dosazováním údajů do vzorců. Toto zjištění je v rozporu s výsledky Vondrové (2015), která uvádí, že žáci namísto řešení úloh úvahou mívají okamžitou tendenci úlohu řešit výpočtovou strategií pomocí vzorců.



Obrázek 5.14: Originální řešení slovní úlohy úvahou

Rozhodl-li se žák k řešení využít vzorec, aplikoval jej zpravidla k výpočtu obsahu buď trojúhelníku, nebo lichoběžníku. Úspěšní řešitelé této úlohy byli především ti, kteří ji řešili úvahou. Žáci, jež využívali vzorce, se častěji dopouštěli chyb ve vzorcích nebo při vyčíslování.

Někteří žáci splnili pobídku a úlohu se pokusili řešit jiným způsobem. Avšak mnozí z nich namísto odlišného řešení často pouze slovy popsali metodu, kterou již jednou k vyřešení této úlohy aplikovali. Vyřešit úlohu dvěma odlišnými způsoby se dařilo především žákům gymnázia (skupina C).

Závěr

Tato diplomová práce se zabývala žákovským porozuměním určení obsahu rovinného útvaru. V její teoretické části byla nejprve charakterizována teorie generického modelu spolu s procedurálními a konceptuálními znalostmi. Dále byl popsán pojmotvorný proces míry a byly podrobněji specifikovány jeho vybrané fáze.

Na tyto poznatky navázala výzkumná zpráva, v níž byla metodou deskripce analyzována data získaná z kvazistandardizovaného didaktického testu, jenž byl zadán žákům osmého ročníku základních škol a odpovídajícího ročníku šestiletého gymnázia. Ukázalo se, že žákovská řešení úloh zaměřených na určení obsahu byla velmi rozmanitá. Nejčastěji užívanými strategiemi byla strukturace plochy, aplikace vzorců, úvaha a jakákoli kombinace již zmíněných způsobů.

V řešeních žáků se vyskytly také jisté miskoncepce. Některé z nich pravděpodobně vznikly pod vlivem intuitivních pravidel. Takové chyby se nejčastěji týkaly vztahu mezi obvodem a obsahem. Objevovala se řešení, ve kterých se projevila iluze linearity. Obsah obrazce byl posuzován na základě velikosti jeho obvodu – čím větší byl obvod, tím byl větší obsah a naopak. Obdobná idea se uplatňovala též při sestrojování rovinných útvarů o stejném obsahu. Namísto zakreslení obrazců o shodném obsahu byly žáky konstruovány útvary se shodným obvodem.

Ze získaných dat nelze stanovit, zda žáci považovali obvod a obsah za stejné veličiny, či zda žáci tyto pojmy pouze zaměnili. To mohlo být způsobeno terminologickou záměnou, nebo chybným konceptuálním porozuměním pojmům obvod a obsah. K určení příčiny by bylo možné dosavadní data doplnit například polostrukturovanými rozhovory s žáky, u nichž se tato chyba projevila.

Miskoncepce, které se objevily napříč žákovskými řešeními, převážně potvrzují výsledky citovaných studií zaměřených na určení míry geometrických útvarů. Na provedený výzkum lze navázat například dalším šetřením problematiky konceptuálního a procedurálního porozumění v dané oblasti matematického vzdělávání.

Tato výzkumná činnost pro mě byla velmi obohacující. Počáteční studium literatury mi pomohlo lépe se zorientovat ve zkoumané problematice, čehož jsem využila při kompozici didaktického testu. Objevení žákovských strategií a jejich miskoncepcí spolu s odůvodněním potenciálních příčin jejich vzniku jsou pro mě jako budoucí učitelku matematiky nedocenitelné. Jsem přesvědčena, že ve své pedagogické praxi tyto nově nabyté znalosti a zkušenosti zužitkuji.

Seznam použitých zdrojů

BARMBY, Patrick, HARRIES, Tony, HIGGINS, Steve a kol. The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educ Stud Math,* 70**,** 2009, s. 217-241.

BATTISTA, Michael T. Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 2004, s. 185-204.

BATTISTA, Michael T. The Development of Geometric and Spatial Thinking. In LESTER, F. K. a kol., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2007, s. 843-908.

BATTISTA, Michael T., CLEMENTS, Douglas H., ARNOFF, Judy, BATTISTA, Kathryn a Caroline VAN AUKEN BORROW. Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(5), 1998, s. 503-32.

BJØRKÅS, Jacobsen a Marja VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN. Measuring area on the geoboard focusing on using flexible strategies. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Utrecht, Netherlands, 2019.

Budování schémat. *Hejného metoda* [online]. Praha: H-mat, o.p.s., c2022 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/principy/budovani-schemat

CERMAT. *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Praha: CERMAT, c2019 [cit. 2022-05-27]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/menu/testova-zadani-k-procvicovani/testova-zadani-v-pdf

CLARK, Faye B., a Constance KAMII. Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 1996, s. 41-51.

COMITI, Claude a Paula MOREIRA BALTAR. Learning process for the concept of area of planar regions in 12-13 year-olds. *Proceedings of the 21th of PME Conference*, 3, 1997, s. 264-271.

DABELL, John, KEOGH, Brenda a Stuart NAYLOR. *Concept Cartoons in Mathematics Education*. Sandbach: Millgate House Education, 2008.

D'AMORE, Bruno a Martha Isabel FANDIÑO PINILLA. Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers and students. *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cyprus Mathematical Society - Università di Cipro, Nicosia, Cipro), 5(2), 2006, s. 1-29.

DE BOCK, Dirk, VERSCHAFFEL, Lieven a Dirk JANSSENS. The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 2002, s. 65-89.

DE BOCK, Dirk, VERSCHAFFEL, Lieven a Dirk JANSSENS. The predominance of the linear model in secondary school student´s solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 1998, s. 65-83.

DE BOCK, Dirk, VERSCHAFFEL, Lieven a Dirk JANSSENS. The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 2002, s. 65-89.

