

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2009

Ondřej Cícha

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

INOVACE ÚLOH VE FYZIKÁLNÍM PRAKTIKU – BALISTICKÉ
KYVADLO A TŘÍOSÝ GYROSKOP

INNOVATION OF PHYSICAL EXPERIMENTS – BALISTIC PENDULUM
AND GYROSCOPE

VYPRACOVAL

Ondřej Cícha

Studující 3. ročník

Obor Fyzika - Matematika

Studijní rok 2008/2009

VEDOUCÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

RNDr. Renata Holubová, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením
RNDr. Renaty Holubové, CSc. za použití literatury uvedené v závěru práce.

V Olomouci 28. dubna 2009

Děkuji vedoucí bakalářské práce RNDr. Renatě Holubové, CSc. za cenné rady nejen při konzultacích, ale i na seminářích bakalářské práce.

Dále bych chtěl poděkovat Petru Podrazilovi za asistenci při měření se soupravami.

Bibliografická identifikace

Autor: Ondřej Cícha

Název práce: Inovace úloh ve fyzikálním praktiku – Balistické kyvadlo a Třísý gyroskop

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra experimentální fyziky

Vedoucí práce: RNDr. Renata Holubová, CSc.

Rok obhajoby práce: 2009

Abstrakt:

Formou této bakalářské práce vznikl ucelený návod v českém jazyce pro měřicí soupravy Balistické kyvadlo a Třísý gyroskop dodané od německé firmy Phywe. Tato práce nejdříve stručně popisuje teorii balistického kyvadla a gyroskopu. Dále pak obsahuje samotný návod pro měření a odvození vzorců, které užíváme přímo pro výpočty výsledných hodnot. V poslední části jsou uvedeny vzorové hodnoty měření s těmito soupravami.

Klíčová slova: balistické kyvadlo, měření rychlosti letícího projektilu, šikmý vrh, gyroskop, precese gyroskopu

Počet stran: 53

Počet příloh: 5

Jazyk: český

Bibliographical identification

Author: Ondřej Cícha

Title: Innovation of physical experiments – Ballistic pendulum and Gyroscope

Type of thesis: Bachelor thesis

Department: Department of Experimental Physics

Supervisor: RNDr. Renata Holubová, CSc.

The year of presentation: 2009

Abstract:

Complete instruction in Czech language for measuring sets of Ballistic pendulum and Three-axis gyroscope created by German company Phywe were made by this Bachelor work. At first, this work briefly describes theory of Ballistic pendulum and gyroscope. Then it contains the instruction for measuring and formula deduction which are used for final values calculation. At the end, there are brought out model values of measuring with these sets.

Keywords: ballistic pendulum, angle throw, measuring the velocity of flying projectiles, gyroscope, precession of gyroscope.

Number of pages: 53

Number of appendices: 5

Language: Czech

Obsah

Úvod.....	8
1. Balistické kyvadlo.....	9
1.1. Balistické kyvadlo - princip a využití.....	9
1.2. Měřicí souprava balistické kyvadlo	9
1.2.1. Princip měření rychlosti vystřeleného projektilu.....	9
1.2.2. Informace pro přesnější vyhodnocení experimentu.....	11
1.2.3. Postup měření	13
1.3. Měření s balistickou jednotkou v režimu „katapult“	14
Přestavba do režimu „katapult“	14
1.3.2. Princip měření v režimu „katapult“	15
1.3.3. Postup měření rychlosti míčku závislé na vzdálenosti dopadu a vyhazovacím úhlu	16
2. Třiosý gyroskop	17
2.1. Fyzika gyroskopu, jeho princip a využití.....	17
2.2. Měřicí souprava Třiosý gyroskop	19
2.2.1. Princip a postup měření momentu setrvačnosti gyroskopického disku ..	20
2.2.2. Princip měření závislosti rotační frekvence disku na délce trvání precesního otáčení.....	21
2.2.3. Postup měření závislosti rotační frekvence disku na délce trvání precesního otáčení.....	23
2.2.4. Demonstrace nutace	24
3. Vzorové naměřené hodnoty	25
3.1. Hodnoty měření se soupravou Balistické kyvadlo	25
3.1.1. Měření rychlosti vystřeleného míčku s balistickým kyvadlem – naměřené hodnoty	27
3.1.2. Měření rychlosti míčku v pracovním režimu „katapult“ – naměřené hodnoty	29
3.2. Hodnoty měření se soupravou Třiosý gyroskop	37
3.2.1. Určení momentu setrvačnosti I_p gyroskopického disku.....	37
3.2.2. Závislost rotační frekvence na době precesního otáčení	38
Závěr	41

Úvod

Ve fyzikálním praktiku si člověk může v praxi ověřit mnohé fyzikální zákonitosti a poznatky, které nabere během doby studia. Většina přístrojů ve fyzikálním praktiku pochází od německého výrobce - firmy Phywe, od které byly zakoupeny také měřicí soupravy Balistické kyvadlo a Tříosý gyroskop. Mým úkolem bylo nastudovat příslušnou fyzikální problematiku a následně sestavit měřicí soupravy, navrhnout a vypracovat návod pro měření, odvodit užívané vzorce a vypracovat vzorové řešení pro obě soupravy. Obě soupravy jsou již letos zahrnuty do programu měření ve fyzikálním praktiku.

Tato bakalářská práce má následující části:

- Princip a využití balistického kyvadla
- Popis a návod pro měření se soupravou Balistické kyvadlo
- Teorie gyroskopu, jeho princip a využití
- Popis a návod pro měření se soupravou Tříosý gyroskop
- Vzorové naměřené hodnoty měření s oběma soupravami

1. Balistické kyvadlo

1.1. *Balistické kyvadlo - princip a využití*

Balistické kyvadlo je typ zařízení, jehož funkcí je měření rychlosti letícího projektilu. Věda zabývající se pohybem a účinky projektilů se nazývá balistika. Ta se dále dělí na podobory podle toho, kterou část letu střely zkoumá. Zde se budeme zabývat pouze finální částí, tj. zasažením cíle a následně určením rychlosti.

Balistické kyvadlo je podobné obyčejnému kyvadlu. Jeho konstrukce vypadá tak, že těleso, kterým bývá nejčastěji bedna s pískem, je zavěšeno na dostatečně dlouhém závěsu, aby se mohlo kývat do strany ve zvoleném směru. Když poté vystřelený projektil tuto bednu s pískem zasáhne, uváže v ní, a zároveň vychýlí bednu z její rovnovážné polohy do určité výšky. Tuto výchylku z klidové polohy lze zaznamenat. Bedna je naplněna pískem z toho důvodu, aby se zamezilo ztrátám kinetické energie deformací tělesa. Využitím zákonů zachování hybnosti a energie můžeme snadno z velikosti výchylky kyvadla určit, jakou rychlost má letící projektil. Po zachycení projektilu v kyvadle se oba pohybují dále společnou rychlostí, jedná se tedy o nepružný ráz. Protože zde zanedbáváme vliv tření a odporu vzduchu, používáme v dnešní době k určení rychlosti letícího projektilu modernější a přesnější metody měření [11].

1.2. *Měřicí souprava balistické kyvadlo*

Souprava Balistické kyvadlo od firmy Phywe se skládá ze základního plátu, balistické jednotky vystřelující projektil, kterým je buď dřevěný nebo ocelový míček, dále z balistického kyvadla s ukazatelem výchylky a z úhlové stupnice pro odečtení výchylky. Celou soupravu lze jednoduše přestavit do režimu „katapult“ odstraněním balistického kyvadla. V tomto režimu lze měřit vrhací rozsah balistické jednotky. Tím se ale budeme zabývat ve druhé části měření.

1.2.1. **Princip měření rychlosti vystřeleného projektilu**

Prvním naším úkolem je změřit rychlost projektilu s balistickým kyvadlem. Jak již bylo výše zmíněno, využíváme při tomto měření zákonů zachování energie a hybnosti. Zasáhne-li střela o hmotnosti m kyvadlo, začne se pohybovat určitou rychlostí

v zachycená v kyvadle, protože ráz střely s kyvadlem je nepružný. Ze zákona zachování hybnosti platí, že

$$m \cdot v_p = (m + M) \cdot v, \quad (1)$$

v_p je hledaná rychlost střely (projektilu) a tedy

$$v = \frac{m}{m + M} \cdot v_p. \quad (2)$$

Kinetická energie kyvadla se zachycenou střelou je rovna

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v^2 \quad (3)$$

a dosazením za v dostaneme

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 v_p^2}{m + M}. \quad (4)$$

Jestliže se však balistické kyvadlo vychýlí o jistý úhel φ , přejde celá tato kinetická energie v energii potenciální, tedy platí zákon zachování energie

$$E_{kin} = E_{pot}. \quad (5)$$

Potenciální energii kyvadla lze vyjádřit vzorcem

$$E_{pot} = (m + M) \cdot g \cdot \Delta h, \quad (6)$$

kde $\Delta h = 1 - \cos\varphi$ je výška, o kterou se vychýlilo kyvadlo a po dosazení máme

$$E_{pot} = (m + M) \cdot g \cdot (1 - \cos\varphi). \quad (7)$$

Úpravou výrazů vyjadřujících kinetickou a potenciální energii (4), (6) docházíme k rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 v_p^2}{m + M} = (m + M) \cdot g \cdot h, \quad (8)$$

kde g je gravitační zrychlení a odtud

$$v_p^2 = \frac{2 \cdot (m + M)^2 \cdot g \cdot h}{m^2}, \quad (9)$$

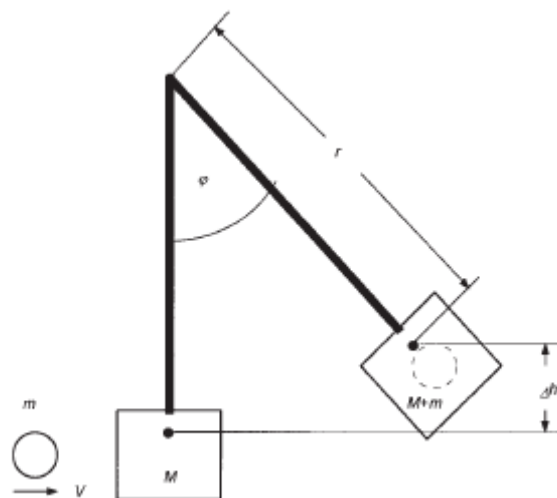
tedy

$$v_p = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (10)$$

Pokud v (10) dosadíme za $h = r \cdot \Delta h$, obdržíme rychlost projektilu

$$v_p = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\varphi)}, \quad (11)$$

kde r je vzdálenost mezi bodem otáčení (hrotem závěsu) a těžištěm kyvadla (odvozeno podle zdrojů [1,2]).



