UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vězňovo dilema a jeho aplikace v reálných situacích

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D**.

Vypracoval: **Martin Fritz**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2023

Bibliografická identifikace

Autor: Martin Fritz

Název práce: Vězňovo dilema a jeho aplikace v reálných situacích

Typ práce: Bakalářská

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: V této práci analyzujeme koncept vězňova dilematu v kontextu teorie her a jeho praktické uplatnění v různých oblastech lidského života. Zabývá se definicí a klasifikací her, specifickými rysy vězňova dilematu včetně výplatní matice a vlivem opakovaných her na rozhodování účastníků. Dále práce zkoumá různé strategie používané hráči, zahrnuje analýzu jejich silných a slabých stránek a uvádí příklady konfliktů zájmů v reálném světě, které lze interpretovat jako vězňovo dilema.

Klíčová slova: teorie her, opakované hry, Nashova rovnováha, Paretovo optimum, vězňovo dilema, hráči, strategie, výplatní matice, Axelrodův turnaj

Počet stran: 56

Počet příloh: 1

Jazyk: český

Bibliographical identification

Author: Martin Fritz

Title: Prisoner´s dilemma and its application on real life situations

Type of thesis: Bachelor’s

Department: Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2023

Abstract: In this paper we analyse the concept of the prisoner's dilemma in the context of game theory and its practical application in various areas of human life. It deals with the definition and classification of games, specific features of the prisoner's dilemma including the payoff matrix, and the influence of repeated games on participants' decision-making. Furthermore, the thesis examines various strategies used by players, includes an analysis of their strengths and weaknesses, and provides examples of real-world conflicts of interest that can be interpreted as the prisoner's dilemma.

Key words: game theory, repeated games, Nash equilibrium, Pareto optimality, prisoner´s dilemma, players, strategies, payoff matrix, Axelrod´s tournament

Number of pages: 56

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

Olomouci dne ……………… Podpis ……………………

Obsah

Úvod ... 8

1 Rozhodnutí zkoumat teorii her ... 9

1.1 Terminologie ... 10

1.2 Stručná klasifikace her ... 12

1.3 Definice pojmů z teorie her ... 13

1.3.1 Hra v normálním tvaru ... 13

1.3.3 Nashova rovnováha ... 16

1.3.4 Paretovo kritérium optimality ... 17

2 Vězňovo dilema ... 19

2.1 Klasická formulace ... 19

3 Opakované hry ... 24

3.1 Opakované vězňovo dilema ... 27

3.1.1 Konečně opakovaná verze hry ... 27

3.1.2 Nekonečně opakovaná verze hry ... 28

4 Strategie v opakovaném vězňovu dilematu ... 31

4.1 O historii strategií ... 31

4.2 Hodnocení výsledků turnaje ... 32

4.3 Popis několika vybraných strategií ... 33

4.3.1 Strategie, které nevyužívají historii interakcí ... 33

4.3.2 Strategie, které využívají historii interakcí ... 34

4.3.3 Strategie, které se snaží identifikovat protihráče ... 35

4.3.4 Skupinové strategie ... 36

4.4 Vývoj strategií, aneb jak naprogramovat úspěšnou strategii ... 36

5 Příklady situací z reálného světa ... 43

5.1 Ekonomická oblast ... 43

5.1.1 Stanovení ceny produktu v prostředí s nedokonalou konkurencí 43

5.1.2 Investice do inovací 47

5.2 Sociologická oblast 47

5.2.1 Omluva kamarádovi 47

5.2.2 Rande 48

5.2.3 Hodnocení na základě „nucené distribuce“ 48

5.3 Socioekonomická oblast 49

5.3.1 Charitativní akce 49

5.3.2 Platba za veřejnou dopravu 50

5.4 Geopolitická oblast 51

5.4.1 Závod ve zbrojení 51

5.4.2 Redukce uhlíkové stopy 51

Závěr 53

Literatura 54

Poděkování

Rád bych poděkoval své vedoucí bakalářské práce Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné rady při konzultacích trpělivost, kterou mi v průběhu zpracovávaní bakalářské práce věnovala.

Úvod

Tato bakalářská práce se zaměřuje na problematiku teorie her, konkrétně na vězňovo dilema, a jeho uplatnění v běžném životě. Vězňovo dilema je základním modelem situace, kde dva jedinci mohou buď spolupracovat pro vzájemný prospěch, nebo jednat sobecky na úkor druhého. Tento model má široké uplatnění v různých oblastech, od ekonomie po biologii.

Práce je strukturovaná tak, aby čtenáři poskytla hlubší porozumění konceptu vězňova dilematu a jeho aplikací. Na začátku práce pojednáváme o konfliktních rozhodovacích situacích a teorii her. Součástí první kapitoly je stručná klasifikace her, a také definice spjaté s tímto vědním oborem. V další kapitole je pak vysvětlen princip vězňova dilematu s důrazem na výplaty vyjádřené pomocí výplatní matice, které z této hry dělají právě ono dilema.

Ve třetí kapitole je čtenář obeznámen s teoretickým konceptem opakovaných her. Zde pojednáváme také o tom, jaký vliv na rozhodování hráčů ve vězňově dilematu má počet opakování této hry.

Čtvrtá kapitola je věnovaná strategiím, které hráči mohou využívat. Zde je představeno několik vybraných strategií a jejich silné a slabé stránky. Taktéž jsou zde uvedeny společné vlastnosti těch strategií, které jsou v současné době považovány za nejúspěšnější.

Na závěr se v páté kapitole věnujeme několika oblastem lidského života, ve kterých se můžeme setkat s podobným konfliktem zájmů, které představuje vězňovo dilema.

1 Rozhodnutí zkoumat teorii her

Teorie her je poměrně mladá disciplína, jejíž základy byly představeny Johnem Von Neumannem a Oscarem Morgensternem v knize z roku 1944 s názvem „*Theory of games and economic behavior*". Od svého vzniku našla teorie her uplatnění v různých oborech jako jsou například ekonomie, politologie, sociologie ale také v oblasti evoluční biologie. Tato disciplína zkoumá různé rozhodovací situace a snaží se je popsat matematickým aparátem za účelem ohodnocení důsledků rozhodnutí a volby optimální strategie. Avšak ne všechna rozhodnutí, s nimiž se člověk v běžném občanském životě potýká, vyžadují složitou matematickou interpretaci; například pokud nastoupíme do výtahu a chceme se dostat do pátého patra, bez složitých úvah pouze stiskneme tlačítko odpovídající příslušnému podlaží. Proto je vhodné si pro začátek klasifikovat jednotlivé rozhodovací situace. Výše zmíněná situace s výtahem je názorným příkladem tzv. *nekonfliktní rozhodovací situace*, ve které vystupuje pouze jeden účastník, má k dispozici určitý počet možností volby (tzn. počet tlačítek ve výtahu), přičemž každá z nich má určitý definovaný důsledek (zastavení na konkrétním patře). V situaci „chci jet do 5. patra" se jako nejlepší, tzv. optimální, volba jeví stisknutí tlačítka „5".

V praktickém životě však většina výsledků nezávisí pouze na volbě jednotlivce, ale do rozhodovacího procesu vstupují rozhodnutí dalších účastníků (hráčů). Teorie her rozlišuje podle počtu zúčastněných hráčů hry dvou hráčů a hry vícero hráčů. V těchto případech dochází ke *konfliktním rozhodovacím situacím* (neboli konfliktům) – preference jednoho účastníka mohou být v rozporu se zájmy jiného účastníka. Abychom mohli hovořit o konfliktní rozhodovací situaci, musí být splněny následující podmínky[10],[11]:

- Minimální počet účastníků jsou dva, přičemž alespoň jeden z nich je hráč racionální
- Účastníci konfliktní rozhodovací situace znají své možnosti i možnosti ostatních hráčů (pokud je část informace účastníkům chybí, mluvíme o hrách s nedokonalou informací)
- Každý z hráčů si vybírá svoji akci z množiny možných akcí

Tyto situace mohou nabývat libovolného charakteru, a proto lze nalézt mnoho různých příkladů, které disponují diametrálně odlišnou složitostí. Jednoduchými příklady mohou být některé dětské hry – piškvorky, kámen, nůžky, papír – případně spor o to, který ze sourozenců umyje nádobí po večeři. O něco složitějším příkladem může být šachová partie nebo pokerový turnaj. Avšak konflikty zájmů se zpravidla vyskytují i v komplikovanějších situacích, než jsou stolní/karetní hry nebo dětské spory. Příklady, které si často vyžadují podrobnější analýzu, jsou: cenové soupeření konkurenčních podniků, rozhodování o strategii politické kampaně, sestavování národního rozpočtu a plánování investic, evoluční hry – souboj zvířat o potravu, šíření genetické informace, vedení vojenských operací a mnohé další. Zkrátka záleží pouze na fantazii a schopnosti vnímat danou situaci jako „konfliktní“ v tom smyslu, že je nutné vybrat určitý postup, resp. strategii, s níž bude jedinec danou situaci řešit. Můstkem mezi reálnými každodenními problémy a teoretickou matematikou, jež se někdy zdá být realitě vzdálená, je právě teorie her. Teorie her tak poskytuje matematický nástroj, kterým se snažíme usnadnit volbu správné strategie tak, abychom dosáhli kýženého výsledku.

1.1 Terminologie

V předešlé podkapitole jsme naznačili, jak široké je spektrum situací, na které lze pohlížet optikou teorie her, a došli jsme k závěru, že tato teorie nachází své uplatnění v mnoha aspektech každodenního života. Abychom byli schopni konflikt a jeho důsledky vyčíslit, je nutné sestavit matematický model konkrétní situace. Předtím, než se pustíme do sestavování takového modelu, je důležité porozumět terminologii, která se v souvislosti s teorií her používá. Tato terminologie se v literatuře různí, a to v závislosti na tom, zda se jedná o literaturu popularizační nebo literaturu zaměřenou více odborně. V následující části se budeme věnovat výkladu vybraných pojmů tak, jak je budeme chápat v této práci. Při definování těchto pojmů vycházíme z literatury [6],[10],[11],[13],[19]:

- *Hra* představuje popis konfliktní rozhodovací situace, která vymezuje volby, jež mají účastníci této situace k dispozici a můžou je uskutečnit, ale už dál nespecifikuje, které akce budou provedeny. Jedná se o jakýsi mechanismus, který při pevně daných pravidlech ohodnotí výslednou interakcí mezi subjekty, jež se hry účastní.
- *Hráčem* budeme označovat každého účastníka rozhodovací situace, který svým rozhodnutím, neboli výběrem jedné ze svých možností, ovlivňuje výsledek dané hry. Z hlediska toho, jak moc sofistikovaný myšlenkový proces probíhá u hráče, než zvolí svou strategii, dělíme hráče na *inteligentní, neinteligentní a p–inteligentní.* Pokud se budeme bavit o množině všech hráčů, budeme ji značit $\boldsymbol{P}$ (z anglického „ *Players* “).
- *Inteligentní hráč*, často také označován jako *racionální hráč,* je takový hráč, který analyzuje své možnosti a informace o možnostech svých protihráčů. Při výběru své strategie usiluje o maximalizaci vlastního profitu. Racionálního hráče lze definovat i prostřednictvím posloupnosti pojmů, která začíná definicí *racionálního rozhodnutí* – je to takové rozhodnutí, které jedinci přinese nejvyšší užitek. Následně definujeme

racionální chování jako schopnost činit racionální rozhodnutí. A tedy *racionální hráč* je hráč, který se chová racionálně.

- *Neinteligentní hráč*, někdy také označován jako *iracionální hráč* nebo *indiferentní účastník,* je hráč, který své strategie volí zcela náhodně. Tento účastník neanalyzuje hru, své možnosti, ani možnosti ostatních, a na výsledku hry mu nijak nezáleží (běžným příkladem neinteligentního hráče je počasí).
- p *– inteligentní hráč* ve hře vystupuje jako hráč, který se s pravděpodobností p chová jako inteligentní hráč a s pravděpodobností $1{-}p$ jako hráč neinteligentní. Někdy se mu také říká „chybující hráč", tedy hraje jako racionální hráč, ale s pravděpodobností $1{-}p$ udělá chybné rozhodnutí.
- *Akce* je volba určité varianty nebo postupu účastníka hry. Obecně budeme symbolem a_i značit akci *i-tého* hráče.
- *Prostorem akcí* budeme rozumět množinu <u>všech</u> akcí daného hráče. Prostory akcí jednotlivých hráčů se mohou, ale nemusí, lišit. Prostor akcí *i-tého* hráče budeme značit $\boldsymbol{A_i}$. Pokud z nějakého důvodu budeme potřebovat rozlišit akce konkrétního hráče, budeme používat levý horní index, například zápis: $\boldsymbol{A}_i = \{\, {}^1a_i,\ {}^2a_i, \dots, {}^ma_i\}$ představuje výčet prostoru akcí *i-tého* hráče.
- *Profil akcí* nebo též *strategická kombinace* je zobrazení, které hráčům přiřazuje jejich akci. Podle toho, zda profil akcí obsahuje akci od každého hráče nebo je některý z hráčů vynechán, rozlišujeme *úplný profil* a *neúplný profil.*
- *Úplný profil* je uspořádaná *n–tice* $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$, ve které je na *i-té* pozici akce z prostoru akcí *i-tého* hráče tj. $a_i \in \boldsymbol{A_i}$. Množinu všech úplných profilů budeme značit $\boldsymbol{A}$. Formálně je tedy $\boldsymbol{A}$ kartézským součinem $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{A}_i \times \cdots \times \boldsymbol{A}_n$
- *Neúplný profil* přiřadí akci všem hráčům kromě jednoho, tj. jedná se o uspořádanou $(n-1) - tici\ (a_1, \dots, a_{i-1},\ a_{i+1}, \dots, a_n)$. Tyto profily budeme značit $\boldsymbol{a}_{-i}$ a množinu všech neúplných profilů označíme $\boldsymbol{A}_{-i}$. Prvky množiny $\boldsymbol{A}_{-i}$ odpovídají prvkům kartézského součinu $\boldsymbol{A_{-i}} = \boldsymbol{A_1} \times \cdots \times \boldsymbol{A_{i-1}} \times \boldsymbol{A_{i+1}} \times \cdots \times \boldsymbol{A_n}$
- *Výplata hráče* je kvantitativním vyjádření výsledku hry. Její hodnota závisí na volbě strategií všech hráčů, lze ji vyjádřit jako funkci uvažovaných strategií. Takový předpis se pak nazývá *výplatní funkce hráče.*

Poznámka: V literatuře [6] se uvádí, že pokud je ve hře více neinteligentních hráčů, lze bez újmy na obecnosti shrnout vlivy jejich rozhodnutí do rozhodnutí jediného neinteligentního hráče.