DEMBO, Yoram, LEVIN, Iris a Robert SIEGLER. A comparison of the geometric reasoning of student´s attending Israeli ultraorthodox and mainstream schools. *Developmetal psychology*. 33(1), 1997, s. 92-103.

Didaktická prostředí. *Blog o Hejného metodě* [online]. Praha: H-mat, o.p.s., c2018 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In TALL, David. *Advanced mathematical thinking*, 1991, s. 95-123.

FREIRE, Amanda Freitas a kol. The use of the Geoboard in teaching Geometry: calculating area and perimeter. *Multidisciplinary Core scientific journal of knowledge*, 6(3), 2018, s. 119-135.

HAMMEROVÁ, Tereza. *Didaktická vybavenost učebnic matematiky pro 6. ročník ZŠ a příslušný ročník víceletého gymnázia* [online]. Brno, 2015 [cit. 2022-05-30]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/klqxa/Didakticka_vybavenost_ucebnic_matematiky_pro_6._rocnik

_ZS_a_prislusny_rocnik_viceleteho_gymnazia.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou*. Praha: Univerzita Karlova, 1999. ISBN 80-86039-92-7.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan a Naďa VONDROVÁ. *Číselné představy dětí: kapitoly z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 1999. ISBN 80-86039-98-6.

HEJNÝ, Milan. Budování matematických schémat. In: *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. 1 vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích, 2007, s. 83-124. ISBN 978-80-7394-052-2.

HEJNÝ, Milan. Mechanizmus poznávacího procesu. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004, s. 23-42. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HERENDINÉ-KÓNYA, Eszter. The level of understanding geometric measurement. In KRAINER, Konrad, Naďa VONDROVÁ a kol., CERME9: *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education Prague*. Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, 2015, s. 536-542.

HOLÍKOVÁ, Marie. O Pickově vzorci a rozměňování peněz. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2016, 61(4), s. 312-322.

HUANG, Hsin-mei E. a Klaus G. WITZ. Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 2013, s. 10–26.

HUANG, Hsin-mei E. a Klaus G. WITZ. Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction,* 21, 2011, s. 1-13.

HUANG, Hsinmei E. Third to fourth-grade students' conceptions of multiplication and area measurement. *ZDM Mathematics Education*, 46, 2014, s. 449-463.

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1369-4.

JANDA, David, VONDROVÁ, Naďa a Veronika TŮMOVÁ. *Míra v geometrii pro učitele matematiky* [online]. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2020 [cit. 2022-03-23]. ISBN 978-80-7603-141-8. Dostupné z: https://cuni.futurebooks.cz/book/mira-v-geometrii-pro-ucitele-matematiky/?/obalka/

JIROTKOVÁ, Darina a Jaroslava KLOBOUČKOVÁ. Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, s. 19-62. ISBN 978-80-7290-723-6.

JIROTKOVÁ, Darina, Paola VIGHI a Renáta ZEMANOVÁ. Misconceptions about the relationship between perimeter and area. *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2019, s. 221-230. ISBN 978-80-7603-069-5.

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie: výzkumný záměr Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání*. Vyd. 2. V Praze: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-552-2.

KAMII, Constance a Judith KYSH. The difficulty of "Length x width": Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 2006, s. 105-115.

KLOBOUČKOVÁ, Jarmila a Naďa VONDROVÁ. Getting to know shapes of the same area – how pupils build on one another´s work. *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2019, s. 231-240. ISBN 978-80-7603-069-5.

KORDAKI, Maria a Despina POTARI. A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Comput. Educ.,* 31, 1998, s. 405-422.

KORDAKI, Maria. The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 2003, s. 177-209.

KOREČKOVÁ, Barbora. *Geometrické úlohy řešitelné bez výpočtu*. Praha, 2015. Disertační práce. Univerzita Karlova.

KOSPENTARIS, George, SPYROU, Panagiotis a Dionissyos LAPPAS. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educ Stud Math,* 77**,** 2011, s. 105-127.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.

LEVIN, Ilya. The development of the concept of time in children: An integrative model. In MACAR, Françoise, POUTHAS, Viviane a William J. FRIEDMAN (Ed.), *Time, action, and cognition*, 1992, s. 13-32.

MA, Liping. *Znát a učit elementární matematiku: jak učitelé v Číně a ve Spojených státech rozumí základní matematice: jubilejní vydání*. Přeložil Jiří RÁKOSNÍK. Praha: Academia, 2021. Galileo. ISBN 978-80-200-3219-5.

MARCHETT, P., MEDICI, D., VIGHI, Paola a E. ZACCOMER. Comparing perimeters and areas children´s preconceptions and spontaneous procedures. In BOSCH, M. (Ed.), *Proceedings of CERME 4*. Sant Feliou de Guixols: ERME, 2005, s. 766-776.

OUTHRED, Lynne N. a Michael C. MITCHELMORE. Representation of area: a pictorial perspective. In GEESLIN, William, GRAHAM, Karen a kol., *Proceedings of the sixteenth PME Conference*, 2. Durham: University of New Hampshire. 1992, s. 194-201.

OUTHRED, Lynne N. a Michael C. MITCHELMORE. Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 2000, s. 144-167.

PELIKÁN, Jiří. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů*. 2., nezměn. vyd. Praha: Karolinum, 2011. ISBN 978-80-246-1916-3.

PIAGET, Jean, INHELDER, Barbel a Alina SZEMINSKA. *Child's Conception Of Geometry*. London: Routledge & Kegan Paul. 1960.

PLATÓN. *Euthydémos: Menón*. 4., opr. vyd. Praha: Oikoymenh, 2000. Knihovna antické tradice. ISBN 80-85241-56-9.

PUSPITA, Sari a Swee Fong NG. Exploring quantitative relationship through area conservation activity. *Journal on Mathematics Education*, 13(1), 2022, s.31-50.

