



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra aplikované fyziky a techniky

Diplomová práce

# Sbírka řešených příkladů z pružnosti a pevnosti

Vypracovala: Petra Šimanová

Vedoucí práce: PaedDr. Bedřich Veselý, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracovala pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích 17. dubna 2023

Petra Šimanová

## **Poděkování**

Za nevšední ochotu a pomoc, za cenné rady a konzultace děkuji vedoucímu práce PaedDr. Bedřichu Veselému, Ph.D., který mi pomohl při vypracování této diplomové práce.

## **ANOTACE**

Práce je koncipována jako stručný učební text pro předmět Technická mechanika II na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Témata obsažená v práci jsou prostý tah, prostý tlak, prostý smyk, prostý ohyb, prostý krut a vzpěr. Teorie je v jednotlivých kapitolách doplněna příklady s komentovaným řešením daných druhů namáhání. Práce obsahuje také několik komplexních úloh na řešení více druhů namáhání v jedné konstrukci. Práci mohou využít učitelé předmětu při přípravě na výuku a studenti při samostudiu nebo při přípravě na různé zkoušky či testy.

Klíčová slova: tah, tlak, ohyb, krut, smyk, vzpěr

## **ANNOTATION**

The thesis is designed as a brief teaching text for the course Technical Mechanics II at the Faculty of Education of the University of South Bohemia in České Budějovice. The topics included in the thesis are simple tension, simple compression, simple shear, simple bending, simple torsion, buckling. The theory is supplemented by examples with annotated solutions for each type of stress. The thesis also contains several complex problems on dealing with multiple types of stresses on a structure. The work can be used by teachers of the subject in preparation for classes and by students in self-study or in preparation for various examinations or tests.

Keywords: tension, compression, bending, torsion, shear, buckling

# OBSAH

1. Úvod práce .....	6
2. Základní pojmy .....	8
3. Základní druhy namáhání .....	11
4. Prostý tah .....	14
4.1 Tahová zkouška materiálu .....	15
4.2 Teplotní roztažnost .....	19
4.3 Dovolené namáhání a jeho dynamika .....	22
4.4 Únava materiálu .....	25
4.5 Poměrná změna průřezových rozměrů .....	25
4.6 Deformační práce a objemová hustota energie .....	27
5. Prostý tlak .....	29
5.1 Tlak ve styčných plochách .....	32
5.2 Tenkostěnné nádoby s vnitřním přetlakem (tlakové nádoby) .....	34
6. Prostý smyk (střih) .....	36
7. Prostý ohyb .....	41
7.1 Druhy nosníků a podpor .....	41
7.2 Druhy zatížení .....	42
7.3 Vnitřní statické účinky a zatížení .....	43
7.4 Podmínky pevnosti .....	45
7.5 Grafický průběh posouvajících sil a ohybových momentů .....	47
7.6 Kvadratický moment průřezu (osový moment setrvačnosti) .....	54
8. Prostý krut .....	65
9. Vzpěr (vzpěrný tlak) .....	70
9.1 Eulerova rovnice .....	70
10. Komplexní příklady vyšetřování pevnosti .....	72
11. Závěr .....	86
Seznam použitých zdrojů .....	88

# 1. ÚVOD PRÁCE

Pružnost a pevnost jsou vedle statiky jedny z klíčových oblastí technické mechaniky. Jejich pochopení a dokonalá znalost jsou velmi důležité pro návrh, kontrolu a výrobu různých strojů, strojních součástí a konstrukcí. Nedílnou součástí technické mechaniky je i aplikace základních poznatků v různých modelových více či méně náročných příkladech umožňujících hlubší pochopení vzájemných souvislostí a výpočetních postupů. Vzhledem k faktu, že tato oblast vyžaduje velmi dobrou zkušenost s řešením úloh z dané problematiky, je naprosto nezbytné mít kvalitně propojené teoretické základy se znalostí jejich praktické aplikace ve standardních i komplexnějších úlohách.

Existuje nepřeberná řada odborné literatury a pramenů bohatých na informace týkající se pružnosti a pevnosti, ale i spousta sbírek s příklady na tuto problematiku. Bohužel většina příkladů je bez uvedených výsledků a postupů řešení, nebo pouze s uvedeným výsledkem bez vlastního postupu jeho dosažení. Pro samostudium studenta, který není dostatečně obeznámen s touto problematikou, je však takový přístup málo vhodný. Naopak podrobnější komentovaný postup řešení příkladů mu umožňuje postupovat krok za krokem a hlouběji proniknout do standardních procesů řešení úloh z oblasti pružnosti a pevnosti.

Základními druhy namáhání konstrukcí a součástí strojů jsou prostý tah, prostý tlak, prostý smyk, prostý ohyb, prostý krut a vzpěr. Těmto tématům je potřeba věnovat náležitou pozornost. K hlubšímu pochopení poslouží aplikační příklady, v nichž je třeba klást důraz na dobrou pochopitelnost, názornost, srozumitelnost a propojenost s realitou. Zároveň je potřeba postupovat od jednoduššího ke složitějšímu. Je také nutné využívat co nejjednodušší matematický aparát, např. lineární rovnice a nerovnice, aby nebyla komplikovanými matematickými operacemi odváděna pozornost od podstaty řešení úlohy.

Při aplikacích v oblasti pružnosti a pevnosti je třeba dodržovat určitý specifický postup. Nejprve je třeba vytvořit návrh konstrukce nebo součásti tak, aby splňovala požadované provozní podmínky a byla odpovídajícím způsobem odolná. Následně je nutné provedení výpočet přizpůsobit normě, tj. porovnat vypočtené hodnoty se standardně vyráběnými polotovary dle norem a tabulek. V tomto kroku je třeba pracovat i s vlastnostmi materiálu, tj. jeho vlastní hmotností, odolností a ohebností. Posledním krokem je potom ověření podmínek a kontrola výpočtů s ohledem na použití navrhované součásti či konstrukce.

Na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity jsou předměty Technická mechanika I – statika a Technická mechanika II – pružnost a pevnost zařazeny do studijního plánu bakalářského programu Oborové studium se zaměřením na vzdělávání na 2. stupni základní školy v rámci specializace Technická výchova a praktické činnosti. Pro tyto předměty jsem ve svých bakalářských pracích vytvořila dvě sbírky řešených příkladů ze statiky [1, 2] pokrývající svým obsahem tuto část technické mechaniky. Cílem této diplomové práce je pak navázat na obě předchozí bakalářské práce a doplnit je i o část týkající se pružnosti a pevnosti, aby všechny tři práce dohromady pokrývaly látku v rozsahu učebního plánu výše zmíněných předmětů a mohly sloužit studentům při samostudiu nebo přípravě na zkoušky. Zároveň by mohly nalézt uplatnění i ve vyučovací praxi na středních nebo vyšších odborných školách s technickým zaměřením.

## 2. ZÁKLADNÍ POJMY

Pružnost a pevnost je nauka, která je součástí technické mechaniky. Oproti statice, kde se předpokládá, že jsou tělesa dokonale tuhá, se zde jedná o část mechaniky zabývající se tělesy, u kterých je pružnost (poddajnost) jednou ze základních vlastností. Má za úkol vytvářet výpočtové metody pro dimenzi typických, nejčastěji se vyskytujících součástí a konstrukcí jednoduchých i složitých tvarů za různých provozních podmínek. Tyto výpočty pak slouží konstruktérům k navrhování vhodných rozměrů i tvarů součástí či ke kontrole už navržených konstrukcí. Na jedné straně se řeší pevnost a pružnost materiálu a na druhé straně se řeší bezpečnost a deformace, které by mohly ohrozit funkčnost navrženého zařízení. Jednotlivé úlohy se řeší téměř výhradně početně [3].

### **Dokonale tuhé těleso**

je model tělesa, které při působení libovolných sil nemění svůj tvar ani objem. Je zaváděn pro zjednodušení výpočtů. Výhodou je fakt, že síly, které působí na tuhé těleso, mají jen pohybové účinky, tj. posouvající nebo otáčivé.

### **Dokonale pružné těleso**

je těleso, které se po odstranění působících vnějších sil vrací do původního tvaru. Nedochází u něho k trvalé deformaci. V takovém případě mluvíme o elastické deformaci.

### **Nepružné těleso**

je těleso, které se po odstranění působících vnějších sil nevrací do původního tvaru a rozměrů a zůstává zdeformované. Proto mluvíme o deformaci trvalé neboli plastické.

### **Rovnovážná poloha**

je poloha, při které výslednice všech sil působících na těleso je nulová a nulový je také výsledný moment všech těchto sil. Pokud není těleso deformováno, nachází se v rovnováze.

### **Pružnost a pevnost**

je nauka, která se zabývá vztahem mezi vnějším zatížením a velikostí vnitřních sil vyjádřených v podobě napětí. Pružností rozumíme schopnost pevných těles získat po odstranění vnějších účinků původní tvar, pevností rozumíme odolnost pevných těles vůči vnějším silám, aniž by došlo k jejich destrukci na více částí.



## Houževnatost a křehkost

vyjadřují odolnost materiálu vůči tvorbě trhlin. Houževnatý materiál je materiál schopný při deformování a nárazech zůstat v celku. Opakem houževnatosti je křehkost.

## Tažnost

je vlastnost materiálu vyjádřená maximální mírou deformace, při které materiál praskne.

## Tuhost

je definována modulem pružnosti. Jedná se o schopnost materiálu odolávat deformaci. Materiál, který není tuhý, se vlivem stejné síly deformuje mnohem snáze než tuhý.

## Tvrдость

je vlastnost povrchové vrstvy materiálu vyjadřující schopnost odolávat pronikání jiného tělesa dovnitř skrz ni.

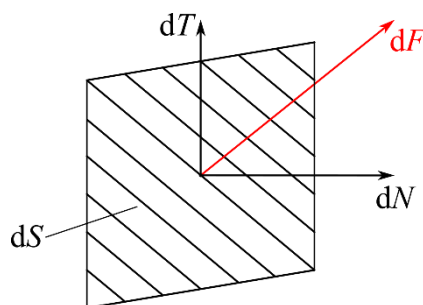
## Vnitřní síly

jsou takové síly, které vznikají uvnitř materiálu jako reakce na působení vnějšího zatížení. Představují vzájemné působení částic hmoty. Předpokládáme, že jsou uvnitř hmoty rozloženy spojitě a jsou s vnějšími silami v rovnováze.

## Napětí

je taková část vnitřní síly, která působí na jednotku plochy uvažovaného průřezu (viz Obr. 1).  $dF$  je elementární síla působící na elementární plochu  $dS$ ,  $dN$  je normálová složka této síly kolmá k ploše a  $dT$  je tečná složka této síly. Rozlišujeme tři druhy napětí podle směru síly vzhledem k uvažované ploše: celkové  $p$ , normálové  $\sigma$  a tečné  $\tau$ .

$$p = \frac{dF}{dS}, \sigma = \frac{dN}{dS}, \tau = \frac{dT}{dS}. \quad (1)$$



**Obr. 1** Síly působící na elementární plochu  $dS$  průřezu tělesa ( $dF$  je celková síla,  $dN$  je normálová složka síly,  $dT$  tečná složka síly)

## Deformace

je změna tvaru, rozměrů nebo úhlů. Jedná se o pružnost vyvolanou působením vnějších sil. Deformaci rozlišujeme skutečnou (absolutní) – udáváme ji v takových jednotkách, v jakých se přímo měří, a poměrnou (relativní) – vztaženou na jednotku původní veličiny, často udávanou v procentech. Podle charakteru rozeznáváme deformaci pružnou, trvalou a celkovou, která je součtem pružné a trvalé.

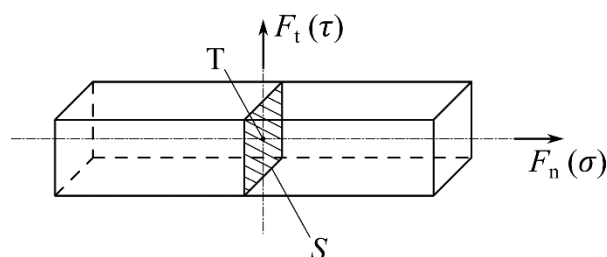
### Základní používané veličiny, jejich značky a jednotky:

- délka ( $l$ ) – metr [m],
- hmotnost ( $m$ ) – kilogram [kg],
- síla ( $F$ ) – newton [N],
- moment síly ( $M$ ) – newton metr [N·m],
- plocha ( $S$ ) – metr čtvereční [m<sup>2</sup>],
- objem ( $V$ ) – metr krychlový [m<sup>3</sup>],
- napětí ( $\sigma$ ) – pascal [Pa = N·m<sup>-2</sup>].

V technické praxi se často užívají tisícové násobky nebo podíly základních jednotek, např. mm, MPa, kN atp.

### 3. ZÁKLADNÍ DRUHY NAMÁHÁNÍ

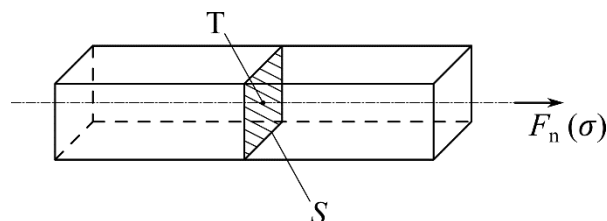
Mějme těleso libovolného tvaru, např. tyč. Nyní budeme uvažovat rovinný průřez o plošném obsahu  $S$  tímto tělesem (viz Obr. 2). Díky působení vnějších sil na těleso bude i tento uvažovaný průřez namáhán. Podle způsobu namáhání uvažovaného průřezu rozeznáváme pět základních druhů namáhání. Jedná se o prostý tah, prostý tlak, prostý smyk (střih), prostý ohyb a prostý krut [4]. Způsobu namáhání odpovídá i změna tvaru tělesa. Pro každý druh namáhání lze napsat základní pevnostní rovnici.



**Obr. 2** Směry namáhání uvažovaného průřezu ( $T$  – těžiště průřezu,  $F_n$  – normálová síla,  $F_t$  – tečná síla,  $\sigma$  – normálové napětí,  $\tau$  – tečné napětí,  $S$  – plošný obsah průřezu)

#### Prostý tah

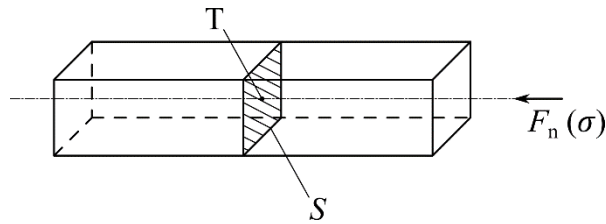
Prostým tahem je těleso namáháno, jestliže výsledná vnější síla působí na uvažovaný průřez ve směru normálovém, tedy k němu kolmém, ve smyslu ven z řezu a prochází těžištěm daného průřezu (viz Obr. 3). Je-li těleso z houževnatého materiálu, prodlouží se a jeho průřez se zmenší.



**Obr. 3** Prostý tah

#### Prostý tlak

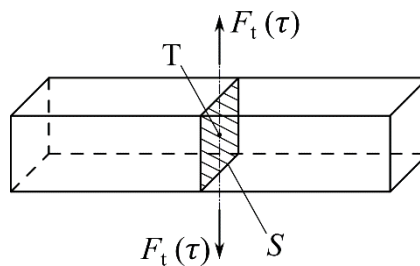
Prostým tlakem je těleso namáháno, jestliže výsledná vnější síla působí na uvažovaný průřez ve směru kolmém k němu ve smyslu do řezu a prochází těžištěm tohoto průřezu (viz Obr. 4). Těleso se zkrátí a jeho průřez se zvětší.



**Obr. 4** Prostý tlak

### Prostý smyk

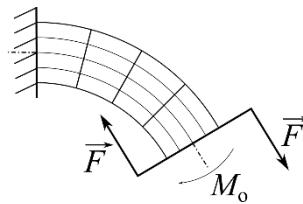
Prostým smykem je namáháno těleso, jestliže dvě vnější síly, které jsou opačného směru, působí na uvažovaný průřez v jeho rovině a prochází i jeho těžištěm. Tyto dvě vnější síly se snaží jednotlivé části tělesa vzájemně posunout (viz Obr. 5). Typickým příkladem je stříh.



**Obr. 5** Prostý smyk

### Prostý ohyb

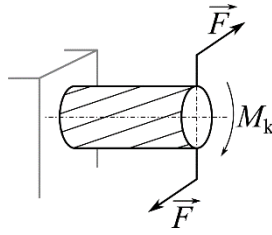
Prostý ohyb je způsoben dvojicí sil, která leží v rovině kolmé k uvažovanému průřezu procházející jeho těžištěm (viz Obr. 6). Těleso se přitom ohne tak, že průřezy, které byly původně rovnoběžné, změny vůči sobě vzájemný sklon.



**Obr. 6** Prostý ohyb

### Prostý krut

Prostý krut je způsoben dvojicí sil, jejíž rovina je totožná nebo rovnoběžná s rovinou uvažovaného průřezu (viz Obr. 7).



**Obr. 7** Prostý krut

Pro všechny základní druhy namáhání lze vzorec pro výpočet skutečného napětí sestavit na základě následujícího schématu:

$$\text{napětí} = \frac{\text{zatížení}}{\text{průřezová charakteristika}} \quad (2)$$

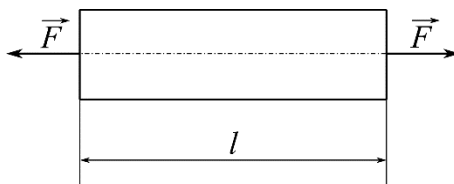
Odpovídající vzorce pro výpočet skutečného napětí při daném druhu namáhání vyvozené v souladu s obecným schématem (2) jsou uvedeny v Tab. 1.

**Tab. 1** Přehled druhů namáhání a jejich základních rovnic

Druh namáhání	Skutečné napětí
Prostý tah	$\sigma_t = \frac{F}{S}$
Prostý tlak	$\sigma_d = \frac{F}{S}$
Prostý stříh	$\tau_s = \frac{F}{S}$
Prostý ohyb	$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}$
Prostý krut	$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$

## 4. PROSTÝ TAH

Zatížíme-li těleso vnější silou, začne se deformovat. Materiál odporuje vnějším silám vnitřními silami, které závisí na soudržnosti molekul a jsou příčinou pevnosti tělesa. U namáhání prostým tahem působí síly směrem z tělesa. Jedná se o tzv. jednoosou napjatost, kdy je napětí v uvažovaném příčném průřezu rovnoběžné s podélnou osou tělesa (viz Obr. 8).



**Obr. 8** Namáhání prostým tahem

Při výpočtu průřezových rozměrů tělesa je důležité znát velikost vnitřních sil, které připadají na jednotku plochy průřezu, tj. napětí. Vztah pro určení napětí v tahu je uveden v Tab. 1. Základní jednotkou napětí je pascal (Pa). V technické praxi se častěji užívá násobná jednotka megapascal (MPa), která odpovídá  $\text{N}/\text{mm}^2$ . Při tahu dochází k prodloužení materiálu. Velikost prostého prodloužení  $\Delta l$  lze vyjádřit vztahem

$$\Delta l = l - l_0, \quad (3)$$

kde  $l$  je nová délka a  $l_0$  je původní délka. Druhou možností je vyjádřit tzv. poměrné (relativní) prodloužení  $\varepsilon_t$  vztahem

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (4)$$

Relativní prodloužení tedy vyjadřuje prodloužení vzhledem k původní délce, např.  $\varepsilon_t = 0,05$  říká, že absolutní prodloužení tvoří 0,05 původní délky, tedy 5 %.

Trvalé poměrné prodloužení v okamžiku přetržení namáhaného tělesa nazýváme tažnost. Je to charakteristická vlastnost každého materiálu. Tažnost udává, o kolik procent lze namáhaný vzorek natáhnout, než praskne. V souladu se vztahem (4) vypočítáme tažnost  $\delta$  ze vzorce

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100 [\%], \quad (5)$$

kde  $l_k$  je konečná délka při přetržení. Většinou se tažnost udává s indexem pro délku měřené části vzorku materiálu, např.  $\delta_5, \delta_{10}$ . Index zde označuje poměr původní délky měřené části vzorku kruhového průřezu k původnímu průměru, tj. např.  $l_0 = 5 \cdot d_0$ , popř.  $l_0 = 10 \cdot d_0$ . Pro vzorky s obecným tvarem původního průřezu o obsahu  $S_0$  se

určuje tažnost  $\delta_{5,65}$  a  $\delta_{11,3}$ , kde pro délku zkušební části vzorku platí  $l_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$  nebo  $l_0 = 11,3 \cdot \sqrt{S_0}$  [5].

Podobně se vyjádří i kontrakce  $\psi$  (zúžení), která představuje trvalé poměrné zmenšení průřezu vzorku v okamžiku přetržení. Je dána vzorcem

$$\psi = \frac{S_0 - S}{S_0} \cdot 100 [\%], \quad (6)$$

kde  $S$  je průřez vzorku v místě přetržení po přetržení. [6]

#### **Příklad 1:**

Určete normálové tahové napětí ocelové tyče o průměru 6,5 mm, která je napínána silou 620 N.

#### **Řešení:**

Napětí v tahu vypočítáme podle vzorce uvedeného v Tab. 1. Pro plochu průřezu kruhového tvaru platí  $S = \pi \cdot r^2$ , kde  $r = \frac{d}{2} = 3,25$  mm. Dosazením dostaneme

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{620}{\pi \cdot 3,25^2} = 18,684 \text{ MPa.}$$

---

#### **Příklad 2:**

Poměrné prodloužení plastového vzorku tvaru válce je 0,21 %. Určete, o kolik se vzorek prodloužil vlivem tahové síly, jestliže původní délka vzorku byla 70 mm?

#### **Řešení:**

Nejprve z prodloužení v % vypočítáme poměrné prodloužení vzorku

$$\varepsilon_t \cdot 100 \% = 0,21 \% \Rightarrow \varepsilon_t = 0,0021.$$

Ze vztahu (4) pak vypočítáme jeho absolutní prodloužení

$$0,0021 = \frac{\Delta l}{70} \Rightarrow \Delta l = 0,0021 \cdot 70 = 0,147 \text{ mm.}$$

Vzorek se prodloužil o 0,147 mm.

---

### **4.1 Tahová zkouška materiálu**

Tahová (někde se uvádí i trhací) zkouška slouží ke zjištění některých technicky důležitých vlastností materiálu a provádí se zvláštním zkušebním nebo trhacím strojem (viz Obr. 9).



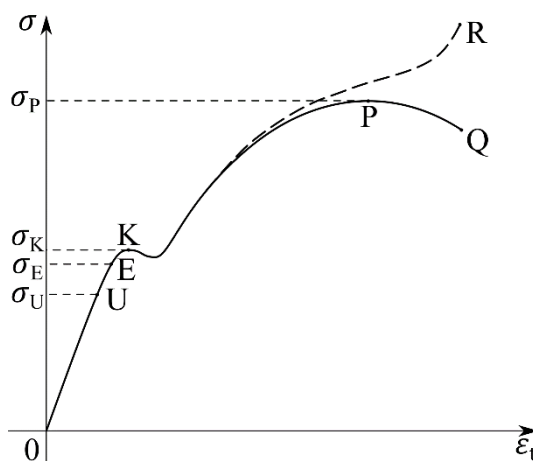
**Obr. 9** Trhací stroj Shimadzu

Ke zjištění daných vlastností se používají zkušební tyče, které mají normované rozměry [5]. Během zkoušky je tyč o počátečním průřezu  $S_0$  namáhána v tahu silou  $F$ , která se pozvolna zvětšuje až do doby, kdy se tyč přetrhne. Při tahu se měří absolutní prodloužení  $\Delta l$ , ze kterého se pak zjišťuje poměrné prodloužení  $\varepsilon_t$ . Zatěžující síla způsobuje v tyči normálové napětí  $\sigma_t$  (viz Tab. 1), současně dochází ke změně příčných rozměrů tyče, a tedy i jejího průřezu. Vzhledem k problematickému zaznamenávání měnícího se průřezu tyče během tahové zkoušky se zavádí pojem smluvního napětí  $\sigma_s$ , jakožto zatěžující síly  $F$  vztažené k původnímu průřezu tyče  $S_0$ , tedy

$$\sigma_s = \frac{F}{S_0}. \quad (7)$$

Průběh tahové zkoušky je řízen a zaznamenáván přímo trhacím strojem prostřednictvím PC a softwaru. Grafický záznam zkoušky nazýváme pracovním diagramem či diagramem tahové zkoušky (viz Obr. 10). Ve vodorovném směru vynášíme poměrné prodloužení  $\varepsilon_t$  a ve svislém směru smluvní napětí  $\sigma_s$ . Lze říci, že pracovní diagramy popisují chování vzorků materiálů, které jsou zatíženy silou a dochází u nich ke značné trvalé deformaci.





**Obr. 10** Diagram tahové zkoušky

Podle toho, jak roste napětí a jak se mění závislost prodloužení na napětí, má pracovní diagram několik částí. U většiny látek roste na počátku relativní prodloužení přímo úměrně k zatěžující síle, a tedy i ke smluvnímu napětí a tato závislost je v diagramu znázorněna úsečkou 0U, přičemž bod U představuje napětí nazývané mez úměrnosti  $\sigma_U$ . V této části platí tzv. Hookův zákon, který říká, že deformace je přímo úměrná deformující síle [4], matematicky

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E \cdot S} \cdot F = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_t \Rightarrow \sigma_t = E \cdot \varepsilon_t, \quad (8)$$

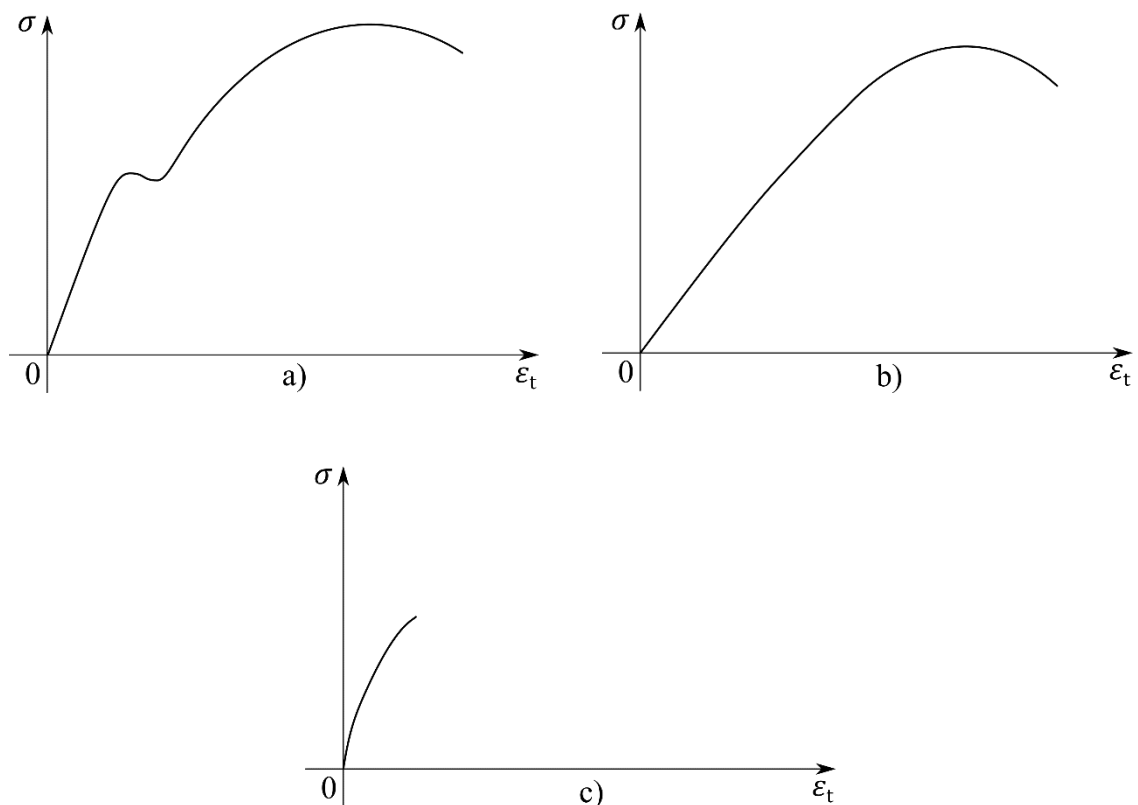
kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu. Modul pružnosti  $E$  lze zjistit z pracovního diagramu ze směrnice úsečky 0U a závisí na povaze materiálu, teplotě a způsobu zpracování.