Obr. 1: Schéma balistické kyvadlo [1].

1.2.2. Informace pro přesnější vyhodnocení experimentu

Protože výše uvedené teoretické vztahy aplikované na balistické kyvadlo jsou založeny na některých idealizacích (zanedbáváme vliv tření, odpor vzduchu), je formule (6) pouze přibližná, ale dosti užitečná pro praktické účely. Nyní si stručně ukážeme, jak dosáhnout relativně přesného vyhodnocení.

Rovnici (3) pro kinetickou energii lze nahradit rotační energií fyzického kyvadla

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2, \quad (12)$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla se zachyceným míčkem a ω je úhlová rychlost. Pokud dosadíme moment hybnosti $L = I \cdot \omega$, dostaneme

$$E_{kin} = \frac{L^2}{2 \cdot I} \quad (13)$$

nebo též

$$L = \sqrt{2 \cdot I \cdot E_{kin}}. \quad (14)$$

Tento moment hybnosti L musí být roven momentu hybnosti L_b míčku před srážkou. Jestliže je r_b vzdálenost míčku od bodu otáčení v okamžiku zachycení, pak

$$L_b = m \cdot r_b^2 \cdot \omega_b = m \cdot r_b \cdot v. \quad (15)$$

Porovnáním obou momentů hybnosti obdržíme

$$v = \frac{1}{m \cdot r_b} \cdot \sqrt{2 \cdot I \cdot (m + M) \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\varphi)}. \quad (16)$$

Moment setrvačnosti I fyzického kyvadla určíme změřením periody kmitu T . Pro naše kyvadlo platí následující rovnost

$$I = \frac{(m + M) \cdot g \cdot r \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}, \quad (17)$$

a tedy výslednou rychlost letícího projektilu v vypočítáme následovně

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos\varphi)}. \quad (18)$$

Kdybychom nyní porovnali vypočítanou rychlost podle vzorce (11) a skutečné hodnoty vypočítané podle přesného vzorce (18), uvidíme, že se obě liší o korekční faktor

$$f_{cor} = \frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r_b} \cdot \sqrt{r \cdot g}. \quad (19)$$

Tento faktor je pouze ilustrativní a pokud ho nahradíme následujícím výrazem pro T , v němž r_m je délka matematického kyvadla, které má periodu kmitu T

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r_m}{g}} \quad (20)$$

následně obdržíme

$$f_{cor} = \frac{\sqrt{r \cdot r_m}}{r_b}. \quad (21)$$

Tímto způsobem tedy máme odvozen vzorec (18), díky kterému budeme z naměřených výsledků dopočítávat výsledné hodnoty rychlostí letícího projektilu (odvozeno podle zdroje [1]).

1.2.3. Postup měření

Pro měření rychlostí s balistickým kyvadlem by mělo být zařízení přichyceno pevně ke stolu. Vyhneme se tak chybám měření, které by mohlo způsobit prokluzování nebo pád.

Nabíjení a natahování balistické jednotky

Před natahováním balistické jednotky, upevníme ocelový míček na svislý magnet na balistické jednotce. Míček musí být umístěn na střed pístu tak, aby byl chycen prstencovým magnetem balistické jednotky. Pokud používáme dřevěný míček jako projektil, vložíme ho ocelovou stranou na prstencový magnet. Pak uvolníte západku nahoru a zatáhnete páčku zpět do 2. nebo 3. zapadací pozice (první pozice není všeobecně vhodná, protože udělená energie je k bezpečnému zachycení kyvadlem moc malá).

Měření rychlosti vystřeleného míčku

Nyní, bez dotýkání se natažené jednotky, zajistíme, aby kyvadlo bylo v klidu a aby byla maximální ručička nastavena přibližně na nulu. Po těchto přípravách spustíme střelu zatáhnutím spouštěcí páčky. Výchylka kmitu kyvadla lze odečíst z maximální výchylky ukazatele. Důsledkem velkého tření ručičky ukazatele může být výchylka měření malá. Proto je vhodné, aby střelení 2. a 3. rány do klidového kyvadla probíhalo se stejným počátečním napětím bez vynulování ručičky ukazatele maximální výchylky. Když se ručička dále vůbec nepohne, můžeme předpokládat, že indikovaný úhel není zkreslený. V opačném případě jsou nutné další střely.

K vyhodnocení potřebujeme znát hmotnost míčku (projektilu) m a hmotnost kyvadla M . Nejprve tedy odmontujeme celou kyvadlovou tyč a zvážíme její hmotnost M . Následně určíme těžiště kyvadla včetně zachyceného míčku tak, že zavěsíme kyvadlovou tyč na nit se smyčkou a posunujeme pozici tyče, dokud není vyvážená. Vzdálenost mezi tímto závěsovým bodem a osou nosného vývrtu je r . Pokud máme správně sestavenou soupravu jako na obrázku v příloze 1, můžeme balistickou jednotku nabít a následně měřit odchylky balistického kyvadla pro jednotlivé tenze napětí balistické jednotky tak, jak je to popsáno výše. Z indikovaných úhlů můžeme dopočítat rychlost míče v podle rovnice (18).

Provedeme jednu sérii měření pro ocelový míček a poté další sérii s dřevěným míčkem, kde můžeme pozorovat vliv hmotnosti vystřeleného projektilu na odchylku balistického kyvadla a ve výsledku tedy i na rychlost míčku. V každé sérii provedeme měření pro tenze 2 a 3. První zapadací pozice západky u spouštěcí páčky není vhodná, protože udělí vystřelenému projektilu malou energii, která není dostatečná k tomu, aby balistické kyvadlo míček zachytilo. Periodu kmitu T dopočítáme podle vzorce (20), kde délku matematického kyvadla r_m nahradíme vzdáleností r mezi osou otáčení kyvadla a těžištěm kyvadla včetně zachyceného projektilu.

Před balistickou jednotku lze připevnit kontrolní měřič rychlosti, díky kterému můžeme porovnávat dosažené výsledky se skutečnými rychlostmi, které jsme tímto měřičem naměřili (postup měření podle [1]).

1.3. Měření s balistickou jednotkou v režimu „katapult“

Přestavba do režimu „katapult“

Nejdříve odšroubujeme balistickou jednotku ze základní desky. Dále pak také odstraníme celé kyvadlo, které lze po odmontování přišroubovat z druhé strany základní desky do příslušných děr u okraje plátu. Po odstranění kyvadla jsou vidět dvě díry na úhlové stupnici, které byly doposud zakryté kyvadlovou tyčí. Dvěma šrouby přišroubujeme balistickou jednotku do těchto děr. Otvor balistické jednotky musí směřovat vzhůru. Uvolněním prostředního šroubu lze vyhazovací úhel měnit od 0° do 90° . Pro měření vrhacího rozsahu s balistickou jednotkou je absolutně nezbytné, aby stojky zařízení byly připevněny k povrchu stolu, protože zařízení by během napínání a střelení mohlo uklouznout. Pro experimenty s balistickou jednotkou vybereme oblast, kde nemůže být nikdo zasažen a kde nemůže být nic míčkem zničeno. Míček může dopadnout až 3 metry daleko. Také bereme ohled na to, že se míček může odrazit o zem a dopadnout dále. Při měření využíváme pohybových rovnic šikmého vrhu, proto je důležité, aby startovní bod a cílová rovina byly ve stejné výšce.

1.3.2. Princip měření v režimu „katapult“

Těleso, kterým je v našem případě míček, je vrženo počáteční rychlostí v_0 svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Zavedeme souřadnicové osy podle obr. 2. Zanedbáme-li odpor vzduchu, máme pro souřadnicové rychlosti tyto výrazy:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t, \quad (22)$$

kde g je tíhové zrychlení. Souřadnice x a y vyjádříme jako funkce času

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}. \quad (23)$$

Vyloučením času t dostaneme rovnice trajektorie

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2, \quad (24)$$

což je srovnatelné s obecnou rovnicí paraboly $y = a \cdot x - b \cdot x^2$.

V nejvyšším bodě trajektorie je

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t' = 0, \quad (25)$$

kde t' je doba výstupu do nejvyššího bodu dráhy. Odtud potom

$$t' = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \quad (26)$$

a tedy nejvyšší výška dosažená vrženým tělesem je tedy

$$y_{\max} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}. \quad (27)$$

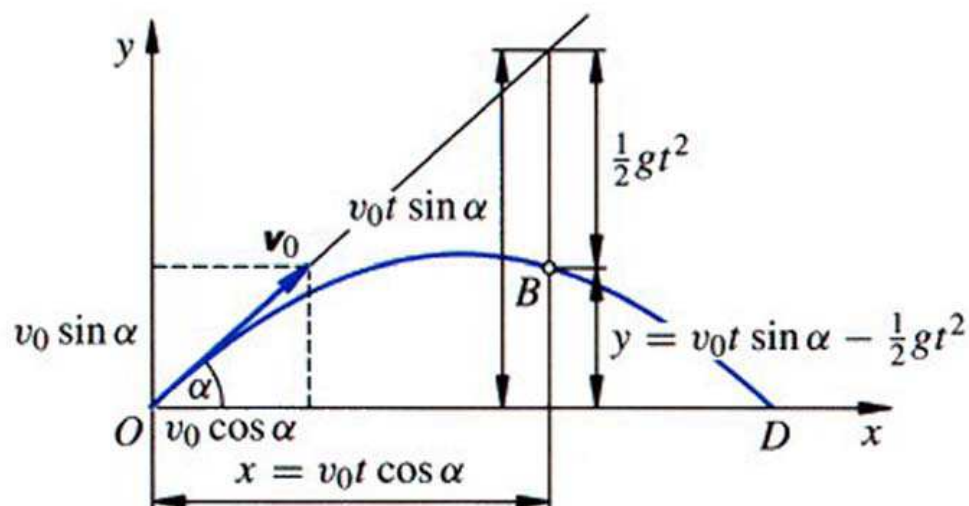
Těleso dopadne na zem za dobu $t = 2 \cdot t'$, takže

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}. \quad (28)$$

Dálku vrhu dostaneme dosazením této hodnoty za t do výrazu x

$$x_{\max} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \quad (29)$$

(odvozeno podle zdroje [8])



Obr. 2: Souřadnicové osy při šikmém vrhu, (převzato ze zdroje [13]).