RAHMIATI. The attempt to improve mathematics learning motivation using the geoboard (spiked board) among grade II elementary school students. *Global journal of business and social science review*, 4(3), 2016, s. 74-78.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2017 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2017.pdf

RENDL, Miroslav a Anna PÁCHOVÁ. Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, s. 127-182. ISBN 978-80-7290-723-6.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

RITTLE-JOHNSON, Bethany, SCHNEIDER, Michael a Jon R. STAR. Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review,* 27, 2015, s. 587-597.

SAMKOVÁ, Libuše. *Metoda Concept Cartoons*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, [2020]. Pedagogica et psychologica. ISBN 978-80-7394-798-9.

SARAMA, Julia a Douglas H. CLEMENTS. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge, 2009.

SIBIYA, Mandlenkosi Richard. A Reconsideration of the Effectiveness of Using Geoboard in Teaching Euclidean Geometry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 16(9), 2020.

SKEMP, Richard. Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching*, 77, 1976, s. 20-26.

STAR, Jon R. Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 2005, s. 404–411.

STRAUSS, Anselm L. a Juliet CORBIN. *Základy kvalitativního výzkumu: postupy a techniky metody zakotvené teorie*. Brno: Sdružení Podané ruce, 1999. SCAN. ISBN 80-85834-60-x.

ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-313-0.

TALL, David O. a Eddie M. GRAY. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 1994, s. 115-141.

TSAMIR, Pessia. Using the intuitive rule more A–more B for predicting and analysing student´s solutions in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 2003, s. 639-650.

TŮMOVÁ, Veronika. *Chápání pojmů obsah a objem u žáků základní školy* [online]. Praha, 2017 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/92198/140059297.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Disertační práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Učebnice a pomůcky. *Hejného metoda* [online]. Praha: H-mat, o.p.s., c2022 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/ucebnice

VAN DOOREN, Wim, DE BOCK, Dirk, JANSSENS, Dirk a Lieven VERSCHAFFEL. Student´s overreliance on linearity: An effect of school-like word problems? In CHICK, H. L. a VINCENT, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 2005, s. 265-272.

VAN DOOREN, Wim, DE BOCK, Dirk, JANSSENS, Dirk a Lieven VERSCHAFFEL. Pupil´s over-reliance on linearity: A scholastic effect? *British Journal of Educational Psychology*, 77, 2007, s. 307-321.

VAN DOOREN, Wim, DE BOCK, Dirk, WEYERS, Dave a Lieven VERSCHAFFEL. The Predictive Power of Intuitive Rules: A Critical Analysis of the Impact of 'More A-More B' and 'Same A-Same B'. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2), 2004, s. 179-207.

VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2009. ISBN 978-80-7290-394-8.

VIGHI, Paola. Measurement on the squared paper. CERME4. 2005. s. 777-785.

VOJTÍŠKOVÁ, Dominika. *Geodeska ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ Olomouc 2019* [online]. Olomouc, 2019 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://theses.cz/id/4qyqfe/Diplomov_prce_-_Vojtkov1.pdf. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci.

VONDROVÁ, Naďa a Jana ŽALSKÁ. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, s. 63-126. ISBN 978-80-7290-723-6.

VONDROVÁ, Naďa, NOVOTNÁ Jana a Marie TICHÁ. Didaktika matematiky: historie, současnost a perspektivy s důrazem na empirické výzkumy. In Stuchlíková, I., Janík, T. et al. *Oborové didaktiky: vývoj – stav – perspektivy*. Brno: Masarykova univerzita, 2015, s. 93–122.

VONDROVÁ, Naďa. Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahu útvarů a objemů těles. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015, s. 253-318. ISBN 978-80-246-3234-6.

VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019. ISBN 978-80-7603-109-8.

ZACHAROS, Konstantinos. Prevailing educational practices for area measurement and student´s failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 2006, s. 224-239.

ŽILKOVÁ, Katarína. Geometrické modelovanie s geodeskou. In: *Konštruktivizmus vo vyučování matematiky a budovanie geometrických predstáv*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2010, s. 31-38. ISBN 978-80-8094-723-1.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha A. Základní teze o schématu (Hejný 2014, s. 92-112)

<table>
<tr><td>Teze 1</td><td>Schémata pomáhají člověku orientovat se v životě.</td></tr>
<tr><td>Teze 2</td><td>Schémata se utvářejí většinou spontánně v důsledku potřeb člověka. Kde potřeba schází, schéma se nevytvoří.</td></tr>
<tr><td>Teze 3</td><td>Schémata téhož výseku reality se ve vědomí různých lidí liší. To může být příčinou nedorozumění.</td></tr>
<tr><td>Teze 4</td><td>Lidé, kteří společně řeší nějaký problém, mohou ve vzájemné interakci dospět k lepšímu řešení, než by došel každý sám. Navíc, člověk, který má vědomost o schématech jiných lidí, může jejich znalosti a rady využívat.</td></tr>
<tr><td>Teze 5</td><td>Prvky, které vstoupily do schématu s nízkým zvědomením a nízkou frekvencí, zanikají rychle. Prvky, které vstoupily s vysokým zvědomením a vysokou frekvencí, přetrvávají dlouho.</td></tr>
<tr><td>Teze 6</td><td>Prvky schématu, které si člověk nepamatuje, je nutno mít v dostupné externí paměti, aby byly v případě potřeby k dispozici. Externí paměť uvolňuje kognitivní energii na realizaci náročnějších úkonů. Používání externí paměti je součástí intelektuální strategie člověka.</td></tr>
<tr><td>Teze 7</td><td>Upřesňování intuitivně poznaného schématu, tedy tvorba proto-struktury, přispívá k rozvoji intelektuálních potencí žáka ve více směrech. Jsou to zejména:
a) potřeba:
upřesňovat pojmy,
argumentačně podporovat odhalené vztahy,
hledat vhodný jazyk na popis procesů a situací,
kriticky přijímat informace,
odhalovat vztahy mezi schématy a tvořit tím obecnější schémata,
hledat návody jak měnit implicitní úlohu na úlohu explicitní a
b) schopnost uvedené potřeby naplnit.</td></tr>
<tr><td>Teze 8</td><td>Tvorba struktury přispívá k rozvoji intelektuálních potencí žáka ve více směrech. Jsou to zejména:
a) potřeba:
abstrakce a s tím spojená práce s velkým kvantifikátorem,
ujasnění si rozdílu mezi pojmy primitivními a definovanými,
kategorizace pojmů z hlediska jejich významu i z hlediska stupně abstrakce,
ujasnění si rozdílu mezi axiomy a tvrzeními vyžadujícími důkazy,
nalezení souladu (konzistence) mezi jednotlivými částmi struktury,
hledání propojení na struktury příbuzné, zejména odhalování izomorfismů a
b) schopnost uvedené potřeby naplnit.</td></tr>
</table>