Za mezí úměrnosti přechází úsečka v křivku, což znamená, že deformace již narůstá rychleji než smluvní napětí (oblast UE). V bodě E je mez elasticity či pružnosti  $\sigma_E$ . Přestane-li působit síla do tohoto bodu, materiál se ještě vrátí do původního tvaru a rozměrů, tedy po odlehčení nezůstává zkušební vzorek trvale deformován – maximální možná míra trvalého poměrného prodloužení nesmí překročit 0,005 % [3]. Po překonání této meze už dochází k výraznějším trvalým deformacím. Dosáhneme-li stavu, který v pracovním diagramu označujeme bodem K, nazýváme odpovídající napětí mez kluzu  $\sigma_K$ . Zde se materiál samovolně protahuje, ale napětí se nezvětšuje. Tato oblast je někdy označována jako tečení materiálu (nejedná se však o tzv. creep materiálu za zvýšených teplot) [7]. Zatížení v této oblasti může dokonce i poklesnout.

Při dalším zvyšování napětí dochází k dalšímu nárůstu relativního prodloužení. Bod P v pracovním diagramu odpovídá maximálnímu smluvnímu napětí, kterého lze

pro daný materiál dosáhnout. Jedná se o smluvní mez pevnosti  $\sigma_p$ . Tyč se ale dál zužuje a natahuje, až se přetrhne. Tomu v diagramu odpovídá bod Q. Pokud bychom byli schopni registrovat okamžitou hodnotu obsahu průřezu  $S$ , mohli bychom vynášet namísto smluvního napětí  $\sigma_s$  skutečné napětí v tahu  $\sigma_t$ . Tomu by odpovídal v oblasti meze pevnosti průběh tahové zkoušky naznačený čárkovanou čarou. K přetržení materiálu by potom došlo při parametrech odpovídajících bodu R (viz Obr. 10).

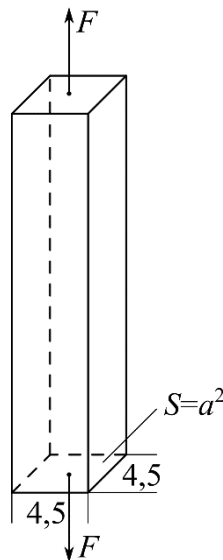
Pracovní diagramy různých materiálů se mohou kvalitativně lišit. Typické tvary průběhu tahové zkoušky jsou znázorněny na Obr. 11. Materiály, jejichž pracovní diagramy jsou znázorněny na obrázcích a) a b) nazýváme houževnaté (někdy se užívá výraz plastické). K jejich porušení dochází až při relativně značné deformaci. Materiál na obrázku a) má v diagramu výraznou mez kluzu, kterou lze poměrně snadno z grafu vyčíst. U materiálu na obrázku b) nelze mez kluzu z diagramu určit. Proto se stanovuje tzv. smluvní mez kluzu, která odpovídá vzniku trvalé relativní deformace 0,2 % [3]. Na obrázku c) je materiál, u kterého došlo k přetržení při podstatně menším napětí, přičemž průběh je v celé oblasti zatěžování nelineární. Takové materiály nazýváme křehké a jsou v tlaku odolnější než v tahu.



**Obr. 11** Typické příklady diagramů tahových zkoušek, např. a) měkká ocel, b) tvrdá ocel, c) litina

### Příklad 3:

Jakou největší sílu musíme vyvinout k přetržení táhla vyrobeného z oceli 11700, jestliže má táhlo čtvercový průřez o straně 4,5 mm (viz Obr. 12).



Obr. 12 Táhlo

### Řešení:

U ocelí třídy 11 lze mez pevnosti v tahu vyčíst z číselného označení, kde 3. a 4. číslice vyjadřuje mez pevnosti v desítkách megapascalů, tedy  $\sigma_{pt} = 700$  MPa. Použijeme vzorec pro výpočet napětí v tahu dle Tab. 1. Ze vzorce vyjádříme sílu, dosadíme obsah čtverce a dostaneme

$$F = \sigma_t \cdot S = \sigma_t \cdot a^2.$$

Po dosazení zadaných hodnot bude

$$F = 700 \cdot 4,5^2 = 14175 \text{ N.}$$

Je potřeba vyvinout sílu 14,175 kN.

## 4.2 Teplotní roztažnost

Vlastnosti materiálu jsou obecně závislé na teplotě. Dodáním nebo naopak odebráním tepla můžeme změnit nejen pevnost materiálu, ale i jeho délku [8]. Tomuto jevu se říká teplotní délková roztažnost. Pro ni lze odvodit vztah

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t, \tag{9}$$

kde  $\Delta l$  je změna délky materiálu,  $\alpha$  je jeho součinitel teplotní délkové roztažnosti (jednotkou je  $\text{K}^{-1}$ ),  $l_0$  je původní délka materiálu a  $\Delta t$  je teplotní rozdíl. Vydělením

rovnice (9) původní délkou materiálu dostaneme poměrné prodloužení  $\varepsilon$  způsobené změnou teploty, tedy

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta t. \quad (10)$$

Pokud jsou konce tělesa pevně zafixovány a těleso se ochlazuje, má tendenci se zkracovat, a proto v něm vzniká napětí v tahu. Toto napětí je stejné jako napětí, které vyvolá při tahové zkoušce prodloužení odpovídající svou velikostí zkrácení způsobenému ochlazením. Z rovnosti obou relativních změn délky vyjádřených vztahy (8) a (10) dostaneme pro napětí v tahu způsobené ochlazením zafixovaného tělesa

$$\sigma_t = E \cdot \varepsilon_t = E \cdot \varepsilon = E \cdot \alpha \cdot \Delta t. \quad (11)$$

S rostoucí teplotou se ovšem nemění jenom délka materiálu, ale i zbývající příčné rozměry, a proto dochází k celkové změně objemu materiálu. Pro její velikost lze odvodit vztah analogický teplotní délkové roztažnosti

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t, \quad (12)$$

kde  $\Delta V$  je změna objemu materiálu,  $\beta$  je jeho součinitel teplotní objemové roztažnosti (jednotkou je opět  $K^{-1}$ ),  $V_0$  je původní objem materiálu a  $\Delta t$  je teplotní rozdíl. Pro pevné látky platí přibližný vztah

$$\beta \doteq 3 \cdot \alpha. \quad (13)$$

Pokud má pevné těleso jeden rozměr výrazně větší než zbývající příčné rozměry, lze jejich změny zanedbat a využívat pouze vztahu (9) pro teplotní délkovou roztažnost. U kapalin a plyných látek vždy bude vzhledem k jejich tekutosti a nestálému tvaru docházet k rozpínání objemovému charakterizovanému koeficientem teplotní objemové roztažnosti  $\beta$ . Oba typy součinitelů teplotní roztažnosti lze nalézt v tabulkách [9].

#### **Příklad 4:**

Jaká je původní délka hliníkového drátu při teplotě  $20\text{ }^\circ\text{C}$ , jestliže při teplotě  $70\text{ }^\circ\text{C}$  má délku  $215,258\text{ m}$ . Teplotní součinitel hliníku je  $24 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

#### **Řešení:**

Celková délka drátu po prodloužení je

$$l_{70} = l_0 + \Delta l.$$

Ze vztahu (9) dostaneme pro původní délku drátu po úpravě

$$l_0 = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta t}.$$

Po dosazení do předchozího vztahu dostaneme

$$l_{70} = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta t} + \Delta l = \frac{\Delta l + \Delta l \cdot \alpha \cdot \Delta t}{\alpha \cdot \Delta t}.$$

Dosadíme zadané veličiny, čímž dostaneme lineární rovnici s neznámou  $\Delta l$ , tj.

$$215,258 = \frac{\Delta l + \Delta l \cdot 0,000024 \cdot 50}{0,000024 \cdot 50}.$$

Po úpravě bude

$$0,2583096 = 1,0012 \cdot \Delta l,$$

odkud dostaneme

$$\Delta l = 0,258 \text{ m.}$$

Protože dle zadání známe celkovou délku  $l_{70}$  a teď i prodloužení  $\Delta l$ , můžeme určit původní délku, tedy

$$l_{70} = l_0 + \Delta l \Rightarrow l_0 = l_{70} - \Delta l = 215,258 - 0,258 = 215 \text{ m.}$$

Původní délka drátu při teplotě 20 °C byla 215 m.

### **Příklad 5:**

Tlakový hrnec vyrobený z nerezové oceli má při teplotě 20 °C objem 3,5 l. O kolik se zvětší jeho objem, zahřejeme-li ho na 120 °C? Teplotní součinitel oceli je  $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

### **Řešení:**

Předpokládejme, že hrnec má při původní teplotě 20 °C ideálně válcový tvar s průměrem podstavy  $r_0$  a výškou  $h_0$ . S rostoucí teplotou se budou oba tyto rozměry zvětšovat podle vztahu (9). Odtud dostaneme nový poloměr  $r$

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 + r_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t = r_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

a výšku  $h$

$$h = h_0 + \Delta h = h_0 + h_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t = h_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t).$$

Pro objem válce  $V$  při vyšší teplotě dostaneme

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r_0^2 \cdot h_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)^3.$$

Rozepíšeme třetí mocninu

$$(1 + \alpha \cdot \Delta t)^3 = 1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta^2 t + \alpha^3 \cdot \Delta^3 t.$$

Protože součinitel teplotní délkové roztažnosti dosahuje hodnot řádově  $10^{-5}$ , lze třetí a čtvrtý člen zanedbat vůči prvním členu a dostaneme pro objem přibližný vztah

$$V \doteq \pi \cdot r_0^2 \cdot h_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t) = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t) = V_0 + 3 \cdot \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta t.$$

Odsud s využitím vztahu (13) dostaneme pro změnu objemu vztah

$$\Delta V = V - V_0 = 3 \cdot \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta t = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t,$$

který je naprosto totožný se vztahem (12). Po dosazení zadaných hodnot bude

$$\Delta V = 3 \cdot \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta t = 3 \cdot 0,000012 \cdot 3,5 \cdot (120 - 20) = 0,0126 \text{ l.}$$

Objem hrnce se zvětší o 12,6 ml.

### 4.3 Dovolené namáhání a jeho dynamika

V mnoha technických aplikacích je naprosto nezbytné zabezpečit, aby se součást či konstrukce nepřístupně nedeformovala ani dočasně, ani trvale, nebo aby se neporušila její celistvost. Říkáme, že zatížení materiálu nesmí překročit tzv. dovolené namáhání. Platí tedy, že skutečné napětí  $\sigma_{Sk}$  nesmí být větší než dovolené napětí  $\sigma_{Dov}$ . Tento vzájemný vztah mezi reálným napětím v zatížené konstrukci a maximálně přípustným teoretickým napětím pro danou aplikaci vymezuje tzv. pevnostní podmínka

$$\sigma_{Sk} \leq \sigma_{Dov}. \quad (14)$$

Dovolené napětí  $\sigma_{Dov}$  je dáno materiálem konstrukce a účelem jejího použití a lze ho vypočítat podle rovnice

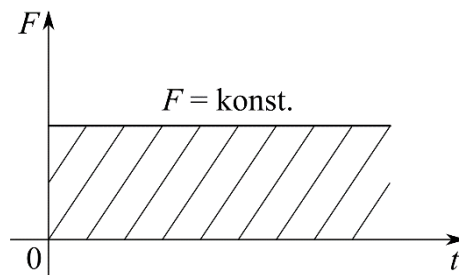
$$\sigma_{Dov} = \frac{\sigma_K}{n} \cdot K_{I-III}, \quad (15)$$

kde  $\sigma_K$  je napětí v mezi kluzu,  $n$  je míra bezpečnosti a  $K_{I-III}$  je koeficient vyjadřující dynamiku namáhání. U houževnatých ocelí se často využívá skutečnosti, že mez kluzu  $\sigma_K$  je přibližně rovna polovině meze pevnosti  $\sigma_p$ . U materiálů, kde není výrazná mez kluzu (např. kalená ocel, litina), se při výpočtu dovoleného napětí dle rovnice (15) vychází namísto meze kluzu  $\sigma_K$  přímo z meze pevnosti  $\sigma_p$ .

Velikost míry bezpečnosti  $n$  závisí na povaze materiálu, čím je vyšší, tím je nižší i dovolené namáhání a naopak. Hodnoty míry bezpečnosti jsou pro dané aplikace stanoveny empiricky na základě zkušeností konstruktérů. Orientační hodnoty lze nalézt v tabulkách [9]. Pro houževnaté materiály, např. měkkou ocel, se volí 1,3 – 2 a u křehkých kovů jako je např. litina nebo kalená ocel 2,5 – 5 [4].

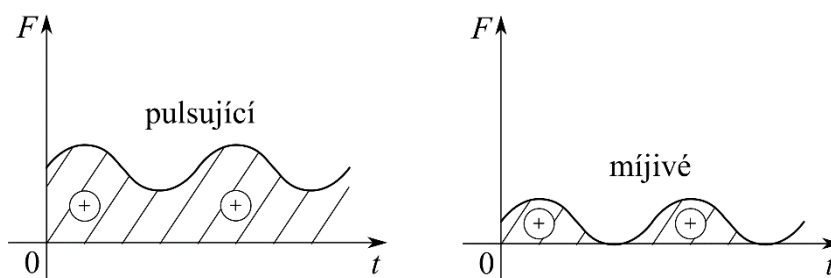
Dynamiku namáhání charakterizuje jistý součinitel popisující způsob zatížení. Ten je mírně odlišný pro různé druhy materiálů a lze ho nalézt v tabulkách [9]. Rozlišujeme tři druhy namáhání [4]:

1. statické – síla zatěžující konstrukci nemění svou velikost ani směr (viz Obr. 13).  
Typickými příklady jsou např. hák zatížený visícím lustrem, krov střechy zatížený krytinou atp. Koeficient dynamiky namáhání měkkých ocelí je v takovém případě  $K_I = 1$ .



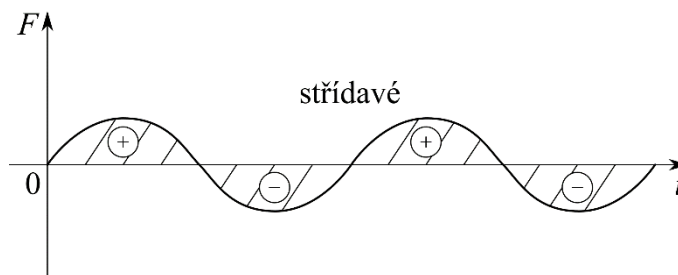
**Obr. 13** Časový průběh zatěžující síly při statickém namáhání

2. pulsující (tepavé) a míjivé – síla nemění směr ani smysl, mění pouze svou velikost (viz Obr. 14). Jedná se např. o most zatížený chůzí člověka nebo jedoucím auty. Pak je koeficient dynamiky namáhání měkkých ocelí  $K_{II} = 0,85$ .



**Obr. 14** Časový průběh zatěžující síly při pulsujícím (tepavém) a míjivém namáhání

3. střídavé – síla mění svůj smysl, např. nahoru a dolů (viz Obr. 15). Příkladem střídavého namáhání je např. namáhání pístnice parního stroje, uchycení sedačky na ruském kole nebo lámání drátku ohýbáním apod. Koeficient dynamiky namáhání měkkých ocelí pak je  $K_{III} = 0,65$ .



**Obr. 15** Časový průběh zatěžující síly při střídavém namáhání

**Příklad 6:**

Jakou maximální silou může být při tepavém zatížení namáhána ocelová tyč o průměru 10 mm z materiálu 11423 používaná na zavěšení lávky? Míru bezpečnosti volte 2.

**Řešení:**

Vycházíme z pevnostní podmínky (14) aplikované na namáhání tahem

$$\sigma_{Sk,t} \leq \sigma_{Dov,t}$$

Dosažením skutečného napětí v tahu dle Tab. 1 a dovoleného namáhání (15) při tepavém zatížení do pevnostní podmínky dostaneme

$$\frac{F}{S} \leq \frac{\sigma_K \cdot K_{II}}{n}$$

Z tabulek [9] pro ocel 11423 určíme mez kluzu  $\sigma_K = 230$  MPa. Pro kruhový průřez platí

$$S = \pi \cdot r^2,$$

odtud po dosazení zadaných hodnot

$$\frac{F}{\pi \cdot 5^2} \leq \frac{230 \cdot 0,85}{2}$$

Vyjádříme sílu a dostaneme

$$F \leq \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{230 \cdot 0,85}{2} = 7677 \text{ N.}$$

Ocelová tyč může být namáhána maximální silou 7677 N.

### Příklad 7:

Proveďte kontrolu ocelové trubky z materiálu 10372 namáhané prostým tahem silou 30 kN. Vnější průměr trubky je 60 mm a tloušťka její stěny 6 mm. Trubku zatěžujeme střídavým namáháním. Míra bezpečnosti je  $n = 1,75$ .

### Řešení:

Nejprve si určíme střední průměr trubky. Z Obr. 16 plyne

$$d_s = D - 2 \cdot \frac{t}{2} = D - t = 60 - 6 = 54 \text{ mm.}$$



**Obr. 16** Určení středního průměru trubky

Pro plochu  $S$  příčného řezu trubky namáhané tahem platí dle obrázku po úpravě

$$S = \pi \cdot \frac{D^2}{4} - \pi \cdot \frac{(D-2 \cdot t)^2}{4} = \pi \cdot (D - t) \cdot t = \pi \cdot d_s \cdot t.$$

Vypočítáme dovolené napětí (15)

$$\sigma_{Dov,t} = \frac{\sigma_K \cdot K_{III}}{n} = \frac{200 \cdot 0,65}{1,75} = \frac{130}{1,75} = 74,3 \text{ MPa}$$

a skutečné napětí v tahu (Tab. 1)

$$\sigma_{Sk,t} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot d_s \cdot t} = \frac{30000}{3,14 \cdot 54 \cdot 6} = \frac{30000}{1017,36} = 29,5 \text{ MPa,}$$

kde mez kluzu  $\sigma_K = 200$  MPa pro danou ocel je určena dle tabulek [9]. Získané výsledky porovnáme s pevnostní podmínkou (14). Protože je nerovnost splněna, trubka této podmínce vyhovuje.



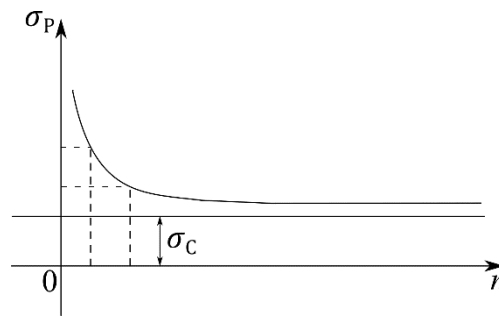
Poznámka:

Ocel 10372 je stavební výztužová ocel, nikoli konstrukční, tudíž nemá zaručenu mez pevnosti.

---

#### 4.4 Únava materiálu

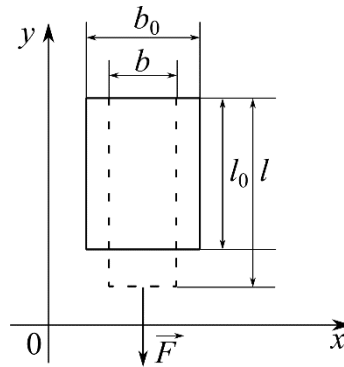
Při dlouhodobém cyklickém namáhání konstrukcí dochází k únavě materiálu. Jedná se o pomalu postupující a nahromaděné poškození. To vzniká opakovaným zatěžováním a z toho plynoucími plastickými deformacemi v místech koncentrace napětí. Tento proces může vést až k únavovému lomu. Únavové poruchy závažně ovlivňují životnost konstrukcí [10]. Opakované namáhání konstrukce totiž vede ke změně hodnoty meze pevnosti materiálu. Tento jev znázorňuje tzv. Wöhlerova křivka (viz Obr. 17). Na vodorovnou osu se vynáší počet cyklů  $n$  a na svislou osu napětí meze pevnosti  $\sigma_P$ . S rostoucím počtem zatěžovacích cyklů mez pevnosti zpočátku rychle klesá, ale později se pokles prakticky zastaví. Existuje však jistá hodnota napětí nazývaná mez únavy  $\sigma_C$ , pod kterou se mez pevnosti nikdy nedostane. Pokud bude skutečné napětí v namáhaném materiálu nižší než mez únavy, materiál nepraskne ani při velmi vysokém počtu zatěžovacích cyklů. Pro konstrukční oceli existují empirické vztahy pro určení meze únavy  $\sigma_C$  z meze pevnosti  $\sigma_P$  materiálu, viz např. [11].



Obr. 17 Wöhlerova křivka

#### 4.5 Poměrná změna průřezových rozměrů

U pružné deformace se při namáhání tahem délka zvětšuje a příčné průřezové rozměry se zmenšují (viz Obr. 18). Poměrné (relativní) změny jednotlivých rozměrů příčného průřezu jsou stejné, tzn. že zmenšený průřez je geometricky podobný tomu původnímu.



**Obr. 18** Změna rozměrů při namáhání tahem

Poměrné zkrácení příčných rozměrů  $b$  a  $h$  ( $h$  je ve směru osy  $z$ ) vypočítáme podle vzorce

$$\varepsilon_{xt} = \varepsilon_{zt} = \frac{\Delta b}{b_0} = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{b_0 - b}{b_0} = \frac{h_0 - h}{h_0} = \text{konst.} \quad (16)$$

Obdobně to platí i pro těleso válcového tvaru s kruhovým průřezem, u něhož není třeba rozlišovat směr příčného rozměru – průměru  $d$ . Hovoříme tak o poměrném zúžení.

Poměrná změna délky  $\varepsilon_{yt}$  je relativní prodloužení tyče a vyjádříme ho dle vztahu (4). Poměr mezi relativním prodloužením tyče a relativním zkrácením příčného rozměru je pro všechny látky, pro které platí Hookův zákon, konstantní a nazývá se Poissonova konstanta  $m$ . To lze matematicky vyjádřit vztahem

$$m = \frac{\varepsilon_{yt}}{\varepsilon_{xt}} = \frac{\varepsilon_{yt}}{\varepsilon_{zt}} = \frac{\text{poměrná změna délky}}{\text{poměrná změna příčného rozměru}}. \quad (17)$$

Převrácená hodnota Poissonovy konstanty se nazývá Poissonův součinitel nebo také Poissonovo číslo  $\mu$ , tj.

$$\mu = \frac{1}{m}. \quad (18)$$

### **Příklad 8:**

Jaké je poměrné zúžení drátu vyrobeného z mědi? Drát je namáhán tahem, který v něm vyvolá napětí 36,9 MPa. Modul pružnosti měděného drátu je 130 GPa a Poissonovo číslo mědi je 0,33.

### **Řešení:**

Mez pevnosti mědi je dle [9] přibližně 200 MPa, smluvní mez kluzu pak 100 MPa. Napětí dle zadání je výrazně nižší, a proto lze užít Hookův zákon (8). Z něj vyjádříme relativní prodloužení

$$\sigma_t = E \cdot \varepsilon_{yt} \Rightarrow \varepsilon_{yt} = \frac{\sigma_t}{E}.$$

S využitím vztahů pro Poissonovu konstantu (17) a Poissonovo číslo (18) dostaneme po úpravě

$$m = \frac{\varepsilon_{yt}}{\varepsilon_{xt}} = \frac{\sigma_t}{E \cdot \varepsilon_{xt}} = \frac{36,9}{130000 \cdot \varepsilon_{xt}} = \frac{0,000283846}{\varepsilon_{xt}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,33}$$

Odtud

$$\varepsilon_{xt} = 0,000094.$$

Poměrné zúžení měděného drátu je 0,000094.

#### 4.6 Deformační práce a objemová hustota energie

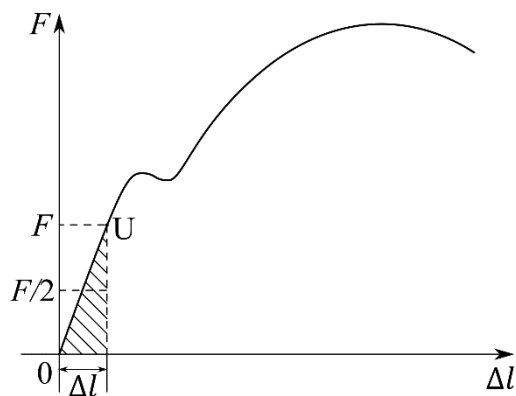
Pod vlivem zatěžování tělesa dochází k jeho deformaci. Práci, potřebnou k dosažení dané deformace, vykonávají vnější síly. Pokud budeme těleso zatěžovat velice pomalu, můžeme zanedbat kinetickou složku, tedy to, že se část práce spotřebuje na pohyb. Potom se veškerá práce vnějších zařízení přemění na deformační energii akumulovanou v tělese. Po odlehčení se ideálně pružné těleso pod vlivem naakumulované deformační energie vrátí do původního tvaru (vratný děj). Definice mechanické práce je dle [12]

$$W = \int_0^{\Delta l} \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (19)$$

kde  $\vec{F}$  je síla způsobující infinitezimální změnu délky tělesa  $d\vec{l}$ . Integrovat musíme v mezích od nulového prodloužení až do celkového prodloužení  $\Delta l$ . Můžeme také využít geometrického významu určitého integrálu jako plochy pod křivkou v grafickém znázornění závislosti síly na prodloužení (viz Obr. 19). Tato plocha vyjadřuje velikost přetvárné práce. V oblasti platnosti Hookova zákona, kde síla  $F$  vyvolá celkové prodloužení  $\Delta l$ , lze plochu určit na základě vztahu

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = E_n, \quad (20)$$

kde  $W_{\text{def}}$  je deformační práce a  $E_n$  je tzv. energie napjatosti.



