Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Slavní matematici a jejich odkaz - Leonard Euler

Vypracovala: Stanislava Košáková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Slavní matematici a jejich odkaz – Leonard Euler jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Košáková

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Pavlu Tlustému, CSc. za odborné rady a připomínky během psaní této práce.

Anotace

Cílem mé bakalářské práce je seznámit širokou veřejnost, ale především žáky, studenty, učitele i rodiče s jedním velkým představitelem z řad matematiků, který ovlivnil náš svět. Často si člověk myslí, že veškeré vědomosti a znalosti z matematiky máme z období řeckých a římských dějin nebo od matematiků z Arabského poloostrova. Není to však pravda, velký rozvoj matematiky nastal zejména od 18. století, kdy matematika začala vládnout vědám. Mnozí matematikové zmizeli v dějinách času, jiní budou stát na vrcholu vítězů ještě v daleké budoucnosti, protože jejich myšlenky jsou stále živé a neustále s nimi pracujeme a využíváme je. Vybrala jsem si matematika, který se po celý svůj život věnoval číslům, výpočtům a rovnicím. Jeho okruh zájmů byl široký, a tak bohatý, že nelze zahrnout do jedné práce ani jednu polovinu jeho činností. Jeho jméno není mezi lidmi moc známé, ale jeho objevy, stanovené symboly nebo zavedené matematické věty umíme všichni a nepřemýšlíme, kdo je vytvořil nebo vymyslel. Mluvím o švýcarském matematikovi, fyzikovi a astronomovi Leonardu Eulerovi. V první části práce je vypracován jeho podrobný životopis, který nás seznámí s Eulerem jako s člověkem, který měl také obyčejné starosti. V další části bakalářské práce jsem se zaměřila na jednu z mnoha oblastí matematiky, o kterou se tento matematik zajímal, a to o geometrii.

Klíčová slova:

geometrie, pedální trojúhelník, čtyřúhelník, Eulerovy věty

Annotation

The goal of my bachelor's thesis is to introduce the general public, but above all pupils, students, teachers and parents, to one great representative from the ranks of mathematicians who influenced our world. People often think that all knowledge and understanding of mathematics we have from the period of Greek and Roman history or from mathematicians from the Arabian Peninsula. However, this is not true, the great development of mathematics occurred mainly from the 18th century, when mathematics began to dominate the sciences. Many mathematicians have disappeared into the history of time, others will stand on top of the winners in the distant future, because their ideas are still alive and we are constantly working with them and using them. I chose a mathematician who spent his whole life dealing with numbers, calculations and equations. His range of interests was wide and so rich that it is impossible to include even half of his activities in one work. His name is not very well known among people, but we all know his discoveries, established symbols or established mathematical theorems and do not think about who created or invented them. I am talking about the Swiss mathematician, physicist and astronomer Leonard Euler. In the first part of the work, his detailed biography is drawn up, which introduces us to Euler as a person who also had ordinary concerns. In the next part of my bachelor's thesis, I focused on one of the many areas of mathematics that this mathematician was interested in, namely geometry.

Keywords:

geometry, pedal triangle, quadrilateral, Euler's theorems

Obsah

ÚVOD 1

1. ŽIVOTOPIS 3

 1. 1. Rodina 3

 1. 2. Dětství 3

 1. 3. Školní docházka 3

 1. 4. První pobyt v Rusku 4

 1. 5. Pobyt v Berlíně 6

 1. 6. Druhý pobyt v Rusku 8

 1. 7. Odkaz lidstvu 10

 1. 8. Vědecké diskuze 10

 1. 9. Zajímavé výroky o Eulerovi 11

 1. 10. Zajímavosti 11

2. EULEROVA VĚTA O ČTYŘÚHELNÍCÍCH 12

 2. 1. Ověření platnosti vztahu 12

3. EULEROVA VĚTA O TROJÚHELNÍKU 17

 3. 1. Ověření platnosti vztahu 17

4. EULEROVA VĚTA O PEDÁLNÍM TROJÚHELNÍKU 22

 4. 1. Ověření platnosti vztahu 22

ZÁVĚR 39

ZDROJE 40

ÚVOD

Žijeme ve světě, kde nás matematika obklopuje na každém kroku. Setkáváme se s ní od prvního okamžiku, kdy prvně otevřeme oči. I když je to k neuvěření, protože nás v ten kouzelný okamžik zváží a změří. A matematika je tu hned.

Paní matematika se stala za ta dlouhá léta, za ta století, snad už za i tisíciletí nedílnou součástí našeho života, naší historie a bude při nás stát i v naší budoucnosti. Provází nás celým životem, jako doprovázela naše rodiče, prarodiče a prarodiče prarodičů a tak se stalo, že ona královna vědy se někomu zalíbila víc než cokoli jiného a tento člověk se jí začal věnovat, protože jí dokázal vnímat. Díval se kolem sebe, pozoroval, měřil, studoval, zapisoval, vymýšlel, počítal, přepočítával, ověřoval, diskutoval, hloubal a neustále s ní sváděl boj. Nakonec se problémy staly pro něj výzvy, které mají být překonány, vyřešeny a výsledky se pak mění na pravidla, které lze využít pro život. Každý z nás se určitě už zabýval nějakým matematickým rébusem, ale málokdo z nás byl první, kdo ho vyřešil a dokonce po něm pojmenovali postup řešení, matematickou větu, používanou konstantu, významný vzorec, odbornou poučku nebo zajímavý graf.

Všichni jsme matematici, ale jen pár z nás v průběhu celých dějin lidstva se stane slavnými a nesmrtelnými, o nichž se učí ve školách či jméno zůstane v paměti lidí po celý život nebo při vyslovení jeho jména si přestavíme rovnici, vzoreček, náčrtek nebo jeho podobiznu. Pro některé matematiky je určen trůn slávy, kde se vyhřívají na výsluní, jiní přes svůj talent, myšlenky, nápady spadnou z vrcholu a upadnou v zapomnění. Je zajímavé, že s každým známým matematikem nebo vědcem si lidé většinou spojují jen jednu věc, tedy přesněji jednu poučku nebo daný výpočet. Žádný z vědců nevymyslel jen jeden matematický zákon, ale při svém bádání vymyslel nebo zdokonalil mnoho dalších zajímavých věcí, zjistil hodně úkazů a stanovil výpočetní postupy, přesto se dá říci, že jedna část převažuje nad ostatními. Někdo se matematikou zabývá celý život a je jeho láskou, vášní i prokletím, jiný zase tímto oborem opovrhuje a uráží. Přesto bez ní nikdo nemůže žít. Správný matematik se snaží své poznatky a nápady předávat dál, chce se s nimi podělit s ostatními lidmi. Při vzájemných setkání diskutují, přou se, snaží se prosadit svůj názor nebo oponovat těm druhým. Aniž si to uvědomují, navzájem se všichni ovlivňují, vzájemně si pomáhají a podporují se v dalším bádání a přemýšlení o matematických problémech, záhadách nebo neřešitelných rovnicích.

Za celý svůj život potkáme velké množství lidí, kteří i nevědomky změní směr naší cesty a naše kroky směřují po jiných pěšinkách a po jiných směrovkách. Někdy se osudy protknou jen jednou, někdy se setkávají častěji, a tak kroky naší pouti životem jsou stále neznámé. To stejné se dá tvrdit o životě významného matematika Leonarda Eulera, který během svého života potkal mnoho zajímavých lidí, kteří ovlivnili jeho myšlení a konání, ale můžeme s jistotou prohlásit, že i on ovlivnil hodně lidí za svého života a ještě více po své smrti. Právě proto, že matematika spojuje všechny lidi bez ohledu, jak velký mají zájem o tento vědní obor, má tato moje práce být takovým malým mostem, který usnadní jejich setkání.

První část této bakalářské práce je věnovaná podrobnému životu Leonarda Eulera, protože tak lépe dokážeme pochopit jeho jednání a postoje v životě.

Druhá část práce se zabývá geometrií, přesněji Eulerovou větou o čtyřúhelnících, Eulerovou větou o trojúhelníku a Eulerovou větou o pedálním trojúhelníku. Rozsah činnosti švýcarského matematika Eulera byl v oblasti geometrie velký, byla vybrána ke zpracování jenom tato tři témata, protože by nebylo možné tuto látku v bakalářské práci plně a dostatečně zpracovat.

1. ŽIVOTOPIS

Leonard Euler byl švýcarský, německý a ruský matematik, fyzik, mechanik i astronom, který významně přispěl k rozvoji některých věd, mezi které můžeme zařadit matematiku, fyziku, astronomii, botaniku, lékařství, chemii, letectví, námořnictví a dokonce i hudební teorii. Žil v letech 1707 – 1783. (Интересные факты, 2023)

obr. 1. 1: Portrét Leonarda Eulera
(Zdroj: viz Zdroje)

1. 1. Rodina

Leonard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 ve městě Basilej, které se nachází ve Švýcarsku. Jeho otec Paul Euler byl pastor a vlastnil malou farnost v Riehenu, která leží nedaleko Basileje. Eulerova matka Margareta Eulerová, rozená Bruckerová, pocházela také z rodiny pastora. Leonard Euler měl dvě mladší sestry, Annu Marii a Marii Magdalenu a mladšího bratra Johanna Heinricha. (Образовака твой помощник в учебе, 2023)

1. 2. Dětství

Krátce po jeho narození se rodina i s malým Leonardem přestěhovala do vesnice Rihen, kde prožíval své dětství. První hodiny matematiky měl doma s otcem, který v minulosti obhájil disertační práci z matematiky. I když Leonard Euler byl zanícený do matematiky, jeho otec chtěl mít z něho kněze.

1. 3. Školní docházka

Školní léta prožil Leonard v latinské škole v Basileji, která však byla spíše venkovskou školou, její úroveň byla nízká a v oblasti matematiky nedosahovala požadované kvality. Ve 13 letech přestoupil na Fakultu svobodných umění na univerzitě v Basileji, protože učitelé si všimli jeho velkého nadání, vynikající paměti a logického uvažování. Na této univerzitě vyučoval profesor Johann Bernoulli, slavný švýcarský matematik a fyzik, který pocházel ze známé vědecké dynastie Bernoulliů. Johann Bernoulli neměl dostatek peněz, i přestože učil na univerzitě, a tak často poskytoval soukromé hodiny studentům. Když se toto dozvěděl Leonard Euler, zašel za profesorem se žádostí, aby mohl u něho studovat. Nejprve ho Bernoulli nechtěl přijmout, ale nakonec s hodinami souhlasil. Euler jako student nezapomínal ani na ostatní předměty a univerzitní kurzy, snažil se mít všeobecný přehled a úspěchy na sebe nenechaly dlouho čekat. Leonard Euler získal v roce 1724 titul Master of Arts (hodnost magistra umění) a to za skvělý projev v latině, kde srovnával karteziánskou a newtonskou filozofii. (Биографии знаменитостей, 2022)

Přestože se Euler stal absolventem fakulty, jeho otec trval na teologickém vzdělání, a proto začal studovat i hebrejštinu a řečtinu. Studoval s určitými obtížemi, protože se každou sobotu scházel s Johannem Bernoulliem a jeho syny, Nikolasem Bernoulliem, budoucím právníkem, matematikem a především vědcem, který se věnoval křivkám a teorii pravděpodobnosti, a Danielem Bernoulliem, budoucím švýcarským fyzikem, matematikem a zakladatelem hydrodynamiky. Vášnivě s nimi studoval matematiku, v které stále více nacházel zalíbení. Jeho otec nakonec ustoupil, protože poznal synovo nadání, a tak Eulerovi ve studiu matematiky již nic nebránilo. V 19 letech úspěšně ukončuje studia na vysoké škole a pro Eulera nastal čas najít si zaměstnání. (Биографии знаменитостей, 2022)

Ucházel se o místo profesora fyziky na basilejské univerzitě, ale pro jeho nízký věk byl odmítnut. (Králová, M., 2007) V Basileji jak postupně zjistil, nebylo pro něj žádné pracovní místo, ale neztrácel naději. Věděl, že bratři Nikolas a Daniel Bernoulliovi byli pozvání do Petrohradu, kde se právě otevírala Petrohradská akademie věd. Štěstí se na něj znovu usmálo. (Образовака твой помощник в учебе, 2023)