Příloha B. Tůmová (2017, s. 39-40) – učební trajektorie pro obsah

Nenumerické uvažování	Numerické uvažování
1. Holistické vizuální porovnávání tvarů Porovnávání tvarů na základě vizuálního srovnávání či přímým porovnáním – položením na sebe; srovnávání např. na základě jedné prominentní dimenze; zaměření pozornosti na celek – ještě není rozvinuta tranzitivita a zachování plochy při transformacích	**1. Počítání, které neodpovídá iteraci jednotky** Počítání jednotek, ale počítání nesouvisí s iterací jednotky – pohyb prstem nad objektem doprovázený počítáním – nesystematické počítání
2. Vizuální porovnávání tvarů založené na rozkladu a opětovném složení tvaru Rozklad útvaru na části a přímé porovnání těchto částí (neprobíhá ještě žádné počítání částí)	**2. Iterace jednotky a určení počtu jednotek** (sem patří celá strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury): • Pokrývání bez překryvů a mezer a v odpovídající struktuře (systematické počítání) • Vznik celků (řádky / sloupce) – postupné přičítání • Operativní práce s iteracemi – multiplikativní uchopení • Práce s jinými jednotkami a tvary (určování počtu jednotek); princip kompenzace (čím větší jednotka, tím méně jich bude třeba)
3. Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti (včetně enumerace) • Rozdělení na části a přeskládání (otočení, posunutí, překlopení) částí, aby vznikl jiný útvar; žák získává zkušenosti s komplementem útvaru • Porovnávání útvarů ve čtvercové síti • Porovnávání útvarů s naznačenou sítí či bez sítě • Práce s jinými jednotkami a tvary než čtverci / obdélníky (dělení útvaru na shodné části)	**3. Operace s numerickými mírami** Pokrývání / iterace jednotek či celků probíhá jen implicitně, obsah je určen jen na základě počtu – délek (tj. abstrakce vzorce pro obdélníky a čtverce)

Propojování

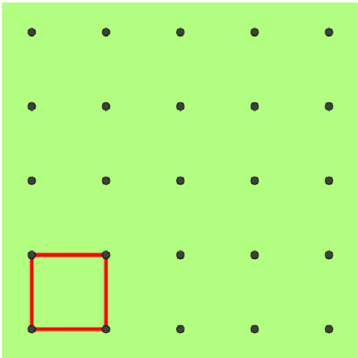
4. Integrované numerické a nenumerické uvažování

- Třídy útvarů se shodným obsahem, ale jiným tvarem (např. trojúhelníky či obdélníky se stejným obsahem)
- Převody jednotek a jejich vztahy (představa dm^2 jako čtverce o straně 10 cm, složeného ze 100 cm^2, vztah jednotek poloviční délky a jejich počet k pokrytí původní jednotky)
- Práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění obsahu (výpočet rozměrů z obsahu)
- Obsah složených útvarů (nekonvexní útvary, útvary složené z obdélníků, doplněk, …)
- Odvození vztahů / vzorců pro obsah pro další útvary (trojúhelníky, rovnoběžníky, lichoběžníky, …, kruh) a jejich uvědomělé používání (včetně výpočtu strany z obsahu, vztahu algebraického výrazu a jeho geometrické interpretace apod.)

Příloha C. Úlohy použité v kvazistandardizovaném didaktickém testu

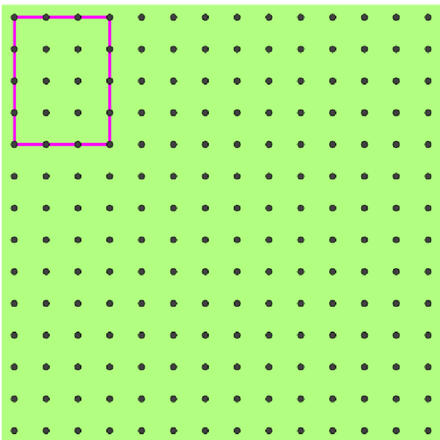
1.A Ve čtvercové mříži sestrojte **čtverec**, jehož **obsah** je **čtyřikrát větší** než **obsah** vyznačeného **čtverce**.

Vrcholy sestrojeného čtverce musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.



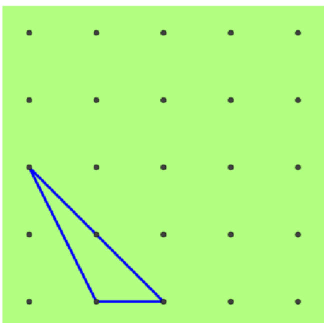
1.B Ve čtvercové mříži sestrojte **všechny obdélníky**, které mají **stejný obsah jako** vyznačený **obdélník**, ale mají navzájem **různý tvar**.

Vrcholy sestrojených obdélníků musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.