1.2 Stručná klasifikace her

Mnohé konfliktní situace dokážeme pomocí aparátu teorie her převést na konkrétní více či méně obsáhlý matematický model. Existuje značné množství kategorií, do kterých můžeme hry zařazovat, abychom lépe porozuměli jejich různým charakteristikám. Proto si uvedeme pouze výčet nejběžnějších kategorií her [5],[6],[19].

i) *Kooperativní a nekooperativní*

   Nekooperativní hry jsou takové, kdy hráči mezi sebou nemohou uzavírat dohody, jejichž porušení by mohla trestat nějaká autorita. Naopak pokud je hráčům dovoleno vytvářet spojenectví – koalice a existuje mechanismus, který trestá porušení koaliční smlouvy, mluvíme o *kooperativních hrách*. V matematickém modelu se pak koalice značí jako podmnožina množiny hráčů. Podle toho, zda můžou členové koalice mezi sebou uzavírat smlouvy o rozdělení výplaty, pak rozlišujeme hry s *přenositelnou výhrou* a s *nepřenositelnou výhrou*. V případě kooperativní hry více hráčů tak neřešíme pouze otázku „*Jakou strategii zvolit ?*“ ale také otázku „ *S kým mám uzavřít koalici ?*“

ii) *Symetrické a asymetrické hry*

   Pokud hráči vybírají ze shodné množiny strategií a jejich výplatní funkce jsou stejné, mluvíme o hrách *symetrických*. Pokud tyto předpoklady nejsou splněny, jedná se o hru *nesymetrickou*.

iii) *Jednokolové a vícekolové hry*

   V jednokolových hrách hráči odehrají jednu hru, rozeberou si výplaty a zkušenosti nabyté ve hře již dále neuplatňují. Důležité je také, že hráči přímo volí své akce na základě faktu, že hra nebude mít další kola. Ve vícekolových nebo též opakovaných hrách se hraje stejná hra vícekrát za sebou a hráči před každým kolem mohou změnit své strategie. Ve volbě rozumných rozhodnutí vzniká potřeba uvažovat více kol dopředu, neboť je zde například potenciální hrozba odplaty ze strany hráčů, kteří vyjdou z dřívějších kol poškození nebo s horší výplatou. Avšak pokud hráči vědí, že hrají poslední kolo vícekolové hry, tak se chovají, jako by hráli hru jednokolovou. Při volbě akcí hráči berou v potaz i počet kol, která mají před sebou. Z tohoto důvodu, pokud budeme chtít analyzovat u hráčů změnu chování mezi jednokolovou a opakovanou variantou hry, je důležité, aby hráči nevěděli, které kolo bude poslední. Pokud dokážeme vytvořit počítačovou simulaci dané hry, lze tuto „nevědomost“ o počtu kol ošetřit například tím, že implementujeme náhodný mechanismus, který v každém kole hru ukončí s pravděpodobností α, $\alpha \in (0,1)$.

iv) Nekonečně dlouhé hry

Jsou hypotetické hry, které mají nekonečný počet kol. Jejich význam je především teoretický a zkoumání takových her může sloužit například k poznání chování určitého modelu v limitních podmínkách.

v) Hry s dokonalou informací a s nedokonalou informací

Hry s dokonalou, resp. úplnou, informací jsou takové hry, kdy hráči mají přístup k informacím o svých protihráčích, o jejich prostorech strategií a tím pádem mohou znát i všechny možné průběhy hry. Naopak hry s nedokonalou, resp. částečnou, informací jsou takové, kde hráči dopředu neznají některé prvky ve hře, např. svoji výplatu, počet hráčů, prostor strategií protihráče atd… V ekonomických aplikacích teorie her se často setkáváme s případem hry s nedokonalou informací. Získaní dalších informací pro hráče představuje náklady, o které se pak snižuje výplatní funkce tohoto hráče.

vi) Simultánní hry a sekvenční hry

Obecně jsou simultánní hry takové, kdy hráči v momentě volby své akce nevědí, jak se zachovali či zachovají ostatní hráči. Lze tedy říct, že v těchto hrách všichni hráči postupují současně (např. kámen, nůžky, papír). V sekvenčních hrách volí hráči své strategie postupně, tím pádem mohou ve své volbě akce zohlednit informace o volbách akcí některých svých protihráčů (např. šachy, válečné konflikty atd.). Sekvenčním hrám se taktéž říká *metahry*.

vii) Konečné a nekonečné hry

V závislosti na počtu prvků v prostorách strategií všech hráčů můžeme hry dále dělit na konečné nebo nekonečné. Pro konečné hry jsou charakteristické prostory strategií všech hráčů s konečným počtem prvků. V případě nekonečného počtu prvků v těchto prostorech mluvíme následně o nekonečných hrách.

1.3 Definice pojmů z teorie her

1.3.1 Hra v normálním tvaru

Existuje několik typů formálního zápisu hry. V této práci budeme pracovat s hrou v *normálním* tvaru. U her v normálním tvaru uvažujeme, že hráči jednají současně, resp. hráči se dozví o volbě akcí svých soupeřů až v momentu vyhodnocení hry (např. kámen, nůžky, papír nebo v případě vězňova dilematu). Naproti tomu při rozšířeném tvaru hry je zahrnuto jasné pořadí, v němž hráči konají (např. šachová partie nebo hra piškvorky).

Definice 1.3.1 *(Hra v normálním tvaru)***:** Nechť je dána konečná neprázdná n – prvková množina $\boldsymbol{P} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$, dále nechť je dáno n množin $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_i, \dots, \boldsymbol{A}_n$ a n reálných funkcí $\boldsymbol{u}_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \boldsymbol{u}_i(a_1, \dots, a_n), \dots, \boldsymbol{u}_n(a_1, \dots, a_n)$ definovaných na kartézském součinu $\boldsymbol{A}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{A}_i \times \cdots \times \boldsymbol{A}_n$. Hrou n hráčů v normálním tvaru budeme rozumět uspořádanou $(2n + 1) - tici$:

$$\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{u}_1(a_1, \dots, a_n), \boldsymbol{u}_2(a_1, \dots, a_n), \dots, \boldsymbol{u}_n(a_1, \dots, a_n)\},$$ kde

reálnou funkci $\boldsymbol{u}_i(a_1, \dots, a_n)$ nazveme *výplatní funkcí i–tého* hráče. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o zisku, je-li záporná, hovoříme o ztrátě [19].

1.3.2 Dominantní a dominovaná akce

Jak už víme, racionální hráč předtím, než učiní rozhodnutí, nejdřív analyzuje prostředí hry, aby učinil nejvýhodnější volbu. Avšak samotnou analýzu může zkomplikovat velikost prostorů akcí. Jinými slovy čím víc možností, tím komplikovanější je vybrat si jednu konkrétní. V této situaci nám může pomoci jev zvaný dominance. Obecné doporučení totiž říká, že hráč by nikdy neměl hrát dominované akce, protože vždy existuje alespoň jedna tzv. dominantní akce, která bez ohledu na akci soupeře povede k lepším výsledkům. A pokud je nějaká akce, kterou v žádném případě nemá smysl hrát, můžeme ji eliminovat z prostoru akcí. Procesem eliminace dominovaných strategií lze zjednodušit hledání optimální akce a ve zřídkavých případech vede přímo k nalezení optimálního řešení. Platnost předchozích dvou vět je omezena na hry s konstantním součtem, tj. matematický model antagonistického konfliktu. V neantagonistickém konfliktu sice také existuje koncept dominantních a dominovaných akcí, ale už nelze obecně tvrdit, že hraní dominantní akce přinese hráčům lepší výsledky než hraní jiných akcí. Více pozornosti výhodám a nevýhodám dominantních akcí budeme věnovat v další kapitole při rozboru myšlenkových pochodů hráčů ve vězňově dilematu. Nyní však přejdeme k formálním definicím dominantních a dominovaných akcí [12],[20].

Definice 1.3.2 *(Silná dominance)***:** Nechť je dána množina $\boldsymbol{A}_{-i}$, která obsahuje $(n-1) \times (n-1)$ neúplných profilů akcí $\boldsymbol{a}_{-i}$, potom akce $a_i \in \boldsymbol{A}_i$ hráče $i \in \boldsymbol{P}$ je považována za *silně dominovanou*, pokud existuje strategie $a_i' \in \boldsymbol{A}_i$, která vždy zajišťuje vyšší výplatu, tj. taková, pro kterou platí:

$$\boldsymbol{u}_i(a_i', \boldsymbol{a}_{-i}) > \boldsymbol{u}_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}),$$

pro $\forall\ \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}$, kde *i-tý* hráč nemá přiřazenou žádnou akci. O akci a_i' pak říkáme, že *silně dominuje* akci a_i z prostoru akcí $i - tého$ hráče $\boldsymbol{A}_i$.

Definice 1.3.3 *(Slabá dominance)***:** Akce $a_i \in \boldsymbol{A}_i$ hráče $i \in \boldsymbol{P}$ je považována za *slabě dominovanou*, pokud existuje akce $a_i' \in \boldsymbol{A}_i$ taková, pro kterou platí

$$\boldsymbol{u}_i(a_i', \boldsymbol{a}_{-i}) \geq \boldsymbol{u}_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$$

pro $\forall\, \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}$ a

$$\boldsymbol{u}_i(a_i', \boldsymbol{a}_{-i}) > \boldsymbol{u}_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$$

pro některý $\boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}$. O akci a_i' pak říkáme, že *slabě dominuje* akci a_i z prostoru akcí *i-tého* hráče $\boldsymbol{A}_i$. Alternativně lze říct, že akce a_i' zajistí hráči $i \in \boldsymbol{P}$ stejnou nebo vyšší výplatu než akce a_i při libovolném profilu akcí $\boldsymbol{a}_{-i}$ zahraném ostatními hráči a zároveň při některém $\boldsymbol{a}_{-i}$ vede k ostře vyšší výplatě než akce a_i.

Definice 1.3.4: Akce $a_i^* \in \boldsymbol{A}_i$ hráče $i \in \boldsymbol{P}$ je dominantní, platí-li

$$\boldsymbol{u}_i(a_i^*, \boldsymbol{a}_{-i}) \geq \boldsymbol{u}_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$$

pro $\forall\, a_i \in \boldsymbol{A}_i$ a pro $\forall\, \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}$. Říkáme, že akce a_i^* je dominantní, pokud vede k vyšší, nebo nejhůře stejné výplatě, než jakákoliv jiná akce a_i a to při libovolném profilu akcí $\boldsymbol{a}_{-i}$ zahraném ostatními hráči [12],[20].

Rozdíl mezi nadefinovanými pojmy si ukážeme na obecném příkladu. Je dána hra v normálním tvaru $G = \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{u}_1(a_1, \dots, a_n), \boldsymbol{u}_2(a_1, \dots, a_n), \dots, \boldsymbol{u}_n(a_1, \dots, a_n)\}$, uvažujme, že prostor akcí *i – tého* hráče obsahuje *m* různých akcí tj. $\boldsymbol{A}_i = \{{}^1a_i, {}^2a_i, \dots, {}^ma_i\}$. Pokud je splněna nerovnost:

$$\boldsymbol{u}_i({}^1a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) > \boldsymbol{u}_i({}^2a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \text{ pro } \forall\, \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i},$$

řekneme, že ${}^2a_i$ je *(silně) dominována* akcí ${}^1a_i$, respektive obráceně lze říct, že akce ${}^1a_i$ *(silně) dominuje* akci ${}^2a_i$. Avšak pro to, abychom mohli říct o akci ${}^1a_i$, že je *dominantní,* musela by splňovat $m - 1$ nerovnic typu:

$$\boldsymbol{u}_i({}^1a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \geq \boldsymbol{u}_i({}^ja_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \text{ pro } j = 2,3, \dots, m \text{ a } \forall\, \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}$$

To, že je některá akce dominantní, tak ještě neznamená, že by všechny ostatní akce *i-tého* hráče byly dominované. Může se stát, že pro některé akce $a_i \neq a_i^*$ dostaneme

$$\boldsymbol{u}_i(a_i^*, \boldsymbol{a}_{-i}) = \boldsymbol{u}_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \text{ pro } \forall\, \boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i}.$$

Při silné a slabé dominanci sledujeme výplaty při dvou různých akcích *i-tého* hráče v reakci na všechny možné akční profily. Pokud zjistíme, že pozorovaná dvojice vyhovuje některé z definic 1.3.2. nebo 1.3.3, pak je jedna akce dominována druhou dle formulace těchto definic.

V případě, že pozorovaná dvojice nevyhovuje žádné z předchozích definic, tak z hlediska dominance mezi těmito akcemi není žádný vztah.

Při hledání dominantní akce srovnáváme jednu akci se všemi ostatními akcemi v prostoru akcí *i-tého* hráče (taktéž v reakci na všechny akční profily). Pokud srovnávaná akce nevyhovuje definici 1.3.4, tak sice není dominantní akcí, ale stále může některé akce dominovat nebo být některými akcemi dominována.

1.3.3 Nashova rovnováha

Autorem pojmu Nashova rovnováha (anglicky *Nash equilibrium*) je americký matematik a odborník na teorii her John F. Nash, který poprvé tento pojem definoval v rámci své disertační práce na univerzitě v Princetonu.

Důležitost této rovnováhy spočívá v tom, že hráčům pomáhá s výběrem akce, pokud znají prostory akcí svých protihráčů. Nalezení této rovnováhy ve vězňově dilematu bude popsáno v následující kapitole. Formálně lze Nashovu rovnováhu definovat následovně [6]:

Definice 1.3.5 *(Rovnovážný bod)*: *n-tici* akcí $\boldsymbol{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ nazveme *rovnovážným bodem* příslušné hry v normálním tvaru, jestliže platí:

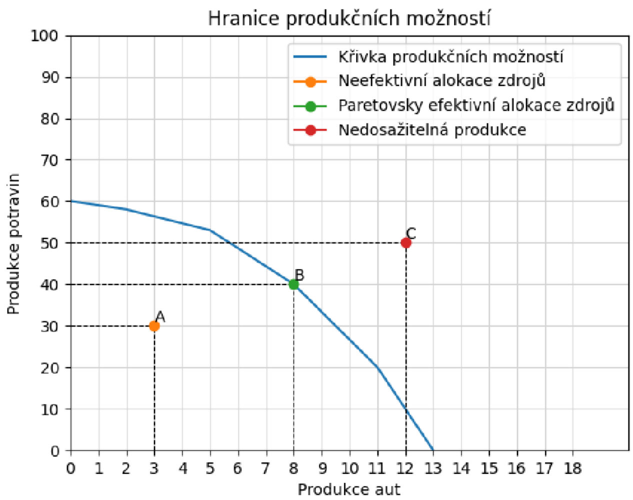
$$\boldsymbol{u_i}(a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*) \leq \boldsymbol{u_i}(a_1^*, \dots, a_i^*, \dots, a_n^*),$$

pro $\forall i \in \boldsymbol{P}$ a $\forall a_i \in \boldsymbol{A}_i$. Složka a_i^* se nazývá *rovnovážnou akcí i-tého* hráče.

Nashova rovnováha představuje profil akcí, kdy každý hráč volí svou rovnovážnou akci. Rovnovážná akce *i-tého* hráče a_i^* je nejlepší akcí tohoto hráče za předpokladu, že se ostatní hráči neodchýlí od svých rovnovážných akcí. Tato rovnováha nám defacto říká, že pokud se jednotlivec rozhodne zvolit jinou akci $a_i \in \boldsymbol{A}_i$ dosáhne stejných či horších výsledků, než kdyby se držel své rovnovážné akce a_i^*. Při analýze hry dle Nashovy rovnováhy se na situaci díváme z pohledu jednotlivce snažícího se dosáhnout alespoň „lepšího než nejhoršího možného výsledku“. Ovšem tato rovnováha nám neposkytuje žádný náhled na to, jak se bude konflikt vyvíjet, pokud se od ní odchýlí více hráčů najednou [19]. Jiný pohled na stejnou situaci nabízí teorie Paretova optima.

1.3.4 Paretovo kritérium optimality

Vilfredo F. D. Pareto (1848-1923) byl italský ekonom, politolog, sociolog a průkopník v rámci oboru ekonometrie. Kromě jiného se věnoval efektivnímu rozdělení zdrojů a důchodů ve společnosti. Alokačně efektivní rozhodnutí definoval jako takové rozhodnutí, které zlepšuje situaci (důchod, blahobyt, produkci …) některých, třeba i všech subjektů, aniž by se zhoršila situace subjektů jiných. Tuto definici lze ilustrovat na příkladu hranice produkčních možností ekonomiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že ekonomika, která má omezené zdroje, produkuje pouze 2 statky – auta a potraviny (jednotky jsou v tomto příkladu nepodstatné).



Obrázek 1: Hranice produkčních možností ekonomiky,která produkuje pouze 2 statky - auta a potraviny

Jednotlivé situace, které mohou v takovém případě nastat, zachycuje *Obrázek 1* prostřednictvím bodů A,B,C a křivky produkčních možností (Production Possibility Frontier – PPF). Bod A, stejně jako ostatní body ležící pod PPF křivkou, znázorňuje situace, kdy ekonomika hospodaří neefektivně se svými zdroji. Naopak bod C a veškeré další body nad křivkou PPF, vyjadřují situace, které jsou v daném čase a ekonomice nedosažitelné s ohledem na disponibilní zdroje a poznané technologie. Křivka produkčních možností je tvořena body (včetně bodu B), které zastupují takové situace, kdy jsou zdroje v ekonomice alokovány optimálně dle Paretova kritéria. Tato křivka též vyjadřuje stav, kdy bez změny vnějších vlivů (inovace v technologiích, expanze ekonomiky) není možné produkovat více jednotek potravin, aniž by se zároveň snížila produkce aut. V této části jsme čerpali z literatury [7],[15].

Tato myšlenka byla později aplikovaná i v oblasti teorie her. Zde Paretovsky optimální výsledek hry chápeme jako situaci, kdy žádný hráč nemůže dosáhnout lepšího výsledku, aniž by tím uškodil ostatním hráčům. Formální zápis této skutečnosti bude vypadat následovně [12]:

Definice 1.3.6 (*Paretovo optimum*)**:** Nechť $\boldsymbol{P}$ je konečná množina hráčů a nechť $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^N$ (prostor akcí všech hráčů). Potom $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ je Paretovsky optimální profil akcí, jestliže neexistuje žádný jiný profil akcí $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ takový, že $y_i > x_i$ pro $\forall\, i \in \boldsymbol{P}$.