1. 4. První pobyt v Rusku

Bernoulli slíbil Leonardovi při odjezdu, že ho upozorní, když se pro něj v Rusku najde vhodné povolání. Už následující rok mu oznámili, že se pro něj našlo pracovní místo, ale ne jako pro matematika, ale jako pro fyziologa na lékařském oddělení akademie. (Разместить статью, биографию и пр., 2014) Uvolnilo se totiž pracovní místo po Nikolasovi Bernoulliovi, který v Rusku zemřel a jeho bratr navrhl na jeho místo právě Eulera. Euler místo přijal, ale vyhradil si podmínku, že do Ruska přijede až příští rok. (Bureš, J., 2004) Euler nelenil a hned se zapsal na univerzitu jako student medicíny. Při tomto studiu však nezapomínal ani na studium matematiky. (Разместить статью, биографию и пр., 2014) V roce 1727 se zúčastnil soutěže o nejlepší techniku instalace lodních stožárů, kterou pořádala pařížská akademie věd. Euler získal druhé místo. Je zajímavé, že této soutěže se zúčastnil každý rok a během svého života získal dvanáct cen. (Образовака твой помощник в учебе, 2023)

Dne 24. května roku 1727 Euler přijel do Petrohradu. Vláda v Rusku mu poskytla byt a dostával 300 rublů ročně jako plat. Leonard Euler si rychle zvykl na jinou zem, ruský jazyk se naučil velmi dokonale a dokázal za krátkou dobu plynule mluvit i psát. Velmi brzy si našel přítele a to tajemníka akademie Christiana Goldbacha, což byl německo-ruský matematik, který se zabýval „perfektní mocninou“, což je číslo, které můžeme zapsat přirozenou mocninou jiného přirozeného čísla. Vedli spolu čilou vědeckou korespondenci, která je i dnes zdrojem poznatků v oblasti matematiky. (Биограф, 2023) Začal pracovat jako adjunkt, tedy jako mladší akademik a po třech rocích jeho pobytu v Rusku, v Petrohradě, ho petrohradská akademie ocenila. Stal se profesorem fyziky a tím pádem řádným členem Akademie a to v jeho pouhých 23 letech. (Разместить статью, биографию и пр., 2014)

Roku 1730 nastupuje na ruský trůn Anna Ivanovna Romanovová, ruská carevna, během jejíž vlády zájem o akademii neupadá, spíše je na vzestupu. Následující rok, to je roku 1731, získal Euler post na katedře vyšší matematiky, kterou dříve zastával Daniel Bernoulli, který se však téhož roku vrátil do Basileje. (Разместить статью, биографию и пр., 2014) Dne 7. ledna roku 1734 se oženil s Kateřinou Gzelovou, dcerou švýcarského umělce, akademického malíře a učitele výtvarné výchovy na gymnáziu. Koupil pozemek a dal postavit dům. V té době za ním přijel i jeho mladší bratr Johann Heinrich, který byl malířem a také začal pracovat v akademii. (Биографии знаменитостей, 2022)

Během svého pobytu v Rusku měl Euler hodně aktivit, mezi které patřily konzultace pro stavitele lodí a střelce, projektování požárních čerpadel, nejrůznější expertízy, také se zabýval kartografií, sepisoval výcvikové příručky, přednášel pro veřejnost a též se podílel na realizaci různých technických zakázek.(Люди, 2009) Společné zájmy v teorii čísel ho stále spojovaly s Christianem Goldbachem, německo-ruským matematikem, ale také často diskutoval s G. W. Kraftem, německým matematikem a fyzikem, který působil také na petrohradské akademii. Nesmíme zapomenout ani na Josepha Nicolase Delisie, francouzského astronoma a kartografa, který také patřil mezi odborníky v oblasti matematických věd. Roku 1735 musela akademie vyřešit velmi složitou práci, a to vypočítat dráhu komety. Skupina akademiků, která měla tento problém vyřešit, požádala o dobu třech měsíců na tento výpočet. Euler se zavázal, že tuto práci udělá. Skutečně svůj slib splnil a problém vyřešil. Výpočet zvládl udělat za pouhé 3 dny, ale onemocněl nervovou horečkou se zánětem pravého oka. Roku 1738 Euler vážně onemocněl a oslepl na pravé oko. (Разместить статью, биографию и пр., 2014)

Je možné tvrdit, že už ve 30. letech 18. století se stal známým nejen v Rusku, ale také i v Evropě. Slávu ve světě mu přineslo dílo Mechanica, sive motus scientia analytice expozita neboli „Mechanika, čili věda o pohyb analyticky vyložená“, které vyšlo v roce 1736 ve dvou dílech. (Люди, 2009) Zahrnovalo především práce z oblasti matematické fyziky, ale také newtonovskou mechaniku a dynamiku hmotného bodu. (Králová, M., 2007) Koncem roku 1740 se moc v Rusku dostala do rukou regentky Anny Leopoldovny, za které petrohradská Akademie chátrá a pro mnohé vědce začala být situace nejistá. (Разместить статью, биографию и пр., 2014)

1. 5. Pobyt v Berlíně

Po 14 letech jeho plodné činnosti v Petrohradu odjíždí Euler do Berlína. Pruský král Fridrich II., mu nabídl velmi výhodné podmínky pro práci a místo ředitele matematické katedry, protože král chtěl přeměnit Společnost nauk na Berlínskou akademii věd a literatury. A tak dne 19. července 1741 odplul Euler z Petrohradu i se svou rodinou. V Berlíně tak začíná jeho takzvané berlínské období. Bydlel v Berlíně v ulici Berenstrasse, což bylo nedaleko dnešní budovy Komické opery. Je možné říct, že pozváním Eulera do Berlína, úloha krále Fridrich II. skončila, protože vědec nesplňoval jeho představy o matematikovi jako člověka salonního typu, připadal mu velmi nudný. Leonard Euler byl středního vzrůstu, zato však dobromyslný, přístupný názorům, pohotový, měl rád humor, ale zároveň byl vznětlivý. Zprvu byl zván i na dvorní plesy, ale postupně již nebyl v centru zájmu dvora. (Биографии знаменитостей, 2022)

V roce 1746 vyšly tři svazky Eulerových článků o balistice. (CITATY.SU, 2015) O tři roky později vydal dvousvazkové dílo o problematice navigace z pohledu matematiky. Je známo, že se zabýval matematickou analýzou, své myšlenky shrnul v knize Introductio in Analysin Infinitorum, neboli „Úvod do analýzy nekonečna.“

Nesmíme také zapomenout, že tento vědec také zkoumal otázku průchodu světla různými tělesy a s tím spojený efekt zvuku (Университетская библиотека, 2023).

Finančně se mu velmi dobře dařilo, proto si roku 1753 Euler zakoupil panství s velkou zahradou v Charlottenburgu, na předměstí Berlína. V Berlíně si dopisuje s Michailem Vasiljevičem Lomonosovem, ruským fyzikem a chemikem, a i když se nikdy nesetkali. Podle jejich dochovaných dopisů jde poznat, že názory těchto dvou velkých vědců se v mnoha věcech shodovaly. Zároveň udržoval také dobré vztahy s Pierrem Moreau de Maupertuisem, francouzským fyzikem, přírodovědcem a filosofem, prvním prezidentem německé Berlínské akademie věd a také prezidentem Akademie věd ve Francii, který formuloval princip nejmenší akce. Když Moreau de Maupertuis odjel do Francie, v době jeho nepřítomnosti vykonával funkci prezidenta právě Euler. I když už Euler nebyl v Petrohradu, udržoval stále s Petrohradskou akademií věd spojení. (Биографии знаменитостей, 2022) Byl dokonce jmenován čestným členem ruské akademie věd a byla mu určena vysoká roční penze a Euler také převzal závazky ohledně další spolupráce. Je zajímavé, že nakupoval knihy, fyzikální a astronomické přístroje, mohl vybírat zaměstnance v jiných zemích, působil jako rozhodčí ve vědeckých sporech mezi vědci z Petrohradu, vymýšlel a posílal témata pro vědecké soutěže a informoval o nových objevech v oblasti vědy. Pomáhal též studentům z Ruska, kteří u něho v domě v Berlíně bydleli. Mezi tyto studenty patřili například Michal Sofronov, Semjon Kirillovič Kotelnikov, S. Jakovlevič Rumovskij a všichni se stali postupem času významnými matematiky a jedni z prvních řádných členů Petrohradské akademie věd. Pod jeho vedením byl vydán 13. září 1745 první geografický atlas Ruska v 19 mapách, kde byly zpracovány průzkumy geodetů. Zároveň tento rok začaly vycházet paměti Královské akademie, kde lze nalézt Eulerovy memoáry (Разместить статью, биографию и пр., 2014)

Euler v Berlíně odvedl velký kus práce, měl na starost astronomickou observatoř, kontroloval finanční záležitosti, zařizoval publikování kalendářů a geografických map a dohlížel na práci čerpadel a pump hydraulického systému na zámku Sanssouci. Známe je také, že mu praktické úkoly zadával i sám král Fridrich. Jedním z úkolů, kterým byl pověřen, byl i projekt korekce výšky hladiny v kanále Finow, který spojoval řeky Odru a Havel. (Bureš, J., 2004)

Během sedmileté války (1756 – 1763) byl zničen Eulerův dům ruským dělostřelectvem, a je zajímavé, že když se to dozvěděl polní maršál Saltykov, okamžitě nahradil ztráty a také ruská carevna poslala další peníze. V roce 1755 byl dokonce zvolen zahraničním členem Královské švédské akademie věd a téhož roku byla vydána kniha Institutiones Calculi Differentialis, neboli „Instituce diferenciálního počtu“. Je to první učebnice diferenciálního počtu, kterou lze považovat za úplnou a ucelenou.

Na počátku 60. let 18. století dostává také nabídku učit některé vědní obory Kazimíru Anhaltsko-Desavskou, princeznu z Anhalt-Dessau, která byla neteří krále Fridricha II. Této ženě napsal více než 200 dopisů o přírodních vědách a filozofii a dokonce obsahovaly vysvětlení různých objektů ve fyzice a matematice. Tyto listy byly později vydány knižně a byly velmi populární, protože zde byly vědecké poznatky podány laické veřejnosti srozumitelně a kvalitně. (Люди, 2009)

V roce 1760 vydal dílo s názvem Studies on the curvature of Surfaces, neboli „Studie o zakřivení povrchu“, kde sestavil vzorec pro vztah mezi hlavním zakřivením a zakřivením povrchového řezu. (Биограф, 2023) Z tohoto období je jeho nejvýznamnější objev a to je vlnová rovnice. Nejdříve se jednalo jen o zajímavý podnět k zamyšlení. Námětem bylo kmitání houslové struny. Euler na základě bádání stanovil vlnovou rovnici, která vlastně popisuje změny tvaru struny v čase i v prostoru. (Králová, M., 2007) V roce 1759 zemřel jeho přítel Pierre Louis Moreau de Maupertuis, ředitel berlínské akademie a Euler, který přestože neměl oficiální titul presidenta akademie, převzal vedení berlínské akademie. (Koutný, F., 2010) Král Friedrich místo presidenta avšak nenabídl Eulerovi a to se ho velmi dotklo a urazilo. (Bureš, J., 2004) Stále častěji pociťoval nelibost krále a uvažoval, že se přestěhuje do Londýna, ale později také usiloval o navrácení do Ruska. (Биографии знаменитостей, 2022)

1. 6. Druhý pobyt v Rusku

Euler se vrátit do Petrohradu po pětadvaceti letech, která prožil v Berlíně. Tak Euler v červenci 1766 přijel zpátky do Petrohradu na pozvání samotné Kateřiny II., která byla v Rusku velkou patronkou věd. Carevna Kateřina II. mu nabídla vedení matematického oddělení, titul konferenčního tajemníka akademie a plat 1 800 rublů ročně. Král Fridrich ze začátku nechtěl vůbec řešit otázku, zda Eulera propustí ze svých služeb, ale pod náporem vytrvalých petic ruského zástupce Kateřiny II. nakonec císař dne 30. dubna 1766 dovolil Eulerovi opustit Prusko. (Люди, 2009) Euler byl přijímán Kateřinou II., ale to už je Euler v této době úplně slepý. Přesto je plné energie a síly a touží pracovat pro univerzitu. Ve svém věku ho však zasáhnou strašné rány osudu. V květnu roku 1771 došlo v Petrohradu k velkému požáru, při kterém mu vyhořel dům, ze kterého zachránil většinu svých rukopisů. (Bureš, J., 2004) Shořela pouze část rukopisu s názvem Nové teorie pohybu Měsíce, která byla docela rychle opětně napsána, protože Euler měl fascinující paměť. Euler byl zázračně zachráněn Petrem Grimmem, řemeslníkem z Basileje a dočasně se musel přestěhovat do jiného domu. Protože mu dům shořel, na příkaz carevny Kateřiny Veliké mu byl postaven dům nový, ale necítil se v něm moc dobře, protože byl slepý. Ještě v září roku 1771 podstoupil operaci šedého zákalu, která ale nedopadla dobře, protože Euler po operaci znova oslepl, neboť neuposlechl lékaře. Ten mu přikázal chránit si oko před světlem, nepsat a nečíst a postupně si zvykat na novou situaci. Ale Euler neuposlechl a to se mu nevyplatilo, znovu oslepl a tentokrát natrvalo. (Люди, 2009)

