

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE
FAKULTA ŽIVOTNÍHO PROSTŘEDÍ
KATEDRA VODNÍHO HOSPODÁŘSTVÍ A
ENVIRONMENTÁLNÍHO MODELOVÁNÍ

**Simulace šíření polutantu v MVA při
poruše kontejnmentu JE Temelín**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce: doc. Mgr. Marek Vach, Ph.D.

Diplomant: Petr Chudoba

Praha 2017

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

RNDr. Petr Chudoba

Environmentální modelování

Název práce

Simulace šíření polutantu v MVA při poruše kontejnmentu JE Temelín

Název anglicky

Simulation of spreading of a pollutant in the planetary boundary layer in case of the Temelin NPP containment failure

Cíle práce

Student se seznámí s CFD nástrojem ANSYS FLUENT

Vytvoření co nejpřesnějšího modelu šíření polutantu. Za tímto účelem budou použita reálně měřená data:

Reálných data popisující průměrné rychlosti a převažující směry větru v různých obdobích. Výběr jednoho nebo více období pro výpočet šíření polutantu.

Použití reálné geometrie terénu a budov v modelované oblasti.

Určení zasaženého území a stupeň tohoto zasažení.

Metodika

Z dostupných informací student vytvoří vhodně dimenzovanou výpočetní síť a provede simulaci šíření polutantu.

Výpočetní síť bude vycházet z DEM modelu ČR a větrných map vytvořených Ústavem fyziky atmosféry AV ČR v.v.i.

Výpočet bude simulovat okamžité uvolnění polutantů (např. nouzové odpuštění tlaku) a v druhé variantě skokové vypuštění a kontinuální uvolňování (např. selhání reaktorové nádoby a kontejnmentu).

Doporučený rozsah práce

50 stran textu

Klíčová slova

Mezní vrstva atmosféry, FLUENT, CFD, polutant, Temelín

Doporučené zdroje informací

- APSIMON, H.M., A.J.H. GODDARD a J. WRIGLEY. Long-range atmospheric dispersion of radioisotopes—i. The MESOS model. *Atmospheric Environment* (1967) [online]. 1985, 19(1), 99-111 [cit. 2016-06-22]. DOI: 10.1016/0004-6981(85)90141-6. ISSN 00046981.
- BONELLI, P., G. CALORI a G. FINZI. A fast long-range transport model for operational use in episode simulation. Application to the Chernobyl accident. *Atmospheric Environment. Part A. General Topics* [online]. 1992, 26(14), 2523-2535 [cit. 2016-06-22]. DOI: 10.1016/0960-1686(92)90104-S. ISSN 09601686.
- ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE. LESNICKÁ A ENVIRONMENTÁLNÍ FAKULTA, – VACH, M. *Vybrané výchozí aspekty problému proudění v MVA*. V Praze: Česká zemědělská univerzita, 2006. ISBN 80-213-1544-.
- Laudner, B. E., & Spalding, D. B. (1974). *Mathematical models of turbulence*. New York: Academic.
- VACH, Marek a Van Minh DUONG. Numerical Modeling of Flow Fields and Dispersion of Passive Pollutants in the Vicinity of the Temelín Nuclear Power Plant. *Environmental Modeling & Assessment* [online]. 2011, 16(2), 135-143 [cit. 2016-06-22]. DOI: 10.1007/s10666-010-9239-x. ISSN 1420-2026.

Předběžný termín obhajoby

2016/17 LS – FŽP

Vedoucí práce

doc. Mgr. Marek Vach, Ph.D.

Garantující pracoviště

Katedra vodního hospodářství a environmentálního modelování

Elektronicky schváleno dne 7. 9. 2016

doc. Ing. Martin Hanel, Ph.D.

Vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 6. 10. 2016

prof. RNDr. Vladimír Bejček, CSc.

Děkan

V Praze dne 18. 04. 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Praze dne 18.4.2017

Podpis autora

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. Mgr. Markovi Vachovi, Ph.D., za vypsání této práce a způsob vedení, který pro mě byl ideální.

Název práce: Simulace šíření polutantu v MVA při poruše kontejmentu JE Temelín

Autor: Petr Chudoba

Katedra: Katedra vodního hospodářství a environmentálního modelování

Vedoucí diplomové práce: doc. Mgr. Marek Vach, Ph.D., Katedra vodního hospodářství a environmentálního modelování

Abstrakt: Cílem práce bylo studium matematického modelování a jeho aplikace na realistický model. Řešený problém je prakticky nemožné definovat pokud není vytvořen alespoň základní fyzikální aparát studované problematiky. V našem případě se jedná o modelování proudění v atmosféře. Za tímto účelem byly odvozeny základní fyzikální principy a také rozšíření ve smyslu turbulentních modelů a dalších zákonitostí souvisejících s prouděním a transportem příměsí.

Velký důraz byl kladen také na praktickou stránku tvorby modelu a následné provedení simulací. Neboť i tyto aspekty se výrazně projevují na kvalitě simulovaných dat. Konkrétní užití metod a nástrojů je demonstrováno na třech simulacích provedených pomocí ANSYS CFX.

Klíčová slova: Mezní vrstva atmosféry, šíření kontaminace, CFX, mechanika kontinua, matematické modelování, turbulence

Title: Simulation of spreading of a pollutant in the planetary boundary layer in case of the Temelin NPP containment failure

Author: Petr Chudoba

Department: Department of Water Resources and Environmental Modeling

Supervisor: doc. Mgr. Marek Vach, Ph.D., Department of Water Resources and Environmental Modeling

Abstract: The goal of this thesis was study of mathematical modeling and its application on realistic model. It is almost impossible to define problem without at least basic physical knowledge of the problematics. In our case we are interested in mathematical modeling of the atmospheric convection. In order to do that, basic physical principles were derived and augmented with turbulent models and other principles connected with convection and with transport of an admixture.

Practical part of the model creation and performance of the simulation was strongly emphasised. These aspect have strong influence on the quality of the resulting data. Particular use of the methods and tools is demonstrated on tri simulations carried out with ANSYS CFX.

Keywords: Atmospheric boundary layer, contamination spreading, CFX, continuum mechanics, mathematical modeling, turbulence

Obsah

Úvod	3
1 Cíle práce	4
2 Mechanika kontinua	5
2.1 Lagrangeův a Eulerův popis tekutin	5
2.2 Objemové změny tekutiny	6
2.3 Silové působení a podmínky rovnováhy	6
2.4 Rovnice kontinuity a pohybová rovnice	7
2.4.1 Newtonovská tekutina	8
2.4.2 Dokonalá tekutina	8
3 Další aspekty matematického modelování proudění a transportu	9
3.1 Termodynamické aspekty	9
3.1.1 Stavová rovnice	9
3.1.2 Přenos tepla	10
3.1.3 Transport příměsi	10
4 Základy teorie turbulentního proudění	12
4.1 Reynoldsovo průměrování	12
4.2 Prandtlůva teorie směšovací délky	13
4.3 Boussinesquova hypotéza	14
4.4 Modely turbulence	14
4.4.1 Uzávěry prvního řádu	14
4.4.2 Uzávěr druhého a vyššího řádu	15
5 Transport pasivní příměsi	16
5.1 Gaussovský model	16
5.2 Lagrangeův popis	16
6 Příprava modelu pro simulaci	18
6.1 Model areálu elektrárny	18
6.2 Model terénu	19
6.3 Spojení modelů terénu a elektrárny a export do ANSYS Workbench	21
6.4 Příprava geometrie v prostředí ANSYS Workbench	21
6.5 Tvorba výpočetní sítě	22
7 Určení fyzikálních parametrů simulace	24
7.1 Parametry uvnitř modelu	24
7.2 Okrajové podmínky	24
7.3 Další parametry okrajových podmínek	25
7.3.1 Parametry atmosféry	25
7.3.2 Okrajová podmínka terénu a budov	26
7.3.3 Okrajová podmínka chladících věží	26

7.3.4	Okrajové podmínky pro ventilační komín a vrchlík kontej- nmentu	26
8	Simulace a jejich výsledky	27
8.1	Stacionární stav	27
8.2	Nestacionární simulace - 1. scénář	28
8.3	Nestacionární simulace - 2. scénář	32
	Závěr	39
	Seznam použité literatury	40

Úvod

Tato práce se zabývá tématem numerické simulace proudění vzduchu v mezní vrstvě atmosféry (MVA). Tato tematika a zejména její využití pro simulaci meteorologických jevů a zejména šíření znečišťujících látek nabývá v posledních letech na důležitost. Je to způsobeno zejména překotným rozvojem výpočetní techniky a tím i její lepší dostupnosti. Matematické modelování obsadilo nezastupitelnou pozici zejména díky možnostem řešit i velice komplikované modely s neméně komplikovanými okrajovými podmínkami. V minulosti se komplikované modely řešily pomocí tzv. fyzikálních modelů. V případě fyzikálního modelu se vytvořil model reálného problému ve zmenšeném měřítku. Pro co nejuhospodárnější výsledky bylo nutné vytvořit model co nejpřesněji. Což ovšem znamenalo velké nároky jak časové tak finanční. V neposlední řadě jsou zde vysoké nároky na experimentální vybavení. Naproti tomu v případě matematického modelování je kritický výpočetní výkon a kvalita vstupních dat. Kvalita vstupních dat je však důležitá i pro fyzikální modely. V porovnání s fyzikálním modelováním je zde kritický pouze výpočetní výkon. Na velikosti výpočetního výkonu se podílí jednak hardware ale i software. Obě části však procházejí rychlým vývojem a tím umožňují provádět čím dál přesnější simulace v čím dál kratším čase.

Jistým problémem matematického modelování je, že řešení problému je skryto v komplikovaných soustavách parciálních diferenciálních rovnic. Tyto rovnice jsou navíc analyticky řešitelné pouze za jistých speciálních podmínek. Proto se přistupuje k řešení numerickému. Toto vede k nutnosti osvojit si relativně komplexní znalosti z oblasti matematické analýzy a numerické matematiky v kombinaci s jistými programátorskými dovednostmi.

V rámci této práce bude popsán fyzikální aparát proudění tekutin a uvedeny základní aspekty a principy tvorby modelu a jeho řešení. Konkrétní aplikace bude znázorněna na šíření znečištění při mimořádné události jaderné elektrárny Temelín spojené s únikem kontaminantu. Oblast simulace má velikost $5 \times 5 \text{ km}^2$.

Z uvedené konkrétní aplikace matematického modelování je zřejmé, že jde o záležitost komplikovanou nejen výpočetně. Je nutné se vypořádat s komplikovaným modelem terénu a dále vytvořit model areálu elektrárny. Za tímto účelem bylo nutné pracovat s celou sadou vysoce sofistikovaných nástrojů. V této práci budou jednotlivé nástroje krátce představeny a popsána jejich úloha v realizaci modelu. Bohužel většina použitých nástrojů není primárně určena pro práci s modely našeho rozsahu. Proto už samotná tvorba modelu pro simulaci byl značně náročný proces s mnoha překvapeními.

Tato práce si neklade za cíl dokonale přesné popsání proudění vzduchu a šíření znečištění. Jejím cílem je seznámení s aparátem stojícím za simulacemi, základy teorie turbulentního proudění a na konkrétním příkladu postup vytvoření komplikovaného modelu pro simulaci.

1. Cíle práce

Hlavním cílem práce je popsat a osvojit si metodiku matematického modelování proudění v atmosféře. K tomu je třeba vybudovat jistý matematicko-fyzikální aparát. Osvojit si ovládání dostupného softwaru a získat přehled o potřebných a dostupných datech.

Bez znalosti a pochopení fyzikálního aparátu skrývajícího se za matematickým modelováním není možné provést kvalitní simulace nebo interpretace výsledků. Nebudeme se zabývat rigorózním dokazováním a ve většině případů ani úplným odvozením diskutovaných rovnic. Úplné detailní odvozování a dokazování veškerých tvrzení by zvýšilo obsahový rámec této práce neúměrně za její původní účel. Tímto účelem není matematická preciznost, ale vybudování pracovní znalosti, v angličtině výstižně označováno „working knowledge“, nutné pro správné definování problému a interpretaci výsledků.

Další části aparátu nutné k osvojení jsou modely turbulencí. Vzhledem ke komplikovanému terénu a realistickému modelu areálu Jaderné elektrárny Temelín(JETE) hrají turbulence významnou roli v naší simulaci. Proto se i my budeme v další části textu zabývat matematickým popisem turbulencí a souvisejícími problémy.

Mimo teorii vlastního proudění bude proveden i krátký exkurs seznamující se základními principy modelování šíření znečištění v ovzduší. Krom základních principů jednotlivých přístupů budou rozebrány i výhody resp. nevýhody a vhodnost jejich použití v různých scénářích.

Velká pozornost bude věnována samotné tvorbě modelu a generaci výpočetní sítě. Příprava modelu je klíčová částí celé přípravy. Kvalita dat a dostupných informací je zde klíčová. Nekvalita vlastního modelu nutně implikuje i nekvalitu výpočetní sítě, která je zcela zásadní pro numerické výpočty.

V simulacích bude mimo rychlostního pole simulováno také šíření kontaminantu v atmosféře. Tyto simulace budou nestacionární a řešeny eulerovským přístupem. Podobné simulace byly prováděny i v Vach a Duong (2011) a Křivonožka (2009). Avšak zde se jednalo pouze o simulace stacionárního rychlostního pole a v případě Vach a Duong (2011) ještě šíření kontaminantu popsané Lagrangeovým formalismem.

Poslední částí bude diskuze získaných výsledků. Budou ukázána simulovaná rychlostní pole v různých časových okamžicích. Stejně tak budou zobrazena pole koncentrací příměsi. S ohledem na krátký časový úsek, který je simulovaný budeme k úniku radioaktivního znečištění přistupovat jako k pasivní příměsi.

Oproti zadání kde je určen pro simulace nástroj ANSYS FLUENT, je v této práci použit příbuzný nástroj ANSYS CFX. Je to z důvodu licenčního omezení studentské verze balíků nástrojů společnosti ANSYS. Toto omezení spočívá v limitaci maximálního počtu elementů výpočetní sítě na 200 000. Tento počet je v našem modelu překročen. Avšak při využití paralelního výpočtu se v případě CFX počet buněk adekvátně navýší s ohledem na počet vláken. Toto neplatí u nástroje FLUENT. Další velkou výhodou paralelního výpočtu je velké urychlení. I tak však simulace trvaly každá 6-9 hodin.

2. Mechanika kontinua

Při modelování se k tekutinám přistupuje jako k souboru infinitesimálních objemů δV , které spojitě vyplňují daný objem. Tyto infinitesimální objemy si můžeme představit jako soubor „částic“, které se v každém okamžiku pohybují určitou rychlostí. Změna rychlosti je spojitá v prostoru i v čase. Tyto fiktivní „částice“ nelze ztotožnit s molekulami tekutiny jakkoliv by se to zdálo lákavé. Ve skutečnosti jsou tyto „částice“ tvořeny souborem molekul a jejich rychlost je dána jako střední rychlost molekul v objemu δV . Termodynamické aspekty promlouvající do pohybu jednotlivých molekul nebudou v této kapitole řešeny. Podrobnější popis je možné najít např. v BRDIČKA a kol. (2005); Jiří Langer (2013); Sládek (2004) a Jan Bednář (1985).