2 Vězňovo dilema

2.1 Klasická formulace

Jednou z obecně nejznámějších modelových her je v současnosti Vězňovo dilema. V tradičním příběhu vystupují Alice a Bob jako zločinci v Americe dvacátých letech minulého století. Státní zástupce ví, že oba spáchali závažný zločin, ale vzhledem k nedostatku důkazů potřebuje, aby se aspoň jeden z nich přiznal. Nechá tedy zatknout Alici i Boba, každého zvlášť posadí do samostatné místnosti a nabídne jim dohodu která zní následovně [2]:

Pokud se přiznáš a tvůj spolupachatel se nepřizná, jsi volný. Pokud se nepřiznáš a tvůj spolupachatel se přizná, budeš odsouzen k trestu v maximální výši. Pokud se přiznáte oba, budete oba odsouzeni, ale k nižšímu trestu. Pokud se ani jeden nepřiznáte, budete oba obviněni a odsouzeni jen za krácení daní.

Dále budeme čerpat ze zdroje [20]. Hráči v této hře jsou tedy dva zločinci $\boldsymbol{P} = \{1,2\}$ resp. $\boldsymbol{P} = \{Alice, Bob\}$. Oba můžou zvolit jednu ze dvou akcí: „přiznat se“ nebo „mlčet“. Prostory akcí vypadají následovně:

$$\boldsymbol{A_A} = \boldsymbol{A_B} = \{přiznat\ se\ , mlčet\}$$

Výplaty hráčů z původního příběhu potom můžeme interpretovat jako roky života, o které přijdou tím, že budou ve vězení. Řekneme, že maximální trest je ve výši 7 let, snížený trest představuje 5 let, a nakonec trest za krácení daní 3 roky ve vězení.

$$u_A(mlčet, mlčet) = -3 \qquad u_B(mlčet, mlčet) = -3$$
$$u_A(mlčet, přiznat\ se\ ) = -7 \qquad u_B(mlčet, přiznat\ se\ ) = 0$$
$$u_A(přiznat\ se, mlčet) = 0 \qquad u_B(přiznat\ se, mlčet) = -7$$
$$u_A(přiznat\ se, přiznat\ se) = -5 \qquad u_B(přiznat\ se, přiznat\ se) = -5$$

Vězňovo dilema modelované jako hra v normálním tvaru je pak trojice:

$$\langle\{Alice, Bob\}; (\boldsymbol{A}_A, \boldsymbol{A}_B); (\boldsymbol{u}_A, \boldsymbol{u}_B)\rangle$$

Hodnoty výplat lze elegantně zapsat do výplatní matice ilustrované *Tabulkou 1*, kde jsme Alici přiřadili červenou a Bobovi modrou barvu.

		Akce a výplaty	
		Spolupracovat = mlčet	Zradit = přiznat se
Akce a výplaty	Spolupracovat = mlčet	-3 ; -3	-7 ; 0
	Zradit = přiznat se	0 ; -7	-5 ; -5

Tabulka 1: Výplatní matice vězňova dilematu

Protože se jedná o body trestné, nejlepší hodnotu, kterou hráč může získat je 0 (okamžitě propuštěn na svobodu). Avšak představa nuly jako nejlepší možné výplaty neposkytuje zrovna nejlepší motivaci k hlubším úvahám, jak z dané situace vyjít co nejlépe. Proto ke každé hodnotě přičteme 7 a posuneme se do nezáporných hodnot. Nové hodnoty výplatní matice, ilustrovány *Tabulkou 2*, lze chápat tak, že každý ze zločinců se smířil s nejhorším trestem, tj. 7 let a raduje se z každého ušetřeného roku na svobodě [9].

		Akce a výplaty	
		Spolupracovat = mlčet	Zradit = přiznat se
Akce a výplaty	Spolupracovat = mlčet	4 ; 4	0 ; 7
	Zradit = přiznat se	7 ; 0	2 ; 2

Tabulka 2: Výplatní matice vězňova dilematu v případě, kdy se vězni smíří s nejhorším trestem

Oba hráči – Alice i Bob – mají na výběr ze dvou akcí – *spolupracovat* nebo *zradit*. Alice sice neví, co udělá Bob, ale může si rozmyslet oba scénáře: *„Pokud mě Bob zradí, a já zradím také, ušetřím si 2 roky, ale za spolupráci žádný. Pokud Bob spolupracuje, za spolupráci ušetřím 4 roky, ovšem pokud ho zradím, vyhnula bych se všem 7 rokům ve vězení.“* Nakonec tedy nezáleží na tom, jakou strategii zvolí Bob, pro Alici je zrada výhodnější, resp. méně riskantní strategie. Tato hra je ovšem symetrická, a tedy pro oba hráče spravedlivá – pokud by si v ní hráči vyměnili role, výplatní matice zůstane stejná. Bob tedy bude při svém rozhodovaní uvažovat úplně stejně. Oba hráči jsou tak svou individuální racionalitou motivováni zradit svého spolupachatele. Ostatně pokud budeme v této hře hledat Nashovu rovnováhu, zjistíme, že vzájemná zrada je jediná situace, která zde odpovídá definici rovnovážného bodu. Navíc na myšlenkových pochodech našich vězňů jsme si demonstrovali, že akce *„zradit“* dominuje akci

„*spolupracovat*“, tedy je nejlepší odpovědí na jakoukoliv soupeřovu volbu. Zároveň však vidíme, že oba hráči by na tom ve finále byli lépe, kdyby zvolili svou dominovanou akci, tj. oba by spolupracovali. Tuto vlastnost Nashovy rovnováhy jsme již zmínili v podkapitole jí věnované, a to konkrétně v poznámce, kde jsme řekli, že koncept Nashovy rovnováhy nám neřekne nic o tom, jak se hra bude vyvíjet, pokud se oba hráči (resp. vícero hráčů) odkloní od své rovnovážné strategie. Profil akcí (spolupracovat, spolupracovat) na druhou stranu odpovídá Paretovu optimu, tj. situaci, kdy žádný hráč nemůže dosáhnout lepšího výsledku, aniž by tím uškodil svému protihráči. Avšak tento profil není stabilní, protože zde existuje značné riziko zrady spolupachatele [9].

Nabízí se otázka, jak by se hráči zachovali, pokud by zde existovala nějaká forma trestu za zradu i bez toho, aby se efekt tohoto trestu explicitně projevil na výplatní matici, čímž by změnil podstatu této hry. Aby nebyly naše výsledky příliš abstraktní, vypustíme z našich úvah myšlenku altruismu a podobných filosofických směrů, které hledají odpověď skrze zkoumání sociálních interakcí a přirozeného chování ve skupinách. Řešením, které pak přináší kvantifikovatelné výsledky, je uvažovat, že se nejedná o běžné zločince, ale o recidivisty, kteří před stejným rozhodnutím nestojí poprvé, ale už jej několikrát řešili a nejspíš ještě několikrát řešit budou. Motivace zradit pak už není tak velká, protože pokud by Alice zradila Boba, který ji kryl, mohl by se Bob „mstít“ a v příštím kole zradu opětovat (pomineme-li „černější“ scénáře), což by mohlo vést ke koloběhu vzájemných zrad. Vize budoucích kol tak dělá ze spolupráce rozumnější strategii nejen vzhledem ke skupinové spokojenosti, ale také k osobnímu prospěchu.

Bližšímu rozboru opakovaného vězňova dilematu se budeme věnovat v následujících kapitolách. Nyní se ještě na chvíli vrátíme k výplatám. Konkrétní nominální hodnoty těchto výplat se liší v závislosti na zdroji, ze kterého je čerpáno. Nabízí se tedy otázka, jaké vztahy musí mezi těmito hodnotami platit, aby mohlo jít o výplatní matici vězňova dilematu ? Absolutně nejvyšší hodnota odpovídá situaci, kdy jeden z hráčů zradí, přičemž druhý bude spolupracovat. V tomto případě tak „zrádce“ neodolal pokušení, které představovala tato výplata, která se často a docela příhodně značí T (z anglického *temptation to exploit*, neboli pokušení). Naproti tomu nejmenší hodnota označená písmenem S (z anglického *Sucker's payoff*) je výplatou pro hráče, který v předchozí situaci naivně důvěřoval svému protihráči. Obě tyto hodnoty tedy nalezneme v polích výplatní matice, jež odpovídají výsledku hry při volbě akcí: (*spolupracovat, zradit*) a (*zradit, spolupracovat*). Do polí na diagonále (viz *Tabulka 3*) zpravidla vpisujeme výplaty odpovídající situaci, kdy oba hráči zvolí stejnou akci, tj. buď (*spolupracovat, spolupracovat*) nebo (*zradit, zradit*).

Tyto výplaty se v obecném zápisu značí R a P, opět převážně z původních anglických pojmenování „Reward for mutual cooperation“ a „Punishment for mutual defection“, čili odměna za vzájemnou spolupráci a trest za vzájemnou zradu. Název „odměna za vzájemnou spolupráci“ nám napovídá to, že tato výplata musí být vetší než trest při vzájemné zradě. Jak jsme už výše v textu naznačili slovy, největší a nejmenší výplata znamená, že musí zároveň platit, že odměna za vzájemnou spolupráci nebude nikdy tak velká jako velikost pokušení zradit a zároveň trest za vzájemnou zradu nebude nikdy horší než výplata při neopětované spolupráci. Vztah těchto čtyř hodnot lze snadno popsat pomocí nerovnosti: $T>R>P>S$. Pro úplnost podmínek, jež vymezují hodnoty výplat, musíme ještě říct, že průměr hodnot T a S musí být menší než odměna za vzájemnou spolupráci. Tato podmínka je nutná pro to, aby se zamezilo zneužívání hry spekulacemi mezi hráči, kteří by pak mohli záměrně střídat pozici zrádce a naivního spoluhráče, a dosahovali by tak vyššího zisku. Pokud tedy platí tyto dvě podmínky, lze obecně zapsat výplatní matici prostřednictvím *Tabulky 3*:

		Strategie a výplaty	
		Spolupracovat	Zradit
Strategie a výplaty	Spolupracovat	R ; R	S ; T
	Zradit	T ; S	P ; P

Tabulka 3: Obecný tvar výplatní matice vězňova dilematu

Za splnění podmínek:

i. $T > R > P > S$

ii. $\left(\frac{T+S}{2}\right) < R$ resp. $2R > T + S$

Tyto podmínky nám zaručují Nashovu rovnováhu při volbě akcí (*zradit, zradit*) a zároveň Paretovo optimum při volbě (*spolupracovat, spolupracovat*). Tyto podmínky lze dohledat v literatuře [1].

Poznámka: Druhá podmínka je zejména důležitá při opakované interakci mezi hráči, které se budeme věnovat v následující kapitole. Kdyby totiž nebyla splněna, bylo by pro oba hráče výhodnější střídat profily akcí (*spolupracovat, zradit*);(*zradit, spolupracovat*). Například pro výplaty: $T=50$; $R=30$; $P=29$; $S=28$ tak při střídaní pozic zrádce a naivního spoluhráče dosáhnou po dvou kolech oba hráči shodně výplatu $T+S$, resp. $S+T$, tj. $50+28=78$, kdežto při vzájemné spolupráci dosáhnou (taktéž po dvou kolech) pouze výplatu $R+R$ tj. $30+30=60$. Tedy pokud je tato podmínka porušena, vzájemná spolupráce už není kolektivně nejpreferovanějším výstupem opakované interakce mezi hráči.

3 Opakované hry

Dříve jsme předpokládali, že hráči hrají konkrétní hru jen jednou. Nicméně v reálném světě se setkáváme s mnoha hrami (konflikty), které se opakují. Například konkurenční firmy se pravidelně setkávají na trhu a stanovují ceny a objem produkce. Dlouhodobé vztahy mezi hráči mohou ovlivnit jejich chování, protože se lidé ke známým a opakovaným protivníkům chovají jinak než k náhodným. Pokud hráči v opakovaném konfliktu nedodrží dohodu kvůli okamžitému zisku na úkor ostatních, mohou být potrestáni v budoucnosti. Vezmeme-li v potaz, že naše dnešní rozhodnutí může ovlivnit (pozitivně nebo negativně) budoucí rozhodnutí ostatních hráčů, je důležité znát hodnotu současných i budoucích výplat. V teorii her byl proto vyvinut model opakované hry, který umožňuje studovat opakované konfliktní situace. Tato kapitola vychází z literatury [3],[4],[23].

Obecný model vychází z jednokolové hry v normálním tvaru, kterou označíme $\boldsymbol{G}$. Každý hráč i, který hraje hru $\boldsymbol{G}$, má svůj konečný neprázdný prostor akcí, který budeme značit $\boldsymbol{A}_i$. Pojem *strategie* označuje posloupnost zvolených akcí v rámci celé opakované hry. Jestliže je $\boldsymbol{G}$ hrána cyklicky, pak řada jednokolových her $\boldsymbol{G}$ je sama o sobě také hrou, tzv. *opakovanou hrou*, kterou budeme značit $\boldsymbol{G}^*$. Hra se hraje v diskrétních časových okamžicích označených $t = 0, 1, \ldots, T$. Pokud je T konečné, označuje se hra jako *konečně opakovaná*. Pokud je $T = \infty$, pak hra bude označena jako *nekonečně opakovaná*. V rámci opakovaných her se budeme dolním indexem vždy odkazovat na hráče a horním indexem na kolo opakování hry.

Poznámka: Hodnota indexu t začíná od nuly, takže pro konkrétní hodnotu T bude celkový počet kol roven $T+1$.

V opakované hře je důležité, aby prostředí, ve kterém hráči interagují, bylo stacionární – stejné ve všech kolech. Tuto vlastnost mají hry, které splňují následující předpoklady:

i) každý hráč má ve všech jednotlivých kolech hry stejný prostor akcí $\boldsymbol{A}_i$, tzn. $\boldsymbol{A}_i^t = \boldsymbol{A}_i^{t+1}$
ii) nominální hodnoty výplat jsou v jednotlivých kolech stejné, lze je ale diskontovat
iii) výplaty pro hráče závisí pouze na zvolených akcích v daném kole, nehledě na to, které kolo hry se hraje

Jinými slovy, v každém kole, resp. v každé „podhře“ $\boldsymbol{G}$ opakované hry $\boldsymbol{G}^*$, má výplatní matice stejný rozměr a stejné hodnoty výplat. Dále platí:

iv) hráči se rozhodují a uskutečňují své akce pro dané kolo hry současně
v) každý hráč zná akce, které uskutečnili ostatní hráči v předchozích kolech

Abychom vyjádřili podmíněnosti výběru akcí na základě minulého chování, budeme používat tzv. *historii*. Tu budeme chápat jako seznam všech doposud odehraných profilů akcí. V období t je historie definována jako $\boldsymbol{h}^t = (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^{t-1})$, kde t označuje aktuální časový okamžik a vektor $\boldsymbol{a}^t = (a_1^t, a_2^t, \dots, a_n^t)$ pro $t = 0, 1, \dots, t-1$ představuje profil akcí zahraných hráči v kole t.

Historie h^t v okamžiku t vyjadřuje kombinace individuálních akcí (profilů akcí) v jednokolové hře, které byly zvoleny ve všech minulých kolech. Například ve čtvrtém opakování hry vězňovo dilema může hypotetická historie tahů h^3 vypadat následovně:

$$\boldsymbol{h}^3 = [\,(Spolupracovat, Zradit);\ (Zradit, Zradit);\ (Zradit, Spolupracovat)]$$

Pro historii platí že:

- historie $\boldsymbol{h}^0$ je prázdná (tj. na počátku opakované hry neexistuje žádný záznam interakcí mezi hráči)
- historie $\boldsymbol{h}^t$ obsahuje informace o všech předchozích historiích $\boldsymbol{h}^{t-1}, \boldsymbol{h}^{t-2}, \dots, \boldsymbol{h}^0$
- historie $\boldsymbol{h}^T$ označíme jako konečnou historii, která má pro nekonečně opakované hry nekonečnou délku ($T = \infty$)

Poznámka: historie indexujeme od nuly tzn. historie v prvním kole je $\boldsymbol{h}^0$.

Dále definujeme strategie hráčů v opakované hře. Ryzí strategie pro hráče *i* v opakované hře vyjádříme pomocí posloupnosti funkcí:

$$s_i(\boldsymbol{h}^t): \boldsymbol{H}^t \to \boldsymbol{A}_i\ ,$$

Funkce $s_i(\boldsymbol{h}^t)$ přiřazuje akci $a_i^t \in \boldsymbol{A}_i$ hráči i po odehrané historii $\boldsymbol{h}^t \in \boldsymbol{H}^t$. Kde $\boldsymbol{H}^t$ je definováno jako prostor historií v období t. Je dán jako kartézský součin prostorů profilů akcí $\boldsymbol{A}$ jednotlivých kol opakované hry.