**Obr. 19** Deformační práce a objemová hustota energie

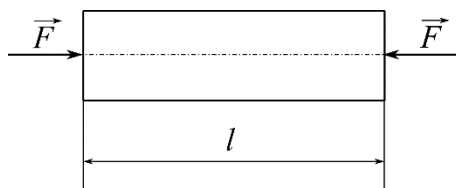
Je možné také definovat hustotu deformační energie  $\lambda$  jako deformační energii vztáženou na jednotkový objem namáhaného tělesa [3, 11]. Využívá se při volbě parametrů tvářecích strojů. Pro lineárně elastický materiál lze s využitím Hookova zákona psát

$$\lambda = \frac{E_n}{V_0} = \frac{\frac{1}{2}F \cdot \Delta l}{S \cdot l_0} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (21)$$

## 5. PROSTÝ TLAK

Namáhání prostým tlakem je silnou analogií prostého tahu. Rozdíl mezi nimi je v tom, že při tahu směřují akční (vnější) síly ven z tělesa a u tlaku směřují tyto síly do tělesa (viz Obr. 20). Namísto prodloužení zde dochází k podélnému zkrácování. Míru zkrácení lze vyjádřit poměrným (relativním) zkrácením analogicky k (4), tj.

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0}. \quad (22)$$

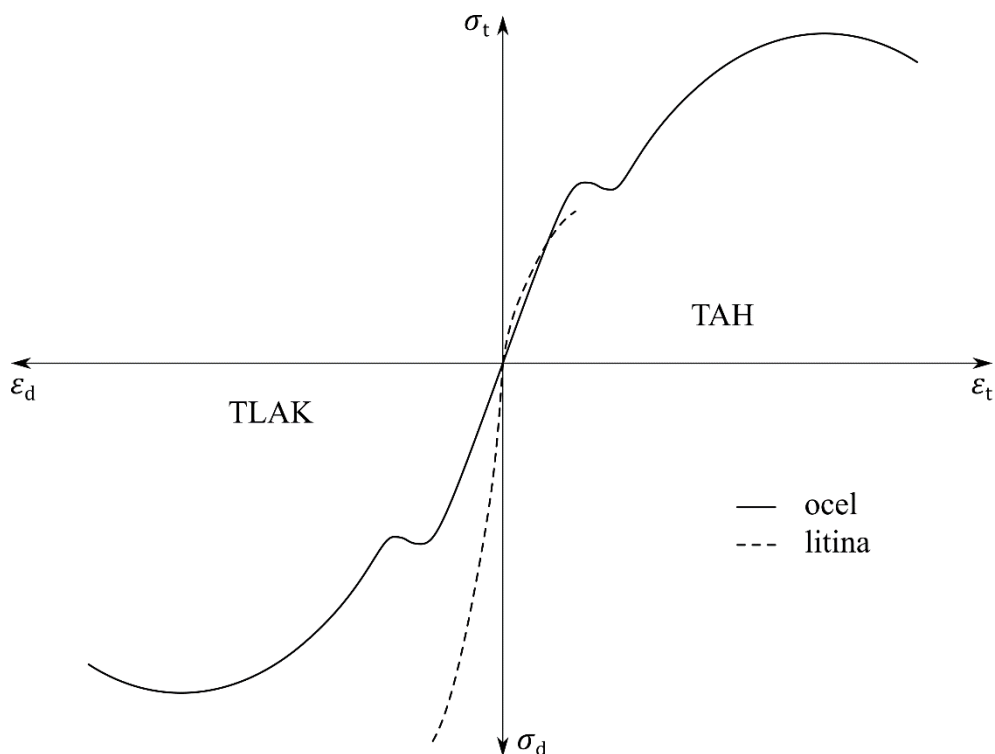


**Obr. 20** Prostý tlak

U namáhání tlakem se provádí tlaková zkouška, která se stejně jako u tahu zaznamenává pomocí pracovního diagramu. Diagram tlakové zkoušky vypadá obdobně jako u tahové, často se obě zkoušky zaznamenávají do jednoho pracovního diagramu (viz Obr. 21). U oceli je průběh tlakové zkoušky přibližně zrcadlový oproti tahu, u litiny je u tlaku 2,5× až 4× větší mez pevnosti oproti tahu [13]. Stejně jako u tahu platí v lineární oblasti Hookův zákon (8). Analogicky lze také formulovat pevnostní podmínku (viz např. [4]) ve tvaru

$$\sigma_{Sk,d} \leq \sigma_{Dov,d}. \quad (23)$$

Hodnoty dovoleného napětí v tlaku  $\sigma_{Dov,d}$  jsou pro houževnaté materiály prakticky shodné s hodnotami dovoleného napětí v tahu  $\sigma_{Dov,t}$ , u litiny jsou výrazně vyšší. Lze je nalézt např. v [9].



**Obr. 21** Diagram tahové a tlakové zkoušky (I. kvadrant – tahová zkouška, III. kvadrant tlaková zkouška)

**Příklad 9:**

Určete příčné rozměry betonového pilíře čtvercového průřezu, který má podírat můstek, přičemž musí snést zatížení o hmotnosti 100 t. Mez pevnosti v tlaku betonu C40/50, ze kterého je pilíř vyroben, je  $\sigma_{pt} = 50$  MPa. Míru bezpečnosti volte 4.

**Řešení:**

Vycházíme z pevnostní podmínky pro tlak (23). Napětí v tlaku určíme ze základní pevnostní rovnice pro tlak (Tab. 1), dovolené napětí určíme z rovnice (15), ve které určíme smluvní mez kluzu jako polovinu meze pevnosti. Koeficient dynamiky namáhání volíme  $K_{II} = 0,85$ , protože se jedná o míjivé namáhání. Síla namáhající pilíř je tíhou zátěže a platí pro ni  $F = m \cdot g = 1000000$  N. Po dosazení dostaneme

$$\frac{F}{S} \leq \frac{0,5 \cdot \sigma_{pt} \cdot K_{II}}{n}$$

Dosadíme zadané hodnoty a vypočítáme plochu pilíře

$$\frac{1000000}{S} \leq \frac{0,5 \cdot 50 \cdot 0,85}{4},$$

$$\frac{1000000}{S} \leq 5,3125,$$

$$188235,3 \text{ mm}^2 \leq S.$$

Protože máme vypočítat příčné rozměry pilíře, použijeme vzorec na obsah čtverce

$$S = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{S} \geq \sqrt{188235,3} = 433,86 \text{ mm.}$$

Strana čtvercové podstavy pilíře musí být větší než 0,43386 m, z praktického hlediska bychom volili 0,5 m.

---

#### **Příklad 10:**

Dělníci pokládají kolejnice o délce 25 m při teplotě 5 °C. Jaké tlakové napětí by vzniklo v kolejnici v létě při jejím ohřátí až na 40 °C, pokud by dělníci neudělali dilatační spáru? Bude splněna pevnostní podmínka? Jak velkou dilatační spáru ve skutečnosti musí udělat? Modul pružnosti oceli s označením R260 používané pro výrobu kolejnic je  $2,1 \cdot 10^5$  MPa, její mez kluzu je 528 MPa. Teplotní součinitel roztažnosti této oceli je  $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Míru bezpečnosti volte 4.

#### **Řešení:**

Nejprve musíme ze vztahu (11) vypočítat skutečné napětí  $\sigma_{Sk,d}$ , které vznikne v kolejnici

$$\sigma_{Sk} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \alpha \cdot \Delta t = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,000012 \cdot 35 = 88,2 \text{ MPa.}$$

Abychom mohli ověřit pevnostní podmínku (14) musíme na základě vztahu (15) určit dovolené napětí  $\sigma_{Dov,d}$ , přičemž koeficient dynamiky namáhání volíme  $K_{II} = 0,85$ , protože se jedná o míjivé namáhání. Po dosazení dostaneme

$$\sigma_{Sk,d} \leq \frac{528 \cdot 0,85}{4},$$

$$\sigma_{Sk,d} = 88,2 \text{ MPa} \leq 112,2 \text{ MPa} = \sigma_{Dov,d}.$$

Pevnostní podmínka pro tlak je tedy splněna. Nicméně skutečné napětí není výrazně nižší než dovolené napětí a v případě nekvalitně provedeného šterkového podloží by mohlo dojít k vybočení v místě styku kolejnic, což by mohlo způsobit v krajním případě i vykolejení vlaku. Proto je nezbytné dilatační spáru u nesvařovaných kolejnic vždy vytvářet. Dle vztahu (9) určíme, o kolik se kolejnice prodlouží v případě ohřátí z 5 °C na 40 °C, tedy

$$\Delta l = \alpha \cdot l_5 \cdot \Delta t = 0,000012 \cdot 25000 \cdot 35 = 10,5 \text{ mm.}$$

Dělníci musí ponechat minimálně 10,5 mm širokou dilatační spáru. V praxi namáhá kolejnici víceosé kombinované namáhání, což nebylo předmětem tohoto výpočtu.

---

## 5.1 Tlak ve styčných plochách

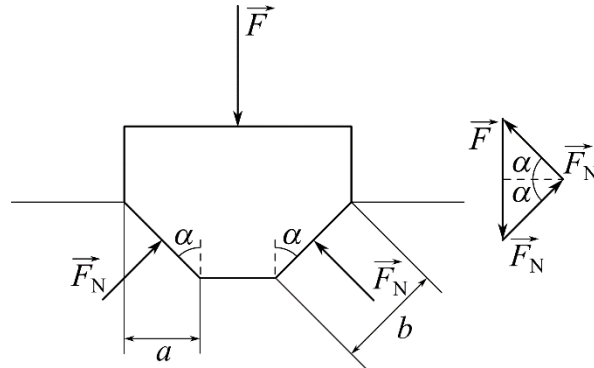
Jsou-li dvě tělesa ve vzájemném dotyku, působí na sebe ve styčné ploše silou. Předpokladem je rovnoměrné rozložení síly v celé stykové ploše. Jestliže těleso působí silou  $F$  kolmo na podložku, se kterou se stýká ve styčné ploše  $S$ , pak obecně vyvolá tlak  $p$ , pro který platí

$$p = \frac{F}{S}. \quad (24)$$

Pokud není síla rozložena po celé ploše rovnoměrně, dle vztahu (24) bychom určili střední tlak.

Obdobný vztah dostaneme i pro celkový tlak ve styčných plochách klínové drážky. Představme si drážku, do které dosedá těleso tak, že se dotýká drážky v šířce  $b$  (viz Obr. 22). Délka styčné plochy ve směru kolmo k nákresně je  $l$ . Je-li tíha tělesa v drážce  $F$ , bude reakce drážky mít složky  $F_N$ , které budou v případě symetrické drážky, tj. v případě stejných úhlů  $\alpha$ , stejné na obou styčných plochách. Ze silové rovnováhy (viz Obr. 22 vpravo) lze psát  $F = 2 \cdot F_N \cdot \sin \alpha$ . Pro měrný tlak na jedné stykové ploše platí

$$p = \frac{F_N}{S_1} = \frac{F_N}{b \cdot l} = \frac{F_N}{\frac{a}{\sin \alpha} \cdot l} = \frac{F_N \cdot \sin \alpha}{a \cdot l} = \frac{F}{2 \cdot a \cdot l}. \quad (25)$$



**Obr. 22** Tlak ve styčných plochách

Stejný tlak je samozřejmě i na druhou stykovou plošku. Protože  $S = 2 \cdot a \cdot l$  je průmět celkové styčné plochy obou těles do roviny kolmé na směr působící síly  $F$ , je tlak vypočtený dle vztahu (25) totožný s obecnou definicí tlaku (24). S využitím integrálního počtu by šlo vztah (25) zobecnit na styčnou plochu libovolného tvaru. Platí tedy poučka: Měrný tlak na styčnou plochu vypočteme jako poměr mezi velikostí síly  $F$  přitlačující těleso na styčnou plochu a velikostí  $S$  průmětu této plochy do roviny kolmé na směr působící síly  $F$  [4]. Formálně je to shodné s rovnicí (24). Při aplikaci poučky na styčnou válcovou plochu (např. u horizontálních čepů) dostaneme měrný tlak [8]



$$p = \frac{F}{d \cdot l}, \quad (26)$$

kde  $d$  je průměr styčné válcové plochy a  $l$  délka této plochy.

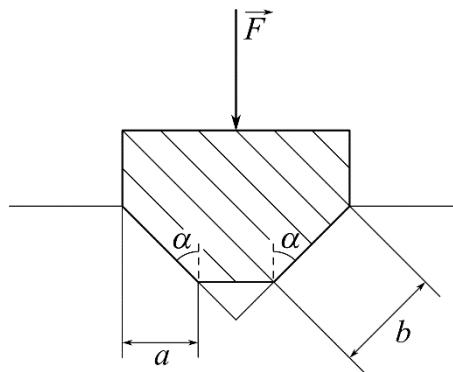
I pro měrný tlak ve styčných plochách je potřeba ověřovat pevnostní podmínku (tzv. kontrola na otláčení)

$$p \leq p_{Dov}. \quad (27)$$

Pro stýkající se součásti bez pohybu platí  $p_{Dov} \doteq (0,7 \div 0,9) \cdot \sigma_{Dov,d}$ , kde  $\sigma_{Dov,d}$  je dovolené napětí v tlaku toho ze stýkajících se materiálů, který má menší pevnost v tlaku [8]. U součástí se vzájemným pohybem se kontroluje tlak podle stejných rovnic, ale  $p_{Dov}$  se sníží podle požadavků na funkci, podle materiálu, jakosti styčných ploch, maziva, způsobu mazání, ale závisí i na rychlosti a provozní teplotě (např. celistvost olejového filmu). Je to proto, aby se mazivo ve styčných plochách nevytlačovalo ven. Pro stýkající se součásti v pohybu platí  $p_{Dov} \doteq (1 \div 20)$  MPa.

#### Příklad 11:

Jaké maximální zatížení snese vozík o hmotnosti 100 kg uložený na čtyřech ližinách délky 5 cm z materiálu 11600 pohybujících se po dvou vedeních prizmatického tvaru (viz Obr. 23). Úhel  $\alpha = 60^\circ$ , rozměr  $b = 60$  mm. Míra bezpečnosti je 2.



Obr. 23 Nákres k příkladu 11

#### Řešení:

Mez pevnosti vyčteme z číselného označení oceli, tedy  $\sigma_{Pt} = 600$  MPa (viz řešení příkladu 3). Zároveň pro tuto ocel platí, že mez kluzu je rovna přibližně polovině meze pevnosti. Po dosazení do vztahu (15) pro dovolené napětí v tahu dostaneme

$$\sigma_{Dov,d} \doteq \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt} \cdot K_{II}}{n} = \frac{0,5 \cdot 600 \cdot 0,85}{2} = 127,5 \text{ MPa},$$

kde koeficient dynamiky namáhání volíme  $K_{II} = 0,85$ , protože se jedná o tepavé namáhání. Dovolенý měrný tlak v ližinách bude pro stýkající se součásti bez pohybu

$$p_{Dov} \doteq 0,8 \cdot \sigma_{Dov,d} = 0,8 \cdot 127,5 = 102 \text{ MPa}.$$

Jedná se však o stýkající se součásti za pohybu, pro které maximální měrný tlak ve styčných plochách nesmí přesáhnout 20 MPa, musíme tak pro výpočet zatížení vycházet z menší hodnoty z obou měrných tlaků.

Pro výpočet síly musíme vypočítat celkovou plochu ližin, na které se bude zátěž rozkládat. Každá z ližin se opírá ve dvou obdélníkových plochách o stranách  $b$  a  $l$ . Pro výpočet měrného tlaku je však potřeba znát velikost průmětu styčných ploch do směru kolmého k zatěžující síle (viz poučka v kapitole 5.1). Pro kolmý průmět rozměru  $b$  (tj. rozměr  $a$ ) platí dle Obr. 23

$$a = b \cdot \sin \alpha = 51,96 \text{ mm.}$$

Celková plocha průmětů v případě čtyř ližin tak bude

$$S = (2 \cdot a \cdot l) \cdot 4 = 2078,4 \text{ mm}^2,$$

Do vzorce (24) pro skutečný tlak dosadíme hodnotu 20 MPa a vypočtenou celkovou plochu průmětů a zjistíme, jakou maximální silou můžeme působit. Tedy

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow 20 = \frac{F}{2078,4}.$$

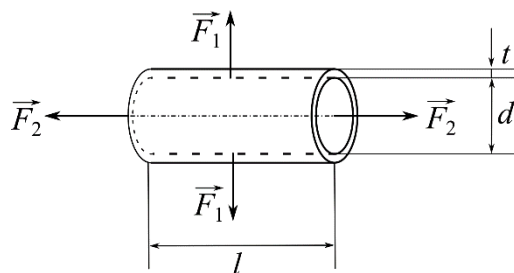
Odtud dostaneme sílu a zatížení

$$F = 41568 \text{ N} \Rightarrow m = 4156,8 \text{ kg} \doteq 4,16 \text{ t.}$$

Maximální hmotnost vozíku včetně zátěže je asi 4,16 t, tedy po odečtení hmotnosti samotného vozíku bude maximální možná zátěž přibližně 4 t.

## 5.2 Tenkostěnné nádoby s vnitřním přetlakem (tlakové nádoby)

Tenkostěnná nádoba s vnitřním přetlakem je nejčastěji nádoba tvaru válce s plochými, sférickými nebo polokulovými čely. Přetlak náplně uvnitř oproti nižšímu tlaku v okolí nádoby vyvolává poměrně složité namáhání v různých částech. V místech napojení čel k válcovému plášti a jejich blízkém okolí vznikají kvůli prohnutí čel ohybové momenty a dochází k následnému komplikovanému ohybovému namáhání, které je však nad rámec této práce. Bližší podrobnosti lze nalézt např. v [14]. Válcový plášť v dostatečné vzdálenosti od napojení čel lze ale řešit na základě bezmomentové teorie pouze jako namáhání prostým tahem. Plášť v těchto místech je tahem namáhán ve dvou směrech. Prvním z nich je směr příčný, který je vyvolán tlakovou silou  $F_1$  kolmo k ose nádoby, druhým je směr podélný (osový), který je vyvolán tlakovou silou  $F_2$  na čela nádoby a díky pevnému napojení na plášť způsobí namáhání spoje i samotného pláště tahem v podélném osovém směru (viz Obr. 24).



**Obr. 24** Tenkostěnná nádoba s vnitřním přetlakem

Provedeme podélný osový řez pláštěm nádoby kolmý na směr naznačené síly  $F_1$ . Plocha řezu  $S_1$  má tvar dvou úzkých obdélníků s délkami stran  $l$  a  $t$ . Proto platí  $S_1 = 2 \cdot t \cdot l$ . Sílu  $F_1$  určíme na základě poučky uvedené v předchozí kapitole 5.1 jako součin tlaku  $p$  uvnitř nádoby a plochy průmětu poloviny pláště válce do roviny kolmé k síle, tedy např. do roviny zvoleného osového řezu, což bude obdélník o stranách  $d$  a  $l$ . Odsud dostaneme  $F_1 = p \cdot d \cdot l$ . Po dosazení do vztahu (1) pro normálové napětí dostaneme

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{p \cdot d \cdot l}{2 \cdot t \cdot l} = \frac{p \cdot d}{2 \cdot t}. \quad (28)$$

Tomuto napětí říkáme obvodové (tečné) napětí v plášti.

Pro určení napětí v podélném směru provedeme myšlený řez rovinou kolmou k ose válcového pláště. Plocha řezu  $S_2$  má tvar mezikruží s průměrem  $d$  a tloušťkou  $t$ . Protože tloušťka je u tenkostěnných nádob výrazně menší než průměr nádoby, lze pro plochu mezikruží přibližně psát  $S_2 = \pi \cdot d \cdot t$ . Sílu  $F_2$  určíme analogicky jako  $F_1$ , kde plocha průmětu čela do roviny kolmé k ose válce má podobu kruhu s průměrem  $d$  bez ohledu na skutečný tvar dna. Síla  $F_2$  tedy bude  $F_2 = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ . Po dosazení do vztahu (1) pro normálové napětí dostaneme

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\pi \cdot d \cdot t} = \frac{p \cdot d}{4 \cdot t}. \quad (29)$$

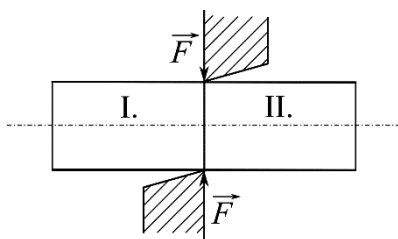
Toto napětí v plášti se nazývá osově. Porovnáme-li oba vztahy (28) a (29) dostaneme  $\sigma_1 = 2 \cdot \sigma_2$ . Protože je při stejném vnitřním tlaku obvodové napětí dvojnásobné oproti napětí osovému, existuje tedy dvakrát větší pravděpodobnost, že nádoba praskne podélně, než že se utrhne jedno z čel nádoby [15]. Pevnostní podmínku pro konstrukci tenkostěnných nádob lze proto psát ve tvaru

$$\sigma_1 \leq \sigma_{Dov,t}. \quad (30)$$

## 6. PROSTÝ SMYK (STŘIH)

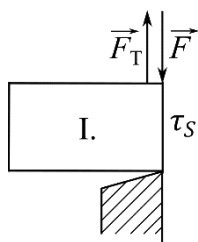
Na těleso vždy obecně působí prostorová soustava sil. Jednotlivé síly lze posouvat po své nositelce nebo přesouvat na jinou nositelku a doplnit příslušným momentem. Síly také můžeme skládat (např. dvojice sil, jejichž moment je opačný, síly na stejné nositelce, stejně velké a opačné atd.). U prostého smyku (stříhu) se dají všechny vnější síly, které působí na těleso, nahradit dvěma stejně velkými silami opačného smyslu, přičemž tyto síly působí na společné nositelce ležící v rovině namáhaného průřezu a procházející jeho těžištěm [8]. Prostým stříhem může být namáhán např. plech, který chceme ustříhnout nebo udělat v něm otvor, čepy či nýty, kterými jsou spojené trámy aj.

Při stříhu se vnější (akční) síly snaží posunout vůči sobě obě části tělesa v rovině namáhaného průřezu (viz Obr. 25). Materiál klade odpor tím, že tomuto posunu brání vnitřní (reakční) síly proti vnějším silám. To vyvolá napětí ve směru tečném k rovině namáhaného průřezu.



**Obr. 25** Prostý smyk

Síla  $F$  působící shora na pravé straně uvažovaného průřezu by posunula část II. dolů, kdyby na ni nepůsobily v opačném směru vnitřní síly části I., které jí udržují v rovnováze. Výslednici všech těchto vnitřních sil označíme  $F_T$  (viz Obr. 26). Z podmínky rovnováhy plyne  $F - F_T = 0 \Rightarrow F = F_T$ . Budeme-li předpokládat, že vnitřní síly jsou rovnoměrně rozloženy po celém průřezu, pak lze napsat, že napětí je rovno podílu výslednice vnitřních sil  $F_T$  a plochy  $S$  průřezu, čímž po dosazení z podmínky rovnováhy dostaneme základní pevnostní rovnici pro stříh (viz Tab. 1).

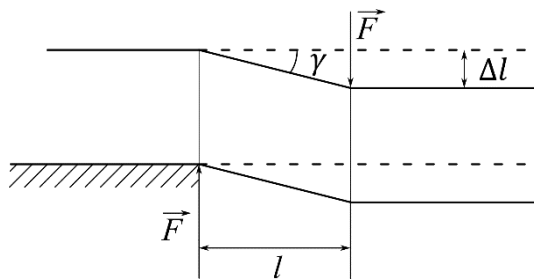


**Obr. 26** Výslednice vnitřních sil

V praxi se s prostým stříhem setkáme jen málokdy, často síly neleží na společné nositelce, např. vlivem vůle mezi čepelemi nůžek. Pak se jedná o působení silovou dvojicí s nenulovým momentem. Tím se ke stříhu přidává ještě ohyb a vzniká kombinované namáhání.

U prostého smyku je mírou deformace tzv. zkos (viz Obr. 27). Je to poměrná deformace vyjadřující posunutí  $\Delta l$  průřezů vůči sobě vztážené k délce  $l$  úseku, na které k deformaci dochází. Udává se v obloukové míře. Zkos  $\gamma$  je velice malý úhel, a proto pro něho lze psát [2]

$$\gamma \doteq \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta l}{l}. \quad (31)$$



**Obr. 27** Zkos ( $\gamma$  je zkos,  $\Delta l$  je posunutí průřezů)

Stejně jako u tahu a tlaku se u smyku (stříhu) provádí zkouška namáhání. Diagram zkoušky namáhání smykem má podobný průběh jako u prostého tahu, pouze na vodorovnou osu se vynáší zkos a na svislou tečné napětí. Porovnáním průběhu tahové zkoušky a zkoušky namáhání ve smyku bylo zjištěno, že pro houževnatou ocel platí přibližně  $\tau_{Ks} \doteq 0,6 \cdot \sigma_{Kt}$  a pro litinu  $\tau_{Ps} \doteq (0,8 \div 1) \cdot \sigma_{Pt}$  [4]. Až do meze úměrnosti platí Hookův zákon i pro smyk, tedy lze psát

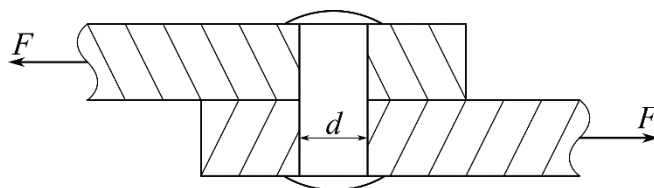
$$\tau_s = G \cdot \gamma, \quad (32)$$

kde  $G$  je tzv. modul pružnosti ve smyku, jeho hodnoty lze nalézt např. v [9]. Analogicky ostatním druhům namáhání lze psát i pevnostní podmínku pro stříh

$$\tau_{Sk,s} \leq \tau_{Dov,s}. \quad (33)$$

**Příklad 12:**

Vypočítejte průměr jednostřížného nýtu z materiálu 11343, který je zatížen statickou silou 1600 N (viz Obr. 28). Míru bezpečnosti volte 1,5.



**Obr. 28** Jednostřížný nýt

### Řešení:

Pro statické zatížení je koeficient dynamiky namáhání  $K_1 = 1$ . Mez pevnosti oceli vyčteme z jejího číselného označení, tj.  $\sigma_{Pt} = 340$  MPa (viz řešení příkladu 3). Dále využijeme poznatku, že mez kluzu v tahu je přibližně rovna polovině meze pevnosti, tedy  $\sigma_{Kt} = 170$  MPa. Z rovnice (15) určíme dovolené napětí, tedy

$$\tau_{Dov,s} = \frac{\tau_{Ks} \cdot K_1}{n} = \frac{0,6 \cdot \sigma_{Kt} \cdot K_1}{n} = \frac{0,6 \cdot 170 \cdot 1}{1,5} = 68 \text{ MPa},$$

kde jsme využili souvislosti mezi mezí kluzu ve stříhu a mezí kluzu v tahu (viz teorie výše). Dále vyjdeme z pevnostní podmínky pro stříh (33), v níž za skutečné napětí ve stříhu dosadíme napětí ze základní rovnice namáhání pro stříh (Tab. 1), a vyjádříme minimální namáhanou plochu  $S_{min}$ . Po dosazení dostaneme

$$S_{min} = \frac{F}{\tau_{Dov,s}} = \frac{1600}{68} = 23,53 \text{ mm}^2.$$

Namáhaný průřez nýtu má v tomto případě tvar kruhu, odkud pro průměr nýtu platí

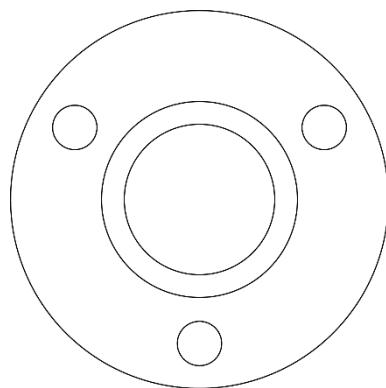
$$S_{min} \leq \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S_{min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 23,53}{\pi}} \doteq 5,5 \text{ mm}$$

Protože průměr nýtu vyšel 5,5 mm, což není standardně vyráběný rozměr, musíme tento průměr zaokrouhlit na nejbližší vyšší hodnotu průměru, která se běžně vyrábí. Tedy dle tabulek [9] musíme volit průměr nýtu 6 mm.