2.1 Lagrangeův a Eulerův popis tekutin

Pohyb tekutiny se popisuje jako pohyb souboru „částic“ v prostoru \mathbb{R}_3 . Tato spojitá transformace je matematicky vyjádřena jako

$$x_i = f_i(x_k^0, t). \quad (2.1)$$

Tato transformace závisí parametricky na čase způsobem, že v čase $t = 0$ odpovídá počáteční poloze částice x_i^0 . Tímto způsobem dojde k označení každé částice a transformace následně přiřazuje ke každému x_i^0 odpovídající x_i v čase t . Rychlost dané částice se pak v libovolném čase intuitivně určí derivací podle času

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{df_i(x_k^0, t)}{dt} = v_i(x_k^0, t). \quad (2.2)$$

Tento popis je označován jako *Lagrangeův* a jedná se v podstatě o sledování pohybu částice unášené v rychlostním poli definovaném transformací $f_i(x_k^0, t)$.

Jiný přístup k popisu kontinua získáme pokud v rovnici (2.1) určíme x_k^0 jako funkci x_j a t . Dosazením do rovnice (2.2) získáme

$$v_i = v_i(x_k^0(x_j, t), t) = v_i(x_j, t). \quad (2.3)$$

Čímž dojdeme k *Eulerově* popisu kdy sledujeme určité místo a měříme rychlost procházející „částice“.

Při Eulerově popisu není tedy rychlost spjatá s určitou částicí jako je to naznačeno v rovnici (2.2) ale je dána jako vektorové pole v prostoru viz. (2.3). S tímto popisem souvisí i pojem *proudnic*. Tyto křivky v každém bodě a čase vyjadřují rychlost kontinua. Vyjádřením proudnic pomocí parametrických křivek $\mathbf{r}(\lambda)$ lze rychlostní pole získat derivací podle parametru

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}. \quad (2.4)$$

Zrychlení je v Eulerově popisu dáno jako

$$a_i \equiv \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

v koordinátním zápisu nebo jako

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.6)$$

ve vektorovém zápisu.

2.2 Objemové změny tekutiny

Nechť v čase $t = 0$ je tekutina lokalizována v oblasti Ω_0 . Objem této oblasti oznažme jako ΔV_0 a je dán jako

$$\Delta V_0 = \int_{\Omega_0} d^3x_0. \quad (2.7)$$

Vlivem transformace (2.1) bude v čase t tekutina z oblasti Ω_0 lokalizována v oblasti $\Omega(t)$ s obecně jinou geometrií a objemem ΔV daným jako

$$\Delta V = \int_{\Omega(t)} d^3x = \int_{\Omega_0} |J| d^3x_0. \quad (2.8)$$

V rovnici (2.8) byla použita klasická věta o substituci a $|J|$ je jacobíán lineárního zobrazení definovaného transformací (2.1). Po krátkém počítání získáme výsledný vztah pro časové změny objemu ΔV

$$\frac{d}{dt} \Delta V = \nabla \cdot \mathbf{v} \Delta V. \quad (2.9)$$

2.3 Silové působení a podmínky rovnováhy

Síly působící na tekutinu se dělí na dva druhy

- *Síly objemové* - jedná se o síly rozložené v prostředí s danou objemovou hustotou. Příkladem mohou být síly gravitační a elektromagnetické. Pro naše účely a pro naprosou většinu tekutin je důležitá zejména gravitační síla. Působení gravitace na tekutinu hustoty ρ v gravitačním poli \mathbf{g} je popsáno jako

$$d\mathbf{F}^{obj} = \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.10)$$

- *Síly plošné* - tyto síly působí na plošku určité orientace. Může se jednat např. o třecí sílu. Mějme plošku o velikosti $d\Sigma$ s orientací \mathbf{n} . Plošná síla působící na tuto plošku je pak dána jako

$$d\mathbf{F}^{plo} = \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} d\Sigma. \quad (2.11)$$

Vektor napětí $\mathbf{T}^{(n)}$ je definován jako

$$T_i^{(n)} = \tau_{ji}n_j, \quad (2.12)$$

kde τ_{ji} jsou složky tenzoru napětí.

Nyní již můžeme určit celkové silové působení na takutinu v oblasti Ω jako součet jednotlivých sil

$$F_i^{celk} = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} T_i^{(n)} d\Sigma = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} \tau_{ji}n_j d\Sigma = \int_{\Omega} \left(F_i + \frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV. \quad (2.13)$$

Celkový moment sil je popsán následující rovnicí

$$M_i^{celk} = \int_{\Omega} \left[\varepsilon_{ijk}x_j \left(F_k + \frac{\partial\tau_{lk}}{\partial x_l} \right) + \varepsilon_{ijk}\tau_{jk} \right] dV. \quad (2.14)$$

Aby bylo kontinuum v rovnováze je třeba aby celkový moment a celková síla byly rovny nule. Proto integrály v rovnicích (2.13) a (2.14) musí být nulové pro libovolnou oblast Ω . Z uvedeného vyplývají podmínky rovnováhy kontinua

$$F_i + \frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.15)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (2.16)$$

2.4 Rovnice kontinuity a pohybová rovnice

V této části odvodíme rovnici kontinuity a pohybovou rovnici. Tyto rovnice budou odvozeny ze základních principů zákona zachování hmotnosti a první věty impulsové. Hmotnost tekutého objemu je dána jako $M = \rho\Delta V$ a zákon zachování hmotnosti říká

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho\Delta V)}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \Delta V. \quad (2.17)$$

Zde jsme využili derivaci složené funkce a rovnici (2.9). Tento vztah musí platit pro libovolné ΔV z čehož vyplývá

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.18)$$

Užitím $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho$ a $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \rho\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho$ získáme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (2.19)$$

což už je hledaná rovnice kontinuity.

Pro odvození pohybové rovnice vyjdeme z první věty impulsové a ze znalosti hybnosti tekutého objemu $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$. Kombinací získáme

$$\mathbf{F}^{celk} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Delta V. \quad (2.20)$$

První člen je nulový z důvodu zákona zachování hmotnosti. Využitím rovnice (2.13) a rozepsáním úplné časové derivace získáme hledanou pohybovou rovnici

$$\frac{d\rho v_i}{dt} \equiv \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} \right) = F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (2.21)$$

2.4.1 Newtonovská tekutina

Rovnice (2.19) a (2.21) jsou základním stavebním kamenem pro určení veličin ρ a \mathbf{v} . Abychom je však mohli skutečně využít, je třeba určit vztah mezi tenzorem τ_{ij} a derivacemi složek rychlosti v_i . Budeme uvažovat Newtonovské tekutiny a nadefinujeme nejobecnější tenzor druhého řádu lineárně vytvořený z prostorových derivací složek rychlosti v podobě

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

Je zřejmé, že požadavek $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ je splněn. Koeficient μ je dynamická viskozita a pro jednoduchost ji uvažujeme konstantní. λ se zavádí jako $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Dosadíme-li (2.22) do (2.21) získáme obecnou pohybovou rovnici resp. sadu pohybových rovnic pro Newtonovské tekutiny v podobě

$$\left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} \right) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.23)$$

Tyto rovnice se označují jako Navier-Stokesovi rovnice.

2.4.2 Dokonalá tekutina

Budeme-li uvažovat $\mu = 0 = \lambda$ pak mluvíme o dokonalé tekutině, ve které nepůsobí žádné třecí síly. A tenzor napětí se redukuje na

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Pohybová rovnice se pak redukuje na

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2.25)$$

kde $G_i = F_i/\rho$ je hustota síly na jednotku hmotnosti. Tato rovnice se nazývá Eulerova rovnice.

3. Další aspekty matematického modelování proudění a transportu

V kapitole 2 byly uvedeny elementární myšlenky a základní principy mechaniky kontinua. Dále byly poměrně vyčerpávajícím způsobem odvozeny pohybové rovnice a rovnice kontinuity. Jistá podrobnost byla zvolena z důvodu kruciólního postavení odvozených rovnic v modelování tekutin.

V této kapitole budou již stručnější formou podány další vztahy a principy důležité pro matematické modelování. Dále se budeme v této kapitole už věnovat konkrétnímu typu tekutiny a to plynému skupenství. Předchozí kapitola pojednávala o tekutinách ve vší obecnosti.

3.1 Termodynamické aspekty

Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze ideální plyn. Ideální plyn byl použit i jako model atmosféry v simulacích, které jsou popsány v kapitolách dále.

3.1.1 Stavová rovnice

Stavová rovnice ideálního plynu může mít několik různých vyjádření s ohledem na to, které veličiny jsou pro nás důležité. Pro naše účely je důležitý vztah mezi tlakem p , hustotou ρ a teplotou T . Proto využijeme následující formu stavové rovnice (zapsáno s krátkým odvozením)

$$pV = nRT, \quad (3.1)$$

$$pV = \frac{m}{M_m}RT, \quad (3.2)$$

$$pV = \frac{\rho V}{M_m}RT, \quad (3.3)$$

$$p = \rho \frac{R}{M_m}T, \quad (3.4)$$

kde R je univerzální plynová konstanta a M_m je molární hmotnost plynu.

V případě atmosféry lze většinu procesů považovat za adiabatické. To znamená, že

$$\frac{p^\kappa}{T} = konst. \quad (3.5)$$

Díky této skutečnosti je možné zavést tzv. potenciální teplotu θ neboť musí platit

$$\frac{p_r^\kappa}{\theta} = konst. = \frac{p^\kappa}{T}. \quad (3.6)$$

Jednoduchou úpravou již získáme

$$\theta = T \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa = T \left(\frac{p_r}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \quad (3.7)$$

Ze vztahu (3.7) je zřejmé význam potenciální teploty jako teploty kterou bude mít plyn po adiabatické expanzi/kompresi na referenční tlak $p_r = 100\text{kPa}$. c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku.

3.1.2 Přenos tepla

Pro přenos tepla prostředím lze z prvního termodynamického zákona odvodit bilanční rovnici. Tato rovnice zapsaná s pomocí potenciální teploty θ má tvar

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \right) = K_T \Delta \theta + \nabla R_{fl}, \quad (3.8)$$

kde K_T je koeficient molekulární tepelné difuze, $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ je Laplaceův operátor a R_{fl} je radiační tok.

3.1.3 Transport příměsi

Pro případy řešení problému spojeného s příměsí pasivního kontaminantu budeme vycházet ze zákona zachování hmotnosti.

Mějme omezenou oblast Ω . Hmotnost kontaminantu v této oblasti se v čase může měnit pouze generací nebo degenerací kontaminantu v objemu Ω a nebo tokem skrz hranici $\partial\Omega$ tohoto objemu. Pro jednoduchost budeme uvažovat stabilní a chemicky pasivní kontaminant.

Šíření budeme popisovat ve smyslu šíření koncentrace kontaminantu. Koncentrace v infinitesimálním objemu δV je dána jako

$$C = \frac{\rho_k \delta V}{\rho_k \delta V + \rho_p \delta V} = \frac{\rho_k}{\rho_k + \rho_p}, \quad (3.9)$$

kde ρ_k a ρ_p jsou hustoty kontaminantu a plynu.

Nyní matematicky zformulujeme výše uvedený zákon zachování hmotnosti s omezením pouze na generaci kontaminantu v objemu

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C(\mathbf{r}, t) \rho_k(\mathbf{r}, t) dV = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}, t) \rho_k(\mathbf{r}, t) dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS, \quad (3.10)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor, $f(\mathbf{r}, t)$ je zdrojová funkce a $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ je vnější normálový vektor hranice $\partial\Omega$ v poloze \mathbf{r} . Mimo $\partial\Omega$ je $\mathbf{n} = 0$. Využitím Gaussovy věty, věty o záměně integrálu a derivace a rozepsáním úplné časové derivace získáme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (C \rho_k)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (C \rho_k) dV = \int_{\Omega} f \rho_k dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (3.11)$$

Pro jednoduchost a přehlednost nadále nezapisujeme prostorovou a časovou závislost. Tyto závislosti však stále platí. Už při využití Gaussovy věty a věty o záměně integrálu a derivace jsme uvažovali „slušně se chovající“ spojitě funkce tento předpoklad si podržíme i nadále. Nyní použijeme ještě základní vlastnosti integrálu a získáme

$$\frac{\partial (C\rho_k)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (C\rho_k) = f\rho_k - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.12)$$

Obecně lze vektor \mathbf{q} vyjádřit jako

$$\mathbf{q} = -\rho D \left(\nabla C + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right), \quad (3.13)$$

kde D je koeficient difuze, $D_T = \frac{k_T}{T}$ je koeficient termální difúze a $D_p = \frac{k_p}{p}$ je barodifúzní koeficient.

Ukazuje se, že v reálných podmínkách atmosféry lze dobře zanedbat členy úměrné ∇T a ∇p . Zanedbáním těchto členů dostaneme pro tok \mathbf{q} známý Fickův zákon

$$\mathbf{q} = -\rho D \nabla C. \quad (3.14)$$

Dosazením Fickova zákona do rovnice (3.12) získáme rovnici pro transport příměsi ve tvaru

$$\frac{\partial (C\rho_k)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (C\rho_k) = f\rho_k + \nabla \cdot (\rho D \nabla C). \quad (3.15)$$

4. Základy teorie turbulentního proudění

Proudění tekutiny se může vyskytovat ve dvou stavech. Jedná se o proudění laminární a proudění turbulentní. Laminární proudění se vyznačuje vzájemně rovnoběžnými proudnicemi a jednotlivé vrstvy se nepromíchávají. Naopak v případě turbulentního proudění mají proudnice velmi nepravidelný tvar. Tento tvar je způsoben tím, že mimo posuvného pohybu tekutina vykonává ještě další složité vířivé pohyby.

Kvantitativně určuje přechod od proudění laminárního k turbulentnímu Reynoldsovo číslo Re a jeho kritická hodnota. Ukazuje se, že v mezní vrstvě atmosféry se vyskytuje pouze proudění turbulentního charakteru.

Obecně je turbulentní proudění velmi složité a zahrnuje velkou škálu měřítek. Víry větších rozměrů se rozpadají na menší a menší. Při dosažení tzv. Kolmogorova měřítka turbulentních pohybů dochází k disipaci pohybové turbulentní energie na teplo.

Při matematickém modelování turbulentních pohybů můžeme jít různými cestami. První z nich a po absorbování předchozích kapitol o modelování proudění je zcela intuitivní. Jedná se o přímé řešení Navier-Stokesových rovnic s využitím postupů numerické matematiky. Tento přístup je označován také jako „Direct Numerical Simulation (DNS)“. Naneštěstí tento postup je z důvodu extrémních nároků na výpočetní výkon prakticky nepoužitelný pro větší modely.

Další možností je rozdělení pohybů podle měřítek na větší víry, které jsou řešeny přímo Navier-Stokesovými rovnicemi a na pohyby malých měřítek, které jsou vhodně parametrizovány tzv. turbulentní viskozitou. Tato metoda se nazývá „Large Eddy Simulation (LES)“. Je o poznání přátelštější co se nároků na výpočetní výkon týče, avšak i tak jsou tyto nároky vysoké.

V praktickém použití se tedy nejčastěji setkáváme se statistickými modely. I když s nárůstem výpočetního výkonu se stávají výše zmíněné přístupy stále dostupnějšími. Ve statistickém přístupu rozdělujeme turbulentní proudění na dvě složky

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad (4.1)$$

kde $\bar{\mathbf{v}}$ je ustřednění přes vhodný časový interval a \mathbf{v}' je residuální náhodná složka proudění. Přičemž platí $\bar{\mathbf{v}'} = 0$.