Tato funkce popisuje myšlenkový proces $i - tého$ hráče, který zná všechny výsledky minulých kol až po období $t-1$. Tento hráč rozhoduje o své akci v čase t, přičemž zohledňuje akce svých soupeřů z minulých kol.

Poznámka: V počátečním nultém kole nemáme o chování protihráčů žádné informace, neboť historie akcí protihráčů je v tomto období prázdná.

Profil strategií odehraných hráči v kole t je popsán vektorem:

$$s(\boldsymbol{h}^t) = (s_1(\boldsymbol{h}^t), s_2(\boldsymbol{h}^t), \dots, s_n(\boldsymbol{h}^t))$$

Strategii hráče i v opakované hře vyjádříme jako $(T + 1)$-složkový vektor:

$$s_i = (s_i(\boldsymbol{h}^0), s_i(\boldsymbol{h}^1), \dots, s_i(\boldsymbol{h}^T))$$

Prostor strategií $\boldsymbol{S_i}$ je množina všech strategií s_i, které může uskutečnit hráč i v opakované hře. Množina $\boldsymbol{S}$ je prostor profilů strategií, tedy množina obsahující všechny profily strategií, které mohou ve hře nastat.

Příkladem ryzí strategie v nekonečně opakovaném vězňově dilematu je následující strategie:

$$s_i(\boldsymbol{h}^0) = \text{ spolupráce,}$$

$$s_i(\boldsymbol{h}^t) = \begin{cases} spolupráce, když\ a_j^\tau = spolupráce, j \neq i, pro\ \tau = 0,1,2, \dots, t-1\ ; \\ \qquad\qquad jinak\ zrada. \end{cases}$$

Tato strategie je často označovaná jako „ *Grim trigger* “ neboli *spouštěč*. Hráč i od začátku hry spolupracuje, ale jakmile soupeř jednou zradí, bude až do konce hry volit akci „zradit“. Výhodám, nevýhodám a srovnání vybraných strategií se budeme věnovat v následující kapitole, prozatím si vystačíme se třemi – vždy *spolupracuj*, vždy *zraď* a již zmíněný *grim trigger*.

Důsledky strategií opět vyjádříme výplatní funkcí u_i, ale při její konstrukci také zahrneme časovou hodnotu výplat, a to prostřednictvím diskontního faktoru $\sigma \in (0,1)$. Při hodnotách diskontního faktoru blízkých nule se hráč zaměřuje na krátkodobé cíle a má tak větší sklon zradit, protože výsledky budoucích kol jsou pro něj zanedbatelné ve srovnání se současnou výplatou. Naopak při hodnotách σ blízké jedné si hráč cení budoucích výplat, a proto preferuje vzájemnou spolupráci. Hráči mohou mít různé hodnoty diskontních faktorů, proto diskontní faktor $i - tého$ hráče budeme značit σ_i. Zpravidla se diskontní faktor hráčů v průběhu hry nemění, ale pokud by to bylo nutné, lze zavést diskontní faktor v kole t značený jako σ_i^t (spíše používáno v kontextu konečně opakovaných her). Diskontní faktor může mít různé interpretace. Například v ekonomické oblasti, kde jsou výplaty hráčů ve finančních jednotkách[1], lze pomocí diskontního faktoru vyjádřit úrokovou míru z investic. Obecně však

[1] Diskontní faktor by tak neznamenal přímo úrokovou míru, ale pokud bychom měli možnost úročit portfolio např. 20 %, v období mezi koly hry můžeme diskontní faktor brát jako (1 -0,2)= 0,8.

diskontní faktor vyjadřuje míru netrpělivosti hráčů – čím víc se jeho hodnoty blíží k jedné, tím je hráč trpělivější a víc tak bere v potaz výplaty z budoucích kol.

Následně výplatní funkci hráče budeme chápat jako *diskontovaný součet výplat* z každého kola hry:

$$u_i = g_i(a^0) + \sigma_i g_i(a^1) + \sigma_i^2 g_i(a^2) + \cdots + \sigma_i^T g_i(a^T) \; = \sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)$$

resp. pro nekonečně opakovanou hru

$$u_i = g_i(a^0) + \sigma_i g_i(a^1) + \sigma_i^2 g_i(a^2) + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \sigma_i^t g_i(a^t)$$

kde $g_i(a^t)$ jsou výplaty hráče z jednotlivých kol.

Existuje vícero způsobů, jak vyjádřit výplatní funkci v opakovaných hrách, ale prozatím nám budou stačit pouze dva způsoby – již zmíněný *diskontovaný součet výplat* a *diskontovaná průměrná výplata* [23]:

$$u_i = \frac{\sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)}{1 + \sigma_i + \sigma_i^2 + \cdots + \sigma_i^T} = \frac{\sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)}{\frac{1-\sigma_i^{T+1}}{1-\sigma_i}} = \frac{1-\sigma_i}{1-\sigma_i^{T+1}} \sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)$$

resp. pro nekonečně opakovanou hru

$$u_i = \frac{\sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)}{1 + \sigma_i + \sigma_i^2 + \cdots} = \frac{\sum_{t=0}^{T} \sigma_i^t g_i(a^t)}{\frac{1}{1-\sigma_i}} = (1-\sigma_i) \sum_{t=0}^{\infty} \sigma_i^t g_i(a^t)$$

kde $\frac{1-\sigma_i^{T+1}}{1-\sigma_i}$ resp. $(1-\sigma_i)$ je normalizační faktor, který umožňuje přímé srovnaní výplat opakované hry s jednokolovou hrou.

Poznámka: Diskontovaná průměrná výplata je, jak název napovídá, průměrná výplata za kolo hry diskontovaná k počátečnímu okamžiku. Vzorec tedy získáme jako podíl diskontovaného součtu výplat k počtu kol, avšak váha těchto kol klesá s přibývajícími koly.

3.1 Opakované vězňovo dilema

3.1.1 Konečně opakovaná verze hry

Poté, co jsme zavedli formální aparát, kterým můžeme srovnávat výsledky opakované interakce hráčů, je čas zjistit, jaký dopad bude mít vize dalších kol na chovaní hráčů. Výchozím bodem nám bude Nashova rovnováha z jednokolové verze hry, tj. profil akcí (*zradit, zradit*). Tento profil představuje očekávaný průběh nejen jednokolové hry vězňova dilematu, ale také její konečně opakované varianty. Dejme tomu, že hráče (opět Alici a Boba) čeká 10 kol této hry.

Ačkoliv pro první kolo zatím nejsme schopni dát validní doporučení, pro kolo desáté je strategie jasná – zradit. Pokud by se od prvního kola zrazovali, nejspíš budou oba volit zradu i v posledním kole. Řekněme tedy, že spolu od prvního kola spolupracovali. Pokud si Alice myslí, že Bob bude spolupracovat i v posledním kole, nebude váhat a zradí ho, protože už se nemusí bát toho, že by jí zradu opětoval v dalším kole. Jak už jsme si říkali, hra je symetrická, proto Bob uvažuje stejně jako Alice, čili výsledek posledního kola je stejný jako v jednokolové variantě hry – *(zradit, zradit)*. Jedinou možností, jak vyzrát na svého soupeře, je tak být prvním, kdo zradí, což vede ke vzájemné zradě i v předposledním kole, a pokud tuto úvahu ještě několikrát zopakujeme, dojdeme k tomu, že se hráči zradí už v prvním kole. Aby bylo možné zkoumat, jestli se hráči dopracují ke spolupráci, je nutná nejen vize budoucích kol, ale také nejistota toho, které kolo bude poslední.

Problematiku konečně opakovaných her shrnuje literatura [4] v následující větě :

Věta 3.1.1 *V konečně opakované hře vězňovo dilema existuje jediná Nashova rovnováha, ve které všichni hráči volí v každém kole podvod*[2].

Situace se začíná měnit, pokud budeme uvažovat nekonečný počet kol. Jelikož v takové situaci není přesně dáno poslední kolo, ve kterém by se hráči mohli bez následků zradit, je tak možné zradu opětovat v následujících kolech, což motivuje hráče se neodchýlit od vzájemné spolupráce. Tím už ale zabíháme do obsahu následující podkapitoly.

3.1.2 Nekonečně opakovaná verze hry

Jak už jsme zmínili v úvodní kapitole, konkrétně v sekci věnované klasifikaci her, nekonečně opakované hry představují teoretický koncept, který nám umožňuje studovat chování hráčů v limitních podmínkách. V praxi nejspíš „poslední kolo hry“ bude existovat vždy. Pokud hráči neví, které kolo bude poslední, je tok výplat ze vzájemné spolupráce výhodnější než výplaty z jednorázové vzájemné zrady. Rozhodnutí hráče spolupracovat závisí na jeho přání zachovat si „dobré vztahy“ s protihráčem. Míru, nakolik je pro hráče důležitější dlouhodobý přínos spolupráce než okamžitá vyšší výplata při jeho zradě, vyjadřuje diskontní faktor. Konkrétně si to, jakým způsobem ovlivní diskontní faktor při dané výši výplat rozhodování hráčů, demonstrujeme na následujícím příkladu.

Představme si, že nekonečnou verzi vězňova dilematu budou hrát dvě dvojice hráčů **GC** a **GD**[3]. V obou dvojicích bude jeden z hráčů hrát již popsanou strategii grim trigger, v první dvojici –

[2] Akce *podvod* v dané literatuře odpovídá akci *zradit* používané v této práci.
[3] **ALLC** neboli Always Cooperate a **ALLD,** resp. Always Defect jsou jedny z možných strategií čili označení dvojic vychází ze zkratek strategií které hráči používají

GC – bude jeho spoluhráč vždy spolupracující hráč. Ve dvojici **GD** bude druhý hráč vždy zrazovat. Za výplaty budeme brát hodnoty z tabulky 2 z kapitoly o klasické formulaci vězňova dilematu čili: $T = 7; R = 4; P = 2; S = 0$.

Ve dvojici **GD**, Grim trigger sice „prohraje" první kolo (získá výplatu „S") a druhý hráč tak získá výplatu „T", ale po zbytek partie bude mezi hráči panovat vzájemná zrada, tj. oba budou dostávat výplatu „P". Naproti tomu ve skupině **GC** budou oba hráči kontinuálně získávat výplatu „R". Proto, aby se druhému hráči vyplatilo dlouhodobě spolupracovat s grim triggerem, musí platit následující nerovnost:

$$(výplata\ při\ spolupráci) \quad \geq \quad (výplata\ při\ zradě)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} 4\sigma_i^t \quad \geq 7 + \sum_{t=1}^{\infty} 2\sigma_i^t$$

$$\frac{4}{1-\sigma_i} \quad \geq \ 7 + \frac{2\sigma_i}{1-\sigma_i}$$

kde na levé straně nerovnice je diskontovaný součet výplat druhého hráče ze skupiny **GC** a na pravé straně nerovnice je diskontovaný součet výplat druhého hráče ze skupiny **GD**.

Postupnými úpravami se dopracujeme až k nerovnici:

$$\sigma_i \geq \frac{3}{5}$$

Zjistíme tak, že při daných hodnotách výplatní matice bude pro hráče vzájemná spolupráce výhodnější než vzájemná zrada právě tehdy, když jejich diskontní faktory budou vetší než $\frac{3}{5}$. Obdobným způsobem jsme schopni zjistit kritickou hodnotu diskontního faktoru pro jakoukoliv výši výplat T,R,P,S (samozřejmě toto platí jen pro ty výplaty, jež splňují podmínky z kapitoly 2.1). Debatu o diskontním faktoru uzavřeme následujícím tvrzením z knihy „The evolution of cooperation" od Roberta Axelroda [1].

Věta 3.1.2 *Pokud je diskontní parametr σ dostatečně vysoký, není žádná strategie univerzálně nejlepší, nezávisle na strategii, kterou používá druhý hráč.*

Důkaz této věty lze nalézt v téže knize [1].

Na první pohled se může tato věta jevit jako zcela neuspokojivá. Pro jednokolovou hru přece nebyl problém najít Nashovu rovnováhu a nyní, kdy jen opakujeme stejnou hru, tak najednou nejsme schopni přijít s obdobným doporučením?

Důsledek této věty je ale potřeba chápat obráceně. Tato věta totiž nechce říct, že zde neexistuje žádná rovnovážná strategie, ale že rovnovážných strategií může existovat (a taky existuje) velké množství.

K tomu, abychom byli schopni zjistit, které z nich odpovídají Nashově rovnováze, slouží v teorii nekonečně opakovaných her tzv. „lidová věta“ (v anglické literatuře „folk theorem“). Podle lidové věty platí, že je-li diskontní faktor blízký 1, pak Nashovu rovnováhu může představovat jakákoliv strategie, jejíž realizací dosáhneme výplaty stejné nebo vyšší, než je maximinová zaručená výplata, tj. nejnižší výplata, kterou hráč získá bez ohledu na strategie ostatních hráčů (Nashova rovnováha jednokolové hry) [3],[4].

Poznámka: Lidových vět existuje hned několik, a to v závislosti na tom, kterým kritériem srovnáváme strategie v nekonečně opakované hře. Jejich přesné znění i s důkazy lze najít v literatuře [12].

4 Strategie v opakovaném vězňovu dilematu

Čtvrtá kapitola je věnovaná různým strategiím, ze kterých můžou hráči v opakovaném vězňově dilematu vybírat. Těchto strategií teoreticky může být nekonečně mnoho, proto se omezíme pouze na výběr několika z nich. Dále se zaměříme na to, jakým způsobem jsou strategie srovnávány a také, které vlastnosti by měla strategie mít, aby v daném typu srovnání byla úspěšná. V závěru kapitoly také zmíníme, které strategie jsou v současnosti považovány za nejúspěšnější.

4.1 O historii strategií

V 50. letech matematik Merrill M. Flood a politolog Melvin Dresher představili model *„spolupráce a konfliktu"* (v angličtině *„cooperation and conflict"*), ten později obohatil Albert W. Tucker o příběh se zločinci a výslechem, který je dnes veřejně znám jako vězňovo dilema. Od té doby uběhlo poměrně dost času a o této tematice byly napsány mnohé vědecké články a knihy. Značná část tehdejší, ale i dnešní literatury pak pojednává o efektivních volbách strategie v opakovaném vězňově dilematu (v angličtině *Iterated prisoner's dilemma*, IPD). S prvním rozsáhlejším srovnáním strategií přišel v 80. letech americký politolog Robert Axelrod [1], který uspořádal první počítačový „turnaj" v IPD, ve kterém se z hráčů stávají jakési „automaty", které jsou naprogramovány zpracovat vstupy (historii do kola *t-1*) a generovat příslušný výstup (akci hráče pro *t-té* kolo). Proti sobě bylo postavených 15 strategií[4]. V tomto turnaji hrála každá strategie se všemi ostatními strategiemi (včetně sebe sama), celkově tak bylo odehráno 15x15 „zápasů". Strategie se srovnávaly na základě průměrného skóre za zápas. Každý zápas spočíval v 200 kolech vězňova dilematu s následujícími hodnotami výplatní matice:

Algoritmus		**B**	
	Akce	Spolupráce	Zrada
A	Spolupráce	3;3	0;5
	Zrada	5;0	1;1

Tabulka 4: Výplatní matice z Axelrodových turnajů

Tento typ turnaje je v literatuře znám jako *„round-robin tournament"*, do kterého je možné zaimplementovat tzv. šum. Šumem rozumíme „chybovost" algoritmu, tj. když algoritmus omylem zvolí jinou akci, než by v dané situaci měl zvolit. Turnaj se šumem má zrcadlit lidskou chybovost, kdy například vlivem nepozornosti můžeme zvolit jinou akci, než jsme původně

[4] původně 14, ale později byla přidána strategie **RAND**

zamýšleli. Strategie v *round-robin* turnajích nejčastěji hodnotíme na základě průměrného bodového zisku – ať už za zápas nebo za kolo hry. Avšak při srovnávání strategií lze také sledovat počet vyhraných zápasů v rámci turnaje.

Alternativní způsob hodnocení efektivity strategií poskytuje tzv. *„evoluční přístup“* (v angličtině *„evolution dynamics“*). Evoluční přístup používáme, když se snažíme simulovat procesy jako přirozený výběr, kdy slabší strategie postupně odpadávají a jsou nahrazeny silnějšími strategiemi. Skóre za zápas zde představuje počet „potomků“ dané strategie. Úspěšné strategie jsou pak ty, které mají po několika iteracích tohoto procesu nejvíce potomků.

Turnaj ve formátu *round-robin* demonstruje efektivitu strategie v soutěžení s ostatními, zatímco evoluční simulace ilustruje robustnost strategie reprezentovanou počtem potomků v určitém prostředí. Pomocí těchto přístupů bylo vytvořeno a analyzováno mnoho nových strategií. Další podrobnosti a zdroje lze nalézt v literatuře [8], která představuje shrnutí poznatků o IPD do roku 2007.