Psát mohl jen křídou na černou tabuli, a když přišli jeho asistenti, vysvětloval jim své myšlenky zaznamenané na tabuli a oni pak pečlivě danou látku zpracovali a nakonec mu práci předčítali. Po konečném schválení se mohly dát rukopisy k vytištění. A tak pomocí svých studentů a asistentů mohl pokračovat ve své práci ve stejném tempu jako do této doby. Díky své skvělé paměti diktoval stále nové a nové články, eseje a vědecké práce. (Разместить статью, биографию и пр., 2014)

Roku 1773 mu zemřela jeho manželka Kateřina Gsellová, s kterou žil skoro 40 let. O tři roky později se znovu oženil a to s Salome-Abigail Gsellovou, která byla nevlastní sestra jeho zesnulé manželky. Měl 13 dětí, z nichž se ale dospělosti dožilo jen 5 dětí, 3 synové a 2 dcery, ale dočkal se dokonce dvaceti šesti vnoučat. (Биограф, 2023) Je zajímavé, že své matematické geny předal i svým dětem, především synovi Johannu Eulerovi, který se stal matematikem. Druhý syn Karel vystudoval lékařství a třetí syn Christoph se dal na vojenskou dráhu. V roce 1775 byl jmenován devátým členem, neboli „přidruženým členem“ Pařížské akademie věd. (Интересные факты, 2023)

Roku 1783 se mu zdraví velice zhoršilo, již nevycházel z domu a téměř již neodpovídal na dopisy, které pro něj znamenaly velké úsilí a námahu. Přesto do poslední chvíle dokázal o všem zajímavě hovořit a diskutovat, ale především počítat, protože matematika byla jeho osudem a vášní. Leonard Euler po sobě zanechal 72 svazků a 800 vědeckých prací.(Сдам на 5, 2023) Zemřel 18. září (7. září) roku 1783 v Petrohradu na mozkovou mrtvici několik hodin po rodinné večeři. Byl pohřben na smolenském luteránském hřbitově v Petrohradě vedle své první manželky Kateřiny. Nápis na pomníku zněl: „Zde leží ostatky moudrého, spravedlivého, slavného Leonarda Eulera".

Roku 1956, kdy se slavilo 250. výročí narození slavného vědce Leonarda Eulera, byl pomník a ostatky přeneseny na hřbitov z 18. století u kláštera Alexandra Něvského. (Образовака твой помощник в учебе, 2023)

1. 7. Odkaz lidstvu

Jeho význam pro odborný svět je nesmazatelný. Jako první zavedl označení $f(x)$ - pro funkci „f", je autorem symbolu pro Ludolfovo číslo π, sumu, nekonečno, označení vrcholů, úhlů a stran v trojúhelníku, stanovil písmeno „e" pro základ přirozeného logaritmu, které je známé jako Eulerovo číslo, rozšířil matematickou aplikaci logaritmů, také zavedl matematický zápis pro goniometrické funkce a vymezil goniometrickou terminologii, jak ji známe v dnešní době. V geometrii například stanovil vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostěnu, tento vztah byl nazván Eulerovou větou. Vymyslel vzorec pro variační počet, který se nazývá Eulerova-Lagrangeova rovnice, která se hlavně používá ve fyzice a zároveň dokázal Malou Fermatovu větu, jejíž formulaci ještě více zobecnil. Našel způsob, jak počítat kvadratické rovnice a také řešil rovnice, které se využívají ve strojírenství a mechanice. Mezi jeho zájmy patřila též astronomie, kde za své úspěchy získal řadu ocenění od pařížské akademie. Vypočítal dráhy komet a dalších nebeských těles. (Образовака твой помощник в учебе, 2023)

1. 8. Vědecké diskuze

Během svého života zkoumal matematiku, letectví, lékařství, optiku, botaniku, stavitelství, fyziku, architekturu, dokonce hudební teorii a mnohé jazyky. (Интересные факты, 2023) Nejenže publikoval, ale také vedl vědecké diskuse, například vedl spor s Jeanem le Rondem d'Alembertem, francouzským encyklopedistou a matematikem a to o složitých logaritmech a dále vedl debatu s Johnem Dollondem, anglickým optikem, matematikem a fyzikem o možnosti vytvoření achromatické čočky. (Биограф, 2023)

Leonard Euler za svůj život vydal okolo 530 knih a článků, celkový počet jeho prací i s rukopisy z jeho pozůstalosti se zvýšil na 886.

1. 9. Zajímavé výroky o Eulerovi

Významný francouzský fyzik, astronom a matematik Pierre Laplace, prohlásil o Eulerovi jednu zajímavou větu: „Čtěte Eulera, je učitelem nás všech“ a tato pronesená věta platí do dnešních dnů. Dokonce Johann Carl Friedrich Gauss, slavný německý matematik a fyzik zabývající se geometrií a matematickou analýzou, Eulera obdivoval a prohlásil o jeho práci: „Studium Eulerova díla zůstane nejlepší školou pro nejrůznější oblasti matematiky a nemůže je nic nahradit“. (Králová, M., 2007)

1. 10. Zajímavosti

K uctění památky Leonarda Eulera bylo pojmenováno mnoho míst, cen, ale i nadací. Po něm je například nazván kráter na Měsíci, jeden vrcholu v pohoří Pamír, náměstí v Petrohradě, ulice v Almatě, v největším městě v Kazachstánu, ale též malý asteroid 2002. Také je udělována zlatá medaile Leonarda Eulera za vynikající výsledky v oblasti matematiky a fyziky. Prvně byla udělena roku 1957 dvěma vědcům a od roku 1991 se uděluje každých pět let. Slavné jméno Leonarda Eulera nese též Mezinárodní matematický institut v Petrohradě. Roku 2007 byla založena Mezinárodní charitativní nadace Leonarda Eulera na podporu matematiky v Rusku. Na počest velkého matematika a jeho přínosu pro vědu se jeho portrét objevil na 10 frankových švýcarských bankovkách a také na řadě ruských, švýcarských a německých poštovních známkách. Roku 2007 byla v Rusku vydána pamětní stříbrná mince k 300. výročí narození Leonarda Eulera. Také je podle Eulerovi pojmenován neziskový internetový projekt, který sdružuje nadšence matematiky, ale také i programování a vznikl roku 2001. Jako další zajímavost můžeme považovat to, že se od roku 2008 koná matematická olympiáda Leonarda Eulera pro žáky osmých tříd, která nahradila závěrečná kola celoruské ruské matematické olympiády. (gigatos, 2022)

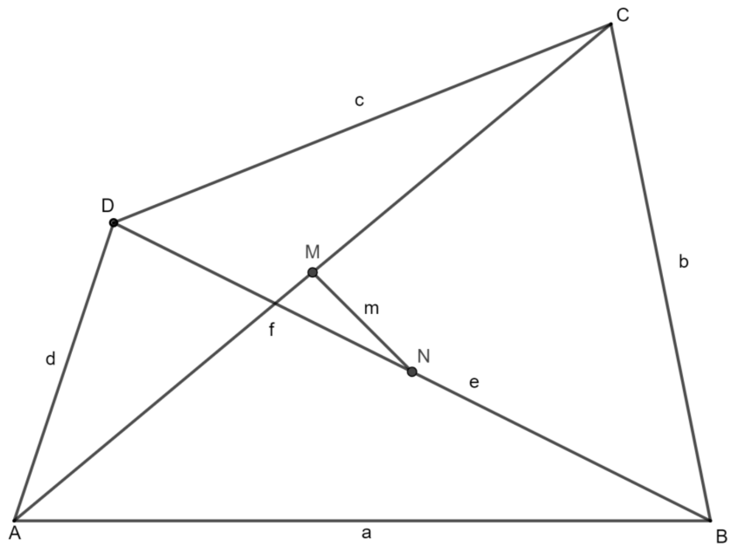
2. EULEROVA VĚTA O ČTYŘÚHELNÍCÍCH

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, kde bod M_1 je středem úhlopříčky AC a bod M_2 je středem úhlopříčky BD, Eulerova věta o čtyřúhelnících zní

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|M_1M_2|^2.$$ (Kandall, 2002)

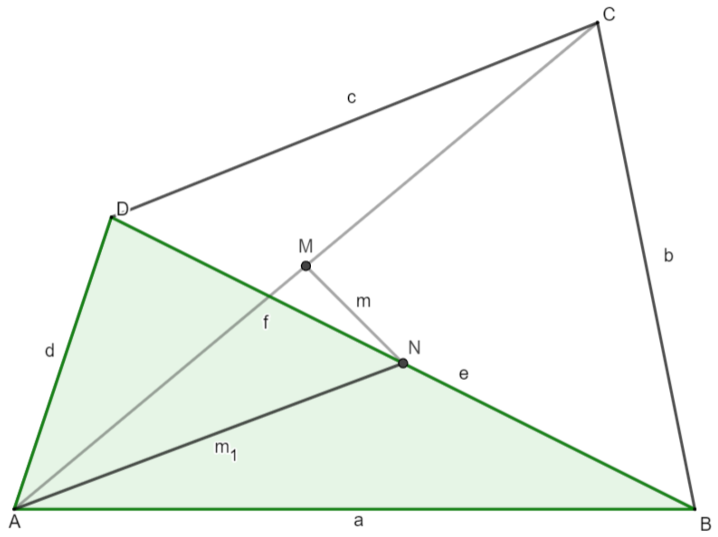
2. 1. Ověření platnosti vztahu

Nyní si ověříme Eulerův vztah, abychom se ujistili, zda znění Eulerovy věty o čtyřúhelnících skutečně platí. Toto objasnění je děláno volně podle Тинякова, který ho publikoval v roce 2020. Nejdříve si narýsujeme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a jeho úhlopříčky. Na obou úhlopříčkách si vyznačíme jejich střed. Střed úhlopříčky AC, která se bude jmenovat úsečka f, nazveme bodem M a střed úhlopříčky BD, kterou si označíme e, pojmenujeme jako bod N. Body M a N spojíme v úsečku, kterou nazveme m. (obr. 2. 1. 1)



obr. 2. 1. 1 (Zdroj: autorka práce)

Spojíme bod A s bodem N a nazveme ji úsečkou m_1. Tuto úsečku lze také nazvat těžnicí trojúhelníka ABD, protože bod N dělí úsečku BD na dvě stejné poloviny. Chceme vypočítat délku těžnice trojúhelníka ABD. (obr. 2. 1. 2)



obr. 2. 1. 2 (Zdroj: autorka práce)

Je známo, že těžnice na stranu c v trojúhelníku ABC, kdy ostatní strany trojúhelníka nazveme a, b, se vypočte podle tohoto vzorečku: (MicroExcel, 2022)

$$m_c^2 = \frac{2b^2+2a^2-c^2}{4}.$$

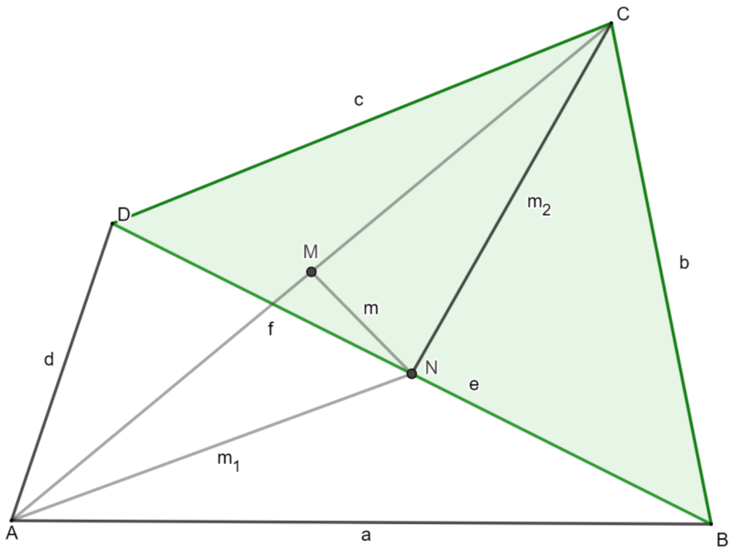
Tento výraz můžeme upravit takto:

$$m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Pomocí tohoto vzorečku vypočteme těžnici m_1^2. Výraz bude vypadat takto:

$$m_1^2 = \frac{d^2+a^2}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Spojíme body N a C v úsečku, kterou nazveme úsečkou m_2 a také můžeme říci, že tato úsečka je těžnicí trojúhelníka BCD, protože jak již víme, bod N rozděluje úsečku BD na dvě stejné části. (obr. 2. 1. 3)

