UNIVERSITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky v matematice na 2. stupni ZŠ

Eliška Šipulová

Olomouc 2024 doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Anotace

Jméno a příjmení:	Eliška Šipulová
Katedra:	Katedra matematiky (PDF)
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby	2024

Název práce:	Možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky v matematice na 2. stupni ZŠ
Název v angličtině:	Opportunities to expand the equation curriculum for gifted students in mathematics at lower secondary schools
Zvolený typ práce:	Aplikační práce
Anotace práce:	Cílem práce je představit možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky, představit různé typy matematických úloh a jejich řešení. Text této práce představuje nadané žáky, projevy nadání, interakci s nadanými žáky a různé organizace a činnosti pro nadané žáky.
Klíčová slova:	nadání, rovnice, matematické úlohy, slovní úlohy, GeoGebra
Anotace v angličtině:	The aim of the work is to present the possibilities of expanding the equation curriculum for gifted students, to present different types of mathematical problems and their solutions. The text of this thesis presents gifted students, manifestations of giftedness, interaction with gifted students, and various organizations and activities for gifted students.
Klíčová slova v angličtině:	aptitude, equations, mathematical problems, mathematical word problems, GeoGebra
Rozsah práce:	43 stran textu
Jazyk práce:	Čeština

Podklad zadání bakalářské práce

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Akademický rok: 2022/2023

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia: Prezenční

Podklad pro zadání BAKALÁŘSKÉ práce studenta

Jméno a příjmení:	**Eliška ŠIPULOVÁ**
Osobní číslo:	**D210081**
Adresa:	[redacted]
Téma práce:	Možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky v matematice na 2. stupni ZŠ
Téma práce anglicky:	Opportunities to expand the equation curriculum for gifted students in mathematics at lower secondary schools
Jazyk práce:	Čeština
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc. Katedra matematiky (PDF)

Zásady pro vypracování:

1. Prostudování RVP 2. stupně základní školy a osmiletého gymnázia, zejména vzdělávací oblasti *Matematika* a její aplikace
2. Nadaní žáci a rozvoj jejich schopností
3. Rovnice, nerovnice, soustavy rovnic
4. Výběr vhodných úloh z praxe a sestavení sbírky úloh

Seznam doporučené literatury:

KOVÁČIK, Ján a Iveta SCHULZOVÁ. *Řešené příklady z matematiky pro základní školy a osmiletá gymnázia*. Praha: ASPI, 2004. ISBN 80-7357-039-4.
ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 9788071964353.
COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a Miroslav LÁVIČKA. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2018. ISBN 978-80-7373-142-7.
COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a Miroslav LÁVIČKA. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2018. ISBN 978-80-7373-143-4.
CIHELKOVÁ, Jana. *Nadané dítě ve škole: náměty do výuky pro celou třídu*. Praha: Portál, 2017. ISBN 978-80-262-1248-5.
FOŘTÍK, Václav a Jitka FOŘTÍKOVÁ. *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-297-3.
STEHLÍKOVÁ, Monika. *Nadané dítě: jak mu pomoci ke štěstí a úspěchu*. Praha: Grada, 2018. ISBN 978-80-271-0512-0.

© IS/STAG, Portál – Podklad kvalifikační práce , sipuel00, 19. února 2024 18:19

Stav schvalování: Vedoucím katedry schválen studentův podklad VŠKP

Podpis studenta: Datum:

Podpis vedoucího práce: Datum:

Podpis vedoucího pracoviště: Datum:

© IS/STAG, Portál – Podklad kvalifikační práce , sipuel00, 19. února 2024 18:19

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala sama a bez cizí pomoci, pouze s pomocí konzultací vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jitky Laitochové, CSc. Veškeré použité prameny a literatura jsou uvedeny na konci bakalářské práce.

V Olomouci dne 27.3.2024

Eliška Šipulová

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc., vedoucí mé bakalářské práce, za cenné rady a podnětné návrhy k mé bakalářské práci.

Také bych chtěla poděkovat všem mým blízkým, kteří mi byli během psaní mé práce oporou.

OBSAH

ÚVOD

V mnoha třídách máme nadané žáky a je třeba s nimi umět pracovat. Je důležité umět identifikovat nadání, znát jeho projevy a podchytit tento potenciál co nejdříve. Cílem této práce je představit možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky na základní škole, přiblížit nadání samotné a seznámit čtenáře s vybranými organizacemi pečujícími o nadané žáky. Ve druhé části této práce je cílem vytvořit sbírku úloh a představit různé matematické a slovní úlohy a jejich řešení. A jak vlastně poznáme nadaného žáka a jaké jsou projevy nadání? Mnoho lidí by mohlo mít o nadání mylné představy, a právě z omylu vás mohou vyvést následující stránky. Projevem nadání nemusí být jen to, že žák je rychlejší než jeho vrstevníci. Nadání se musí neustále rozvíjet a podporovat, pokud se tak nestane, zůstane neobjevené a nevyužité. Každý asi máme představu o tom, co by nadání mohlo být, ale umíme ho správně popsat a definovat? Přiblížíme si různé definice nadání, jeho druhy, projevy či modely.

Pokud se nám povede nadání identifikovat, víme, jak s takovým objevem pracovat? Jak se máme chovat k žákům, kteří byli tímto darem obdařeni? I v tomto směru bych vám chtěla poradit a navést vás na správnou cestu. Jsme na tuhle situaci sami nebo můžeme najít nějakou oporu? Představíme si vybrané organizace pečující o nadané žáky, tyto kapitoly mohou posloužit jako rozcestník jak pro pedagogy, tak i pro rodiče či samotné nadané žáky. Mohou pomoci také při identifikaci nadání, jelikož, jak se dozvíme, není vůbec jednoduchá. Práce může sloužit i jako inspirace. Ukážeme si i další motivační aktivity jako jsou matematické soutěže, do kterých se mohou žáci v případě zájmu zapojit anebo mohou právě tyto aktivity žáky motivovat v dalším rozvoji.

Konečná část práce představuje sbírku úloh, kterou mohou využít nejen učitelé, ale i rodiče nebo samotní žáci. Řešené příklady jsou vybrané příklady z učebnic matematiky, které jsou označeny za obtížné. Představíme si učivo rovnice – lineární rovnice o jedné neznámé, soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kvadratické rovnice a diofantovské neboli neurčité rovnice. Práce je zaměřena na učivo rovnice pro 2. stupeň základní školy. Ukážeme si různé možnosti řešení matematických a slovních úloh a okrajově si představíme i práci s počítačovým programem Geogebra[1]. Tento program využijeme ke grafickému řešení rovnic či soustav rovnic. Některé řešené příklady mohou být opakováním již naučeného učiva, jiné mohou být pro žáky nové a rozšiřující jejich vědomosti.

[1] Geogebra – počítačový program pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu

1 NADANÝ ŽÁK

Jako první si pokládám otázku, co to vlastně nadání je? Každý si pod pojmem nadání nebo nadaný žák představí něco jiného. Já osobně si představím žáka, pokud přemýšlím v oblasti matematiky, který spočítá příklady rychleji než ostatní, který umí vyřešit mnohem složitější úlohy než ostatní a který nemusí dlouho přemýšlet nad správným řešením. Ovšem nebuďme na omylu, ne vždy takto vypadá nadaný žák. V České republice je 10-12 % dětí, jejichž inteligenční kvocient (dále jen „IQ") je 115-130 a jen 2-3 % dětí mají IQ vyšší než 130 (Qiido Education, 2024). V přepočtu na čísla je nadprůměrně a mimořádně intelektově nadaných dětí přibližně 220 000 (Qiido Education, 2024).

Pojďme si tuto problematiku představit a vysvětlit si určité pohledy na nadání.

1.1 DEFINICE NADÁNÍ

Standardní definice nadání nejsou zcela shodné, tak jako pohledy odborníků na tuto problematiku. Někdo nadání chápe jako projev nadprůměrného výkonu, jiní jako potenciál podávat nadprůměrný výkon (Havigerová, 2011, s. 17-18). Někteří úzce propojují nadání s IQ, ten definuje nadanou osobu jako jedince s nadprůměrnou hodnotou IQ (Blažková a Budínová, 2017, s. 6). IQ není jediným faktorem ovlivňující výkon nadaného jednotlivce. Právě v oblasti matematiky nezáleží jen na IQ, ale velkou roli hraje motivace a zájem o matematiku (Portešová, 2011, s. 19-21). Na matematické schopnosti mohou mít vliv i verbální inteligence, ty souvisí s vyhodnocením slovních úloh, logicko-matematická inteligence, souvisí se schopností odhalit problém a vyřešit jej, a prostorová inteligence, která souvisí s geometrií (Gardner, 2018, s. 222-224).

Dítě přichází na svět s určitým potenciálem být úspěšný v určité oblasti, ovšem pokud není tento potenciál průběžně rozvíjen, může se stát, že dítě je z počátku velice úspěšné, ale poté se dostane do určitého bodu, kde se zasekne a jeho výkon klesne (Blažková a Budínová, 2017, s. 6). Dítě musí vědět, že je schopné se učit a být výkonné v různých oblastech, musí mít danou sebedůvěru a v tomhle hrají obrovskou roli rodiče (Campbell, 2001, s. 32). Mohou mít vliv i na postoje a způsoby chování dítěte (Campbell, 2001, s. 139-147). Další podstatnou roli hrají učitelé, v oblasti matematiky mohou děti naučit určitým pracovním návykům jako je například přehledný zápis, postup řešení či zapsání odpovědi (Blažková a Budínová, 2017, s. 6-7).

Dítě by nemělo být vystavováno nadměrnému tlaku, aby se nezačalo obávat, že udělá chybu nebo donese domů horší známku (Blažková a Budínová, 2017, s. 6-7). Tlak na dítě nesmí být ani zanedbávaný, ve výsledku by měl být přiměřený (Campbell, 2001, s. 78). Příprava se nesmí přehánět, není správné dítě nutit strávit několik hodin nad matematikou, protože bychom ho spíše demotivovali a dítě by si mohlo právě k danému předmětu vytvořit odpor (Blažková a Budínová, 2017, s. 7).

Vzhledem k rozmanitosti nadání neexistuje jednotná definice, ale mnoho různorodých definicí. Podle Homolkové se společnost přiklání k názoru, že nadání je dar, se kterým již přicházíme na svět a rozvíjíme jej v průběhu celého života (Homolková, 2014, s. 7).

Abramenkovová (1987) nadání interpretuje z pěti různých perspektiv:

1) Výjimečný souhrn kvalitativních schopností, které jsou klíčové pro úspěšné vykonávání činnosti.
2) Všeobecné schopnosti nebo všeobecné prvky schopností, které ovlivňují možnosti člověka, úroveň a charakteristiku jeho činnosti.
3) Rozumový potenciál nebo inteligenci, komplexní individuální charakteristiku kognitivních schopností a dovednosti učit se.
4) Souhrn vloh, vrozených daností, projev úrovně a vlastností vrozených předpokladů.
5) Talent, přítomnost vnitřních faktorů, které umožňují dosahování vynikajících výsledků v určité činnosti.

Klíčová definice pochází ze zasedání Columbus Group z roku 1991 a říká, že „nadání je asynchronní (nerovnoměrný) vývoj, ve kterém se kombinují zrychlené rozumové schopnosti a zvýšená intenzita k vytvoření vnitřních zkušeností a povědomí, které jsou svou kvalitou odlišné od normy. Tato nerovnoměrnost se zvyšuje spolu s vyšší intelektovou kapacitou. Tento fakt, tato jedinečnost, činí nadané obzvláště zranitelnými a vyžadují tak změny v rodičovské výchově, školním vzdělávání i poradenské činnosti, aby se mohli optimálně rozvíjet." (Columbus Group, 1991 cit. dle Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 14). Podle další definice nadané děti vykazují raný vývin v oblasti související s uspořádanou soustavou poznatků, mají vlastní způsob učení a nadšení pro výkon, který souvisí s vnitřní motivací nadaného jedince k učení (Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 15). Toto nadšení nemusí být projevem ve všech vzdělávacích oblastech, ale pouze tam, kde má dítě zároveň vlastní motivaci nebo hluboký zájem o danou oblast (Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 15).