4.2 Hodnocení výsledků turnaje

Vzhledem k tomu, že existuje více typů turnajů a možné reprezentace výsledků, si pro zjednodušení uvedeme pouze základní typ turnaje, jehož výsledky znázorníme graficky.

Budeme pracovat s formátem původního Axelrodova turnaje. To znamená, že v rámci turnaje se vždy odehraje $n \times n$ zápasů, kde n je počet námi zvolených strategií. Jak již bylo zmíněno, každý zápas dvojice strategií/algoritmů sestává z 200 kol hry vězňova dilematu s výplatní maticí dříve definovanou *Tabulkou 4*. Výsledky zápasů i celého turnaje budeme hodnotit na základě průměrné výplaty za kolo hry (v případě vyhodnocení turnaje je pak průměrem za kolo součet průměrů z jednotlivých zápasů dělený počtem zápasů). Turnaj uskutečníme za pomoci knihovny Axelrod [26] vybudované v programovacím jazyku Python. Pro grafickou reprezentaci výsledků celého turnaje budeme používat violin plot a pro ilustraci skóre v zápasech pak heatmapu. Knihovna Axelrod umožňuje také vykreslování výsledků, ale toto vykreslení je občas chybné. Proto výsledky vykreslujeme pomocí vlastního kódu, který využívá knihovnu matplotlib.

Poznámka: V kapitole 3 bylo řečeno, že známe-li počet kol hry, je nejracionálnější volbou zrada od prvního kola. Také jsme v první kapitole řekli, že jednou z možností, jak simulovat nekonečnou vícekolovou hru, je implementovat náhodný mechanismus, který s malou pravděpodobností ukončí hru v daném kole, a následně výsledky srovnat na základě diskontované průměrné výplaty. Ovšem tyto požadavky značně komplikují samotné programování turnaje, a také jsou náročné na výpočetní výkon při simulaci turnaje (obzvláště pokud bychom srovnávali větší množství strategií). Konstantní počet kol tak značně zjednodušuje celý proces simulace turnaje i následnou komparaci výsledků. Avšak představuje slabinu, kterou by některé strategie mohly zneužít, proto se kontrolují kódy všech strategií v turnaji a ty, které se snaží těžit ze zrady v posledních kolech, jsou následně diskvalifikovány.

Při srovnávání výsledného skóre v jednotlivých zápasech je dobré brát v potaz jisté referenční úrovně. Například hodnoty průměrné výplaty na úrovni 3 bodů jsou považovány za velmi dobrý výsledek. To odpovídá skóre, kterého je možné dosáhnout, pokud obě strany neustále spolupracují. Na druhou stranu, 1 bod je považován za indikátor nízkého výkonu a odpovídá skóre, kterého hráči dosáhnou, pokud se obě strany zrazují napříč celým zápasem. Zároveň však lze dosáhnout všech hodnot z uzavřeného intervalu [0,5]. Nutno dodat, že Nashova rovnováha jednokolové hry při daných hodnotách T,R,P,S, odpovídá zisku 1 bodu. Na základě lidové věty z předchozí kapitoly tak lze říct, že pokud strategie dosáhne průměr vyšší nebo roven 1 bodu, lze tuto strategii považovat za rovnovážnou.

Než přejdeme k samotnému srovnání strategií, je vhodné říct, jak dané strategie fungují. Další podkapitola je zaměřena na popis vybraných strategií.

4.3 Popis několika vybraných strategií

V této části práce si detailně rozebereme několik vybraných strategií. Každé strategii přiřadíme její anglický název spolu se zkráceným označením, které budeme používat pro odkazování na danou strategií v následujícím textu. V případě dostupnosti uvedeme i český překlad. Dále pro označení akcí „spolupráce“ a „zrada“ bude používat velká písmena **C** – pro spolupráci (z ang. Cooperate) a **D** – pro zradu (z ang. Defect). Při popisu těchto strategií vycházíme z literatury [1],[4],[8],[17],[21],[22],[23], [26]

4.3.1 Strategie, které nevyužívají historii interakcí

Always cooperate (ALLC) / Cooperator (*„vždy spolupracuj“*) – pokud hráč zvolí tuto strategii, bude v každém kole opakované hry volit akci *„spolupracovat“*, nehledě na předchozí volby protihráče.

Always defect (ALLD) / Defector (*„vždy zrazuj“*) – pokud hráč zvolí tuto strategii, bude v každém kole opakované hry volit akci *„zradit“*, bez ohledu na předchozí volby protihráče.

Random (RAND) („*náhodně*") – strategii **RAND** hraje hráč, který mezi akcí *C* a *D* volí náhodně, tj. s pravděpodobností 0,5 zvolí *C* resp. *D*. Můžeme narazit i na jiné variace strategie **RAND**, kdy rozložení pravděpodobnosti nebude 0,5 pro *C* a 0,5 pro *D*, obecněji tedy **RAND** hraje akci *C* s pravděpodobností p a akci *D* s pravděpodobností $1\text{-}p$.

Better and better (BnB)(„*lepší a lepší*") – tato strategie též volí jednotlivé akce na základě pravděpodobnosti, ale na rozdíl od **RAND** se tato pravděpodobnost s rostoucím počtem kol mění. Konkrétní předpis je následovný : zradí s pravděpodobností $(1000 - t)/1000$, kde t je pořadí aktuálního kola. Tato strategie bude s rostoucím počtem kol zrazovat s klesající pravděpodobností, nakonec po tisíci kolech bude už pouze spolupracovat.

Worse and worse („*horší a horší*") – tato strategie je myšlenkou podobná předchozí strategii, avšak s tím rozdílem, že zradí s pravděpodobností $t/1000$. Tato strategie bude s rostoucím počtem kol zrazovat stále častěji.

Cycler – zde se spíše jedná o skupinu strategií, které periodicky opakují určitou sekvenci akcí. Příkladem mohou být strategie: Cycler CD, Cycler DC, Cycler DDC, Cycler CCD…, kde délka sekvence není teoreticky nijak limitovaná, avšak prakticky nejčastěji zahrnuje nanejvýš 6 kol. (knihovna axelrod)

4.3.2 Strategie, které využívají historii interakcí

Tit-for-tat (TFT) („*oko za oko*") – někdy též příhodně nazývána „ *půjčka za oplátku*" je jednou z nejprostších, a přesto nejúspěšnějších strategií. Hráč, který ji hraje, bude v prvním kole spolupracovat, a v dalších kolech bude opakovat akci, kterou zahrál protihráč v předchozím kole. To znamená, že zradí v kole t pouze tehdy, když protihráč zradil v kole $t - 1$.

Two–tits-for-one-tat (TTFT) – varianta **TFT**, která zradu oponenta trestá dvěma po sobě jdoucími zradami, poté pokračuje jako klasický **TFT**.

Tit-for-two-tats (TFTT) – odpouštějící varianta ke klasickému **TFT**. Při této variante zahraje hráč akci „zradit" až poté, co protihráč zradí ve dvou po sobě jdoucích kolech.

Generous TFT (GTFT) („*velkorysé oko za oko*" *)* – chová se jako **TFT**, ale po zradě spolupracuje s pravděpodobností $q = \min\,(1 - \frac{T-R}{R-S}, \frac{R-P}{T-P})$.

Suspicious TFT (STFT) („*podezíravé oko za oko*") – při této strategii hráč začíná zradou a dále pokračuje jako **TFT**.

JOSS – strategie, která podobně jako **TFT** na zradu v každém případě odpoví zradou, ale vzájemnou spolupráci opětuje s pravděpodobností 0,9.

Grim Trigger – začíná spoluprací, ale jakmile soupeř jednou zradí, tak zrazuje po zbytek hry

Gradual – hráč začíná spoluprací a při spolupráci zůstává, dokud soupeř nezradí. Po první zradě soupeře zradí jednou a následně 2x spolupracuje. Po $n-té$ zradě $n-krát$ po sobě volí akci *„zradit“*, následně se snaží „uklidnit“ soupeře dvěma spolupracemi v řadě.

Win-stay, Lose – Shift / Pavlov (PAV) – hráč začíná spoluprací a následně spolupracuje, pokud v předchozím kole zvolili oba hráči stejnou akci, tj. profil akcí $a^{t-1} = (C_1, C_2)$ nebo (D_1, D_2). V literatuře lze narazit na varianty **PavlovC** a **PavlovD**, které se liší ve volbě spolupráce/zrady v prvním kole hry.

4.3.3 Strategie, které se snaží identifikovat protihráče

Adaptive (ADP) (*„přizpůsobivá“*) – v prvních 5 kolech spolupracuje, následně dalších 5 kol zrazuje, následně hraje tu akci, která v předchozích kolech přinesla vyšší průměrný zisk – ten je následně přepočítáván po každém kole. Tímto způsobem je hráč schopný odhalit strategii svého soupeře a přizpůsobit se jí.

Adaptive Pavlov (APavlov) – používá jednoduchý identifikační mechanismus *„když-pak“*. V prvních šesti tazích přijímá **TFT** a soupeře identifikuje podle výsledku této interakce. V následujících šesti tazích přijme odpovídající reakci. Možné strategie soupeře jsou rozděleny do čtyř kategorií: kooperativní, **ALLD**, **STFT** a náhodné. Pokud soupeř nezačne zrazovat, je identifikován jako kooperativní, a pak se **APavlov** bude chovat jako **TFT**. Pokud soupeř zradil více než čtyřikrát v šesti po sobě jdoucích tazích, je identifikován jako typ **ALLD**, pak bude **APavlov** vždy volit zradu. Pokud soupeř zradí maximálně třikrát v šesti tazích, je identifikován jako typ **STFT**, a pak **APavlov** začne hrát jako **TFTT** s cílem obnovit vzájemnou spolupráci. Ostatní strategie, které nepatří do prvních tří kategorií, jsou identifikovány jako náhodný typ. V této situaci bude **APavlov** vždy hrát zradu. Aby bylo možné řešit situace, kdy soupeři mohou měnit své strategie v průběhu hry, počítá se každých šest kol průměrná výhra. Pokud je nižší než prahová hodnota, proces identifikace soupeře se spustí znovu.

MyStrategy MS – předpokládá, že soupeř hraje jednu z následujících strategií (**TFT**, **AllC**, **AllD**, **STFT**, **PavlovC**, **PavlovD**, **TFTT**, **TTFT**, **GRIM** nebo **RAND**). Hru začíná zradou. Pokud se jeho soupeř v prvním kole rozhodne pro zradu, **MS** zvolí spolupráci v druhém kole, v opačném případě **MS** zvolí zradu. **MS** vždy ve třetím kole vybírá spolupráci. Tímto způsobem dokáže **MS** určit strategii z předem dané množiny strategií už po třech kolech hry.

4.3.4 Skupinové strategie

Southampton Group strategies (SGS) – skupina strategií, kde jednotlivé strategie byly navrženy tak, aby se navzájem poznaly na základě předem nastavené posloupnosti akcí v prvních 5-10 kolech. Jakmile se dvě **SGS** vzájemně poznají, budou jednat jako pán nebo otrok – pán vždy zradí, zatímco otrok bude vždy spolupracovat, aby pán získal maximum bodů. Pokud soupeř není rozpoznán jako **SGS**, budou se strategie z této skupiny chovat jako **ALLD**, aby minimalizoval skóre soupeře.

4.4 Vývoj strategií, aneb jak naprogramovat úspěšnou strategii

V této podkapitole se budeme věnovat silným a slabým stránkám vybraných strategií. Také si zde uvedeme vlastnosti, kterými disponují úspěšné strategie z již odehraných turnajů.

Mnohonásobné opakování vězňova dilematu otevírá daleko širší spektrum možností, než jen binární volbu mezi spoluprací a zradou. Jak už bylo několikrát řečeno, budeme-li srovnávat pouze tyto dvě akce, pak z dlouhodobého hlediska hráči, kteří vzájemně spolupracují, dosáhnou vyšší výplaty než hráči, kteří se vzájemně zrazují. Kromě těchto zjevných strategií můžeme uvažovat, že rafinovaný hráč bude prvních několik kol spolupracovat, aby vybudoval důvěru u svého protihráče, a poté může občasnou zradou zkusit dosáhnout mírně lepších výsledků, než kdyby celou dobu pouze spolupracoval. Ovšem pak výsledek hry těchto dvou hráčů závisí na tom, jak na případnou zradu zareaguje protihráč. Ten má hned několik možností. Jednou z nich je nereagovat vůbec a nadále volit spolupráci v domnění, že se jednalo pouze o protihráčovu chybu. Ovšem přílišná benevolence vůči soupeřovým prohřeškům může být jednoduše zneužita pro zvýšení soupeřova skóre na úkor benevolentního hráče. Další možností je zradu oplatit v následujícím kole, čímž se sice mohou vyrovnat výplaty těchto hráčů, a také tím hráč signalizuje protihráči, že zrady nebudou ponechány bez povšimnutí. Na druhou stranu odplata může vyvolat koloběh vzájemných zrad, který nás dostává opět k úvodní problematice dlouhodobých zisků. A tak hledání optimální strategie v IPD je dodnes předmětem diskuse vědců z různých oblastí, v této práci však bude především vycházet ze zdrojů [1] [8] [18] [22].

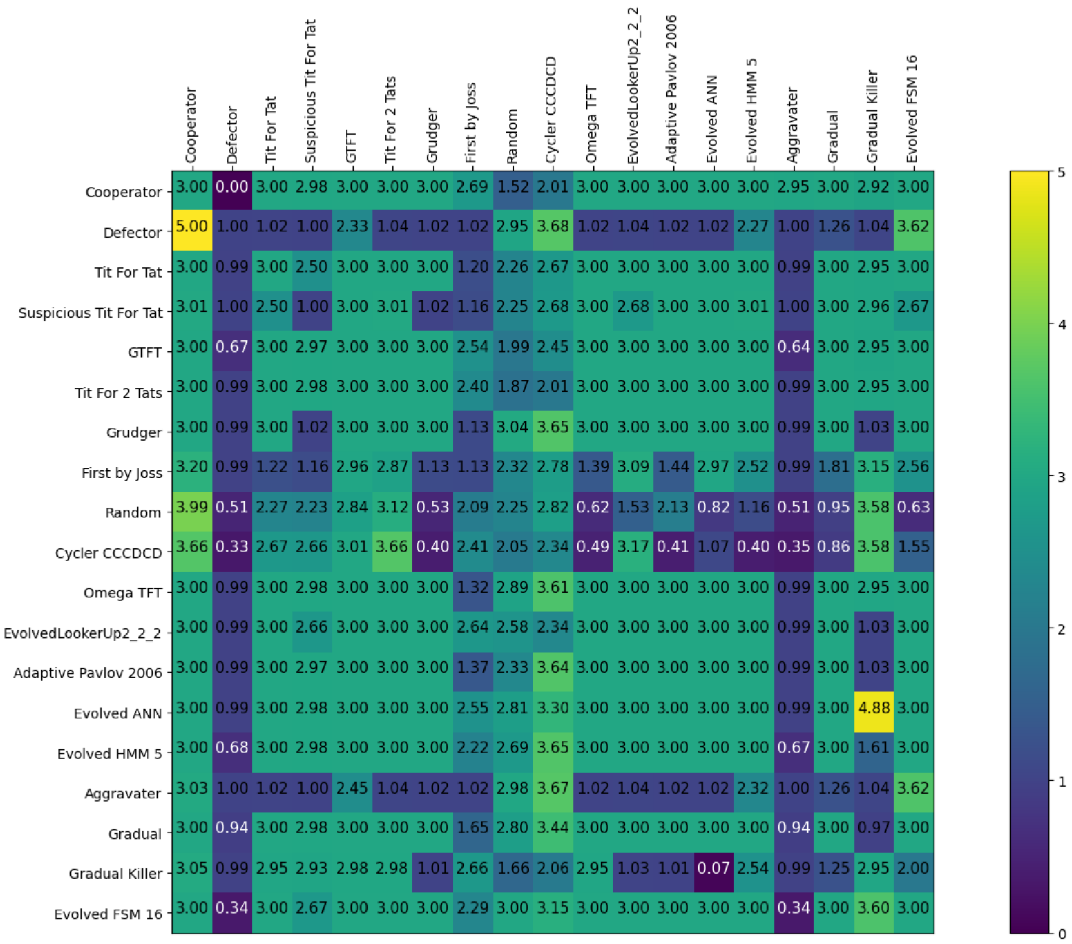
Jednou z nejznámějších a nejúspěšnějších strategií v IPD je strategie tit-for-tat. Tato strategie začíná spoluprací a v dalších kolech opakuje soupeřův tah. Tuto strategii do turnajů přihlásil americký matematik a psycholog Anatol Rapoport a navzdory své jednoduchosti byla schopna vyhrát první i druhý Axelrodův turnaj (Axelrod 1984). Úspěch **TFT** může být překvapivý, ale tvoření vztahů na základě reciprocity je i z historického hlediska přirozená lidská vlastnost – důkaz lze spatřit již ve starozákonném rčení *„oko za oko, zub za zub"*.