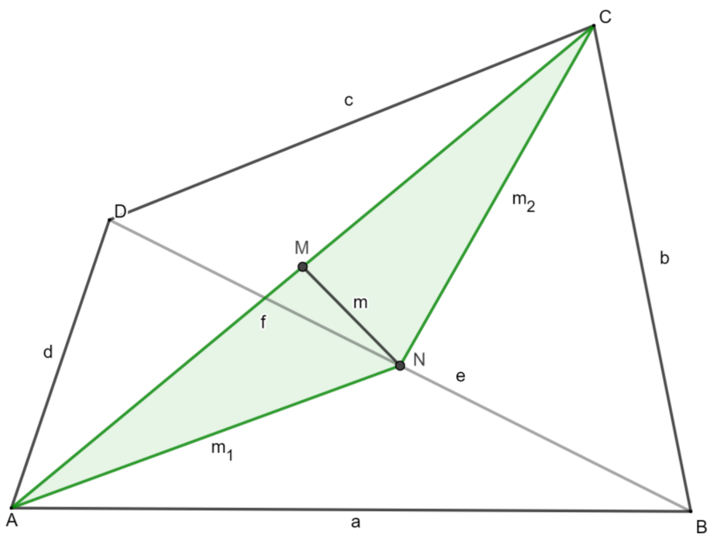


obr. 2. 1. 2 (Zdroj: autorka textu)

Vypočteme délku těžnice m_2, pomocí vzorečku $m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$, který platí v trojúhelníku ABC. Vzoreček na výpočet délky těžnice m_2 bude vypadat takto:

$$m_2^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Teď budeme zkoumat trojúhelník ANC. Víme, že úsečka m v trojúhelníku ANC bude jeho těžnicí, protože bod M rozděluje úsečku AC na polovinu. (obr. 2. 1. 4)



obr. 2. 1. 3 (Zdroj: autorka práce)

Spočítáme délku těžnice m zase podle vzorečku $m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. Délka těžnice m bude vypadat takto:

$$m^2 = \frac{m_1^2+m_2^2}{2} - \frac{f^2}{4}.$$

Chceme získat výraz $m_1^2 + m_2^2$. Víme, že m_1^2 se vypočte $m_1^2 = \frac{d^2+a^2}{2} - \frac{e^2}{4}$ a m_2^2 se vypočte $m_2^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{e^2}{4}$.

Dostaneme

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} - \frac{2e^2}{4}.$$

Po upravení dostaneme rovnici, která bude vypadat takto:

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} - \frac{e^2}{2}.$$

Protože vidíme, že ve výrazu, kde počítáme m^2, je člen $\frac{m_1^2+m_2^2}{2}$, vydělíme rovnici $m_1^2 + m_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} - \frac{e^2}{2}$ dvěma, abychom tam také získali výraz $\frac{m_1^2+m_2^2}{2}$. Získáme toto:

$$\frac{m_1^2+m_2^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{e^2}{4}.$$

Výraz $\frac{m_1^2+m_2^2}{2}$, který se rovná $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{e^2}{4}$ z rovnice $\frac{m_1^2+m_2^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{e^2}{4}$ dosadíme do rovnice $m^2 = \frac{m_1^2+m_2^2}{2} - \frac{f^2}{4}$ a získáme

$$m^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{f^2}{4}.$$

Po upravení rovnice dostáváme rovnici

$$4 \cdot m^2 + f^2 + e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Tato rovnice se shoduje s Eulerovou větou o čtyřúhelnících, a tímto je věta objasněná, protože jsme v ověření bod M_1 nazvali bodem M a bod M_2 bodem N.

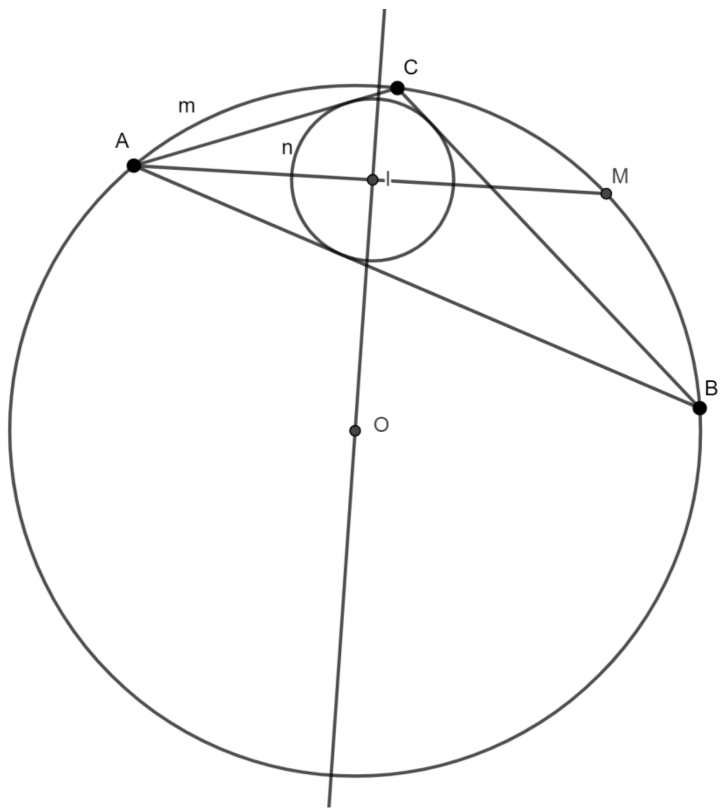
3. EULEROVA VĚTA O TROJÚHELNÍKU

V trojúhelníku ABC, kde I je průsečík os úhlů neboli střed kružnice vepsané, střed kružnice opsané je označen písmenem O, R je poloměr kružnice opsané a r udává poloměr kružnice vepsané, platí vztah $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$. (ЦАРСТВО МАТЕМАТИКИ, 2023b)

3. 1. Ověření platnosti vztahu

Nyní si objasníme vztah, který se týká Eulerovy věty o trojúhelníku, abychom se ujistili, zda tento vztah opravdu platí pro libovolný trojúhelník. Toto vysvětlení je inspirováno internetovou stránkou (ЦАРСТВО МАТЕМАТИКИ, 2023b).

Je dán trojúhelník ABC a narýsovaná kružnice m opsaná trojúhelníku ABC a kružnice n, která je vepsána trojúhelníku ABC. Narýsujeme tětivu kružnice opsané, která bude procházet bodem I, bodem středu kružnice opsané, a vrcholem A trojúhelníku. Tětivu nazveme úsečkou AM. Narýsujeme přímku OI, kde O je střed kružnice opsané a I je střed kružnice vepsané, která je také jinak řečeno průměrem kružnice opsané, takže i nejdelší tětivou kružnice opsané. (obr. 3. 1. 1)



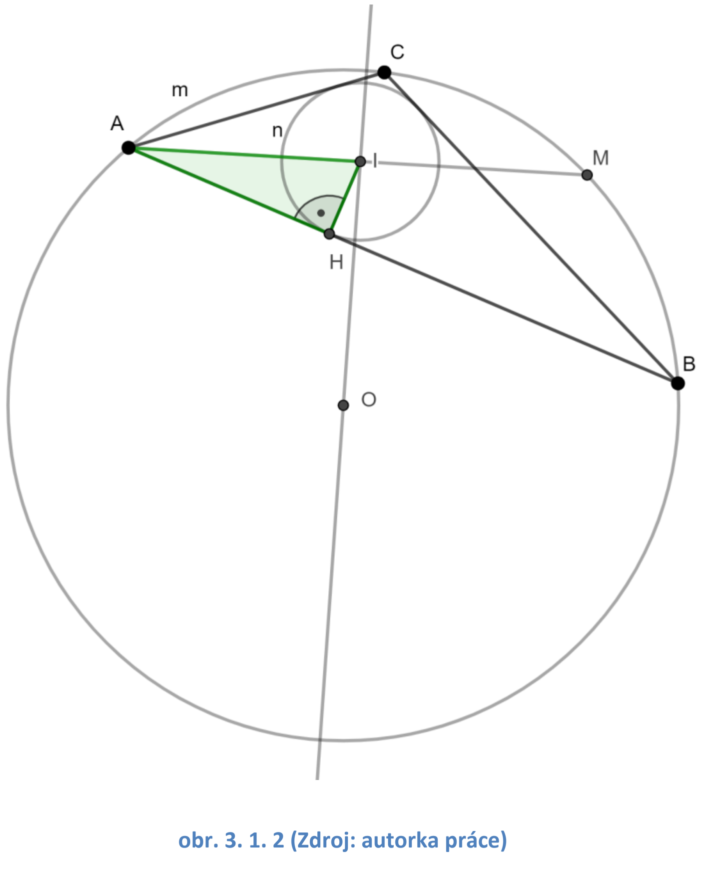
obr. 3. 1. 1 (Zdroj: autorka práce)

Existuje věta o protínajících se tětivách, která říká, pokud se dvě tětivy kružnice AB a CD protínají v bodě E, potom platí $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$. Tuto větu lze napsat i jako $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|DE|}{|BE|}$. Jinými slovy jde říci, že součin délek úseků protínajících se tětiv, na které jsou tětivy rozděleny průsečíkem, který je označen písmenem E, je konstantní číslo. (MATHVOX, 2022f)

Když použijeme větu o tětivách, dostaneme

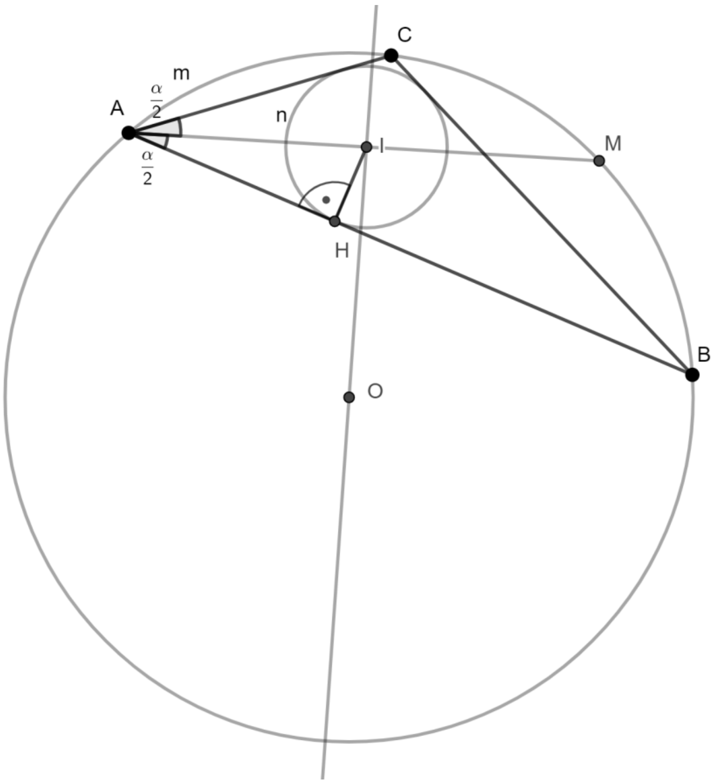
$$|AI| \cdot |IM| = (R + |OI|) \cdot (R - |OI|).$$

Bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC s úsečkou AB, nazveme bodem H. Tím pádem víme, že u bodu H bude vždy pravý úhel. Trojúhelník AHI je pravoúhlý, s pravým úhlem u vrcholu H. (obr. 3. 1. 2)



obr. 3. 1. 2 (Zdroj: autorka práce)

U vrcholu A trojúhelníka ABC leží úhel α. Úsečka AI je osa úhlu, a proto v trojúhelníku AHI, bude u vrcholu A poloviční úhel α neboli úhel $\frac{\alpha}{2}$. A také víme, že úsečka HI bude rovna poloměru r kružnice vepsané trojúhelníku ABC. (obr. 3. 1. 3)



obr. 3. 1. 3 (Zdroj: autorka práce)

Podle definice sinu můžeme napsat

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{|AI|}.$$

Po vyjádření délky úsečky dostáváme výraz

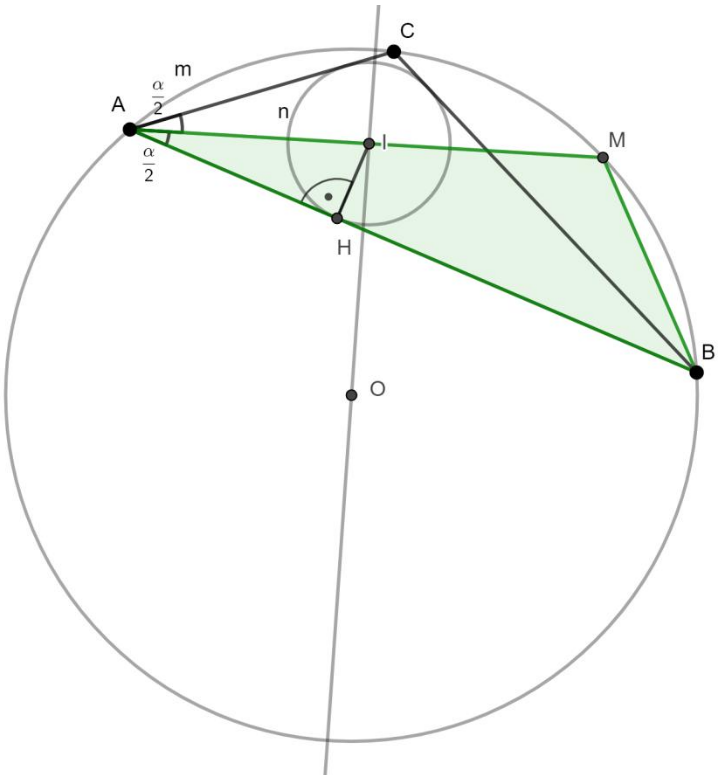
$$|AI| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Nyní uvažujeme trojúhelník ABM, ve kterém využijeme sinovou větu. Sinová věta platí v každém obecném trojúhelníku. Když bude dán trojúhelník ABC se stranami

a, b, c a úhel α u vrcholu A, úhel β u vrcholu B a úhel γ u vrcholu C a poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC nazveme R, pak bude platit sinová věta ve tvaru

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \text{ (Havrlant, 2022)}$$

Nyní aplikujeme sinovou větu na trojúhelník ABM. (obr. 3. 1. 4)



obr. 3. 1. 4 (Zdroj: autorka práce)

Nám ale stačí použít jen výraz se stranou a a úhel α. Po upravení dostaneme

$$\frac{|MB|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R,$$

kdy $2R$ je průměr kružnice opsané.