Rozvoj nadání ovlivňuje mnoho společenských faktorů, které jsou v konečné fázi rozhodující. Tyto faktory podmiňují, zda se nadání u dítěte projeví, nebo zda zůstane nepoznané a nerozvinuté ve srovnání s průměrnými vrstevníky v jeho prostředí. Zásadní vliv mají sociálně-ekonomické postavení rodiny, individuální charakter a hodnoty rodičů, úroveň rodičovského vzdělání, podněty v dětství, osobní šarm a charisma. Další důležitou roli hraje i formální vzdělávání, dostupnost vhodných vzorů, energetická úroveň a fyzický zdravotní stav. Dalšími faktory mohou být ztráta blízké osoby, rozvod, dědictví či fyzická atraktivita dítěte a vůbec celkové psychické rozpoložení. (Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 15)

1.2 DRUHY NADÁNÍ

Nadání je rozděleno do několika skupin a tyto skupiny se vzájemně prolínají a doplňují. Webb ve své definici rozlišuje oblasti, kde děti projevují výrazně nadprůměrnou míru aktivity, a to:

- všeobecná intelektuální schopnost,
- specifické akademické vlohy (matematika, přírodní vědy, historie, literatura),
- kreativní a produktivní myšlení,
- schopnost vůdcovství,
- vizuální schopnosti a pohybové umění,
- psychomotorická schopnost. (Webb, 2007, s. 2)

Barbara Clark tyto oblasti klasifikuje na oblasti kreativity, akademického nadání, vůdcovství nebo vizuálních a reproduktivních uměních (Clark, 1988, cit. dle Homolková, 2014, s. 9-10). Hříbková (2009, s. 48) rozlišuje klasifikaci druhů na horizontální a vertikální. V horizontální rovině se jedná o aktivity a činnosti, ve kterých se projevuje nadání, například muzikální, umělecké, pohybové, výtvarné, verbální, matematické a podobně. Ve vertikální rovině mluvíme o latentním nadání, kdy se v současné době vyvíjí nadání, které později umožní jedinci dosáhnout vysokých kvalitativních i kvantitativních výkonů a manifestované nadání, které se projevuje již v současnosti (Hříbková, 2009, s. 48). Tyto dvě skupiny se dále člení na podskupiny, kde se podrobněji věnujeme jednotlivým nadáním (Hříbková, 2009, s. 48).

Fořtík a Fořtíková (2007, s. 15-16) uvádějí klasifikaci druhů nadání od amerických expertů DeHaana a Havighursta, kteří rozdělili druhy nadání na kategorie intelektové schopnosti, kreativní myšlení, vědecké schopnosti, vůdcovství ve společnosti, mechanické (zručné) schopnosti a talent v krásném umění.

- **Intelektové schopnosti** – jsou spojeny se školní úspěšností, verbální, početní, prostorové, paměťové schopnosti a faktory uvažování v rámci základních funkcí.
- **Kreativní myšlení** – souvisí se schopnostmi identifikovat problém, pružnost myšlení, schopnost tvořit myšlenky nebo produkty a vymýšlet nové využití objektů a materiálů.
- **Vědecké schopnosti** – spojeny se schopností využití čísel a algebraických symbolů, aritmetickými schopnostmi, zvídavostí ve světě přírody a schopnostmi využívání vědeckých metod.
- **Vůdcovství** – spadají zde manažerské schopnosti, způsobilost pomáhat skupině dosahovat vytyčených cílů a zkvalitňovat mezilidské vztahy.
- **Zručné schopnosti** – spjaty s talentem v umění, vědě i strojírenství, schopnost manipulace, prostorové představivosti a vnímání vizuálních vzorů, detailů, podobností a rozdílů.
- **Talent v krásném umění** – zde spadají umělci, spisovatelé, hudebníci, herci a tanečníci. (Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 15-16; Havigerová, 2011, s. 29-30)

1.3 PROJEVY NADÁNÍ

Tempo rozvíjení nadání se u každého dítěte může lišit a samotná identifikace nadání u dítěte je velmi obtížná. Ludwig van Beethoven byl jedním z mimořádně nadaných dětí, u kterého se nadání identifikovalo již v osmi letech. Ovšem u mnoho nadaných dětí se jejich nadání projeví později, mnohokrát až v dospělosti. Z tohoto důvodu je vhodné hledat nadání u každého dítěte, abychom mu mohli co nejdříve poskytnout podporu při jeho rozvoji v případě, že nadání existuje. (Homolková, 2014, s. 7)

„Problém nadaného dítěte není vůbec jednoduchý, protože takové dítě nelze poznat jen podle toho, že je dobrým žákem. Bývá tomu totiž leckdy i naopak. Takové dítě může vzbuzovat dokonce nepříznivý dojem zvláštní roztržitosti, mívá hlavu plnou alotrií, je líné, nedbalé, nepozorné, nezpůsobné, svéhlavé a může dokonce budit dojem ospalosti. Na základě pouze vnějšího pozorování lze někdy stěží odlišit nadaného jedince od jedince nenadaného.“ (Jung, 1995, s. 50)

Jak bylo již řečeno u každého dítěte se nadání projevuje jinak, tudíž není možné vytvořit jeden souvislý seznam projevů nadaných dětí. Ale existuje mnoho seznamů, které se opírají o vědecké výzkumy a vzájemně se prolínají a doplňují. (Homolková, 2014, s. 13)

Winebrennerová sestavila seznam ve dvou ohledech, a to v kladné charakteristice a záporné charakteristice. V kladném ohledu to může být:

- výborná paměť a nadprůměrné výsledky,
- bohatá slovní zásoba, zdvořilý projev,
- vlastní způsoby řešení problémů,
- vlastní pracovní tempo například při řešení složité úlohy,
- neustálý zájem o nové poznatky,
- velký počet odlišných zájmů,
- vedoucí postavení například při hře, utváření a dodržování zákonů a pravidel.

V záporném ohledu to může být:

- opovrhování nezajímavou úlohou,
- netolerantnost vůči žákům, kteří se učí pomaleji,
- nelibost při opakovaných činnostech, úlohách,
- častý odpor vůči autoritám, tvrdohlavost,
- časté snění během dne,
- zvídavé a neobvyklé otázky,
- perfekcionismus,
- snadno je něco rozhodí, velká citlivost vůči hodnocení,
- ve třídě mohou být vnímáni jako třídní šašek. (Winebrenner a Brules, 2018, s. 12-14)

Hříbková (2009, s. 93-97) rozdělila vlastnosti nadaných žáků do tří skupin – kognitivní rysy, nekognitivní rysy, rysy školní a učení.

Nadaný žák není bezchybný či neomylný, ale záleží na tom, jak s danou chybou pracuje. Někteří žáci potřebují jen lehce navést a hned svou chybu opraví. Není důležité jen rychle vyřešit problém, ve skutečnosti dítě musí věnovat řešení určitý čas a úsilí. (Blažková a Budínová, 2017, s. 7)

V anglicky psané literatuře se využívá tzv. checklist, což je výčet daných charakteristik, které si případně můžete označovat za dosažené u zkoumaného dítěte. Poskytují se k využití rodičům či učitelům a mají napomoci k identifikaci nadaného žáka. Checklist samotný není plně spolehlivý ukazatel, a tak je třeba ho doplnit o další možné diagnostické nástroje, díky kterým můžeme dosáhnout přesnějšího měření. (Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 15)

Laznibatová rozděluje projevy nadaného dítěte do tří základních oblastí:

1) Všeobecné znaky – velká míra energie, intenzivní aktivita, množství zájmů, bohatý slovník, čtení v brzkém věku, brzké schopnosti využívat abstraktní pojmy, pochopit význam cizích slov a využívat je, zájem o podstatu věcí, vztahů, výborná paměť a pozornost, neunavitelnost v duševních činnostech, zájem o složitější témata, jako je filozofie, etika, náboženství a tendence vést diskuse na tato témata.
2) Tvořivé znaky – intelektová hravost, široká fantazie, mnoho originálních nápadů, výraznost v názorech a ve vyjadřování, pružnost a hravost myšlení, originální způsoby řešení úloh různého typu, snaha o výjimečnost a neopakovatelnost nápadů v pracích, ohromující představivost, silně rozvinutý smysl pro estetické čtení a vidění věcí, častá impulzivnost, výbušnost, prudké reakce, emocionální citlivost a zranitelnost.
3) Učební znaky – děti začínají se vším dříve než ostatní, rychlé tempo učení, nadšení z každé intelektové aktivity, bystrost při pozorování, schopnost rozpoznat všechny analyticko-syntetické stejně jako logicko-algoritmické myšlení, kreativní myšlení, schopnost objevit více řešení problému, neúnavnost při vyhledávání informací, správné zevšeobecňování, schopnost kritického a sebekritického myšlení a perfekcionismus. (Laznibatová, 2001 cit. podle Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 16)

Autoři Koopmans-Dayton a Feldhusen sepsali následující výčet charakteristik, které naznačují zrychlené projevy v předškolní fázi vývoje. Obsahují tři oblasti, a to jazyk a učení, psychomotorický vývoj a motivace a oblast psychosociálních charakteristik.

1) Oblast jazyk a učení:
    - dítě mluví, čte a zvládá jazyk na vysoké úrovni mnohem dříve než jeho vrstevníci,
    - dítě v brzkém věku oplývá bohatou slovní zásobou,
    - v komunikaci s jinou osobou dítě volí způsob řeči než činu,
    - dítě s oblibou vyjadřuje své myšlenky a diskutuje s ostatními,
    - dítě má svůj originální způsob učení,
    - dítě je schopno udržet dlouho pozornost,
    - je zvídavé, zajímá ho mnoho věcí a klade mnoho otázek,
    - dítě má výborné poznávací schopnosti a dokáže dlouho udržet informace o tom, co vidělo,

- dítě je schopno chápat a správně využívat abstraktní pojmy,
- dítě rozumí tomu, jaký následek bude mít určitá příčina,
- dítě je samostatné, dlouho dokáže být samo a pracovat,
- problém vnímá jako výzvu,
- dítě nadchne myšlenka hry,
- dítě projevuje velký zájem o různé knihy, encyklopedie, atlasy a další literaturu,
- dítě má rozsáhlou zásobu informací,
- dítě se zajímá o kalendáře, hodinky, hádanky,
- dítě upřednostňuje náročné aktivity nebo shromažďuje sbírky již před pátým rokem věku,
- dítě vyniká v kreslení, hudbě a jiných uměleckých disciplínách.

2) Oblast psychomotorického vývoje a motivace:
   - dítě začne chodit v brzké době,
   - dítě vykazuje ranou kontrolu jemné motoriky v aktivitách, jako je psaní, vybarvování nebo stavění předmětů,
   - dítě rádo objevuje věci, je zvědavé, často se ptá „proč?“,
   - dítě chce mít kontrolu nad okolím,
   - dítě je náklonné k učení,
   - dítě vyniká v aktivitě a je cílevědomé,
   - dítě má svobodu v myšlení a jednání,
   - dítě rádo dělá projekty, ve kterých je třeba hledat informace,
   - dítě má široké a hluboké zájmy.

3) Oblast psychosociálních charakteristik:
   - dítě potřebuje méně spánku,
   - dítě cítí, že je rozdílné od jeho vrstevníků,
   - dítě je více samostatné a nezávislé na dospělých,
   - dítě lépe komunikuje s dospělými než s jeho vrstevníky,
   - dítěti vadí, když dospělí nejednají čestně a když ho neberou vážně,
   - dítěti se u dospělých nezamlouvá jednání, které nemá systém a logiku,

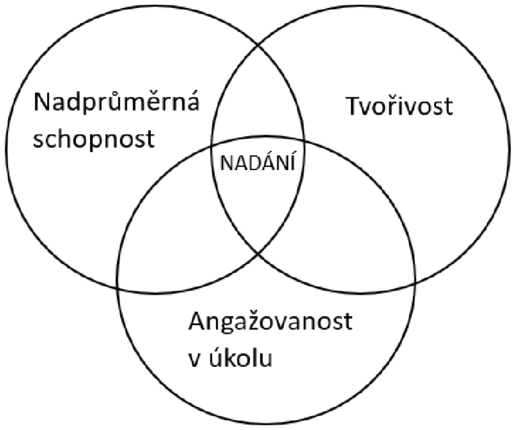
- dítě je obeznámeno s globální problémy jako je válka, smrt, hladomor. (Koopmans-Dayton a Feldhusen, 1987 cit. podle Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 22-23)

1.4 MODELY NADÁNÍ

Výhodou modelů nadání je lepší a srozumitelnější vyjádření podstaty nadání. Proto často nahrazují samotné definice v mnoha zdrojích (Portešová, 2021a). Představíme si vybrané modely nadání.