4.1 Reynoldsovo průměrování

Vyjdeme ze statistického modelu a dosadíme (4.1) do (2.23). Tímto obdržíme Navier-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial \rho v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \rho v'_i}{\partial x_j} = \\ & = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nyní získanou rovnici ustředníme, čímž získáme

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial x_j} = \overline{F_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \overline{v'_j \frac{\partial \rho v'_i}{\partial x_j}}. \quad (4.3)$$

Pro zjednodušení budeme dále uvažovat nestlačitelnou tekutinu. To znamená, že $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ a $\rho = konst.$. Toho využijeme i pro trik, kdy $v_i \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Tudíž můžeme tento člen odečíst od pravé strany předchozí rovnice, aniž by jsme ji nějak ovlivnili. Výsledná rovnice po úpravách a užití pravidla derivace součinu je dána jako

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \right) = \overline{F_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_j v'_i}). \quad (4.4)$$

Rovnice (4.4) se nazývají „Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS)“.

Tenzor $\tau_{ij}^R = -\rho \overline{v'_j v'_i}$ se nazývá Reynoldsův tenzor. Složky tohoto tenzoru můžeme získat rozepsáním složek v_i resp. v_j pomocí rozkladu (4.1) a dosazením do (2.23) poté rovnice vynásobit v'_j resp. v'_i a rovnice sečíst. Oproti předchozímu případu je zde potřeba pomocí (4.1) rozložit i F_i a p . Poté už postupujeme podle stejného schématu jako při odvození rovnic (4.4). Výsledná sada rovnic má tvar

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \overline{v'_j v'_i}}{\partial t} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) = \\ & = -\overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \mu (\overline{v'_j \Delta v'_i} + \overline{v'_i \Delta v'_j}) - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_k v'_i v'_j}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sada rovnic (4.5) lze použít k určení složek Reynoldsova tenzoru. Avšak je nutné si všimnout korelací třetího řádu $\overline{v'_k v'_i v'_j}$. Při pokusu o určení složek tenzoru třetího řádu tvořeného těmito korelacemi by výsledná sada rovnic obsahovala korelace čtvrtého řádu. Takto by šlo postupovat do nekonečna. Je to prostý důsledek nelinearity Navier-Stokesových rovnic (2.23). Toto schéma se nazývá Keller-Friedmanovy rovnice. A problematika je označována jako problém turbulentního uzávěru. Rigoróznější odvození a popis Reynoldsova zrpůměrován je uveden např. v Blazek (2005) nebo Jan Bednář (1985).

4.2 Prandtlova teorie směřovací délky

Pro vyčíslení Reynoldsova tenzoru

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{v'_i v'_j} \quad (4.6)$$

přišel v roce 1925 L. Prandtl s teorií směřovací délky. Podle této teorie je směřovací délka vzdálenost, kterou může částice tekutiny pohybující se středovou rychlostí ve směru x_i urazit ve směru x_j při $i \neq j$, než ztratí své původní vlastnosti a vlivem turbulencí splyne s okolím.

Dalším předpokladem je, že fluktuace jsou spojené se směřovací délkou následujícím vztahem

$$v'_i = l_{ij} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}. \quad (4.7)$$

Z kontinuity však plyne, že fluktuace v'_j do směru x_j musí být řádově stejné avšak s opačným znaménkem. Užitím této úvahy a ustředněním získáváme pro Reynoldsův tenzor vyjádření

$$\tau_{ij}^R = -\overline{\rho v'_i v'_j} = \rho \overline{l_{ij}}^2 \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (4.8)$$

V praxi se běžně neuvažuje tenzorový charakter veličiny l_{ij} . V případě atmosféry a její přízemní části se směřovací délka vyjadřuje jako lineární závislost na x_3 jako

$$l = \kappa (x_3 + x_3^0), \quad (4.9)$$

kde κ je von Karmanova konstanta a x_3^0 je parametr drsnosti.

Detailnější popis odvození této hypotézy je možné nalézt v Jan Bednář (1985) a Bansal (2005).

4.3 Boussinesquova hypotéza

Mimo nejjednodušší Prandtlovy teorie existuje ještě tzv. Boussinesquova hypotéza Boussinesq (1877), kdy se předpokládá, že složky Reynoldsova tenzoru jsou lineárně závislé na střední rychlosti deformace

$$\tau_{ij}^R = -\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (4.10)$$

kde μ_t je turbulentní viskozita a $k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$ je definice turbulentní kinetické energie.

4.4 Modely turbulence

Pro řešení problému turbulentního uzávěru se používají různé přístupy v závislosti na tom, jaký řád fluktuací aproximujeme (uzavíráme).

4.4.1 Uzávěry prvního řádu

V případě uzávěru prvního řádu máme několik možností z nichž dvou jsme se již dotkli ale nenaznačili jejich uplatnění.

1. Nejtriviálnější přístup je předpoklad, že fluktuace druhého řádu jsou prosté konstanty.
2. Prandtlova teorie - zde byl uveden přímo vztah nahrazující fluktuace druhého řádu.
3. Jednorovnicový model - vyjdeme s Boussinesquovy hypotézy a turbulentní viskozitu určíme pomocí jedné rovnice. Toho můžeme dosáhnout třeba užitím Prandtlovy teorie. Turbulentní viskozita je pak dána jako $\mu_t = l\sqrt{k}$.
4. Dvourovnicový $k - \varepsilon$ model - Vyjdeme opět z Boussinesquovy hypotézy, ale turbulentní viskozita bude definována jako $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$. Veličiny k a ε jsou určeny sadou dalších dvou parciálních diferenciálních rovnic.

4.4.2 Uzávěr druhého a vyššího řádu

Analogicky s uzávěrem prvního řádu aproximujeme fluktuace třetího a vyššího řádu. V praxi se používají pouze metody uzávěru druhého řádu. Vyšší řády už se nevyplatí aplikovat vzhledem k poměru výpočetní náročnost/zpřesnění. V této práci je však nebudeme diskutovat a odkážeme čtenáře např. na Launder a Sandham (2002) nebo Jaňour (2001).

Pro účely naší práce je takto krátký popis modelů dostačující. Pro detailnější informace je možné použít Mellor (1973); Mellor a Yamada (1974); Vach (2001); Tetsuji Yamada (1975).

5. Transport pasivní příměsi

Transport pasivní příměsi v poli proudění lze řešit obecně třemi způsoby. Nejstarší a nejtriviálnější je tzv. Gaussovský model rozptylu. O něco komplikovanější a přesnější je Lagrangeův popis šíření příměsi. Obě tyto metody v sobě však skrývají neoddelitelnou nevýhodu. Touto nevýhodou je, že šíření příměsi se modeluje v předem určeném rychlostním poli a toto pole není příměsí nijak ovlivněno. Tento problém a zdroj nepřesností odstraňuje Eulerova metoda šíření příměsi. Při tomto přístupu se společně s pohybovými rovnicemi a rovnicí kontinuity řeší také transportní rovnice. Čímž dochází k propojení rychlostního pole se šířením příměsi a naopak.

Výhody eulerovského přístupu jsou zřejmé. Nevýhodou je však výpočetní náročnost. Tento přístup je také použit v simulaci, která je součástí této práce. V dalším textu budou velice krátce zmíněny i předchozí dva modely. Podrobněji se transportem příměsi zabývají práce Vach (2001) a Vach (2006).

5.1 Gaussovský model

Tento způsob modelování je schopný zahrnout pouze stacionární stavy a šíření příměsi v ovzduší se děje na základě Gaussovy křivky. Je zřejmé, že tento model nebude použitelný pro dynamické modelování pohybu příměsi v prostředí. Namísto toho se používá pro odhad dlouhodobého vlivu šíření kontaminace prostředím. V tomto případě nám nevadí stacionárnost modelu a naopak oceníme jeho výpočetní jednoduchost v podobě pouhého dosazení do klasické rovnice. Lehká komplikace nastává v případě nebodových zdrojů. Jejím řešením je však triviální integrace přes zdrojovou oblast.

Uvažujeme-li průměrné proudění vzduchu ve směru x a rychlostí $\overline{v_x}$, pak základním matematickým vyjádřením modelu je

$$\bar{c}(x,y,z) = \frac{Q}{2\pi\overline{v_x}\sigma_y\sigma_z} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}, \quad (5.1)$$

kde Q je zdrojový člen, $\sigma_{y,z} = \sqrt{\frac{2K_{y,z}x}{\overline{v_x}}}$ a $K_{y,z}$ jsou koeficienty turbulentní difuze.

Gaussovský model je používán také v metodice „SYMOS“, zde je aplikováno několik zpřesnění Gaussova modelu. Detailní popis je přímo v metodice Bubník a kol. (1998) a Bubník a kol. (2003).

5.2 Lagrangeův popis

Tento způsob popisu je již podstatně méně založený na empirii a umožňuje změny proudového pole v prostředí. Toto pole je však před aplikací modelu nejprve určit a částice příměsi se poté pohybují po proudnicích rychlostního pole. Práce Bučánek (2007) dělí Lagrangeovy modely na několik poddruhů s různou přesností a komplikovaností. Výrazným vylepšením jsou tzv. puff-modely, kdy se vlečka rozdělí na několik dílů (puffů), které se sledují jako samostatné objekty. Pokročilejší modely dokáží toto větvení na puffy aplikovat opakovaně a rozdělit i

puff na další sadu menších puffů. Detailnější rozbor Lagrangeova popisu je proveden v pracích Vach (2006); Ross a Sharples (2004) a Kurbanmuradov a Sabelfeld (2000).

6. Příprava modelu pro simulaci

Pro ukázkovou simulaci byl zvolen **hypotetický** případ úniku kontaminantu z jaderné elektrárny Temelín. Budou posány dva scénáře.

- Nouzové odpuštění přetlaku - zde se modeluje nouzové odpuštění tlaku pomocí ventilačního komínu na reaktorové budově.
- Exploze a porušení kontejnmentu - v tomto případě je simulována exploze uvnitř kontejnmentu s spojená s destrukcí vrchní části obálky.

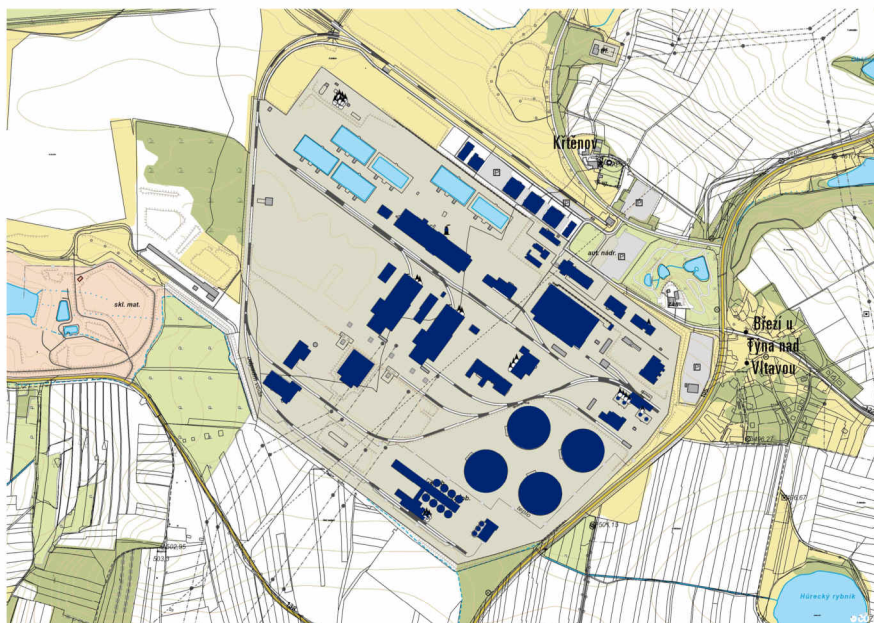
V obou případech byla simulovaná událost lokalizována na budově druhého reaktoru.

Vzhledem k velikosti samotného areálu a jednotlivých budov a také s ohledem na charakter simulovaných procesů je třeba vytvořit co nejpřesnější model nejen terénu ale i samotné elektrárny.

6.1 Model areálu elektrárny

Základní data ohledně areálu elektrárny a parametrů jednotlivých budov byla získána z veřejně dostupných informací poskytovaných provozovatelem elektrárny společností ČEZ a.s. Další informace zejména o rozmístění jednotlivých budov byly získány z katastrální mapy oblasti v programu ArcGIS. Tento program je takřka etalonem mezi GIS systémy a bude použit a zmíněn ještě několikrát.

Vzhledem k tomu, že je katastrální mapa k dispozici v rastrovém formátu bylo třeba provést vektorizaci jednotlivých budov v areálu. Obrázek 6.1 ukazuje areál elektrárny s budovami ve formě polygonů.

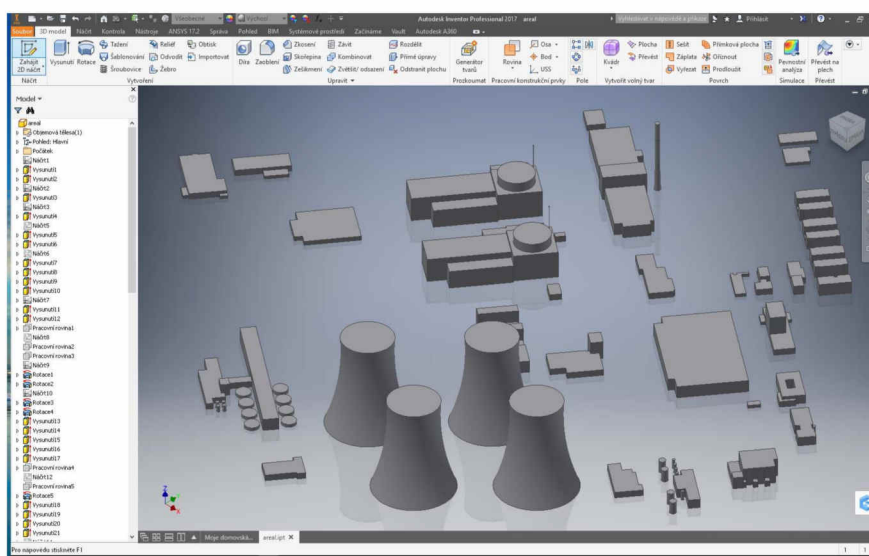


Obrázek 6.1: Vektorizované půdorysy budov ve formě tmavě modrých polygonů na podkladu ZABAGED společně s katastrální mapou.

Takto získané polygony je již možné otevřít pomocí programu AutoCAD, konkrétně odnoží Civil3D od společnosti Autodesk. Tento software slouží pro návrh a konstrukci architektonických objektů ať už se jedná o budovy, terénní úpravy, atd.. Díky možnostem parametrického kreslení bylo možné snadno provést rektifikaci půdorysů jednotlivých budov. Po zpětné kontrole tvarů a umístění půdorysů opět za pomoci ArcGIS bylo možno pokračovat s tvorbou 3D modelu elektrárny. Na tomto místě je dobré zmínit výhodu komunikace nativních formátů Civil3D a ArcGIS, která umožňuje přímé otvírání souborů jedné aplikace v aplikaci druhé.

Dalším krokem je tvorba realistických 3D modelů z půdorysů jednotlivých budov. Ačkoliv už z názvu je zřejmé, že Civil3D umí pracovat ve třech dimenzích samotná tvorba modelu byla uskutečněna v jiném softwaru z tvorby společnosti Autodesk. Použitým nástrojem byl Autodesk Inventor. Tento nástroj umožňující parametrické modelování prostorových objektů se využívá zejména ve strojírenství, kde nabízí obrovské možnosti nejen z hlediska modelování statických objektů. Je v něm možno vytvořit kompletní sestavy zařízení s realisticky sestavenými komponentami a pohybovými vazbami.