Po vyjádření délky úsečky MB dostaneme

$$|MB| = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Existuje věta o trojzubci, kdy je dán trojúhelník ABC, kde P je střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC, sestrojená osa úhlu vrcholem A, která prochází i středem P, protíná kružnici opsanou trojúhelníka ABC v bodě, který nazveme M. Poté sestrojíme kružnici opsanou k úsečce BC se středem v bodě M, která protíná polopřímku AM v bodě Q. Pak úsečky MB, MC, MP a MQ jsou stejně dlouhé. (Малкова, 2023)

Když použijeme větu o trojzubci na trojúhelník ABM, budeme vědět, že úsečka MB a MI budou stejně dlouhé. Proto výraz můžeme upravit takto:

$$|MB| = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = |MI|.$$

Nyní upravíme rovnost $|AI| \cdot |IM| = (R + |OI|) \cdot (R - |OI|)$, za $|AI|$ dosadíme $\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ a za $|IM|$ dosadíme $2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Rovnice bude vypadat takto:

$$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = (R + |OI|) \cdot (R - |OI|).$$

V rovnici na levé straně vykrátíme $\sin\frac{\alpha}{2}$ a na pravé straně použijeme vzoreček $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$. Dostaneme rovnici

$$2Rr = R^2 - |OI|^2.$$

Převedením výrazu $|OI|^2$ na levou stranu rovnice a výraz $2Rr$ převedeme na pravou stranu rovnice. Po tomto upravení dostaneme rovnici

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr,$$

která se rovná Eulerově větě o trojúhelníku, tímto je věta ověřená.

4. EULEROVA VĚTA O PEDÁLNÍM TROJÚHELNÍKU

Pedální trojúhelník je trojúhelník, ve kterém je zvolen bod P. Z tohoto bodu narýsujeme kolmice ke všem třem stranám trojúhelníka. Tam kde se kolmice na strany protnou se stranami, vzniknou body X, Y a Z. Poté trojúhelník XYZ bude trojúhelník pedální. (Vaváčková, 2015)

Je dán trojúhelník ABC a poloměr R kružnice opsané trojúhelníku ABC. V trojúhelníku ABC je libovolně zvolen bod P a vzdálenost bodu P od středu O kružnice opsané je označeno písmenem d. Poté obsah pedálního trojúhelníku je roven

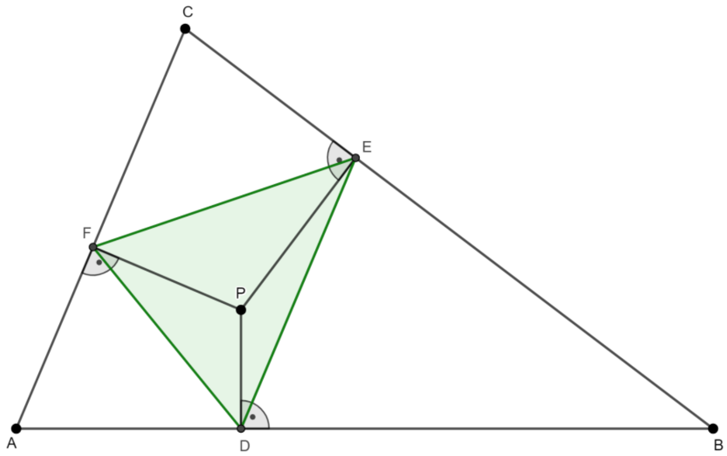
$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{d^2}{R^2}) \cdot S,$$

kdy S_1 je obsah pedálního trojúhelníku a S je obsah trojúhelníku ABC. (Яковлев, 2023)

4. 1. Ověření platnosti vztahu

Nyní si ukážeme vysvětlení, že skutečně obsah pedálního trojúhelníku, se rovná vztahu, který Euler vymyslel. Toto objasnění se opírá o literaturu, kterou napsal Shirali v roce 2018.

Nejdříve si narýsujeme trojúhelník ABC a do tohoto trojúhelníka narýsujeme pedální trojúhelník DEF, tak že si zvolíme libovolný bod P a narýsujeme postupně kolmice na všechny strany trojúhelníka ABC, které ale procházejí bodem P. Paty kolmic na strany trojúhelníka ABC nazveme body D, E a F. Po spojení těchto bodů vznikne trojúhelník, který budeme nazývat pedální trojúhelník. (obr. 4. 1. 1)

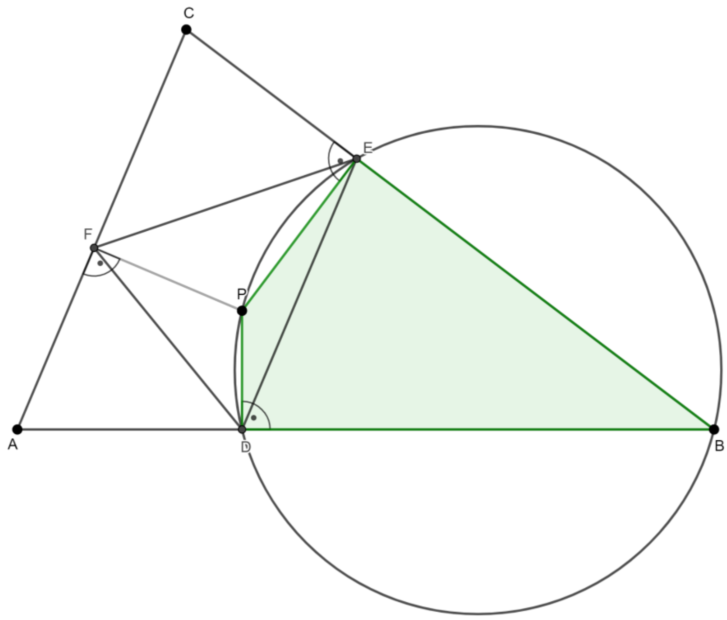


obr. 4. 1. 1 (Zdroj: autorka práce)

Je dán vzoreček pro obsah trojúhelníka, když známe dvě strany trojúhelníka a úhel, který je sevřený těmito dvěma stranami. Když budeme znát strany a a b a úhel γ, pak použijeme vzoreček $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$. (Vošický, 2007) Po aplikování tohoto vzorečku na trojúhelník DEF dostaneme

$$S = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin(\sphericalangle FDE).$$

Budeme uvažovat čtyřúhelník $DBEP$. Úhly PDB a BEP jsou pravé, protože úsečky PD a PE jsou na strany trojúhelníka kolmé. Proto můžeme říct, že tento čtyřúhelník je tětivový čtyřúhelník a úsečka PB bude označovat průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $DBEP$. (obr. 4. 1. 2)



obr. 4. 1. 2 (Zdroj: autorka práce)

Známe sinovou větu, která jde zapsat takto:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníka ABC, α je úhel u vrcholu A, β je úhel u vrcholu B a γ je úhel u vrcholu C a R je poloměr kružnice opsané trojúhelníka ABC. (Havrlant, 2022)

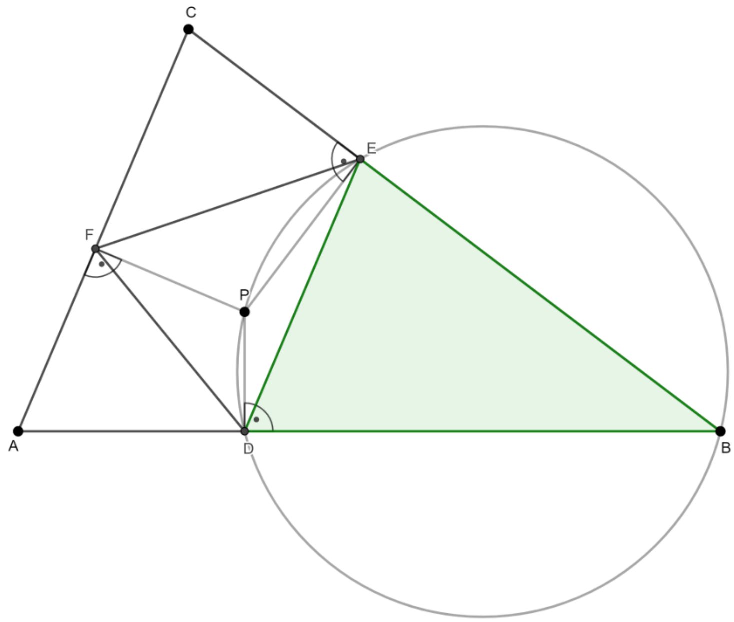
Po aplikaci sinové věty na trojúhelník DBE dostaneme rovnici

$$\frac{|DE|}{\sin(\sphericalangle DBE)} = |BP|,$$

protože víme, že úsečka BP je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $DBEP$, ale je také průměr kružnice opsané trojúhelníku DBE, a proto v rovnici jako průměr napsaná úsečka BP. (obr. 4. 1. 3)

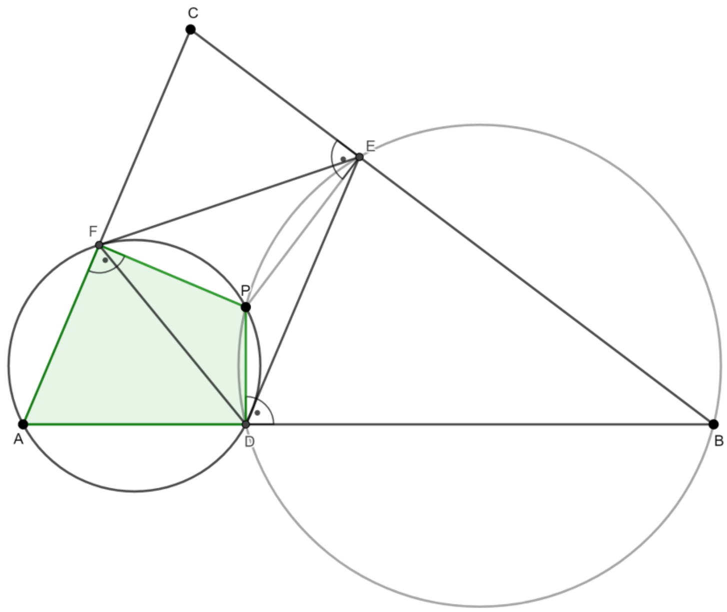
Po vyjádření délky úsečky DE získáme

$$|DE| = |BP| \cdot \sin(\sphericalangle DBE).$$



obr. 4. 1. 3 (Zdroj: autorka práce)

Uvažujme čtyřúhelník $ADPF$. Tento čtyřúhelník bude také tětivovým čtyřúhelníkem, neboť u bodu D je pravý úhel a také pravý úhel je u bodu F. Proto čtyřúhelníku $ADPF$ můžeme opsat kružnici s průměrem o velikosti úsečky AP. (obr. 4. 1. 4)



obr. 4. 1. 4 (Zdroj: autorka práce)