1.4.1 RENZULLIHO MODEL NADÁNÍ

Renzulli představil model tří vzájemně se prolínajících kruhů, které představují sadu složek, kterou vlastní lidé s výraznými výkony. Těmi složkami jsou nadprůměrná schopnost, angažovanost v úkolu a tvořivost. Žádná z těchto složek samostatně netvoří nadání, ale důležitá je právě interakce mezi těmito třemi složkami. (Portešová, 2021a; Hříbková, 2009, s. 76)

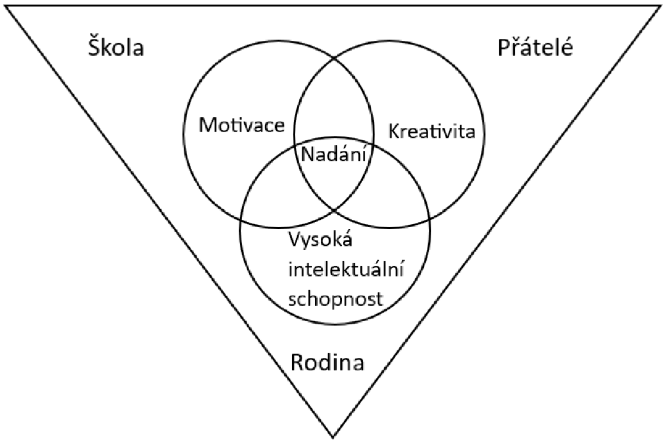


Obrázek 1 Renzulliho model tří kruhů

Zdroj: vlastní zpracování

1.4.2 MÖNKSŮV TRIADICKÝ MODEL

Po určitých úpravách Renzulliho modelu, vytvořil Mönks triadický model. Začlenil skupinu tří osobnostních prvků a skupinu tří faktorů prostředí. Angažovanost v úkolu byla zaměněna za obecnější pojem „motivace“, která podle Mönkse lépe zachycuje podstatu problému a zahrnuje angažovanost v úkolu, schopnost riskovat, anticipaci, plánování a vyhlídky do budoucnosti. Nadprůměrná schopnost byla zaměněna za pojem „vysoká intelektová schopnost“. Tento model neopomenul i hlavní sociální oblasti, ve kterých dítě žije a vyrůstá – rodina, škola a vrstevnická skupina. Mönks dává velkou váhu vzniku a vývoji nadání právě na podporujícím prostředí. Princip interakce je stejný jako u Renzulliho modelu, akorát zde musí probíhat interakce mezi šesti složkami. (Portešová, 2021a; Hříbková, 2009, s. 80-81)

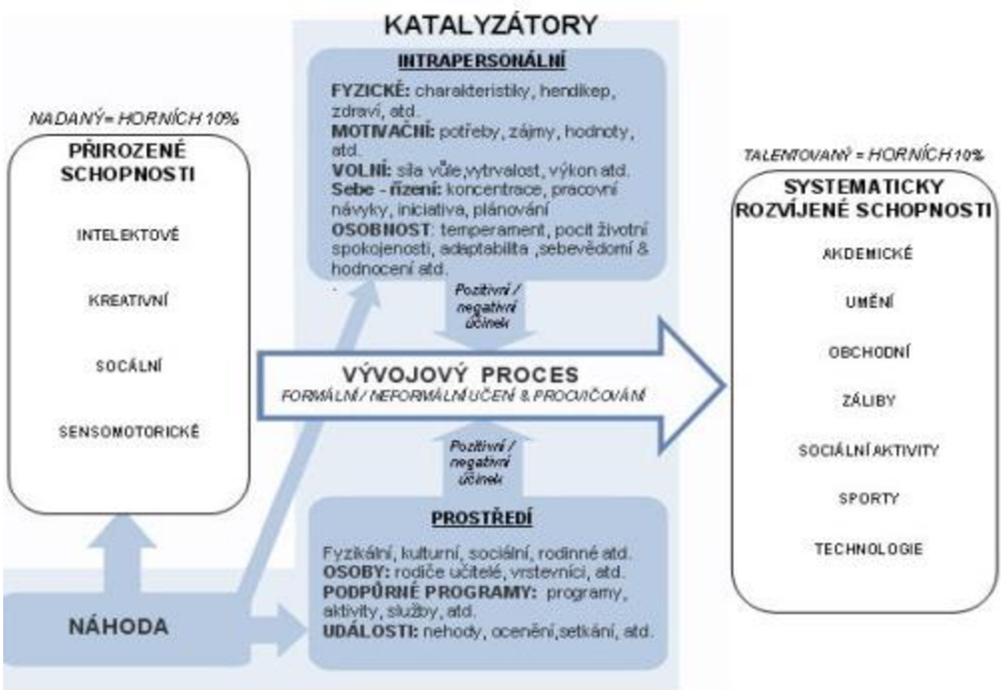


Obrázek 2 Mönksův triadický model

Zdroj: vlastní zpracování

1.4.3 GAGNÉHO DIFERENCIÁLNÍ MODEL TALENTU A NADÁNÍ

Gágneho model vychází z toho, že nadání jsou spontánně se rozvíjející schopnosti, zatímco talent jsou systematicky rozvíjené dovednosti, vedoucí k odbornosti v konkrétní



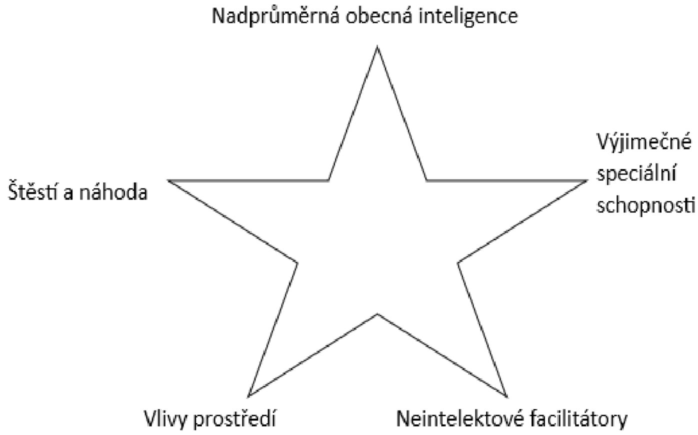
Obrázek 3 Gagného diferenciální model

Zdroj: Portešová, 2021b

oblasti. Gagného model ukazuje, že projev talentu závisí na využívání jedné nebo více schopností v konkrétní oblasti. Tyto schopnosti jsou rozvíjeny skrze intrapersonální katalýzu – motivace, sebedůvěra – a katalýzu prostředí – škola, rodina, společnost. Tento proces je uskutečňován prostřednictvím systematického učení a získávání dovedností. Rozlišujeme čtyři skupiny nadání, a to vlohy intelektové, tvořivé, socioefektivní a senzomotorické. (Portešová, 2021a)

1.4.4 TANNENBAUMŮV MODEL

Tannenbaumův model je ještě více rozpracovaný a vyobrazuje pět faktorů, které určují a definují nadání. Úspěšné rozvíjení nadání závisí na kombinaci těchto faktorů, ovšem pokud selže pouze jeden z nich dojde k neúspěchu. Těmito faktory jsou nadprůměrná obecná inteligence (určitá minimální hranice IQ), výjimečné speciální schopnosti (schopnost výjimečného výkonu v některé oblasti), neintelektové facilitátory (nadšení, síla osobnosti, zaměřenost na splnění cílů), vlivy prostředí (rodina, škola) a náhoda a štěstí. (Portešová, 2021a; Hříbková, 2009, s. 124-129)

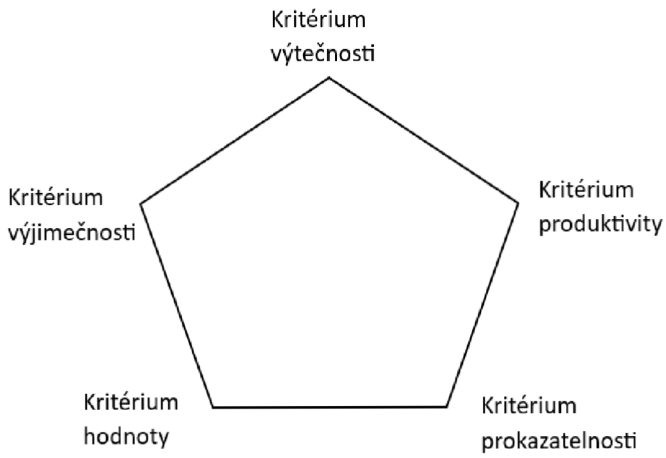


Obrázek 4 Tannenbaumův model

Zdroj: vlastní zpracování

1.4.5 STERNBERGŮV PENTAGONÁLNÍ MODEL

Sternbergův model vyobrazuje pět kritérií, které se musí u jedince objevovat, aby mohl být označen za nadaného. Těmito kritérii jsou výtečnost (vynikání v jedné nebo více oblastech), výjimečnost (dovednost jedince je oproti jeho vrstevníkům na vysoké úrovni), produktivita (oblast, ve které jedinec vyniká, by měla vést k produktivitě), prokazatelnost (výsledky musí být prokázány v jednom nebo i více testech a měřeních) a hodnota (jedincova výtečnost musí být oceňována společností, kde žije). (Šťáva et al., 2010; Hříbková, 2009, s. 46)



Obrázek 5 Sternbergův pentagonální model

Zdroj: vlastní zpracování

2 INTERAKCE S NADANÝMI ŽÁKY

Rodiče a učitelé nadaných žáků by měli být schopni nejen identifikovat nadání dítěte, ale také umět efektivně pracovat s nadaným jedincem. Jejich role spočívá v podporování a aktivním přispívání k rozvoji jeho nadání (Campbell, 2001, s. 139-147).

Hříbková doporučuje následující pravidla komunikace:

1) **Neautoritativní komunikace** – základem je nenarušovat dětem jejich samostatnost, vnímají to jako velkou nespravedlnost. Nejvíce jsou citliví na to, když rodič vychovává a komunikuje autoritářsky, kdy platí zákazy a příkazy bez dalšího vysvětlení proč to tak je. Dítě neporozumí situaci a jeho přirozenou obranou je útok nebo uzavření se do sebe.
2) **Pozorné naslouchání** – je třeba naslouchat potřebám dítěte a respektovat jeho názor. Nadaní lidé dokážou dlouho a podrobně líčit příběhy a zkušenosti, které se jim staly, vyprávět podle vlastní fantazie či měnit pravidla her a společenských zábav pro celou rodinu na své vlastní a nová pravidla.
3) **Nenutit nadané dítě do činnosti** – nadané děti si rády vytvářejí svá vlastní pravidla a mají rády kontrolu nad činností druhých. Velmi často nejsou ochotni přistoupit na pravidla dospělých. Pokud jejich nesouhlas spočívá v porušování a ignorování stanovených pravidel, je vhodné zasáhnout a zavést vhodné opatření. Avšak pokud bychom to přeháněli s organizováním jejich času nebo třeba i hry, mohli bychom potlačit přirozenou touhu dětí po vlastním objevování a nalézání nových principů svým vlastním způsobem.
4) **Prostor pro prezentaci dítěte** – každé dítě má právo zažít pocit úspěchu, že se mu něco podařilo, mělo by zažívat obdiv vrstevníků a dospělých. Každé dítě prahne po pocitu uznání a pochvaly, a tyto faktory jsou klíčové pro jejich harmonický osobnostní rozvoj. Musíme jim dát možnost prezentovat své výtvory, myšlenky a nápady, aby se mohli pochlubit a být sami na sebe pyšní. Pokud tohle vše budete svým dětem poskytovat, bude to znamenat ocenění i pro vás.
5) **Provádět společné hodnocení činností** – nadané děti může kritika občas velmi ranit. Přímé kritice se můžete vyhnout, pokud při hodnocení činností zakomponujete více osob, a ještě lépe pokud dáte dítěti prostor na to, aby si svůj výsledek činnosti zhodnotilo samo. Dítě může posoudit své nedostatky, ale také se učí sebereflexi a postupně poznává, že kritika může být i velmi pozitivním faktorem osobnostního rozvoje. (Hříbková, 1999 cit. podle Fořtík a Fořtíková, 2007, s. 26)

3 ORGANIZACE PEČUJÍCÍ O NADANÉ ŽÁKY

V České republice působí různé organizace a instituce, které jsou zaměřeny na podporu nadaných žáků. Při diagnostice nadaného dítěte je nutná úzká spolupráce pedagoga, rodičů dítěte, psychologa či speciálního pedagoga (Nadané děti, © 2024). Psychologické vyšetření nadání u dítěte se provádí v pedagogicko-psychologických poradnách (Nadané děti, © 2024). Jako hlavní rozcestník bych uvedla webový portál s názvem talentovaní[2], kde naleznete různé odkazy a informace, které vás nasměrují na správnou cestu k řešení daného problému.

3.1 NPI ČR[3] – PORTÁL TALENTOVANÍ

Národní pedagogický institut České republiky je pověřen realizací Systému podpory nadání. Poskytuje školám, vedení škol, pedagogickým i nepedagogickým pracovníkům či žákům a jejich rodičům mnoho aktivit, které podporují rozvoj nadání a péči o nadané žáky. Každému kraji náleží krajský koordinátor podpory nadání, který spolupracuje s krajskou sítí podpory nadání a poskytuje školám informace a metodickou podporu. Nabízí náležité vzdělávání a také spolupracuje s dalšími účastníky podporující nadání na krajské úrovni – to jsou například pedagogicko-psychologické poradny, krajské úřady, ČŠI[4] a další. NPI ČR pořádá mnoho soutěží, které se zaměřují na jazyky, historii, literární a výtvarnou tvořivost, programování, přírodní vědy a také i matematiku. Také připravují navazující soutěžní a nesoutěžní aktivity v České republice i v zahraničí pro žáky, kteří projeví velký zájem o danou oblast. (NPI ČR, 2024)

Portál talentovaní vznikl v projektu Systém péče o nadané v přírodních vědách PERUN[5] uskutečněný Národním institutem pro další vzdělávání. Je hlavním informačním bodem Systému podpory nadání a jeho cílem je maximální rozvoj a využití potenciálu každého dítěte. Hlavní metodou Systému podpory nadání je vzdělávání pedagogů tak, aby využili správnou praxi s nadanými žáky a studenty a aby byly vytvořeny podmínky a soustavy příležitostí pro maximální rozvoj potenciálu každého dítěte. (NPI ČR, 2024)

Na portálu naleznete mnoho informací o aktuálních různorodých soutěžích, projektech, akcích, programech a dalších. Dále zde najdete informace o školách, které jsou zaměřené

[2] Odkaz na portál: https://talentovani.cz/
[3] NPI ČR – Národní pedagogický institut České republiky
[4] ČŠI – Česká školní inspekce
[5] PERUN – Projekt péče, rozvoj a uplatnění nadání

na práci s nadanými dětmi. Portál může sloužit také jako rejstřík ke snadnému vyhledávání škol či organizací v daném místě, které se zaměřují na nadané žáky. Portál obsahuje i mnoho potřebných kontaktů, nabízí výběr kurzů, letních škol, stáží a mnoho dalších aktivit. Najdete zde i přehled dostupných stipendií pro nadané žáky, či doporučené knihy i hry.

