Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

Diplomová práce

Vizualizace matematických problémů a jejich důkazů

Vypracovala: Klára Podaná

Vedoucí diplomové práce:

prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

ČESKÉ BUDĚJOVICE 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Vizualizace matematických problémů a jejich důkazů jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Poděkování

Poděkovat bych chtěla vedoucímu své diplomové práce, prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za ochotu, trpělivost, moudré rady a čas, který mi věnoval. Děkuji.

Anotace

Ve své diplomové práci se zabývám vizualizací matematických problémů pomocí obrázků. V první, teoretické, části uvádím pedagogicko-psychologický pohled na vizualizace. Základní rozdělení obrazového materiálu, jeho výhody a nevýhody. Následující, hlavní, část práce věnuji samotným problémům a jejich důkazům. Ty dělím do tří základních kategorií: důkazy z oblasti geometrie a algebry, důkazy nerovnosti aritmetického a geometrického průměru a důkazy, které se věnují řadám celých čísel. Poslední kapitola obsahuje vytvořené pracovní listy pro studenty základních škol.

Abstract

This thesis is focused on visualisation of mathematical issues using pictures. The first theoretical part is focused on pedagogical-psychological view on visualisation. Basic division of picture material and its pros and cons. Next part, main part, is focused on specific mathematical issues and their proofs. Issues could be divided into three categories: geometric and algebraic proofs, arithmetic and geometric inequalities and proofs which are focused on sequences of integer numbers. The last part contains working sheets for elementary school students.

Někteří matematici, snad 10 ze 100, myslí ve vzorcích. Taková je jejich intuice. Zbývající myslí v obrazech, jejich intuice je geometrická. Obrazy přenášejí mnohem více informací než slova. Po mnoho let jsme odvykali žáky používat obrázky, protože „nejsou přesné“. To je smutné nedorozumění. Ovšem, obrázky nejsou přesné, ale pomáhají myslet, a takovouto pomocí nelze opovrhovat. (I. Stewart)

Obsah

1 Úvod

Tato diplomová práce se zabývá vizuálními důkazy, nebo-li důkazy beze slov. Důkaz je tedy netradičně představen pouze obrázkem a je jen na čtenáři, jak k důkazu přistoupí a zda jeho krásu objeví. K tvorbě těchto vizualizací jsem využila software GeoGebra.

Matematické důkazy jsou od nepaměti s matematikou úzce spjaty. Matematici mnohdy zasvětí celý svůj život dokazováním některého tvrzení. Někdy je potřeba i několik století k tomu, aby se daná věta dokázala či se ji povedlo vyvrátit. Příkladem mohou být tzv. proslulé úlohy starověku, které se po několik staletí lidstvo snažilo eukleidovsky vyřešit. Dnes víme, že úlohy jsou eukleidovsky neřešitelné, ale i přes to se o jejich vyřešení stále několik zapálených vědců snaží [7].

Vizualizace v historii hrála významnou roli. Díky figurálním číslům, spojením geometrie, aritmetiky a vizualizace, dokázali pythagorejci odvodit například vztah pro součet prvních n lichých čísel či vzorec pro součet aritmetické posloupnosti. Uspořádání objektů do určitého systému a zároveň jejich názornost odjakživa podporovalo rychlejší rozvoj matematiky.

V rámci studia jsem se na každém stupni měla možnost setkat s mnoha důkazy. Počínaje Pythagorovou větou na základní škole, posloupnostmi na škole střední či důkazy týkající se nerovnosti aritmetického a geometrického průměru na škole vysoké. Většina z důkazů bohužel jakoukoliv vizualizaci postrádala a tak u mě pochopení důkazu bylo často pouze formální. Ve chvíli, kdy pedagog vizualizaci (praktickou ukázku) zapojí do výuky, hodina se stává atraktivnější a látka se žákům lépe pamatuje. Právě z důvodu přesahu do budoucí praxe jsem si dané téma vybrala. Věřím, že mnohé z uvedených důkazů budu moci jednou ve školství použít a pomoci tak žákům látku a potažmo celou matematiku lépe pochopit.

První kapitola je věnována teoretickým východiskům. Naleznete zde, jaké funkce může obrazový materiál ve výuce plnit. Jaké jsou pozitivní a negativní stránky využití vizualizací ve výuce a jak je možné postupovat v případě, že chceme, aby si student obrázek vytvořil sám.

Další kapitola je věnována důkazům z oblasti geometrie a algebry. Uvedeno je zde několik vizualizací Pythagorovy věty, Vivianiho věta či algebraické úlohy řešené graficky. Následující kapitola představuje nerovnosti aritmetického a geometrického průměru. Čtvrtá kapitola obsáhla téma řady celých čísel. Naleznete zde na příklad součet nekonečně mnoha lichých čísel, odvození vzorce pro aritmetickou posloupnost a nekonečné řady. Poslední část práce obsahuje vytvořené pracovní listy pro studenty základních škol.

2 Důkazy beze slov

Pomocí geometrického obrázku, lze jednoduchým způsobem vyjádřit podstatu matematického důkazu. Při klasickém pojetí je důkaz popsán v několika fázích. Vizuální důkaz je „nakresleným příběhem“. Vše vidíme v jednom okamžiku, což však může stěžovat pochopení, neboť není známá posloupnost jednotlivých kroků [5].

Využívání obrázků k důkazům, či rýsování obrazců k výpočtům rovnic se využívalo již ve starém Řecku. Například symbolicky zapsaná rovnice ve tvaru $ab = cx$, byla chápána jako rovnost dvou obsahů. Obsah prvního známého obdélníku byl $S_1 = ab$ a zjišťoval se obsah druhého obdélníku, jehož jedna strana měla délku rovnou c [7].

Pythagorejci pracovali s figurálními čísly, která znázorňovali pomocí kamének. Jednalo se o čísla uspořádaná do geometrických obrazců. Konkrétně rozlišovali čísla: trojúhelníková, čtvercová, pětiúhelníková a obdélníková. Díky trojúhelníkovým číslům dokázali odvodit vzorec pro aritmetickou posloupnost. Na čtvercových číslech ukázali, že pro dvě po sobě jdoucí lichá čísla platí, že jsou dělitelná číslem 4. A všechna čtvercová čísla mají zbytek po dělení čtyřmi 1 nebo 0 [7].

Využívání obrázků k objevu nových faktů či k lepšímu pochopení již známých je velice efektivní. Obrázek by neměl být vnímán pouze jako grafický záznam toho, co bylo řečeno. Slovní vyjádření jsou totiž na rozdíl od obrázkového „lineární“. Informace jsou čtenáři podány v posloupnosti, na základě toho, jak prochází text. Obrázky, čili grafické vyjádření problému, působí více „komplexně“, díky zachycení celé situace. Často též ukazují doposud neznámé vztahy mezi objekty. Vnímání situace jako celku je klíčové pro pochopení a vyřešení geometrických vizualizací [6].

2.1 Učení z vizualizací

V knize Pedagogická psychologie autor věnuje celou kapitolu právě učení se z obrazového materiálu. Na její teoretická východiska se nyní zaměříme [9].