Můžeme si všimnout, že při pevně zvolené velikosti počáteční rychlosti docílíme největšího doletu při vyhozovacím úhlu α , který splňuje podmínku $\sin 2\alpha = 1$, tj. úhel $\alpha = 45^\circ$. Dolet nabývá největší hodnoty tehdy, je-li vyhozovací úhel roven 45° [3].

1.3.3. Postup měření rychlosti míčku závislé na vzdálenosti dopadu a vyhozovacím úhlu

Nabíjení a natahování balistické jednotky je popsáno výše. Při spouštění střely zajistěte, aby spoušť byla vytažená rychle. Tak dosáhneme opakovatelnosti vrhaných vzdáleností. Upevníme záznamový papír do cílové vzdálenosti k označení dopadových bodů míčku. Rovněž je důležité, aby startovní bod a cílová rovina byly ve stejné výšce.

Pro vyhodnocení měření vycházíme ze vzorce (29). Pro každý vyhozovací úhel naměříme vzdálenost dopadu a odtud můžeme dopočítat vyhozovací rychlost v_0 následovně:

$$v_0 = \sqrt{\frac{s \cdot g}{\sin 2\alpha}} \quad (30)$$

Pokud nastavíme vyhozovací úhel $\alpha = 45^\circ$ pro největší vzdálenost dopadu, lze počáteční rychlost vypočítat jednoduše

$$v_0 = \sqrt{s \cdot g} \quad (31)$$

Měření opakujeme pro vybrané úhly vždy po 10 opakování. Pro vystřelovací tenzi 1 je nejlepší volit úhly v rozmezí mezi 30° a 70° . Tenze 2 je vhodná pro úhly v rozmezí 10° až 80° .

2. Tříosý gyroskop

2.1. Fyzika gyroskopu, jeho princip a využití

Druhá naše souprava s názvem Tříosý gyroskop nám umožňuje pozorovat a měřit pohyby gyroskopu. Ke studiu pohybů setrvačníků potřebujeme znát pojmy jako je těžiště tělesa, moment setrvačnosti, volný setrvačnick, těžký setrvačnick a mnoho dalších. Proto se pojdme s těmito pojmy seznámit a stručně si je vysvětlit.

Na každý bod tuhého tělesa působí v homogenním tíhovém poli síla, která se nazývá tíhová. Tyto síly tvoří soustavu nekonečně mnoha rovnoběžných sil souhlasně orientovaných. Výslednici těchto sil říkáme tíhová síla neboli tíha, jejímž působištěm je těžiště tělesa. To je v tíhovém poli, které je homogenní, totožné s jeho hmotným středem.

Moment setrvačnosti tělesa nám popisuje *Steinerova věta*:

„Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose neprocházející jeho těžištěm je roven momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm zvětšenému o součin hmotnosti tělesa a druhé mocniny vzdálenosti dané osy od těžiště [12].“

Tj.
$$I = I_T + m \cdot a^2$$

Jestliže je výsledný moment soustavy sil působících na těleso vzhledem k pevné ose otáčení nulový, potom se těleso kolem této osy otáčí rovnoměrně a zachovává si vzhledem k této ose konstantní moment hybnosti. Obecně se však tuhé těleso může otáčet kolem nekonečně mnoha os a proto existuje i nekonečně mnoho jeho momentů setrvačnosti příslušných k těmto osám. Zvláštní postavení mají osy otáčení procházející těžištěm tělesa. Důsledkem Steinerovy věty je to, že pro daný směr osy otáčení je moment setrvačnosti vzhledem k ose, která prochází těžištěm tělesa, minimální. Potom můžeme říct, že každé tuhé těleso má tři navzájem kolmé hlavní osy setrvačnosti. Ty se protínají v jeho těžišti. Těmto třem hlavním osám setrvačnosti tělesa přísluší tři tzv. hlavní momenty setrvačnosti. Pokud má homogenní tuhé těleso osu symetrie, pak je tato osa zároveň jednou z jeho hlavních os setrvačnosti. Hlavními osami setrvačnosti jsou současně také každé dvě navzájem kolmé přímky, které jsou kolmé na osu symetrie a

protínají se v těžišti tělesa. Odtud plyne, že homogenní tuhé těleso, které je zároveň symetrické, má nekonečně mnoho hlavních os setrvačnosti. Takovým tělesem je například homogenní koule, u které jsou hlavními osami setrvačnosti každé tři navzájem kolmé přímky, které se protínají v těžišti koule[12].

Při otáčivém pohybu tělesa kolem některé ze zmíněných os je uložení navíc namáháno setrvačnou odstředivou silou, která se snaží danou osou otáčet. Toto přídatné namáhání vymizí v případě, že se těleso otáčí kolem některé z jeho hlavních os setrvačnosti. Nazýváme ji volnou osou, protože kolem této osy se těleso může otáčet i bez jejího upevnění. Jen hlavní osy setrvačnosti tělesa jsou jeho volnými osami. Kolem volné osy se otáčí např. bumerang, letící disk nebo vystřelený projektil [12].

„Aby se při rotaci tělesa kolem libovolné osy neměnila poloha této osy v prostoru, je nutno ji upevnit v ložiscích. Při rotaci kolem volné osy za předpokladu, že na těleso nepůsobí vnější síly (gravitační síla), ani vnější dvojice sil, zachovává rotační osa svou polohu i bez ložisek. Působí-li však na těleso roztočené kolem volné osy vnější dvojice sil, která se snaží vychýlit rotační osu z její polohy, mění sice osa svůj směr v prostoru, avšak jinak, než by příslušelo působení rušivé dvojice sil. To lze snadno vyložit v případě rotace symetrického setrvačnicku, jímž nejčastěji rozumíme tuhé homogenní osově souměrné rotační těleso, jehož osa souměrnosti (též osa setrvačnicku) má jeden pevný bod. Setrvačnicku se zpravidla dává takový tvar kotouče, aby jeho volné ose příslušel největší hlavní moment setrvačnosti.[4]“

„Pokud na setrvačnick nepůsobí žádné vnější síly, nazývá se volný setrvačnick, zatímco těžký setrvačnick představuje setrvačnick podrobený působení vnějších sil. Pohyb volného setrvačnicku může mít různé podoby a obecně se nazývá volnou precesí. Jestliže roztočíme volný setrvačnick kolem jeho hlavní osy, bude kolem ní dále rovnoměrně rotovat. Když však setrvačnicku udělíme malý impulz kolmo na osu rotace třeba tak, že udeříme do jeho osy, nebude se setrvačnick rovnoměrně překlápět ve směru impulzu, jako by to udělalo těleso bez rotace, ale dá se do složitějšího precesního pohybu. V případě symetrického setrvačnicku bude geometrická osa setrvačnicku opisovat v prostoru kuželovou plochu, tzv. precesní kužel. Pohyb se nazývá regulární precesí. V případě asymetrického setrvačnicku je pohyb mnohem komplikovanější, vedle precese koná setrvačnick i nutaci a jeho pohyb se nazývá pseudoregulární precesí [6]“. Gyroskop se tedy kromě otáčení kolem osy rotace ještě naklání a opisuje tak prostorovou křivku.

Stabilita rotace setrvačníku kolem jeho osy symetrie má široké technické využití. Rychle roztočený setrvačník slouží jako přístroj zvaný umělý horizont, který se používá v letecké navigaci. Stabilita rotujících kol umožňuje jízdu na kole či motocyklu. Střely se roztáčejí v hlavních zbraních, aby po dobu letu lépe zachovávaly směr své osy v prostoru. Podobně pracuje i gyroskop, který rotuje stále kolem osy rovnoběžné s osou rotace Země a určuje tak směr poledníku. Do námořních lodí se montují velké setrvačníky, aby udržovaly polohu lodí při vlnobití[5].

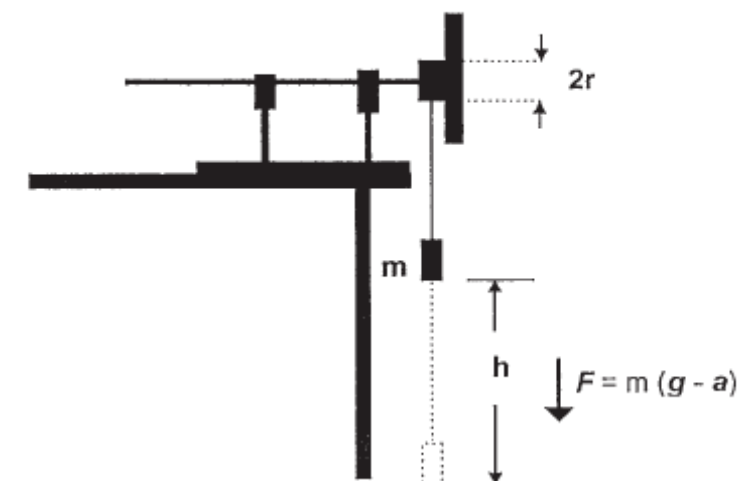
Gyroskop je rovněž jedna z nejběžnějších a nejznámějších hraček, ale jen málo lidí ví, že tato hračka byla původně vyvinuta vědci pro studium spinu a rotace Země. Studium pohybu gyroskopu vedlo k porozumění pohybů Země a k sestrojení mnoha užitečných přístrojů, jako již výše zmíněný gyroskop, umělý horizont, gyroskopická stabilizace a navigace lodí, letadel, vesmírných stanic a satelitů. Princip gyroskopu je znám od roku 1817, kdy jej objevil německý fyzik Johann Bohnenberger. Konstruktorem gyroskopu je však označován až francouzský vědec Léon Foucault, který použil gyroskop k demonstraci rotace Země v roce 1852 [7].