Páteří systému jsou Krajské sítě podpory nadání. Pod systém spadají i soutěže a přehlídky v zájmovém vzdělávání, program Talnet[6]. (NPI ČR, 2024)

3.2 KRAJSKÉ SÍTĚ PODPORY NADÁNÍ

V nabídce mají systematické a kvalitní aktivity a služby pro kognitivně nadané, pedagogy a další zúčastněné s využitím regionálních kapacit a zdrojů. Zodpovědnost na vytvoření sítě a péči o ni v každém kraji náleží krajskému koordinátorovi Sítě podpory nadání. Krajská síť je tvořena ze zástupců škol každého typu, školských zařízení, nevládních a neziskových organizací věnujících se práci s nadanými dětmi. Spadají zde odborná pracoviště nabízející kapacity, zdroje a oborové experty pro práci s nadanými dětmi, žáky a studenty. Do sítě je zapojen i zástupce regionální správy a krajští odborní garanti, kteří zaručují vazbu na pět pilířů, což jsou psychologové a speciální pedagogové, koordinátoři pro oblast soutěží, pedagogové metodici, koordinátoři podpory nadání a vzdělávání pedagogů a inspektoři ČŠI. Tyto složky jsou základem Krajské koordinační skupiny. (NPI ČR, 2024)

[6] Talnet – Projekt pro zvídavou a nadanou mládež se zájmem o přírodní a technické vědy

4 MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

Mezi možnosti rozšíření učiva pro nadané žáky spadají i soutěže. V České republice probíhá v oblasti matematiky každoročně mnoho různých soutěží. Některých se mohou účastnit všichni žáci bez výjimek, jako je například Matematický klokan, jiných se účastní jen vybraní žáci, kteří vykazují určité nadání, jako je to například u Matematické olympiády (Matematická olympiáda, © 2024). Do soutěže Pangea se mohou pro změnu přihlásit i samotní jednotlivci (Pangea, 2024). V této kapitole bych chtěla představit pár vybraných soutěží, které mohou sloužit jako inspirace. Zahrnuji i soutěže, kterých se mohou účastnit všichni bez výjimek, jelikož mohou pomoci identifikovat prozatím neodhalené nadání.

4.1 MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Matematická olympiáda se řadí mezi nejstarší soutěže v České republice. Je vymezena pro základní a střední školy a víceletá gymnázia. V soutěži se zdůrazňuje především správný postup řešení úlohy a jeho podrobné vysvětlení. Nejenže si soutěžící trénují počítání, matematické znalosti a dovednosti, myšlení, logiku či systematičnost, ale také zapsání úhledného a podrobného postupu při řešení a předání vysvětlení svého myšlení. Pokud je zapsán jen správný výsledek bez správného postupu, náleží soutěžícímu jen polovina bodů za úlohu. (Matematická olympiáda, © 2024)

Soutěž je rozdělena do několika kategorií, a to podle ročníků. Nejprve soutěžící absolvují domácí kolo, kdy vypracovávají úlohy doma, které odevzdávají svému učiteli. Tohle domácí kolo je spíše jako trénink na další soutěžní kola. Za úspěšného řešitele domácího kola se považuje ten, kdo správně vyřešil čtyři z šesti úloh. Pedagog vybírá své soutěžící na základě schopností žáků. Kategorie se dělí na Z5-Z9 náležící daným ročníkům na základní škole, a dále kategorie A, B, C náležící ročníkům na střední škole. Kategorie Z5-Z8 je ukončena okresním kolem, kategorie Z9, C, B je završena krajským kolem a nejvyšší kategorii A ukončuje celostátní kolo. Z nejúspěšnějších soutěžících kategorie A se zvolí týmy na mezinárodní soutěže jako jsou Mezinárodní matematická olympiáda, Středoevropská matematická olympiáda a další. (Matematická olympiáda, © 2024)

Domácí kolo obsahuje šest úloh a na vyřešení mají soutěžící několik měsíců. Účastníci kategorie Z5 řeší v okresním kole tři úlohy v čase 90 minut. Kategorie Z6-Z8 obsahuje také tři úlohy, ale soutěžící je řeší v časovém rozmezí 120 minut. Kategorii Z9 náleží čtyři úlohy na čtyři hodiny, stejně tak i v krajském kole. Školní kolo kategorie A, B, C obsahuje tři úlohy v čase čtyři hodiny a v krajském kole se objevují čtyři úlohy v čase taktéž čtyři hodiny. Úlohy mají různé obtížnosti podle dané kategorie. (Matematická olympiáda, © 2024)

4.2 MATEMATICKÝ KLOKAN

Soutěž Matematický klokan má původ v Austrálii, kde se konala podobná soutěž a podle které byl Matematický klokan vytvořen. Poté se soutěž začala realizovat ve Francii a dalších státech Evropy, až se dostala i na další kontinenty. V České republice se Matematický klokan poprvé objevil v roce 1995. Pořádání soutěže náleží Jednotě českých matematiků a fyziků, která spolupracuje s Katedrou matematiky PdF UP[7] a Katedrou algebry a geometrie PřF UP[8] v Olomouci. Matematický klokan je plně financován z prostředků MŠMT[9]. (Matematický klokan, © 2024)

Tato soutěž je vytvořena pro všechny žáky bez výjimky, ale může se stát, že daná škola si vybere jen určité žáky, které do soutěže přihlásí. Soutěž se dělí do šesti kategorií, a to kategorie Cvrček – 2. a 3. ročník ZŠ, Klokánek – 4. a 5. ročník ZŠ, Benjamín – 6. a 7. ročník ZŠ, Kadet – 8. a 9. ročník ZŠ, Junior – 1. a 2. ročník SŠ a Student – 3. a 4. ročník SŠ. Soutěž probíhá ve všech krajích a obvykle třetí týden v březnu. (Matematický klokan, © 2024)

Soutěž se skládá z testových úloh, kdy mohou soutěžící vybrat z pěti možností řešení jednu správnou. Úlohy jsou rozděleny do třech skupin podle obtížnosti s různým bodováním. Soutěžící začíná s určitým počtem bodů podle počtu úloh. Za každou správnou odpověď získá daný počet bodů, ale pokud odpoví špatně jeden bod se mu odečte. Téměř ve všech kategoriích je 24 matematických úloh, jen v kategorii Cvrček je úloh 18. Na vyřešení mají soutěžící 60 minut a v kategorii Junior a student mají o 15 minut více. Soutěž probíhá bez kalkulaček, tabulek a jiných matematických pomůcek. Nejúspěšnější soutěžící v každé kategorii jsou odměněni věcnými cenami. (Matematický klokan, © 2024)

4.3 PYTHAGORIÁDA

Matematická soutěž Pythagoriáda je rozdělena do kategorií podle příslušných ročníků a to 6.-9. ročník základní školy a příslušné ročníky víceletých gymnázií. Soutěž probíhá prezenčně a dělí se na dvě kola – školní a okresní kolo. V každé kategorii a v každém kole mají

[7] PdF UP – Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
[8] PřF UP – Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
[9] MŠMT – Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky

soutěžící řešit 15 úloh v časové rozmezí 60 minut. Během soutěže je zakázáno používat kalkulačky a tabulky. (Urban, 2016)

Účast v soutěži je dobrovolná a pro všechny žáky. Soutěžící s největším počtem bodů z každé kategorie a každé školy se dostávají do okresního kola. Za každou správně vyřešenou úlohu získá soutěžící jeden bod a úspěšným řešitelem je ten, kdo dosáhne deseti a více bodů. Úlohy jsou rozděleny do tří skupin podle obtížnosti, a to kvůli rozhodnutí pořadí soutěžících se stejným počtem bodů. Úlohy jsou vytvořeny autorským kolektivem tvořeným pedagogy ze ZŠ a víceletých gymnázií. (Urban, 2016)

Podzimní termín soutěže v roce 2023 z organizačních důvodů neproběhl a budeme doufat, že v následujících letech budou mít žáci znovu možnost předvést své schopnosti (Pythagoriáda, 2024).

4.4 PANGEA

Matematická soutěž Pangea je určena pro žáky základních škol a víceletých gymnázií. Jedná se o neziskovou organizaci, která není plně financována státem, ale její realizace je zajištěna a podporována partnerskými osobami, organizacemi či společnostmi. Tato soutěž byla vytvořena s cílem posílit motivaci žáků a přispět k rozvoji pozitivního vztahu k matematice a schopnosti uplatňovat získané dovednosti v různých situacích v životě. Soutěž vznikla v roce 2007 v Německu a Česká republika se do projektu zapojila v roce 2014. (Pangea, 2024)

Do této soutěže se mohou přihlásit jak školy, které poté přihlašují své studenty, tak i jednotlivci. Soutěž je dělena na dvě kola, a to školní a finálové neboli ústřední kolo. Kategorie jsou rozděleny podle náležících ročníků od 4. po 9. ročník. Školní kolo se může konat buď vlastní tištěnou verzí nebo i online verzí. Soutěžící ale nesmí soutěžit doma, pouze ve výjimečných případech, a musí být pod pedagogickým či jiným školním dozorem. Školní kolo je tvořeno 15 otázkami, které soutěžící řeší v časovém rozmezí 45 minut. U každé úlohy je na výběr z pěti možností odpovědí a vždy je správná pouze jedna. Do finálového kola se dostane vždy nejlepší řešitel z každého kraje v České republice. Toto kolo se koná v Národním muzeu v Praze. Finálové kolo je tvořeno 20 matematickými úlohami, které soutěžící řeší v časovém rozmezí 60 minut. Všichni soutěžící školního kola obdrží certifikát prokazující účast v soutěži. Žáci, kteří se v každé kategorii ve finálovém kole umístí na prvních třech místech, získávají hodnotné ceny. (Pangea, 2024)

5 ŘEŠENÉ MATEMATICKÉ A SLOVNÍ ÚLOHY

Tato část práce obsahuje řešené příklady učiva lineární rovnice o jedné neznámé, kvadratické rovnice, soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámýma a diofantovské (neurčité) rovnice. Zvolené příklady jsou vybrané příklady z učebnic, které jsou označeny jako obtížnější a slouží k tomu, aby si žáci rozšířili své obzory v učivu rovnice. Tyto úlohy se dají řešit různými způsoby a k vyřešení úloh musí žáci umět aplikovat matematické vzorce a ekvivalentní úpravy. Ke správnému řešení mohou dojít ale i logickou úvahou. Některé způsoby jsou k připomenutí a procvičení již získaných vědomostí. Jsou zde zahrnuty matematické úlohy a slovní úlohy, aby si žáci procvičili nejen matematické operace, ale i porozumění slovního zadání. V řešených příkladech je vždy příklad i s řešením následovaný obdobnými příklady jen se správnými výsledky.

Podle RVP ZV[10] se na 2. stupni základní školy vyučují lineární rovnice, kvadratické rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámýma. Zároveň se také vyučuje znázornění grafů lineárních a kvadratických rovnic. V RVP ZV není obsaženo grafické řešení rovnic a diofantovské rovnice (MŠMT, 2023). Do práce zahrnuji i příklady řešené graficky a již zmíněné učivo diofantovské rovnice, jelikož by mohlo zaujmout a motivovat nadané žáky.

5.1 LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Definice 1 Lineární rovnicí s neznámou $x \in \mathbb{R}$ nazýváme každou rovnici ve tvaru $ax + b = 0$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$.