Z hlediska vývoje a vývojové psychologie se člověk s obrazovým materiálem setkává již od raného dětství. V předškolním věku je pro dítě přirozené, vnímat verbální a nonverbální podněty současně. Svět takového dítěte je založen především na vnímání obrazu svého okolí. To se mění s nástupem do školy. Verbální a nonverbální složky se od sebe postupně oddělují a důraz je kladen na schopnost poslouchat výklad, psát a číst. Pedagogové však zapomínají ještě na jednu důležitou složku, kterou je obrázek. Na školách se neučí jakým způsobem číst a učit se z obrazů, grafů atd. Neschopnost správně interpretovat grafy, které se stále více používají (např. ve veřejných médiích), však není otázkou pouze dětí, ale celé populace. Vizuální gramotnost, která je definována jako: *„schopnost číst obrazy a používat je, myslet a učit se v termínech obrazů“*, ustoupila do pozadí, většina vizualizací plní pouze názornou funkci.

Obrazový materiál lze podle jeho pedagogické funkce rozdělit do čtyř základních kategorií:

- reprezentující (konkretizuje výklad)
- organizující (vytváří strukturu)
- interpretující (pomáhá k pochopení textu)
- transformující (pomáhá k lepšímu zapamatování)

Reprezentující funkci mají vizualizace, které žákovi pomáhají konkretizovat jeho představu. Zobrazují vzájemné vztahy mezi objekty. V matematice mezi takové prvky patří například grafy či obrázky geometrických těles.

Posláním interpretující funkce je pomoci žákům pochopit nově zavedené učivo. Vizualizace jsou důležité především u abstraktních pojmů, nebo u systémů, které jsou příliš velké (např. sluneční soustava či globální cirkulace atmosféry) nebo naopak příliš malé (např. atom či mikroorganismy). Díky pochopení problematiky jsou pak studenti schopni s vědomostí lépe pracovat, využívají ji při řešení nestandardních úloh a znalost si déle pamatují.

Transformující funkce se snaží ovlivnit to, jakým způsobem se žák učí a jak vnímané informace zpracovává. Obrázek by měl podněcovat k lepšímu pochopení poznatků při osvojování učiva tak, aby se stalo co nejkonkrétnějším. Nově zavedený pojem by měl zapadnout mezi již osvojené znalosti a vést žáka k dobrému vybavování si informací z paměti. Příkladem takového obrázku může být grafické zpracování algebraického vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, viz obrázek 26.

Též se ukazuje, že je dobré výkladový text i obrazové materiály interpretovat najednou. Informace by se měly vzájemně doplňovat a pomáhat tak k pochopení. Je dokázáno, že oddělené učení naopak výsledky zhoršuje. Nelze opomenout ani aktivní účast žáků v celém procesu, případně jejich vlastní vytváření obrazového materiálu.

Obrazový materiál vytvořený žáky

Jedná se o situaci, při které mají sami žáci možnost podílet se na vzniku obrázku. Nejsou tedy již pouhými konzumenty, ale stávají se autory a je na nich jak bude výsledný obrazový materiál vypadat.

Žákem vytvořený obrázek (angl. learner-generated drawing) vzniká tím způsobem, že žák pročítá či poslouchá text a snaží se ho graficky znázornit. Výsledkem je náčrtek dané situace z pohledu žáka. Nehodnotí se grafické zpracování, ale věcná správnost. Z pohledu pedagoga se z takto vytvořeného obrázku dá zjistit mnoho podstatných informací. Vidíme, do jaké míry žák učivu porozuměl, jakým způsobem o textu přemýšlí, co považuje za podstatné a v jaké oblasti je jeho pochopení látky nedostatečné.

Negativní dopady

Vizualizace má však i své negativní stránky. Ne všichni jsou stejně vizuálně gramotní a pro některé žáky mohou být obrázky velkým problémem. Zdají se jim nepřehledné. Neumějí určit, na co zaměřit svou pozornost a jak obrázek rozklíčovat. Důraz, který je kladen na názornost, může také zpomalovat rozvoj abstraktního myšlení. Obrazový materiál zároveň může odvádět pozornost žáků od verbálního sdělení.

Zásadní též je, aby obrázek byl vždy precizně zpracován. Jinak může dojít k chybnému pochopení a žáci si učivo špatně zapamatují.

3 Geometrie a algebra

3.1 Pythagorova věta

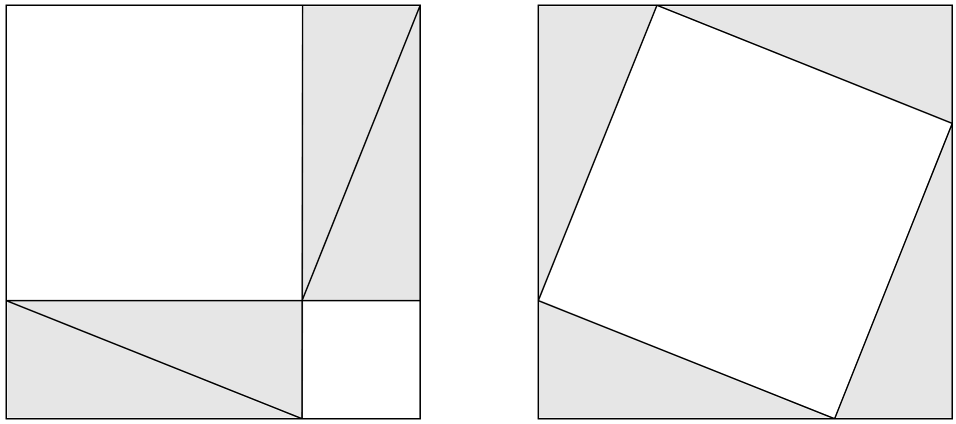
Pythagoras ze Sámu byl významný řecký filosof, matematik a astronom, žijící asi v letech 570-510 př. n. l. V mládí údajně hodně cestoval a díky tomu měl možnost seznámit se s různými náboženstvími a kulturami. Za vlády krále Polykratése z Řecka uprchl do Itálie, kde založil filosofickou školu. Ta byla vnímána spíše jako politická strana a sekta, lidé zde žili podle přísných pravidel a dosáhli značného politického vlivu. Pythagorejci se zajímali především o čísla a jejich mystiku.

S Pythagorem se pojí na příklad zavedení slova filosofie, které vychází ze složení dvou slov a to filein- milovat a sofos- moudrý. Díky zájmu o vesmír je mu připisováno také první použití slova kosmos, což znamená zdobit. Dále se svými žáky objevil vztah mezi výškou tónu a délkou struny.

V dnešní době je Pythagoras známý především pro svůj důkaz Pytagorovy věty. *„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého rovinného trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.“* Formálně zapsáno $a^2 + b^2 = c^2$. Již starší kultury přišly na to, že trojúhelník, jehož stany jsou v poměru 3:4:5 je pravoúhlý. Číňané tento důkaz uměli geometricky znázornit, ale jeho obecné vyjádření se připisuje Egypťanům. Právě v Egyptě se s ním měl Pythagoras seznámit. Je to však pouze teorie, neboť někteří vědci tvrdí, že to nebylo možné kvůli jazykové bariéře. V dnešní době již existuje důkazů Pythagorovy věty nespočet [14].