2.2. Měřicí souprava Tříosý gyroskop

Naše zařízení od firmy Phywe „Tříosý gyroskop“ je konstruováno následovně. Gyroskopický disk je upevněn na hřídeli a vyvážen protizávažím. Hlavní osa, kolem které rotuje disk uložený v kuličkových ložiskách, se může otáčet ve směru vertikální i horizontální osy. Protizávaží na gyroskopické ose má důležitou funkci vyrovnávat točivý moment, který gyroskopický disk vytváří vzhledem k vodorovné ose. Při používání druhé opěrné tyče, která je také obsažena v doručném balení, lze dosáhnout pevnosti (stálosti) gyroskopických os. Tato tyč se upevní do druhého upínacího místa v základní desce. Tuto pevnost osy potřebujeme při měření momentu setrvačnosti I_P tak, jak je popsáno níže. Součástí soupravy je provázek pro roztáčení gyroskopu, čítač pro měření frekvence otáčení gyroskopického disku a druhý rezervní disk s dalším protizávažím.

2.2.1. Princip a postup měření momentu setrvačnosti gyroskopického disku

Na začátku je potřeba určit polární moment setrvačnosti I_P . Pro tento účel umístíme gyroskop s upevněnou horizontální osou (pomocí přídavné opěrné tyče) na experimentální stůl takovým způsobem, že disk spolu s namotaným roztáčecím provázkem přesahuje hranu stolu (jako na obr. 3). Provázek navineme na roztáčecí část gyroskopického disku a urychlovací závaží připevníme na volný konec provázku. Experiment je založen na odlišných padacích výškách h urychlovacího závaží, na kterých závisí doba pádu t_P od okamžiku spuštění do té doby, dokud se závaží nedotkne podlahy. Závislost t_P na h určuje moment setrvačnosti gyroskopického disku, který dopočítáme podle vztahu (36).



Obr. 3: Experimentální sestavení pro měření momentu setrvačnosti gyroskopického disku (převzato z [1]).

Pokud nastavíme gyroskop tak, aby byl roztočen prostřednictvím padajícího tělesa (jako na obr. 3), potom pro úhlové zrychlení ε platí následující vzorec:

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \varepsilon = \frac{M}{I_P}, \quad (32)$$

kde ω_R je úhlová rychlost, I_P polární moment setrvačnosti a $M = F \cdot r$ je točivá síla.

Podle zákona akce a reakce je síla způsobující točivý moment dána následujícím vztahem:

$$F = m \cdot (g - a), \quad (33)$$

g je gravitační zrychlení a a je zrychlení přímočarého pohybu po dráze.

Následující vztahy platí pro zrychlení a a úhlové zrychlení ε :

$$a = \frac{2 \cdot h}{t_p^2} \quad \varepsilon = \frac{a}{r}, \quad (34)$$

kde h je padající výška urychlovacího závaží, t_p je čas padání a $r = 22,5 \text{ mm}$ je poloměr navíjecího kotouče, na kterém je navinutý provázek s urychlovacím závažím.

Dosazením (33) a (34) do (32) dostáváme

$$t_p^2 = \frac{(2 \cdot I_p + 2 \cdot m \cdot r^2) \cdot h}{m \cdot g \cdot r^2}. \quad (35)$$

Výše uvedený výraz se užívá pro určení I_p ze závislosti t_p na h . Odtud je tedy výsledný moment setrvačnosti disku je roven

$$I_p = \frac{t_p^2 \cdot m \cdot g \cdot r^2}{2 \cdot h} - m \cdot r^2. \quad (36)$$

Obecně však pro moment setrvačnosti disku platí, že

$$I_p = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot \rho \quad (37)$$

Vezmeme-li odpovídající hodnoty poloměru R a hustotu speciálního plastu $\rho = 0,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ dostaneme z (37)

$$I_p = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (podle zdrojů [1,9,10]).}$$

2.2.2. Princip měření závislosti rotační frekvence disku na délce trvání precesního otáčení

Gyroskop, na který nepůsobí žádné síly, a který se může volně otáčet kolem 3 os, vždy roztočíme pomocí navinutého provázku. Potom probíhá měření doby trvání t_R jedné otáčky (rotační frekvence ω_R) pomocí čítače. Ihned poté zavěsíme přídatné závaží 50g (popř. 100g) do drážky na konec gyroskopické osy naproti disku, který

důsledkem tohoto silového impulsu začne konat precesní otáčení a ručními stopkami se měříme dobu trvání půlky započatého precesního otáčení $t_P/2$. Po sundání přídavného závaží se gyroskop vrátí do rovnovážné polohy a opět měříme rotační frekvenci ω_R . Průměrnou hodnotu obou frekvencí zaneseme do grafu v závislosti na precesním čase t_P . A stejným způsobem změříme další hodnoty. Princip měření je tedy následující.

Dejme nyní symetrický gyroskop do rovnováhy s protizávažím v horizontální poloze jako na obr. 4. Pokud máme gyroskop rotující kolem horizontální osy x s úhlovým zrychlením ω , potom pro úhlový impuls, který je konstantní v prostoru a čase, platí:

$$L = I_P \cdot \omega_R \quad (38)$$

Přidáním přídavného závaží m' ve vzdálenosti r' od podpůrného bodu vyvoláváme doplňkový točivý moment M' , který je roven časové změně úhlového impulsu paralelně k němu.

$$M' = m' \cdot g \cdot r' = \frac{dL}{dt} \quad (39)$$

Vzhledem k vlivu doplňkového točivého momentu, který zde působí kolmo, po uplynutí času dt se bude stáčet úhlový impuls L o úhel $d\varphi$ od jeho počáteční polohy.

$$dL = L \cdot d\varphi \quad (40)$$

Gyroskop se nebude otáčet vlivem doplňkového točivého momentu, ale bude vyrovnávat sílu vyvolanou tímto točivým momentem. Gyroskop, který je nyní podroben gravitaci, vykonává takzvaný precesní pohyb. Úhlová rychlost precese ω_P splňuje vztah

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{1}{I_P \cdot \omega_R} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{m' \cdot g \cdot r'}{I_P \cdot \omega_R} \quad (41)$$

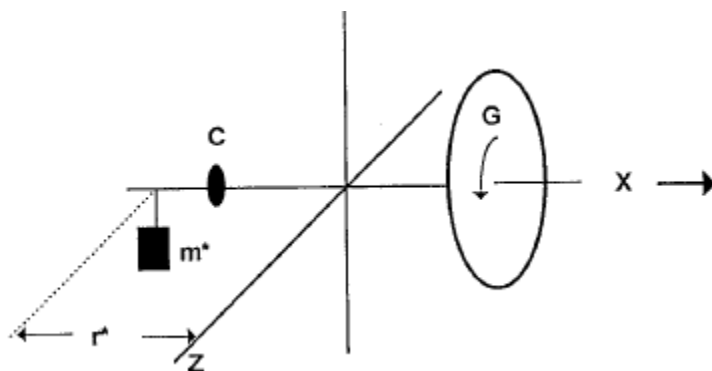
Pokud vezmeme

$$\omega_P = \frac{2 \cdot \pi}{t_P} \quad \text{a} \quad \omega_R = \frac{2\pi}{t_R} \quad (42)$$

kde ω_R je úhlová rychlost otáčení (rotace), potom obdržíme

$$\frac{1}{t_R} = \frac{m' \cdot g \cdot r'}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{I_P} \cdot t_P \quad (43)$$

[podle zdrojů 1,9,10]



Obr. 4.: Schematické znázornění roztočeného volného gyroskopu, který je podrobený působení vnějších sil (převzato ze zdroje [1]).

2.2.3. Postup měření závislosti rotační frekvence disku na délce trvání precesního otáčení

Nejdříve roztočíme volný vyvážený gyroskopický disk tím způsobem, že namotáme provázek na navíjecí kotouč na disku a táhnutím za provázek uvedeme gyroskop do chodu. Je důležité, aby frekvence otáčení byla větší než 10/s. Měření rotační frekvence provádíme následovně. Rotační frekvenci gyroskopického disku určuje světelný čítač, pro přerušení světelné dráhy čítače připojte na okraj disku úzký pásek papíru (nebo např. proužek lepicí pásky). Dbáme na to, aby to bylo pouze něco vyrobeného z měkkého materiálu, zamezíme tak zranění, které by mohlo být způsobeno dotykem roztočeného gyroskopu.

Měření periody jednoho oběhu disku provádíme v sekundách stlačením tlačítka reset na světelném čítači a přisuneme čítač k disku do takové blízkosti, aby úzký pásek papíru přerušil dráhu světelného čítače. Pracovní program čítače nastavíme tak, aby první přerušení světelné dráhy startovalo počítání a další ho zastavilo. Tímto způsobem tedy změříme rotační frekvenci ω_R , která je rovna převrácené hodnotě změřené periody. Ihned poté zavěsíme závaží 50g do drážky na konci gyroskopické osy naproti disku (vzdálenost od středového bodu gyroskopické osy je 270 mm). Roztočený gyroskop začne konat precesní otáčení. Změříme délku trvání poloviny precesního oběhu $t_P/2$. Polovinu zde měříme z praktických důvodů, po vykonání celého precesního otočení totiž klesne frekvence na nízkou hodnotu a tím klesne i potřebná průměrná hodnota. Sundáme závaží, aby se gyroskopická osa dostala do klidové polohy, a ihned měříme

rotační frekvenci. Zaznamenejme průměr takto změřených rotačních frekvencí před a po skončení precese a sestavíme graf závislosti rotační frekvence na době trvání precesního otáčení. Nezapomeňme na to, že jsme naměřili polovinu doby precesního oběhu! Stejným způsobem zaznamenejme zbylé měřené body pro odlišnou rotační frekvenci gyroskopu. Tuto frekvenci ovlivníme tím, jak silně roztočíme gyroskop. Po dokončení této série měření zaznamenejme další sérii měření stejným způsobem s přídatným závažím 100 g.