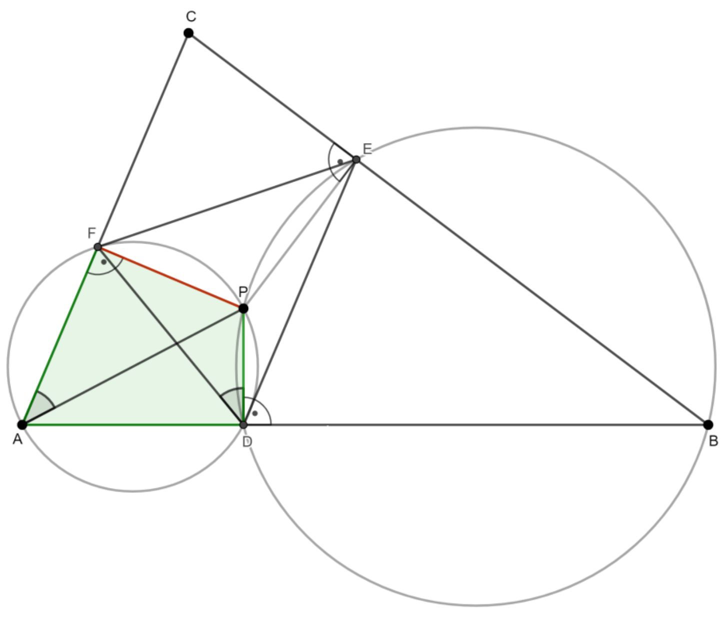
Úsečka AP je také i průměrem kružnice opsané trojúhelníku ADF. Po využití sinové věty na trojúhelník ADF dostaneme rovnici

$$\frac{|DF|}{\sin(\sphericalangle FAD)} = |AP|.$$

Po vyjádření délky úsečky DF bude vztah vypadat takto:

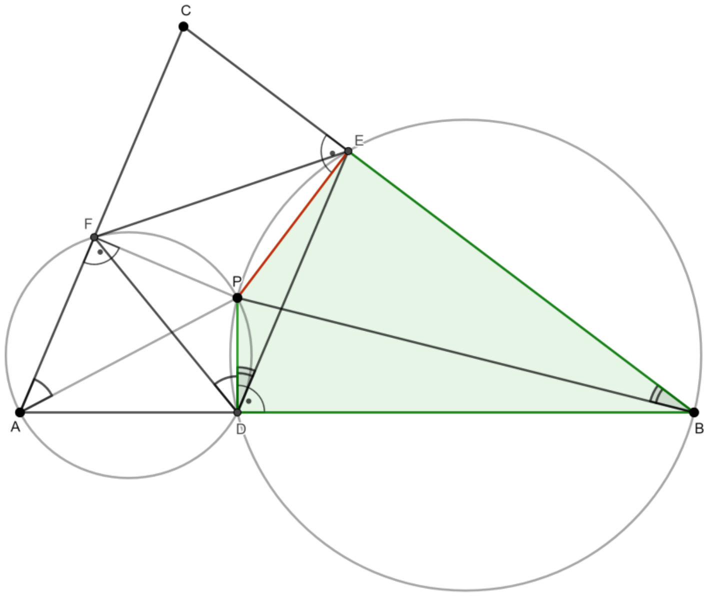
$$|DF| = |AP| \cdot \sin(\sphericalangle FAD).$$

Nyní budeme uvažovat čtyřúhelník $ADPF$. Víme, že tento čtyřúhelník je tětivový čtyřúhelník, a proto mu můžeme opsat kružnici opsanou. Úsečka FP je tětiva kružnice opsané čtyřúhelníku $ADPF$. Je známo, že všechny obvodové úhly příslušné k téže tětivě kružnice jsou shodné. Úhly FAP a FDP budou shodné, protože jsou obvodovými úhly příslušné k tětivě FP kružnice opsané čtyřúhelníku $ADPF$. (obr. 4. 1. 5)



obr. 4. 1. 5 (Zdroj: autorka práce)

Stejná věta platí i pro tětivový čtyřúhelník $DBEP$, kterému také můžeme opsat kružnici opsanou. Úhly PDE a PBE budou mít také stejnou velikost, protože jsou obvodovými úhly, které přísluší tětivě PE, kružnice opsané čtyřúhelníku $DBEP$. (obr. 4. 1. 6)



obr. 4. 1. 6 (Zdroj: autorka práce)

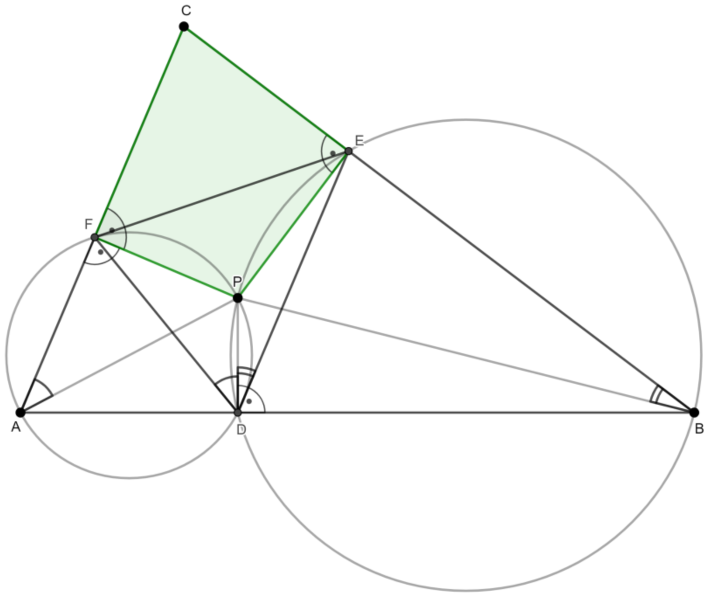
Nyní budeme uvažovat čtyřúhelník $FPEC$. Víme, že součet úhlů v čtyřúhelníku je $360°$ a že tento čtyřúhelník má u dvou vrcholů dva pravé úhly, a to u vrcholu F a E. (obr. 4. 1. 7)

Velikost úhlu FPE se vypočte

$$|\sphericalangle FPE| = 360° - 90° - 90° - |\sphericalangle FCE|.$$

Po upravení dostaneme

$$|\sphericalangle FPE| = 180° - |\sphericalangle FCE|.$$



obr. 4. 1. 7 (Zdroj: autorka práce)

Velikost úhlu APB vypočteme, když odečteme od $360°$ všechny úhly u vrcholu P, kromě úhlu, který chceme spočítat, protože víme, že kolem libovolného bodu je $360°$. (Bogomolny, 2018)

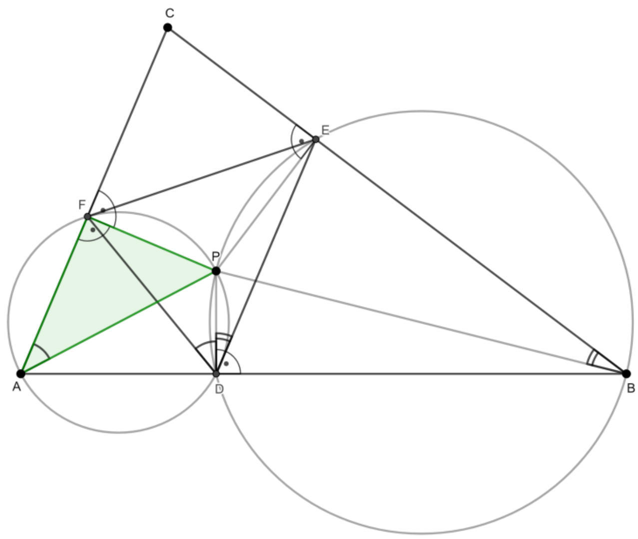
Zapíšeme to do rovnice

$$|\sphericalangle APB| = 360° - |\sphericalangle APF| - |\sphericalangle FPE| - |\sphericalangle EPB|.$$

Když za $|\sphericalangle FPE|$ dosadíme $180° - |\sphericalangle FCE|$, dostaneme

$$|\sphericalangle APB| = 360° - |\sphericalangle APF| - (180° - |\sphericalangle FCE|) - |\sphericalangle EPB|.$$

Nyní budeme uvažovat pravoúhlý trojúhelník APF. (obr. 4. 1. 8)



obr. 4. 1. 8 (Zdroj: autorka práce)

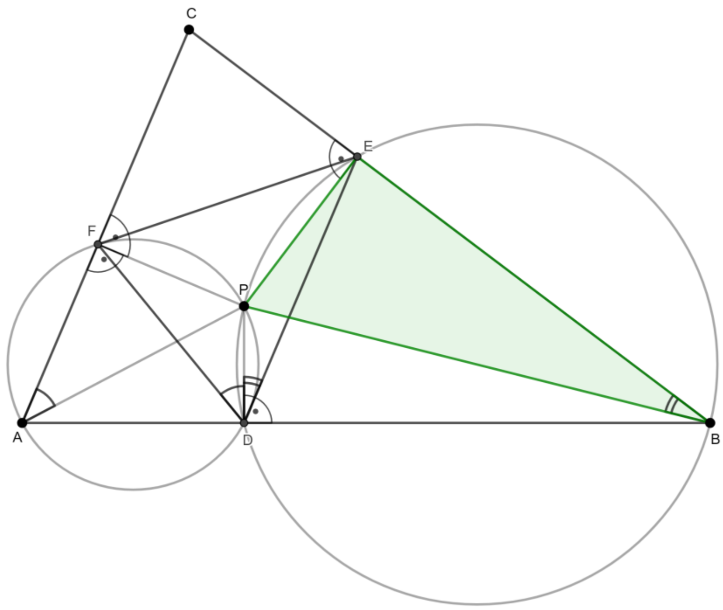
Víme, že součet úhlu v trojúhelníku je vždy $180°$, a proto když chceme vypočítat velikost úhlu APF, spočteme ho takto

$$|\sphericalangle APF| = 180° - 90° - |\sphericalangle FAP|.$$

To jde upravit

$$|\sphericalangle APF| = 90° - |\sphericalangle FAP|.$$

Vezmeme v úvahu ještě trojúhelník PBE. (obr. 4. 1. 9)



obr. 4. 1. 9 (Zdroj: autorka práce)

Tento trojúhelník je také pravoúhlý, a proto bude velikost úhlu EPB rovna

$$|\sphericalangle EPB| = 180° - 90° - |\sphericalangle PBE|$$

neboli

$$|\sphericalangle EPB| = 90° - |\sphericalangle PBE|.$$

Po dosazení do rovnice

$|\sphericalangle APB| = 360° - |\sphericalangle APF| - (180° - |\sphericalangle FCE|) - |\sphericalangle EPB|$ za úhly APF a EPB dostaneme

$$|\sphericalangle APB| = 360° - (90° - |\sphericalangle FAP|) - (180° - |\sphericalangle FCE|) - (90° - |\sphericalangle PBE|).$$

Po odstranění závorek dostáváme

$$|\sphericalangle APB| = 360° - 90° + |\sphericalangle FAP| - 180° + |\sphericalangle FCE| - 90° + |\sphericalangle PBE|.$$

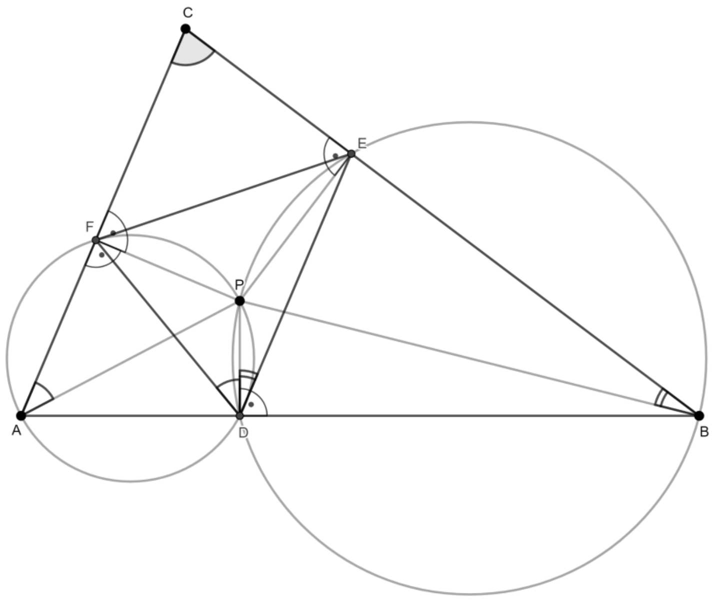
Po odečtení bude rovnice vypadat takto

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle FAP| + |\sphericalangle FCE| + |\sphericalangle PBE|.$$

Protože již víme, že úhly FAP a FDP mají stejnou velikost, můžeme místo úhlu FAP dosadit úhel FDP. Také jsou stejné úhly PBE a PDE, a proto místo úhlu PBE můžeme napsat úhel PDE. Dostaneme toto