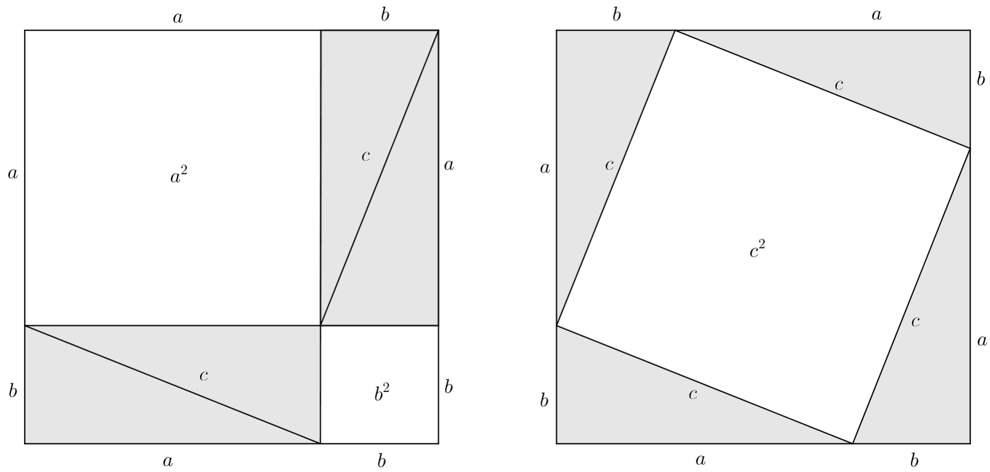
Pythagorova věta, upraveno podle Zhou bi suan Jing

(autor neznámý, okolo 200 př.n.l.)



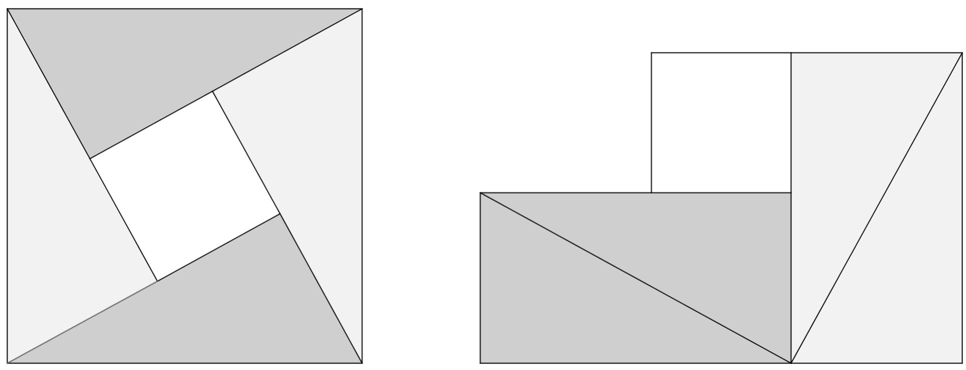
Obrázek 1: Pythagorova věta, [11]

Tento grafický důkaz je založen na tom, že délka strany čtverce uvedeného na obrázku se skládá ze dvou úseček a,b. Delší z nich si označme a, kratší b. Následně na levém obrázku vidíme dva čtverce s obsahy a^2 a b^2 a čtyři shodné trojúhelníky s odvěsnami délek a,b a přeponou c. Na pravém obrázku se nacházejí čtyři shodné trojúhelníky, které jsou totožné s trojúhelníky na levém obrázku a navíc zde máme čtverec o obsahu c^2. V případě, že trojúhelníky na obrázcích jsou shodné, shoduje se i plocha jimi zabraná. Je tedy jasné, že $a^2 + b^2 = c^2$.



Obrázek 2: Pythagorova věta důkaz, [11]

Pythagorova věta, Bhāskara (12. století)



Obrázek 3: Pythagorova věta, [11]

Zaměřme se nejprve na první obrázek. Máme čtverec, s délkou strany c a obsahem $S_1 = c^2$, skládající se ze čtyř trojúhelníků a čtyřúhelníku. Nejprve musíme dokázat, že všechny čtyři trojúhelníky jsou shodné. Na první pohled vidíme, že přepona má vždy délku c. Shodné jsou i v úhlech přilehlých ke straně c. Označíme-li jeden z úhlů α pak dokážeme ostatní úhly v trojúhelníku obecně vyjádřit. Dojdeme tedy k tomu, že trojúhelníky jsou shodné podle věty *usu*. Při označení delší strany daných trojúhelníků b a kratší a můžeme vidět, že délka strany čtverce je $b - a$.

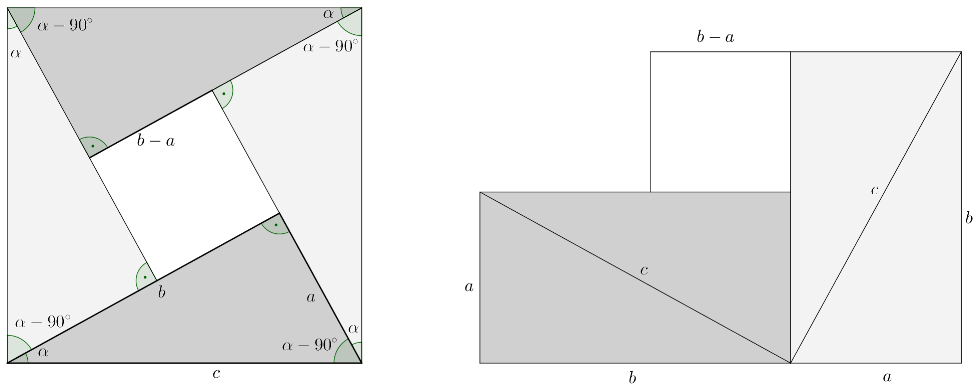
Na druhém obrázku vidíme dva obdélníky, které se skládají ze čtyř shodných trojúhelníků. A čtverec, jehož délka stany je $b - a$. Nyní vyjádříme obsah tohoto obrazce:

$$S_2 = ab + ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2$$

Neboť došlo jen k přeskupení tvarů, musí platit:

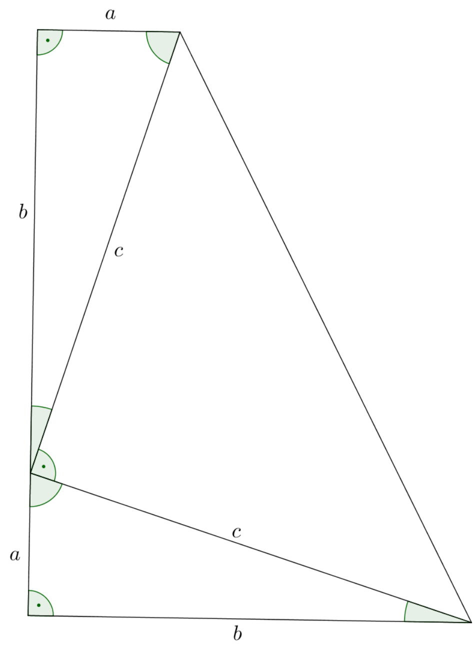
$$S_1 = S_2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$



Obrázek 4: Pythagorova věta důkaz, [11]

Pythagorova věta, James A. Garfield (1876)



Obrázek 5: Pythagorova věta, [11]

Na tento důkaz přišel dvacátý prezident USA James Garfield v době, kdy byl členem sněmovny reprezentantů. Dokazovat důmyslný obrázek budeme pomocí výpočtu obsahů.

$$S_{lichoběžník} = 2 \cdot S_{trojúhelník} + \frac{1}{2} \cdot S_{čtverec}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

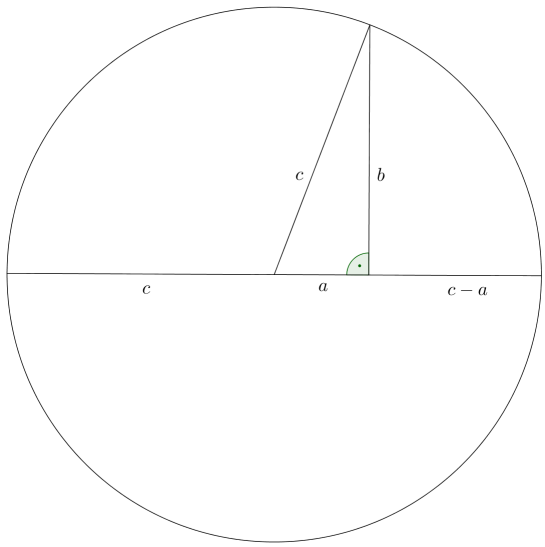
$$\frac{1}{2} \cdot (a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