Ze strmosti přímek grafu této závislosti lze určit moment setrvačnosti disku (případně ze vztahu (43) můžete dopočítat tuto hodnotu) a porovnat ji s hodnotou změřenou způsobem popsaným výše při měření momentu setrvačnosti podle vzorce (27).

Pokud zavěsíme přídatné závaží do přední drážky na osu setrvačnicku nebo pokud roztočíme gyroskopický disk obráceně, bude také směr precesního otáčení opačný. Zdvojnásobení hmotnosti přídatného závaží má při ekvivalentní rotační frekvenci za následek zkrácení doby precesního otáčení a to téměř na polovinu. Druhý gyroskopický disk s protizávažím můžeme připojit jako přídatný, což primárně využijeme k demonstraci jevu, že když 2 disky rotují v opačných směrech stejnou rychlostí rotace, výše popsané gyroskopické jevy zmizí. Další vlastností precese je i to, že pokud zabráníme gyroskopu v tomto pohybu, disk jakoby „spadne“ (sklopí se dolů). Naopak pokud gyroskopickou osu posuneme ve směru otáčení precese, disk „stoupne vzhůru“. V průběhu precese jsou totiž všechny působící síly v rovnováze a působení další síly se gyroskop opět snaží vyrovnat (postup měření podle [1]).

2.2.4. Demonstrace nutace

Roztočíme-li opět disk s přídatným závažím na hřídeli a navíc ji ještě vychýlíme ve svislém směru o určitý úhel (např. o $\pm 20^\circ$), kromě otáčení ve vodorovné rovině pozorujeme také „kývání“ ve svislém směru. Gyroskop tak opisuje prostorovou křivku.

3. Vzorové naměřené hodnoty

3.1. Hodnoty měření se soupravou Balistické kyvadlo

Nejdříve se zaměříme na měření se soupravou Balistické kyvadlo podle výše popsaného návodu. Pomocí digitálních vah nejprve zvážíme ocelový i dřevěný míček. Následně odmontujeme celou kyvadlovou tyč a tu zvážíme také a to se zachyceným dřevěným i ocelovým míčkem. Poté ještě potřebujeme změřit vzdálenost mezi osou rotace a těžištěm kyvadla opět se zachyceným míčkem. Těžiště kyvadla lze určit zavěšováním na nit.

Naměřené hmotnosti míčků jsou následující:

Tabulka č. 1: Hmotnost dřevěného míčku m [g].

č. měření	m [g]	č. měření	m [g]
1.	11,0	6.	11,0
2.	11,0	7.	11,0
3.	11,0	8.	11,0
4.	11,0	9.	11,0
5.	11,0	10.	11,0

Tabulka č. 2: Hmotnost ocelového míčku m [g].

č. měření	m [g]	č. měření	m [g]
1.	32,6	6.	32,6
2.	32,6	7.	32,6
3.	32,6	8.	32,6
4.	32,6	9.	32,6
5.	32,6	10.	32,6

Průměrné hodnoty jsou tedy následující (tabulka č. 1 a tabulka č. 2): hmotnost dřevěného míčku 11 g, hmotnost ocelového míčku je 32,6 g.

Naměřené hmotnosti kmitající části kyvadla včetně zachyceného míčku:

Tabulka č. 3: Hmotnost kmitající části kyvadla s dřevěným míčkem M [g].

č. měření	M [g]	č. měření	M [g]
1.	104,1	6.	104,0
2.	104,0	7.	104,0
3.	104,0	8.	104,0
4.	104,0	9.	104,0
5.	104,0	10.	104,0

Tabulka č. 4: Hmotnost kyvadla se zachyceným ocelovým míčkem M [g].

č. měření	M [g]	č. měření	M [g]
1.	125,6	6.	125,6
2.	125,6	7.	125,6
3.	125,6	8.	125,6
4.	125,6	9.	125,6
5.	125,6	10.	125,6

Průměrné hodnoty hmotnosti (podle tabulek č. 3 a 4) jsou: pro kyvadlo s dřevěným míčkem 104 g, kyvadlo s ocelovým míčkem 125,6 g.

Vzdálenost mezi osou rotace a těžištěm kyvadla se zachyceným míčkem

Tabulka č. 5: Vzdálenost r [cm] mezi osou rotace a těžištěm kyvadla se zachyceným dřevěným míčkem.

č. měření	r [cm]	č. měření	r [cm]
1.	14,3	6.	14,3
2.	14,3	7.	14,4
3.	14,3	8.	14,3
4.	14,3	9.	14,3
5.	14,3	10.	14,4

Průměrná hodnota je 14,3 cm.

Tabulka č. 6: Vzdálenost r [cm] mezi osou rotace a těžištěm kyvadla se zachyceným ocelovým míčkem.

č. měření	r [cm]	č. měření	r [cm]
1.	16,0	6.	16,0
2.	16,0	7.	16,0
3.	16,0	8.	15,9
4.	16,0	9.	16,0
5.	15,9	10.	16,0

Průměrná hodnota této vzdálenosti je 16 cm.

Po provedení této části měření máme vše připraveno k samotnému měření rychlostí projektilů s balistickým kyvadlem. Ještě si uveďme vzdálenost mezi osou rotace a středem zachyceného míčku r_b , jejíž velikost výrobce udává v manuálu rovnu $r_b = 0,240$ m. Při výpočtech používáme konstantu gravitačního zrychlení $g = 9,81\text{m/s}^2$.

3.1.1. Měření rychlosti vystřeleného míčku s balistickým kyvadlem – naměřené hodnoty

φ - indikovaný úhel ukazatelem měřený ve stupních

v' - počáteční rychlost měřená pomocí připojeného měřiče rychlostí (kontrolní hodnota) v jednotkách m/s

v - výsledná rychlost v m/s dopočítaná dle vztahu (18)

Měření jsem provedl s dřevěným i ocelovým míčkem pouze pro tenzi 2 a 3 počátečního napětí, protože tenze 1 udělí projektilu malou energii na to, aby byl bezpečně zachycen kyvadlem.

Tabulka č. 7: Výsledná rychlost dřevěného míčku při počáteční tenzi 2.

	φ	v'	v
1.	25	3,64	3,38
2.	25	3,6	3,38
3.	25	3,63	3,38

Tabulka č. 8: Výsledná rychlost dřevěného míčku při počáteční tenzi 3.

	φ	v'	v
1.	33	4,72	4,43
2.	32	4,69	4,30
3.	33	4,62	4,43

Tabulka č. 9: Výsledná rychlost ocelového míčku při počáteční tenzi 2.

	φ	v'	v
1.	50	3,29	3,43
2.	51	3,35	3,49
3.	53	3,37	3,62
4.	55	3,39	3,74

Tabulka č. 10: Výsledná rychlost ocelového míčku při počáteční tenzi 3.

	φ	v'	v
1.	62	4,3	4,18
2.	68	4,36	4,53
3.	69	4,46	4,59
4.	68	4,36	4,53

Porovnáním výsledných dopočítaných hodnot (tabulky č. 7, 8, 9 a 10) a naměřených hodnot připojeným měřičem rychlostí můžeme říct, že při měření s ocelovým míčkem docházíme k o něco přesnějším hodnotám než při měření s dřevěným míčkem. Je to způsobeno převážně tím, že ocelový míček je těžší a proto i výchylka kyvadla je větší a přesnější. Důsledkem tření kyvadla, odporu vzduchu a aproximací některých vzorců je celková odchylka výsledných hodnot.

3.1.2. Měření rychlosti míčku v pracovním režimu „katapult“ – naměřené hodnoty

Měřil jsem s dřevěným míčkem pro tenzi 1 a 2, kdy jsem prováděl jednotlivá měření pro vyhazovací úhly od 30° do 80° vždy s krokem po 10°. Při výstřelech 3. tenze počátečního napětí balistické jednotky může být vzdálenost dopadu míčku až 3 metry, proto jsem měření pro tuto tenzi z praktických důvodů neprováděl.

s - vzdálenost dopadu v metrech

v' - kontrolní hodnota počáteční rychlosti měřená přídavným měřičem rychlostí v jednotkách m/s

v – výsledná neznámá počáteční rychlost v metrech za sekundu dopočítaná podle vztahu (30), závisí tedy na vyhazovacím úhlu a vzdálenosti dopadu míčku

Série měření v rozsahu 30° až 70° s počáteční tenzí 1

Tabulka č. 11: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při počátečním úhlu 70° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,305	2,37	2,16
2.	0,310	2,35	2,18
3.	0,300	2,38	2,14
4.	0,310	2,38	2,18
5.	0,305	2,38	2,16
6.	0,310	2,37	2,18
7.	0,305	2,37	2,16
8.	0,300	2,37	2,14
9.	0,310	2,34	2,18
10.	0,310	2,36	2,18

Tabulka č. 12: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 60° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,540	2,37	2,47
2.	0,545	2,36	2,48
3.	0,530	2,36	2,45
4.	0,540	2,37	2,47
5.	0,535	2,36	2,46
6.	0,540	2,35	2,47
7.	0,530	2,35	2,45
8.	0,540	2,37	2,47
9.	0,535	2,36	2,46
10.	0,535	2,36	2,46

Tabulka č. 13: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 50° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,605	2,37	2,45
2.	0,590	2,36	2,42
3.	0,595	2,35	2,43
4.	0,605	2,38	2,45
5.	0,600	2,36	2,44
6.	0,605	2,38	2,45
7.	0,610	2,38	2,47
8.	0,600	2,37	2,44
9.	0,600	2,37	2,44
10.	0,595	2,36	2,43

Tabulka č. 14: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 40° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,575	2,37	2,39
2.	0,580	2,39	2,40
3.	0,585	2,40	2,41
4.	0,585	2,41	2,41
5.	0,585	2,40	2,41
6.	0,575	2,38	2,39
7.	0,585	2,40	2,41
8.	0,585	2,39	2,41
9.	0,585	2,40	2,41
10.	0,580	2,39	2,40