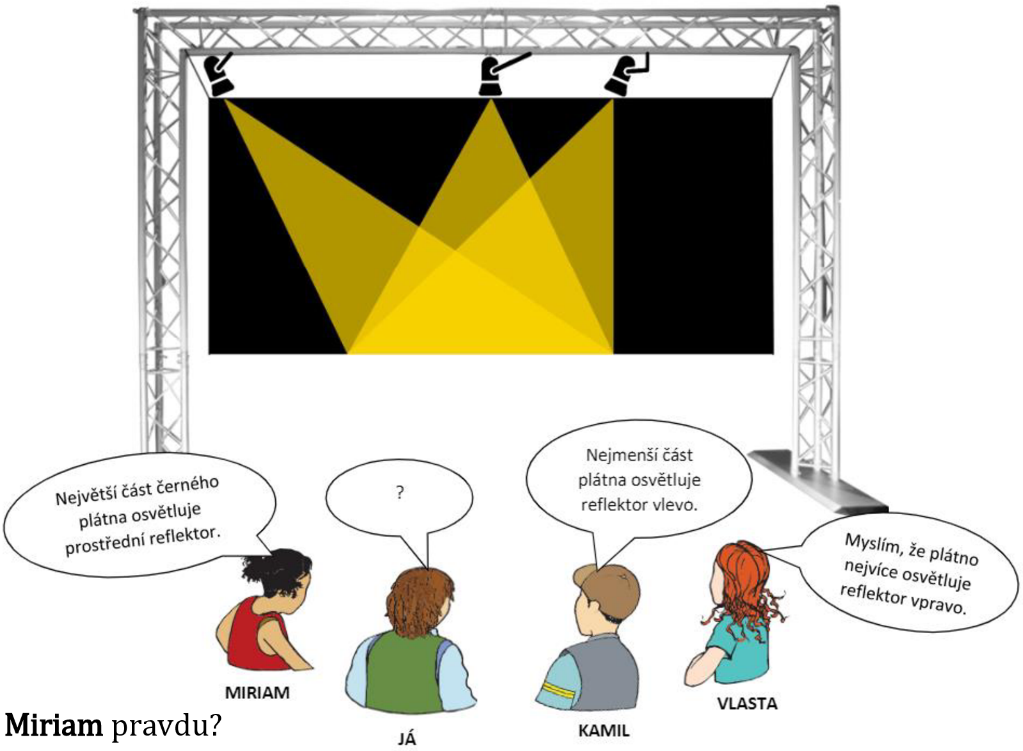


1.C Ve čtvercové mříži sestrojte tři trojúhelníky navzájem různého tvaru, jež obsah je dvakrát větší než obsah vyznačeného trojúhelníku.

Vrcholy sestrojených trojúhelníků musí ležet na vyznačených bodech čtvercové mříže.



2. Děti na obrázku odpovídaly na otázku: **Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?** Posuďte jejich tvrzení a zdůvodněte svoje rozhodnutí.



Má **Miriam** pravdu?

Proč? Z jakého důvodu?

Má **Kamil** pravdu?

Proč? Z jakého důvodu?

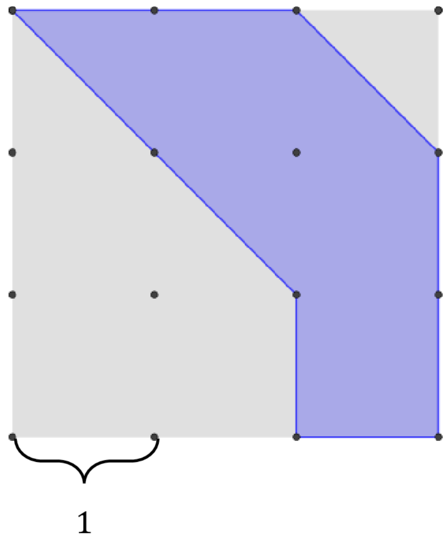
Má **Vlasta** pravdu?

Proč? Z jakého důvodu?

Jak byste odpověděli vy? **Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?**

Proč? Z jakého důvodu?

3. Vypočítejte obsah modrého obrazce, který je vyznačen ve čtvercové mříži. Zakreslete a zapište postup svého řešení.

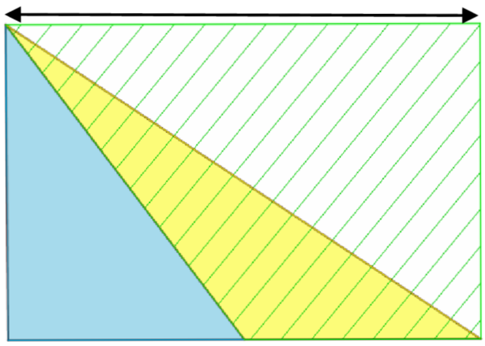


Obsah modrého obrazce je __________.

4. Obsah obdélníku na obrázku je 96 cm^2. Tento obdélník je rozdělen na tři trojúhelníky: modrý, žlutý a zbývající bílý. Obsahy modrého a žlutého trojúhelníku jsou shodné. Na obrázku je ještě zeleným šrafováním vyznačen lichoběžník.

Jaký je obsah žlutého trojúhelníku? A jaký obsah má zeleně vyšrafovaný lichoběžník? Vypočítejte a zaznamenejte postup řešení.

12 cm



Obsah žlutého trojúhelníku je ___________.

Obsah zeleně šrafovaného lichoběžníku je ___________.

- -

Zjistili jste obsah žlutého trojúhelníku a zeleně vyšrafovaného lichoběžníku? Dovedete úlohu vyřešit i jiným způsobem? Zkuste to!