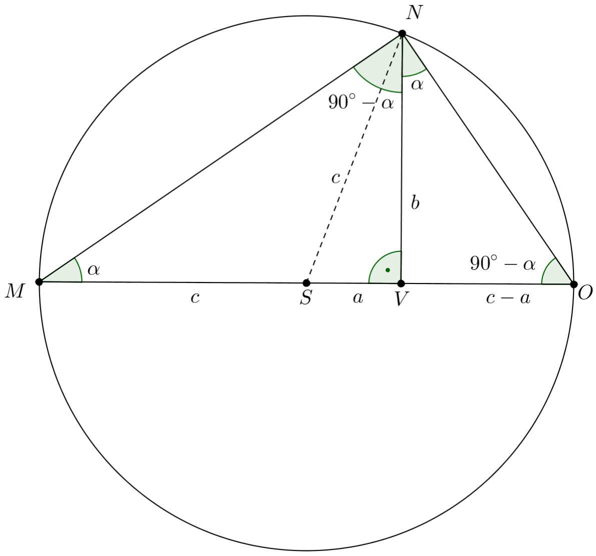
Pythagorova věta, Michael Hardy

$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$
$a^2 + b^2 = c^2$



Obrázek 6: Pythagorova věta, [11]

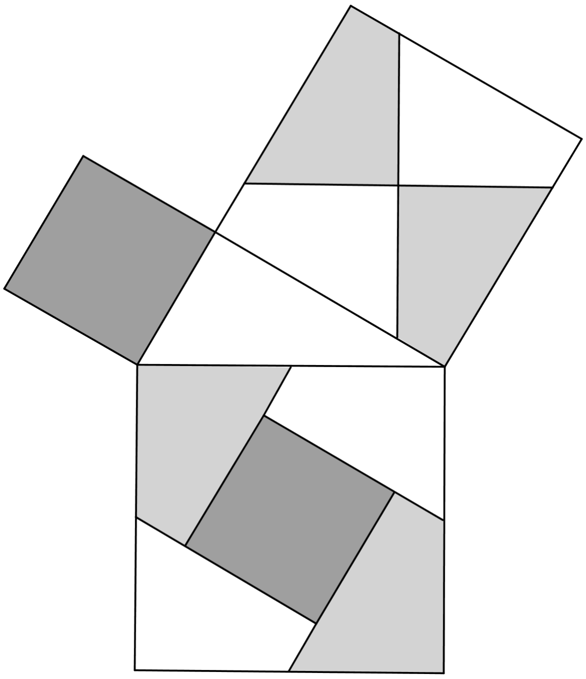
Výše uvedený důkaz je založen na poměru stran podobných trojúhelníků. V první řadě je potřeba dokázat podobnost: $\triangle MVN \sim \triangle OVN$ s využitím věty uu o podobnosti. Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, můžeme prohlásit, že jsou si podobné. Na obrázku 7 jsme úhel u vrcholu M označili α. Následně není problém zbývající úhly určit. Dojdeme tedy k tomu, že výše zmíněné trojúhelníky, jsou si podobné. Můžeme jejich strany dát do poměru $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$, po úpravě této rovnice dostaneme Pythagorovu větu.



Obrázek 7: Pythagorova věta, [11]

Pythagorova věta, H. E. Dudeney (1917)

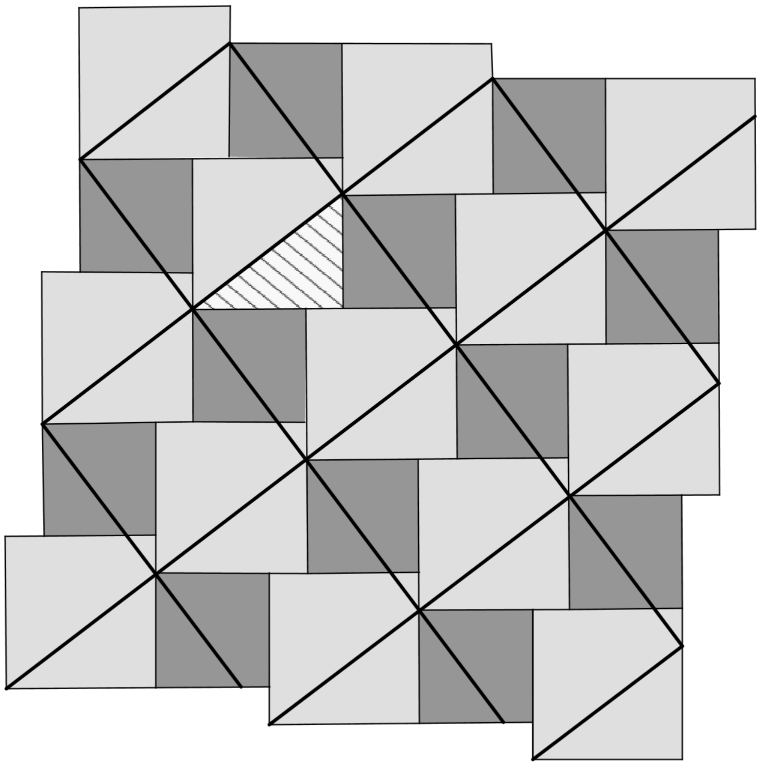
Níže uvedený důkaz, je opravdu originální a především pro studenty základních škol velmi dobře uchopitelný. Stačí jednotlivé obsahy čtverců nad přeponami vystříhat a poskládat je do čtverce nad odvěsnou. Žáci jistě ocení jeho názornost a možnost si důkaz prakticky vyzkoušet.



Obrázek 8: Pythagorova věta, [11]

Pythagorova věta, Annairizi of Arabia (asi 900 n.l.)

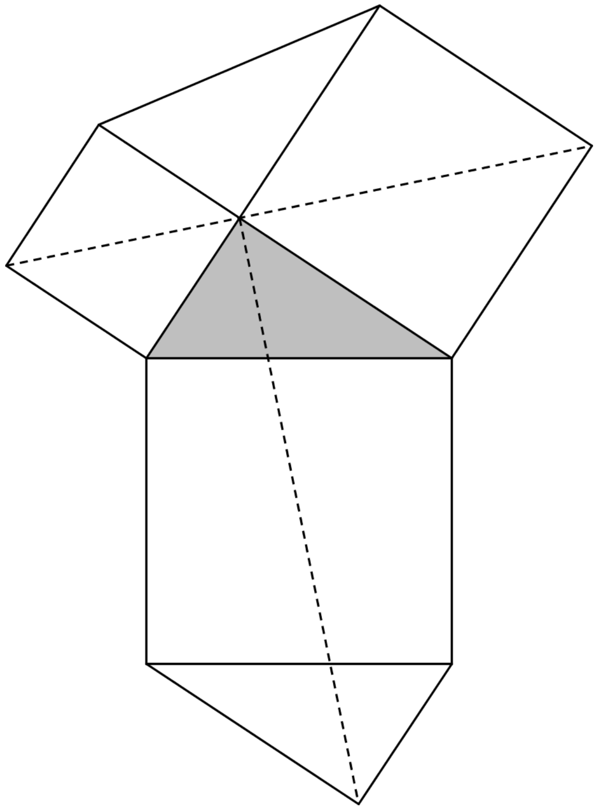
Jen hleď!