Tabulka č. 15: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 30° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,470	2,46	2,31
2.	0,465	2,44	2,30
3.	0,460	2,45	2,28
4.	0,455	2,43	2,27
5.	0,465	2,44	2,30
6.	0,465	2,44	2,30
7.	0,460	2,44	2,28
8.	0,470	2,45	2,31
9.	0,480	2,46	2,33
10.	0,470	2,44	2,31

Série měření v rozsahu 20° až 80° s 2. tenzí počátečního napětí

Tabulka č. 16: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 80° tenze 2.

	s	v'	v
1.	0,505	3,51	3,81
2.	0,485	3,49	3,73
3.	0,515	3,51	3,84
4.	0,505	3,48	3,81
5.	0,495	3,43	3,77
6.	0,510	3,48	3,82
7.	0,515	3,48	3,84
8.	0,490	3,32	3,75
9.	0,525	3,46	3,88
10.	0,500	3,48	3,79

Tabulka č. 17: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 70° tenze 2.

	s	v'	v
1.	0,935	3,48	3,78
2.	0,925	3,49	3,76
3.	0,930	3,48	3,77
4.	0,930	3,48	3,77
5.	0,930	3,48	3,77
6.	0,935	3,48	3,78
7.	0,925	3,48	3,76
8.	0,925	3,49	3,76
9.	0,930	3,50	3,77
10.	0,930	3,49	3,77

Tabulka č. 18: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 60° tenze 2.

	s	v'	v
1.	1,220	3,48	3,72
2.	1,225	3,48	3,73
3.	1,215	3,48	3,71
4.	1,215	3,49	3,71
5.	1,225	3,50	3,73
6.	1,215	3,50	3,71
7.	1,210	3,49	3,70
8.	1,180	3,45	3,66
9.	1,220	3,49	3,72
10.	1,215	3,49	3,71

Tabulka č. 19: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 50° tenze 2.

	s	v'	v
1.	1,340	3,50	3,65
2.	1,350	3,52	3,67
3.	1,340	3,49	3,65
4.	1,340	3,49	3,65
5.	1,340	3,50	3,65
6.	1,330	3,48	3,64
7.	1,340	3,50	3,65
8.	1,340	3,48	3,65
9.	1,350	3,51	3,67
10.	1,350	3,50	3,67

Tabulka č. 20: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 40° tenze 2.

	s	v'	v
1.	1,320	3,52	3,63
2.	1,320	3,52	3,63
3.	1,320	3,51	3,63
4.	1,310	3,51	3,61
5.	1,320	3,52	3,63
6.	1,320	3,52	3,63
7.	1,315	3,52	3,62
8.	1,310	3,51	3,61
9.	1,310	3,51	3,61
10.	1,300	3,49	3,60

Tabulka č. 21: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 30° tenze 2.

	s	v'	v
1.	1,220	3,51	3,72
2.	1,225	3,49	3,73
3.	1,230	3,50	3,73
4.	1,235	3,50	3,74
5.	1,235	3,51	3,74
6.	1,230	3,50	3,73
7.	1,230	3,51	3,73
8.	1,230	3,51	3,73
9.	1,235	3,52	3,74
10.	1,235	3,52	3,74

Tabulka č. 22: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 20° tenze 2.

	s	v'	v
1.	0,720	3,58	3,31
2.	0,740	3,59	3,36
3.	0,740	3,59	3,36
4.	0,730	3,62	3,34
5.	0,700	3,58	3,27
6.	0,720	3,61	3,31
7.	0,680	3,57	3,22
8.	0,700	3,60	3,27
9.	0,670	3,58	3,20
10.	0,680	3,58	3,22

Měření rychlostí pro největší vzdálenost dopadu

Tabulka č. 23: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 45° tenze 1.

	s	v'	v
1.	0,605	2,39	2,44
2.	0,595	2,36	2,42
3.	0,605	2,39	2,44
4.	0,610	2,39	2,45
5.	0,605	2,38	2,44
6.	0,610	2,39	2,45
7.	0,605	2,38	2,44
8.	0,605	2,38	2,44
9.	0,605	2,38	2,44
10.	0,610	2,38	2,45

Tabulka č. 24: Rychlost míčku naměřená v režimu „katapult“ při vyhazovacím úhlu 45° tenze 2.

	s	v'	v
1.	1,350	3,51	3,64
2.	1,360	3,51	3,65
3.	1,355	3,50	3,65
4.	1,350	3,51	3,64
5.	1,345	3,50	3,63
6.	1,340	3,48	3,63
7.	1,350	3,50	3,64
8.	1,350	3,51	3,64
9.	1,360	3,50	3,65
10.	1,360	3,51	3,65

Zhodnocením dosažených výsledků (tabulka č. 11 až tabulka č. 24) mohu říci, že tato metoda měření je velmi přesná pro vyhazovací úhly v intervalu mezi 40° a 50°. Vůbec nejpřesnější hodnoty vychází pro úhly 40°, 45° a 50° při 1. počáteční vyhazovací tenzi. Čím víc se tedy vyhazovací úhel blíží k 80° (respektive 20°), tím víc se naměřené výsledky odlišují od skutečných hodnot. Dalším faktorem je také vzdálenost dopadu, která je při 2. tenzi více než dvojnásobná ve srovnání s 1. tenzí. Proto také hodnoty měřené při druhé tenzi nedosahují takové přesnosti jako příslušné hodnoty první tenze.

3.2. Hodnoty měření se soupravou Třísosý gyroskop

Nejprve podle výše popsaného postupu určíme moment setrvačnosti disku. V další části měření budeme studovat vlastnosti precese a nutace gyroskopu.

3.2.1. Určení momentu setrvačnosti I_p gyroskopického disku

Z určité výšky h pustíme urychlovací závaží na provázku, které bude roztáčet upevněný gyroskop po dobu t vteřin (sestavení soupravy podle Obr. 3). Pro různé výšky h v cm jsem dopočítal následující hodnoty I_p v jednotkách $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ podle rovnice (36).

Tabulka č. 25: Moment setrvačnosti I_p gyroskopického disku při urychlovacím závaží 50 g.

h	t	I_p
80	7,44	$8,57 \cdot 10^{-3}$
60	6,63	$9,07 \cdot 10^{-3}$
50	6,03	$9,00 \cdot 10^{-3}$
40	5,3	$8,69 \cdot 10^{-3}$

Tabulka č. 26: Moment setrvačnosti I_p gyroskopického disku při urychlovacím závaží 100 g.

h	t	I_p
80	5,6	$9,68 \cdot 10^{-3}$
60	4,75	$9,29 \cdot 10^{-3}$
50	4,28	$9,05 \cdot 10^{-3}$
40	3,82	$9,01 \cdot 10^{-3}$

Z výsledků tabulek č. 25 a 26 vychází celková průměrná hodnota momentu setrvačnosti $9,04 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, která se téměř neliší od hodnoty, kterou udává výrobce. Pro 100g závaží jsou hodnoty o trochu větší. Je to způsobené právě tím, že zavěšujeme těžší závaží.

3.2.2. Závislost rotační frekvence na době precesního otáčení

Při tomto měření vždy roztočíme volný gyroskop, který je vyvážen protizávažím, a po zavěšení přídatného závaží měříme délku precesního otáčení t v závislosti na rotační frekvenci f gyroskopu. V tabulkách používám následující veličiny.

t ...doba trvání jednoho precesního otočení v sekundách

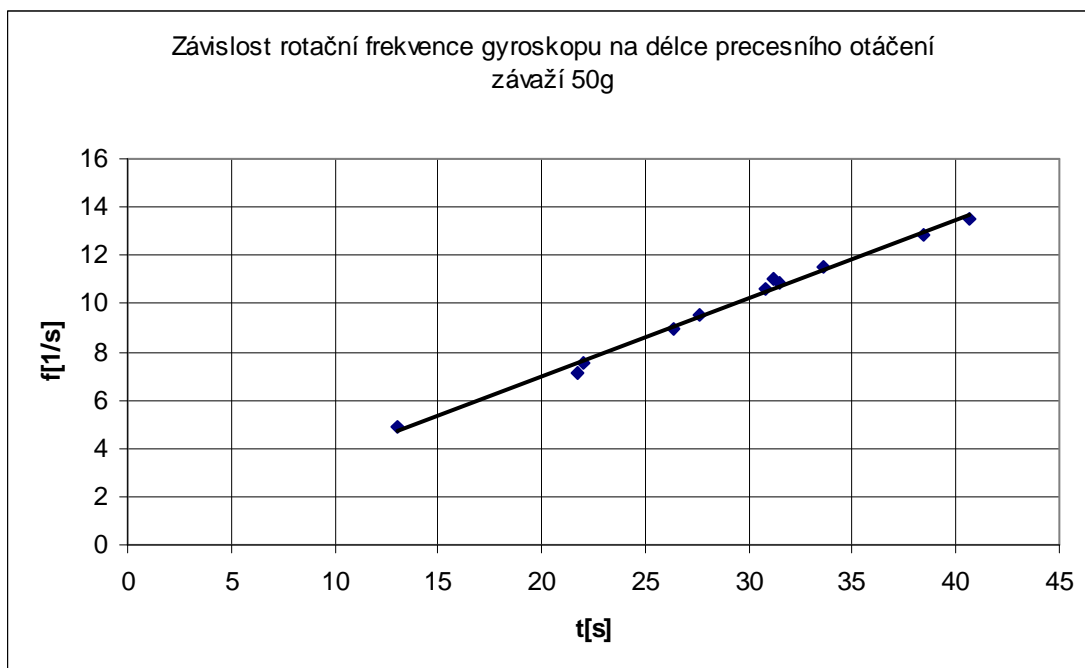
T ...průměrná hodnota periody na začátku a po skončení precesního otáčení [s]

f ...rotační frekvence gyroskopu v s^{-1} [Hz]