Příloha D. Přehled výsledků žáků

Úloha	1.A Čtverec			1.B Obdélník									
Kód	C	MAB	MB	S	SS	D	DD	WD	Z	SAB	E	F	MB
Student	Čtverec se čtyřnásobným obsahem	Iluze linearity (more *A* – more *B*)	Mřížové body	Obdélník se shodným obsahem umístěn horizontálně / vertikálně	Obdélníky se shodným obsahem jsou umístěny horizontálně / vertikálně	Obdélník se shodným obsahem umístěn diagonálně	Obdélníky se shodným obsahem jsou umístěny diagonálně	Obdélník umístěn diagonálně, avšak jeho plocha není shodná s plochou zadaného obdélníku	Záměna obsahu za obvod a naopak	Same *A* – same *B*	Obdélník se shodným tvarem	Neidentifikovatelný záměr	Mřížové body
SA01	C			S									
SA02	C										E		
SA03	C				SS								
SA04	C											F	
SA05	C										E		
SA06			MB						Z		E		
SA07	C				SS								
SA08	C										E		
SA09	C										E		
SA10	C				SS								
SA11			MB								E		MB
SA12	C								Z				
SA13	C			S									
SA14	C										E		
SA15	C								Z		E		
SB01			MB	S					Z				
SB02	C									SAB SAB			
SB03	C										E	F	
SB04			MB									F	
SB05	C								Z		E		
SB06	C									SAB SAB			
SB07	C				SS								
SB08	C					D					E		

SB09		MAB								SAB SAB			
SB10	C			S									
SB11	C								Z				
SB12	C							WD			E		
SB13	C				SS								
SB14	C				SS								
SB15	C										E		
SB16	C			S									
SB17			MB					WD			E		
SB18			MB					WD			E		
SB19	C									SAB			
SB20	C								Z		E		
SB21		MAB										F	
SB22		MAB		S							E		
SB23		MAB			SS						E		
SB24	C										E		
SB25	C										E		
SB26	C							WD		SAB SAB	E	F	
SB27	C			S						SAB			
SB28	C				SS								
SB29		MAB									E		
SB30	C								Z	SAB SAB	E		
SB31		MAB										F	
SB32			MB								E		
SB33		MAB									E		
SB34	C										E		
SB35		MAB		S					Z		E	F	
SB36			MB	S							E		
SB37	C										E	F	
SB38	C										E		
SC01	C				SS								
SC02	C								Z Z				
SC03	C				SS								
SC04	C			S							E		
SC05	C				SS								
SC06	C				SS								
SC07	C				SS								
SC08	C			S						SAB			
SC09	C				SS								

SC10	C				SS								
SC11	C				SS								
SC12	C					D					E		
SC13	C				SS								
SC14	C				SS					SAB			
SC15	C				SS								
SC16	C				SS								
SC17	C				SS								
SC18	C				SS								
SC19	C			S							E	F	
SC20	C			S								F	
SC21	C				SS								
SC22	C												MB
SC23	C				SS						E		
SC24	C				SS						E		
SC25	C			S									
SC26	C				SS								
SC27	C									SAB SAB	E		
SC28	C				SS							F	

Úloha	**1.C Trojúhelník**											
Kód	C	P / R / T	C	P / R / T	C	P / R / T	W	P / R / T	W	P / R / T	W	P / R / T
Student	Trojúhelník s dvojnásobným obsahem	Pravoúhlý trojúhelník (P), rovnoramenný trojúhelník (R), tupoúhlý trojúhelník (T)					Trojúhelník s menším obsahem než má trojúhelník v zadání (WM), trojúhelník se shodným obsahem jako je v zadání (WE),	Pravoúhlý trojúhelník (P), rovnoramenný trojúhelník (R), tupoúhlý trojúhelník (T)				
SA01							WE	R				
SA02	C	T					WE	R				
SA03	C	PR	C	R	C	R						

SA04												
SA05	C	T										
SA06							WV	R	WV	P	WV	T
SA07	C	PR	C	R	C	P						
SA08	C	PR										
SA09	C	R					WV	T				
SA10	C	P	C	T	C	R						
SA11							WV	T				
SA12							WV	R				
SA13							WV	P	WE	T		
SA14	C	R	C	P								
SA15							WM	P	WE	R	WV	P
SB01							WV	T				
SB02							WV	T	WV	R		
SB03	C	R					WV					
SB04							WV	T	WV	T		
SB05							WE	T				
SB06	C	PR	C	R	C	R						
SB07	C	PR	C	P			WE	P				
SB08							WV	T	WV	T		
SB09							WV	T				
SB10												
SB11							WV	T				
SB12	C	T					WV	T				
SB13												
SB14	C	PR					WV	T				
SB15	C	PR					WE	R				
SB16	C	PR					WV	T				
SB17							WV	T				
SB18							WV	T				
SB19							WV	T	WV	P		
SB20							WV	T				
SB21							WV	T	WV	T		
SB22	C	PR	C	R								
SB23	C	P					WE	P				
SB24	C	PR	C	T								
SB25							WE	T	WE	P		
SB26	C	T					WV	R				
SB27	C	PR										
SB28	C	PR	C	PR								
SB29	C	R					WE	T	WE	R		
SB30							WV	T	WV	P	WV	T
SB31							WE	T				

SB32	C	T										
SB33												
SB34							WE	T	WE	P		
SB35							WV	T	WM	PR		
SB36							WV	PR	WV	T		
SB37	C	PR										
SB38							WE	R	WM	PR	WM	T
SC01	C	PR	C	T			WV	T				
SC02	C	PR	C	P	C	R						
SC03	C	PR	C	T	C	T						
SC04							WV	PR				
SC05	C	PR	C	R	C	P						
SC06	C	PR	C	R	C	T						
SC07	C	PR	C	R			WV	T				
SC08							WV	R				
SC09	C	R	C	P								
SC10							WV	R				
SC11	C	PR	C	P	C	R						
SC12	C	PR	C	R								
SC13	C	PR					WE	T	WV	T		
SC14	C	PR										
SC15	C	PR	C	R			WV	T				
SC16	C	PR	C	R			WE	P				
SC17							WV	R				
SC18	C	PR	C	P			WV	R				
SC19							WE	P	WE	T	WE	R
SC20												
SC21	C	PR	C	P	C	R						
SC22							WE	P	WE	T		
SC23	C	PR	C	R	C	P						
SC24	C	PR	C	R			WV	T				
SC25							WE	P	WM	T	WE	R
SC26	C	PR	C	R								
SC27							WM	P	WM	T	WE	T
SC28	C	PR	C	P			WV	R				