Právě pro jeho robustnost z hlediska komplikovaných tvarů byl zvolen pro modelování areálu elektrárny a jednotlivých budov. Tyto budovy jsou prakticky ve všech případech ne zcela pravidelných tvarů s velkým množstvím vystupujících objemů. Obrázek 6.2 ukazuje prostředí Inventor s vytvořeným modelem elektrárny.



Obrázek 6.2: Prostředí Autodesk Inventor s vytvořeným modelem areálu elektrárny.

6.2 Model terénu

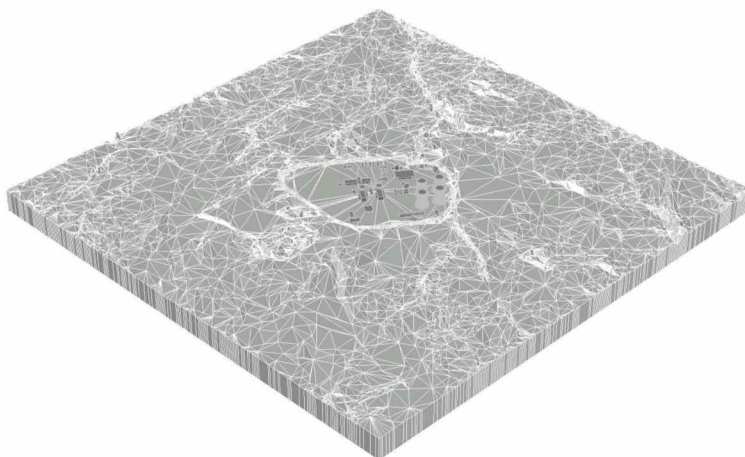
Pro vytvoření modelu terénu je třeba získat výškopisná data. Tato data byla opět získána pomocí ArcGIS z WMS zdroje Českého úřadu zeměměřičského a katastrálního (ČÚZK). Konkrétně se jednalo o digitální model reliéfu České republiky 4.generace (DMR 4G). Tento model je vytvořen za pomoci leteckého laserového skenování povrchu. Výškopisná data jsou uspořádána v pravidelné

čtvercové síti s rozlišením 5×5 m a výškovou přesností 0,3 m v odkrytém a 1 m v zalesněném terénu.

Ve snaze o co nejkvalitnější popis byla nejprve vyjmuta čtvercová oblast o rozloze 20×20 km² s nezměněným rastrem. Po otevření v Civil3D se však ukázalo, že takto velký a detailní datový soubor je příliš pro použitý počítač i přes to, že se jedná o výkonný herní stroj. Postupně byla tedy oblast zmenšována a redukováno rozlišení až na čtverec o straně 100m a oblast 5×5 km². Takovýto model terénu byl však již značně nepřesný a umístění areálu elektrárny bylo prakticky nemožné. Důvod proč exportovat výškopis terénu z ArcGIS do Civil3D je takový, že použitý balík simulačních nástrojů společnosti ANSYS, ve kterém byla vytvořena i výpočetní síť neumí s daty z GIS programů pracovat. Druhý neméně důležitý důvod je spojení modelu terénu s modelem elektrárny.

Jako schůdné řešení pro zpracování dat se ukázalo vytvoření modelu terénu v podobě nepravidelné trojúhelníkové sítě (TIN). Z této sítě vyexportovat jednotlivé spojnice a tyto vyexportovat z prostředí ArcGIS do prostředí Civil3D. Zde z těchto spojníc opět regenerovat TIN. Důvod pro tento kostrbatý postup je nemožnost přímého přenosu TIN z ArcGIS do Civil3D z důvodu formátové nekompatibility. TIN má obrovskou výhodu oproti pravidelnému rastru v datové nenáročnosti. S pomocí TIN bylo možné pracovat s rozlišením 20×20 m. Oblast zůstala omezena na 5×5 km² z důvodu výpočetní náročnosti samotných simulací.

Po zjednodušení terénu pomocí funkcí Civil3D bylo z povrchu vytvořeno objemové těleso, na které už bylo možné umístit model areálu. Toto zjednodušení odebere a přeuspořádá jednotlivé trojúhelníky tak, aby byla zachována co největší přesnost terénu, ale omezila se komplexnost sítě. Vytvořený model terénu je na obrázku 6.3.

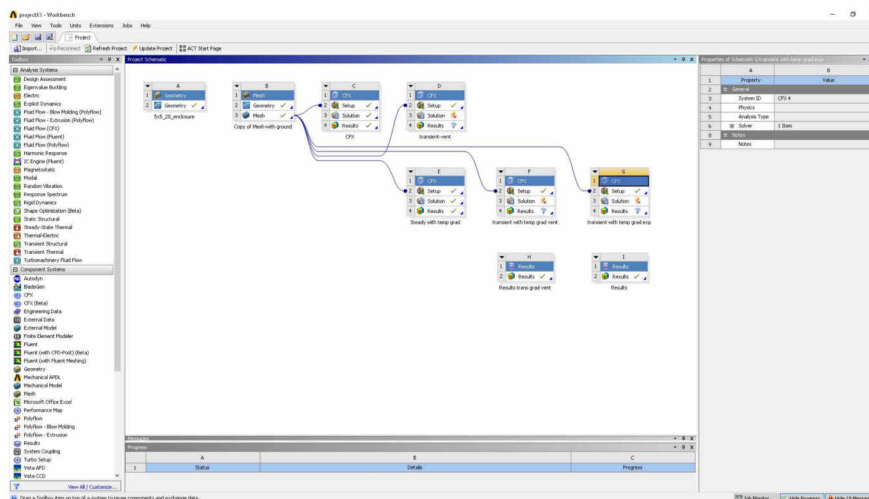


Obrázek 6.3: Objemové těleso vytvořené z digitálního modelu reliéfu se zobrazenou TIN a s umístěným modelem elektrárny.

6.3 Spojení modelů terénu a elektrárny a export do ANSYS Workbench

Aby bylo možné bezproblémové spojení obou modelů, bylo přistoupeno ke zjednodušení v podobě vyhlazení terénu v areálu elektrárny na jednotnou nadmořskou výšku 180 m n.m. Díky tomuto zjednodušení nehrozily problémy mezer a malých ploch při tvorbě výpočetní sítě.

Po spojení modelů terénu a elektrárny a vytvoření bloku bylo možné vyexportovat výsledný model do prostředí ANSYS Workbench. Toto prostředí je ukázáno na obrázku 6.4.



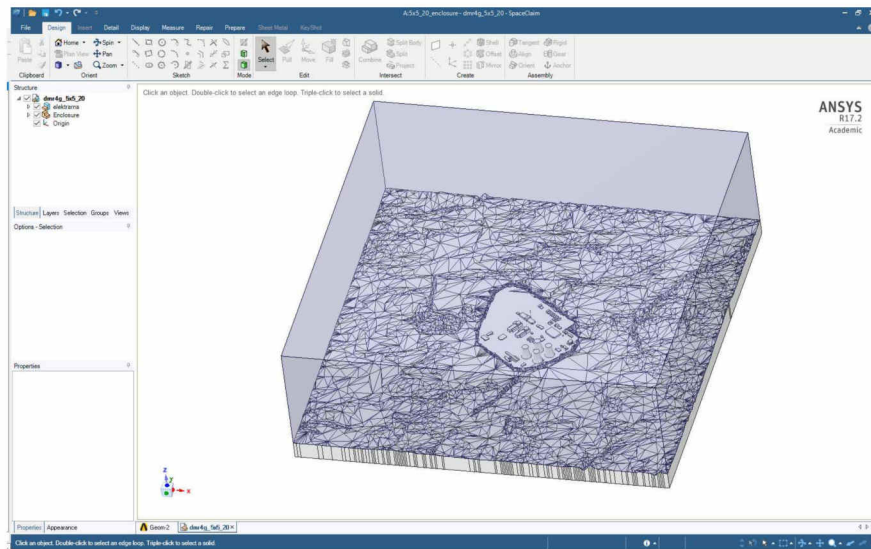
Obrázek 6.4: Prostředí ANSYS Workbench. Z obrázku je vidět propojení jednotlivých simulací s výpočetní sítí.

Vzhledem k omezením studentské licence nebylo možno otevřít přímo nativní formát Civil3D nebo Inventor. Namísto toho bylo nutné vytvořit model ve formátu IGES a tento potom načíst jako geometrii pro simulaci.

6.4 Příprava geometrie v prostředí ANSYS Workbench

Ačkoliv by se mohlo zdát, že práce na geometrii skončila, tak tomu tak není. V prostředí ANSYS Workbench je nutné geometrii otevřít v komponentě SpaceClaim. Zde je nutné vytvořit obálku modelu ve které bude vytvořena výpočetní síť. SpaceClaim nedokáže vytvořit obálku kolem plošných objektů, proto bylo třeba vytvořit z povrchu objemové těleso. Ještě před vytvořením obálky je vhodné využít kontrolní mechanismy a zkontrolovat a případně opravit chyby v geometrii, které by mohly ovlivnit tvorbu výpočetní sítě.

Užitečnou vlastností komponenty SpaceClaim je, že pokud zadáme nulové mezery mezi spodkem a stranami modelu a obálkou, pak touto obálkou okopíruje povrch terénu a areálu. To nám umožní odstranit původní geometrii a pracovat pouze s obálkou, který si však nadále nese geometrické vlastnosti podkladu. V našem případě je obálka s půdorysem $5 \times 5 \text{ km}^2$ a výškou 1500m nad terén v oblasti areálu. Obrázek 6.5 ukazuje prostředí SpaceClaim s geometrií a obálkou.

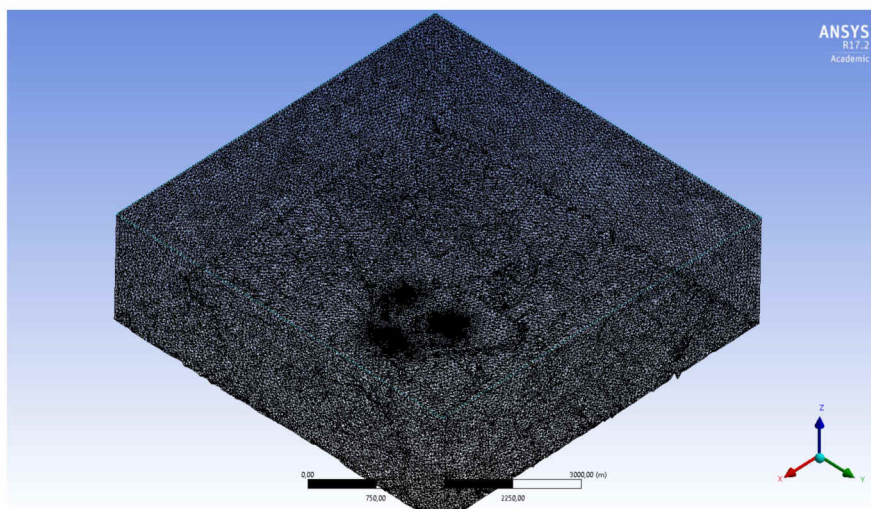


Obrázek 6.5: Geometrie modelu po všech úpravách a zjednodušeníh společně s obálkou, ve které bude probíhat simulace.

6.5 Tvorba výpočetní sítě

Tvorba výpočetní sítě je jednou z nejdůležitějších částí celé přípravy simulace. Nekvalitně připravená síť dokáže znehodnotit výsledky výpočtu nebo výpočet vůbec neumožní. Tvorba sítě v našem případě podléhá i omezením na velikost a to opět z licenčních důvodů. I proto byl zvolen menší rozsah simulace v podobě $5 \times 5 \text{ km}^2$.

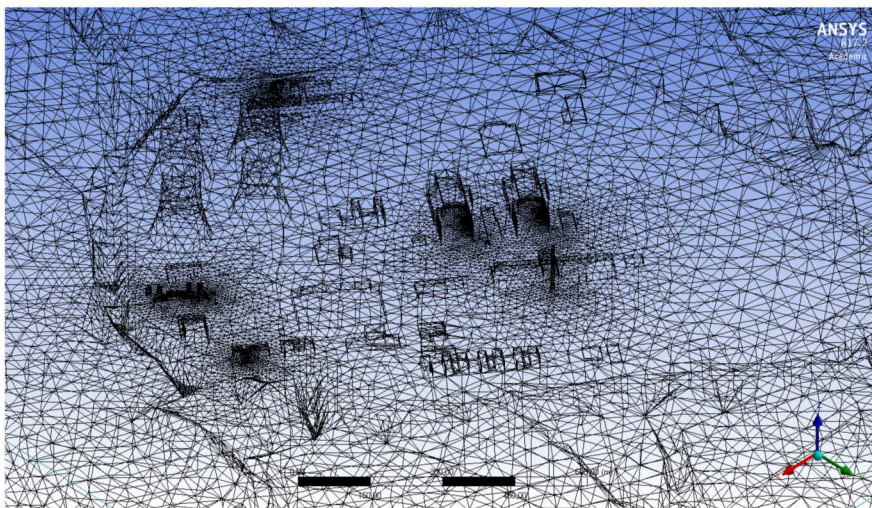
V případě modelování proudění v atmosféře se často při tvorbě výpočetní sítě používá mezní vrstva. To znamená, že buňky nejbliže k povrchu jsou zhuštěné a se zvyšující se výškou se zvětšuje jejich velikost. V případě simulace pouhého proudění by byl zvolen stejný postup. Avšak my budeme simulovat nestacionární procesy šíření kontaminantu v atmosféře. Proto byla zvolena tetrahedrální síť s hranou o velikosti maximálně 50m.



Obrázek 6.6: Výpočetní síť vytvořená z obálky modelu.

Požadavek na hustší pokrytí byl ošetřen variabilní velikostí elementu řízenou zakřivením a vzdáleností. Tímto se efektivně zhuštila síť v blízkosti i nejmenších objektů geometrie. Vygenerovaná síť je na obrázku 6.6. Ta samá síť ovšem s pohledem přiblíženým na modely budov je zobrazena na obrázku 6.7.

V prostředí komponenty pro tvorbu výpočetní sítě byly ještě vybrány stěny simulované oblasti, povrch terénu, výstupy chladících věží, výstupy ventilačních komínů a vrchlíkové části reaktorových budov a byly vytvořeny tzv. „named selections“. Tyto pojmenované výběry nám umožní snadněji definovat okrajové podmínky samotné simulace.



Obrázek 6.7: Detail výpočetní sítě ukazující zhuštění na zakřivených objektech.

7. Určení fyzikálních parametrů simulace

Abychom získaly co nejvalitnější výsledky simulací, je důležité co nejlépe parametrizovat celý model. V kapitole 6 jsme se zabývali tvorbou geometrie modelu a výpočetní sítí. V této kapitole popíšeme určení fyzikálních parametrů vstupujících do simulace.

7.1 Parametry uvnitř modelu

Nejprve se budeme zabývat zvolenými parametry uvnitř simulovaného objemu. Jako primární hodnota, od které odvíjí další veličiny byla zvolena teplota u povrchu země. Tato teplota byla stanovena na $t_0 = 25^\circ\text{C}$. Od této teploty se odvíjí hodnota referenčního tlaku oblast simulace. Tato hodnota byla stanovena z fyzikálních vlastností vzduchu jako

$$p_r = 99.26\text{kPa}. \quad (7.1)$$

Teplota v objemu nebyla nastavena jako konstantní nýbrž byla zvolena možnost dopočtení teploty na základě transportu tepla.