---

### Příklad 13:

Vypočítejte maximální sílu, kterou je možné staticky smykem namáhat tři kolíky o průměru 5 mm u nerezové příruby na trubku (viz Obr. 29). Materiál kolíků je ocel 11500. Míru bezpečnosti volte 2.



Obr. 29 Příruba

### Řešení:

Nejprve vypočítáme celkový průřez všech kolíků dohromady, tj.

$$S = \pi \cdot r^2 \cdot 3 = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 3 = 58,875 \text{ mm}^2.$$

Pro statické zatížení je koeficient dynamiky namáhání  $K_1 = 1$ . Mez pevnosti určíme opět z číselného označení oceli, tj.  $\sigma_{Pt} = 500$  MPa, polovina z toho odpovídá přibližně mezi kluzu. Na základě souvislosti mezi mezí kluzu v tahu a ve smyku a s využitím rovnice (15) dostaneme

$$\tau_{Dov,S} = \frac{\tau_{Ks} \cdot K_1}{n} = \frac{0,6 \cdot \sigma_{Kt} \cdot K_1}{n} = \frac{0,6 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{Pt} \cdot K_1}{n}$$

Výpočet síly vychází z pevnostní podmínky (33) a Tab. 1, tedy

$$F \leq S \cdot \tau_{Dov,S}$$

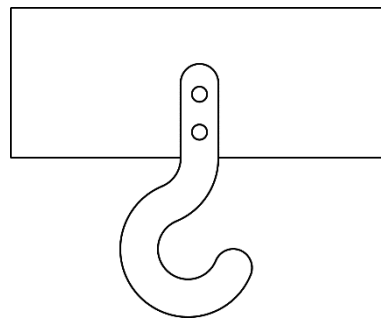
Po dosazení

$$F \leq 58,875 \cdot 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot 500 \cdot 1}{2} = 58,875 \cdot 75 = 4415,625 \text{ N.}$$

Maximální síla, kterou lze namáhat kolíky, je přibližně 4,4 kN.

#### Příklad 14:

Hák je ke konstrukci připojen dvěma kolíky o průměru 5 mm (viz Obr. 30). Hák je podroben míjivému namáhání na smyk silou 6 kN. Kolíky jsou z oceli 11600. Míra bezpečnosti je 2. Proveďte kontrolu spojení. V případě nevyhovujícího spojení určete, kolik takových kolíků je třeba přidat, aby byla splněna pevnostní podmínka.



**Obr. 30** Ilustrační obrázek k příkladu 14

#### Řešení:

Při kontrole spojení je třeba ověřit, zda je splněna pevnostní podmínka pro smyk (33). Musíme tedy určit skutečné a dovolené napětí. Nejdříve určíme celkový namáhaný průřez, tedy

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 2 = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \doteq 39,25 \text{ mm}^2.$$

Pro skutečné napětí dostaneme dle Tab. 1

$$\tau_{Sk,S} = \frac{F}{S} = \frac{6000}{39,25} \doteq 152,87 \text{ MPa.}$$

Mez kluzu v tahu určíme z meze pevnosti v tahu vyčtené z číselného označení oceli

$$\sigma_{Kt} = 0,5 \cdot \sigma_{Pt} = 0,5 \cdot 600 = 300 \text{ MPa.}$$

V případě míjivého zatížení je koeficient dynamiky namáhání  $K_{II} = 0,85$ . Dovolené napětí pro smyk na základě rovnice (15) a s využitím souvislosti mezi mezí kluzu ve smyku a v tahu bude

$$\tau_{Dov,s} \doteq \frac{\tau_{Ks} \cdot K_{II}}{n} = \frac{0,6 \cdot \sigma_{Kt} \cdot K_{II}}{n} = \frac{0,6 \cdot 300 \cdot 0,85}{2} = 76,5 \text{ MPa}$$

Dovolené napětí 76,5 MPa je menší než skutečné napětí 152,87 MPa, spojení tudíž nevyhovuje. Musíme proto z pevnostní podmínky (33) a definice tečného napětí ve smyku dle Tab. 1 určit minimální celkový průřez všech kolíků, tedy

$$\tau_{Dov,s} \geq \frac{F}{S_{min}},$$

odkud

$$76,5 \geq \frac{6000}{S_{min}} \Rightarrow S_{min} \geq \frac{6000}{76,5} = 78,43 \text{ mm}^2.$$

Vydělením plochou průřezu  $S_0$  jednoho kolíku určíme nutný minimální počet kolíků

$$N \geq \frac{S_{min}}{S_0} = \frac{4 \cdot S_{min}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 78,43}{\pi \cdot 5^2} = 3,994 \doteq 4.$$

Aby spojení vyhovovalo, je potřeba mít hák připevněn minimálně čtyřmi kolíky, což znamená, že musíme přidat ještě dva kolíky.

### **Příklad 15:**

Do ocelového plechu z materiálu 11300 tloušťky 1 mm potřebujeme tyčovým výsečником s hlavicí prorazit otvory o průměru 18 mm. Jakou sílu k tomu budeme potřebovat?

### **Řešení:**

K proražení otvorů je potřeba vyvolat napětí větší, než je mez pevnosti materiálu ve smyku. Musíme proto z číselného značení oceli a souvislosti mezi napětími ve smyku a tahu vypočítat velikost potřebného napětí

$$\tau_{Ps} \doteq 0,6 \cdot \sigma_{Pt} = 0,6 \cdot 300 = 180 \text{ MPa}.$$

Namáhaný průřez odpovídá plášti válce o průměru podstavy rovnému průměru vyráženého otvoru a výšce rovné tloušťce materiálu. Tedy

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v.$$

Dosadíme do vzorce pro napětí ve smyku (viz Tab. 1)

$$\tau_{Ps} = \frac{F}{S} = \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot v},$$

odkud vypočítáme potřebnou sílu

$$F = \tau_{Ps} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v = 180 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 1 = 10173,6 \text{ N}.$$

Síla, kterou budeme potřebovat, je asi 10,2 kN.



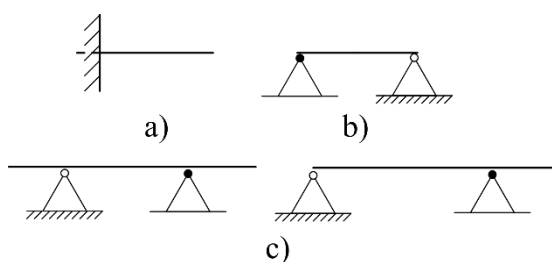
## 7. PROSTÝ OHYB

Těleso je namáháno v daném průřezu prostým ohybem, jestliže se dají vnější síly, které působí po jedné straně průřezu, nahradit dvojicí sil, jejíž rovina je k průřezu kolmá. Tato dvojice způsobí v uvedeném průřezu vnitřní normálová napětí, se kterými musí být dvojice vnějších sil v rovnováze. Takový moment dvojice se nazývá ohybový moment a značí se  $M_0$ . Namáhané těleso se ohne a průřezy původně rovnoběžné se vzájemně nakloní [4]. Vnější zatížení může mít charakter osamělé síly, nebo spojitého zatížení, ale považujeme za ně i vlastní tíhu a reakce podpor [8].

Typickým příkladem je tyčový díl libovolného průřezu namáhaný ohybem. Takový díl nazýváme nosník. Pod název nosník zahrnujeme i hřídele, páky, čepy, nápravy a jiné strojní součásti namáhané ohybem. Prostým ohybem je nosník namáhan tehdy, jestliže rovina všech působících sil a silových dvojic obsahuje podélnou osu nosníku [16]. Při ohybu jsou vnější vlákna (vypuklá část) namáhána tahem a vnitřní (dutá část) tlakem.

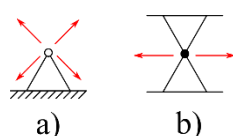
### 7.1 Druhy nosníků a podpor

Nosníky dělíme podle způsobu uložení na staticky určité a staticky neurčité. Staticky určité nosníky (viz Obr. 31) mohou být dále na jednom konci vetknuté, na dvou podporách (jedné pevné a druhé volné) nebo s převislými konci či koncem.



**Obr. 31** Druhy staticky určitých nosníků: a) vetknutý, b) na dvou podporách, c) s převislými konci nebo převislým koncem

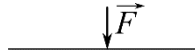
Podpory existují pevné, ty mohou zachycovat síly ve všech směrech (reakce v ní může mít obecný směr) a volné, ty mohou zachycovat pouze síly kolmé na směr volnosti uložení nosníku (viz Obr. 32).



**Obr. 32** Druhy podpor: a) pevná, b) volná

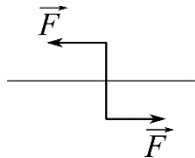
## 7.2 Druhy zatížení

Nosníky mohou být zatíženy různým silovým působením majícím mnoho účinků, často kombinovaných. Mezi nejjednodušší zatížení způsobující prostý ohyb patří zatížení osamělou silou, silovou dvojicí nebo spojitým zatížením, ať už rovnoměrně, pravidelně nebo nepravidelně rozloženým. V případě zatížení osamělou silou působí tato síla teoreticky v jednom bodě, v praxi takový případ uvažujeme, jestliže je styková plocha proti délce nosníku zanedbatelná (viz Obr. 33).



**Obr. 33** Osamělá síla

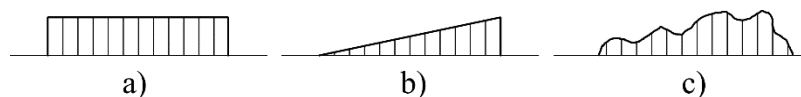
V případě zatížení silovou dvojicí na ohyb tato dvojice leží v rovině procházející osou nosníku, její výsledný moment je kolmý k této ose, čímž vyvolá prostý ohyb a nevzniká zde žádná posouvající, ani normálová síla (viz Obr. 34).



**Obr. 34** Silová dvojice

V případě namáhání nosníku spojitým zatížením je zátěž spojitě rozložena po části nebo po celé délce nosníku. Mezi spojitými zatíženími rozlišujeme tři varianty (viz Obr. 35):

- rovnoměrné – na délkovou jednotku působí vždy stejné zatížení, např. nasypaný písek, který rovnoměrně rozprostřeme, kde  $q$  je měrné zatížení na jednotku délky nosníku,
- pravidelně rozložené – např. nasypaný písek, jehož rozprostření má nějaké pravidlo popsatelné matematickou funkcí, např. vrstva písku rovnoměrně narůstá od jednoho konce k druhému (lineární funkce), nebo
- nepravidelně rozložené – např. nasypaný písek, jehož rozprostření nemá žádné pravidlo, které by šlo popsat jednoduchou matematickou funkcí, např. nasypeme naprosto nepravidelnou hromadu písku.



**Obr. 35** Spojité zatížení nosníku

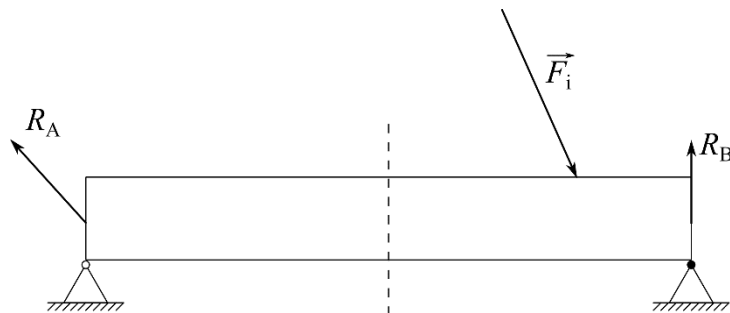
Matematicky nejjednoduššími případy jsou na jednom konci vetknutý nosník nebo nosník na dvou podporách bez převislých konců, v obou případech namáhaný buď

jedinou osamělou silou anebo namáhaný spojitým rovnoměrně rozloženým zatížením. V dalších částech práce se omezíme pouze na tyto případy. Další složitější varianty lze nalézt v literatuře, např. v [4, 8].

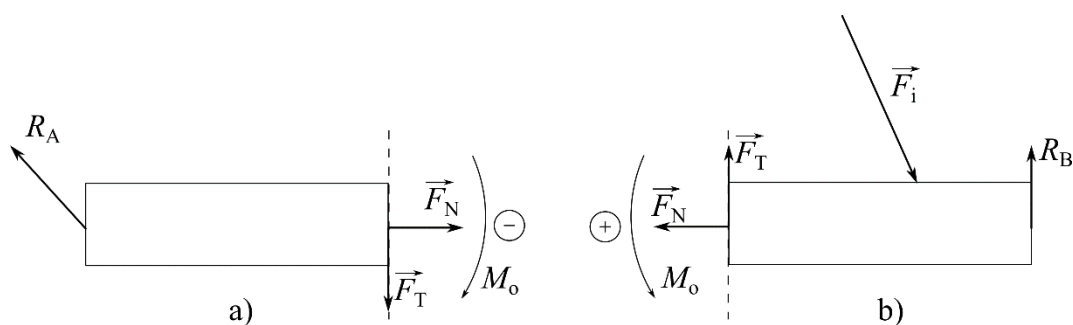
### 7.3 Vnitřní statické účinky a zatížení

Při obecném zatížení (viz Obr. 36) vznikají v každém uvažovaném řezu vnitřní statické účinky. Vnitřní statické účinky působící na jednu část nosníku jsou v rovnováze s vnitřními účinky působícími na druhou část nosníku. Tyto účinky se určují tzv. metodou řezu [3]. Vedeme libovolný řez nosníkem kolmo na jeho podélnou osu a vyšetříme silové účinky působící na každou část nosníku zvlášť (viz Obr. 37). Na část vlevo od uvažovaného řezu působí reakce v podpoře A a vnější silová dvojice mající moment  $M_o$  (Obr. 37a), na část napravo od uvažovaného řezu působí reakce v podpoře B, vnější silová dvojice mající opět moment  $M_o$  opačného směru a vlastní vnější působící síla  $F_i$  (Obr. 37b). Toto silové působení se projeví vnitřními silovými účinky v uvažovaném řezu takovým způsobem, aby každá část nosníku byla v rovnováze. Působení v uvažovaném řezu může mít různý charakter:

- 1) může působit normálová síla  $F_N$ , která se určí jako algebraický součet všech sil působících na uvažovanou část nosníku v osovém směru a která namáhá nosník tahem nebo tlakem;
- 2) může působit posouvající síla  $F_T$ , která se vypočte jako algebraický součet všech sil působících na uvažovanou část nosníku v příčném směru (kolmo na osu) a která působí na materiál nosníku smykem;
- 3) může působit ohybový moment  $M_o$ , který se určí jako algebraický součet momentů všech vnějších sil působících na danou část nosníku.



**Obr. 36** Obecné zatížení nosníku uloženého na dvou podporách osamělou silou



**Obr. 37** Metoda řezu

K určování smyslu posouvající síly a ohybového momentu v uvažovaném řezu nosníku určujeme znaménko dle následující konvence. Za kladnou považujeme takovou posouvající sílu, která působí na levou část nosníku vzhledem k místu řezu směrem nahoru a na pravou část nosníku dolů a naopak, za zápornou považujeme posouvající sílu, která působí na levou část nosníku vzhledem k místu řezu směrem dolů a na pravou část nosníku nahoru. Co se týká znaménka ohybového momentu, tak za kladný považujeme moment, který způsobuje prohnutí nosníku směrem dolů (nosník vypuklý dolů), a za záporný považujeme moment, který prohýbá nosník nahoru (nosník vypuklý nahoru) – viz Obr. 38.



**Obr. 38** Znaménková konvence pro ohybové momenty

Výpočty týkající se ohybů mohou sledovat následující cíle:

- ověřit, zda navržený nosník vyhovuje pevnostní podmínce,
- určit rozměry nosníku tak, aby vyhovoval pevnostní podmínce,
- ověřit, zda maximální průhyb je menší než přípustná hodnota z hlediska funkce zařízení,
- určit rozměry nosníku tak, aby byl maximální průhyb menší než přípustná hodnota z hlediska funkce zařízení.

Vlastní postup řešení je takový, že nejprve na základě statické rovnováhy určíme vazbové síly, tj. síly v podporách. Následně určíme průběh posouvajících sil  $F_T$  a zakreslíme ho pod nosník. Posouvající sílu pro daný průřez vypočteme jako algebraický součet všech vnějších sil (včetně vazbových) nalevo, nebo napravo od místa uvažovaného průřezu. Znaménko výsledné posouvající síly pak určíme v souladu s výše zmíněnou znaménkovou konvencí. Výhodné je použít tu stranu, na které působí menší počet vnějších sil. Poté určíme průběh ohybových momentů  $M_o$  a zakreslíme ho pod

průběh posouvajících sil. Ohybový moment v libovolném průřezu nosníku vypočteme jako algebraický součet momentů všech vnějších sil působících nalevo, nebo napravo od uvažovaného průřezu, vzhledem k tomuto průřezu. Největší ohybový moment je v takovém průřezu nosníku, kde posouvající síla mění své znaménko nebo je nulová, to je tzv. Schwedlerova věta [16]. Takový průřez se nazývá nebezpečný a v tomto místě je nutné ověřovat pevnostní podmínku v ohybu (39). Určení místa a velikosti největšího průhybu nosníku může být poměrně komplikované, ale v mnoha aplikacích lze vycházet z maximálního průhybu  $y$  vetknutého nosníku na jeho volném konci. Pro něho lze odvodit pravidlo [8]

$$y = \frac{\text{statický moment plochy k místu největšího průhybu}}{E \cdot I}, \quad (34)$$

kde  $E$  je modul pružnosti materiálu nosníku a  $I$  je moment setrvačnosti plochy průřezu vzhledem k neutrální ose nebo také osový moment setrvačnosti (viz kapitola 7.6). Součin  $E \cdot I$  se nazývá tuhost v ohybu [4, 17].

#### 7.4 Podmínky pevnosti

K odvození podmínky pevnosti budeme vycházet z metody řezu pro jednoduchý vetknutý nosník zatížený osamělou silou na volném konci (viz Obr. 39). Představme si, že myšleným řezem C – C oddělíme levou část nosníku. Aby ve zbývající pravé části nosníku nastala rovnováha, musíme k ní připojit moment vnitřních sil  $M'_0$ , kterým oddělená část působila na zbylou část a udržovala ji v rovnováze s momentem vnější síly  $M_0 = F \cdot x$ . Ohybem způsobené vzájemné sklonění průřezů vůči sobě vyvolá ve vnější části uvažovaného průřezu tahová napětí a ve vnitřní části průřezu napětí tlaková. Existuje však v každém průřezu místo, v němž nedochází k namáhání tahem ani tlakem. Tímto místem prochází tzv. neutrální osa [16].

Aby byl nosník a každá jeho část v rovnováze, musí být splněny podmínky vycházející ze statiky:

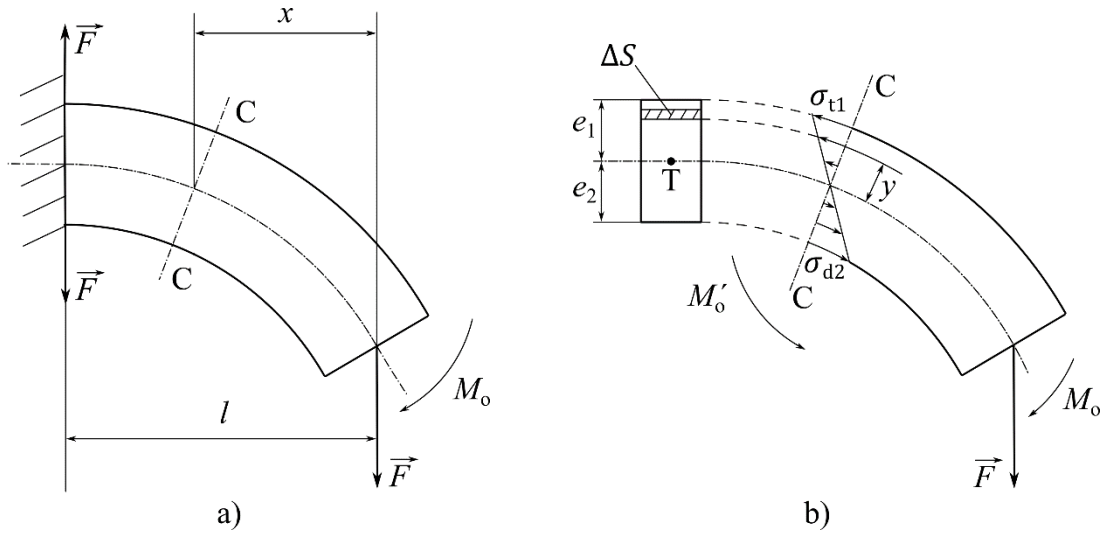
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (35)$$

Nyní to aplikujeme na zbývající pravou část nosníku. Ze silové rovnováhy ve vodorovném směru dostaneme za předpokladu platnosti Hookova zákona pro materiál nosníku rovnost

$$\sum F_{x_i} = \frac{\sigma_{t1}}{e_1} \cdot \sum \Delta S \cdot y = \frac{\sigma_{d2}}{e_2} \cdot \sum \Delta S \cdot y = 0, \quad (36)$$

kde význam jednotlivých písmen je zřejmý z Obr. 39 b). To je však splněné pouze tehdy, když  $\sum \Delta S \cdot y = 0$ , protože ostatní veličiny jsou nenulové. Z toho plyne, že

neutrální osa, na níž nejsou vlákna ani tažena, ani tlačena, prochází těžištěm průřezové plochy.



**Obr. 39** Metoda řezu u jednoduchého vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou na volném konci (prohnutí pro názornost výrazně zvětšeno) – a) poloha zvoleného řezu, b) rovnováha části nosníku napravo od zvoleného řezu

Vnější síla se pevností nosníku přenáší na každý průřez, tedy i na C – C, kde způsobí smyková napětí a tím i vnitřní síly, pro které platí podmínka rovnováhy ve směru svislém, tj.  $\sum F_{y_i} = 0$ . Smyková napětí jsou u delších nosníků oproti napětím normálovým velmi malá, a proto se jimi nebudeme zabývat [4].

Z momentové rovnováhy pro pravou část nosníku dostaneme

$$M_0 = \frac{\sigma_{t1}}{e_1} \cdot \sum \Delta S \cdot y^2 = \frac{\sigma_{d2}}{e_2} \cdot \sum \Delta S \cdot y^2, \quad (37)$$

kde význam jednotlivých veličin je opět zřejmý z Obr. 39 b). Výraz  $I = \sum \Delta S \cdot y^2$  se nazývá kvadratický moment setrvačnosti plochy průřezu vzhledem k neutrální ose neboli osový moment setrvačnosti (blíže o něm viz kapitola 7.6). Pro souměrný průřez ( $e_1 = e_2 = e$ ) a houževnatý materiál se stejnou pevností v tahu a tlaku ( $\sigma_{t1} = \sigma_{d2}$ ) lze definovat veličinu průřezový modul v ohybu  $W_0$  vztahem

$$W_0 = \frac{I}{e}, \quad (38)$$

kde  $e$  je tzv. vzdálenost krajního vlákna. Podmínku pevnosti v ohybu lze pak psát ve tvaru

$$\frac{M_0}{W_0} \leq \sigma_{Dov,0}, \quad (39)$$

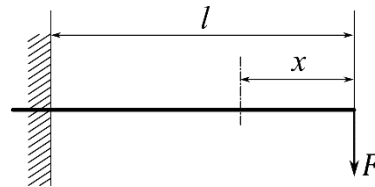
kde  $\sigma_{Dov,0}$  je dovolené napětí v ohybu. U houževnatých materiálů je mez kluzu v ohybu přibližně o 15% větší než mez kluzu v tahu, odsud  $\sigma_{Dov,0} = 1,15 \cdot \sigma_{Dov,t}$  [4].

## 7.5 Grafický průběh posouvajících sil a ohybových momentů

Průběh posouvajících sil a ohybových momentů zobrazujeme graficky. Omezíme se na nejjednodušší druhy nosníků všude stejného průřezu a jednoduchá působení sil na ně. Další složitější varianty jsou nad rámec této práce a lze je nalézt v odborné literatuře, např. v [4, 8, 16].

### 1. Vetknutý nosník s osamělou silou na volném konci

Mějme nosník stálého průřezu na levém konci vetknutý a na pravém konci zatížený osamělou silou  $F$  (viz Obr. 40). Aby byl celý nosník v rovnováze, musíme vypočítat vazbovou sílu  $R$  v místě vetknutí, která musí na základě první z podmínek (35) působit směrem svise vzhůru a její velikost je rovna velikosti osamělé síly  $F$  na volném konci nosníku, tedy  $F = R$ .

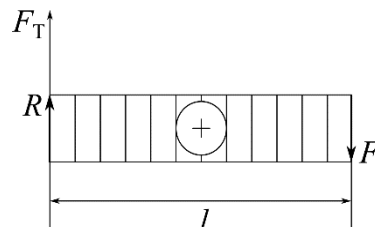


**Obr. 40** Vetknutý nosník s osamělou silou na volném konci

V libovolně zvoleném řezu ve vzdálenosti  $x$  od volného konce určíme posouvající síly. Nalevo od tohoto řezu působí pouze vazbová síla  $R$ , která se snaží posouvat část nosníku nalevo od řezu směrem vzhůru. Obdobně napravo od řezu působí pouze osamělá síla  $F$ , která se snaží posunout tuto část nosníku směrem dolů. Stejnou situaci dostaneme v libovolném řezu nezávisle na jeho poloze  $x$ . Proto pro posouvající sílu bude platit

$$F_T = R = F. \quad (40)$$

Podle znaménkové konvence zmíněné výše pak bude znaménko posouvající síly vždy kladné. Grafický průběh posouvajících sil je znázorněn na Obr. 41.



**Obr. 41** Vetknutý nosník s osamělou silou – průběh posouvajících sil

Uvažujme opět řez v libovolné poloze  $x$  od volného konce. Napravo od tohoto řezu je nosník namáhán pouze momentem osamělé síly  $F$ , který se snaží ohnout volný konec

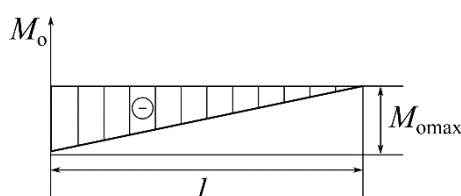
nosníku dolů, čímž dojde k prohnutí celého nosníku směrem vzhůru. Podle znaménkové konvence bude mít ohybový moment záporné znaménko. Pro jeho velikost dostaneme

$$M_0(x) = F \cdot x, \quad (41)$$

což představuje lineární funkci proměnné  $x$ . Tomu odpovídající grafický průběh ohybového momentu v závislosti na poloze  $x$  uvažovaného řezu je na Obr. 42. Protože ohybový moment lineárně narůstá s rostoucí vzdáleností od zatíženého volného konce, je zřejmé, že maxima dosáhne na vetknutém konci. Jeho velikost bude

$$M_{\text{omax}} = F \cdot l. \quad (42)$$

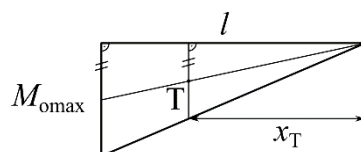
V místě vetknutí bude nebezpečný průřez, který je třeba konfrontovat s pevnostní podmínkou pro ohyb (39).