Obrázek 9: Pythagorova věta, [12]

Pythagorova věta, Leonardo da Vinci (1452-1519)

Leonadro da Vinci, rodným jménem Leonardo di ser Piero, se narodil 15. dubna 1452 nedaleko Venicie v Itálii. Zemřel roku 1519 ve Francii. Známý je především jako malíř s nejslavnějším dílem Mona Lisa. Byl však velmi všestranný, věnoval se sochařství, architektuře, hudbě a sepsal několik literárních děl. Fascinovala ho Pythagorova matematika, ve které se dobře orientoval a dokonce ji i sám vyučoval. Část svého života strávil u matematika Pacioliho, jehož dílo ilustroval [8].



Obrázek 10: Pythagorova věta, [12]

Nechť máme pravoúhlý trojúhelník ABC a čtverce sestrojené nad stranami takového trojúhelníku (viz obrázek 11). Bod L je středem úhlopříček ve čtverci $IHBA$.

Dokažme, že čtyřúhelníky $EFGD, ABFE, AIJC, CJHB$ mají shodné obsahy. Bod J je ve středové souměrnosti se středem v bodě L obrazem bohu C. Stejně tak i Bod H je obrazem bodu A , bod I je obrazem bodu B a bod M je obrazem bodu

N opět ve středové souměrnosti dané středem L. Z dané souměrnosti vyplývá několik důležitých vlastností:

$$|AC| = |JH| \wedge AC \parallel HJ$$

$$|CB| = |IJ| \wedge CB \parallel IJ$$

$$|AM| = |NH|$$

$$|MB| = |IN|$$

Díky výše uvedeným vlastnostem můžeme říci, že $|CM| = |NJ|$ z toho vyplývá, že $S_{AMC} = A_{HNJ}$ a zároveň $S_{MBC} = S_{NIJ}$. Neboť úsečka MN prochází středem čtverce $IHAB$, tak zde vznikají dva lichoběžníky, které mají stejné obsahy, tedy $S_{INMA} = S_{BMNH}$. Na základě porovnání obsahů jednotlivých obrazců můžeme říci, že $S_{AIJC} = S_{CJHB}$

Obdobný důkaz bychom provedli pro čtyřúhelníky $EFGD, ABFE$ jejichž obsahy jsou též shodné.

Obsahy čtyřúhelníků $CBHJ$ a $FGDE$ jsou také shodné, což nyní dokážeme. Shodují se ve velikosti několika úseček, konkrétně $\mid HJ \mid = \mid ED \mid = a$, $\mid BC \mid = \mid GF \mid = b$, $\mid BH \mid = \mid GD \mid = c$. Sestrojíme-li nad úsečkou LB oblouk se středem v bodě S, pak k obvodovému úhlu $\angle LCB$ přísluší středový úhel $\angle LSB$. Velikost obvodového úhlu je polovina velikosti středového, tedy $\mid \angle LCB \mid = 45°$.

Pro úhly platí:

$$\mid \angle CED \mid = \mid \angle HJL \mid = \mid \angle GFC \mid = \mid \angle LCB \mid$$

$$\mid \angle EDG \mid = \mid \angle BHJ \mid$$

$$\mid \angle DGF \mid = \mid \angle CBH \mid$$

Na základě shodnosti úhlů a délek stran můžeme říci, že $S_{EFGD} = S_{JCBH}$.

Víme též, že $S_{DCG} = S_{MBC} + S_{NJH}$ z toho plyne:

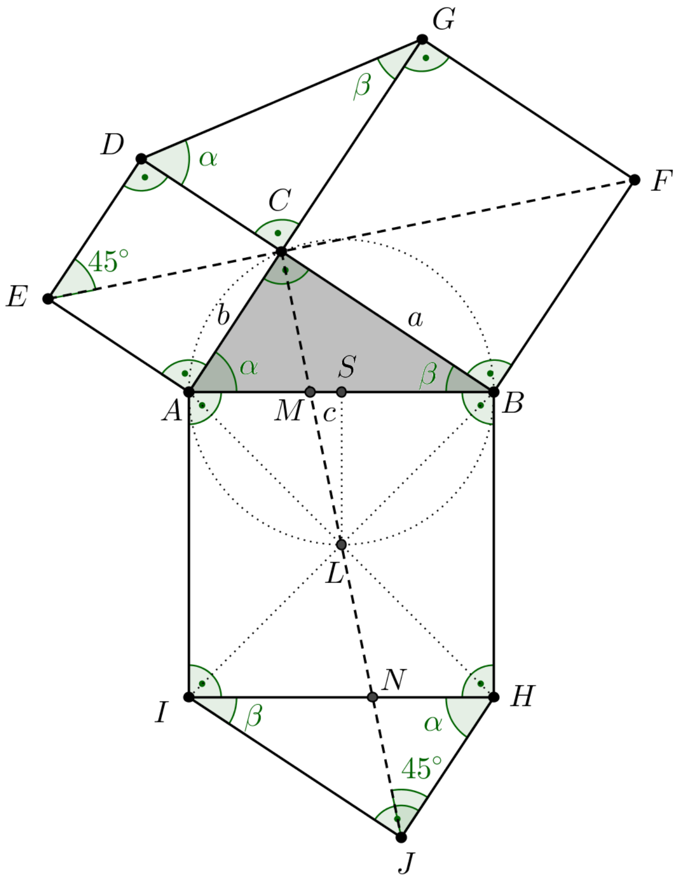
$$S_{MNHB} = S_{ECD} + S_{CFG}$$

$$2S_{MNHB} = 2S_{ECD} + 2S_{CFG}$$

$$S_{IHBA} = S_{ACDE} + S_{CBFG}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Pythagorova věta je tímto dokázána.

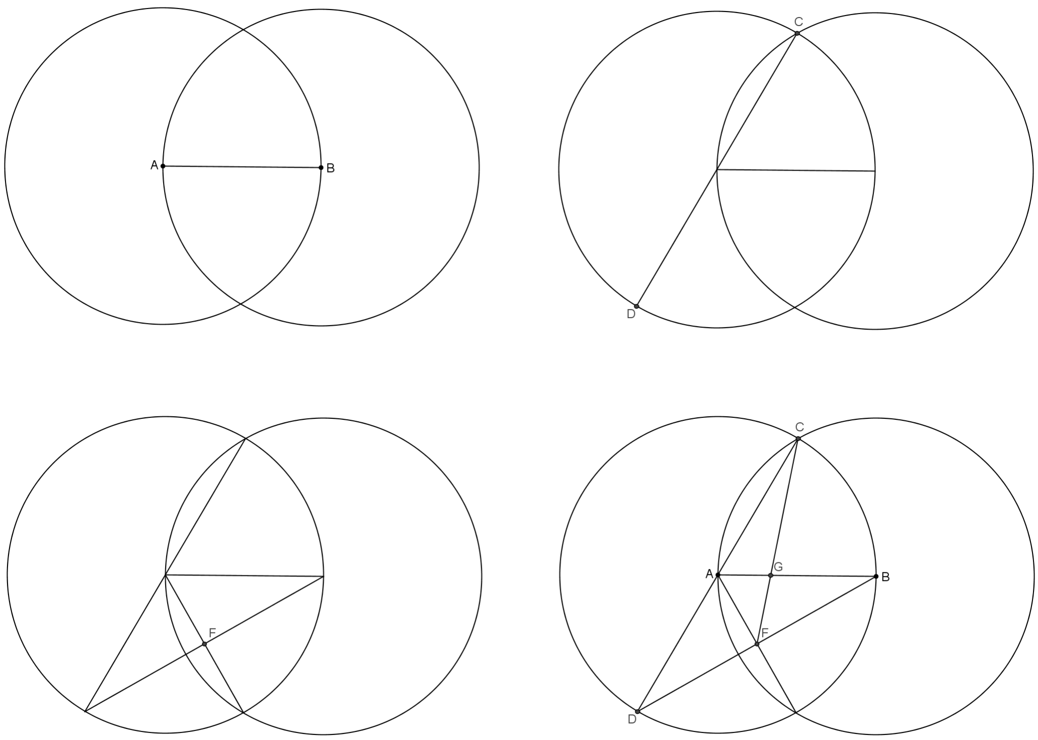


Obrázek 11: Pythagorova věta, [11]