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle FDP| + |\sphericalangle FCE| + |\sphericalangle PDE|.$$

Ale také ještě víme, že platí $|\sphericalangle FDP| + |\sphericalangle PDE| = |\sphericalangle FDE|$ a úhel FCE je shodný s úhlem ACB, protože úhel FCE je součástí úhlu ACB. (obr. 4. 1. 10)



obr. 4. 1. 10 (Zdroj: autorka práce)

Po těchto úpravách dostaneme rovnici

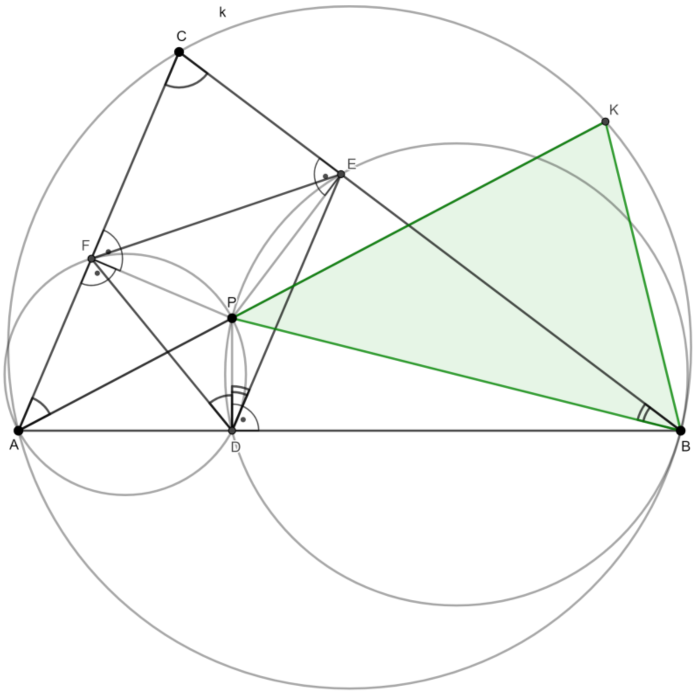
$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle FDE| + |\sphericalangle ACB|.$$

Prodloužíme si úsečku AP. Tato úsečka se protne s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC v bodě, který nazveme bodem K. Existuje tvrzení, které říká, že když je dán libovolný trojúhelník, ve kterém je jedna ze stran trojúhelníka prodloužena, pak výsledný vnější úhel se rovná součtu velikostí dvou protilehlých vnitřních úhlů v trojúhelníku. (Polák, 1972)

Budeme uvažovat trojúhelník PBK. Víme, že spojnice bodu A a bodu K je úsečka, proto vnější úhel budeme označovat APB.Tento úhel je roven velikosti úhlů

PBK a PKB. Protože AK je úsečka, bude úhel PKB stejně velký jako úhel AKB. (obr. 4. 1. 11) Můžeme to zapsat takto

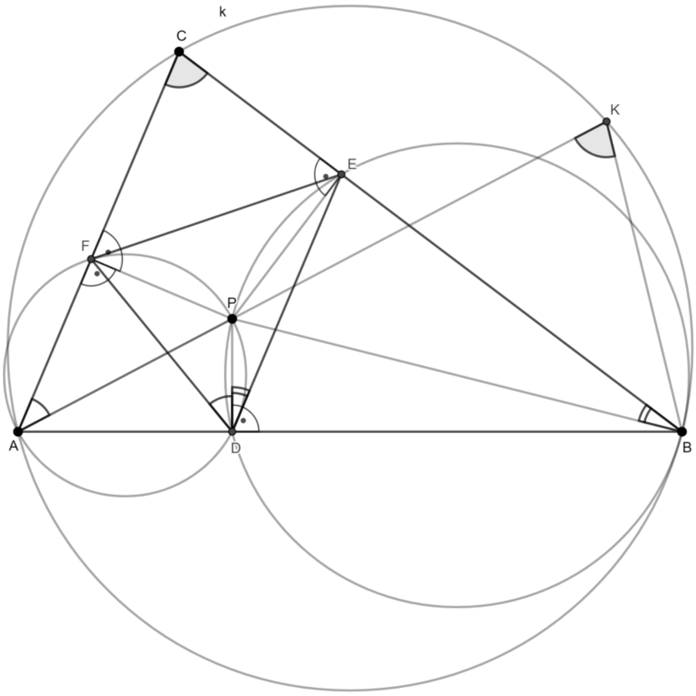
$$|\sphericalangle PBK| + |\sphericalangle AKB| = |\sphericalangle APB|.$$



obr. 4. 1. 11 (Zdroj: autorka práce)

Budou ale stejné i úhly AKB a ACB, protože jsou obvodovými úhly kružnice opsané trojúhelníku ABC. (obr. 4. 1. 12) Rovnici můžeme přepsat takto

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle PBK| + |\sphericalangle ACB|.$$



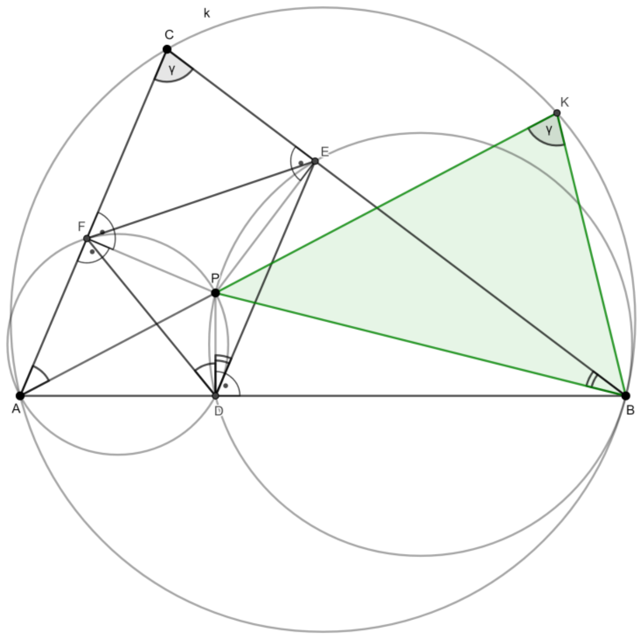
obr. 4. 1. 12 (Zdroj: autorka práce)

Nyní máme dvě rovnice, kde jsme vyjádřili velikost úhlu APB a to rovnici

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle FDE| + |\sphericalangle ACB| \text{ a } |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle PBK| + |\sphericalangle ACB|.$$

Z těchto dvou rovnic můžeme vyčíst, že úhly FDE a PBK mají stejnou velikost, a proto se musí rovnat $\sin(\sphericalangle FDE)$ a $\sin(\sphericalangle PBK)$.

Nyní použijeme sinovou větu, která říká, že v libovolném trojúhelníku ABC platí $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Tuto větu aplikujeme na trojúhelník PBK. V tomto trojúhelníku víme, že úhel PKB je stejně velký jako úhel ACB, tento úhel nazveme úhlem γ. (obr. 4. 1. 13)



obr. 4. 1. 13 (Zdroj: autorka práce)

Dostaneme rovnici

$$\frac{|PK|}{\sin(\sphericalangle PBK)} = \frac{|BP|}{\sin(\sphericalangle PKB)} = \frac{|BP|}{\sin\gamma}.$$

Z rovnosti $\frac{|PK|}{\sin(\sphericalangle PBK)} = \frac{|BP|}{\sin\gamma}$ vyjádříme $\sin(\sphericalangle PBK)$ a dostaneme

$$\sin(\sphericalangle PBK) = \frac{|PK|\cdot\sin\gamma}{|BP|}.$$

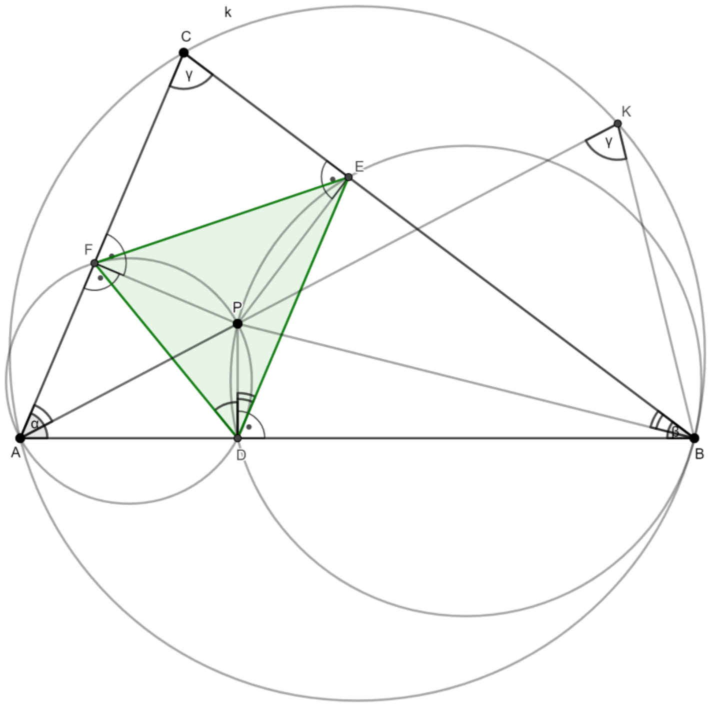
A protože víme, že se rovná $\sin(\sphericalangle FDE)$ a $\sin(\sphericalangle PBK)$ můžeme rovnici přepsat takto

$$\sin(\sphericalangle PBK) = \frac{|PK|\cdot\sin\gamma}{|BP|} = \sin(\sphericalangle FDE).$$

Je známo, že obsah obecného trojúhelníka jde spočítat i přes dvě strany a jeden úhel. Platí, že obsah trojúhelníka se spočítá jako součin jedné poloviny, jednoho úhlu v trojúhelníku a stran, které jsou sevřené mezi daným úhlem. Budeme uvažovat trojúhelník DEF, kde obsah můžeme spočítat takto

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2}\cdot|FD|\cdot|DE|\cdot\sin(\sphericalangle FDE).$$

Už jsme si dokázali, že $\sin(\sphericalangle FDE) = \frac{|PK| \cdot \sin \gamma}{|BP|}$, $|DE| = |BP| \cdot \sin(\sphericalangle DBE)$ a $|DF| = |AP| \cdot \sin(\sphericalangle FAD)$. Úhel FAD nazveme úhlem α a úhel DBE úhlem β. (obr. 4. 1. 14)



obr. 4. 1. 14 (Zdroj: autorka práce)

Po dosazení do rovnice na výpočet obsahu trojúhelníka dostaneme

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot \sin \alpha \cdot |BP| \cdot \sin \beta \cdot \frac{|PK| \cdot \sin \gamma}{|BP|}.$$

Po zkrácení úsečky BP dostaneme

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PK| \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Nyní spočítáme obsah trojúhelníka ABC pomocí vzorečku na obsah trojúhelníku $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$. Použijeme sinovou větu $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, kde R značí poloměr kružnice opsané. Ze sinové věty vyjádříme stranu b. Vezmeme v úvahu část $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ a po vyjádření strany b dostaneme výraz $b = 2R \cdot \sin \beta$. Také ze sinové věty vyjádříme stranu c. Budeme uvažovat část $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, ze které po vyjádření strany c dostaneme $c = 2R \cdot \sin\gamma$. Dosadíme do vzorečku na výpočet obsahu trojúhelníka ABC. Dostaneme rovnici

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin\beta \cdot 2R \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha.$$

Po malé úpravě dostaneme vztah

$$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha,$$

ze kterého vyjádříme výraz $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Vztah bude vypadat takto

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \frac{S_{\Delta ABC}}{2R^2}.$$

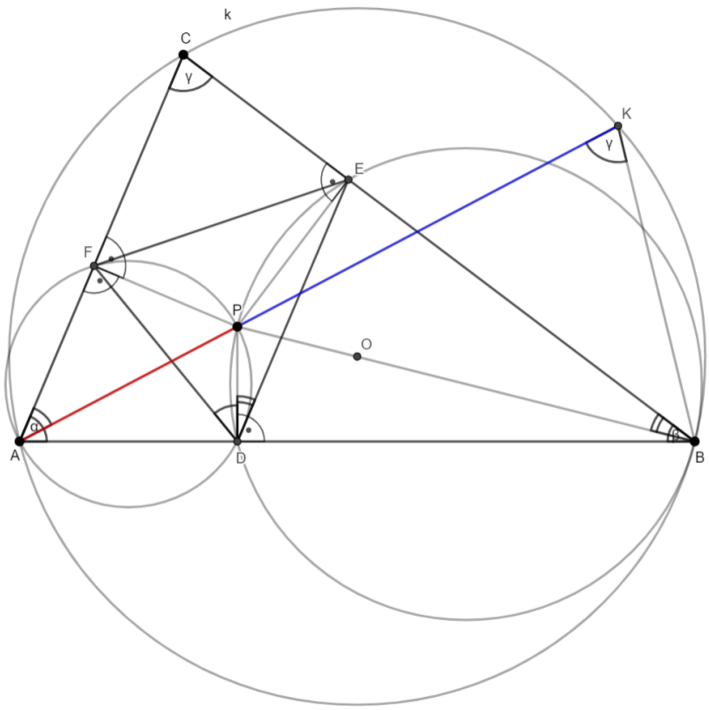
Výraz $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ dosadíme do rovnice na výpočet obsahu trojúhelníku DEF $S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PK| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Po dosazení bude vypadat takto

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PK| \cdot \frac{S_{\Delta ABC}}{2R^2}.$$

Platí věta, která říká, že když máme danou kružnici k se středem S a poloměrem r a bod M, pak pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí $m = d^2 - r^2$, kde vzdálenost úsečky MS je rovna d, což je vzdálenost bodu M od středu kružnice k. (Hašek, 2018)

Po použití věty na kružnici k se středem O a poloměrem R a bodem P, dostaneme mocnost $m = |PO|^2 - R^2$. Úsečka PO je rovna d a tím pádem můžeme mocnost spočítat $m = d^2 - R^2$.