K řešení používáme vhodné ekvivalentní úpravy. K oběma stranám rovnice můžeme přičíst nebo odečíst stejný výraz, tak jako obě strany můžeme násobit nebo dělit stejným výrazem různým od nuly – tato úprava nemá vliv na výsledek. K vyřešení rovnice potřebujeme zjistit hodnotu neznámé x a to tak, že si ji osamostatníme, většinou si ji převedeme na jednu stranu a ostatní výrazy na druhou a pomocí ekvivalentních úprav upravíme. Zkoušku provádíme tak, že dosadíme hodnotu x a pokud je řešení správné, výsledné hodnoty obou stran se musí rovnat. (Eisler, 1999, s. 32)

Pokud výsledné řešení vypadá tak, že neznámá x má danou hodnotu, znamená to, že rovnice má jedno řešení. V případě že nám vyjde pravdivý vztah $a = a$, například $0 = 0$ nebo $51 = 51$, znamená to, že rovnice má nekonečně mnoho řešení. A v poslední řadě, pokud

[10] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (MŠMT, 2023)

vyjde nepravdivý vztah $a = b$, jako je například $3 = 7$, znamená to, že rovnice nemá řešení. Grafem lineární funkce je přímka. (Eisler, 1999, s. 32)

5.1.1 MATEMATICKÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1: Řešte rovnici v ℝ:

$$(3r - 5)(3r + 5) = (3r - 2)^2 - 29$$

Řešení:

Roznásobíme závorky na levé straně nebo můžeme aplikovat vzorec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$9r^2 - 25 = (3r - 2)^2 - 29$$

Upravíme závorku na pravé straně pomocí vzorce $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$9r^2 - 25 = 9r^2 - 12r + 4 - 29$$

Odečteme a přičteme příslušné výrazy na obou stranách rovnice tak, abychom na levé straně měli výrazy s neznámou a na pravé straně výrazy bez neznámé.

$$9r^2 - 9r^2 + 12r = 4 - 29 + 25$$

Sečteme a odečteme příslušné výrazy, tím rovnici zjednodušíme a odstraníme mocniny.

$$12r = 0$$

Vydělíme 12.

$$r = 0$$

Zkouška:

Provedeme zkoušku. Výslednou 0 dosadíme do počáteční rovnice za neznámou r.

$$(3 \cdot 0 - 5)(3 \cdot 0 + 5) = (3 \cdot 0 - 2)^2 - 29$$

Upravíme.

$$(0 - 5)(0 + 5) = (0 - 2)^2 - 29$$

$$(-5) \cdot 5 = (-2)^2 - 29$$

$$-25 = 4 - 29$$

$$-25 = -25$$

Rovnost platí, obě strany mají stejnou hodnotu, tudíž řešení je správné.

K vyřešení tohoto příkladu je nutná znalost matematických vzorců a ekvivalentních úprav.

PŘÍKLAD 2: Řešte rovnici v ℝ pomocí matematických vzorců:

$$(p-2)^2 = (p+1)(p-4) - \frac{3p-6}{2}$$

Výsledek: $p = -10$

PŘÍKLAD 3: Řešte rovnici pomocí matematických vzorců a ekvivalentních úprav zlomků:

$$\frac{u+8}{u+4} + \frac{5-u}{u-4} = \frac{6}{u^2-16}$$

Výsledek: $u = \frac{18}{5}$

PŘÍKLAD 4: Řešte graficky v $\mathbb{R}$:

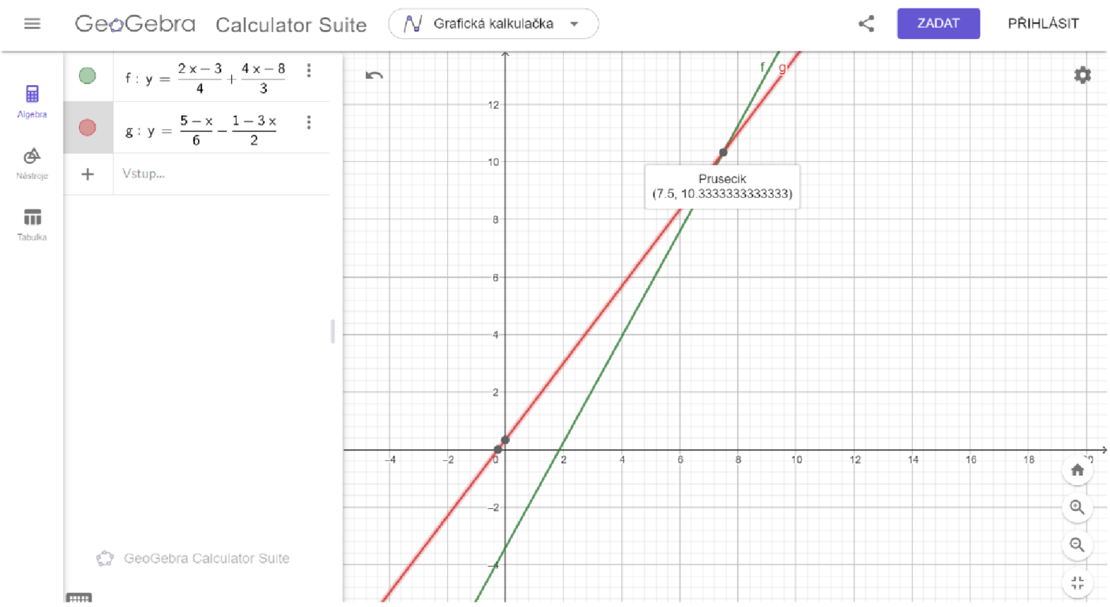
$$\frac{2x-3}{4} + \frac{4x-8}{3} = \frac{5-x}{6} - \frac{1-3x}{2}$$

Levou stranu rovnice označíme jako funkci $f(x)$ a pravou stranu rovnice označíme jako funkci $g(x)$. Vytvoříme grafy těchto dvou lineárních funkcí a najdeme x-ovou souřadnici jejich průsečíku.

$$f: y = \frac{2x-3}{4} + \frac{4x-8}{3}$$

$$g: y = \frac{5-x}{6} - \frac{1-3x}{2}$$

Grafické znázornění:



Obrázek 6 Grafy funkcí f a g

Zdroj: vlastní zpracování

Znázorněním grafů lineárních funkcí jsme našli průsečík $P[7{,}5; 10,\overline{3}]$, hodnota x-ové souřadnice je hodnota hledané neznámé x.

Výslednou hodnotu x můžeme ověřit vyřešením rovnice početně.

$$\frac{2x-3}{4}+\frac{4x-8}{3}=\frac{5-x}{6}-\frac{1-3x}{2}$$

$$3(2x-3)+4(4x-8)=2(5-x)-6(1-3x)$$

$$6x-9+16x-32=10-2x-6+18x$$

$$6x=45$$

$$x=\frac{45}{6}$$

$$x=\frac{15}{2}$$

Výsledek: $\boldsymbol{x=7{,}5};\left(\frac{15}{2}\right)$

PŘÍKLAD 5: Řešte rovnici v $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{25}\,\frac{10+n}{2}-\frac{\sqrt{16}+n}{4}=27$$

Výsledek: $n=\frac{4}{3}$

5.1.2 MATEMATICKÉ SLOVNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD 6: Ve stáji je dohromady 179 koní a hříbat. Koně jsou v 8 stájích a hříbata jsou v 5 stájích. V každé stáji pro koně je stejný počet koní a v každé stáji pro hříbata je o 2 kusy více než ve stáji pro koně. Kolik je ve stájích koní a kolik hříbat?

Řešení:

Sepíšeme potřebné údaje a sestavíme rovnici, která odpovídá zadání.

Koně v 1 stáji x

Hříbata v 1 stáji .... $x+2$

Koně celkem ....$8x$

Hříbata celkem ....$5(x+2)$

Počet koní a hříbat 179

$$8x + 5(x + 2) = 179$$

Vyřešíme rovnici.

$$8x + 5x + 10 = 179$$

$$13x = 169$$

$$x = 13$$

x udává počet koní v jedné stáji. Dopočítáme celkový počet koní a počet hříbat dosazením.

Koně: $8x = 8 \cdot 13 = 104$

Hříbata: $5(x + 2) = 5(13 + 2) = 75$

Zkouška:

$$104 + 75 = 179$$

Výsledek: Ve stájích je celkem 104 koní a 75 hříbat.

PŘÍKLAD 7: Kolik gramů 55% roztoku musíme přimíchat do 70 g 89% roztoku, abychom získali 62% roztok?

Řešení:

55% roztok.................... $x\ g$

89% roztok.................... $70\ g$

62% roztok.................... $(70 + x)\ g$

$$0{,}55x + 0{,}89 \cdot 70 = 0{,}62 \cdot (70 + x)$$

$$0{,}55x + 62{,}3 = 43{,}4 + 0{,}62x$$

$$18{,}9 = 0{,}07x$$

$$x = 270\ g$$

Výsledek: Musíme přimíchat 270 g 55% roztoku.

PŘÍKLAD 8: Auto vozí náklad mezi prodejnou a kupcem. Cesta tam a zpět trvá 1 hodinu 30 minut. Po cestě tam má průměrnou rychlost 75 km/h a po frekventovanější cestě zpět má průměrnou rychlost 50 km/h. Vypočítej vzdálenost mezi prodejnou a kupcem.

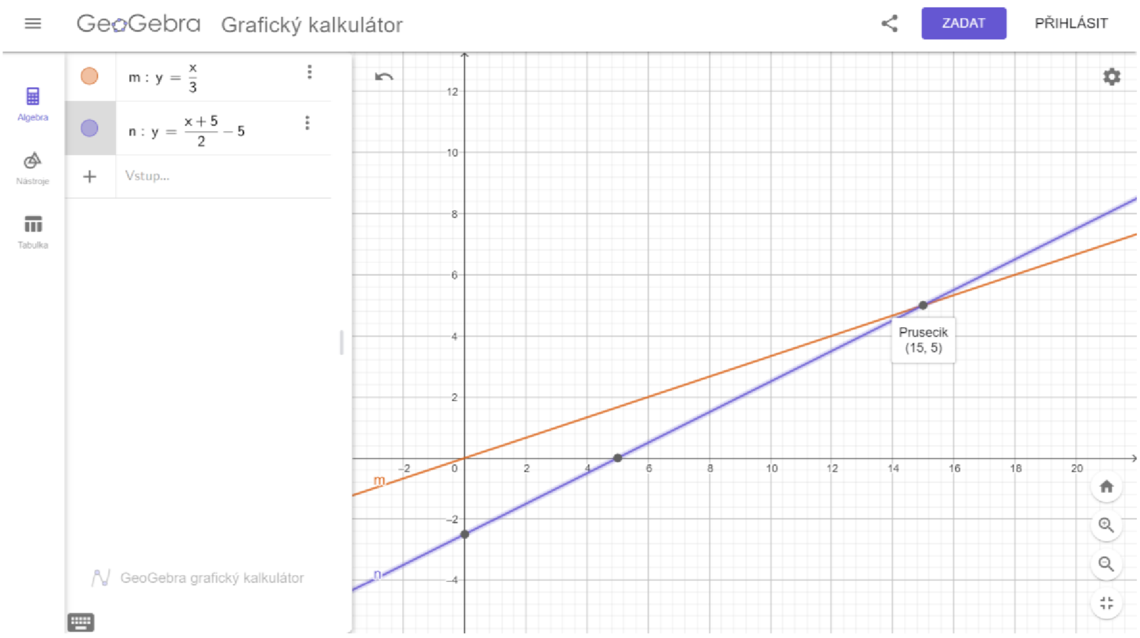
Výsledek: Vzdálenost mezi prodejnou a kupcem je 45 km.

Je nutné znát vzorec pro vzdálenost $s = v \cdot t$.

PŘÍKLAD 9: Řešte graficky v $\mathbb{R}$:

Daniel je teď třikrát starší než Anežka. Za 5 let bude dvakrát starší než Anežka. Kolik let má Anička a Daniel v tuto chvíli?

Grafické znázornění:



Obrázek 7 Grafické řešení příkladu 9

Zdroj: vlastní zpracování

Výsledek: Daniel má v tuto chvíli 15 let a Anežka má 5 let. $P[15; 5]$

PŘÍKLAD 10: V kamenném skladu rozvezli zásilku kamení během 3 dnů. První den rozvezli třetinu zásilky, druhý den dvě pětiny ze zbytku zásilky a třetí den rozvezli 150 tun. Kolik tun kamení rozvezli první den, kolik druhý den a kolik tun vážila celá zásilka kamení.

Výsledek: První den rozvezli 125 tun kamení, druhý den rozvezli 100 tun kamení a celá zásilka vážila 375 tun.

5.2 SOUSTAVY DVOU LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

U soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých máme kromě jedné proměnné x ještě i druhou proměnnou y a rovnice jsou dvě. Pokud umíme řešit soustavy lineárních rovnic, zvládneme řešit i soustavy jiných typů rovnic.

Na základní škole se vyučuje řešení soustavy rovnic metodou dosazovací (substituční), sčítací anebo srovnávací. U metody dosazovací si z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a výraz dosadíme do druhé rovnice. Zjistíme hodnotu dané neznámé a druhou neznámou dopočítáme dosazením do vyjádřeného výrazu nebo do jedné z původních rovnic. U metody sčítací rovnici upravíme tak, aby se při sečtení rovnic zrušila jedna neznámá, druhou neznámou zjistíme dosazením do jedné z původních rovnic. U srovnávací metody si z obou rovnic vyjádříme jednu neznámou, z výrazů uděláme rovnici a dopočítáme neznámou. Druhou neznámou zjistíme dosazením do výrazu (Eisler, 1999, s. 40-41). Představíme si i grafické řešení, kdy si z obou rovnic vytvoříme grafy funkcí, neznáma x a y má hodnotu průsečíku těchto dvou grafů.