**Obr. 42** Moment ohýbání u vetknutého nosníku s osamělou silou

Pro výpočet maximálního průhybu použijeme vztah (34). Momentová plocha má tvar pravoúhlého trojúhelníku (viz Obr. 43) o stranách  $M_{\text{omax}}$  a  $l$ , pro jehož obsah platí

$$S = \frac{l \cdot M_{\text{omax}}}{2} = \frac{l \cdot F \cdot l}{2} = \frac{l^2 \cdot F}{2}. \quad (43)$$



**Obr. 43** Těžiště momentové plochy

Těžiště T momentové plochy je těžištěm trojúhelníku. Vzdálenost těžiště T od vrcholu trojúhelníku je dvoutřetinová oproti délce celé těžnice vedené z tohoto vrcholu. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme  $x_T = \frac{2}{3}l$ . Moment momentové plochy vypočítáme jako součin velikosti momentové plochy a jejího ramene, tedy vzdálenosti těžiště od místa největšího průhybu měřené ve vodorovném směru, která odpovídá výše určené poloze těžiště  $x_T$ . Odsud

$$M_{\text{mp}} = \frac{l^2 \cdot F}{2} \cdot x_T = \frac{l^2 \cdot F}{2} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{l^3 \cdot F}{3}. \quad (44)$$

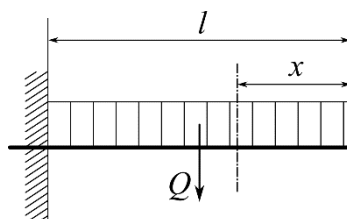
Maximální průhyb bude na zatíženém volném konci a jeho velikost na základě vztahu (34) bude po úpravách



$$y = \frac{M_{\text{mp}}}{E \cdot I} = \frac{\frac{l^3 \cdot F}{3}}{E \cdot I} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (45)$$

## 2. Vetknutý nosník se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

Uvažujme nosník délky  $l$  vetknutý na levé straně a zatížený spojitým rovnoměrně rozloženým břemenem tíhy  $Q$  v celé své délce (viz Obr. 44). Na základě silové rovnováhy (35) zjistíme, že vazbová síla  $R$  v místě vetknutí musí směřovat svisle vzhůru a pro její velikost platí  $R = Q$ .

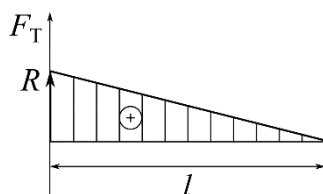


**Obr. 44** Vetknutý nosník se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

V libovolně zvoleném řezu ve vzdálenosti  $x$  od volného konce nosníku určíme posouvající síly. Omezíme se pouze na pravou část od uvažovaného řezu, protože na tuto část působí menší počet vnějších sil, konkrétně pouze tíha zátěže délky  $x$ , která se snaží pravou stranu nosníku posunout směrem dolů. Podle znaménkové konvence je posouvající síla  $F_T$  opět kladná. U rovnoměrně rozloženého břemene tíhy  $Q$  lze definovat měrné zatížení na jednotku délky  $q$ , přičemž platí  $Q = l \cdot q$ . Pro velikost posouvající síly  $F_T$  tak platí

$$F_T = q \cdot x. \quad (46)$$

Posouvající síla tedy lineárně narůstá se vzdáleností  $x$  od volného konce nosníku, největší bude v místě vetknutí a její velikost je zde rovna vazbové síle  $R$ . Grafický průběh posouvajících sil je znázorněn na Obr. 45.



**Obr. 45** Vetknutý nosník se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce  
– průběh posouvajících sil

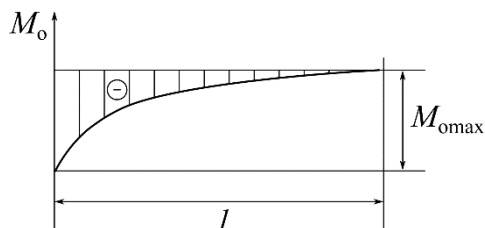
Ohybový moment určíme také na pravé straně od uvažovaného řezu. Tíha zátěže této části nosníku je  $Q(x) = q \cdot x$  a bude mít působíště uprostřed její délky. Ohybový moment tak je

$$M_o(x) = Q(x) \cdot \frac{x}{2} = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} \cdot x^2. \quad (47)$$

Moment prohýbá nosník směrem nahoru a jde tedy o záporný moment. Rovnice (47) představuje kvadratickou funkci proměnné  $x$ , jejímž grafickým znázorněním je parabola (viz Obr. 46). Maximální ohybový moment o velikosti

$$M_{o\max} = \frac{q}{2} \cdot l^2, \quad (48)$$

a tedy i nebezpečný průřez jsou opět v místě vetknutí. Toto místo tak musí vyhovovat pevnostní podmínce pro ohyb (39).



**Obr. 46** Moment ohýbání vetknutého nosníku se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

Maximální průhyb nosníku je opět na volném konci a jeho velikost lze odvodit na základě vztahu (34). Výpočet je vzhledem k tvaru momentové plochy poměrně komplikovaný, a proto uvedeme jen výsledný vztah, který je možné nalézt např. v [9], tedy

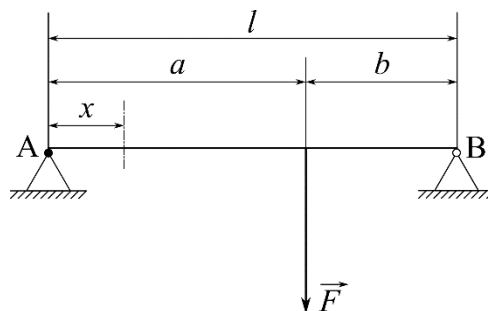
$$y = \frac{q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot I}. \quad (49)$$

### 3. Prostý nosník na dvou podporách bez převislých konců s jedinou osamělou silou působící v obecné poloze mezi podporami

Mějme prostý nosník všude stejného průřezu bez převislých konců uložený na dvou podporách, na který ve vzdálenosti  $a$  od podpory A působí osamělá síla  $F$  směrem svisle dolů (viz Obr. 47). Na základě podmínek rovnováhy (35) určíme reakce v obou podporách. Po úpravách dostaneme

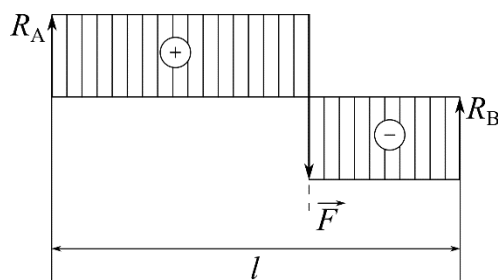
$$R_A = \frac{b \cdot F}{l}, R_B = \frac{a \cdot F}{l}, \quad (50)$$

přičemž obě reakce směřují svisle vzhůru.



**Obr. 47** Prostý nosník s jednou osamělou silou

V libovolně zvoleném řezu ve vzdálenosti  $x$  od podpory A nosníku určíme posouvající síly. Bude-li  $x < a$ , určíme posouvající síly z části nalevo od řezu, kde působí pouze reakce  $R_A$ . Ta se snaží levou část posunout směrem vzhůru, proto bude mít dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro  $x > a$  využijeme část nosníku vpravo od uvažovaného řezu. V takovém případě zde působí pouze reakce  $R_B$ , která se snaží posunout pravou část nosníku směrem vzhůru, proto bude mít dle konvence záporné znaménko. V řezu v místě působící síly  $F$  ( $x = a$ ) dochází ke skokové změně znaménka posouvající síly z kladného na záporné. Grafický průběh posouvající síly je znázorněn na Obr. 48.



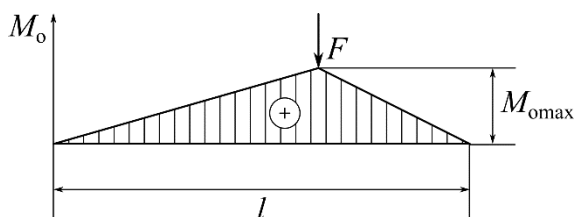
**Obr. 48** Prostý nosník s jednou osamělou silou – průběh posouvajících sil

V libovolném řezu bude působením síly  $F$  vždy nosník prohýbán směrem dolů, a proto bude mít dle konvence ohybový moment po celé délce kladné znaménko. Jeho velikost určíme zvlášť pro levou i pravou část nosníku vzhledem k místu působení osamělé vnější síly. Pro  $x < a$  bude výhodnější využít levou část nosníku, na který působí pouze reakce  $R_A$ , jejíž moment vzhledem k uvažovanému řezu je  $R_A \cdot x$ . S rostoucí vzdáleností  $x$  řezu od podpory A ohybový moment lineárně narůstá a maxima dosáhne pro  $x = a$ , kde jeho velikost bude  $R_A \cdot a$ . Pro  $x > a$  bude výhodnější využít pravou část nosníku, na kterou působí pouze reakce  $R_B$ , jejíž moment vzhledem k uvažovanému řezu je  $R_B \cdot (l - x)$ . S rostoucí vzdáleností uvažovaného řezu od podpory B (tj. pro klesající hodnotu  $x$ ) ohybový moment lineárně roste a maxima dosáhne opět pro  $x = a$ , kde jeho velikost bude  $R_B \cdot b$ . Při ověření momentové rovnováhy (35) vzhledem

k působišti síly  $F$  lze zjistit, že oba maximální momenty jsou stejné a tedy platí, že maximální ohybový moment na celý nosník bude v místě působení síly  $F$ , přičemž pro jeho velikost platí

$$M_{\text{omax}} = R_A \cdot a = R_B \cdot b. \quad (51)$$

Grafický průběh ohybového momentu je na Obr. 49. V místě maximálního momentu, které je totožné s místem, kde posouvající síly  $F_T$  mění svůj smysl (znaménko), je tedy nebezpečný průřez, v němž je třeba ověřovat pevnostní podmínku pro ohyb (39). V tomto místě lze hypoteticky nosník rozdělit na dva vetknuté nosníky se stejným maximálním ohybovým momentem.



**Obr. 49** Ohybový moment prostého nosníku s jednou osamělou silou

Průhyb nosníku v místě působení síly  $F$  je [9]

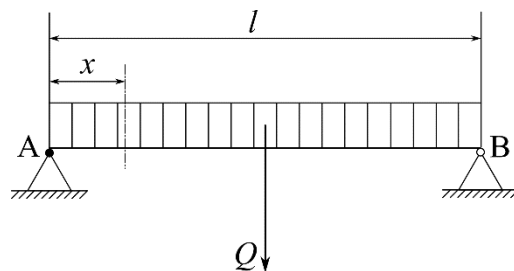
$$y = \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l}. \quad (52)$$

Maximální průhyb ale bude vždy v delší z obou částí nosníku vzhledem k působišti osamělé síly. Jeho výpočet je však výrazně komplikovanější a lze ho nalézt v literatuře, např. [8].

#### 4. Prostý nosník na dvou podporách bez převislých konců se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

Mějme prostý nosník všude stejného průřezu bez převislých konců uložený na dvou podporách zatížený spojitým rovnoměrně rozloženým břemenem o tíže  $Q$  po celé délce nosníku (viz Obr. 50). U rovnoměrného zatížení má břemeno těžiště přesně uprostřed nosníku. Na základě podmínek rovnováhy (35) určíme reakce v obou podporách. Obě reakce budou směřovat svisle vzhůru a pro jejich velikost platí

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2}. \quad (53)$$



**Obr. 50** Prostý nosník se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

Opět nadefinujeme měrné zatížení na jednotku délky  $q$ , tedy  $Q = l \cdot q$ . Označíme vzdálenost  $x$  uvažovaného řezu od podpory A. Průběh posouvajících sil určíme pro uvažovaný řez v levé polovině nosníku z levé části od řezu, kde působí směrem vzhůru reakce  $R_A$  a směrem dolů tíha části břemene o délce  $x$ . Protože tyto síly mají opačný směr, dostaneme pro velikost posouvající síly

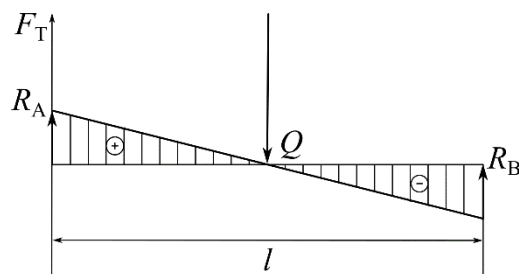
$$F_T = R_A - q \cdot x. \quad (54)$$

Tato síla se snaží posunout levou část nosníku směrem vzhůru, a proto bude mít dle konvence kladné znaménko. S rostoucí vzdáleností  $x$  od podpory A velikost posouvající síly klesá a uprostřed nosníku bude nulová.

Pro pravou polovinu nosníku uvažujme síly působící napravo od řezu, tedy reakci  $R_B$  směřující vzhůru a tíhu části břemene od řezu k podpoře B směřující svisle dolů. Vzhledem k opačnému směru těchto sil dostaneme pro velikost posouvající síly v pravé polovině nosníku

$$F_T = R_B - q \cdot (l - x). \quad (55)$$

Tato síla se snaží posunout pravou část nosníku směrem dolů, a proto bude mít dle konvence záporné znaménko. S rostoucí vzdáleností uvažovaného řezu od podpory B (tj. pro klesající hodnotu proměnné  $x$ ) velikost posouvající síly opět klesá k nule v místě uprostřed nosníku. Grafický průběh posouvajících sil je pro celý nosník znázorněn na Obr. 51.



**Obr. 51** Prostý nosník se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce – průběh posouvajících sil

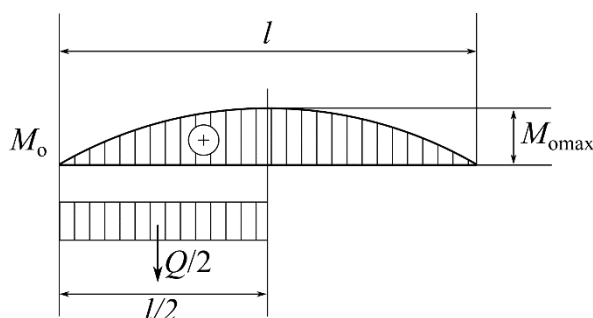
Tíha břemene prohýbá v libovolném řezu nosník směrem dolů, a proto bude mít dle konvence ohybový moment všude kladné znaménko. Pro danou polohu řezu určíme moment ze sil nalevo od řezu. Reakce v podpoře A má moment o velikosti  $R_A \cdot x$ , tíha zátěže nalevo od řezu má moment  $q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$ . Oba tyto momenty mají opačný směr, odtud pro výsledný ohybový moment platí

$$M_o(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot x \cdot (l-x)}{2}. \quad (56)$$

Grafický průběh ohybového momentu je na Obr. 52. Z rovnice (56) vyplývá, že ohybový moment je kvadratickou funkcí vzdálenosti  $x$  uvažovaného řezu od podpory A a maximální bude uprostřed délky nosníku, tedy pro  $x = \frac{l}{2}$ . Pro jeho velikost platí

$$M_{o\max} = \frac{q \cdot l^2}{8}. \quad (57)$$

V tomto místě posouvající síly mění svůj smysl a je tak zde i nebezpečný průřez. Maximální moment z rovnice (57) proto musí být konfrontován s pevnostní podmínkou pro ohyb (39).



**Obr. 52** Ohybový moment u prostého nosníku se spojitým, rovnoměrně rozloženým břemenem v celé délce

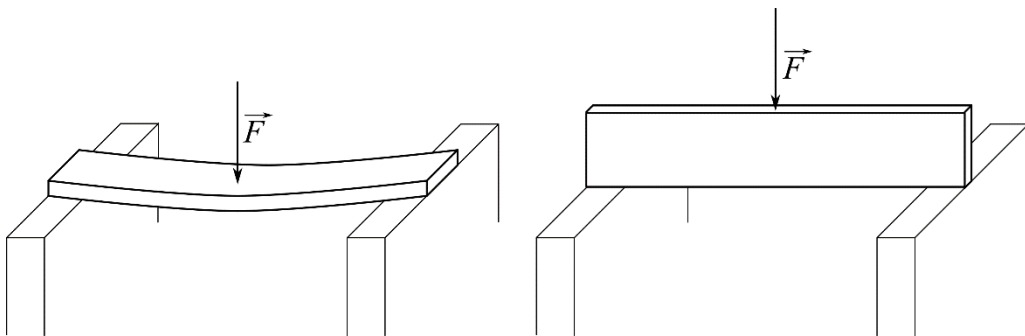
Vzhledem k rovnoměrnému rozložení tíhy břemene po celé délce nosníku bude maximální průhyb přesně uprostřed nosníku a pro jeho velikost platí dle [9]

$$y = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I}. \quad (58)$$

## 7.6 Kvadratický moment průřezu (osový moment setrvačnosti)

Pro tah, tlak a smyk je charakteristickou veličinou pro únosnost součásti její průřez. U ohybu je to jinak. Únosnost tu záleží nejen na velikosti průřezu, ale i na jeho poloze, tvaru a rozložení podél průřezové osy. Prkno zatížené silou se při položení naležato prohne výrazně více než při položení nastojato, přestože má v obou případech stejný průřez (viz Obr. 53). Průřez je při otočení jinak rozložen vzhledem k neutrální ose průřezu (ohybová osa procházející těžištěm průřezu). Toto rozložení je

charakterizováno tzv. kvadratickým momentem průřezu neboli osovým momentem setrvačnosti  $I_0$ . Snáze se ohne těleso s menším momentem setrvačnosti. Stejný ohybový moment působící na dvě tělesa se stejným osovým momentem setrvačnosti ale nemusí vyvolat stejné napětí. To bude závislé ještě na vzdálenosti  $e$  krajního vlákna od neutrální osy průřezu. Při větší vzdálenosti krajního vlákna od neutrální osy průřezu bude skutečné napětí v deformovaném tělese vyšší. Proto se pro základní rovnici namáhání v ohybu (viz Tab. 1) definuje průřezový modul v ohybu  $W_0$  v souladu s rovnicí (38). Průřezový modul určujeme vždy jen z osového momentu setrvačnosti plochy k neutrální (těžišťové) ose [4].



**Obr. 53** Deformace ohybem pro různou polohu téhož průřezu

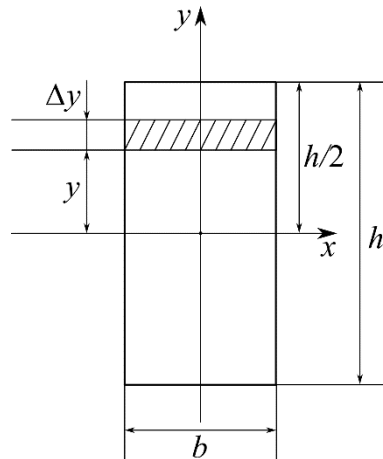
Charakteristickou průřezovou veličinou pro ohyb, a posléze i krut a vzpěr, je tedy osový moment setrvačnosti průřezu  $I_0$ . Matematicky ho můžeme vyjádřit vztahem

$$I_0 = \sum y^2 \cdot \Delta S, \quad (59)$$

kde  $y$  je vzdálenost plošky  $\Delta S$  od neutrální osy  $x$  (viz Obr. 54). Protože ploška  $\Delta S$  má být velmi malá (teoreticky nekonečně malá), můžeme předchozí rovnost zapsat pomocí integrálu jako

$$I_0 = \int_{(S)} y^2 \cdot dS. \quad (60)$$

Součet součinů nekonečně malých plošek  $dS$  a druhých mocnin jejich vzdálenosti  $y$  od neutrální osy se vztahuje na celý průřez, musíme tedy integrovat přes celou plochu průřezu  $S$ . Stejný průřez má podle polohy osy, k níž moment setrvačnosti počítáme, různou hodnotu kvadratického momentu průřezu, tedy moment setrvačnosti vzhledem k jiné ose bude jiný. Protože druhé mocniny vzdálenosti  $y$  elementů  $dS$  jsou vždy kladné, je kladná i hodnota  $I_0$ . [18]

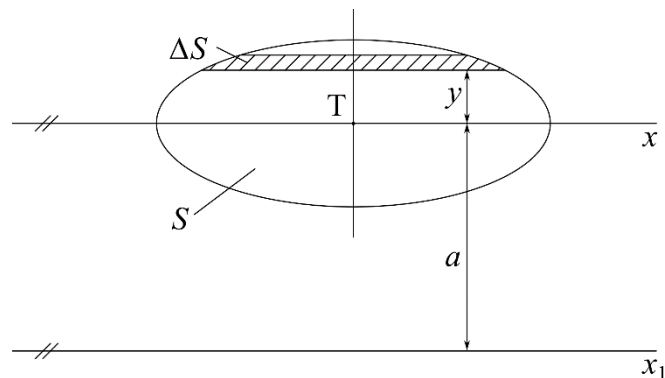


**Obr. 54** Kvadratický moment průřezu

Mnohdy potřebujeme znát moment setrvačnosti (kvadratický moment) průřezu k jiné ose  $x_1$ , která je s neutrální osou  $x$  rovnoběžná (viz Obr. 55). Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm plochy se nazývá centrální moment setrvačnosti  $I_x$ . Vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy  $x_1$ , která neprochází jeho těžištěm, umožňuje Steinerova věta [4]: Moment setrvačnosti průřezu k libovolné ose neprocházející těžištěm je roven centrálnímu momentu setrvačnosti průřezu k těžišťové ose zvětšenému o součin velikosti průřezu a druhé mocniny vzdálenosti obou os. To lze matematicky zapsat

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot S, \quad (61)$$

kde  $I_{x_1}$  je moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s těžišťovou osou,  $I_x$  je centrální moment setrvačnosti. S využitím Steinerovy věty je možné vypočítat moment setrvačnosti průřezu složeného z několika základních obrazců (geometricky jednoduchých), stačí znát centrální momenty setrvačnosti jednotlivých obrazců a vzdálenost jejich těžišť od těžiště složeného průřezu.

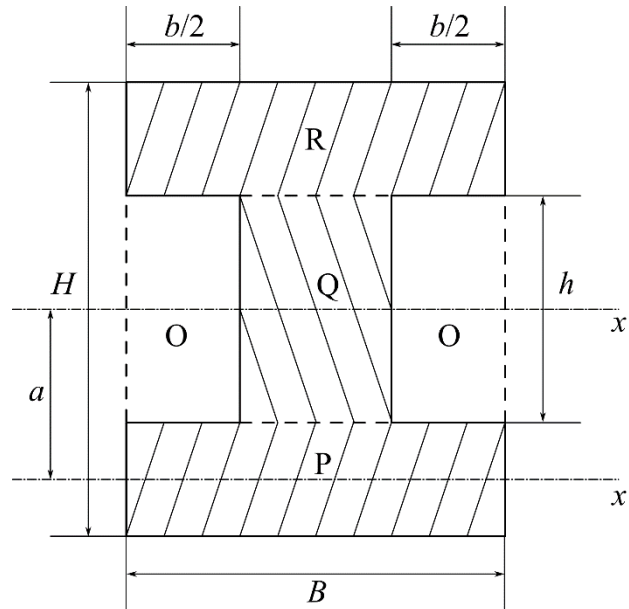


**Obr. 55** Steinerova věta



### Příklad 16:

Vypočítejte osový moment setrvačnosti tyče zjednodušeného profilu I (kvadratický moment průřezu) vzhledem k ose  $x$  procházející těžištěm celé plochy s rozměry  $b, B, h, H$  označenými dle Obr. 56.



Obr. 56 Tyč průřezu I

### Řešení:

Moment setrvačnosti je definován vztahem (60). Protože je to integrál, tedy forma součtu, můžeme moment setrvačnosti profilu celé tyče tvaru I vypočítat jako součet momentů setrvačnosti několika tvarově jednodušších ploch. V tomto případě je touto plochou obdélník.

Celý postup rozdělíme do několika kroků.

1. Provedeme pomocný výpočet osového momentu setrvačnosti libovolného obecného obdélníku se stranami  $C$  a  $D$  vzhledem k ose  $x$  procházející jeho těžištěm rovnoběžně se stranou  $D$ . Zvolíme soustavu souřadnic dle Obr. 57.

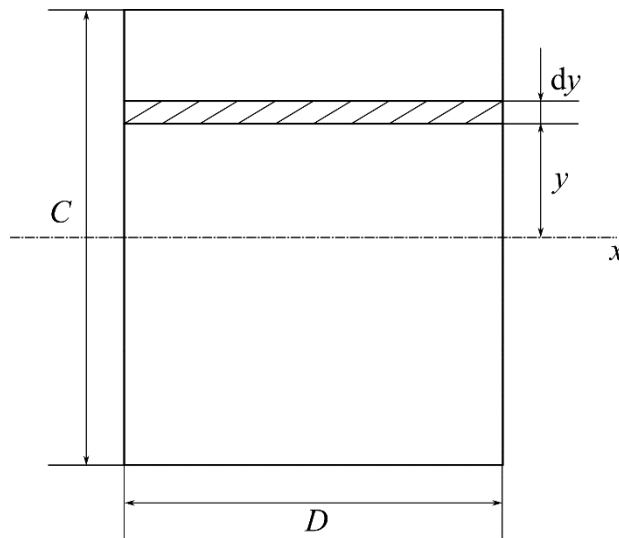
Nejprve si vyjádříme infinitezimálně malou vyšrafovanou plošku  $dS$ , která tvoří obdélník o stranách  $D$  a  $dy$ . Její obsah bude

$$dS = D \cdot dy.$$

Dále určíme meze integrace. Protože se moment setrvačnosti vztahuje na celou plochu obdélníku, lze teoreticky vyšrafovanou plošku umístit od polohy co nejnižší, tedy od hodnot  $y = \frac{-c}{2}$ , až po nejvyšší polohu, tedy do  $y = \frac{c}{2}$ . Dosazením do definice (60) dostaneme po úpravě

$$I_x = \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} y^2 \cdot D \cdot dy = D \cdot \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} y^2 \cdot dy = D \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} = D \cdot \left( \frac{\frac{C^3}{8}}{3} - \frac{-\frac{C^3}{8}}{3} \right) = D \cdot \frac{C^3}{12}.$$

Rozměr  $D$  obdélníku rovnoběžný s osou zde vystupuje v první mocnině, rozměr  $C$  kolmý k ose v mocnině třetí. Tohoto výsledku můžeme následně využít pro výpočet momentů setrvačnosti dílčích částí profilu, pokud si původní tvar I rozdělíme na tři obdélníky označené P, Q, R (viz Obr. 56).