Na základě analýzy [1] těchto dvou turnajů definoval Axelrod čtyři vlastnosti, které by strategie měla mít, aby byla úspěšná. Dobrých výsledků dosáhne strategie, která je [8]:

- **Milá** – tj. strategie, která nikdy nezradí jako první. Pokud *„milá"* strategie volí zradu, tak jen z toho důvodu, že již byla zrazena soupeřem v některém z předchozích kol. V prvním turnaji bylo z 15 strategií 8 *„milých"* a tyto strategie obsadily prvních 8 míst. V druhém turnaji bylo 39 z 63 strategií milých a na prvních 15 příčkách se umístila pouze jedna strategie, která nebyla *„milá"* (konkrétně skončila na 8. místě). Celková korelace mezi tím, zda byla strategie *„milá"*, a jejím skóre byla v druhém turnaji vyčíslená na 0,58. Opakem milé strategie je tzv. *„bezohledná"* strategie.
- **Schopna odplaty** – Axelrod tvrdí, že úspěšná strategie nesmí být slepý optimista. Na zradu by tak měla vždy reagovat, jinak hrozí, že bude zneužita *„bezohlednou"* strategií. Příkladem může být hra **ALLC** s **ALLD**, kdy **ALLC** i navzdory opakovaným zradám soupeře pokračuje ve spolupráci, což vede k nejhorší výplatě pro ALLC a zároveň nejlepší výplatě pro **ALLD**. Reakce však nemusí přijít bezprostředně po první zradě.
- **Odpouštějící** – kromě schopnosti oplácet soupeřovy zrady, by strategie měla být schopná soupeři zradu odpustit, jestliže soupeř projeví zájem o znovuobnovení vzájemné spolupráce. Tímto způsobem strategie dokáže zastavit koloběh vzájemných odplat za účelem maximalizace výplaty. Z této vlastnosti nepřímo plyne, že hráč by se spíše měl zaměřit na dosažení co nejlepší výplaty, než se snažit vyhrát danou hru.
- **Srozumitelná** – tato vlastnost usnadňuje soupeřům předvídat chovaní dané strategie, což v kombinaci s předchozími vlastnostmi přispívá ke vzniku a udržení trvalé spolupráce (pokud je o ni oboustranný zájem).

Tyto vlastnosti jsou i dnes brány jako dobré doporučení při vytváření nových strategií. Navzdory tomu, že **TFT** disponuje všemi zmíněnými vlastnostmi a dokáže poměrně obstojně hrát proti většině soupeřů, i tato strategie má jisté slabiny. Jednou z nich je, že se špatně vyrovnává se soupeřovou zradou. Například pokud hraje **TFT** proti **STFT**, tak od prvního kola můžeme pozorovat, jak nebezpečný může být koloběh vzájemných odplat. Historie akcí bude vypadat následovně {(C;D), (D;C), (C;D),(D;C) …}. Pokud tedy budeme uvažovat výplaty dané *Tabulkou 4*, pak výplaty **TFT**, resp. **STFT** budou (0,5,0,5…) resp. (5,0,5,0…), což při standardním turnaji vede k průměrné výplatě 2,5 pro oba hráče. Kdyby však proti **STFT** hrála

TFTT, tak k danému koloběhu odplat nedojde. Sice je tato interakce při běžných pravidlech turnaje mírně výhodnější pro **STFT** – průměrná výplata pak činí 3,01 – i tak **TFTT** s průměrem 2,98 proti **STFT** dopadne lépe než klasické **TFT.** Tato slabina vede k horším výsledkům **TFT** v turnajích se šumem – zde se vlivem šumu může **TFT** zacyklit v kruhu odplat, i když hraje se svým klonem. Právě ve snaze zlepšit výsledek **TFT** v turnajích se šumem bylo vyvinuto několik alternativ k původní **TFT,** jako například **GTFT** nebo **TFTT**, které občasnou zradu odpouští. Další typ oponenta, proti kterému dosahuje **TFT** horších výsledků, jsou stochastické strategie, tj. strategie které spolupracují/zrazují s určitou pravděpodobností (typicky **RAND**). Pro lepší představu výsledků zápasů různých algoritmů nám poslouží *Obrázek 2* – heatmapa výsledků vybraných strategií. Jde o grafickou reprezentaci dat pomocí škály barev, kde každému výsledku zápasu přísluší určitá barva. Jednotlivé odstíny barev na heatmapě značí různé úrovně výplat. V našem případě tmavé tóny odkazují na nižší hodnoty průměrné výplaty, světlejší odstíny čtverce pak značí vyšší úroveň průměrné výplaty. Každý čtverec představuje výsledek jednoho zápasu. Heatmapa je řádkově orientovaná, tzn. hodnota příslušného čtverce odpovídá průměrné výplatě za kolo zápasu, kterou dosáhla strategie v daném řádku.



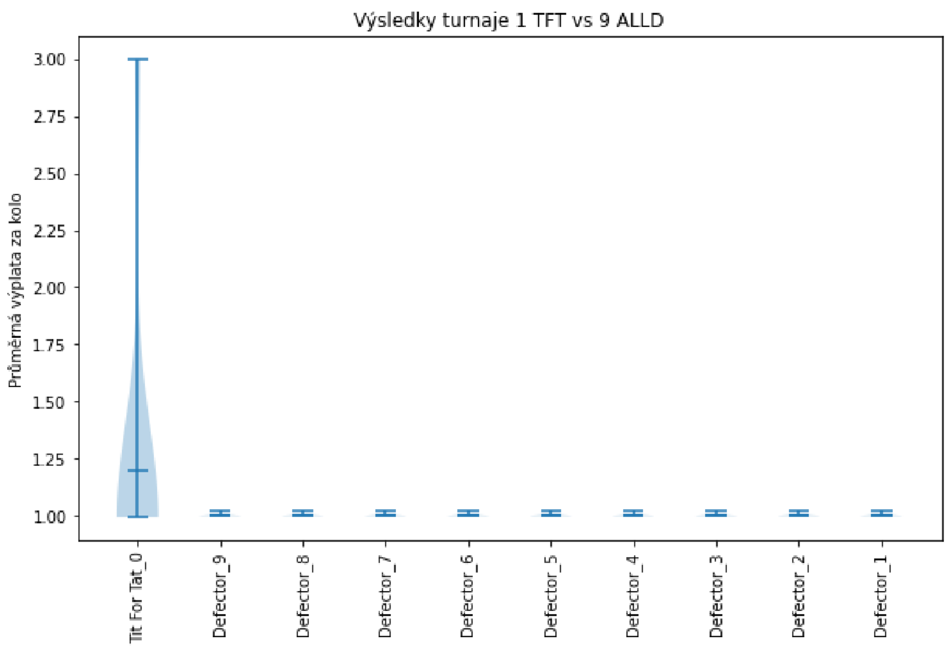
Obrázek 2: Heatmapa zápasů vybraných strategií

Výsledné umístnění strategie v turnaji závisí na tom, jak se strategii daří v jednotlivých zápasech. Úspěch strategie v zápase závisí na její schopnosti optimálně reagovat na soupeřovy akce. Zápasy mezi „milými“ strategiemi končí průměrnou výplatou 3 bodů. Rozhodujícím faktorem při pořadí „milých“ strategií ve výsledku turnaje je jejich schopnost interagovat se strategiemi, které nejsou „milé“. Aby strategie byla schopna optimálně reagovat na svého soupeře, musí v ideálním případě znát soupeřovu strategii. Jedinou přípustnou možností, jak může strategie identifikovat svého oponenta, je skrze historii minulých kol. Tato identifikace je poměrně složitá, zejména pokud nechceme zradit jako první a náš soupeř hraje některou z „milých“ strategií. Pokud nezradíme, nejsme schopni rozlišit, zda hrajeme s **ALLC**, **GRIM**, **TFT,** nebo jakoukoliv jinou z „milých“ strategií. Předpokládejme, že naším soupeřem je jeden z algoritmů z předchozí věty, a my se rozhodneme zradit, abychom otestovali našeho soupeře. Jaký výsledek může nastat? V ideálním případě bude naším soupeřem **ALLC,** a nám se podaří získat místo tří bodů pět. Trochu horší scénář nastane, když budeme hrát proti **TFT**. Zde se dostaneme do již popsaného koloběhu vzájemných odplat, a abychom se vrátili ke vzájemné spolupráci, budeme muset dvakrát po sobě spolupracovat, což sice obnoví důvěru mezi námi a **TFT**, ale celkový výsledek bude pro oba horší, než kdybychom nezkoušeli zradit. Nejhorší scénář pak představuje situace, kdy zradíme **GRIM**. V tomto případě je veškerá snaha o znovuobnovení spolupráce zbytečná, a nám nezbude nic jiného, než se smířit s výplatou 1 bodu po zbytek kol v daném zápase[5]. Dle zdroje [8], pokud si nejsme jistí, zdali budou v turnaji počtem převládat strategie typu **GRIM,** nebo typu **ALLC,** tak je opět lepší počkat na zradu soupeře, ale nebýt tím, kdo zradí jako první. I přesto lze zachovat myšlenku identifikace soupeře. Na podobném principu funguje strategie **APavlov**, která svým jednoduchým identifikačním mechanismem zvítězila v round-robin turnaji na sympoziu *IEEE 2005 Symposium on Computational Intelligence and Games* [8] [22]. Strategii **APavlov** řadíme do skupiny strategií využívající principů umělé inteligence. V posledních letech můžeme pozorovat nárůst podobných strategií, které využívají mechanismy strojového učení, učení na základě zpětné vazby (v angličtině *„reinforcement learning“*), umělých neuronových sítí, skrytých markovských řetězů nebo fuzzy logiky. V standardním turnaji z roku 2017 popsaném ve zdroji [18] ze 176 přihlášených strategií (z nichž 53 bylo stochastických) na prvních 11 místech skončili právě strategie, které díky zmíněným principům byly natrénovány tak, aby maximalizovali své skóre v turnaji. Tyto nové strategie jsou úspěšné i v turnajích se šumem, a také v evolučním přístupu. Je dobré zmínit, že zápasy nových strategií

[5] podobný princip používají strategie Adaptive nebo Mystrategy které ovšem v knihovně, kterou používáme chybí nebo jsou chybně implementovány

(Evolved_lookerup_2_2_2 , Evolved_ANN, Evolved_HMM5 …)[6] s klasickými strategiemi jako jsou **TFT**, nebo i **GRIM** končí remízou a průměrnou výplatou 3 bodů. Nejúspěšnější strategie nikdy nezradí jako první, i přesto jsou schopné využít slabších strategií, které se o zradu pokusí.

Výsledek turnaje obecně závisí na počtu a vlastnostech přihlášených strategií. Často můžeme pozorovat, že počet „milých“ strategií je větší, než „bezohledných“. Otázka tedy je, co by se stalo, pokud bychom zorganizovali turnaj, kde by převládaly bezohledné strategie? Pro ilustraci, jak tato situace dopadne, použijeme trochu extrémní případ, a to, když se turnaje zúčastní pouze jedno **TFT**, jako zástupce milých strategií, a devět **ALLD**. Výsledek tohoto turnaje je na *Obrázku 3* . V tomto kontextu je violinplot chápán jako hustota průměrných výplat (znázorněná symetricky kolem osy y). Pro lepší orientaci v něm lze zaznačit také průměr (zde průměrná výplata za kolo turnaje) a horní a dolní vous.



Obrázek 3:Výsledek turnaje 1 ***TFT*** *s 9* ***ALLD***

Jak můžeme pozorovat na *Obrázku 3*, **TFT** je úspěšné i v situaci, kdy 90 % přihlášených strategií jsou strategie, které nikdy nespolupracují. To je způsobeno tím, že **ALLD** v zápasech mezi sebou ve všech kolech získají pouze 1 bod. **TFT** však v zápase se sebou získá 3 body a v zápasech proti **ALLD** sice prohraje první kolo, ale v dalších kolech se nenechá zneužívat, což vede průměrné výplatě 0,99 bodu pro **TFT** a 1,02 bodu pro **ALLD**. Axelrod ve své knize [1] uvádí, že při daných výplatách T,R,P,S stačí, aby 5 % hráčů bylo typu **TFT** k tomu, aby byli

[6] Popis těchto strategií lze nalézt v literatuře [18]

v daném turnaji úspěšnější než strategie typu **ALLD**. Poznamenejme, že pokud by místo algoritmů hráli proti sobě skuteční hráči (lidé), pro dosažení obdobných výsledků by museli alespoň 2 hráči hrát **TFT**. Dále je dobré mít na paměti, že aby strategie byla úspěšná v turnaji, kde převládají bezohledné strategie, musí být schopná zradu oplácet. Pokud by místo **TFT** v tomu turnaji figurovala strategie **ALLC**, skončila by poslední, jelikož 3 body při vzájemné interakci nevykompenzují 0 bodový zisk v ostatních zápasech. Zároveň strategie **ALLD** má v zápase proti **ALLC** průměrnou výplatu 5 bodů za kolo, narozdíl od **TFT**, se kterým v průměru získala 1,02 bodu. S ohledem na tuto skutečnost je přirozené, že ve většině turnajů převládají milé strategie.

Mimo procentního zastoupení milých strategií může turnaj ovlivnit účast skupinových strategií. Tento typ strategií byl poprvé představen týmem ze Southamptonské univerzity vedeným profesorem N. Jenningsem na jednom z turnajů opakovaného vězňova dilematu z roku 2004 [8], kde obsadily první 3 pozice. Myšlenka **SGS** a podobných skupinových strategií je v podstatě jednoduchá – vybrat několik členů skupiny, kteří budou dosahovat nadstandardních výsledků na úkor ostatních členů skupiny. Zároveň hraním **ALLD** se strategiemi, které nepatří do skupiny snižují jejich průměrné skóre. Skupinové strategie mají značnou výhodou oproti strategiím, které hrají samy za sebe. Z toho důvodu se pozdější turnaje liší v tom, zda povolují účast skupinovým strategiím či nikoliv.

Shrnutí

Počáteční úspěch **TFT** v prvním Axelrodově turnaji vedl ke vzniku různých alternativ **TFT** s cílem překonat **TFT,** avšak poté co **TFT** vyhrála i druhý turnaj byla považovaná za nejlepší v round-robin turnajích bez šumu. Podrobnou analýzu úspěchu **TFT** a výsledků ostatních strategií z prvních dvou Axelrodových turnajů lze nalézt v [1]. Později se ukázalo, že strategie, které dokážou identifikovat svého oponenta, a přizpůsobit tomu své rozhodovaní bez toho, aby vyvolaly koloběh zrad, dokážou ve většině turnajů překonávat **TFT**. V současné době nejlepších výsledků v turnajích [18] (bez šumu i se šumem) dosahují strategie, které využívají principů umělé inteligence a jsou natrénovány tak, aby optimálně reagovaly na většinu známých strategií. Zároveň milé strategie obsazují první příčky v turnajích, pokud úspěšnost v turnaji hodnotíme na základě dosaženého skóre (ať už celkového nebo průměrného). Ovšem pokud bychom úspešnost hodnotili na základě počtu vyhraných zápasů, první příčky obsadí strategie typu **ALLD** [18]. Tato skutečnost plyne z toho, že zápasy milých strategií končí většinou remízou, a v zápasech milých strategií proti **ALLD**, a jí podobným strategiím, milé strategie kvůli spolupráci v prvním kole zápas prohrají, i když budou po zbytek hry také zrazovat. Pokud jsou milé strategie schopny odplaty, tak **ALLD** sice vyhraje zápas s průměrem o málo vyšším, než je P – hodnota odpovídající vzájemné zradě, zatímco remízy mezi milými strategiemi vedou k výplatám blízkým hodnotě R – odměny za vzájemnou spolupráci. Rozdílné výsledky v umístnění strategií v závislosti na kritériu, kterým turnaj vyhodnocujeme, mohou složit jako reprezentace rozdílu mezi strategiemi, které využívají Nashovu rovnováhu jednokolové hry a strategiemi, které volí Paretovsky optimalní akce. Pokud nám záleží na počtu vyhraných zápasů, vítězí strategie, které se drží Nashovy rovnováhy jednokolové hry. Naproti tomu v počtech získaných bodů pak vyhrávají strategie, které upřednostňují Paretovsky optimální výsledek.