Výsledkem soustavy rovnic může být jedno řešení, kdy řešením je uspořádaná dvojice čísel, nekonečno řešení nebo žádné řešení (Eisler, 1999, s. 42).

5.2.1 MATEMATICKÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1: Řešte soustavu rovnic v ℝ a proveďte zkoušku:

$$\frac{2u+5}{3v} = -3$$

$$\frac{2-6v}{4u} = 3$$

1. způsob řešení – metoda sčítací:

Upravíme si rovnice tak, abychom odstranili zlomky.

$$2u + 5 = -9v$$

$$2 - 6v = 12u$$

Pro lepší přehlednost si seřadíme stejné výrazy pod sebou.

$$2u + 9v = -5$$

$$-12u - 6v = -2$$

Vynásobíme první rovnici 6, aby se nám při sečtení zrušila neznámá u.

$$12u + 54v = -30$$

$$-12u - 6v = -2$$

Sečteme rovnice.

$$48v = -32$$

$$v = -\frac{2}{3}$$

Dosadíme hodnotu v do jedné z původních rovnic a vypočítáme hodnotu u.

$$\frac{2u + 5}{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = -3$$

$$\frac{2u + 5}{-2} = -3$$

$$2u + 5 = 6$$

$$2u = 1$$

$$u = \frac{1}{2}$$

2. způsob řešení – metoda dosazovací:

Z jedné z rovnic vyjádříme jednu neznámou. V tomto případě si vyjádříme neznámou v z první rovnice.

$$\frac{2u + 5}{3v} = -3$$

$$v = -\frac{2u + 5}{9}$$

Vyjádřený výraz dosadíme do druhé rovnice za neznámou v a vypočítáme neznámou u.

$$\frac{2 - 6v}{4u} = 3$$

$$\frac{2 - 6 \cdot \left(-\frac{2u + 5}{9}\right)}{4u} = 3$$

$$\frac{2+\frac{4u+10}{3}}{4u}=3$$

$$2+\frac{4u+10}{3}=12u$$

$$6+4u+10=36u$$

$$32u=16$$

$$u=\frac{1}{2}$$

Dosadíme hodnotu u do vyjádřeného výrazu v, nebo můžeme dosadit do jedné z počátečních rovnic a dopočítáme hodnotu u.

$$v=-\frac{2\cdot\frac{1}{2}+5}{9}$$

$$v=-\frac{2}{3}$$

3. způsob řešení – metoda srovnávací:

Z obou rovnic si vyjádříme stejnou neznámou.

$$v=-\frac{2u+5}{9}$$

$$v=-\frac{12u-2}{6}$$

Jelikož $v=v$, platí rovnost i vyjádřených výrazů. Vyřešíme rovnici a zjistíme hodnotu neznámé u.

$$-\frac{2u+5}{9}=-\frac{12u-2}{6}$$

$$-2(2u+5)=-3(12u-2)$$

$$-4u-10=-36u+6$$

$$32u=16$$

$$u=\frac{1}{2}$$

Dosadíme hodnotu u do jednoho z výrazů, nebo můžeme dosadit do jedné z počátečních rovnic a dopočítáme neznámou v.

$$v = -\frac{12 \cdot \frac{1}{2} - 2}{6}$$

$$v = -\frac{2}{3}$$

Zkouška:

Dosadíme výsledné hodnoty neznámých do rovnic, levá a pravá strana rovnice se musí rovnat.

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 5}{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = -3$$

$$\frac{6}{-2} = -3$$

$$-3 = -3$$

$$\frac{2 - 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 3$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$3 = 3$$

Výsledek: $[u, v] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right]$

PŘÍKLAD 2: Řešte soustavu rovnic v $\mathbb{R}$:

$$\frac{m + 6}{2n - 1} = 2$$

$$3(m - 2n) = 2(3n + 2)$$

Výsledek: Soustava rovnic nemá řešení.

PŘÍKLAD 3: Řešte soustavu rovnic substituční metodou v $\mathbb{R}$:

$$\frac{4}{x+5} = \frac{8}{y+4}$$

$$\frac{3}{x-3} = \frac{2}{y-4}$$

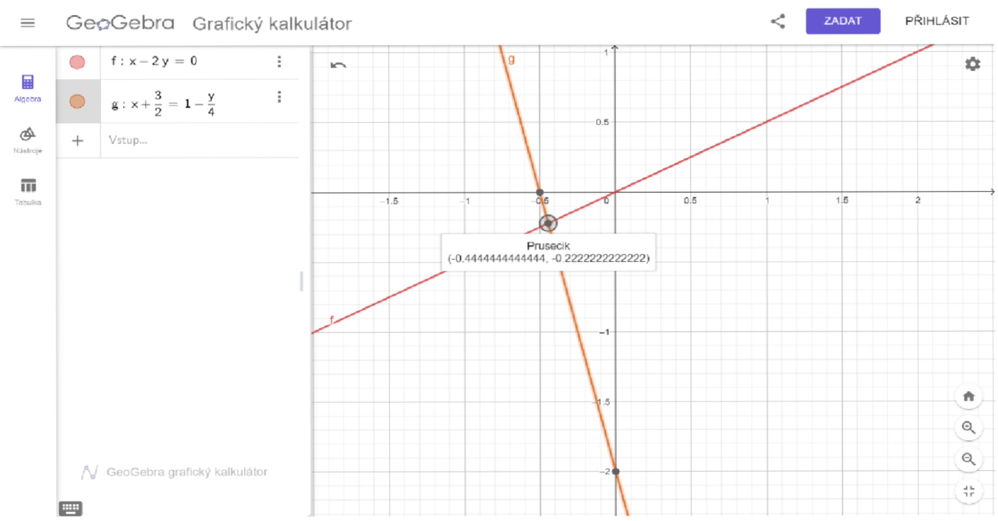
Výsledek: $[x, y] = [-3{,}0]$

PŘÍKLAD 4: Řešte graficky soustavu rovnic v $\mathbb{R}$:

$$x - 2y = 0$$

$$x + \frac{3}{2} = 1 - \frac{y}{4}$$

Grafické znázornění:



Obrázek 8 Grafické řešení příkladu 4

Zdroj: vlastní zpracování

Výsledek: $[x, y] = [-0,\overline{4}; -0,\overline{2}]; \left(\left[-\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right]\right)$

PŘÍKLAD 5: Řešte soustavu rovnic srovnávací metodou v $\mathbb{R}$:

$$p - \frac{q}{3} = 3p + 6q - 1$$

$$2(4p + 5q) = 3(1 - 3q)$$

Výsledek: $[p, q] = \left[0, \frac{3}{19}\right]$

5.2.2 MATEMATICKÉ SLOVNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD 6: Ve třech nádobách bylo celkem 35 litrů vody. V první nádobě bylo o 4 litry více než ve druhé. Po přelití 8 litrů z první nádoby do třetí je ve druhé a třetí nádobě stejné množství vody. Kolik litrů vody bylo původně v první nádobě?

Řešení:

Dohromady..............................*35 litrů*

Nádoba 1 x

Nádoba 2 ....$x-4$

Nádoba 3..............................y

Pokud přilijeme do třetí nádoby 8 litrů množství bude stejné jako ve druhé nádobě.

$$x-4=y+8$$

Můžeme vytvořit soustavu dvou rovnic.

$$x+x-4+y=35$$

$$x-4=y+8$$

Vyřešíme soustavu.

$$2x+y=39$$

$$x-y=12$$

Použijeme sčítací metodu.

$$3x=51$$

$$x=17$$

Výsledek: V první nádobě bylo původně 17 litrů vody.

PŘÍKLAD 7: Máme dvě čísla. Pokud je sečteme dostaneme 36 a pokud je vydělíme dostaneme 4 a zbytek 6. Určete tato čísla.

Výsledek: Tato čísla jsou 30 a 6.

PŘÍKLAD 8: Ve firmě pracuje 800 zaměstnanců. Na konci roku vedení oznámilo, že peněžní odměnu získalo 20 % zaměstnanců. Přitom peněžní odměnu získalo 19 % mužů a 24 % žen. Zjistěte, kolik žen a kolik mužů pracuje ve firmě.

Výsledek: Ve firmě pracuje 640 mužů a 160 žen.

PŘÍKLAD 9: Hmotnost kovového kyblíku s ovsem je 8,5 kg. Pokud odsypeme 65 % ovse, bude mít kyblík se zbytkem ovse 3,3 kg. Zjistěte hmotnost samotného kyblíku a kolik kg ovse je v kyblíku.

Výsledek: V kyblíku je 8 kg ovse a samotný kyblík má hmotnost 0,5 kg.

PŘÍKLAD 10: Motorkář jel na návštěvu k babičce. Jeho cesta trvala 6 hodin. Kdyby se jeho průměrná rychlost zvýšila o 28 km/h, dojel by k babičce o dvě hodiny dříve. Určete jeho průměrnou rychlost a vzdálenost, kterou motorkář ujel.

Výsledek: Průměrná rychlost motorkáře byla 56 km/h a vzdálenost, kterou ujel byla 336 km.

5.3 KVADRATICKÉ ROVNICE

Definice 2 Kvadratickou rovnicí s neznámou $x \in \mathbb{R}$ nazýváme každou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

K vyřešení rovnice používáme ekvivalentní úpravy. Potřebujeme zjistit hodnotu neznámé x, která splňuje rovnici. Tyto hodnoty nazýváme reálné kořeny rovnice. Počet reálných kořenů rovnice je roven počtu průsečíků paraboly, která je grafem kvadratické funkce.

O počtu reálných kořenů kvadratické rovnice, kde $a \neq 0$, v oboru reálných čísel rozhoduje diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Pokud platí, že:

- $D > 0$, má rovnice dva různé reálné kořeny,
- $D = 0$, má rovnice jeden reálný kořen,
- $D < 0$, nemá reálné kořeny, má kořeny komplexní.

K výpočtu reálných kořenů používáme vzorec $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

5.3.1 MATEMATICKÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1: Řešte rovnici v $\mathbb{R}$:

$$\frac{12}{m-2} = \frac{5+4m}{m} - 1$$

Řešení:

Určíme si podmínky: $m \neq 2, m \neq 0$.

Vynásobíme rovnici společným dělitelem, v tomto případě $m(m-2)$.

$$12m = (5+4m)(m-2) - m(m-2)$$

Roznásobíme závorky.

$$12m = 5m - 10 + 4m^2 - 8m - m^2 + 2m$$

Přičteme a odečteme příslušné výrazy k oběma stranám rovnice tak, abychom na pravé straně získali 0.

$$12m - 5m + 10 - 4m^2 + 8m + m^2 - 2m = 0$$

Sečteme příslušné výrazy a seřadíme je vzestupně podle velikosti mocniny.

$$-3m^2 + 13m + 10 = 0$$

Obě strany vynásobíme (-1), aby koeficient a byl kladný.

$$3m^2 - 13m - 10 = 0$$

Vypočítáme diskriminant pomocí vzorce.

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 289$$

$D > 0$, rovnice má dva reálné kořeny. Vypočítáme kořeny pomocí vzorce.

$$m_1 = \frac{-(-13) + \sqrt{289}}{2 \cdot 3} = 5$$

$$m_2 = \frac{-(-13) - \sqrt{289}}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3}$$

Kořeny rovnice jsou $[m_1, m_2] = \left[5, -\frac{2}{3}\right]$.

Zkouška:

$$m_1 \colon \frac{12}{5-2} = \frac{5 + 4 \cdot 5}{5} - 1$$

$$\frac{12}{3} = \frac{25}{5} - 1$$

$$4 = 5 - 1$$

$$4 = 4$$

$$m_2: \frac{12}{-\frac{2}{3} - 2} = \frac{5 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$\frac{12}{-\frac{8}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$-\frac{9}{2} = -\frac{7}{2} - 1$$

$$-\frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$$

Rovnosti platí, řešení je pravdivé.

Výsledek: $[m_1, m_2] = \left[5, -\frac{2}{3}\right]$

PŘÍKLAD 2: Řešte rovnici v $\mathbb{Z}$, řešte rozkladem:

$$(y + 2)^2 + (y - 3)^2 = (y + 7)^2$$

Řešení:

Aplikujeme matematické vzorce $(a + b)^2$ a $(a - b)^2$.

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 14y + 49$$

Sečteme a odečteme příslušné výrazy.

$$y^2 - 16y - 36 = 0$$

Rozložíme na součin.

$$(y - 18)(y + 2) = 0$$

$$[y_1, y_2] = [18, -2]$$

Zkouška:

$$y_1: (18 + 2)^2 + (18 - 3)^2 = (18 + 7)^2$$

$$20^2 + 15^2 = 25^2$$

$$400 + 225 = 625$$

$$625 = 625$$

Výsledek:

Rovnici řešíme v $\mathbb{Z}$, $y = 18$.