**Obr. 57** Moment setrvačnosti obdélníku

2. Vypočítáme moment setrvačnosti plochy Q, jejíž rozměry jsou dle Obr. 56 ( $B-b$ ) rovnoběžně s osou  $x$  a  $h$  ve směru příčném k ose  $x$ . Využijeme vzorec pro moment setrvačnosti libovolného obdélníku odvozený výše, tedy

$$I_{Qx} = (B - b) \cdot \frac{h^3}{12}.$$

3. Obdobně vypočítáme moment setrvačnosti plochy P k ose  $x'$ . Její rozměry jsou  $B$  ve směru rovnoběžném a  $\frac{H-h}{2}$  ve směru příčném k ose (viz Obr. 56). Dosazením do vzorce z části 1. dostaneme

$$I_{Px'} = \frac{B \cdot \left(\frac{H-h}{2}\right)^3}{12}.$$

To je ovšem moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x'$ , která prochází těžištěm části P profilu. My ale potřebujeme znát moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x$  procházející těžištěm celého profilu I. K tomu využijeme Steinerovu větu (61). Vzdálenost os  $a$  určíme dle Obr. 56, tj.

$$a = \frac{h}{2} + \frac{\frac{H-h}{2}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{H-h}{4} = \frac{2h+H-h}{4} = \frac{H+h}{4}.$$

Po dosazení do vztahu (61) dostaneme po úpravě

$$I_{Px} = I_{Px'} + a^2 \cdot S_P = \frac{B}{12} \cdot \left(\frac{H-h}{2}\right)^3 + \left(\frac{H+h}{4}\right)^2 \cdot B \cdot \frac{H-h}{2} = \frac{B \cdot (H-h)}{8} \cdot \frac{H^2 + Hh + h^2}{3}.$$

4. Vzhledem k symetrii počítaného průřezu okolo osy  $x$  bude moment setrvačnosti plochy R stejný jako plochy P.

$$I_{Px} = I_{Rx} = \frac{B \cdot (H-h)}{8} \cdot \frac{H^2 + Hh + h^2}{3}.$$

5. Výsledný moment setrvačnosti  $I_x$  je součtem momentů setrvačnosti jednotlivých obdélníků, tedy

$$I_x = I_{Px} + I_{Rx} + I_{Qx} = 2 \cdot \frac{B \cdot (H-h)}{8} \cdot \frac{H^2 + Hh + h^2}{3} + (B - b) \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12}.$$

Ke stejnému vztahu se můžeme dostat i jiným, výrazně kratším způsobem.

- a) Vezmeme celý obdélník o rozměrech  $B$  a  $H$ , jehož moment setrvačnosti  $I$  je v souladu s částí 1. výše (rozměr  $B$  je rovnoběžný s osou) roven

$$I = B \cdot \frac{H^3}{12}.$$

- b) Vypočítáme moment setrvačnosti obou vyříznutých obdélníků O, jejichž rozměry jsou  $\frac{b}{2}$  a  $h$  (viz Obr. 56) s rozměrem  $h$  v příčném směru k ose, tedy dle 1. části výše

$$I_{Ox} = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^3}{12} = b \cdot \frac{h^3}{12}.$$

- c) Následně vypočítáme celkový moment setrvačnosti s tím, že když jsou oblasti O vyříznuté, musíme jejich osový moment setrvačnosti odečítat. Odtud dostaneme

$$I_x = I - I_{Ox} = B \cdot \frac{H^3}{12} - b \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12}.$$

### Příklad 17:

Vetknutý nosník z oceli 11500 čtvercového průřezu o straně 30 mm a délce 0,5 m je zatížen na volném konci osamělou silou o velikosti 1 kN (viz Obr. 58). Určete průběh posouvajících sil, ohybových momentů, maximální ohybový moment a maximální průhyb nosníku. Určete, zda nosník vyhovuje pevnostní podmínce v ohybu při statickém zatížení a míře bezpečnosti 2. Modul pružnosti oceli je  $1,75 \cdot 10^5$  MPa.

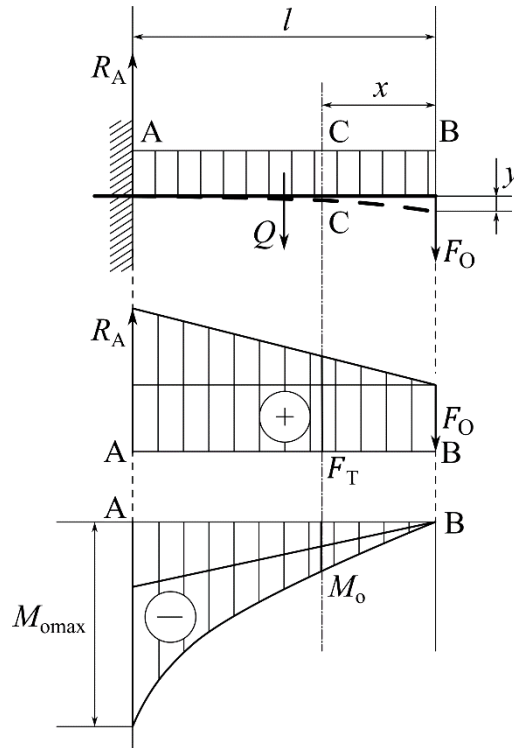
### Řešení:

Nosník budeme řešit jako těleso se složeným namáháním, jednak osamělou silou na konci nosníku a jednak spojitým rovnoměrným břemenem v celé jeho délce. Nejdříve na základě podmínek statické rovnováhy (35) stanovíme velikost vazbové síly reakce  $R_A$  v místě vetknutí, tedy

$$R_A = Q + F_0,$$

kde  $Q$  je vlastní tíha nosníku. Směr reakce  $R_A$  bude svisle vzhůru. Dle [9] je hmotnost jednotkové délky zadaného materiálu daného průřezu  $7 \text{ kg/m}$ . Tíha jednotkové délky nosníku je  $q = 7 \cdot 10 = 70 \text{ N/m}$ . Celková tíha samotného nosníku bude rovnoměrně rozložena po celé jeho délce  $l$  a platí

$$Q = q \cdot l = 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ N.}$$



**Obr. 58** Zadání k příkladu 17

Průběh posouvajících sil a ohybových momentů lze vyvodit stejným způsobem jako v kapitole 7.5. Každá ze sil vyvodí samostatný účinek, budou se tedy jejich účinky pro uvažovaný řez sčítat [8]. Na základě rovnic (40) a (46) tak dostaneme pro posouvající sílu v uvažovaném řezu vztah

$$F_T(x) = F_0 + q \cdot x.$$

Tato posouvající síla se v každém okamžiku snaží posunout část vpravo od uvažovaného řezu směrem dolů, a proto bude mít dle konvence kladné znaménko.

Obdobně na základě rovnic (41) a (47) bude pro ohybový moment vzhledem k uvažovanému řezu platit

$$M_o(x) = F_0 \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Ohybové momenty jak osamělé síly, tak spojitého břemene se snaží ohnout volný konec nosníku směrem dolů, čímž se celý nosník prohne nahoru, a proto bude mít celkový ohybový moment dle konvence kladné znaménko.

Výsledné grafické průběhy posouvajících sil a ohybových momentů jsou na Obr. 58. Z něho je vidět, že maximální ohybový moment bude v místě vetknutí, tj. pro  $x = l$ , z čehož po dosazení do ohybového momentu dostaneme

$$M_{\text{omax}} = F_0 \cdot l + q \cdot \frac{l^2}{2} = 1000 \cdot 0,5 + 70 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 508,75 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Podle předchozího příkladu určíme osový moment setrvačnosti čtvercového průřezu. Čtverec lze považovat za speciální případ obdélníku, pro něhož platí  $b = h = a$ , tedy moment setrvačnosti  $I$  bude

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{a^4}{12}.$$

Maximální průhyb bude na volném konci nosníku, tj. v místě působení osamělé síly  $F_0$ . Jeho velikost získáme součtem průhybů způsobených každou zátěží samostatně, tedy dle vztahů (45) a (49) bude

$$y = \frac{F_0 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{l^3}{E \cdot \frac{a^4}{12}} \cdot \frac{8 \cdot F_0 + 3 \cdot q \cdot l}{24} = \frac{500^3}{1,75 \cdot 10^5 \cdot 30^4} \cdot \frac{8 \cdot 1000 + 3 \cdot 0,07 \cdot 500}{2} = 3,574 \text{ mm}.$$

Z hlediska bezpečnosti je potřeba konfrontovat maximální ohybový moment s pevnostní podmínkou v ohybu (39). Skutečné napětí v krajním vlákne  $\sigma_{\text{Sk},0}$  určíme na základě základní rovnice namáhání v ohybu dle Tab. 1 a s využitím vztahu pro průřezový modul v ohybu (38), tedy po úpravě bude

$$\sigma_{\text{Sk},0} = \frac{M_0}{W_0} = \frac{M_{\text{omax}}}{\frac{I}{e}} = \frac{\left(F_0 \cdot l + q \cdot \frac{l^2}{2}\right) \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6 \cdot \left(1000 \cdot 500 + 0,07 \cdot \frac{500^2}{2}\right)}{30^3} = 113,06 \text{ MPa}$$

Pro dovolené napětí v ohybu platí u houževnatých materiálů přibližný vztah (viz kapitola 7.4)

$$\sigma_{\text{Dov},0} \doteq 1,15 \cdot \sigma_{\text{Dov},t}.$$

S využitím vztahu pro dovolené napětí v tahu (15) a pro smluvní mez kluzu rovnou přibližně polovině meze pevnosti dostaneme

$$\sigma_{\text{Dov},0} = \frac{1,15 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{\text{Pt}} \cdot K_1}{n} = \frac{0,575 \cdot 500 \cdot 1}{2} = 143,75 \text{ MPa}.$$

Porovnáním skutečného a dovoleného napětí dostaneme  $\sigma_{\text{Sk},0} \leq \sigma_{\text{Dov},0}$ . Skutečné napětí je tedy menší než dovolené napětí, nosník pevnostní podmínce vyhovuje.

**Příklad 18:**

Jaký průměr musí mít hřídel o délce 20 cm, aby snesla uprostřed zatížení 6 kN včetně kladky? Jaký bude průhyb hřídele v případě maximálního zatížení? Dovolené napětí v ohybu  $\sigma_{Dov,0} = 150 \text{ MPa}$  a modul pružnosti materiálu hřídele je  $1,75 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

**Řešení:**

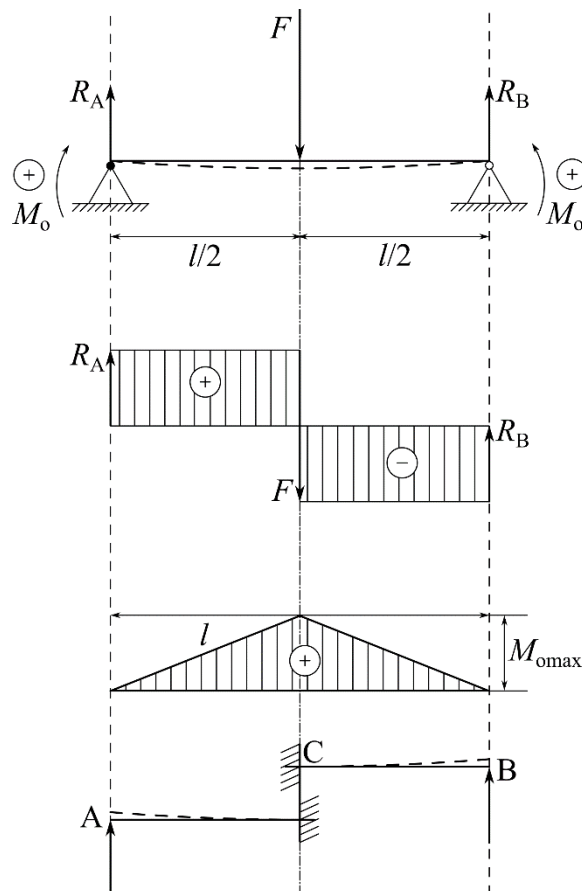
Na hřídel můžeme pohlížet jako na nosník kruhového průřezu uložený na dvou podporách zatížený jednou osamělou silou přesně uprostřed. Grafický průběh posouvajících sil a ohybových momentů bude v souladu s teorií v kapitole 7.5, část 3 (viz Obr. 59). Největší průhyb, největší ohybový moment i nebezpečný průřez jsou v místě působení osamělé síly, tj. v místě zatížení kladkou s případným břemenem.

Nejprve musíme stanovit vazbové síly (reakce v podporách) z podmínek rovnováhy hřídele (35)

$$R_A + R_B = F,$$

$$M_A = M_B \Rightarrow R_A \cdot \frac{l}{2} = R_B \cdot \frac{l}{2}.$$

Řešením této soustavy dostaneme  $R_A = R_B = \frac{F}{2}$ .



**Obr. 59** Obrázek k příkladu 18

Dle grafického průběhu ohybový moment roste od podpor směrem k působící síle lineárně, maxima dosáhne přesně uprostřed hřídele. Velikost maximálního momentu bude

$$M_{\text{omax}} = R_A \cdot \frac{l}{2} = R_B \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow M_{\text{omax}} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4}.$$

Z pevnostní podmínky (39), do které dosadíme skutečné napětí v ohybu dle Tab. 1 a dovolené napětí  $\sigma_{\text{Dov},0}$  a vypočtený maximální ohybový moment  $M_{\text{omax}}$ , vyjádříme průřezový modul, tj.

$$W_0 \geq \frac{M_{\text{omax}}}{\sigma_{\text{Dov},0}} = \frac{F \cdot l}{4 \cdot \sigma_{\text{Dov},0}} = \frac{6000 \cdot 200}{4 \cdot 150} = 2000 \text{ mm}^3.$$

Osový moment setrvačnosti kruhového průřezu o průměru  $d$  je podle [9]

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

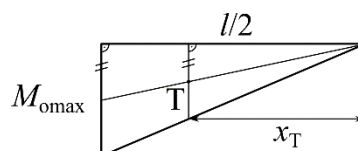
Vzdálenost krajního vlákna  $e$  je v případě kruhového průřezu rovna polovině průměru  $d$  průřezu. Po dosazení do definice průřezového modulu  $W_0$  (38) můžeme určit minimální průměr hřídele, tedy

$$W_0 = \frac{I}{e} = \frac{\pi \cdot d^4}{64 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq 2000 \Rightarrow d \geq 27,3 \text{ mm}.$$

Podle normy vybereme nejbližší vyšší průměr, tedy 28 mm.

Zatěžující síla působí uprostřed délky hřídele, proto můžeme výpočet průhybu zjednodušit. Představíme si hřídel v místě působení síly rozdělenou na dva stejné vetknuté nosníky (viz Obr. 59 dole). Prohnutí celé hřídele je stejné, jako prohnutí jednoho z obou vetknutých nosníků vlivem působení odpovídající reakce směrem vzhůru. Každý nosník má poloviční délku oproti délce hřídele. Průhyb určíme ze vztahu (34). Momentovou plochou je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech  $M_{\text{omax}}$  a  $\frac{l}{2}$  (viz Obr. 60). Pro polohu jejího těžiště platí

$$x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}.$$



**Obr. 60** Těžiště momentové plochy

Moment momentové plochy je tak

$$M_{\text{mp}} = \frac{M_{\text{omax}} \cdot \frac{l}{2}}{2} \cdot x_T = \frac{F \cdot l^2}{8} \cdot \frac{l}{3} = \frac{F \cdot l^3}{48}.$$

Po dosazení do (34) bude maximální průhyb po úpravě

$$y = \frac{M_{\text{mp}}}{E \cdot I} = \frac{\frac{F \cdot l^3}{48}}{E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 200^3}{3 \cdot 1,75 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 28^4} = 0,19 \text{ mm.}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli při dosazení délky  $\frac{l}{2}$  do vztahu (45).

Ve výpočtech jsme dosud vůbec neuvažovali vlastní hmotnost hřídele. V tabulkách [9] pro daný průměr 28 mm zjistíme tíhu jednotkové délky hřídele, tj.  $q = 48,3 \text{ N/m} = 0,0483 \text{ N/mm}$ . Průhyb samotné hřídele bez kladky a zatížení bude dle vztahu (58)

$$y = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{6 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{5 \cdot 0,0483 \cdot 200^4}{6 \cdot 1,75 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 28^4} = 0,00019 \text{ mm.}$$

Při porovnání obou průhybů zjistíme, že průhyb nezatížené hřídele je  $1000\times$  menší než průhyb díky zatížení, a proto ho můžeme zanedbat. Ověříme ještě pevnostní podmínku (39) pro kombinované zatížení osamělou silou a spojitým břemenem – vlastní tíhou hřídele. Maximální ohybový moment bude v tomto případě

$$M_{\text{omax}} = \frac{F \cdot l}{4} + \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{l}{8} \cdot (2 \cdot F + q \cdot l).$$

Po dosazení do (39) bude skutečné napětí při maximálním zatížení

$$\sigma_{\text{Sk},0} = \frac{M_0}{W_0} = \frac{M_{\text{omax}}}{\frac{l}{e}} = \frac{\frac{l}{8} \cdot (2 \cdot F + q \cdot l)}{\frac{\pi \cdot d^4}{64 \cdot \frac{d}{2}}} = \frac{4 \cdot l \cdot (2 \cdot F + q \cdot l)}{\pi \cdot d^3} = 139,3 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa.}$$

Protože platí  $\sigma_{\text{Sk},0} \leq \sigma_{\text{Dov},0}$ , hřídel o průměru 28 mm pevnostní podmínce vyhovuje. Její průhyb při maximálním zatížení bude přibližně 0,19 mm.

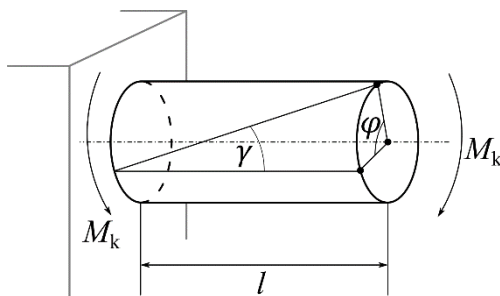


## 8. PROSTÝ KRUT

Prostý krut neboli torze je pootočení na soumezném řezu. Při zkroucení tělesa obecného průřezu dochází nejen k pootočení průřezu, ale často i ke změně jeho tvaru a porušení rovinnosti [16]. Jedinou výjimkou je těleso válcového tvaru, tedy kruhového průřezu, u něhož při zkroucování silovou dvojicí v rovině kolmé k jeho ose se příčné průřezy vzájemně natočí, zůstávají ale kruhové i rovinné. Při představě, že těleso je tvořeno vlákny rovnoběžnými s osou, dochází vlivem silové dvojice ke zkroucení jednotlivých vláken do šroubovic. Vlákno v ose válce se nedeformuje, a proto se tato osa nazývá neutrální. V jednotlivých rovnoběžných průřezech vznikají smyková napětí od krutu  $\tau_k$  (viz Obr. 61). Tato napětí se zvětšují z nuly v místě neutrální osy až do maxima  $\tau_{kmax}$  na obvodu průřezu. Protože se jednotlivé průřezy po sobě smýkají, musí pro materiál platit Hookův zákon pro krut analogický jako pro smyk (32), tedy

$$\tau_k = G \cdot \gamma, \quad (62)$$

kde  $\gamma$  je podélné zkroucení a  $G$  je modul pružnosti ve smyku, který lze nalézt pro daný materiál v tabulkách.



**Obr. 61** Prostý krut

Úhel  $\varphi$  je úhel příčného zkroucení, vyjadřuje se v obloukové míře, tj. v radiánech (rad), a platí pro něj [17]

$$\hat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}, \quad (63)$$

kde  $M_k$  je krouticí moment silové dvojice,  $l$  je délka krouceného tělesa a  $I_p$  je polární kvadratický moment setrvačnosti (tedy k bodu), který lze pro daný typ průřezu nalézt v tabulkách. Součin  $G \cdot I_p$  nazýváme tuhost v krutu.

Mírou deformace v krutu je poměrné zkroucení neboli zkrut  $\vartheta$ , který vypočítáme podle vztahu

$$\vartheta = \frac{\hat{\varphi}}{l} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}. \quad (64)$$

Jedná se v podstatě o zkos  $\gamma$  na obvodu průřezu, tedy ve vzdálenosti rovné poloměru podstavy válce od neutrální osy.

Základní rovnice namáhání uvedená v Tab. 1 má obdobný tvar jako pro ohyb, jmenovatel tvoří průřezový modul v krutu, který definujeme vztahem

$$W_k = \frac{I_p}{r}, \quad (65)$$

kde  $r$  je vzdálenost krajního vlákna, u kruhového průřezu je rovna poloměru kruhu. Polární moment setrvačnosti  $I_p$  je pro kruhový průřez

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (66)$$

Pro konkrétní technické aplikace je často nezbytné ověřit, zda navržená součást vyhovuje pevnostní podmínce, která má analogický tvar jako v případě ohybu, tj.

$$\tau_{Sk,k} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dov,k}, \quad (67)$$

kde  $\tau_{Sk,k}$  je skutečné a  $\tau_{Dov,k}$  je dovolené napětí v krutu. Velikost dovoleného napětí závisí nejen na druhu materiálu, ale i na tvaru průřezu. V případě houževnatých ocelí libovolného průřezu platí  $\tau_{Dov,k} \doteq 0,6 \cdot \sigma_{Dov,t}$ , pro litinu je  $\tau_{Dov,k} \doteq \sigma_{Dov,t}$  v případě kruhového průřezu [4], pro tvar mezikružší, čtverce a obdélníka je uveden např. v [16].

Pokud nemají u transmisních hřídelí vznikat torzní kmity nebo pokud nemá při provozu příliš pružit, je výhodnější stanovit deformační podmínku pro úhel zkroucení vztahem

$$\varphi_{Sk} \leq \varphi_{Dov}, \quad (68)$$

v níž  $\varphi_{Dov} = (0,25 \div 0,75)^\circ$  [17]. Menší hodnota se používá u větších průměrech hřídelí nebo jejich nárazového zatěžování [16]. Z deformační podmínky (68) se často určuje požadovaný průměr hřídele.

Pro tělesa nekruhových průřezů jsou výpočty výrazně složitější, nicméně základní rovnice namáhání (Tab. 1) a pevnostní podmínka (67) mají pro všechny typy průřezu stejný tvar, odlišný je pouze průřezový modul v krutu, který lze nalézt v tabulkách, např. [9].

### **Příklad 19:**

Vypočítejte napětí v krutu a úhel zkroucení pro ocelovou tyč kruhového průřezu z oceli 11343 o délce 1 m a průměru 35 mm. Tyč je staticky zatížena krouticím momentem o velikosti 50 N·m. Modul pružnosti oceli ve smyku je  $8 \cdot 10^4$  MPa. Míra bezpečnosti je 2. Ověřte pevnostní podmínku. Lze tyč použít jako transmisní hřídel?

### **Řešení:**

Z rovnice (66) určíme polární moment setrvačnosti kruhového průřezu tyče, tj.

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 35^4}{32} = 147248,8 \text{ mm}^4.$$

Poté na základě vztahu (65) vypočteme průřezový modul v krutu, tedy

$$W_k = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi \cdot d^4}{32 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 35^3}{16} = 8414,22 \text{ mm}^3.$$

Skutečné napětí v krutu určíme ze základní rovnice namáhání pro krut (Tab. 1)

$$\tau_{Sk,k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{50000}{8414,22} = 5,94 \text{ MPa}.$$

Dovolené napětí v krutu vypočítáme ze známého dovoleného napětí v tahu s využitím rovnice (15), kde mez pevnosti dle číselného značení oceli je  $\sigma_{Pt} = 340 \text{ MPa}$ . Tedy

$$\tau_{Dov,k} \doteq 0,6 \cdot \sigma_{Dov,t} = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt}}{n} \cdot K_I = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot 340}{2} \cdot 1 = 51 \text{ MPa}.$$

Skutečné napětí je tedy menší než dovolené, tyč pevnostní podmínce (67) vyhovuje.

Pro úhel zkroucení dostaneme dle vztahu (63)

$$\hat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{50000 \cdot 1000}{8 \cdot 10^4 \cdot 147248,8} = 0,0042445 \text{ rad}.$$

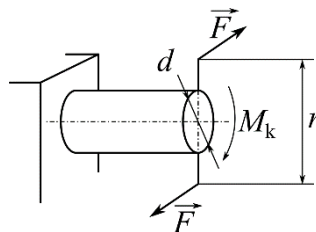
Úhel zkroucení převedeme na úhlové stupně, tj.

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,243^\circ.$$

Vypočtený úhel zkroucení je menší než  $0,25^\circ$ , vyhovuje tak deformační podmínce (68), a proto lze tyč použít jako transmisní hřídel.

### Příklad 20:

Vypočítejte minimální standardizovaný průměr kruhové tyče, má-li v ní silová dvojice o velikosti 150 N s délkou ramene 60 cm vyvolat tečné napětí v krutu maximálně 21 MPa (viz Obr. 62).



**Obr. 62** Zadání příkladu 20

### Řešení:

Nejprve musíme vypočítat krouticí moment zatěžující tyč, tedy

$$M_k = F \cdot r = 150 \cdot 600 = 90000 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Ze základní rovnice namáhání (Tab. 1) určíme průřezový modul v krutu, tj.

$$W_k = \frac{M_k}{\tau_k} = \frac{90000}{21} = 4285,7 \text{ mm}^3.$$

Kombinací rovnic (65) a (66) dostaneme souvislost mezi průřezovým modulem v krutu a průměrem kruhového průřezu. Po úpravě bude

$$W_k = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi \cdot d^4}{32 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Odsud pro průměr tyče dostaneme

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_k}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4285,7}{\pi}} = 27,95 \text{ mm}.$$

Protože se má jednat o standardizovaný rozměr, nejbližší vyšší vyráběný průměr je dle normy 28 mm.

Pro kontrolu ještě ověříme velikost skutečného napětí. Vydeme ze základní rovnice namáhání (Tab. 1) a vztahů (65) a (66). Po úpravě dostaneme

$$\tau_{Sk,k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 90000}{\pi \cdot 28^3} = 20,89 \text{ MPa}.$$

Uvedená silová dvojice vyvolá skutečné tečné napětí v krutu menší než 21 MPa, průměr tyče tak vyhovuje zadání.

### **Příklad 21:**

Jak velké zatížení snese hřídel navijáku s průměrem 25 mm a délkou 10 cm, je-li jeden konec hřídele opatřen rohatkou a na druhý konec je navijeno lanko o průměru 3,15 mm. Hřídel je vyrobena z oceli 12060, její modul pružnosti ve smyku je  $8 \cdot 10^4$  MPa a dovolené napětí v krutu je 120 MPa. O kolik se hřídel při maximálním zatížení zkroutí?

### **Řešení:**

Abychom mohli vypočítat zatížení, musíme vycházet z pevnostní podmínky pro krut (67) a ze základní rovnice namáhání v krutu (Tab. 1). Po dosazení skutečného napětí dostaneme

$$\frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dov,k}.$$

Pro výpočet krouticího momentu  $M_k = F \cdot r$  nejdříve určíme velikost ramene  $r$  síly

$$r = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = 12,5 + 1,575 = 14,075 \text{ mm}.$$

Průřezový modul hřídele v krutu bude obdobně jako u příkladů 19 a 20

$$W_k = \frac{I_p}{r_1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32 \cdot \frac{d_1}{2}} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16}.$$

Po dosazení dostaneme nerovnici

$$\frac{F \cdot r}{\frac{\pi \cdot d_1^3}{16}} \leq \tau_{\text{Dov,k}}$$

Jejím řešením bude

$$F \leq \frac{120}{14,075} \cdot \frac{\pi \cdot 25^3}{16} = 26143,43 \text{ N} \Rightarrow m \leq \frac{26143,43}{10} = 2614,343 \text{ kg.}$$

Nosnost hřídele je tedy přibližně 2,6 t.