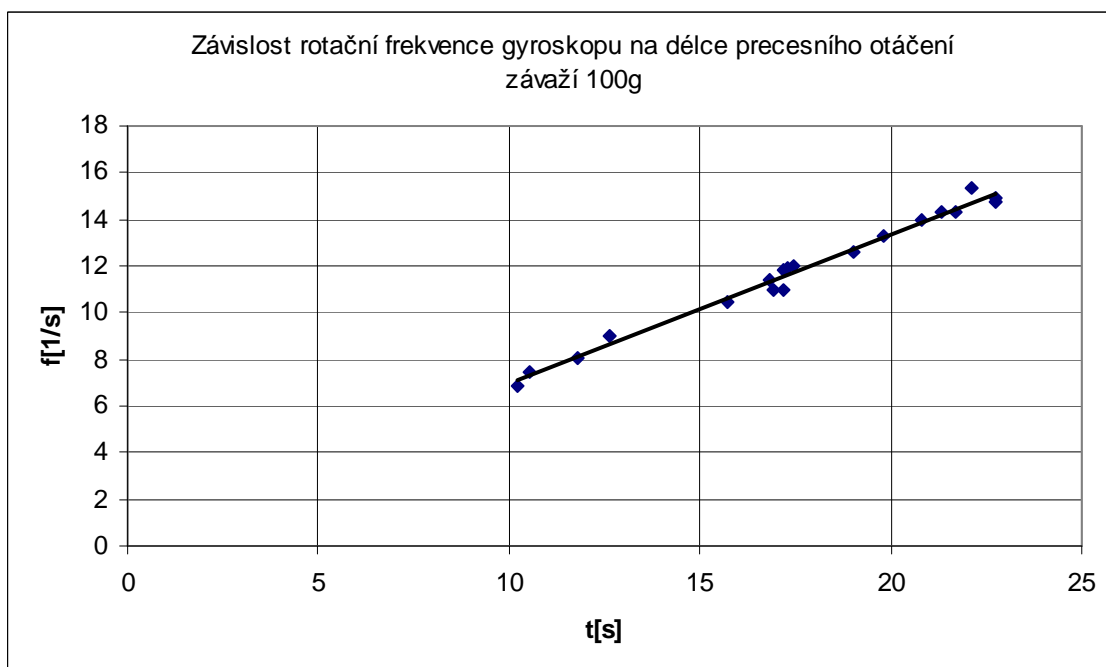
Tabulka č. 27: Závislost rotační frekvence gyroskopického disku na délce trvání precesního otáčení s přídatným závažím 50 g.

	T	f	t
1.	0,20	4,89	13,04
2.	0,09	10,64	30,76
3.	0,14	7,17	21,72
4.	0,09	11,05	31,20
5.	0,13	7,58	22,00
6.	0,11	9,52	27,60
7.	0,09	11,56	33,60
8.	0,11	8,93	26,40
9.	0,08	12,82	38,44
10.	0,07	13,51	40,64
11.	0,09	10,87	31,50

Graf č. 1: Závislost rotační frekvence gyroskopu na délce precesního otáčení se závažím 50 g.



Graf č. 2: Závislost rotační frekvence gyroskopu na délce precesního otáčení se závažím 100 g.



Tabulka č. 28: Závislost rotační frekvence gyroskopického disku na délce trvání precesního otáčení s přídatným závažím 100 g.

	T	f	t
1.	0,08	11,83	17,20
2.	0,12	8,03	11,80
3.	0,09	10,99	17,20
4.	0,08	11,90	17,32
5.	0,11	9,01	12,64
6.	0,08	12,58	19,00
7.	0,15	6,87	10,20
8.	0,10	10,47	15,74
9.	0,13	7,46	10,56
10.	0,07	14,29	21,70
11.	0,09	10,93	16,94
12.	0,08	13,25	19,82
13.	0,07	14,29	21,32
14.	0,07	14,71	22,74
15.	0,07	14,93	22,76
16.	0,09	11,43	16,82
17.	0,07	15,38	22,12
18.	0,08	11,98	17,44
19.	0,07	13,99	20,80

Oba výše uvedené grafy (viz graf č. 1 a graf č. 2) ukazují závislost frekvence rotujícího gyroskopu na době, po kterou koná gyroskop precesní otáčení ve snaze vyrovnat silový impuls, který jsem způsobil zavěšením závaží do drážky na ose gyroskopu. Nejdříve jsem zavěšoval 50 g závaží a následně 100 g závaží. Tato závislost je téměř lineární, což ukazuje přímka proložená body grafu. Při zavěšení lehčího 50 g závaží není silový impuls tak výrazný a proto je precesní otáčení pomalejší, doba jednoho oběhu je i dvojnásobná než při stejné rotační frekvenci se závažím 100 g. Zdvojnásobení závaží má za následek zrychlení precesního otáčení a tedy zkrácení délky precesního otáčení.

Závěr

Balistické kyvadlo již není často frekventovaným pojmem, bylo nahrazeno modernějšími a přesnějšími měřicími metodami. Ovšem měření s touto soupravou není příliš náročné a člověk si může prakticky vyzkoušet jeho princip. Samotné měření je ale pro jednotlivce náročné a zdouhavé, proto je dobré mít při sobě šikovného pomocníka.

Gyroskop má i v dnešní době široké uplatnění. Už jenom množství populárních hraček využívajících chování setrvačnicku to potvrzuje. Při práci s naší soupravou si můžeme snadno demonstrovat mnohdy „podivné chování“ roztočeného gyroskopu.

Hlavním cílem této práce bylo vytvořit návod pro měřicí soupravy Balistické kyvadlo a Třísý gyroskop pro učební předmět Fyzikální praktikum z mechaniky. Příslušný manuál k této soupravě byl v angličtině, obsahoval mnoho přebytečných technických údajů, návod byl heslovitý a nebyl vždy zcela srozumitelný, proto už samotné sestavení soupravy a její uvedení do provozu bylo obtížné. Podobně bylo náročné odvodit užité vzorce a sestavit postup pro měření. Pro porozumění bylo důležité nastudovat prostřednictvím fyzikální literatury teorii k oběma soupravám.

Vzorové výsledky měření pokládám za zdařilé. Výsledné hodnoty se příliš neliší od předpokládaných (kontrolních) hodnot.

Seznam použité literatury

1. *Laboratory experiments*, Phywe 2004.
2. HÁJEK, J.: *Balistické kyvadlo. Rozhledy matematicko-fyzikální*. 1994- , č. 4- . Praha : Jednota českých matematiků a fyziků. . s. 179-180. ISSN 0035-9343.
3. HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky: část 1. Mechanika*. 1. vyd. Praha : Prometheus, 2000. 356 s. ISBN 8171962139.
4. KRUPKA, František, KALIVODA, Lubomír. *Fyzika*. Praha : SNTL, 1989. 670 s. ISBN 80-03-00166-8.
5. KVASNICA, Jozef, et al. *Mechanika*. 1. vyd. Academia Praha : československá akademie věd, 1988. 480 s.
6. BAJER, Jiří. *Mechanika 2*. 1. vyd. Olomouc : UP Olomouc, 2004. 458 s. ISBN 80-244-0884-8.
7. PRZYBILLA, Kurt. *Teaching science with a Gyroscope*. NTSA konference Anaheim. CA, USA April 2006 (Duncan Toys).
8. FRIŠ, Sergej Eduardovič, TIMOREVOVÁ, A.V. *Kurs fyziky I.*. 2. vyd. Praha : československá akademie věd, 1962. 408 s.

Seznam použitých www zdrojů

9. TURNER, Glenn. *Gyroscopes : Maths* [online]. 2009 , [cit. 2009-04-19]. Anglický. Dostupný z WWW: <<http://www.gyroscopes.org>>.
10. *IntegerSpin : The Precession and Nutation of a Gyroscope* [online]. 2000 , last modified 8th may 2002 [cit. 2009-04-19]. Dostupný z WWW: <<http://www.integerspin.co.uk/gyro1.htm>>.
11. *Balistické kyvadlo : Wikipedie, otevřená encyklopedie* [online]. 2008 [cit. 2009-04-24]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Balistické_kyvadlo>.
12. *Mechanika tuhého tělesa* [online]. 2005 [cit. 2009-04-02]. Dostupný z WWW: <artemis.osu.cz:8080/artemis/uploaded/119_Mechp%2004.doc>.
13. HRNČÍŘ, Jan, KLEJCH, Martin. *Gravitační pole : Šikmý vrh vzhůru* [online]. 2005 [cit. 2009-02-24]. Obrázek převzat ze s.8. Dostupný z WWW: <web.gfxs.cz/gpole/download.php?id=5&lg=1>.

Soupis bibliografických citací

6. BAJER, Jiří. *Mechanika 2*, VUP Olomouc, 2004. 1.vyd. ISBN 80-244-0884-8. s. 108.
4. KRUPKA, František., KALIVODA, Lubomír. *Fyzika*, SNTL, Praha 1989. s. 131.
12. *Mechanika tuhého tělesa* [online]. 2005 [cit. 2009-04-02]. Dostupný z:
<artemis.osu.cz:8080/artemis/uploaded/119_Mechp%2004.doc>.s. 46.

Seznam příloh

1. Příloha č. 1: Souprava Balistické kyvadlo od firmy Phywe.
2. Příloha č. 2: Souprava sestavená v režimu „katapult“.
3. Příloha č. 3: Souprava Tříosý gyroskop.
4. Příloha č. 4: Sylabus úlohy Balistické kyvadlo.
5. Příloha č. 5: Sylabus úlohy Tříosý gyroskop.

Příloha č. 1: Souprava Balistické kyvadlo od firmy Phywe



Příloha č. 2: Souprava sestavená v režimu „katapult“



Příloha č. 3: Souprava Tříosý gyroskop



Příloha č. 4: Syllabus úlohy Balistické kyvadlo.

Úloha Balistické kyvadlo

Souprava Balistické kyvadlo od firmy Phywe se skládá ze základního plátu, balistické jednotky vystřelující projektil, kterým je buď dřevěný nebo ocelový míček, dále z balistického kyvadla s ukazatelem výchylky a z úhlové stupnice pro odečtení výchylky. Soupravu lze přestavět do režimu „katapult“, ve kterém lze měřit vrhací rozsah balistické jednotky.