PŘÍKLAD 3: Řešte graficky v $\mathbb{R}$:

$$4x^2 - 8x - 5 = 0$$

Řešení:

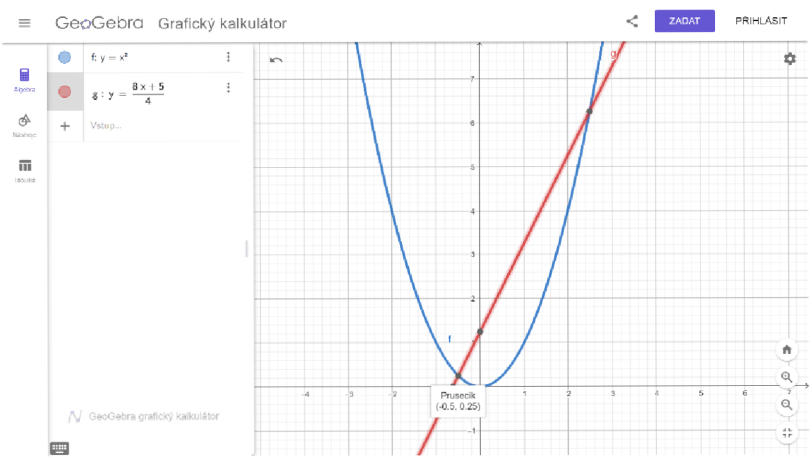
Rovnici napíšeme v ekvivalentním tvaru a sestrojíme grafy funkcí.

$$x^2 = \frac{8x + 5}{4}$$

$$f: y = x^2$$

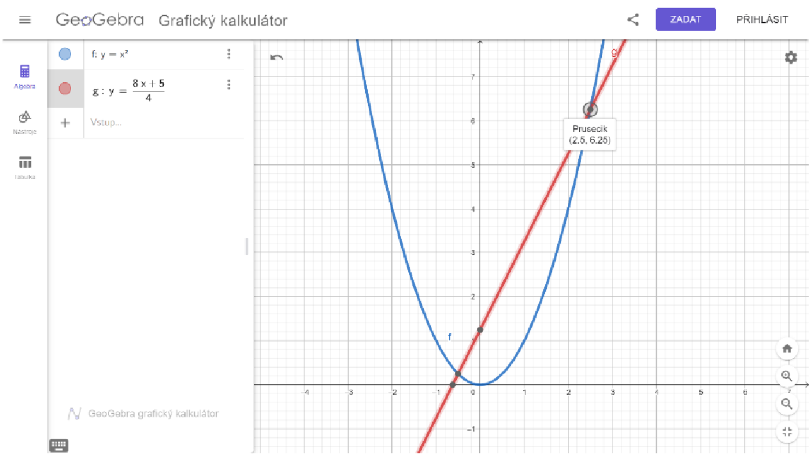
$$h: y = \frac{8x + 5}{4}$$

Grafické znázornění:



Obrázek 9 Grafické řešení příkladu 3

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 10 Grafické řešení příkladu 3

Zdroj: vlastní zpracování

$$P_1[-0{,}5; 0{,}25], P_2[2{,}5; 6{,}25]$$

Výsledné hodnoty můžeme ověřit vyřešením rovnice početně.

$$4x^2 - 8x - 5 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 144$$

$$x_1 : \frac{8 - \sqrt{144}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 : \frac{8 + \sqrt{144}}{2 \cdot 4} = \frac{5}{2}$$

Výsledek: $[x_1, x_2] = [-0{,}5; 2{,}5]$

PŘÍKLAD 4: Řešte rovnici v $\mathbb{R}$:

$$\frac{4}{1-x} = \frac{14}{1+x} + \frac{6}{x}$$

Výsledek: $[x_1, x_2] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$

PŘÍKLAD 5: Řešte rovnici v $\mathbb{R}$:

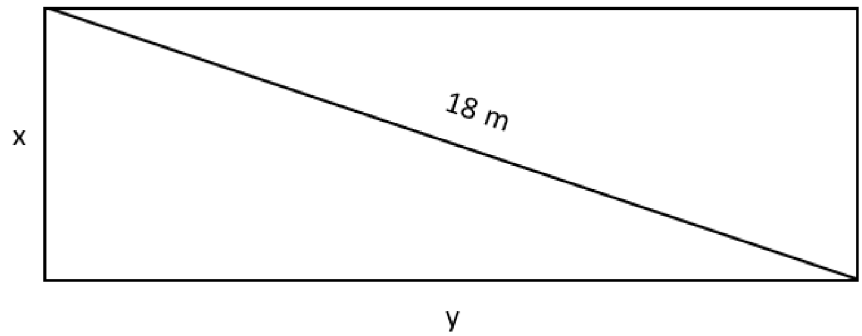
$$\frac{1}{3}(2n-1)^2 - \left(\frac{1}{3}(n+1)\right)^2 = 6\left(\left(\frac{1}{3}n\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$

Výsledek: $[n_1, n_2] = \left[\frac{4}{5}, 2\right]$

5.3.2 MATEMATICKÉ SLOVNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD 6: Obvod obdélníkové parcely je 48 m, úhlopříčka má 18 m. Určete délky parcely.

Nákres:



Obrázek 11 Nákres k příkladu 6

Zdroj: vlastní zpracování

Řešení:

K výpočtu použijeme vzorec pro obvod obdélníku a Pythagorovu větu.

$$o = 2(x + y)$$

$$48 = 2(x + y)$$

Vyjádříme si neznámou x.

$$x = 24 - y$$

Dosadíme do Pythagorovy věty.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$(24 - y)^2 + y^2 = 18^2$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici a dostaneme hodnoty stran obdélníku.

Výsledek: Délky parcely jsou $12 - 3\sqrt{2}$ m a $12 + 3\sqrt{2}$ m.

PŘÍKLAD 7: Cena trika byla snížena o tolik procent, kolik korun stálo před snížením ceny. Urči cenu před zlevněním, jestliže teď stojí 24 korun.

Výsledek: Triko před zlevněním stálo 40 nebo 60 korun.

PŘÍKLAD 8: Tomáš chce postavit plot kolem zahrady. Délka jeho obdélníkové zahrady je o 6 m větší než šířka. Rozloha zahrady je 27 m^2. Zjistěte, jak dlouhý bude plot.

Výsledek: Plot bude dlouhý 24 m.

PŘÍKLAD 9: Ve třídní pokladně zůstalo 19 korun. Pokud každý žák přispěje tolik korun, kolik je žáků ve třídě a poté si rozdělí peníze stejným dílem, dostane každý 20 korun. Kolik je ve třídě žáků?

Výsledek: Jsou dvě možnosti, ve třídě je buď 1 žák nebo 19 žáků. Z logické stránky výsledek musí být 19 žáků.

PŘÍKLAD 10: Pravoúhlý trojúhelník má obvod 12 cm a přeponu o délce 5 cm. Urči délku jeho odvěsen.

Výsledek: Délky odvěsen jsou 3 cm a 4 cm.

5.4 DIOFANTOVSKÉ (NEURČITÉ) ROVNICE

Definice 3 Lineární neurčitou rovnici o dvou neznámých x, y nazýváme každou rovnici ve tvaru $ax + by = c$, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, koeficienty a, b, c jsou celá čísla a neznámé x, y jsou také celá čísla (Molnár et al., 2001, s. 22).

Jedním ze způsobů řešení je redukční metoda. Jestliže největší společný dělitel a a b, značíme $D(a, b)$, > 1 a D nedělí c, pak rovnice nemá řešení. A jestliže $D(a, b) > 1$ a D dělí c, upravíme rovnici na tvar tak, aby $D(a, b, c) = 1$, pak rovnice má řešení. Řešením neurčité rovnice je vyhledání všech celých čísel, které dané rovnici vyhovují. Je-li rovnice řešitelná, pak má nekonečně mnoho řešení. Podmínkou pro to, aby neurčitá rovnice měla alespoň jednu dvojici řešení je, aby největší společný dělitel koeficientů a, b této rovnice dělil c. Pokud celá čísla x_0, y_0 jsou řešením této neurčité rovnice, pak všechna řešení rovnice jsou dána parametrickými rovnicemi $x = x_0 + \frac{b}{D}t$, $y = y_0 + \frac{a}{D}t$, kde t je celé číslo.

Použité metody řešení mohou být logická úvaha nebo redukční metoda.

5.4.1 MATEMATICKÉ ÚLOHY

Učivo se běžně nevyučuje na základní škole. Žáci se mohou pokusit vyřešit úlohu například logickou úvahou.

PŘÍKLAD 1: Najděte všechna řešení neurčité rovnice v ℕ:

$$3x + 2y = 22$$

1. způsob řešení – logická úvaha:

Hledáme řešení v ℕ. Pokusíme se dosazovat za neznámou x od 1, najdeme k ní odpovídající neznámou y a tak můžeme dojít k výsledným řešením.

$$3 \cdot 1 + 2y = 22$$

$$2y = 22 - 3$$

$$2y = 19$$

Po dosazení 1 za neznámou x nelze najít přirozené číslo y, tato možnost není správná.

$$3 \cdot 2 + 2y = 22$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

Našli jsme uspořádanou dvojici $[x, y]$ = [2,8]. Takto pokračujeme dále, až dojdeme k hodnotám, které neodpovídají množině ℕ.

$$3 \cdot 8 + 2y = 22$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

Došli jsme k záporným hodnotám, dále nemá smysl hledat další hodnoty.

2. způsob řešení – redukční metoda:

$$3x + 2y = 22$$

Z uvedených dvou neznámých osamostatníme tu, jejíž multiplikativní konstanta je v absolutní hodnotě menší než ta druhá. V tomto případě neznámá y.

$$y = \frac{22 - 3x}{2}$$

Výraz vhodně upravíme následujícím způsobem.

$$y = \frac{22 - 2x - x}{2}$$

$$y = 11 - x - \frac{x}{2}$$

Výraz $11 - x$ je přirozené číslo a $\frac{x}{2}$ bude také přirozené číslo. Označíme $t = \frac{x}{2}$ a vyjádříme neznámou $x = 2t$. Dosadíme do upravené rovnice.

$$y = 11 - 2t - t$$

$$y = 11 - 3t, t \in \mathbb{N}$$

Za t dosazujeme přirozená čísla a najdeme první řešení.

$$11 - 3 \cdot 1 = 8$$

Pro získání dalších uspořádaných dvojic využijeme parametrické rovnice $x = x_0 + \frac{b}{D}t$. Nesmíme zapomenout, že $x = 2t$.

$$x = 2 + \frac{2}{1} \cdot 1 = 4$$

$$x = 4 + \frac{2}{1} \cdot 1 = 6$$

Po dosazení nalezených x do původní rovnice dostaneme i náležité y.

$$3 \cdot 4 + 2y = 22$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

$$3 \cdot 6 + 2y = 22$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Pokud bychom pokračovali, hodnoty by neodpovídaly množině $\mathbb{N}$. Našli jsme 3 řešení a to:

Výsledek: $[x, y] \in \{[2,8], [4,5], [6,2]\}$

PŘÍKLAD 2: Řešte diofantovskou rovnici v $\mathbb{N}$ a najděte 2 možné uspořádané dvojice řešení:

$$2x - 3y = 4$$

Výsledek: Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Například $[x, y] \in \{[5,2], [8,4]\}$.

PŘÍKLAD 3: Řešte diofantovskou rovnici v $\mathbb{N}$:

$$x + 2y = 3$$

Výsledek: $[x, y] = [1,1]$

PŘÍKLAD 4: Řešte diofantovskou rovnici v $\mathbb{Z}$ a najděte uspořádanou dvojici řešení se zápornými neznámými x, y:

$$5x - y = 2$$

Výsledek: Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Například $[x, y] = [-3, -17]$.

PŘÍKLAD 5: Řešte diofantovskou rovnici v $\mathbb{Z}$, najděte 5 různých uspořádaných dvojic řešení:

$$x - 2y = 0$$

Výsledek: Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Například $[x, y] \in \{[2,1], [4,2], [10,5], [26,13], [30,15]\}$.

5.4.2 MATEMATICKÉ SLOVNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD 6: Na parkovišti jsou zaparkované auta a motorky. Dohromady je na parkovišti 16 kol. Zjistěte všechny možnosti, kolik může být na parkovišti aut a kolik motorek.

1. způsob řešení – logická úvaha:

Auta mají 4 kola. Motorky mají 2 kola. Dohromady musí být 16 kol. Můžeme si vytvořit tabulku, kdy budeme postupně zvyšovat počet aut a hledat k nim odpovídající počet motorek. Počet dopravních prostředků si pro přehlednost označíme zelenou barvou.

Tabulka 1 Řešení příkladu 6

Zdroj: vlastní zpracování

Auta	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 4 = 16$
Motorky	$12 = 6 \cdot 2$	$8 = 4 \cdot 2$	$4 = 2 \cdot 2$	$0 = 0 \cdot 2$
Dohromady kol	16	16	16	16

Poslední možnost není správná, jelikož by na parkovišti nebyla ani jedna motorka. Pokračovat dále nemá smysl, jelikož bychom se dostali do záporných čísel. Řešením je $[x, y] \in \{[1,6], [2,4], [3,2]\}$.