Úloha	2. Concept Cartoon: Který reflektor osvětluje největší část černého plátna?														
	Vlastní názor		Argumentace												
Kód	C	W	AL	BSL	SL	U	MAB	I	M	N	PA	ČA	CP	OR	F
Student	Všechny tři reflektory osvětlují stejnou část černého plátna	Největší část černého plátna osvětluje: levý reflektor (WL), reflektor uprostřed (WM),	Akumulace světla	Plocha plátna osvětlená reflektory (L, M, R) bez akumulace světla	Umístění reflektorů	Sklon reflektorů	More A – more B	Intuitivní vysvětlení	Manipulace	Numerické uvažování	Plocha jako argument	Částečné vysvětlení	Cavalieriho princip	Originální vysvětlení	Vysvětlení neuvedeno
SA01		WR									PA				
SA02		WM					MAB								
SA03	C														F
SA04		WL		BSL											
SA05		WM									PA				
SA06		WL					MAB								
SA07		WL			SL	U	MAB								
SA08		WL									PA				
SA09		WR						I							
SA10		WLR									PA				
SA11		WM						I		N					
SA12		WL			SL		MAB								
SA13		WL			SL		MAB								
SA14															
SA15	C							I							
SB01		WU			SL										
SB02		WL		BSL											
SB03	C														F
SB04		WLM			SL										
SB05		WL					MAB								
SB06	C														F
SB07		WR					MAB								
SB08		WM	AL												
SB09		WL													F
SB10		WL			SL		MAB								

SB11	C														F
SB12	C														F
SB13		WL													F
SB14		WL													F
SB15		WM	AL												
SB16		WL			SL		MAB								
SB17		WR					MAB			N					
SB18		WR			SL		MAB								
SB19	C														F
SB20	C											ČA			
SB21		WR			SL		MAB								
SB22	C				SL										
SB23		WM									PA				
SB24	C					U									
SB25		WM	AL												
SB26		WM	AL												
SB27	C		AL												
SB28	C							I							
SB29		WL					MAB								
SB30	C										PA				
SB31		WM					MAB								
SB32		WM				U									
SB33		WM			SL										
SB34		WM	AL												
SB35		WM						I							
SB36		WR					MAB								
SB37		WR													F
SB38		WM			SL										
SC01		WR		BSL											
SC02	C										PA		CP		
SC03		WMR									PA	ČA			
SC04	C								M		PA				
SC05	C			BSL							PA				
SC06	C										PA			OR	
SC07		WR		BSL											
SC08		WR							M						
SC09	C													OR	
SC10		WR						I							
SC11	C												CP		
SC12		WL				U	MAB								
SC13	C												CP		
SC14	C					U					PA				
SC15		WL		BSL											

SC16	C													OR	
SC17		WL		BSL											
SC18	C										PA	ČA			
SC19	C														F
SC20		WL					MAB								
SC21	C										PA		CP		
SC22	C							I							
SC23		WR													F
SC24		WM		BSL											
SC25		WL			SL		MAB								
SC26		WM	AL												
SC27	C											ČA			
SC28	C										PA				

Úloha	3. Určení obsahu modrého obrazce												
	Řešení		Metoda řešení							Určení jednotky			
Kód	C	W	B	Č	VZ	O	Z	K	F	JD	JP	VJ	BJ
Student	Správně určený obsah zadaného obrazce	Chybně určený obsah zadaného obrazce	Vytvořena čtvercová síť	Zadaný obrazec rozčleněn na základní geometrické útvary	Využití vzorce	Obvod všech dílčích útvarů	Záměna obsahu za obvod	Konzervace míry – užití principu kompenzace	Bez uvedení postupu	Uvedena konkrétní jedntoka délky	Uvedena konkrétní jednotka obsahu	Uvedena variabilní jednotka obsahu	Jednotka neuvedena
SA01	C								F				BJ
SA02		W					Z						BJ
SA03	C		B										BJ
SA04		W		Č	VZ								BJ
SA05		W					Z						BJ
SA06	C							K					BJ
SA07	C		B					K					BJ
SA08		W					Z						BJ
SA09													BJ
SA10	C				VZ			K					BJ
SA11		W					Z						BJ
SA12		W							F				BJ
SA13		W		Č									BJ
SA14		W					Z						
SA15	C		B									VJ	
SB01													
SB02	C		B									VJ	
SB03	C		B		VZ								BJ
SB04	C			Č	VZ								BJ
SB05		W		Č	VZ						JP		
SB06	C			Č	VZ								BJ
SB07		W					Z						BJ
SB08		W		Č	VZ								BJ
SB09	C		B										BJ
SB10	C		B		VZ						JP		
SB11		W					Z						BJ

SB12				Č									
SB13		W		Č		O					JP		
SB14	C		B									VJ	
SB15		W				O				JD			
SB16		W		Č	VZ								BJ
SB17		W					Z			JD			
SB18		W		Č		O				JD			
SB19		W	B			O							BJ
SB20		W		Č	VZ								BJ
SB21		W					Z			JD			
SB22	C		B		VZ					JD			
SB23		W		Č	VZ						JP		
SB24	C							K					BJ
SB25	C		B										BJ
SB26		W					Z						BJ
SB27		W		Č									BJ
SB28		W		Č									BJ
SB29		W					Z						BJ
SB30	C		B										BJ
SB31		W	B			O							BJ
SB32		W	B			O							BJ
SB33	C		B		VZ								BJ
SB34	C		B										BJ
SB35													BJ
SB36	C		B										BJ
SB37		W		Č		O							BJ
SB38		W					Z						BJ
SC01	C			Č	VZ						JP		
SC02	C		B								JP		
SC03	C				VZ			K					BJ
SC04	C			Č									BJ
SC05		W		Č								VJ	
SC06	C		B										BJ
SC07	C		B										BJ
SC08	C		B										BJ
SC09		W		Č	VZ						JP		
SC10	C		B								JP		
SC11	C			Č	VZ						JP		
SC12	C		B										BJ
SC13	C		B										BJ
SC14	C								F				BJ
SC15	C		B		VZ						JP		
SC16	C		B										BJ