Dalším parametrem majícím velký vliv na výsledky je aktivace vztlaku v simulaci. Z hlediska výpočtů to není nic jiného než svázání hustoty s teplotou a tlakem. Zde je nutné dodat referenční hodnotu hustoty a gravitační zrychlení. Referenční hodnota hustoty byla opět určena z vlastností vzduchu jako

$$\rho_r = 1.15\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (7.2)$$

V případě špatného stanovení této hodnoty mohou ze simulací vycházet až komické výsledky, kdy se horký vzduch z chladících věží „plazí“ po terénu. Pro naše účely nemůžeme vztlak zanedbat.

Jako model vzduchu pro simulaci byl použit vzduch jako ideální plyn. Turbulence jsou charakterizovány $k - \varepsilon$ modelem.

7.2 Okrajové podmínky

V této části popíšeme jednotlivé možné okrajové podmínky a jejich volbu. V simulačním kódu ANSYS CFX je k dispozici několik možností definice okrajových podmínek

- INLET - tato okrajová podmínka říká, že se očekává převažující proudění směrem do modelu. Je možné i proudění ven z modelu, ale pouze za podmínky, že je toto proudění určeno rychlostí. Pokud by vyplývalo z rozdílných tlaků, pak se chová ve směru ven z modelu jako stěna.
- OUTLET - tato okrajová podmínka říká, že se očekává převažující proudění směrem z modelu. Je možné i proudění ven z modelu, ale pouze za podmínky, že je toto proudění určeno rychlostí. V podstatě se jedná o protiklad INLET.

- OPENING - tato okrajová podmínka nedefinuje žádný význačný směr. Jedná se jak název napovídá o otevřený průchod definovaný pouze relativním tlakem. Tudíž se jedná pro nás o ideální okrajovou podmínku pro nevtokové stěny.
- SYMMETRY - použitím této podmínky dojde k zrcadlení podmínek uvnitř modelu.
- WALL - podmínka definující nepropustnou stěnu. Je možné nadefinovat drsnost stěny i její teplotu. Stejně tak jako tok přídavných proměnných.

Z uvedeného je výběr okrajových podmínek celkem zřejmý. Pro vtokové stěny použijeme podmínku INLET, pro terén a budovy podmínku WALL a pro zbytek OPENING. Vynechali jsme ještě zdrojová místa příměsí jako jsou chladicí věže pro páru a výstup z ventilačního komína resp. vrchlíkovou část budovy druhého reaktoru. Pro tyto oblasti je zvolena také podmínka INLET avšak další její parametry se výrazně liší.

7.3 Další parametry okrajových podmínek

7.3.1 Parametry atmosféry

Teplota v simulovaném objemu se dynamicky dopočítává na základě transportu tepla včetně radiačního přenosu. Pro okrajové podmínky však definujeme teplotu závislou na výšce vztahem

$$t(z) = t_0 - 0.0065z, z \geq 0, \quad (7.3)$$

$$t(z) = t_0, z < 0. \quad (7.4)$$

Zde je třeba dodat, že souřadnicový systém byl zvolen tak, že $z = 0$ odpovídá nadmořské výšce 180 m. Teplotu určenou tímto vztahem bude mít vzduch na všech okrajových podmínkách spojených s atmosférou.

Rychlost a směr vstupního proudění byly určeny s použitím větrné mapy vytvořené Ústavem fyziky atmosféry AVČR v.v.i., kdy pro výšku 10m nad terénem byla k dispozici i větrná růžice. Největší zastoupení měl vítr ve směru 120°. Tento směr je pro účely simulace uvažován jako nezávislý na výšce.

Rychlost větru skrz zdrojové stěny byla definována podle Vach a Duong (2011) na základě logaritmického zákona

$$v(z) = \frac{v^*}{\kappa} \ln \frac{z + z_0}{z_0}, \quad (7.5)$$

kde v^* je třetí rychlost a z_0 je drsnost terénu. Z rychlostí získaných z větrné mapy $v_{10} = 3.6m \cdot s^{-1}$ a $v_{100} = 5.5m \cdot s^{-1}$ byla určena třetí rychlost jako $v^* = 0.32m \cdot s^{-1}$. Drsnost terénu byla určena podle Vach a Duong (2011) jako $z_0 = 0.1m$.

Parametry turbulentního proudění byly určeny na základě $k - \varepsilon$ modelu se stěnovými funkcemi popsanými hodnotami podle Richards a Hoxey (1993)

$$k = \frac{v^{*2}}{\sqrt{C_\mu}} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right), \quad (7.6)$$

$$\varepsilon = \frac{v^{*3}}{\kappa z} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right), \quad (7.7)$$

kde podle Launder a Spaulding (1972) $C_\mu = 0.09$ a $\delta = 1500m$, což odpovídá výšce modelované oblasti.

7.3.2 Okrajová podmínka terénu a budov

Okrajové podmínky terénu a budov byly zvoleny typu WALL. Z důvodu typu simulace byla nadefinována i teplota těchto povrchů jako 22°C. Okrajové podmínky budov a terénu se však liší ve zvolené drsnosti, kdy terén má drsnost 0.1m a budovy 0.005m. U obou oblastí je definována „no slip“ podmínka, která říká, že rychlost proudění na povrchu je nulové.

7.3.3 Okrajová podmínka chladících věží

Pro věrnost simulace byl simulován i chladicí systém. Byl předpokládán výstup nasycené páry o teplotě 30°C, aby byl splněn odpar z jedné věže $413l \cdot s^{-1}$ udávaný provozovatelem musí být rychlost na výstupu z věže $1.95m \cdot s^{-1}$. A zvolená okrajová podmínka je samozřejmě INLET.

7.3.4 Okrajové podmínky pro ventilační komín a vrchlík kontejnmentu

V tomto případě se jedná také o okrajové podmínky typu INLET. Jejich parametry jsou ale závislé na čase.

V případě prvního scénáře a ventilačního komína je rychlost definována Gaussovou křivkou tak aby na základě zdrojové koncentrace $0.4kg \cdot m^3$ vypustila do objemu $400kg$ kontaminantu. Těžiště bylo zvoleno v čase 50s po začátku simulace a $\sigma = 10s$. Množství kontaminantu bylo zvoleno uměle, stejně jako teplota vypouštěného plynu 200°C. Pro jednoduchost uvažujeme stejný plyn jako okolní atmosféru.

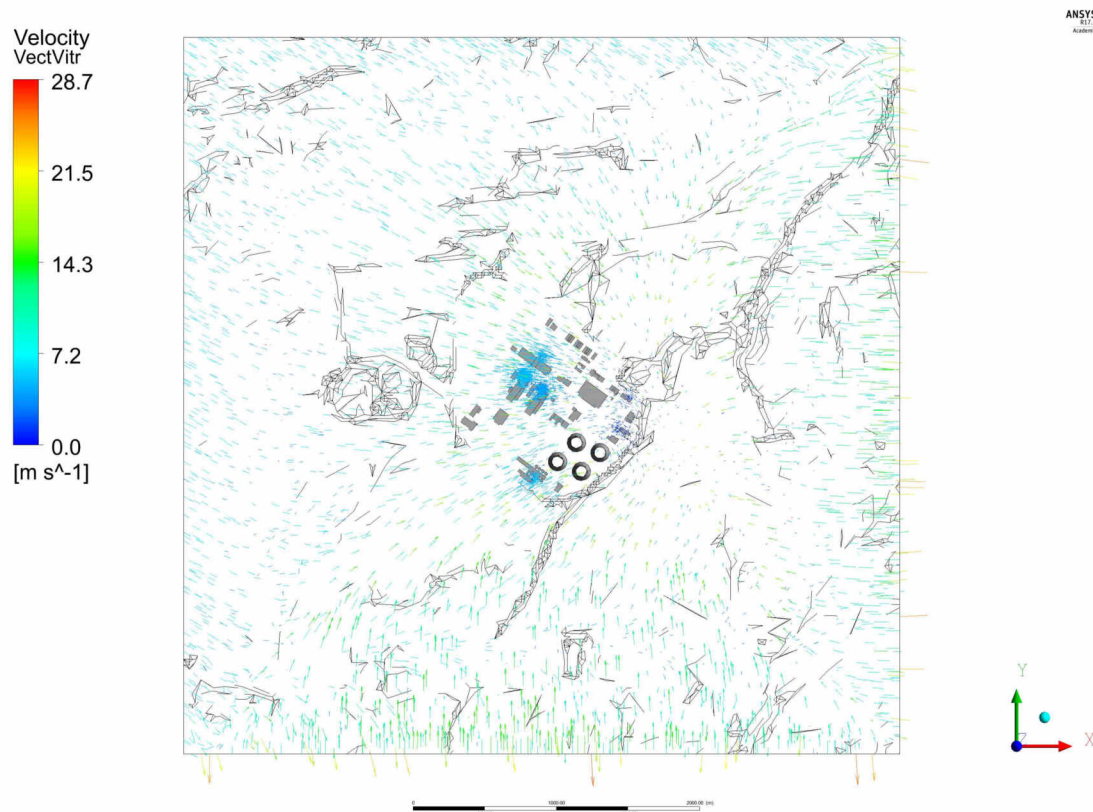
V případě druhého scénáře není definována rychlost ale přetlak vůči okolní atmosféře. Maximální přetlak kontejnmentu je $p_{max} = 0.49MPa$. V našem případě uvažujeme katastrofický scénář velkého výbuchu a proto je maximální tlak na hodnotě 1MPa. Abychom nasimulovali průběh výbuchu, je na začátku rychlý nárůst tlaku až na hodnotu relativního tlaku 1MPa a pak pozvolnější pokles až na hodnotu 1kPa, který zajišťuje kontinuální uvolňování po explozi. Teplota uvolněného plynu je v tomto případě 500°C. Celá událost trvá 1.1s. Po této době už je tlak konstantní na hodnotě 1kPa až do konce simulace.

Podrobný popis parametrů, jejich definicí a chování pro simulační kód CFX lze najít v cfx (b) a cfx (a).

8. Simulace a jejich výsledky

8.1 Stacionární stav

V předchozí kapitole byly popsány parametry vložené do simulačního kódu. Pro vytvoření časově nestacionární simulace je třeba nejprve nasimulovat stacionární stav. Tento stacionární stav je poté použit jako startovní stav pro nestacionární simulace.



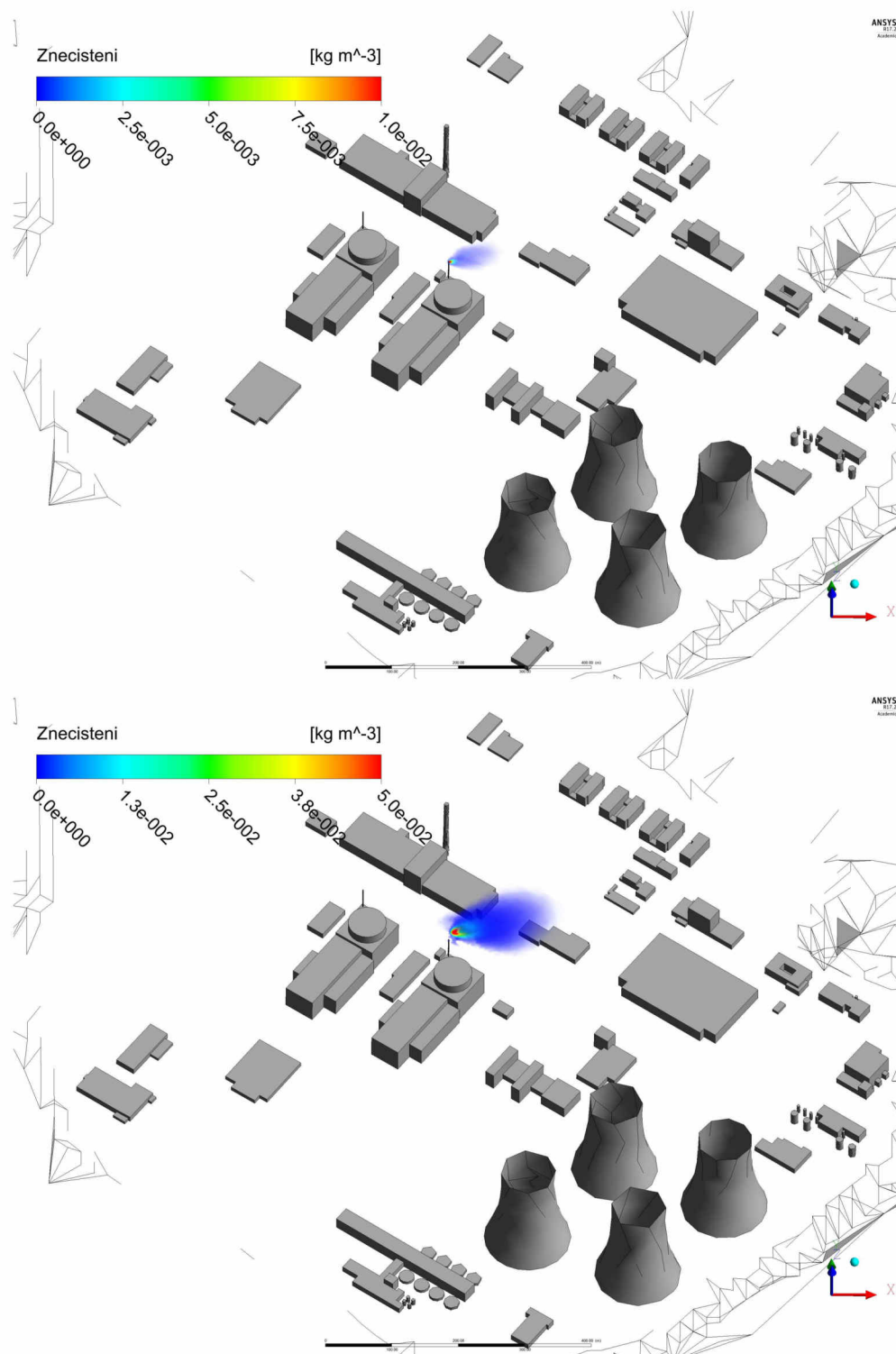
Obrázek 8.1: Detail výpočetní sítě ukazující zhuštění na zakřivených objektech.

Na obrázku 8.1 je průmět rychlostního pole stacionárního proudění. Osa x je ve východním směru a osa y odpovídá severnímu směru. Ze simulace je vidět, že areál elektrárny je tak velkým zdrojem tepla, že podstatným způsobem ovlivňuje proudění v okolí. Zde již mohou být výsledky ovlivněny blízkostí okrajových podmínek. Při použití většího modelu by bylo možné simulovat proudění realističtěji.