Nyní vypočítáme, o kolik se hřídel zkroučí. Z rovnice (66) je polární moment setrvačnosti

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 25^4}{32} = 38330,078 \text{ mm}^3.$$

Úhel zkroučení určíme ze vztahu (63). Po úpravě bude

$$\hat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{F \cdot r \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{26143,43 \cdot 14,075 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 38330,078} = 0,012 \text{ rad.}$$

Po převedení na úhlové stupně dostaneme

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,012 \cdot \frac{180}{\pi} = 0,69^\circ.$$

Hřídel se zkroučí o  $0,69^\circ$ , což je hodnota, která vyhovuje i deformační podmínce (68).

---

## 9. VZPĚR (VZPĚRNÝ TLAK)

U štíhlých prutů, tzv. vzpěr, které jsou namáhány tlakovou osovou silou, se vyskytuje jistý zvláštní druh složeného namáhání. Délkové rozměry takových prutů musí být několikanásobně větší než rozměry průřezu. Mohou to být např. ojnice, vzpěry u prutových konstrukcí, písní tyče apod. Tento druh namáhání se projevuje za stejných vnějších okolností jako pevnost v tlaku. Při namáhání tlakem dochází k deformacím prutu, a proto může nastat situace, kdy zatěžující síla nepůsobí přesně v ose prutu, nýbrž v malé výstřednosti od ní. Prut je tak namáhán nejen tlakem, ale i ohybem. Takovému složenému namáhání říkáme namáhání na vzpěr nebo na vzpěrný tlak [16]. Sílu, která vede k vybočení a následnému zhroucení, ohnutí či zlomení prutu, nazýváme mezní vzpěrná (kritická) síla  $F_{vz}$ . Pokud se tato síla nepřekročí, zmizí po odtížení prutu jeho vychýlení. Pokud dojde k překročení této síly, prut se trvale deformuje (zhroutlí se) nebo praskne. I přesto je při kritické síle tlakové napětí menší než mez kluzu v tlaku [4]. Z toho lze usuzovat, že vzpěrná pevnost prutu závisí více na tvarové stabilitě, tj. na tom, jak je materiál pružný (modul pružnosti  $E$ ) a odolný ohybu (moment setrvačnosti  $M_0$ ), než na jeho pevnosti. Velikost vzpěrné síly je závislá na uložení konců prutu.

### 9.1 Eulerova rovnice

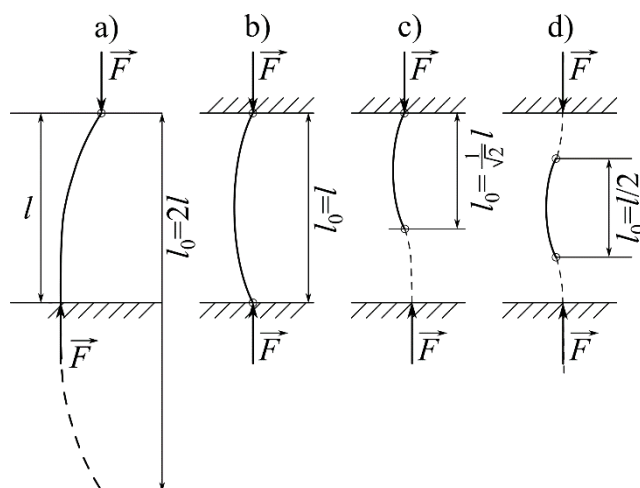
Jak bylo řečeno, pevnost materiálu ve vzpěru závisí nejen na tzv. stupni štíhlosti, ale také na úpravě a uchycení konců prutu. Rozlišujeme čtyři základní případy uložení konců (viz Obr. 63) [3]:

1. vzpěra na jednom konci vetknutá, na druhém konci volná,
2. vzpěra na obou koncích uložena kloubově,
3. vzpěra na jednom konci vetknutá, na druhém konci uložena kloubově s možností osového posunu,
4. vzpěra vetknutá na obou koncích s možností osového posunu konců.

Druhý typ uložení je ve strojnictví považován za základní [4]. Při vyšetřování tohoto typu se předpokládalo, že ohybová čára deformované vzpěry je parabola souměrná podle osy. Pak lze celou situaci nahradit představou, jako by byla uprostřed vetknutá (analogicky jako v příkladu 18). Maximální vybočení konce vzpěry při namáhání kritickou silou  $F_{vz}$  lze pak určit z rovnice (45). Později Euler dokázal, že ohybová čára je částí sinusoidy a odvodil pro kritickou sílu vztah [16]

$$F_{vz} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_0^2}, \quad (69)$$

kde  $E$  je modul pružnosti materiálu,  $I$  je osový moment setrvačnosti a  $l_0$  je délka prutu. Analogickou rovnicí lze psát i pro zbývající tři případy uložení konců, kde by ovšem  $l_0$  značilo tzv. redukovanou délku, což je taková část délky vzpěry, která má stejný tvar jako deformovaná část vzpěry u základního typu uložení. Souvislost mezi skutečnou délkou vzpěry  $l$  a redukovanou délkou  $l_0$  je zřejmá z Obr. 63.



**Obr. 63** Eulerova rovnice, kde a) je vzpěra s neuloženými konci, b) je vzpěra s oběma kloubovitě uloženými konci, c) je vzpěra na jednom konci kloubovitě uložená a na druhém vetknutá, d) je vzpěra s oběma konci vetknutými

Vzhledem k faktu, že napětí v tlaku při dosažení kritické síly nedosahuje ani meze kluzu, nemá při vzpěru smysl definovat dovolené napětí, ale udává se tzv. přípustná zatěžující síla pro vzpěr vztahem [8]

$$F_{Dov,vz} = \frac{F_{vz}}{n}, \quad (70)$$

kde  $n$  je míra bezpečnosti.

## 10. KOMPLEXNÍ PŘÍKLADY VYŠETŘOVÁNÍ PEVNOSTI

V praxi je vždy nutné navrhované konstrukce řešit z pohledu všech možných namáhání. Téměř pokaždé je totiž takový systém zatěžován komplexně různými druhy namáhání v různých místech. V této kapitole bude uvedeno několik příkladů návrhu zařízení či konstrukce s komplexním rozbohem jejich pevnosti.

### Příklad 22:

Deska stolu o rozměrech  $60 \times 120 \times 5$  cm je vyrobena z žuly o hustotě  $2850 \text{ kg/m}^3$ . Jako nohy bude použita tyčovina z materiálu 11343. Jaký minimální průměr musí mít každá ze čtyř noh, aby stůl unesl břemeno o hmotnosti 300 kg při míře bezpečnosti 2? Modul pružnosti oceli je  $1,75 \cdot 10^5$  MPa.

### Řešení:

Nejprve vypočítáme objem desky stolu tvaru kvádra

$$V = 60 \cdot 120 \cdot 5 = 36000 \text{ cm}^3 = 0,036 \text{ m}^3.$$

Dále určíme její hmotnost a tíhu

$$m = \rho \cdot V = 2850 \cdot 0,036 = 102,6 \text{ kg} \Rightarrow G = m \cdot g = 1026 \text{ N}.$$

Nakonec zjistíme celkovou tíhu včetně zátěže

$$G_b + G = 3000 + 1026 = 4026 \text{ N}.$$

Pokud bude stůl zatížen břemenem rovnoměrně, tj. břemeno stojí přesně uprostřed, bude každá z noh namáhána tlakovou silou

$$F_0 = 4026 \div 4 = 1006,5 \text{ N}.$$

Pokud bude břemeno položeno přesně v místě nad nohou stolu, bude na tuto nohu působit největší možná skutečná síla, pro jejíž velikost platí

$$F = G_b + \frac{G}{4} = 3000 + (1026 \div 4) = 3256,5 \text{ N}.$$

Rozměry noh je nutné navrhovat tak, aby snesly maximální možnou zátěž, proto pro další výpočet budeme uvažovat větší z obou výše zmíněných sil, tedy sílu  $F$ .

Skutečné napětí v tlaku určíme ze základní rovnice namáhání v tlaku (Tab. 1), tj.

$$\sigma_{\text{Sk,d}} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}.$$

Nyní vypočítáme dovolené napětí v tlaku. Využijeme vztah (15) a také určení meze pevnosti z číselného označení oceli a koeficient statického zatížení. Tedy

$$\sigma_{\text{Dov,d}} = \frac{0,5 \cdot 340 \cdot 1}{2} = 85 \text{ MPa}.$$



Z pevnostní podmínky pro tlak (23) pak plyne

$$\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq 85 \text{ MPa.}$$

Odsud dostaneme pro hledaný průměr nohy

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 3256,5}{85 \cdot \pi}} = 6,98 \text{ mm} \doteq 7 \text{ mm}$$

Vypočítaná hodnoty 7 mm je velmi malá, noha by byla velmi úzká, a proto ji musíme zkontrolovat i na vzpěr. Osový moment setrvačnosti kruhového průřezu je dle tabulek [9]

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Po dosazení do rovnice pro kritickou sílu (69), v níž redukovaná délka  $l_0 = 2l$ , bude

$$F_{vz} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2} = \pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{1}{4 \cdot l^2} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{256 \cdot l^2}.$$

Dosadíme do vztahu pro přípustnou zatěžující sílu (70) a vypočteme maximální délku nohy, tedy

$$F \leq F_{Dov,vz} = \frac{F_{vz}}{n} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{256 \cdot l^2 \cdot n} \Rightarrow l \leq \sqrt{\frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{256 \cdot F \cdot n}} = \sqrt{\frac{\pi^3 \cdot 1,75 \cdot 10^5 \cdot 7^4}{256 \cdot 3256,5 \cdot 2}} = 88,33 \text{ mm.}$$

Při tak malé tloušťce by nevyhovovala délka, stůl by byl příliš nízký. Musí se tedy vycházet z toho, že požadujeme určitou výšku stolu, konkrétně 80 cm, pak musí být délka nohy 75 cm. Ze vztahů (69) a (70) pro vzpěr určíme přípustnou zatěžující sílu, tj.

$$F_{Dov,vz} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{256 \cdot l^2 \cdot n} = \frac{\pi^3 \cdot 1,75 \cdot 10^5 \cdot 7^4}{256 \cdot 750^2 \cdot 2} = 45,24 \text{ N.}$$

Dovolená zatěžující síla pro vzpěr je pro nohu o délce 75 cm rovna 45,24 N. Protože je však skutečná síla větší než dovolená, noha o tomto průměru nevyhovuje. Musíme tedy určit hledaný průměr z podmínek pro vzpěr a následně ověřit pevnostní podmínku pro tlak. Skutečná zatěžující síla musí být menší než dovolená zatěžující síla, tedy podle vztahů (69) a (70) bude pro vzpěr a vypočítáme minimální průměr nohy.

$$3256,5 \leq \frac{\pi^3 \cdot 1,75 \cdot 10^5 \cdot d^4}{256 \cdot 750^2 \cdot 2} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{3256,5 \cdot 256 \cdot 750^2 \cdot 2}{\pi^3 \cdot 1,75 \cdot 10^5}} \doteq 20,4 \text{ mm.}$$

Podle [9] je nejbližší vyšší standardně vyráběný průměr 21 mm.

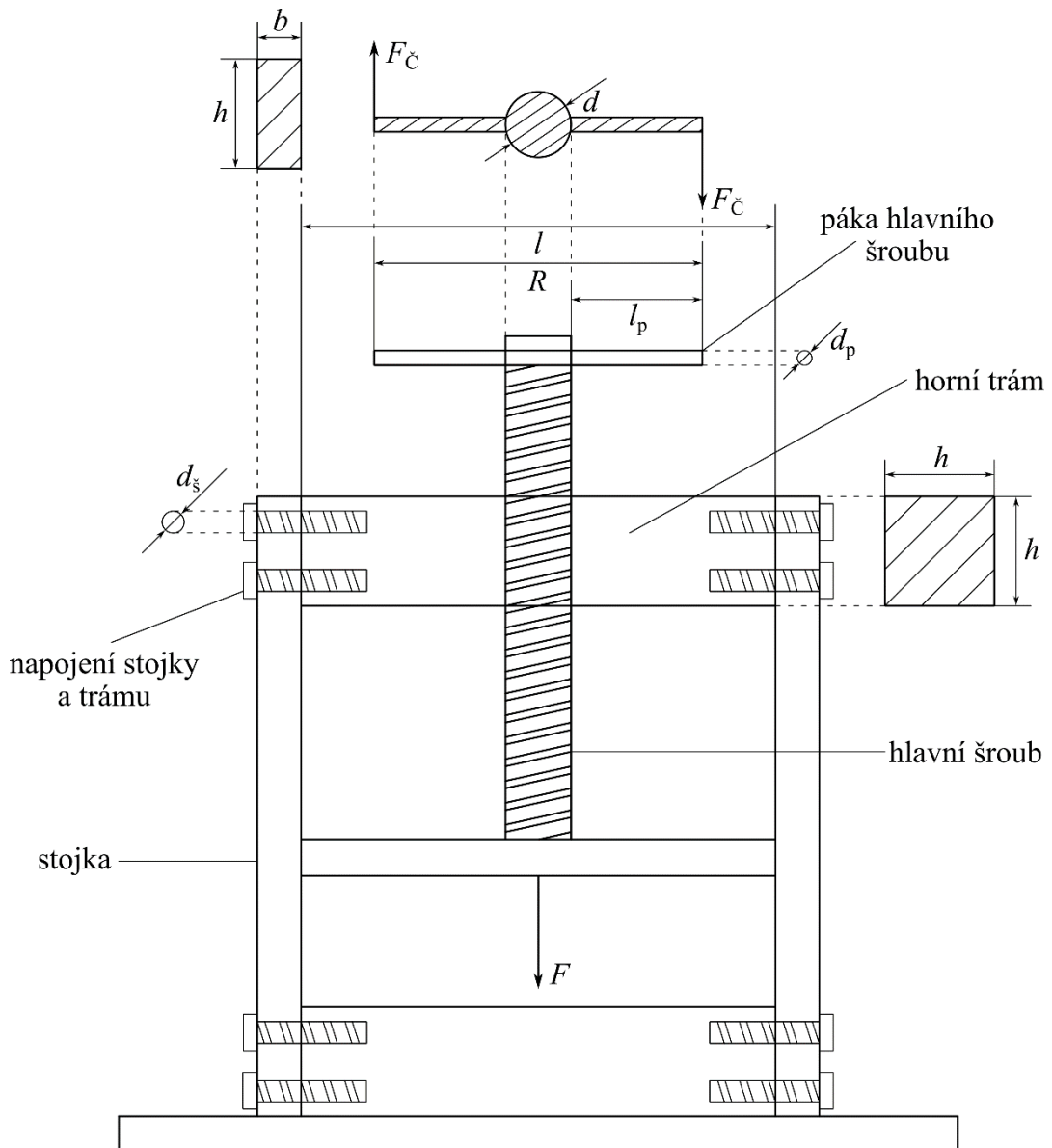
Nakonec provedeme ověření pevnostní podmínky pro tlak (23) pro vypočítaný průměr, tedy

$$\sigma_{Sk,d} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 3256,5}{\pi \cdot 21^2} = 9,4 \leq 85 = \sigma_{Dov,d}.$$

Podmínka je splněna, a proto průměr 21 mm vyhovuje.

**Příklad 23:**

Máme vyrobit lis podle obrázku (viz Obr. 64), který vyvine maximální sílu odpovídající 4 t zatížení. Vlastní konstrukce bude vyrobená z oceli 11343, hlavní šroub lisu a šrouby na spoje budou z oceli 11500. Horní trám, skrz který prochází hlavní šroub lisu, je čtvercového průřezu. Předpokládejme, že člověk vyvine na páku šroubu maximálně sílu  $F_{\check{c}} = 400 \text{ N}$ . Navrhněte a vypočítejte potřebné rozměry konstrukce a šroubů a ověřte pevnostní podmínky. Míru bezpečnosti volte 2.



**Obr. 64** Schématický náčrt lisu z příkladu 23

**Řešení:**

Nejdříve podle rovnice (15) určíme dovolené napětí v tlaku pro ocel 11500 (označeno indexem 1), ze které bude vyroben hlavní šroub. Mez pevnosti oceli vyčteme

z číselného označení, tedy  $\sigma_{Pt1} = 500$  MPa. Koeficient dynamiky v případě statického namáhání volíme  $K_I = 1$ . Po dosazení bude

$$\sigma_{Dov,d} = \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt1} \cdot K_I}{2} = \frac{0,5 \cdot 500 \cdot 1}{2} = 125 \text{ MPa.}$$

Jako první část konstrukce budeme řešit hlavní šroub, který je namáhán tlakem. Z pevnostní podmínky pro tlak (23) určíme průřez a průměr jádra šroubu. Zatížení 4 t odpovídá tlaková síla  $F = 40000$  N. Vyjdeme ze základní rovnice namáhání v tlaku (Tab. 1) a z pevnostní podmínky (23). Odsud

$$\sigma_{Dov,d} \geq \frac{F}{S} = \frac{40000}{S} \Rightarrow S \geq \frac{40000}{125} = 320 \text{ mm}^2.$$

Protože jádro šroubu má kruhový průřez, dostaneme pro jeho průměr

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} \geq 320 \Rightarrow d \geq 20,19 \text{ mm.}$$

Podle [9] nejbližší vyšší průměr jádra lichoběžníkového závitu je 20,5 mm.

V dalším kroku budeme dimenzovat výšku horního trámu tak, aby byla splněna podmínka pro otláčení (27) v závitech hlavního šroubu. Nejdříve určíme průmět plochy závitů do směru kolmého k tlakové síle, tj kolmo k ose hlavního šroubu. Z [9] zjistíme střední průměr závitu  $d_s = 22,5$  mm, stoupání závitu (rozteč)  $P = 3$  mm a vůli ve vrcholu závitu  $a_c = 0,25$  mm. Také zde můžeme nalézt základní vztah pro hloubku závitu  $H_4 = 0,5 \cdot P + a_c$ . Pro průmět vzájemného přesahu závitů šroubu a matice do směru kolmého k ose šroubu platí

$$H_1 = H_4 - a_c = 0,5 \cdot P + a_c - a_c = 0,5 \cdot P = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ mm.}$$

Průmět styčné plochy jednoho závitu do roviny kolmé k ose šroubu představuje mezikružší se středním průměrem  $d_s$  a šířce  $H_1$ , pro jehož plochu platí

$$S_{závitu} = \pi \cdot d_s \cdot H_1.$$

Skutečný tlak na styčnou plochu určíme z rovnice (24) a dosadíme do pevnostní podmínky pro otláčení (27), kde dovolený tlak bude 20 MPa, protože se jedná o stýkající se součásti za pohybu, tedy

$$\frac{F}{S} \leq p_{Dov} = 20 \text{ MPa.}$$

Odtud pro zadanou sílu určíme minimální celkovou styčnou plochu všech závitů, z níž můžeme určit nezbytný počet závitů následujícím způsobem

$$N \cdot S_{závitu} = S \geq \frac{F}{p_{Dov}} \Rightarrow N \geq \frac{F}{\pi \cdot d_s \cdot 0,5 \cdot P \cdot p_{Dov}} \doteq 18,8.$$

To znamená, že nezbytný počet závitů v trámu je 19. S použitím rozteče závitů určíme minimální výšku trámu, tedy

$$h' = N \cdot P = 57 \text{ mm.}$$

Nejblíže vyšší standardně vyráběný rozměr tyče čtvercového průřezu je  $h = 60$  mm.

Délku horního trámu určíme na základě pevnostní podmínky pro ohyb (39). Osový moment setrvačnosti vypočteme na základě definice (60), popř. nalezneme v tabulkách [9], tj.

$$I = \frac{h^4}{12},$$

po dosazení do vztahu (38) určíme průřezový modul čtvercového průřezu pro ohyb

$$W_0 = \frac{I}{e} = \frac{h^4}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{h^3}{6}.$$

Maximální ohybový moment bude uprostřed celé délky trámu, v níž bude umístěn hlavní šroub. Pro tento moment dostaneme z rovnic (50) a (51)

$$M_{\text{omax}} = \frac{F \cdot l}{4}.$$

Dovolené napětí v ohybu určíme z rovnice (15), přičemž pro houževnaté materiály je asi o 15 % vyšší než dovolené napětí v tahu [4]. Mez pevnosti v tahu určíme z číselného označení oceli 11343 (označeno indexem 2), tj.  $\sigma_{\text{Pt}2} = 340$  MPa. Uvažujeme pouze statické namáhání, tedy  $K_I = 1$ . Odsud

$$\sigma_{\text{Dov},0} = 1,15 \cdot \sigma_{\text{Dov},t2} = \frac{1,15 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{\text{Pt}2} \cdot K_I}{2} = \frac{1,15 \cdot 0,5 \cdot 340 \cdot 1}{2} = 97,75 \text{ MPa}.$$

Skutečné napětí určíme na základě základní rovnice namáhání v ohybu (Tab. 1), tedy po úpravě

$$\sigma_{\text{Sk},0} = \frac{M_{\text{omax}}}{W_0} = \frac{\frac{F \cdot l}{4}}{\frac{h^3}{6}} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot h^3}.$$

Dosadíme do pevnostní podmínky v ohybu (39) a vyjádříme hledanou maximální délku trámu

$$\sigma_{\text{Sk},0} \leq \sigma_{\text{Dov},0} \Rightarrow l \leq \frac{2 \cdot h^3 \cdot \sigma_{\text{Dov},0}}{3 \cdot F} \doteq 351,9 \text{ mm}.$$

Zvolíme tedy délku menší, než je vypočtená hodnota, řekněme  $l \doteq 350$  mm.

Aby stojky konstrukce vizuálně navazovaly na horní trám lisu, bude jeden z příčných rozměrů stojky totožný se stranou čtvercového průřezu trámu, tj.  $h = 60$  mm. Druhý rozměr určíme na základě namáhání stojky tahem. Celková tahová síla trámku, která je na něj hlavním šroubem přenášena z reakce objektu lisovaného příslušnou maximální silou  $F$ , se rozdělí stejnou měrou na obě stojky. Po dosazení do základní rovnice namáhání v tahu (Tab. 1) určíme skutečné napětí, které dle pevnostní podmínky pro tah (14) musí splňovat nerovnost

$$\sigma_{\text{Sk},t} = \frac{\frac{F}{2}}{S_{\text{stojky}}} = \frac{F}{2 \cdot b \cdot h} \leq \sigma_{\text{Dov},t2} = \frac{0,5 \cdot \sigma_{\text{Pt}2} \cdot K_I}{2} = 85 \text{ MPa}.$$

Odtud pro hledaný rozměr  $b$  dostaneme

$$b \geq \frac{F}{2 \cdot h \cdot \sigma_{Dov,t2}} = 3,9 \text{ mm.}$$

Z [9] pro tyče z ploché oceli určíme pro rozměr  $h = 60 \text{ mm}$  nejbližší tloušťku splňující výše zmíněnou nerovnost, tj.  $b = 5 \text{ mm}$ .

Stojky jsou k hornímu trámu připevněny pomocí dvou šroubů stejné velikosti, kterou je potřeba stanovit na základě pevnostní podmínky pro stříh (33), kde skutečné napětí ve stříhu určíme z rovnice základního namáhání smykem dle Tab. 1. Dovolené napětí ve smyku je o 40 % menší než dovolené napětí materiálu šroubů v tahu, které určíme z rovnice (15). Tedy

$$\tau_{Sk,s} = \frac{\frac{F}{2}}{S_{\text{šroubů}}} \leq \tau_{Dov,s} = 0,6 \cdot \sigma_{Dov,t1} = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt1} \cdot K_I}{2} = 75 \text{ MPa.}$$

Odsud vypočteme nutnou minimální celkovou plochu průřezu šroubů, tj.

$$S_{\text{šroubů}} \geq \frac{F}{2 \cdot \tau_{Dov,s}} = 266, \bar{6} \text{ mm}^2.$$

Celková plocha průřezu jader obou ( $N_{\text{š}} = 2$ ) upevňovacích šroubů je

$$S_{\text{šroubů}} = N_{\text{š}} \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{š}}^2}{4} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{š}}^2}{4},$$

odkud dostaneme hledaný průměr jádra každého šroubu

$$d_{\text{š}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot S_{\text{šroubů}}}{\pi}} = 13,03 \text{ mm.}$$

V [9] nalezneme metrický šroub s nejbližší vyšším průměrem jádra, čímž dostaneme  $d_{\text{š}} = 13,546 \text{ mm}$  pro šroub s označením M16.

Dalším krokem bude dimenzování páky hlavního šroubu. Její délku určíme ze silových poměrů na šroubu tak, aby maximální osová síla byla právě rovna tlakové síle  $F$  při působení maximální síly člověka  $F_{\text{č}}$ . Pro silové poměry na šroubu platí dle [19]

$$F_{\text{š}} = F \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi),$$

kde  $\alpha$  je úhel stoupání závitu hlavního šroubu,  $\varphi$  je třecí úhel a  $F_{\text{š}}$  je síla působící ve vodorovném směru na středním průměru závitu  $d_{\text{š}}$ . Pro třecí úhel  $\varphi$  platí

$$f = \text{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = \text{arctg} f = \text{arctg} 0,1 \doteq 5^{\circ}42',$$

kde  $f$  je součinitel smykového tření mezi šroubem a horním trámem lisu. Pro tření ocel – ocel je střední součinitel smykového tření  $f = 0,1$  [20]. Úhel stoupání závitu určíme rozvinutím jednoho závitu do roviny, čímž získáme nakloněnou rovinu s odvěsnami rovnými stoupání závitu  $P$  a střednímu obvodu šroubu  $\pi \cdot d_{\text{š}}$  [21], odkud pro úhel stoupání  $\alpha$  dostaneme

$$\frac{P}{\pi \cdot d_s} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{P}{\pi \cdot d_s} = \operatorname{arctg} \frac{3}{\pi \cdot 22,5} \doteq 2^\circ 25'.$$

Moment  $M_s$  síly  $F_s$  musí být roven utahovacímu momentu  $M_k$  vnější dvojice sil  $F_\zeta$  působící na šroub prostřednictvím páky, pro který platí

$$M_k = F_\zeta \cdot R = F_s \cdot \frac{d_s}{2}.$$

Kombinací předchozích rovnic a vyjádřením hledané délky páky hlavního šroubu  $R$  bude

$$R = \frac{F_s}{F_\zeta} \cdot \frac{d_s}{2} = \frac{F \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{F_\zeta} \cdot \frac{d_s}{2} = \frac{40000 \cdot \operatorname{tg}(2^\circ 25' + 5^\circ 42')}{400} \cdot \frac{22,5}{2} \doteq 160,5 \text{ mm}.$$

Celá páka bude tedy dlouhá 160,5 mm. Protože při lisování bude dvojice sil  $F_\zeta$  zkrucovat jádro hlavního šroubu krouticím momentem  $M_k$ , musíme ještě ověřit pevnostní podmínku (67) pro krut hlavního šroubu. Z rovnic (65) a (66) určíme průřezový modul jádra hlavního šroubu v krutu, tedy

$$W_k = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

kde  $d = 20,5$  mm je již dříve určený průměr jádra hlavního šroubu. Dovolené napětí v krutu je prakticky totožné jako dovolené napětí ve smyku, a proto

$$\tau_{\text{Dov},k} = \tau_{\text{Dov},s} = 0,6 \cdot \sigma_{\text{Dov},t1} = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{\text{Pt1}} \cdot K_1}{2} = 75 \text{ MPa}.$$

Skutečné napětí určíme ze základní rovnice namáhání v krutu (Tab. 1), tedy

$$\tau_{\text{Sk},k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{F_\zeta \cdot R}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot F_\zeta \cdot R}{\pi \cdot d^3} = 38 \text{ MPa}.$$

Protože platí  $\tau_{\text{Sk},k} \leq \tau_{\text{Dov},k}$ , je pevnostní podmínka pro krut (67) splněna a délka páky tak vyhovuje.