SC17	C				VZ			K					BJ
SC18	C		B		VZ			K			JP		
SC19	C		B										BJ
SC20	C		B								JP		
SC21	C			Č									BJ
SC22		W		Č									BJ
SC23	C		B								JP		
SC24	C							K					BJ
SC25	C			Č	VZ								BJ
SC26	C				VZ			K					BJ
SC27	C		B										BJ
SC28	C		B								JP		

Úloha	4. Slovní úloha – určení obsahu žlutého trojúhelníku a zeleně šrafovaného lichoběžníku																												
	Obsah žlutého trojúhelníku		Určení jednotky			Obsah zeleného lichoběžníku		Určení jednotky			Metoda řešení č. 1				Obsah žlutého trojúhelníku		Určení jednotky			Obsah zeleného lichoběžníku		Určení jednotky			Metoda řešení č. 2				
Kód	C	W	JD	JP	BJ	C	W	JD	JP	BJ	Ú	VZ	Z	F	C	W	JD	JP	BJ	C	W	JD	JP	BJ	Ú	VZ	Z	OR	F
Student	Správně určný obsah žlutého trojúhelníku	Chybně určený obsah žlutého trojúhelníku	Uvedena jednotka délky	Uvedena jednotka obsahu	Jednotka neuvedena	Správně určený obsah zeleného lichoběžníku	Chybně určený obsah zeleného lichoběžníku	Uvedena jednotka délky	Uvedena jednotka obsahu	Jednotka neuvedena	Úvaha	Využití vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku (VZT), lichoběžníku (VZL)	Záměna obsahu za obvod	Postup neuveden	Správně určný obsah žlutého trojúhelníku	Chybně určený obsah žlutého trojúhelníku	Uvedena jednotka délky	Uvedena jednotka obsahu	Jednotka neuvedena	Správně určený obsah zeleného lichoběžníku	Chybně určený obsah zeleného lichoběžníku	Uvedena jednotka délky	Uvedena jednotka obsahu	Jednotka neuvedena	Úvaha	Využití vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku (VZT), lichoběžníku (VZL)	Záměna obsahu za obvod	Originální metoda řešení	Postup neuveden
SA01																													
SA02																													
SA03	C			JP		C			JP		Ú																		
SA04																													
SA05		W		JP			W		JP		Ú																		
SA06	C			JP							Ú																		
SA07	C			JP			W		JP																				
SA08		W			BJ									F															
SA09		W	JD				W	JD						F															
SA10	C				BJ	C				BJ	Ú																		
SA11	C				BJ		W			BJ				F															
SA12		W		JP										F															
SA13		W			BJ		W			BJ		VZT																	
SA14		W			BJ		W			BJ			Z																
SA15																													
SB01																													
SB02	C			JP		C			JP		Ú																		
SB03																													
SB04	C			JP		C			JP		Ú	VZL																	
SB05		W		JP		C			JP			VZL																	
SB06		W		JP			W		JP		Ú																		
SB07	C			JP		C			JP		Ú																		
SB08	C			JP		C			JP		Ú	VZT																	
SB09	C		JD				W	JD				VZT VZL																	
SB10																													
SB11	C			JP		C			JP					F															
SB12	C				BJ							VZT																	
SB13	C			JP		C			JP		Ú																		
SB14	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP		Ú	VZT			
SB15		W			BJ		W			BJ			Z																
SB16	C			JP			W			BJ	Ú	VZT			C			JP			W		JP		Ú				
SB17	C			JP										F															
SB18		W	JD				W	JD					Z																
SB19	C			JP			W			BJ	Ú																		
SB20		W			BJ		W		JP			VZL																	
SB21																													
SB22	C				BJ	C				BJ	Ú																		
SB23		W		JP			W		JP		Ú																		
SB24	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP					OR	
SB25	C			JP		C			JP		Ú																		
SB26	C				BJ		W			BJ	Ú																		
SB27		W		JP			W		JP					F															
SB28	C			JP		C			JP		Ú																		
SB29		W			BJ		W			BJ				F															
SB30	C				BJ		W			BJ		VZT																	
SB31																													
SB32		W			BJ	C				BJ																			
SB33	C				BJ	C				BJ	Ú																		
SB34	C			JP		C			JP		Ú																		
SB35																													
SB36		W		JP			W		JP		Ú																		
SB37		W		JP			W		JP		Ú																		
SB38																													
SC01	C		JD			C		JD				VZT																	
SC02	C			JP		C			JP					F	C														
SC03	C			JP		C			JP			VZT			C			JP		C				BJ	Ú				
SC04	C		JD			C		JD			Ú				C				BJ		W			BJ		VZT			
SC05	C			JP		C			JP		Ú																		
SC06	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP			VZT			
SC07		W	JD				W		JP					F															
SC08	C			JP		C			JP		Ú																		
SC09	C			JP		C			JP		Ú																		
SC10	C			JP		C			JP		Ú																		
SC11	C			JP		C			JP		Ú	VZT																	
SC12	C				BJ	C				BJ	Ú																		
SC13																													
SC14	C		JD			C		JD			Ú																		
SC15	C			JP		C			JP			VZT																	
SC16	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP		Ú				
SC17	C			JP		C			JP		Ú				C		JD			C				BJ	Ú	VZ			
SC18	C			JP		C			JP			VZT VZL			C			JP		C			JP		Ú	VZT			
SC19	C			JP		C			JP		Ú	VZT																	
SC20	C			JP		C			JP		Ú																		
SC21	C				BJ	C				BJ	Ú	VZT			C				BJ	C				BJ	Ú	VZL			
SC22																													
SC23	C			JP		C			JP		Ú	VZT																	
SC24	C			JP		C			JP		Ú	VZT																	
SC25	C			JP		C			JP		Ú																		
SC26	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP		Ú	VZL			
SC27	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP			VZT VZL			
SC28	C			JP		C			JP		Ú				C			JP		C			JP		Ú				