5 Příklady situací z reálného světa

Rozhodnutí, které musí vězni učinit, je problematické zejména ze dvou důvodů:

1. Individuálně racionální rozhodnutí je v rozporu s kolektivně preferovaným řešením

2. Krátkodobě výhodné rozhodnutí je v rozporu s dlouhodobě přínosnějším rozhodnutím

Toto dilema s jiným příběhem můžeme pozorovat v mnohých oblastech každodenního (nejen lidského) života. V následující kapitole rozebereme několik situací optikou Vězňova dilematu. Předtím, než se pustíme do jednotlivých příkladů, si dovolujeme čtenáře upozornit, že tyto příklady představují zjednodušený model značně komplikovanější reality. Proto následující příklady nemusí zahrnovat všechny faktory, kterými je naše rozhodování v daných situacích ovlivněno, ale věnujeme se prvkům, které umožňují posuzovat toto rozhodnutí v kontextu vězňova dilematu.

Než se pustíme do samotných příkladů, krátce poznamenejme, že opětovaná spolupráce zní na první pohled docela pozitivně a pro aktéry v daném konfliktu také pozitivní je nicméně spolupráce některých entit má negativní dopady na celou společnost. Například vzájemná spolupráce Alice a Boba vede k obelstění justičního systému a tím ke zvýšení kriminality v dané oblasti, spolupráce duopolních firem na stanovení vysoké ceny nedává prostor spotřebiteli uvažovat nad levnější alternativou atd. V jistých případech tedy hledáme způsob, jak spolupráci podpořit (existence revizorů v příkladu s veřejnou dopravou) a jindy zase jak tuto spolupráci eliminovat (například existence antimonopolních úřadů).

Inspirací pro příklady v této kapitole byla zejména literatura: [1],[2],[9],[13],[15],[19].

5.1 Ekonomická oblast

5.1.1 Stanovení ceny produktu v prostředí s nedokonalou konkurencí

V případě dokonalé konkurence je na trhu vetší počet firem s malým podílem na celkové nabídce a tím pádem i zanedbatelným vlivem na ceně daného produktu. Model dokonalé konkurence je v praxi téměř nedosažitelný, proto je v rámci moderní ekonomické teorie používán jako srovnávací model pro jiné, reálnější, typy tržních struktur. Srovnání jednotlivých tržních struktur uvádíme v *Tabulce 5*. Blíže si rozebereme pouze problematiku nedokonalé konkurence, konkrétně oligopolu. Více informací o jiných tržních strukturách lze nalézt například v literatuře [7],[15].

Typ tržní struktury		Počet firem	Charakteristika produktu	Vliv firmy na cenu
Dokonalá konkurence		Velký počet malých firem	Homogenní (stejnorodý)	Žádný
Nedokonalá konkurence	Oligopol	Malý počet firem s výrazným tržním podílem	V různé míře diferenciovaný	Částečný
	Monopolistická konkurence	Velký počet malých firem	Diferencovaný	Částečný
	Monopol	Jedna	Specifický (bez blízkých substitutů)	Silný

Tabulka 5: Typy tržních struktur. Přebráno ze zdroje [7]

Oligopolní tržní struktura se vyznačuje malým počtem producentů, kteří si vzájemně konkurují, na rozdíl od tržního prostředí s dokonalou konkurencí. Z malého počtu firem v odvětví plyne, že jednotlivé firmy mají značný podíl na celkové nabídce v odvětví. Proto rozhodnutí o velikosti produkce a ceně produktu má dopad nejen na ziskovost této firmy ale také na výsledky hospodaření ostatních firem v tomto odvětví. O to znatelnější je tento dopad v případě, kdy jsou na trhu pouze dvě konkurenční společnosti *tzv. duopol*. V duopolistické konkurenci má spotřebitel na výběr pouze mezi dvěma produkty, které jsou buď *homogenní*[7] nebo *diferencované*[8]. V podmínkách této poznané závislosti lze chování oligopolistů považovat hru, při které se snaží oba hráči dosáhnout co nejlepších výsledků s ohledem na možné akce svého rivala. Tím se plynule dostáváme k prvnímu příkladu na aplikaci vězňova dilematu – *stanovení ceny produktu v duopolu.*

V daném odvětví jsou dvě společnosti (**A** a **B**), které mají možnost zvolit vysokou nebo nízkou cenu. Pokud obě společnosti zvolí vysokou cenu, získají slušný zisk ve výši 3 milionů dolarů. Pokud obě společnosti zvolí nízkou cenu, každá získá výnos pouze 2 miliony dolarů. Pokud však jedna společnost zvolí vysokou cenu a druhá nízkou, společnost s nízkou cenou získá 4 miliony dolarů, protože získá část zákazníků od konkurenční společnosti. Společnost s vysokou cenou vydělá pouze 1 milion dolarů. I když by bylo nejlepší pro obě společnosti zvolit vysokou cenu, existuje zde obava ze „zrady“. Pokud společnost **A** zvolí vysokou cenu, společnost **B** jí překoná a získá 4 miliony dolarů místo 3 milionů dolarů. Pokud společnost **A** zvolí nízkou cenu, společnost **B** by měla učinit totéž – v tomto případě získají obě společnosti 2 miliony dolarů

[7]Všichni výrobci nabízejí stejné produkty bez jakýchkoli odlišností.
[8]Výrobci nabízejí produkty s odlišnostmi v kvalitě, designu, značce nebo jiných faktorech.

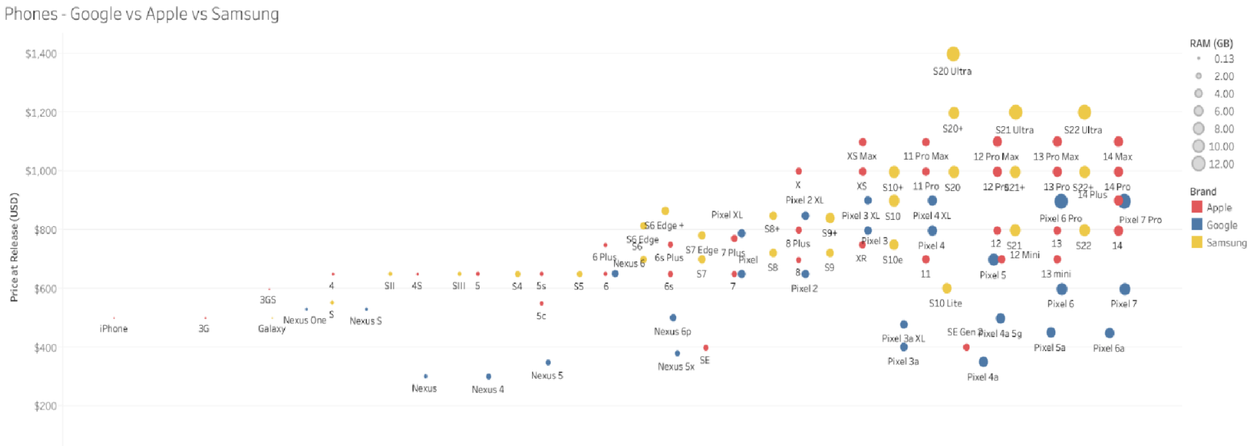
namísto jednoho milionu dolarů. To samé platí i pro společnost **A** – pokud zvolí nízkou cenu, obě společnosti získají 2 miliony dolarů a neriskují tak zisk pouze 1 milionu dolarů. Je patrné že volba vysokých cen odpovídá volbě spolupracovat (resp. mlčet) a stanovení nízkých cen zase odpovídá strategii zradit (resp. přiznat se). Tuto skutečnost lze ilustrovat i následující tabulkou výplat kde jednotlivé hodnoty představují zisk firem v milionech dolarů. Tato tabulka také splňuje podmínky z předchozích kapitol.

Firma		**B**	
	Akce	Vysoké ceny	Nízké ceny
A	Vysoké ceny	3;3	1;4
	Nízké ceny	4;1	2;2

Tabulka 6: Hypotetické zisky firem (v milionech $)

Poznámka: V tomto konkrétním případě předpokládáme že i přes cenový rozdíl část zákazníků nakoupí u „dražší firmy". Toto obecně platit nemusí a mohli bychom se setkat i se situací, kdy v matici výplat narazíme na nulové nebo záporné hodnoty. Tuto skutečnost lze odůvodnit tím, že firma, která nechá vyšší ceny, ale neprodá plánovaný počet výrobků už musela předem investovat do vývoje, výroby a marketingu a pokud tržby z prodeje nepokryjí tyto náklady ocitne se firma ve ztrátě. Dalším předpokladem je, že se jedná o přibližně stejně silné společnosti, a tedy když stanoví obě stejné ceny tak přesná polovina zákazníků nakoupí u společnosti **A** a druhá polovina u společnosti **B**. I tento předpoklad nemusí být nutně splněn i tak můžeme za určitých podmínek tuto situaci řešit jako vězňovo dilema (viz asymetrické výplaty).

Jako konkrétní příklad, se kterým se běžně setkáváme v reálném životě, můžeme uvést ceny smartphonů značky Samsung a Apple v porovnání s cenami ostatních smartphonů se srovnatelným hardwarem. Samsung a Apple zde můžeme chápat jako dvojici firem tvořící duopol na trhu. Nastavení cen těchto firem proto silně ovlivňuje firmy stejného odvětví na trhu, neboť ony samy nemají dostatečné prostředky na ovlivnění cen, a proto nemají možnost dosáhnout takové ziskovosti jako firmy duopolní. Ceny jednotlivých vlajkových lodí těchto značek v průběhu let, barevně rozlišených podle značek, jsou graficky znázorněny na *Obrázku 4*. Můžeme pozorovat, že smartphony od značek Samsung a Apple jsou v letech vydání daného modelu na podobné úrovni, která je ovšem většinou vyšší, než modely od značky Google. Samsung a Apple byli mezi prvními kdo vyráběl „chytré telefony" a vedoucí pozici si udržují dodnes, i když se zde najdou firmy, které se snaží konkurovat cenou (a tím získat víc zákazníků). Renomé lídrů v této oblasti dovoluje Applu a Samsungu udržovat vyšší ceny, což odpovídá vzájemné spolupráci těchto firem.



Obrázek 4: Srovnání vlajkových lodí chytrých telefonů od firem Apple, Google a Samsung. Osa x odpovídá datu vydání daného modelu, na ose y je vykreslena cena modelu v době vydání. Zdroj[24]

5.1.1.1 Asymetrické výplaty

Vysvětlit jádro problému, které vězňovo dilema popisuje je samo o sobě náročné, a proto se většinou při ilustracích používá symetrická výplatní matice. Tato symetrie je tak jakýmsi tolerovaným zjednodušením reálné problematiky. Ostatně již v úvodu jsme zmínili, že příklady, které zde rozebíráme jsou značně simplifikovaným odrazem reality. Jednou z cest, jak naše modely přiblížit realitě je uvažovat, že volba stejné akce nebude mít nominálně stejný přínos pro obě strany konfliktu. V případě, že se bude jednat o firmy s rozličnou tržní silou, lze pro znázornění jejich zisků použít matici v následujícím tvaru:

Firma		**B**	
	Akce	Vysoké ceny	Nízké ceny
A	Vysoké ceny	6 ; 3	2 ; 4
	Nízké ceny	8 ; 1	4 ; 2

Tabulka 7: Výplatní matice při asymetrických výplatách

V této výplatní matici přepokládáme, že nehledě na scénář, který nastane, tak firma **A** bude mít dvojnásobně víc zákazníku, než by měla firma **B** ve stejné situaci.

Nesmíme však zapomenout dodat, že zde platí stejné podmínky pro velikost výplat, jako jsme je definovali při symetrické verzi hry v kapitole 2.1, avšak nyní dané nerovnosti musí splňovat výplaty obou hráčů. $T_i > R_i > P_i > S_i$ pro $i=A,B$, resp. obecně pro $i \in \boldsymbol{P}$.

Hráč		B	
	Akce	Spolupráce	Zrada
A	Spolupráce	R_A ; R_B	S_A ; T_B
	Zrada	T_A ; S_B	P_A ; P_B

Tabulka 8: Obecné hodnoty výplatní matice v asymetrické verzi vězňova dilematu

5.1.2 Investice do inovací

Podobně jako v předchozím příkladu se budeme věnovat tržnímu soupeření firem. Tentokrát se však zaměříme nato zda se firmám oplatí alokovat své finanční prostředky do zlepšování svých produktů případně vývoje nových produktů (aut, počítačů, léků…).

Firma		B	
	Akce	Neinvestovat	Investovat
A	Neinvestovat	6;6	1;8
	Investovat	8;1	4;4

Tabulka 9: Výplatní matice při možných akcích – Investovat/Neinvestovat

Pokud se firma rozhodne inovovat tak krátkodobě bude mít nižší zisky, protože bude financovat vlastní výzkum. Kromě snížených zisků (což by v případě akciové společnosti mohlo vést ke snížení vyplacené dividendy a tím pádem i poklesu zájmu investorů), tato společnost také riskuje, že výzkum povede do tzv. slepé uličky a všechny investované prostředky budou nenávratně pryč. Ovšem pokud bude výzkum úspěšný, a nový produkt bude dostatečně revoluční, tak se může stát, že tato firma získá dominantní postavení na trhu, a navíc si bude moct stanovit vyšší marži, která jí zajistí vyšší zisky.

5.2 Sociologická oblast

5.2.1 Omluva kamarádovi

Dva kamarádi se pohádají a oba čekají, kdo se omluví první. Překonat vlastní hrdost a přijít s omluvou jako první vyžaduje značnou dávku sebezapření a místy také ustoupení ze svých nároků, které mohly být příčinou samotného konfliktu. Pokud snaha o řešení konfliktu není opětovaná protistranou, pak tato míra diskomfortu odpovídá profilu akcí (*spolupracovat, zradit*) resp. (*zradit, spolupracovat*), kde v tomto případě je omluva ekvivalentem spolupráce, a pasivní přístup (kamarád, který pouze čeká na omluvu) analogií ke zradě z klasického dilematu – tato strana nemusí ustupovat ze svých nároků, čili je pro něj tato možnost nejvýhodnější. Avšak pokud se neomluví ani jeden, přátelství se rozpadne. Pokud však na příští setkaní oba dorazí s cílem se omluvit tomu druhému, celý spor skončí šťastným koncem („odměna za vzájemnou spolupráci“).

Kamarád		**Boris**	
	Akce	Omluvit se	Neomlouvat se
Adam	Omluvit se	3;3	1;4
	Neomlouvat se	4;1	2;2

Tabulka 10: Důsledky rozhodnutí dvou kamarádů vyjádřeny užitkem z těchto rozhodnutí

5.2.2 Rande

Dva známí (klidně opět Alice a Bob) se domluví, že si spolu večer někam vyrazí. Ani jeden si však není jist, zda se jedná o schůzku dvou kamarádů (strategie „zradit“) nebo rande (strategie „spolupracovat“). Alice i Bob tedy vybírají ze dvou možností, jak k danému večeru budou přistupovat, vzhledem k tomu, že neměli možnost se předem domluvit, o jaký typ schůzky se jedná. Pokud to Alice bere jako rande a Bob jako přátelskou schůzku, musí Alice vyjít ze své komfortní zóny – dělá první kroky, přebírá na sebe riziko , že se nedočká požadované reakce u Boba, zatímco Bobovi tato zvýšená pozornost může lichotit. Pokud daný večer oba pojmou jako přátelskou schůzku, dosáhnou poměrně dobré výplaty, ale mnohem lepší by pro oba bylo, kdyby tento večer brali jako rande.