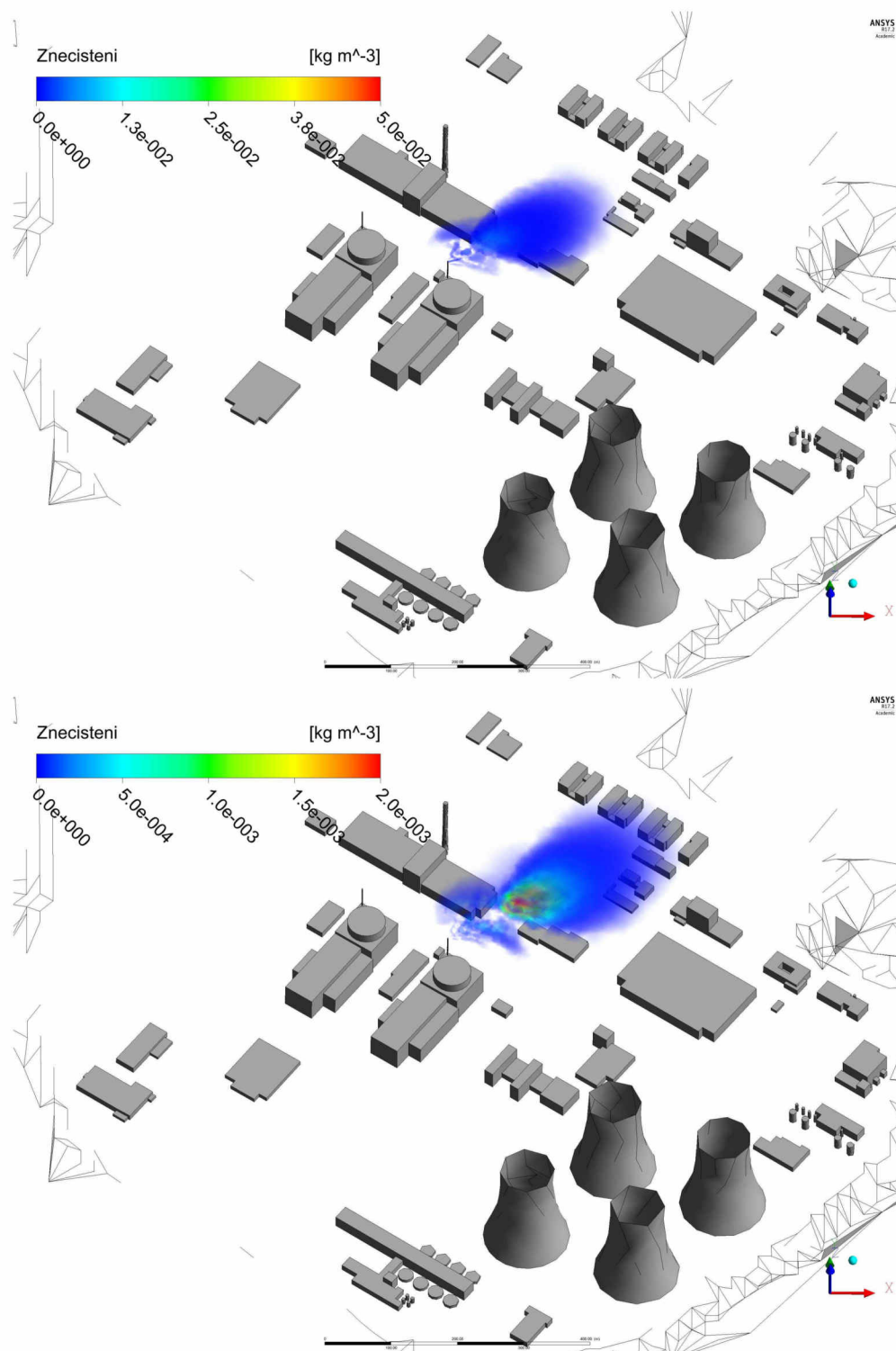
Další možnou nepřesností je fixnost okrajových podmínek na vtokových stěnách. I tento problém by bylo možné vyřešit větším modelem. Další možností by bylo nastavení těchto stěn jako OPENING s definovaným směrem proudění. V našem případě jsme však zvolili pevně dané okrajové podmínky.

8.2 Nestacionární simulace - 1. scénář

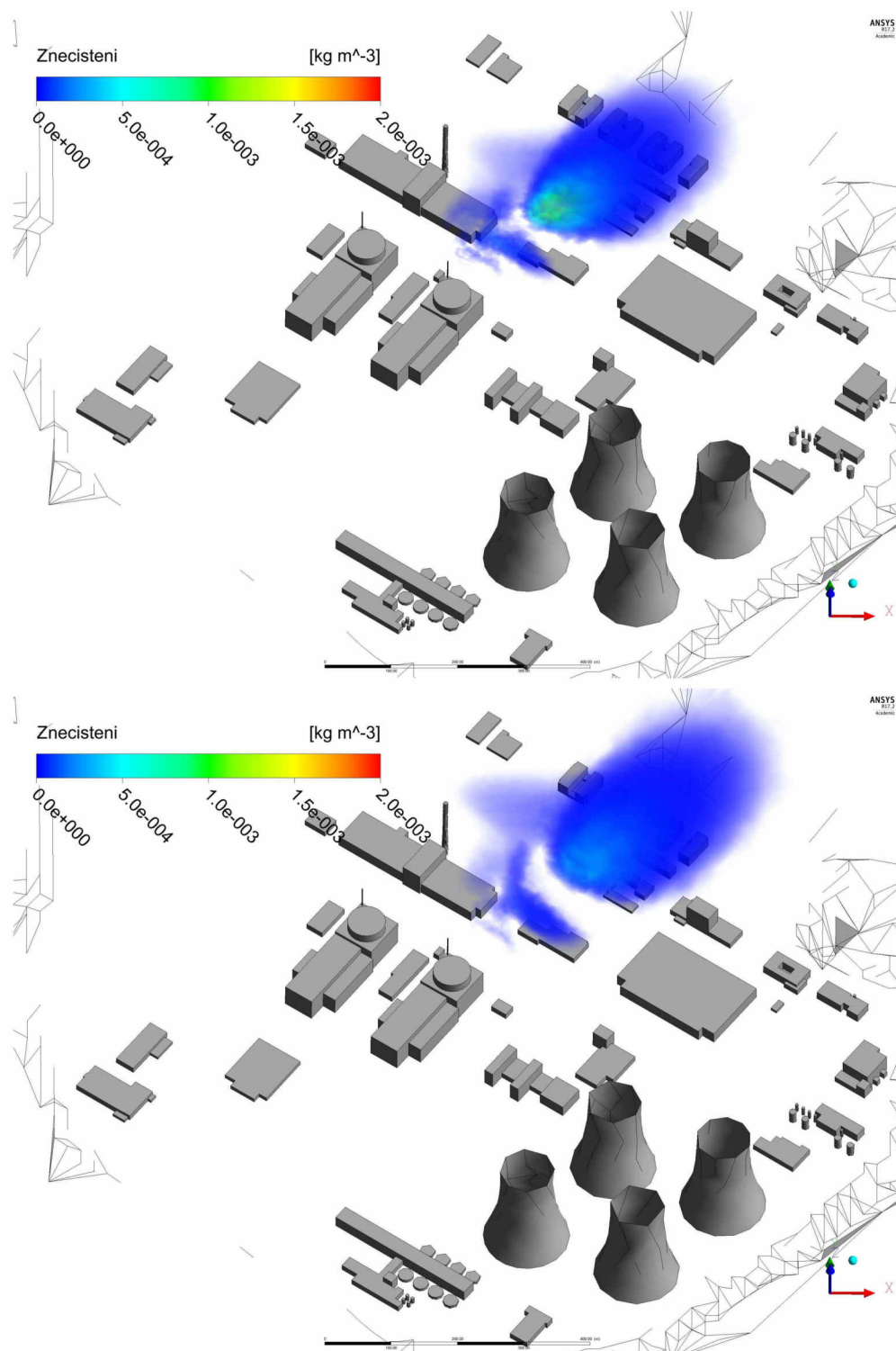
S počáteční podmínkou ve formě stacionární simulace lze již vytvořit simulaci nestacionárního děje. V tomto scénáři se zabýváme kontrolovaným odpuštěním kontaminované páry. Celkově dojde k vypuštění 400kg kontaminantu. Na následujících obrázcích budou ukázány simulované situace pro různé časy.



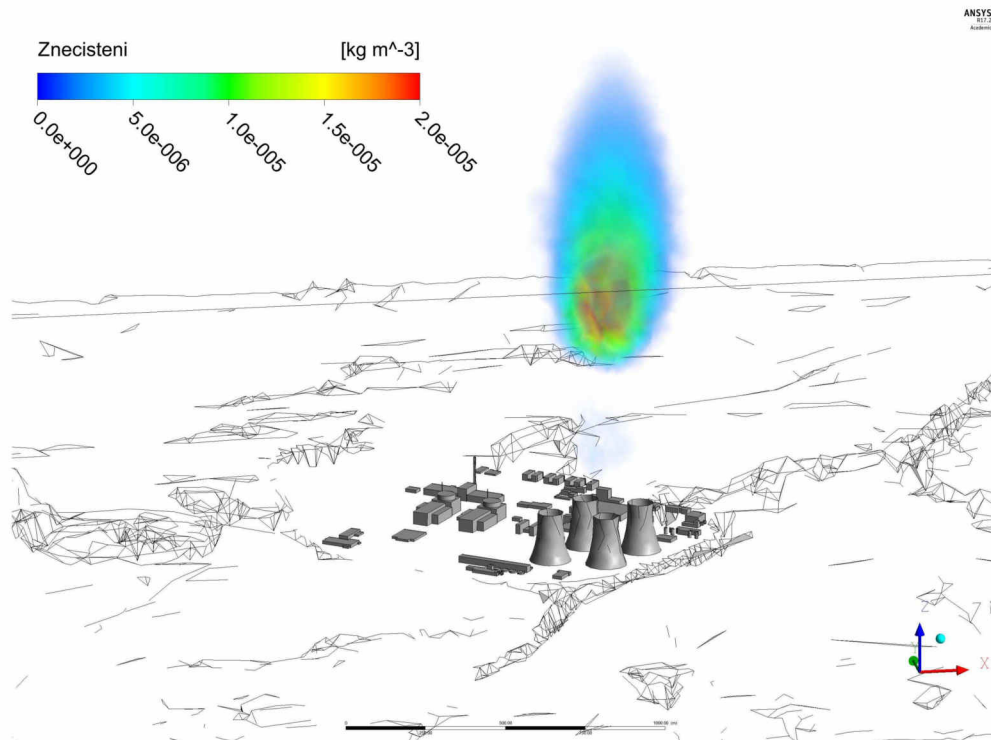
Obrázek 8.2: Znáznornění šíření kontaminantu pro časové kroky $t=30$ a 60 s.



Obrázek 8.3: Znázornění šíření kontaminantu pro časové kroky $t=90$ a 120 s.



Obrázek 8.4: Znázornění šíření kontaminantu pro časové kroky $t=150$ a 180 s.

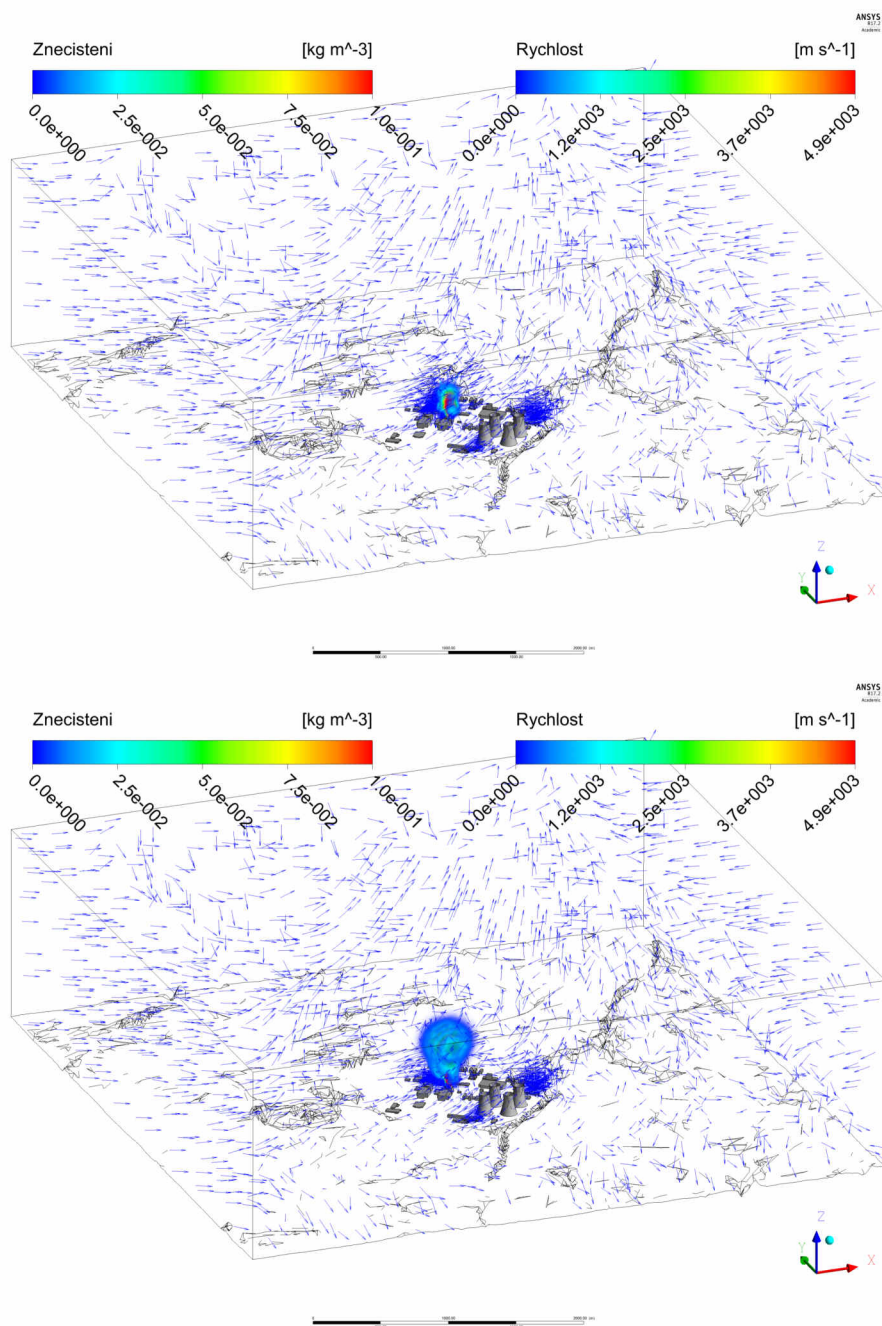


Obrázek 8.5: Znázornění šíření kontaminantu pro časový krok $t=300s$.