Úkolem je změřit rychlost projektilu, s balistickým kyvadlem. Využitím zákonů zachování hybnosti a energie můžeme snadno z velikosti výchylky kyvadla tuto rychlost určit. Druhým úkolem bude opět změřit rychlost míčku v pracovním režimu „katapult“. Ta je závislá na vyhazovacím úhlu a vzdálenosti dopadu.

Nabíjení a natahování balistické jednotky

Před natahováním balistické jednotky, upevníme ocelový míček na svislý magnet na balistické jednotce. Míček musí být umístěn na střed pístu tak, aby byl chycen prstencovým magnetem balistické jednotky. Pokud používáme dřevěný míček jako projektil, vložíme ho ocelovou stranou na prstencový magnet. Pak uvolníte západku nahoru a zatáhnete páčku zpět do 2. nebo 3. zapadací pozice (první pozice není všeobecně vhodná, protože udělená energie je k bezpečnému zachycení kyvadlem moc malá).

Postup měření rychlosti vystřeleného míčku

Pro měření rychlostí s balistickým kyvadlem by mělo být zařízení přichyceno pevně ke stolu a správně sestaveno. Po nabití vystřelíme míček, který je zachycen kyvadlem. Výchylka kmitu kyvadla lze odečíst z maximální výchylky ukazatele. Je potřeba, aby další střílení do klidového kyvadla probíhalo se stejným počátečním napětím bez vynulování ručičky ukazatele maximální výchylky. Když se ručička dále vůbec nepohne, můžeme předpokládat, že indikovaný úhel není zkreslený. V opačném případě jsou nutné další střely.

K vyhodnocení potřebujeme znát hmotnost míčku (projektilu) m a hmotnost kyvadla M . Ty zvážíme na digitálních vahách. Nejprve tedy odmontujeme celou kyvadlovou tyč a zvážíme její hmotnost M . Následně určíme těžiště kyvadla včetně zachyceného míčku postupným zavěšováním na provázek. Vzdálenost mezi tímto závěsovým bodem a osou nosného vývrtu je r . Vzdálenost mezi osou rotace a středem zachyceného míčku je $r_b = 0,240$ m.

Z indikovaných úhlů φ můžeme dopočítat rychlost míče v podle rovnice

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \frac{r}{r_b} \cdot \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \varphi)}$$

kde g je konstanta gravitačního zrychlení.

Periodu kmitu T dopočítáme podle vzorce

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r_m}{g}}$$

kde r_m je délka matematického kyvadla.

Provedeme jednu sérii měření pro ocelový míček a poté další sérii s dřevěným míčkem, kde můžeme pozorovat vliv hmotnosti vystřeleného projektilu na odchylku balistického kyvadla a ve výsledku tedy i na rychlost míčku. V každé sérii provedeme měření pro tenze 2 a 3. Před balistickou jednotku lze připevnit kontrolní měřič rychlosti, díky kterému můžeme porovnávat dosažené výsledky se skutečnými rychlostmi, které jsme tímto měřičem naměřili.

Přestavba do režimu „katapult“

Nejdříve odšroubujeme balistickou jednotku ze základní desky. Dále pak také odstraníme celé kyvadlo, které lze po odmontování přišroubovat z druhé strany základní desky do příslušných děr u okraje plátu. Po odstranění kyvadla jsou vidět dvě díry na úhlové stupnici, které byly doposud zakryté kyvadlovou tyčí. Dvěma šrouby přišroubujeme balistickou jednotku do těchto děr. Otvor balistické jednotky musí směřovat vzhůru. Uvolněním prostředního šroubu lze vyhazovací úhel měnit od 0° do 90° . Vystřelený míček může dopadnout až 3 metry daleko. Při měření využíváme pohybových rovnic šikmého vrhu, proto je důležité, aby startovní bod a cílová rovina byly ve stejné výšce.

Postup měření rychlosti míčku v režimu „katapult“

Nabíjení a natahování balistické jednotky je popsáno výše. Střely spouštíme rychle. Pro vyhodnocení měření vycházíme z rovnice

$$v_0 = \sqrt{\frac{s \cdot g}{\sin 2\alpha}}$$

Pokud nastavíme vyhazovací úhel $\alpha = 45^\circ$ pro největší vzdálenost dopadu, lze počáteční rychlost vypočítat jednoduše $v_0 = \sqrt{s \cdot g}$.

Pro jednotlivé vyhazovací úhly naměříme vzdálenost dopadu a odtud můžeme dopočítat počáteční rychlost v_0 . Měření opakujeme pro vybrané úhly vždy po 10 opakování. Pro vystřelovací tenzi 1 je nejlepší volit úhly v rozmezí mezi 30° a 70° . Tenze 2 je vhodná pro úhly v rozmezí 10° až 80° . Naměřené výsledky opět porovnáme s hodnotami získanými připojeným měřičem rychlosti.

Příloha č. 5: Syllabus úlohy Třiosý gyroskop.

Úloha Třiosý gyroskop

Gyroskop od firmy Phywe je upevněn na hřídeli a vyvážen protizávažím. Hlavní osa, kolem které rotuje disk s kuličkovými ložisky, se může otáčet ve směru vertikální i horizontální osy. Součástí soupravy je provázek pro roztáčení gyroskopu, čítač pro měření frekvence otáčení gyroskopického disku a druhý rezervní disk.

Úkolem je nejdříve určit moment setrvačnosti disku. Dalším úkolem je studovat precesní pohyby gyroskopu a vytvoření grafu závislosti rotační frekvence gyroskopického disku na délce precesního otáčení. Nakonec demonstrujeme nutaci a taky jev, kdy při použití obou disků tyto gyroskopické jevy vymizí.

Postup měření momentu setrvačnosti gyroskopického disku

Gyroskop umístíme s upevněnou horizontální osou (pomocí přídavné opěrné tyče) na experimentální stůl takovým způsobem, že disk spolu s namotaným roztáčecím provázkem přesahuje hranu stolu. Provázek navineme na roztáčecí část gyroskopického disku a urychlovací závaží připevníme na volný konec provázku. Z výšky h pustíme připevněné závaží a měříme stopkami dobu pádu t_p od okamžiku spuštění do té doby, dokud se závaží nedotkne podlahy. Výsledný moment setrvačnosti I_p vypočítáme podle vztahu

$$I_p = \frac{t_p^2 \cdot m \cdot g \cdot r^2}{2 \cdot h} - m \cdot r^2,$$

kde m je hmotnost urychlovacího závaží, $r = 22,4$ mm je poloměr navíjecího kotouče, na kterém je navinutý provázek s urychlovacím závažím a g je gravitační zrychlení. Měření opakujeme pro různé výšky pádu s urychlovacím závažím 50 g a 100 g. Průměrnou hodnotu porovnáme s výsledkem, který uvádí výrobce

$$I_p = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Postup měření závislosti rotační frekvence disku na délce trvání precesního otáčení

Nejdříve roztočíme volný vyvážený gyroskopický disk tím způsobem, že namotáme provázek na navíjecí kotouč na disku a táhnutím za provázek uvedeme gyroskop do chodu. Je důležité, aby frekvence otáčení byla větší než 10/s. Měření rotační frekvence provádíme následovně. Rotační frekvenci gyroskopického disku určuje světelný čítač, pro přerušení světelné dráhy čítače připojte na okraj disku úzký pásek papíru (nebo např. proužek lepicí pásky). Měření periody jednoho oběhu disku provádíme v sekundách stlačením tlačítka reset na světelném čítači a přisuneme čítač k disku do takové blízkosti, aby úzký pásek papíru přerušil dráhu světelného čítače. Pracovní program čítače nastavíme tak, aby první přerušení světelné dráhy startovalo počítání a další ho zastavilo. Tímto způsobem tedy změříme rotační frekvenci ω_R , která je rovna převrácené hodnotě změřené periody.

Ihned poté zavěsíme závaží 50g do drážky na konci gyroskopické osy naproti disku (vzdálenost od středového bodu gyroskopické osy je 270 mm). Roztočený gyroskop začne konat precesní otáčení. Změříme délku trvání poloviny precesního oběhu $t_p/2$. Polovinu zde měříme z praktických důvodů, po vykonání celého precesního otočení totiž klesne frekvence na nízkou hodnotu a tím klesne i potřebná průměrná hodnota. Sundáme závaží, aby se gyroskopická osa dostala do klidové polohy, a ihned měříme rotační frekvenci. Zaznamenané průměr takto změřených rotačních frekvencí před a po skončení precese a sestavíme graf závislosti průměrné rotační frekvence na době trvání precesního otáčení. Nezapomeňme na to, že jsme naměřili polovinu doby precesního oběhu!

Stejným způsobem zaznamenejme zbylé měřené body pro odlišnou rotační frekvenci gyroskopu. Tuto frekvenci ovlivníme tím, jak silně roztočíme gyroskop. Po dokončení této série měření zaznamenané další sérii měření stejným způsobem s přídatným závažím 100 g. Pokud zavěsíme přídatné závaží do přední drážky na osu setrvačnicku nebo pokud roztočíme gyroskopický disk obráceně, bude také směr precesního otáčení opačný.

Postup při demonstraci nutace

Roztočíme-li opět disk s přídatným závažím na hřídeli a navíc ji ještě vychýlíme ve svislém směru o určitý úhel (např. o $\pm 20^\circ$), kromě precesního otáčení ve vodorovné rovině pozorujeme také „kývání“ ve svislém směru. Gyroskop tak opisuje prostorovou křivku.

Další vlastností precese je i to, že pokud zabráníme gyroskopu v otáčivém pohybu, disk jakoby „spadne“ (sklopí se dolů). Naopak pokud gyroskopickou osu posuneme ve směru otáčení precese, disk „stoupne vzhůru“. Po připojení druhého gyroskopického disku na osu vedle prvního disku můžeme oba disky roztočit v opačných směrech stejnou rychlostí rotace a důsledkem toho výše popsané gyroskopické jevy zmizí.