3.2 Trisekce

Trisekce úsečky, Scott Coble

Rozdělit úsečku na tři stejně velké části, nebyl nikdy pro matematiky problém. Již žáci na základní škole, se s takovým úkolem mohou setkat v hodinách matematiky. Scott Coble však přišel s neobvyklým řešením.



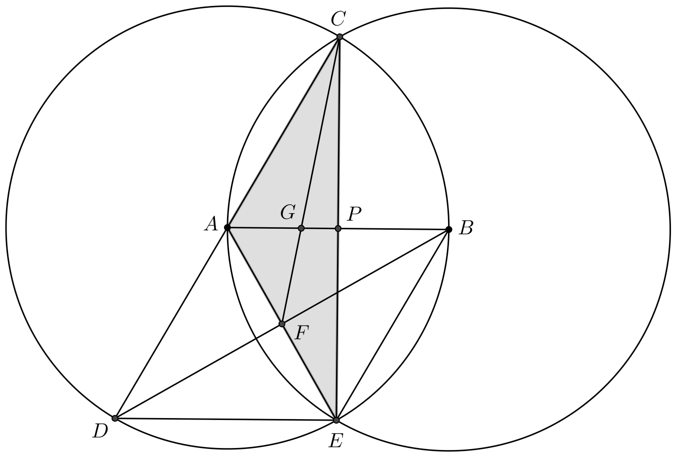
Obrázek 12: Trisekce úsečky, [11]

$$\mid AG \mid = \frac{1}{3} \mid AB \mid$$

U důkazu trisekce úsečky budeme využívat několika známých vlastností geometrických obrazců. Nejdříve se podíváme na čtyřúhelník $ADEB$. Víme, že $\mid AB \mid = \mid AD \mid$ a zároveň úsečka $AB \parallel DE$ a $AD \parallel BE$. Můžeme tedy říct, že $ADEB$ je kosočtverec. Z toho pro nás plyne jedna důležitá vlastnost a to, že bod F je střed úsečky AE, neboť úhlopříčky v kosočtverci jsou vzájemně kolmé a půlí se.

Nyní využijeme vlastností $\triangle AEC$. Je zřejmé, že úsečka CF je v daném trojúhelníku těžnicí, stejně jako úsečka AP. Využijeme-li vlastnosti těžnice, získáme předpis: $\frac{|AG|}{|GP|} = \frac{2}{1}$. Tento poměr můžeme zapsat také jako $\frac{|AG|}{|AP|} = \frac{2}{3}$. Neboť bod P je středem úsečky AB, můžeme polohu bodu G vzhledem k úsečce AB vyjádřit předpisem $\frac{|AG|}{|AB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Čímž je původní tvrzení $\mid AG \mid = \frac{1}{3} \mid AB \mid$ dokázáno.

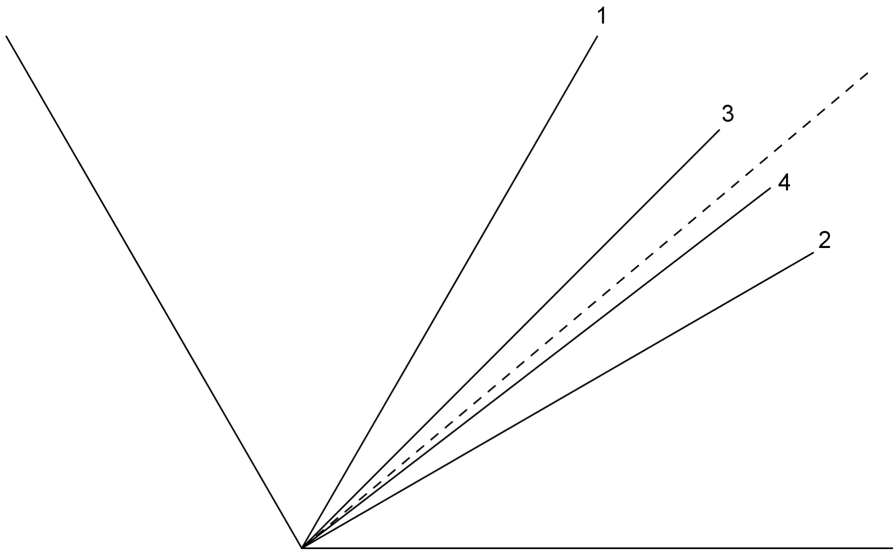


Obrázek 13: Trisekce úsečky důkaz, [11]

Trisekce úhlu v nekonečně mnoha krocích, Eric Kincanon

Trisekce úhlu je, jak dnes víme, eukleidovsky neřešitelná úloha. Spolu s kvadraturou kruhu a zdvojením krychle, se řadí mezi tzv. Tři klasické problémy antické matematiky [3].

Eric Kincanon načrtl krásný důkaz, jenž využívá částečných součtů a v nekonečně mnoha krocích dosáhne rozdělení úhlu na tři stejné díly.



Obrázek 14: Trisekce úhlu v nekonečně mnoha krocích, [11]

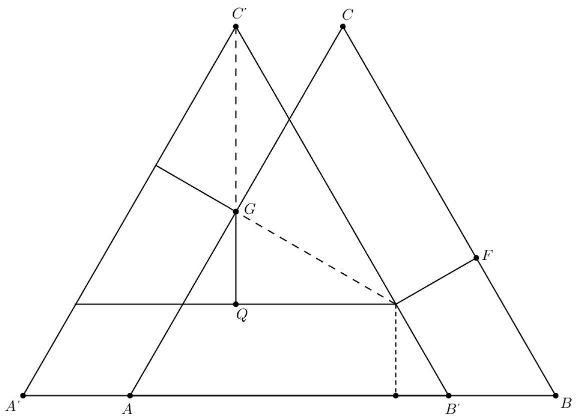
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$$

3.3 Vivianiho věta

Vincenzo Viviani žil v letech 1622-1703. Byl italským matematikem, žákem Galilea Galilei a Evangelisty Torricelliho. Své vzdělání získal u jezuitů a následně pokračoval v samostudiu. V roce 1639 se ve svých sedmnácti letech stal Galileovým asistentem. Po jeho smrti uspořádal Galileovy spisy a podle jeho návrhů sestavil první kyvadlové hodiny. Spolu s Giovannim A. Borellim se snažil změřit rychlost zvuku. Roku 1666 byl Ferdinandem II. jmenován dvorním matematikem [17].