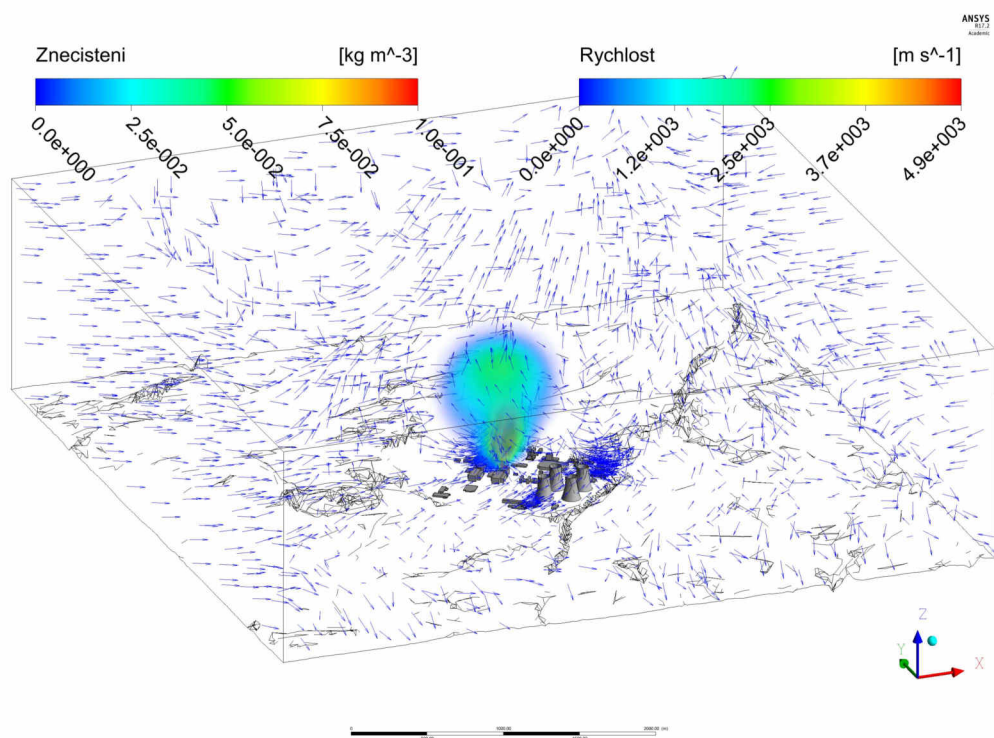
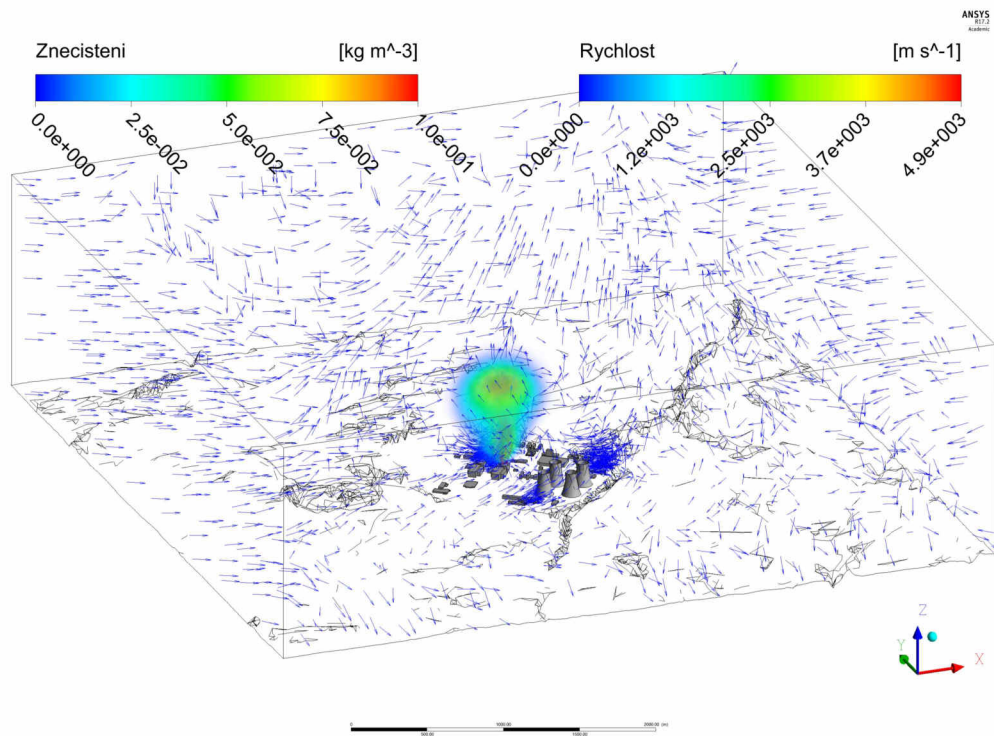
Na obrázcích 8.2-8.5 je zobrazeno šíření kontaminantu v prostředí v závislosti na čase. Vzhledem k tomu, že v tomto případě je proudění vzduchu prakticky neovlivněno, nezobrazují obrázky vektorové rychlostní pole. Je vidět, že s časem se objemová koncentrace snižuje a kontaminovaný objem obouští sledovanou oblast. Pro časový krok 600s již nelze kontaminaci pozorovat.

8.3 Nestacionární simulace - 2. scénář

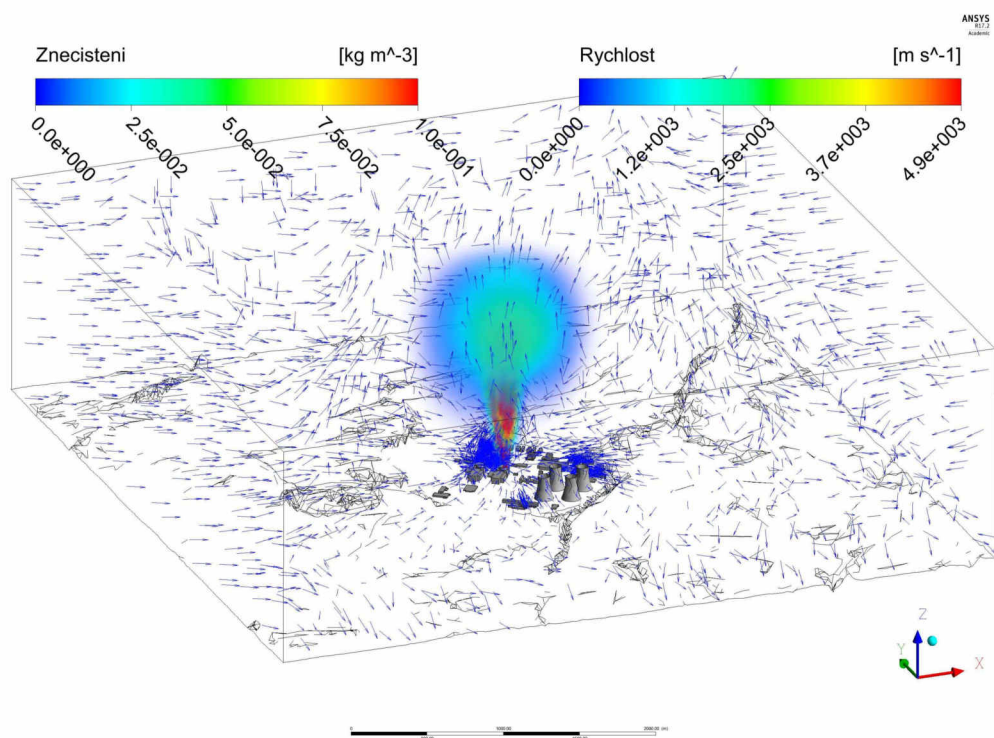
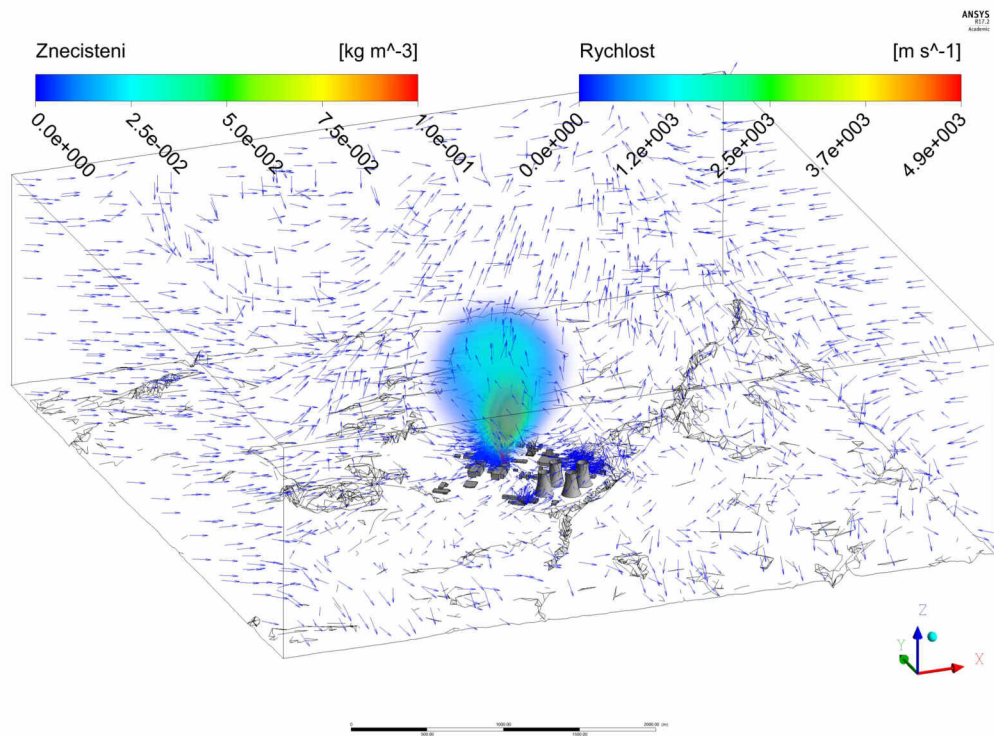
V tomto scénáři simulujeme explozi popsanou prudkým nárůstem tlaku v oblasti kontejmentu, o něco pozvolnější poklesem a stabilizací na hodnotě 1kPa k simulaci kontinuálního uvolňování kontaminace jako při reálné situaci havárie s destrukcí kontejmentu a tavením jádra reaktoru. Následující sada obrázků opět sleduje postupně časové kroky simulace.



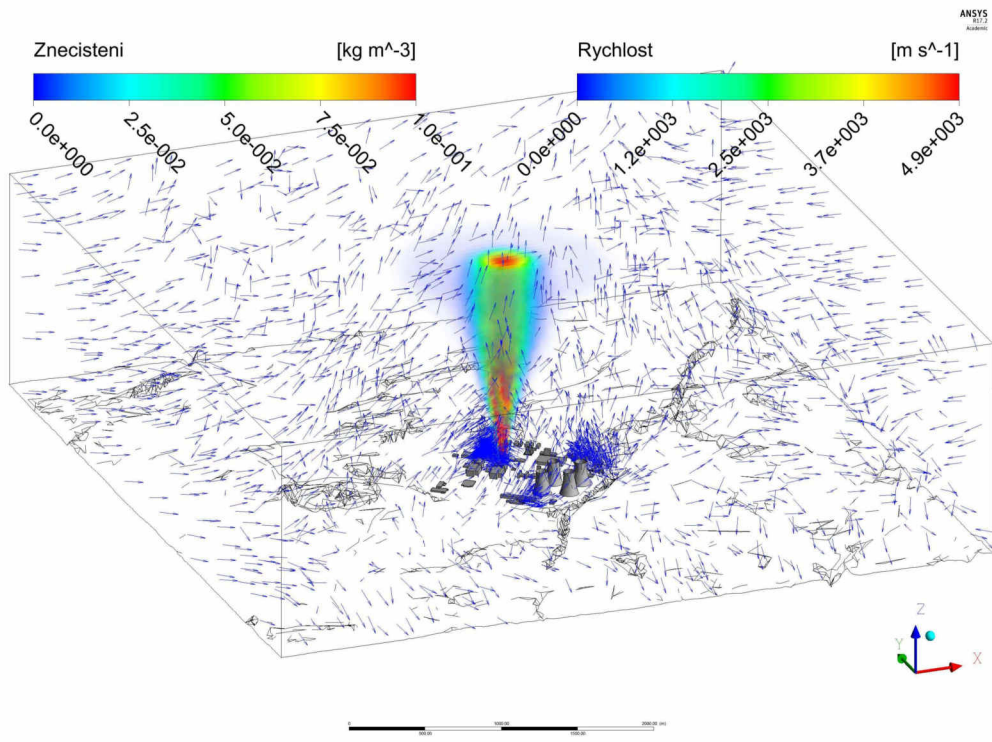
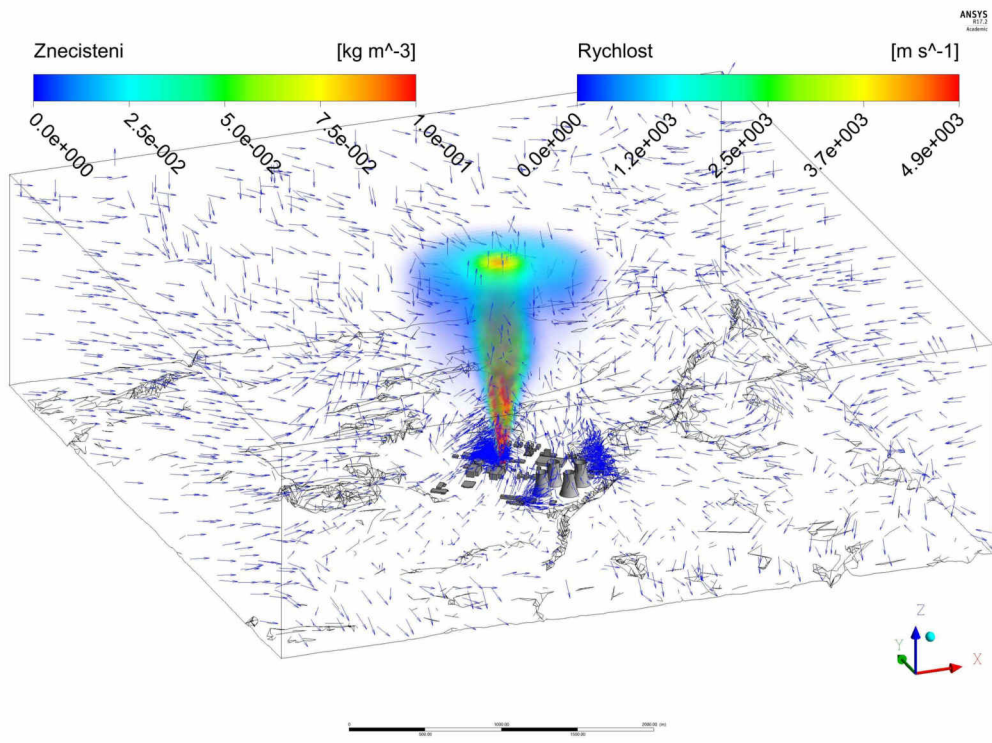
Obrázek 8.6: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=0.4\text{s}$ a 0.8s .