2. způsob řešení – logická úvaha:

Dalším způsobem řešení může být, že budeme přičítat počet kol, dokud nedojdeme k součtu 16.

$$4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$

$$4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$

$$4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 16$$

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

Poslední možnost není správná, jelikož by na parkovišti nebyla ani jedna motorka. Tudíž řešením je $[x, y] \in \{[1,6], [2,4], [3,2]\}$.

3. způsob řešení – redukční metoda:

Dohromady..............................*16 kol*

Auta ....$4x$

Motorky...................................$2y$

Auta mají 4 kola, proto zapisujeme $4x$, motorky mají 2 kola, proto zapisujeme $2y$.

$$4x + 2y = 16$$

Vyjádříme neznámou y.

$$y = \frac{16 - 4x}{2}$$

$$y = 8 - 2x$$

Výraz obsahuje celá čísla, můžeme zjistit výsledky.

$$8 - 2 \cdot 1 = 6$$

$$8 - 2 \cdot 2 = 4$$

$$8 - 2 \cdot 3 = 2$$

Pokud bychom pokračovali dále, vyjde nám 0 nebo záporná čísla, a to není v souladu se zadáním. Můžeme zapsat výsledky.

$$[x, y] \in \{[1,6], [2,4], [3,2]\}$$

Výsledek: Na parkovišti může být 1 auto a 6 motorek, 2 auta a 4 motorky nebo 3 auta a 2 motorky.

PŘÍKLAD 7: Kačka jde do banky. Potřebuje, aby jí vydali padesátikorunové a dvacetikorunové mince v celkové částce 310 korun. Jakými způsoby ji banka může částku vydat?

Výsledek: Kačka může dostat 1 padesátikorunu a 13 dvacetikorun, 3 padesátikoruny a 8 dvacetikorun nebo 5 padesátikorun a 3 dvacetikoruny.

$$[x, y] \in \{[1,13], [3,8], [5,3]\}$$

PŘÍKLAD 8: Zjistěte kolika způsoby lze rozlít 26 l mléka do x dvoulitrových a y třílitrových nádob.

Výsledek: Mléko lze rozlít 4 způsoby. $[x, y] \in \{[10,2], [7,4], [4,6], [1,8]\}$

PŘÍKLAD 9: Na ubytovně je 505 studentů v 210 dvoulůžkových a třílůžkových pokojích. Všechna lůžka jsou obsazena. Kolik pokojů je dvoulůžkových a kolik třílůžkových?

Výsledek: Na ubytovně je 125 dvoulůžkových a 85 třílůžkových pokojů

PŘÍKLAD 10: Dřevěné prkno dlouhé 60 cm chceme nařezat na části 6 cm a 4 cm dlouhé. Kolika způsoby můžeme prkno rozřezat?

Výsledek: Prkno můžeme rozřezat 4 způsoby. $[x, y] \in \{[2,12], [4,9], [6,6], [8,3]\}$

ZÁVĚR

Jako učitelé, rodiče nebo samotní jedinci se můžeme v životě potkat s nadáním kdekoliv. Představili jsme si různé definice nadání, které nám mohou pomoci k identifikaci nadaného žáka. Ještě více nám může pomoci znalost projevů nadání, kterých je mnohem více než by se na první pohled mohlo zdát. Nadání se rozděluje do skupin podle oblastí, ve kterých žák vyniká. Tyto druhy nadání se vzájemně prolínají a doplňují. Modely nadání nám graficky pomohly pochopit již zmíněné definice nadání. V další kapitole jsme se dozvěděli, jak se chovat při interakci s nadanými žáky, jak s nimi komunikovat abychom je nedemotivovali a nepotlačili jejich zájem o rozvoj svého nadání. Práce nám pomohla lépe identifikovat nadaného jedince. Dozvěděli jsme se, že na situaci, že naše dítě je nadané nejsme sami. Existuje mnoho organizací, na které se můžeme obrátit, abychom šli správnou cestou. Představili jsme si hlavní webový portál, který může být užitečný komukoliv v okolí nadaného dítěte. Dále jsme si ukázali jednu z možností rozšíření motivace a zájmu o rozvoj nadání, a to matematické soutěže. Inspirovali jsme se, jak rozšířit učivo a aktivity nadaných žáků.

Učivo rovnice se vyučuje na druhém stupni základní školy. Vytvořila jsem sbírku úloh, která je složená vždy ze základních poznatků učiva, pěti matematických úloh a pěti matematických slovních úloh. Řešené příklady jsou převzaty z učebnic matematiky pro základní školu a představili jsme si u nich několik možností řešení. U grafického řešení jsme si okrajově ukázali práci s počítačovým programem Geogebra. Příklady jsou obtížnější úrovně a mohou být zajímavé pro žáky, kteří v tomto učivu vynikají více než jejich vrstevníci. Touto částí byl naplněn vytyčený cíl představit možnosti rozšíření učiva rovnice pro nadané žáky. Jako první jsme si ukázali, jakými způsoby lze řešit matematické úlohy a matematické slovní úlohy učiva lineární rovnice o jedné neznámé. V další kapitole jsme se obeznámili se soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kde jsme si také ukázali řešené matematické úlohy a slovní úlohy. Poté jsme se dozvěděli informace ke kvadratickým rovnicím a představili jsme si řešené matematické a slovní úlohy. A konečně jsme se dostali k diofantovským neboli neurčitým rovnicím, které se běžně na základní škole nevyučují. Čtenáři si mohli vyzkoušet pro ně něco nového a vyřešit několik řešených příkladů. Ukázkové příklady byly řešeny i logickou úvahou, takže jsme pochopili, že neurčité rovnice mohou žáci řešit, aniž by znali teoretické postupy.

V celé práci se čtenáři dozvěděli informace o nadaných žácích a objevili možnosti rozšíření učiva v oblasti matematiky.

POUŽITÁ LITERATURA

ABRAMENKOVOVÁ, V. (1987). *Stručný psychologický slovník.* 1. vyd. Júlia PALKOVÁ; Ivan SARMÁNY; Juraj ZELMAN a Lýdia ZELMANOVÁ (překladatelé). Bratislava: Pravda.

BĚLOUN, František; BUŠEK, Ivan; MACHÁČEK, Vlastimil; MÜLLEROVÁ, Jana; SOVÍKOVÁ, Květa et al. (1998). *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* 8. upr. vyd. Praha: Prometheus.

BLAŽKOVÁ, Růžena a BUDÍNOVÁ, Irena (2017). *Matematika pro bystré a nadané žáky.* 1.vyd. Brno: Edika.

BUŠEK, Ivan; MÁCHÁČEK, Vlastimil; KOTLÍK, Bohumil a TICHÁ, Milena (1994). *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník základní školy.* 2. vyd. Praha: Prometheus.

CAMPBELL, James R. (2001). *Jak rozvíjet nadání vašich dětí.* Online, PDF. 1. vyd. Praha: Portál. Dostupné z: Academia, https://www.academia.edu/35047358/Campbell_J_R_Jak_rozv%C3%ADjet_nad%C3%A1n%C3%AD_va%C5%A1ich_d%C4%9Bt%C3%AD_2001_pdf. [cit. 2024-03-27].

EISLER, Jaroslav (1999). *Matematika 6-9 pro vyšší stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií.* 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment.

FOŘTÍK, Václav a FOŘTÍKOVÁ, Jitka (2007). *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností.* Praha: Portál.

FUCHS, Eduard; HRUBÝ, Dag; HERMAN, Jiří; CHRÁPAVÁ, Vítězslava a KUBÍNOVÁ, Marie (2000). *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* 1. vyd. Praha: Prometheus.

GARDNER, Howard (2018). *Dimenze myšlení: Teorie rozmanitých inteligencí.* 2. vyd. Praha: Portál.

HAVIGEROVÁ, Jana (2011). *Pět pohledů na nadání.* Online, PDF. Praha: Grada. Dostupné z: Knihy Google https://www.google.cz/books/edition/P%C4%9Bt_pohled%C5%AF_na_nad%C3%A1n%C3%AD/EgQQjfDI7hEC?hl=cs&gbpv=1&dq=havigerov%C3%A1+2011&pg=PA18&printsec=frontcover. [cit. 2024-03-06].

HOMOLKOVÁ, Veronika (2014). *Náměty pro přístup k nadaným žákům v běžné škole v předmětu matematika.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

HŘÍBKOVÁ, Lenka (2009). *Nadání a nadání: pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi.* 1. vyd. Praha: Grada.

JUNG, Carl G. (1995). *Člověk a duše*. Online. Praha: Academia. Dostupné z: SCRIBD, https://www.scribd.com/document/53428920/Jung-%C4%8Clov%C4%9Bk-a-du%C5%A1e. [cit. 2024-03-27].

LIŠKA, Marek et al. (2016). *Matika pro spolužáky: rovnice a nerovnice (učebnice)*. 2. vyd. Hradec Králové: meg-cz.

Matematická olympiáda. (© 2024). Online. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/. [cit. 2024-03-06].

Matematický klokan (© 2024). Online. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/?page_id=27 . [cit. 2024-03-06].

Matematika polopatě. Celá čísla. (2024). Online. Dostupné z: https://www.matweb.cz/cela-cisla/. [cit. 2024-03-06].

MOLNÁR, Josef; LEPÍK, Libor; LIŠKOVÁ, Hana; RŮŽIČKOVÁ, Bronislava a SLOUKA, Jan (2001a). *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele.* Olomouc: Prodos.

MOLNÁR, Josef; LEPÍK, Libor; LIŠKOVÁ, Hana; RŮŽIČKOVÁ, Bronislava a SLOUKA, Jan (2001b). *Matematika 9: sbírka úloh: (pracovní sešit) s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos.

MŠMT (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Online. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/. [cit. 2024-03-06]

Nadané děti. Kam se poradit? (© 2024). Online. Dostupné z: https://www.nadanedeti.cz/pro-rodice-kam-se-poradit. [cit. 2024-03-06].

NPI ČR (2024). *Portál Talentovani.* Online. Dostupné z: https://www.talentovani.cz/. [cit. 2024-03-07].

Pangea matematická soutěž. (2024). Online. Dostupné z: https://www.pangeasoutez.cz/. [cit. 2024-03-06].

PORTEŠOVÁ, Šárka (2011). *Rozumově nadané děti s dyslexií.* 1. vyd. Praha: Portál.

PORTEŠOVÁ, Šárka (2021a). *Multidimenzionální modely talentu a nadání.* Online. In: Centrum rozvoje nadaných dětí. Nadané děti. Dostupné z: https://www.nadanedeti.cz/odborne-zdroje-clanky-modely-nadani. [cit. 2024-03-06].

PORTEŠOVÁ, Šárka (2021b). Gagného diferenciální model [obrázek]. In: *Multidimenzionální modely talentu a nadání.* Online. Dostupné z: https://www.nadanedeti.cz/odborne-zdroje-clanky-modely-nadani. [cit. 2024-03-06].

PRESOVÁ, Jana; DAVIDOVÁ, Jana a HERMOCHOVÁ, Dana (2017). *Hravá matematika 9: pracovní sešit pro 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia.* 2. vydání. Praha: Taktik.

Pythagoriáda. (2024). Online. Dostupné z: https://www.pythagoriada.cz/. [cit. 2024-03-06].

QIIDO EDUCATION (2024). *Qiido patron nadaných dětí. Kdo je MiND dítě.* Online. Dostupné z: https://www.qiido.cz/kdo-je-mind-dite/. [cit. 2024-03-06].

Sbírka úloh: Slovní úlohy na rovnice a na soustavy rovnic (© 2012-2023). Online. Dostupné z: https://www.priklady.com/cs/index.php/rovnice-a-nerovnice/slovni-ulohy-na-rovnice. [cit. 2024-03-06].

ŠŤÁVA, Jan; JANDA, Miroslav; KUBIŠTOVÁ, Iva; NOVOTNÁ, Magdalena a ŠKRABÁNKOVÁ, Jana (2010). *Praktická příručka pro učitele o práci s talentovanými žáky na středních školách.* Online. Brno: Jihomoravské centrum pro mezinárodní mobilitu. [cit. 2024-03-06].

URBAN, Michal. (2016). *Organizační řád soutěže Pythagoriáda.* In: *Pythagoriáda*. Online. Dostupné z: https://www.pythagoriada.cz/. [cit. 2024-03-06].

WEBB, James T. (2007). *A parent´s Guide to Gifted Children.* Online, PDF. Great Potential Press Inc. Dostupné z: Knihy Google, https://books.google.cz/books?id=ZyVXGPPj9rgC&pg=PA1&hl=cs&source=gbs_toc_r&cad=2#v=onepage&q&f=false. [cit. 2024-03-06].

WINEBRENNER, Susan a BRULLES, Dina (2018). *Teaching Gifted Kids in Today´s Classroom.* Online, PDF. 4. upr. vyd. Minneapolis: Free Spirit Publishing Inc. Dostupné z: https://www.teachercreatedmaterials.com/estore/files/samples/899589s.pdf. [cit. 2024-03-06].

SEZNAM OBRÁZKŮ