Máme kružnici k a uvnitř kružnice bod P. Narýsujeme sečnu, která bude procházet bodem P, která protíná kružnici k ve dvou bodech A a K. (obr. 4. 1. 15)



obr. 4. 1. 15 (Zdroj: autorka práce)

Platí tvrzení, pro libovolný bod M, který leží uvnitř kružnice k, je mocnost bodu vždy záporné číslo. Poté libovolná sečna kružnice k, která je vedená bodem M, protíná kružnici k ve dvou různých bodech A a B, pro které platí $-(|MA| \cdot |MB|) = m$. (Pirklová, 2013)

Po aplikaci tohoto tvrzení na naši kružnici k dostaneme rovnici

$$-(|PA| \cdot |PK|) = m.$$

Už víme, že m se rovná $d^2 - R^2$. Po dosazení do rovnice $-(|PA| \cdot |PK|) = m$, dostaneme

$$-(|PA| \cdot |PK|) = d^2 - R^2.$$

Po vynásobení rovnice číslem -1 bude rovnice vypadat takto

$$|PA| \cdot |PK| = R^2 - d^2.$$

Víme, že výraz $|PA| \cdot |PK|$ se rovná $R^2 - d^2$, můžeme zpět dosadit do vzorečku na obsah trojúhelníka DEF $S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PK| \cdot \frac{S_{\Delta ABC}}{2R^2}$. Po dosazení bude obsah trojúhelníka DEF

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - d^2) \cdot \frac{S_{\Delta ABC}}{2R^2}.$$

Rovnici $S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - d^2) \cdot \frac{S_{\Delta ABC}}{2R^2}$ budeme nyní upravovat, abychom získali stejný zápis rovnice, který objasňujeme. Po úpravě dostaneme

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - d^2) \cdot S_{\Delta ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Po vynásobení v rovnici $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{1}{4}$ a po vynásobení mezi sebou $R^2 - d^2$ a $\frac{1}{R^2}$ dostaneme $\frac{R^2-d^2}{R^2}$. Rovnice na obsah trojúhelníku DEF bude vypadat takto

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{R^2-d^2}{R^2} \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Po další úpravě dostaneme

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{R^2}{R^2} - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Víme, že $\frac{R^2}{R^2}$ se rovná číslu 1 a tím pádem dostáváme rovnici

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Obsah trojúhelníka DEF je obsah pedálního trojúhelníka S_1 a obsah trojúhelníka ABC je značen S. Pak můžeme rovnici přepsat takto

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \cdot S,$$

která je shodná s rovnicí, kterou jsme ověřovali.

ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo seznámit zájemce o matematiku s jedním z největších matematiků naší planety, s Leonardem Eulerem, který změnil mnoha lidem pohled na matematiku a přesto hodně lidí neví, kdo to byl, jak a kde žil a co se mu podařilo v tomto vědním oboru vytvořit.

Na začátek bakalářské práce jsem vložila jeho podrobný životopis, který jsem se snažila zpracovat velmi detailně, protože často je důležité, aby člověk pochopil smýšlení a konání dané osoby. Poznat jakými vědními obory se zabýval, jaké publikace a články vydával či s kým vedl vědecké debaty. Prožít s ním alespoň kus života, sdílet jeho životní prohry i vítězství, radost i starost, poznat jeho přátele, kolegy i osoby, které ovlivnili jeho životní dráhu, ale také pochopit, že i on sám dokázal působit na lidi okolo sebe. Uvědomit si jeho význam pro svět matematiky, který se často prolíná do světa kolem nás a který nás formuje.

V druhé části práce jsem se věnovala jedné z kapitol matematiky, na kterou i matematik Leonard Euler zaměřil svou pozornost, a to geometrii. Vybrala jsem Eulerovu větu o čtyřúhelnících, Eulerovu větu o trojúhelníku a Eulerovu větu o pedálním trojúhelníku. Tato témata jsou určitě zajímavá pro žáky tak i pro širokou veřejnost, protože tato problematika není zatím plně dopodrobna vysvětlena. Jednotlivé postupy jsem se snažila udělat tak, aby je pochopil každý student a pedagog. Zároveň jsem usilovala, aby vše bylo možné použít při výuce matematiky, k dalšímu samostudiu, ke zpestření hodin matematiky nebo matematických seminářů. K jednotlivým tématům jsem vytvořila velké množství rovnic, obrázků, ale i ověření daných vztahů.

Doufám, že tato bakalářská práce zaujme mnohé čtenáře, získané informace využijí a zvýší se jejich zájem o daný obor.

ZDROJE

České internetové zdroje

Bureš, J. (2004). Leonhard Euler. conVERTER. http://www.converter.cz/fyzici/euler.htm

gigatos (2022, 26. prosince). Leonhard Euler. Trenfo. https://www.trenfo.com/cs/dejiny/zivotopisy/leonhard-euler-3

Hašek, R. (2018, 13. dubna). GEOMETRIE 2 - KMA/GEO2 (dle sylabu platný od roku 2014). http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/GEO2_ver2018(new)_4.pdf

Havrlant, L. (2022). Sinová a cosinová věta. Matematika polopatě. https://www.matweb.cz/sinova-cosinova/

Koutný, F. (2010, 27. února). Přednáška Koutný. Leonhard Euler. https://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

Králová, M. (2007). Leonhard Euler. Techmania Science Center. http://edu.techmania.cz/CS/ENCYKLOPEDIE/VEDEC/1134/EULER

Pirklová, P. (2013). Množiny bodů daných vlastností, mocnost bodu ke kružnici: Pomocný učební text. Technická univerzita v Plzni. https://kma.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/Mnoziny_bodumocnost.pdf

Vaváčková, M. (2015). Miquelův bod. Matematický korespondenční seminář. https://prase.cz/library/MiqueluvbodMV/MiqueluvbodMV.pdf

Zahraniční internetové zdroje

Bogomolny, A. (2018). Sides and Area of Pedal Triangle. Cut The Knot. http://www.cut-the-knot.org/triangle/PedalTriangle.shtml

CITATY.SU. (2015). Краткая биография Леонарда Эйлера. https://citaty.su/kratkaya-biografiya-leonarda-ejlera

CUEMATH. (2023). Exterior Angle Theorem. https://www.cuemath.com/geometry/exterior-angle-theorem/

MATHVOX. (2022f). Теорема о пересекающихся хордах. https://mathvox.ru/geometria/okrujnosti-i-ih-svoistva/glava-9-hordi-i-sekuschie/teorema-o-peresekayuschihsya-hordah/

MicroExcel. (2022). Теорема Стюарта: формулировка и пример с решением. https://microexcel.ru/teorema-styuarta/

Биограф. (2023). Леонард Эйлер. https://biographe.ru/uchenie/leonard-eiler/

Биографии знаменитостей. (2022). Эйлер, Леонард. http://biografiivsem.ru/eyler-leonard

Интересные факты. (2023). Леонард Эйлер. https://interesnyefakty.org/leonard-ejler/

Люди. (2009, 27. dubna). Леонард Эйлер ´Leonhard Euler´. https://www.peoples.ru/science/mathematics/leonhard_euler/

Малкова, А. (2023, 8. března). Лемма о трезубце (трилистнике). ЕГЭ-Студия. https://ege-study.ru/materialy-ege/lemma-o-trezubce-trilistnike/

Образовака твой помощник в учебе. (2023). Биография Леонарда Эйлера. https://obrazovaka.ru/leonhard-euler.html

Пырков, В. Е. (2023). Ортотреугольник. Педальный треугольник Прямая Эйлера. Окружность девяти точек. Вячеслав Евгеньевич Пырков. http://pyrkov-professor.ru/Portals/0/Predmety/%D0%AD%D0%9C_%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F/3_%D0%AD%D0%9C_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F%20%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf

Разместить статью, биографию и пр.. (2014). Леонард Эйлер — биография. https://to-name.ru/biography/leonard-ejler.htm

Сдам на 5. (2023). Краткая биография Леонарда Эйлера. https://www.sdamna5.ru/leonard_ejler

Тиняков, И. (2020, 30. července). Теорема Эйлера для четырехугольника | Дополнительные главы школьной геометрии. Элементарная Математика. https://www.youtube.com/watch?v=3GqbxvJ-3oA&t=268s

Университетская библиотека. (2023). Эйлер Леонард. https://biblioclub.ru/index.php?page=author_red&id=31484

ЦАРСТВО МАТЕМАТИКИ. (2023b). Формула Эйлера. https://coursemath.ru/formula-ehjjlera/

ЦАРСТВО МАТЕМАТИКИ. (2023c). Лемма о трезубце. https://coursemath.ru/lemma-o-trezubce/

Яковлев, И. В. (2023). Педальный треугольник. MathUs.ru. https://mathus.ru/math/pedal-triangle.pdf

Knihy a časopisy

České knihy

Polák, J. (1972). Přehled středoškolské matematiky. Státní pedagogické nakladatelství.

Vošický, Z. (2007). MATEMATIKA V KOSTCE. Fragment. http://www.gvp.cz/~horyna/matematika/Matematika%20v%20kostce.pdf

Zahraniční knihy a časopisy

Borsenco, I. (2007). On the area of a pedal triangle. MATHEMATICAL REFLECTIONS, 2, 1-2. https://blogm4e.files.wordpress.com/2016/08/area-of-pedal-triangles-ivan-borsenco-mr.pdf

Bradley, R. E, Sandifer, C. E., Williams, K. (2008). Leonhard euler: life, work and legacy. The Mathematical Intelligencer, 30(2), 66-69. https://www.researchgate.net/publication/226387885_Leonhard_euler_life_work_and_legacy

Dunham, W. (1999). Euler: The Master of Us All. THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. http://paginas.fisica.uson.mx/horacio.munguia/Personal/Documentos/Libros/Euler%20The_Master%20of%20Us.pdf

Dunham, W. (2007). The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work. Mathematical Association of America. http://www.ams.org/books/spec/051/spec051-endmatter.pdf

Johnson, R. A. (1960). Advanced Euclidean Geometry (Modern Geometry): An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle. New York, Dover Publications. https://www.isinj.com/mt-usamo/Advanced%20Euclidean%20Geometry%20-%20Roger%20Johnson%20(Dover,%201960).pdf

Kandall, G. A. (2002). Euler's Theorem for Generalized Quadrilaterals. THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, 33(5), 403-404. https://www.maa.org/sites/default/files/0746834208359.ap050005.05a00090.pdf

Pop, O. T., Minculete, N., Bencze, M. (2013). An introduction to quadrilateral geometry. Didactică şi Pedagogică. https://edituradp.ro/site_img/downloads/2013/01/pt_download.pdf

Shirali, S. (2018). How to Prove it. At Right Angles, 7(2), 95-98. https://apfstatic.s3.ap-south-1.amazonaws.com/s3fs-public/APU%20182341%20At%20Right%20Angles_Vol%207%20No.%202_With%20Pullout_Low%20Res.pdf?JYS874hQAxNdi6o841CTxcuKob3wzPSV

Кушнир И. (1992). О двух формулах Эйлера. Кванта, 12, 43-46. http://kvant.mccme.ru/1992/12/o_dvuh_formulah_ejlera.htm

Obrázek

obr. 1. 1.: https://media.springernature.com/m685/springer-static/image/art%3A10.1038%2F528190a/MediaObjects/41586_2015_Article_BF528190a_Figa_HTML.jpg