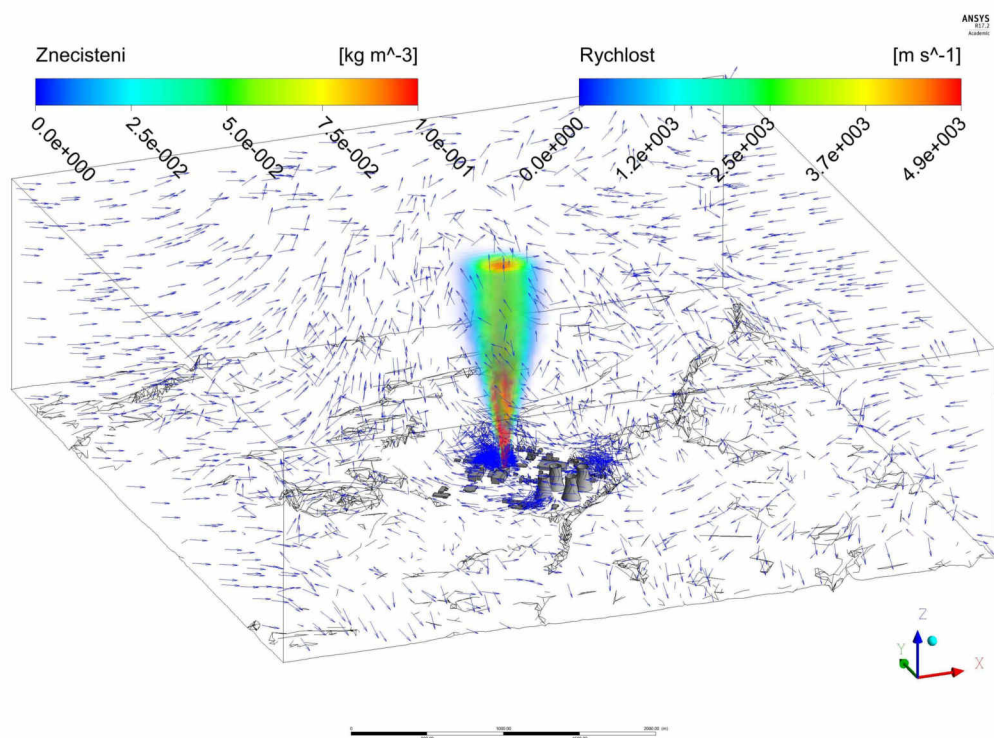
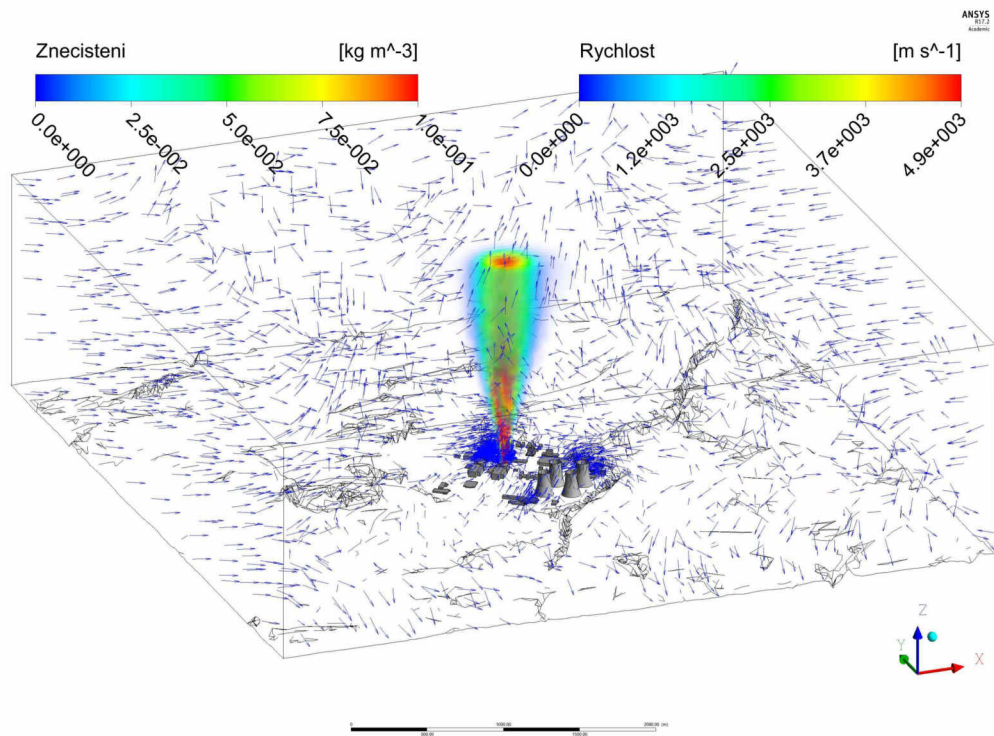
Obrázek 8.7: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=1.2s$ a $1.6s$.



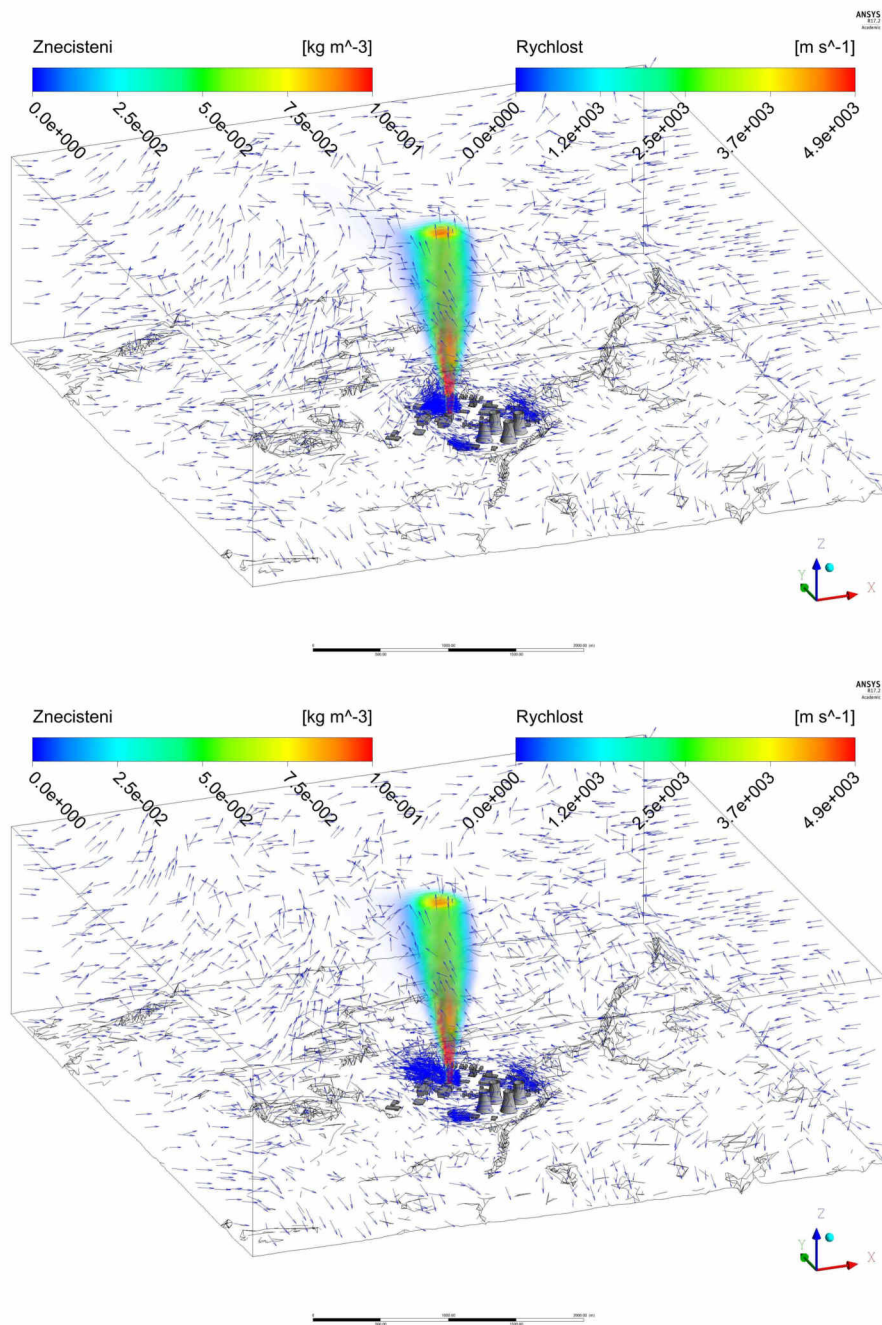
Obrázek 8.8: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=2s$ a $5s$.



Obrázek 8.9: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=10s$ a $30s$.



Obrázek 8.10: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=60s$ a $305s$.



Obrázek 8.11: Znázornění šíření kontaminantu z exploze pro časové kroky $t=605s$ a $895s$.

Obrázky 8.6-8.11 Ukazují časový průběh exploze. Je vidět postupné šíření kontaminantu a tvorba charakteristického hříbu. V případě použití modelu s vrstvou atmosféry vyšší než 1500m by bylo toto chování ještě názornější. Názorně je vidět jak je ovlivněné proudění v celém simulovaném objemu. Rychlostní vektory jsou z důvodu velkých rozdílů rychlostí výbuchu a pohybu masy vzduchu atmosféry normalizovány na stejnou délku a rychlost tak určuje pouze barva. Pozorované chování rychlostního pole dobře odpovídá reálnému chování v případě výbuchů.

Závěr

V této práci se podařilo stručně ukázat systematiku a postup při realizaci matematického modelu proudění a šíření kontaminantu v reálných podmínkách.

V první části byl vybudován nutný fyzikální základ z oboru mechaniky kontinua. Výhodou je, že jsme začali prakticky od elementárních zákonitostí a proto i čtenář bez hlubší znalosti fyziky avšak vybaven jistým matematickým aparátem nebude mít se sledováním postupu a odvození problém.

V další části byly již stručněji odvozeny nebo ukázány další rovnice a zákonitosti vstupující do elementárního fyzikálního popisu tak aby bylo možné co nejlépe postihnout reálné podmínky.

Poměrně důkladně byla uvedena základní teorie modelování turbulentního proudění. I zde byl důraz kladen zejména na názornost a srozumitelnost výchozích principů a předpokladů.

Ohledně numerických metod řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic odkazujeme čtenáře na související odbornou literaturu. Diskuze této problematiky nebyla pro tuto práci tak důležitá a působila by spíše rušivě.

Velká pečlivost a důraz byl kladen na popis tvorby geometrického modelu. Ať už se jednalo o model areálu elektrárny nebo o model reálného terénu. Bylo ukázáno, že k této problematice je třeba přistupovat obezřetně a s rozmyslem. Pokud je toto dodrženo, je možné vytvořit i velice detailní model a stále nenarazit na limit výpočetního výkonu. A nebo v opačném případě na tyto limity narazit již při tvorbě modelu, jak bylo také naznačeno. Kvalitním geometrickým modelem je podmíněna generace kvalitní výpočetní sítě. Uvedeny jsou také základní aspekty pro korektní tvorbu této sítě.

Poměrně detailně jsou popsány také fyzikální parametry vstupující do simulace. Zejména se jedná o okrajové podmínky a vlastnosti simulovaných veličin. Okrajovým podmínkám byla věnována speciální pozornost neboť výrazným způsobem ovlivňují výsledky simulací.

Na závěr je velmi krátce uveden nutný postup pro vytvoření nestacionární simulace. Dále jsou uvedeny výsledky ze všech tří simulací. Jedná se o stacionární stav, sloužící pro definici počátečních podmínek a nestacionární simulace se dvěma scénáři. Čtenář jistě omluví poněkud větší množství obrázků, bylo to však nutné pro zachycení časové dynamiky simulovaných jevů a zejména pro názornost.

Z výsledků je zřejmé, že se podařilo nasimulovat realisticky probíhající děje. Velmi dobře je to vidět zejména na druhém scénáři tj. výbuchu.

Na závěr se sluší ještě jednou zdůraznit, že se jedná o zcela hypotetickou úvahu, která není motivována žádnými reálnými podněty. Zabezpečení reaktorů v JETE je na takové úrovni, že k podobné situaci prakticky nemůže dojít.

Seznam použité literatury

- ANSYS CFX-Solver Modeling Guide*, ANSYS Inc., 2013.
- ANSYS CFX-Solver Theory Guide*, ANSYS Inc., 2013.
- BANSAL, R. (2005). A textbook of fluid mechanics and hydraulic machines-firewall media. ISBN 9788170083115, page 938.
- BLAZEK, J. (2005). *Computational fluid dynamics*. Elsevier, New York, 2nd ed. edition. ISBN 0080445063.
- BOUSSINESQ, J. (1877). Theory of turbulence flows. *Par Diverse a L'academic Des L'institu de France*, **41**, 46.
- BRDIČKA, M., SAMEK, L. a SOPKO, B. (2005). *Mechanika kontinua*. Academia.
- BUBNÍK, J., KEDER, J. a MACOUN, J. (1998). Symos 97, systém modelování stacionárních zdrojů, metodická příručka. *Český hydrometeorologický ústav, Praha*.
- BUBNÍK, J., KEDER, J. a MACOUN, J. (2003). Symos 97, systém modelování stacionárních zdrojů, metodická příručka - doplněk. *Český hydrometeorologický ústav, Praha*.
- BUČÁNEK, A. (2007). Modelování transportu a šíření znečištění v atmosféře pomocí gaussovských disperzních modelů. Master's thesis, MFF UK.
- JAN BEDNÁŘ, O. Z. (1985). *Fyzika mezní vrstvy atmosféry*. Academia.
- JAŇOUR, Z. (2001). Modelování mezní vrstvy atmosféry. Učební text.
- JIRÍ LANGER, J. P. (2013). Teoretická mechanika. Učební text k předmětu Teoretická mechanika.
- KŘIVONOŽKA, J. (2009). Matematické modelování pole proudění a transportu pasivní příměsi v mezní vrstvě atmosféry. Master's thesis, Česká zemědělská univerzita.
- KURBANMURADOV, O. a SABELFELD, K. (2000). Lagrangian stochastic models for turbulent dispersion in the atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, **97**(2), 191–218. ISSN 1573-1472. doi: 10.1023/A:1002701813926. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1002701813926>.
- LAUNDER, B. E. a SANDHAM, N. D. (2002). *Closure strategies for turbulent and transitional flows*. Cambridge University Press, New York.
- LAUNDER, B. a SPAULDING, D. (1972). *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press. URL <https://books.google.co.in/books?id=CEGrGwAACAAJ>.

- MELLOR, G. L. (1973). Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **30**(6), 1061–1069. doi: 10.1175/1520-0469(1973)030<1061:apotpo>2.0.co;2.
- MELLOR, G. L. a YAMADA, T. (1974). A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **31**(7), 1791–1806. doi: 10.1175/1520-0469(1974)031<1791:AHOTCM>2.0.CO;2. URL [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469\(1974\)031<1791:AHOTCM>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1974)031<1791:AHOTCM>2.0.CO;2).
- RICHARDS, P. a HOXEY, R. (1993). Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the $k - \varepsilon$ turbulence model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **46-47**, 145–153. ISSN 01676105. doi: 10.1016/0167-6105(93)90124-7. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0167610593901247>.
- ROSS, O. N. a SHARPLES, J. (2004). Recipe for 1-d lagrangian particle tracking models in space-varying diffusivity. *Limnology and Oceanography: Methods*, vol. **2**(issue 9), 289–302. ISSN 15415856. doi: 10.4319/lom.2004.2.289. URL <http://doi.wiley.com/10.4319/lom.2004.2.289>.
- SLÁDEK, I. (2004). *Numerical solution of some problems in atmospheric boundary layer*. PhD thesis, České vysoké učení technické.
- TETSUJI YAMADA, G. M. (1975). A simulation of the atmospheric boundary layer data. *Geophysical Fluid Dynamics Program, Princeton University*.
- VACH, M. (2001). *Modelování mezní vrstvy atmosféry v oblasti anemografického systému Krkonoš*. PhD thesis, Česká zemědělská Univerzita.
- VACH, M. (2006). *Transport v atmosféře a dalších složkách prostředí*. česká zemědělská univerzita.
- VACH, M. a DUONG, V. M. (2011). Numerical modeling of flow fields and dispersion of passive pollutants in the vicinity of the temelín nuclear power plant. *Environmental Modeling & Assessment*, vol. **16** (issue 2), 135–143. ISSN 14202026. doi: 10.1007/s10666-010-9239-x. URL <http://link.springer.com/10.1007/s10666-010-9239-x>.