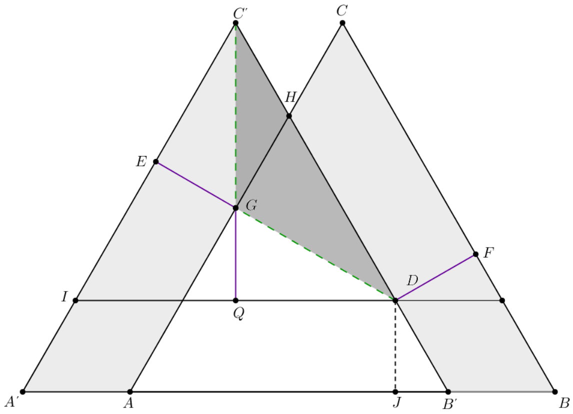
Vivianiho věta, Samuel Wolf

Vivianiho věta: *Součet vzdáleností libovolného bodu v rovnostranném trojúhelníku od jeho stran je roven výšce tohoto trojúhelníku.*



Obrázek 15: Vivianiho věta, [11]

Možností, jak pomocí daného obrázku můžeme větu dokázat, je několik, ale všechny jsou založeny na shodnosti trojúhelníků. Máme dokázat, že $v_{\triangle ABC} =\mid GD \mid + \mid FD \mid + \mid JD \mid$. Nejprve se podívejme na lichoběžníky $BCHB'$ a $C'A'AH$. Ty jsou shodné, neboť délky všech jejich stran jsou stejné. Z toho vyplývá, že i jejich výšky budou mít stejnou velikost, tudíž $\mid FD \mid=\mid EG \mid$. Díky tomu, že $A'B' \parallel ID$, je $\triangle IDC'$ rovnostranný. Z čehož plyne, že $\mid GE \mid=\mid GQ \mid$. Jak je pravděpodobně již zřejmé $\triangle GEC' \cong \triangle GQD$, neboť se shodují ve dvou úhlech a straně k nim přilehlé, je tedy zřejmé, že $\mid GD \mid=\mid GC' \mid$. Součet velikostí úseček $\mid JD \mid + \mid QG \mid + \mid GC' \mid= v_{\triangle ABC}$ Vivianiho věta je dokázána.



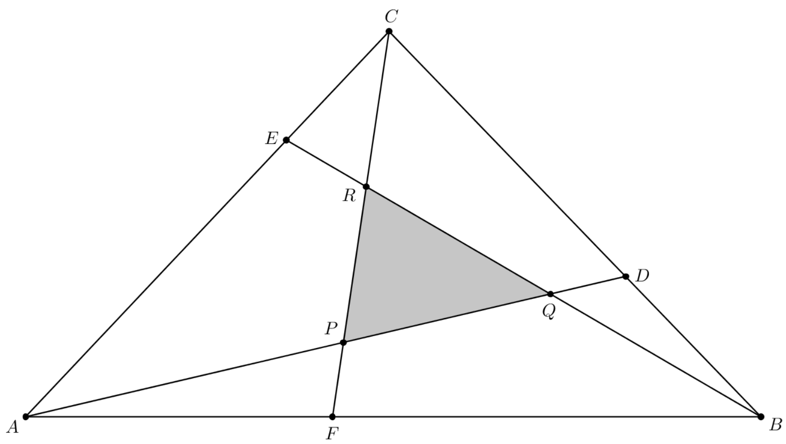
Obrázek 16: Vivianiho věta důkaz, [11]

3.4 Routhova věta

Routhova věta v geometrii určuje poměr obsahů mezi daným trojúhelníkem a trojúhelníkem určeným pomocí úseček spuštěných z vrcholů na protější strany.

Nechť D, E, F jsou v uvedeném pořadí vnitřní body stran BC, CA a AB trojúhelníku ABC. Poměry jejich vzdáleností od krajních bodů příslušných stran nazvěme $\frac{|CD|}{|BD|} = x$, $\frac{|AE|}{|CE|} = y$, $\frac{|BF|}{|AF|} = z$. Dále označíme P, Q, R průsečíky dvojic úseček AD, BE a CF (tzv. ceviány) takto: $P \in AD \cap CF$, $Q \in AD \cap BE$, $R \in BE \cap CF$. Potom poměr obsahů trojúhelníků PQR a ABC je dán výrazem:

$$\frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(zx+x+1)} \text{ [16]}$$



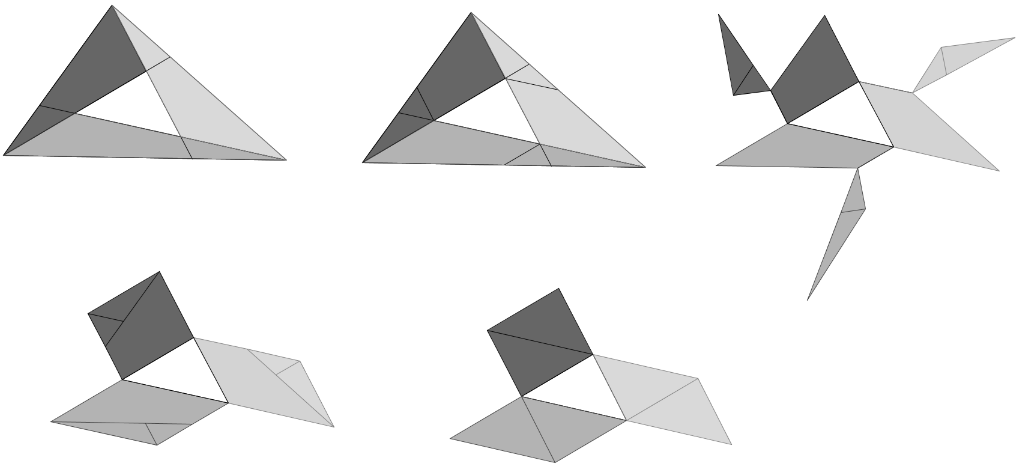
Obrázek 17: Routhova věta, [16]

Speciálním případem výše uvedené věty je Cevova věta a Feynmanův trojúhelník. Cevova věta mluví o tom, že přímky AD, BE, CF mají právě jeden společný bod, jestliže $xyz = 1$. Specifikem Feynmanova trojúhelníku je, že pokud za proměnné x, y, z dosadíme číslici 2, hodnota výrazu bude rovna $\frac{1}{7}$. Obsah vzniklého trojúhelníku bude mít tedy velikost jedné sedminy obsahu původního trojúhelníku v případě, že body D, E, F leží v jedné třetině daných stran.

Routhovu větu bychom mohli upravit:

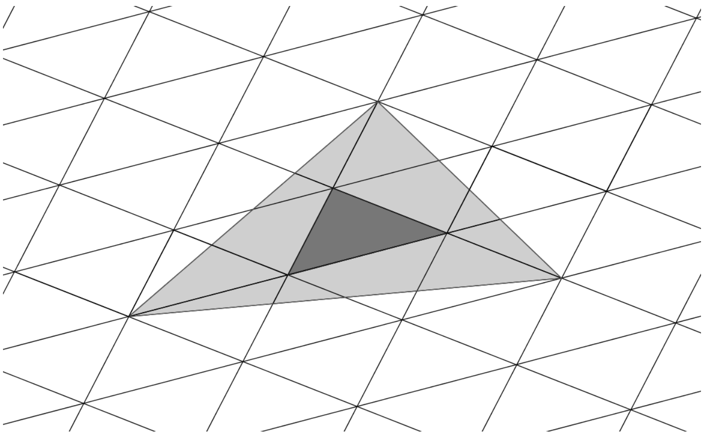
Mějme libovolný trojúhelník v rovině. Jestliže každý jeho vrchol spojíme s bodem, který leží v jedné třetině protilehlé strany, pak trojúhelník tvořený těmito spojnicemi má obsah o velikosti jedné sedminy obsahu původního trojúhelníku [16].