Bude-li jádro hlavního šroubu uprostřed páky, potom bude páka na každou stranu přechínat o

$$l_p = \frac{160,5 - 20,5}{2} = 70 \text{ mm}.$$

Při lisování bude přechínající část páky namáhána na ohyb. Z pevnostní podmínky pro ohyb (39) tak určíme velikost průměru tyče tvořící páku. Přechínající část páky si můžeme představit jako nosník délky  $l_p$  vetknutý do hlavního šroubu a namáhaný osamělou silou  $F_\zeta$  na volném konci. Maximální ohybový moment bude dle (42)

$$M_{\text{omax},p} = F_\zeta \cdot l_p.$$

Osový moment setrvačnosti kruhového průřezu nalezneme v [9], tj.

$$I = \frac{\pi \cdot d_p^4}{64},$$

kde  $d_p$  je průměr páky. Po dosazení do (38) dostaneme průřezový modul v ohybu

$$W_{o,p} = \frac{I}{e} = \frac{\frac{\pi \cdot d_p^4}{64}}{\frac{d_p}{2}} = \frac{\pi \cdot d_p^3}{32}.$$

Skutečné napětí určíme podle základní rovnice namáhání v ohybu (Tab. 1). Po dosazení do pevnostní podmínky pro ohyb (39) dostaneme

$$\sigma_{Sk,o,p} = \frac{M_{o,max,p}}{W_{o,p}} = \frac{32 \cdot F_{\xi} \cdot l_p}{\pi \cdot d_p^3} \leq \sigma_{Dov,o}.$$

Dovolené napětí v ohybu je stejné jako v případě horního trámu 97,75 MPa, protože se jedná o stejný materiál. Odsud pro hledaný průměr páky  $d_p$  platí

$$d_p \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot F_{\xi} \cdot l_p}{\pi \cdot \sigma_{Dov,o}}} = 14,3 \text{ mm}.$$

Zvolíme nejbližší vyšší průměr standardně vyráběných tyčí kruhového průřezu, který je dle [9] roven 15 mm.

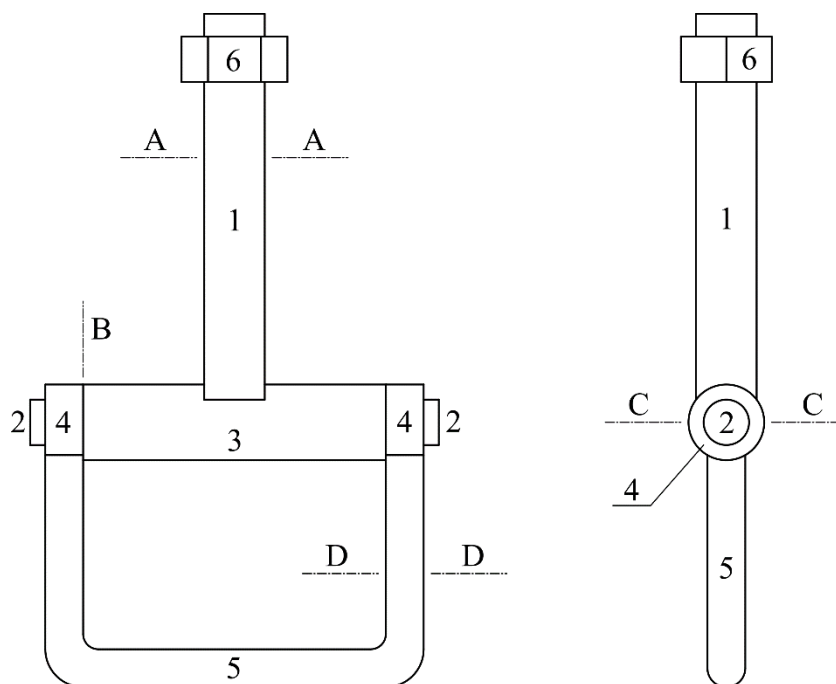
Poznámka:

V praktických aplikacích se nevolí páka všude stejného průřezu, ale tvar páky je takový, aby ve všech průřezech bylo stejné napětí [8], tzn. průměr páky směrem od hlavního šroubu ke konci páky klesá. Výpočet takové páky je složitější a přesahuje rámec této práce.

---

#### **Příklad 24:**

Ověřte pevnostní podmínky houpačkového háku (viz Obr. 65) pro zatížení houpačky silou  $F_0 = 1000 \text{ N}$ . Šroub má délku 140 mm a je uchycen maticí M12. Průměr čepu kloubového spoje je  $d = 10 \text{ mm}$  a jeho délka mezi oky třmenu je  $a = 40 \text{ mm}$ . Čep je z oceli 11600, matice z oceli 11500, ostatní součásti jsou z materiálu 10152, který má mez pevnosti 350 MPa. Míru bezpečnosti volte 2. Řez C – C oka třmenu má tvar dvou stejných čtverců o straně 10 mm. Řez D – D boční strany třmenu má tvar čtverce o straně  $c = 10 \text{ mm}$ , v ohnutí plynule přechází do kruhového průřezu o průměru  $d_t = 10 \text{ mm}$  ve spodní části třmenu. Jaké maximální zatížení unese houpačka zavěšená na dvou takových háčích?



**Obr. 65** Náčrt houpáckového háku (1 – šroub, 2 – čep, 3 – pouzdro čepu, 4 – oko třmenu, 5 – třmen, 6 – matice; A – A, B, C – C, D – D – označení řezů pro výpočty)

### Řešení:

Houpačka je upevněna dvěma háky, a proto je síla zatěžující každý hák poloviční oproti celkovému zatížení, tedy  $F = F_0/2 = 500$  N. Od této síly budeme odvozovat namáhání ve všech částech houpáckového háku.

#### a) Namáhání šroubu na tah

V průřezu A – A budeme ověřovat pevnostní podmínku pro tah (14), přičemž skutečné napětí určíme ze základní rovnice pro tah (Tab. 1). S využitím vzorce pro obsah kruhového průřezu metrického šroubu M12, jehož jádro má dle [9] průměr  $d_j = 9,853$  mm, dostaneme

$$\sigma_{Sk,t} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_j^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d_j^2} = \frac{4 \cdot 500}{\pi \cdot 9,853^2} = 6,56 \text{ MPa.}$$

Dovolené napětí určíme z rovnice (15), kde mez kluzu určíme jako polovinu meze pevnosti materiálu. Koeficient dynamiky namáhání  $K_{II} = 0,85$ , protože se jedná o pulzující namáhání, tedy

$$\sigma_{Dov,t} = \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt1} \cdot K_{II}}{n} = \frac{0,5 \cdot 350 \cdot 0,85}{2} = 74,375 \text{ MPa.}$$

Protože  $6,56 \text{ MPa} \leq 74,375 \text{ MPa}$ , závit pevnostní podmínce pro tah (14) vyhovuje.



Maximální zatížení šroubu tahem určíme opět z pevnostní podmínky (14) za předpokladu, že skutečné napětí dosáhne maximální možné hodnoty, tedy bude právě rovno dovolenému napětí. Odsud dostaneme

$$\frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot 9,853^2} = 74,375 \Rightarrow F_1 = 5668 \text{ N.}$$

Tomu odpovídá hmotnost 566,8 kg. Protože je houpačka zavěšena na dvou hácích, bude maximální hmotnost vycházející z pevnostní podmínky pro tah dvojnásobná, tedy  $m_1 = 1133,6 \text{ kg}$ .

*b) Namáhání čepu na stříh*

Čep je v průřezích B dvojstřížný, tedy stříhem budou namáhány dva stejné kruhové průřezy. Skutečné napětí určíme ze základní rovnice namáhání ve smyku (Tab. 1)

$$\tau_{\text{Sk,s}} = \frac{F}{S} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{2 \cdot 500}{\pi \cdot 10^2} = 3,18 \text{ MPa.}$$

Mez kluzu ve smyku je u houževnatých ocelí o 40 % menší než mez kluzu v tahu, tedy i dovolené napětí ve smyku bude 0,6násobkem dovoleného napětí v tahu. To určíme opět z rovnice (15), pouze mez pevnosti materiálu čepu bude dle označení oceli 600 MPa. Po dosazení dostaneme

$$\tau_{\text{Dov,s}} = 0,6 \cdot \sigma_{\text{Dov,t}} = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{\text{Pt2}} \cdot K_{\text{II}}}{n} = 0,6 \cdot \frac{0,5 \cdot 600 \cdot 0,85}{2} = 76,5 \text{ MPa.}$$

Protože  $3,18 \text{ MPa} \leq 76,5 \text{ MPa}$ , čep pevnostní podmínce pro stříh (33) vyhovuje.

Maximální zatížení, které snese čep při smyku, určíme ze stejných rovnic, z nichž budeme hledat maximální zatěžující sílu v případě rovnosti skutečného a dovoleného napětí, tedy

$$\frac{2 \cdot F_2}{\pi \cdot 10^2} = 76,5 \Rightarrow F_2 = 12010,5 \text{ N.}$$

Tomu odpovídá maximální hmotnost cca 1200 kg. Je to hmotnost připadající na jeden čep, proto celková hmotnost odpovídající maximálnímu zatížení obou čepů na stříh bude  $m_2 = 2402 \text{ kg}$ .

*c) Namáhání pouzdra čepu na otláčení*

Plocha pouzdra namáhaná na otláčení představuje polovinu pláště válce o průměru 10 mm. Jeho kolmý průmět na směr namáhání je obdélník o stranách 40 mm a 10 mm. Skutečný tlak určíme na základě rovnice (24), tj.

$$p = \frac{F}{a \cdot d} = \frac{500}{40 \cdot 10} = 1,25 \text{ MPa.}$$

Jedná se o součásti stýkající se za pohybu, a proto je mezní tlak 20 MPa. Protože platí  $1,25 \text{ MPa} \leq 20 \text{ MPa}$ , otláčení ve stykové ploše čepu a pouzdra vyhovuje pevnostní podmínce pro otláčení (27).

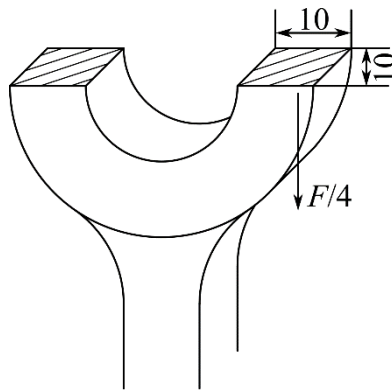
Maximální zatížení pro otláčení určené z rovnosti skutečného a mezního tlaku bude

$$\frac{F_3}{10 \cdot 40} \leq 20 \Rightarrow F_3 = 8000 \text{ N.}$$

Tomu odpovídá hmotnost 800 kg, po přepočtu na dva čepy bude maximální přípustná hmotnost z podmínky pro otláčení  $m_3 = 1600 \text{ kg}$ .

*Namáhání oka třmenu na tah*

Síla namáhající jeden hák je stejná jako síla, která namáhá celý třmen. Ta se však rozdělí na dvě oka, proto je síla připadající na jedno oko  $F/2 = 250 \text{ N}$ . Tato síla působící na jedno oko se ještě rozdělí rovnoměrně na obě strany řezu, tedy  $F/4 = 125 \text{ N}$  (viz Obr. 66).



**Obr. 66** Řez oka třmenu

Dovolené napětí je stejné jako v případě namáhání tahem u šroubu, tedy 74,375 MPa (viz výše), protože se jedná o stejný materiál i dynamiku namáhání. Skutečné napětí získáme z výše určené síly na základě základní rovnice namáhání tahem (Tab. 1), kde plocha bude rovna obsahu čtverce o straně 10 mm (viz Obr. 66), tj.

$$\sigma_{\text{Sk,t}} = \frac{F}{b^2} = \frac{125}{10^2} = 1,25 \text{ MPa.}$$

Protože je  $1,25 \text{ MPa} \leq 74,375 \text{ MPa}$ , oka obou třmenů vyhovují pevnostní podmínce pro tah (14).

V případě maximálního možného zatížení určíme hledanou sílu z rovnosti skutečného a dovoleného napětí v rovnici (14), tedy

$$\frac{F_4}{10^2} \leq 74,375 \Rightarrow F_4 = 7437,5 \text{ N.}$$

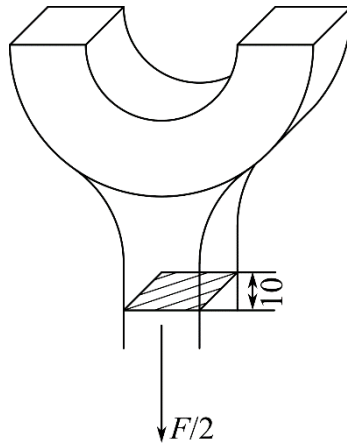
Tomu odpovídá hmotnost 743,75 kg připadající na jednu stranu oka, po přepočtu na celé oko bude hmotnost 1487,5 kg. Pak maximální hmotnost, kterou lze zatížit všechna oka třmenů obou háků, na kterých je houpačka zavěšena, je  $m_4 = 5950 \text{ kg}$ .

*d) Namáhání bočních částí třmenu na tah*

Ověření pevnostní podmínky v tahu (14) bude v tomto případě zcela analogické jako v případě namáhání oka třmenu, dovolené napětí bude zcela totožné, tedy 74,375 MPa, skutečné napětí v tahu dle Tab. 1 bude

$$\sigma_{Sk,t} = \frac{F}{c^2} = \frac{250}{10^2} = 2,5 \text{ MPa,}$$

protože síla namáhající průřez zde bude větší, konkrétně  $F/2 = 250 \text{ N}$  (viz Obr. 67). Vzhledem k tomu, že platí  $2,5 \text{ MPa} \leq 74,375 \text{ MPa}$ , boční část třmenu vyhovuje pevnostní podmínce pro tah (14).



**Obr. 67** Namáhání třmenu na tah

Maximální síla namáhající daný průřez bude stejná jako u oka třmenu, tj.

$$\frac{F_5}{10^2} \leq 74,375 \Rightarrow F_5 = 7437,5 \text{ N.}$$

Tomu opět odpovídá hmotnost 743,75 kg připadající na jednu stranu třmenu, po přepočtu na celý třmen bude hmotnost 1487,5 kg. Pak maximální hmotnost, kterou lze zatížit oba třmeny háků, je  $m_5 = 2975 \text{ kg}$ .

*e) Namáhání spodní části třmenu na ohyb*

Předpokládejme, že doprostřed spodní části třmenu je uvázáno lanko od sedačky houpačky. Toto lanko bude namáhat spodní část třmenu ohybem. Na vzniklou situaci lze pohlížet jako na nosník na dvou podporách namáhaný osamělou silou  $F$  uprostřed mezi podporami. Přesně takovou situaci jsme řešili v Příkladu 18. Využijeme tedy jeho výsledků. Průřezový modul v ohybu je

$$W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

maximální ohybový moment je

$$M_{o\max} = \frac{F \cdot l}{4}.$$

Ze základní rovnice pro namáhání ohybem Tab. 1 dostaneme pro skutečné napětí

$$\sigma_{Sk,0} = \frac{M_0}{W_0} = \frac{\frac{l \cdot F}{4}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{8 \cdot l \cdot F}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 40 \cdot 500}{\pi \cdot 10^3} = 51 \text{ MPa.}$$

U houževnatých materiálů je mez kluzu v ohybu přibližně o 15 % větší než mez kluzu v tahu, proto dovolené napětí bude

$$\sigma_{Dov,0} = 1,15 \cdot \sigma_{Dov,t} = 1,15 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt1} \cdot K_{II}}{n} = 1,15 \cdot \frac{0,5 \cdot 350 \cdot 0,85}{2} = 85,53 \text{ MPa.}$$

Protože je  $51 \text{ MPa} \leq 85,53 \text{ MPa}$ , spodní část třmenu vyhovuje pevnostní podmínce pro ohyb (39).

Maximální zatížení třmenu získáme opět z rovnosti dovoleného a skutečného napětí v pevnostní podmínce pro ohyb (39). Platí tedy

$$\frac{8 \cdot 40 \cdot F_6}{\pi \cdot 10^3} \leq 85,53 \Rightarrow F_6 = 839,3 \text{ N.}$$

Tomu odpovídá hmotnost přibližně 84 kg připadající na jeden třmen, po přepočtu na oba třmeny bude maximální přípustná hmotnost  $m_c = 168 \text{ kg}$ .

#### f) Namáhání závitů matice na otlačení

Šroub je proti vypadnutí z trámu houpačky fixován maticí M12. V jejích závitech tak dochází k otlačení. Základní důležité rozměry matice nalezneme v tabulkách [9], tedy nosná hloubka závitu  $v_n = 1,894 \text{ mm}$ , střední průměr závitu  $d_s = 10,863 \text{ mm}$ , stoupání závitu  $P = 1,75 \text{ mm}$ , výška matice  $m = 10 \text{ mm}$ . Průmětem rozvinutého jednoho závitu do roviny kolmé na směr působící síly (tj. kolmo na osu šroubu) získáme plochu obdélníka, pro kterou platí

$$S_z = \pi \cdot d_s \cdot v_n = 64,637 \text{ mm}^2.$$

Počet závitů uvnitř matice je

$$N = \frac{m}{P} = \frac{10}{1,75} = 5,7.$$

Celková plocha všech otlačovaných závitů bude

$$S = N \cdot S_z = 5,7 \cdot 64,637 = 368,43 \text{ mm}^2.$$

Skutečný celkový tlak ve styčné ploše bude dle rovnice (24)

$$p = \frac{F}{S} = \frac{500}{368,43} = 1,357 \text{ MPa.}$$

Mezní tlak u součástí bez pohybu bude [8]

$$p_{mezní} = 0,8 \cdot \sigma_{Dov,d} = 0,8 \cdot \sigma_{Dov,t} = 0,8 \cdot \frac{0,5 \cdot \sigma_{Pt1} \cdot K_{II}}{n} = 0,8 \cdot 74,375 = 59,5 \text{ MPa.}$$

Platí tedy, že  $1,375 \text{ MPa} \leq 59,5 \text{ MPa}$ , a proto je podmínka pro otlačení (27) splněna.

Maximální zatížení závitů na otlačení určíme z rovnosti mezního tlaku a skutečného tlaku v pevnostní podmínce pro otlačení (27), tedy

$$\frac{F_7}{368,43} \leq 0,8 \cdot 74,375 \Rightarrow F_7 = 21921,6 \text{ N.}$$

Tomu odpovídá hmotnost cca 2192 kg na jeden hák, tedy maximální přípustná hmotnost zátěže obou háků dohromady bude  $m_7 = 4384 \text{ kg}$ .

*g) závěr*

Pro zadanou zatěžující sílu  $F_0 = 1000 \text{ N}$  všechny součásti vyhovují pevnostním podmínkám pro příslušný druh namáhání. Porovnáme-li maximální přípustné hmotnosti pro jednotlivá namáhání, zjistíme, že nejmenší z nich je v případě ohybu spodní části třmenu,  $m_6 = 168 \text{ kg}$ . Při houpání však dochází k namáhání závěsů nejen tíhou břemene, ale i odstředivou silou, která celkové zatížení zvyšuje až na trojnásobek v případě houpání až do výchylky o  $90^\circ$  z rovnovážné polohy. Toto extrémní navýšení zatěžující síly ovšem koeficient dynamiky namáhání  $K_{II}$  nevykompenzuje, a proto je potřeba maximální zátěž stanovit nižší, tedy asi třetinovou, což odpovídá hmotnosti 56 kg. Jinou možností je navrhnout spodní část třmenu jiného tvaru průřezu nebo alespoň vyššího průměru. Zvýšení průměru na dvojnásobek totiž vede ke změně maximální přípustné zátěže na osminásobek původní hodnoty.

---

## 11. ZÁVĚR

Předložená diplomová práce navazuje na mé předchozí bakalářské práce Sbíрка řešených příkladů ze statiky I a II. Práce nemá standardní strukturu dělenou na teoretickou a praktickou část, ale blíží se svým uspořádáním klasickému učebnímu textu. Na začátku každé kapitoly je stručně uvedena základní teorie, za níž následuje několik jednodušších aplikačních příkladů s komentovaným podrobnějším postupem jejich řešení. Teorie i řešené příklady jsou doplněny relativně velkým množstvím názorných obrázků vytvořených ve volně stažitelném softwaru Inkscape, které napomáhají lepšímu pochopení jak dané problematiky, tak i postupů řešení.

Práce postihuje pouze základní druhy namáhání konstrukcí jako je prostý tah, prostý tlak, prostý smyk, prostý ohyb, prostý krut a vzpěr. K těmto tématům jsem vytvořila celkem 21 příkladů na procvičení a pochopení principů řešení příslušných druhů namáhání. V poslední kapitole jsou uvedeny tři příklady komplexnějšího charakteru, v nichž je konstrukce zatěžována několika druhy namáhání v různých místech. Při tvorbě příkladů jsem se nechala inspirovat různými sbírkami, ale vždy jsem se snažila, aby byly co nejvíce spjaty s realitou. Práce by šla doplnit i o další pokročilejší témata, např. řešení ohybu nosníků v případě složitějšího zatížení prostými silami nebo spojitou zátěží, řešení ohybu křivých prutů nebo kombinovaného namáhání více druhů namáhání současně atp., což by ovšem výrazně zvýšilo rozsah práce. Bez velmi dobré znalosti základních druhů namáhání a postupů jejich vyšetřování by však tato pokročilá témata byla téměř nepochopitelná a pro velkou část čtenářů nepoužitelná.

Eventuální uživatel práce musí mít specifické znalosti a dovednosti. Musí mít alespoň základní vědomosti z matematiky a fyziky, znát příslušné pojmy a postupy, umět užívat základní matematické operace, řešit lineární rovnice a nerovnice, mít znalosti z geometrie, goniometrických funkcí či vektorové algebry. Zároveň by měl ovládat základy vyšetřování statické rovnováhy. Důležité je i logické myšlení a prostorová představivost, která je nutná k orientaci v nákresech. Nezbytná je i schopnost používat strojnické tabulky, s nimiž je potřeba konfrontovat výsledky prvotního řešení příkladů a následně v nich dohledat příslušné standardně vyráběné rozměry polotovarů. Musí také umět vyhledat důležité vlastnosti materiálů, jako je např. mez pevnosti, dovolené napětí při daném druhu namáhání nebo také hmotnost součásti, která může zpětně ovlivnit získané výsledky při ověření výpočtu z hlediska provozních podmínek navrhované konstrukce nebo součásti.

Tato diplomová práce společně s mými dvěma předchozími bakalářskými pracemi postihuje prakticky celý obsah předmětů Technická mechanika I a II vyučovaných na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity při přípravě budoucích učitelů předmětu Technická výchova. Doufám, že všechny práce budou výrazným přínosem nejen pro studenty na výše zmíněné fakultě, ale i pro vyučující na středních a vyšších odborných školách, popř. vysokých školách, kde se vyučují technické obory, při přípravě na výuku i při vlastní výuce. Vzhledem k přístupnosti kvalifikačních prací na internetu mohou být práce využity také samotnými studenty technických oborů a škol při samostudia a přípravě na zkoušky.

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ŠIMANOVÁ, Petra. *Sbírka řešených příkladů ze statiky I.* České Budějovice, 2021. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [2] ŠIMANOVÁ, Petra. *Sbírka řešených příkladů ze statiky II.* České Budějovice, 2022. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [3] HÁJEK, Emanuel, Pavel REIF a František VALENTA. *Pružnost a pevnost.* Bratislava: Alfa, 1988.
- [4] KUNC, Antonín a Josef ZIMA. *Mechanika II: pružnost a pevnost pro 2. roč. střední průmyslové školy strojnické.* Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1967.
- [5] ČSN EN ISO 6892-1 (420310). *Kovové materiály – Zkoušení tahem – Část 1: Zkušební metoda za pokojové teploty.* Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2021, 76 s.
- [6] HLUCHÝ, Miroslav a Jan KOLOUCH. *Strojírenská technologie 1. 2., opr. vyd.* Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-150-6.
- [7] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Křivka deformace. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. 22.3.2008 [cit. 2023-04-13]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/632-krivka-deformace>
- [8] JEČMÍNEK, Josef. *Technická mechanika pro vyšší průmyslové školy i pro praxi: Díl třetí – Pružnost a pevnost. 2. opr. vyd.* Praha: Vědecko-technické nakladatelství, 1951.
- [9] LEINVEBER, Jiří a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky.* 6. vyd. Albra, 2017.
- [10] Únava materiálu. In: *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. c2020 [cit. 2023-04-13]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Anava\\_materi%C3%A1lu](https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Anava_materi%C3%A1lu)
- [11] HALAMA, Radim, Ludmila ADÁMKOVÁ, František FOJTÍK, Karel FRYDRÝŠEK, Michal ŠOFER, Jaroslav ROJÍČEK a Martin FUSEK. *Pružnost a pevnost.* Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2011.
- [12] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Část 1 Mechanika.* Brno: VUTIUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1868-0.



- [13] ROUČKA, Jaromír. *Metalurgie litin*. Brno, 2010. Dostupné také z:  
<http://www.fsiforum.cz/upload/soubory/databaze-predmetu/CME/Metalurgie%20litin.pdf>
- [14] PROKOP, Josef. *Výpočet napětí a deformace tenkostěnné tlakové nádoby s plochými dny a experimentální ověření výpočtu*. Liberec, 2016. Bakalářská práce. Technická univerzita v Liberci. Fakulta strojní.
- [15] VELIČKOVÁ, Eva. *Zařízení pro dopravu a uskladnění tekutin*. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010.
- [16] KUNC, Antonín, Josef ZIMA a Jan WANNER. *Mechanika II: pružnost a pevnost*. 4. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1961.
- [17] VYBÍRAL, Bohumil. *Mechanika pružného tělesa: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*. Hradec Králové: MAFY, 2007. KFO č. 78.
- [18] SVOBODA, Jaroslav. *Mechanika, pružnost – pevnost: Průřezové charakteristiky základních profilů*. Brno, 2013.
- [19] SALABA, Stanislav a Antonín MATĚNA. *Mechanika I – Statika pro SPŠ strojnické*. Praha: SNTL, 1977.
- [20] Součinitele tření. In: *Ripra s.r.o.* [online]. Praha, 14.11.2012 [cit. 2023-04-13]. Dostupné z: <https://pdms-help.webnode.cz/news/soucinitele-treni/>
- [21] WANNER, Jan. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky: 1. díl – Statika, tření a jednoduché stroje*. 2., opr. a dopl. vyd. Praha: Vědecko-technické nakladatelství, 1950.