Účastník		**Bob**	
	Akce	Rande	Schůzka
Alice	Rande	4;4	0;6
	Schůzka	6;0	2;2

Tabulka 11: Důsledky rozhodnutí Alice a Boba vyjádřeny pomocí užitku

5.2.3 Hodnocení na základě „nucené distribuce“

Učitel se rozhodne hodnotit studenty nikoliv podle celkových procent získaných z testu, ale na základě škály dosažených výsledků všech studentů napsavších daný test. Prakticky to znamená, že hodnotící škálu učitel tvoří až poté, co zná výsledky všech studentů, a známky přiděluje od nejlepšího výsledku. Za normálních okolností by známka A odpovídala výsledku 90 % a výše, ale pokud nejlepší žák napíše test na 85 bodů ze 100, nedosáhl by nejlepší známky nikdo z dané třídy. V tomto případě může učitel stupnici posunout a známku A dát studentům, kteří získali 90 a více % bodů z 85, tedy nejlepšího dosaženého výsledku. Na druhou stranu, při běžném hodnocení je známka F – nedostatečně – udělována za výsledek horší než 50 %. Pokud ovšem nejhorší dosažený výsledek v daném testu bude například 64 bodů ale většina žáků dosáhne více než 90 bodů, může se učitel rozhodnout stupnici posunout tak, aby nejlepší známku získalo pouze 10 % nejlepších studentů, čímž se stupnice posune a výsledek 64 % nebude nejhoršímu studentovi ke splnění zkoušky stačit, i když by při konvenčním známkování testem prošel. Studenti tak v tomto případě mohou svůj čas před testem strávit buď přípravou na tento test, nebo ho mohou věnovat jinému předmětu, případně svým volnočasovým aktivitám. Uvažujme, že se studenti před testem domluví, že se na test učit nebudou. Analogií ke vzájemné spolupráci dvou vězňů je pak situace, kdy se všichni studenti rozhodnou neučit se na test. Racionálně smýšlející student, který tuší, že se jeho kolegové na test nepřipraví, tak může učením se na test (*zradou*) výrazně zvýšit své šance na úspěch v dané zkoušce tak, že mu zisk – dobrý výsledek u zkoušky – vynahradí čas ztracený učením. Ovšem pokud se budou všichni učit na daný test, je pravděpodobné, že dosáhnou stejných výsledků jako v situaci, kdy by se nepřipravoval nikdo, ale s tím rozdílem, že všichni obětovali svůj čas danému předmětu, nikoliv zábavě, což představuje ekvivalent trestu za vzájemnou zradu dvou vězňů.

5.3 Socioekonomická oblast

5.3.1 Charitativní akce

V malém městě sídlí oblíbený divadelní spolek, který svůj provoz hradí ze vstupného na představení, které je ovšem dobrovolné. Návštěvníci se tak mohou rozhodnout, zda své oblíbené umělce finančně podpoří, anebo si jen užijí představení, aniž cokoliv zaplatí. V případě, že se návštěvníci rozhodnou nepřispívat, divadelní spolek bude čelit finančním potížím, v jejichž důsledku bude muset omezit své aktivity. Pokud by spolek opakovaně nevybral dostatečné množství financí, musel by ukončit svou činnost. To by mohlo mít negativní dopad na umělce, kteří by mohli být nuceni hledat jiné způsoby, jak si zajistit živobytí, a také na místní komunitu, která by přišla o kulturní zážitky a přínosy, které divadelní spolek poskytuje. Na druhou stranu, pokud se návštěvníci rozhodnou finančně podpořit divadelní spolek, mohou společně udržet provoz představení a zajistit, že umělci budou mít možnost se dále rozvíjet a poskytovat kvalitní kulturní zážitky. V kontextu tohoto příkladu představuje volba přispět na představení akci *spolupracovat* a volbu zhlédnout představení zadarmo můžeme chápat jako akci *zradit*.

Tento příklad ukazuje, jak vězňovo dilema vstupuje do rozhodování návštěvníků divadla. Jejich individuální rozhodnutí ovlivňuje celkovou situaci divadelního spolku, potažmo také kulturní život města. Návštěvníci se musí rozhodnout, zda budou jednat ve prospěch skupiny a přispějí k udržení divadelního spolku, nebo zda budou upřednostňovat svůj individuální prospěch a platit nebudou.

5.3.2 Platba za veřejnou dopravu

Dalším příkladem, kdy se určitá skupina lidí skládá na provoz nějaké služby, je platba za hromadnou dopravu ve světě, ve kterém by neexistovali revizoři. A pro dopravní podnik by opravdu bylo zbytečné financovat revizory, kdyby si populace dostatečně uvědomovala to, že za cenu lístku dopravní podnik financuje údržbu, provoz a inovaci vozového parku, stejně tak jako musí najímat lidi, kteří mají tyto činnosti na starost. Jistě, pokud zde není revizor, tak můžeme uvažovat, že jízdné nezaplatíme a že na dopravu to nebude mít vliv, protože provoz dopravního podniku zaplatí poctiví cestující, kteří si lístek koupí. Ovšem pokud se většina cestujících rozhodne nepřispívat a nezaplatí si jízdné, vzniká situace, kdy výdaje dopravního podniku nebudou dostatečně kryty příjmem z cestovného. Tímto způsobem se podnik může dostat do finančních potíží a hrozí mu dokonce zkrachování. V případě zkrachování by hromadná doprava v dané oblasti přestala fungovat a nikdo by nemohl tuto službu využívat, protože by ji nebylo ekonomicky výhodné provozovat. Naopak pokud budou všichni poctiví, tak bude mít dopravní podnik dost financí na zlepšování svých služeb, což se může projevit například novými trasami městské dopravy, vyšší frekvencí stávajících spojů nebo také zvýšeným komfortem přepravy v důsledku nakoupení modernějších strojů.

V kontextu vězňova dilematu budeme tedy poslední zmíněnou situaci chápat jako profil akcí (*spolupracovat, spolupracovat*), což z dlouhodobého hlediska vede ke kolektivně většímu užitku než situace, kdy dopravní podnik zkrachuje, což by odpovídalo profilu (zradit, zradit), kde ovšem pořád „nějaký užitek“ je, protože lidi alespoň ušetří za cestovné. Užitky z jednotlivých situací jsou zachyceny v následující tabulce:

Jednotlivec/kolektiv		**K/J**	
	Akce	Koupit si lístek	Jet na černo
J/K	Koupit si lístek	9;9	3;12
	Jet na černo	12;3	6;6

Tabulka 12: Výplatní matice příkladu s veřejnou dopravou

V praxi se však nemůžeme spoléhat na to, že všichni lidé jsou poctiví, a proto jsou revizoři a pokuty za jízdu na černo důležitým faktorem pro funkčnost veřejné dopravy.

Oba příklady ze socioekonomické oblasti ukazují platnost tvrzení, ze začátku této kapitoly, a to, že individuálně racionální rozhodnutí je v rozporu s kolektivně preferovaným řešením. Pro jednotlivce v obou výše zmíněných příkladech je výhodnější akce *zradit*, tedy využít služeb divadla či hromadné dopravy bez zaplacení, nicméně pokud tuto akci zvolí většina lidí, divadelní spolek či dopravní podnik dříve či později přijde o prostředky na svůj provoz a společnost přijde o jejich služby.

5.4 Geopolitická oblast

5.4.1 Závod ve zbrojení

V geopolitické oblasti se s vězňovým dilematem setkáváme v otázce obrany a zbrojení mezi různými zeměmi. Tyto země jsou nuceny vynaložit část svých rozpočtů na vojenské výdaje místo toho, aby tyto prostředky využily k vlastnímu rozvoji. Hlavní příčinou této situace je nejistota a obava z potenciální agrese ze strany ostatních zemí.

Pokud by všechny země dodržovaly mír a neočekávaly válku, mohly by své zdroje a prostředky směřovat do rozvoje vědy, technologií, obchodu nebo kultury. Bohužel, v případě, že se jedna země rozhodne zradit a zaútočí na ostatní, získá výhodu a rozšiřuje své území na úkor zemí, které nejsou připraveny se bránit. Aby ostatní země předešly podobnému riziku, musí také alokovat část svých zdrojů na zbrojení. Tímto se dostáváme do začarovaného kruhu, ve kterém zbraně slouží jako prostředek zastrašování, a nikdo si netroufá vyvolat válku, avšak za cenu toho, že prostředky vynaložené na zbrojení by mohly být využity mnohem efektivněji.

V důsledku toho se země stávají vězni vlastní nedůvěry a strachu. I když každé zemi mírová spolupráce přináší více užitku, tak kvůli obavám o vlastní bezpečnost nemusí k mírové smlouvě dojít.

5.4.2 Redukce uhlíkové stopy

Dalším problémem, kterému se na mezinárodní úrovni věnuje čím dál více pozornosti, je dopad průmyslu na životní prostředí [25]. Průmyslová revoluce představovala vznik a rozvoj průmyslu, který využíval mnohem více přírodních zdrojů než lidé v předchozích obdobích. To mělo za následek značné ekologické dopady, které se týkaly jak životního prostředí, tak i lidského zdraví. Jedním z hlavních dopadů byl nárůst znečištění ovzduší. V důsledku spalování fosilních paliv, která byla běžně používána v průmyslu, do ovzduší unikalo stále více škodlivých látek jako jsou uhlíkové plyny se sazemi. To mělo za následek zvýšení globálních teplot a také zhoršování kvality ovzduší, což má negativní vliv na lidské zdraví. Některé obecné kroky, které by mohly být učiněny, zahrnují:

- Zvýšení efektivity využití energie a surovin
- Zavádění nových technologií, které jsou šetrnější k životnímu prostředí
- Změna postupů práce, aby byly šetrnější k životnímu prostředí
- Omezení nebo zrušení produkce některých nebezpečných látek

Tyto akce však představují pro podniky dodatečné náklady a omezení jejich produkce, což se v konečném důsledku propisuje do hospodaření celého státu. Znečištění životního prostředí a globální oteplování jsou problémy, které vyžadují společnou akci všech zemí. Každá země má však tendenci přistupovat k této problematice v závislosti na svých vlastních zájmech.

Pokud by jedna země omezila svou průmyslovou produkci a snížila emise skleníkových plynů, mohla by tím přispět k ochraně životního prostředí a snížení globálního oteplování. Avšak pokud by ostatní země nejednaly stejným způsobem a nadále znečišťovaly ovzduší a produkovaly velké množství skleníkových plynů, tak by se první země dostala do nevýhodné pozice. Její průmysl by byl omezován, mohla by zaniknout pracovní místa a hospodářství by bylo narušeno. Naopak, pokud by všechny země spolupracovaly a snížily své emise skleníkových plynů, mohly by dosáhnout většího prospěchu pro životní prostředí a pro svět jako celek. Avšak existuje riziko, že jedna země by danou situaci mohla využít, tedy nadále znečišťovat ovzduší a tím těžit z výhod konkurenčního postavení.

Podobně jako v případě dilematu dvou vězňů, i v tomto příkladu je užitek z rozhodnutí jedné země omezit emise skleníkových plynů závislý na akcích ostatních zemí. Pokud všechny země spolupracují, dosahují společného prospěchu. Avšak pokud některá země jedná na vlastní pěst a neomezí své emise, ostatní země by se mohly dostat do nevýhodné pozice.

Závěr

Cílem práce bylo poskytnout náhled na problematiku vězňova dilematu. Kromě základních definic, uvedených v první části práce, nutných k pochopení celého tématu zde můžeme nalézt i souhrn strategií od historicky nejúspěšnějších po, v současné době, nejčastěji diskutované strategie. Dále je zde kladen důraz na důsledky odlišnosti těchto strategií ve vzájemné interakci.

Opakované vězňovo dilema je natolik komplexní téma, že bylo náročné vybrat, které myšlenky rozebrat v této práci, a které ne. Z toho důvodu v práci nerozebíráme úspěšnost strategií ve všech typech turnajů, ale zaměřili jsme se pouze na ten nejčastější. V průběhu práce na 4. kapitole jsem také zjistil, že ne všechny strategie v knihovně Axelrod jsou správně naprogramované. Proto jsem se snažil srovnávat pouze ty, u kterých lze výsledek snadno ověřit.

Práce na toto téma pro mě osobně znamenalo rozšíření si obzorů v oblasti teorie her. Zároveň mi poskytlo náhled na to, jak lze matematiku vidět i v běžných situacích, se kterými se ve svém životě setkávám, zejména v případě sociálních interakcí. Díky čtvrté kapitole jsem si mohl také poprvé vyzkoušet práci v programovacím jazyce Python.

Literatura

[1] Axelrod, R. M. The evolution of cooperation. Rev. ed. New York: Basic Books, 2006. ISBN 0465005642.

[2] Binmore, K. Teorie her ... a jak může změnit váš život. Praha: Argo, Dokořán s.r.o., 2014. ISBN: 978-80-7363-549-7.

[3] Dlouhý, M.; Fiala, P. Úvod do teorie her. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1273-0.

[4] Dlouhý, M.; Fiala, P. Teorie ekonomických a politických her. Praha: Oeconomica, 2015. ISBN 978-80-245-2124-4.

[5] Dušek, J. Teorie her a komparace matematických volebních modelů na komunální úrovni. České Budějovice: Vysoká škola evropských a regionálních studií, o.p.s., 2013. ISBN 978-80-87472-37-8.

[6] Chvoj, M. Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Praha: Grada Publishing, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.

[7] Jurečka, V. Mikroekonomie. Praha: Grada, 2018. ISBN: 978-80-271-0146-7.

[8] Kendall, G.; Yao, X.; Siang, Y.C. The Iterated Prisoners' Dilemma: 20 Years On. River Edge (NJ), USA: World Scientific Publishing, 2007. ISBN 9812706973

[9] Kruml, D. Vězeň to má spočítané. Lekce z teorie her. Brno: Masarykova univerzita, 2018. ISBN 978-80-210-8832-0.

[10] Maňas, M. Teorie her a její aplikace. Praha: SNTL, 1991. ISBN 800300358X.

[11] Maňas, M. Teorie her a optimální rozhodování. Praha: SNTL, 1974. ISBN 04-012-74

[12] Osborne, M.J.; Rubinstein, A. A Course in Game Theory. Cambridge (MA, USA): MIT press, 1994. ISBN 0-262-65040-1.

[13] Peregrin, J. Člověk v zrcadle teorie her. Praha: Dokořán, s.r.o., 2021. ISBN 978-80-7675-012-8.

[14] Říha, O. Základy teorie her. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1973.

[15] Samuelson, P.A.; Nordhaus, W.D. Ekonomie. Praha: NS Svoboda, 2013. ISBN 978-80-205-0629-0.

[16] Banerjee, D.; Sen, S. Reaching pareto-optimality in prisoner's dilemma using conditional joint action learning. Auton Agent Multi-Agent Syst [online] 2007, 15, 91–108 [cit. 2022-12-15]. Dostupné z: https://link.springer.com/article/10.1007/s10458-007-0020-8#Abs1

[17] Gaudesi, M.; Piccolo, E.; Squillero, G.; Tonda, A. Exploiting Evolutionary Modeling to Prevail in Iterated Prisoner's Dilemma Tournaments. IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games [online]. 2016, 8:3, 288-300. [cit. 2022-12-20]. DOI: 10.1109/TCIAIG.2015.2439061. ISSN 1943-068X. Dostupné z: https://iris.polito.it/bitstream/11583/2622370/1/Tages14.pdf

[18] Harper, M.; Knight, V.; Jones, M.; Kousovoulos, G.; Glynatsi N.E.; Campbell, O. Reinforcement learning produces dominant strategies for the Iterated Prisoner's Dilemma. PLoS ONE [online]. 2017, 12(12): e0188046. [cit. 2023-01-12]. DOI: 10.1371/journal.pone.0188046 Dostupné z: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188046

[19] Hykšová, M. Teorie her. ČVUT v Praze [online]. 2007 [cit. 2022-11-07]. Dostupné z: http://physics.ujep.cz/~jskvor/MatematikaII/AplikovanaMatematikaCVUT/Teorie%20her/hry.pdf

[20] Konečný, J. Teorie her, 1. díl. Olomoucký informatický korespondenční seminář – Olinx: výukové materiály [online]. 2018 [cit. 2022-11-25]. Dostupné z: https://www.gfpvm.cz/download?a=1&fid=1623&sh=2EdtyoRBmuRcrl2WOc0aRfqs0SKovolc9Ser2GHl

[21] Krakovská, H. Opakované vězňovo dilema. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci [online]. 2019 [cit. 2022-12-21]. Dostupné z: https://library.upol.cz/arl-upol/cs/csg/?repo=upolrepo&key=30166632243

[22] Li, J.; Hingston, P.; Kendall, G. Engineering design of strategies for winning iterated prisoner's dilemma competitions. IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games [online]. 2011, 3.4: 348-360. [cit. 2023-02-03]. DOI: 10.1109/TCIAIG.2011.2166268. Dostupné z: https://www.graham-kendall.com/papers/lhk2011.pdf

[23] Slantchev, B.L. Game Theory: Repeated Games. Department of Political Science, University of California – San Diego [online]. 2004 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/07-repeated-games.pdf

[24] Tableau, Phones – Google vs Apple vs Samsung, [online], [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://public.tableau.com/app/profile/ben2001/viz/Phones-GoogleVsApple/Phones-GoogleVsApple

[25] Valter, Vliv průmyslu na životní prostředí, 2022, [online], [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://www.digifactory.cz/digitalni-transformace/vliv-prumyslu-na-zivotni-prostredi/

[26] Zdroj kódů ke knihovně Axelrod, [online], [cit. 2023-05-23].

Dostupné z: https://axelrod.readthedocs.io/en/stable/index.html