Takový trojúhelník se nazývá Feynmanův. Vizualizace důkazu je vidět na obrázku 20.

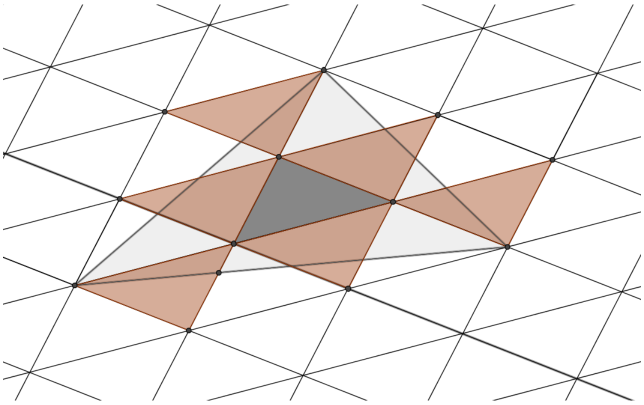


Obrázek 18: Feynmanův trojúhelník, [12]

Dynamický důkaz je zde zachycen v několika obrázcích, díky čemuž je zřejmá chronologie jednotlivých kroků. Dalším možným vizuálním důkazem je zakreslení Feynmanova trojúhelníku do trojúhelníkové sítě. Jejímž základem je právě Feynmanův trojúhelník. Přímky tvořící síť rozdělují trojúhelník na několik částí a při vhodném přeskupení získáme důkaz.



Obrázek 19: Feynmanův trojúhelník, [16]



Obrázek 20: Feynmanův trojúhelník, [16]

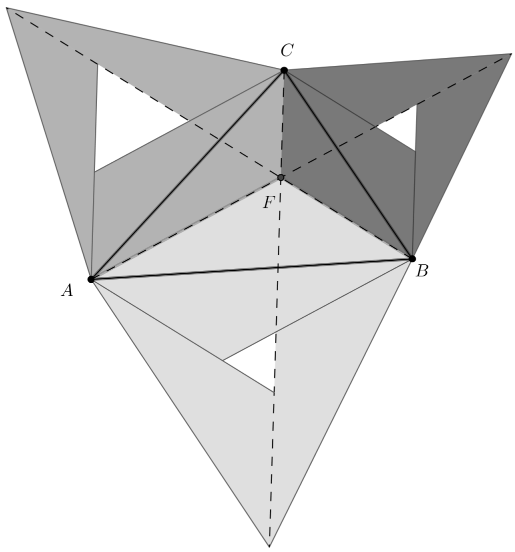
3.5 Weitzenböckova nerovnost

Vizuální důkaz Weitzenböckovy nerovnosti je velice efektivní a na první pohled zřejmý. Důkaz rozdělíme do dvou částí a to pro trojúhelníky, jejichž všechny úhly jsou menší než 120° a trojúhelníky jejichž jeden z úhlů je větší nebo roven 120°.

Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c o obsahu P. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P \geq 0,$$

přičemž rovnost platí, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník [13].



Obrázek 21: Weitzenböckova nerovnost, jsou-li všechny úhly menší 120°, [13]

Pro geometrický důkaz přepíšeme výše uvedenou nerovnost do tvaru

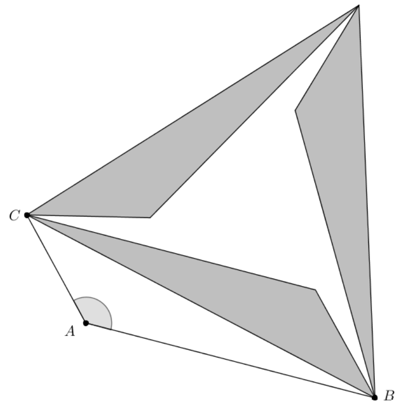
$$\tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c^2 \geq 3P$$

Nerovnost byla ekvivalentně upravena do podoby součtu obsahů jednotlivých rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami trojúhelníku ABC.

Trojúhelník ABC rozdělíme pomocí Fermatova bodu na tři části. Díky tomu v trojúhelníku ABC vzniknou tři tupoúhlé trojúhelníky s tupým úhlem o velikosti 120° při vrcholu F. Připsané rovnostranné trojúhelníky rozdělíme pomocí Fermatova bodu. Nyní je vidět, že každý ze tří tupoúhlých trojúhelníku se na obrázku nachází právě čtyřikrát. Každý trojúhelník sestrojený nad stranami $\triangle ABC$ je složen ze tří shodných tupoúhlých trojúhelníků a jednoho ostroúhlého. V tomto okamžiku je již evidentní, že $3P$ je menší než $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ neboť každý z těchto trojúhelníků je složen ze tří shodných s původním a jedním menším trojúhelníkem.

Při změně tvaru trojúhelníku ABC je součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami ABC stále větší $3P$. Rovnost nastává v okamžiku, kdy i ABC je rovnostranný a bílé trojúhelníky v ten moment „zmizí“.

Pokud je velikost jednoho z úhlů v $\triangle ABC$ větší nebo rovna $120°$ situace se změní.



Obrázek 22: Weitzenböckova nerovnost, je-li jeden úhel větší nebo roven $120°$, [13]

Označíme-li obsahy rovnostranných trojúhelníků nad stranami a, b, c popořadě S_a, S_b, S_c musí podle Weitzenböckovy nerovnosti platit $S_a + S_b + S_c \geq 3P$. Nerovnost ještě upravíme do tvaru $S_a + S_b + S_c \geq S_a \geq 3P$. Z vizualizace je vidět, že obsah trojúhelníku připsaného nad stranou a je větší než trojnásobek obsahu trojúhelníku ABC. Z čehož plyne, že i součet obsahů rovnostranných trojúhelníku připsaných nad jednotlivé strany bude větší, než trojnásobek obsahu trojúhelníku ABC.

Weitzenböckovu nerovnost lze zobecnit pro libovolný n-úhelník:
V rovině je dán n-úhelník $A_1, A_2, ..., A_n$ se stranami délek $a_1, a_2, ..., a_n$ o obsahu P. Potom platí:

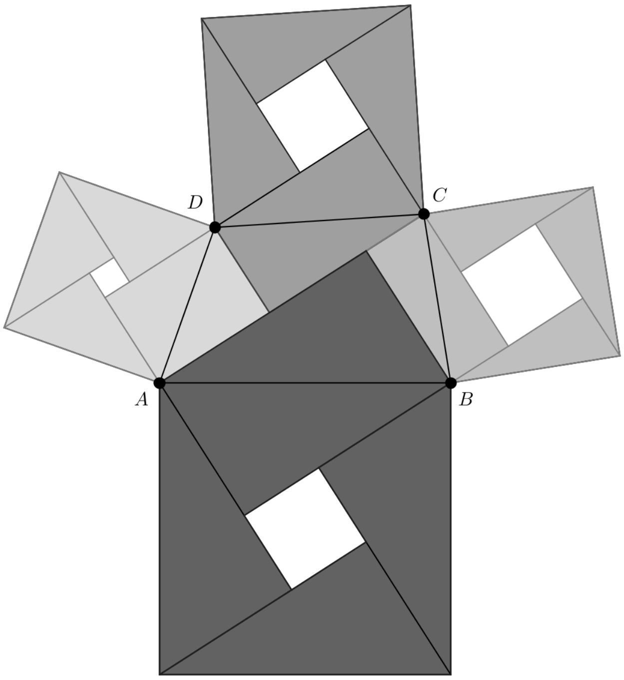
$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq 4tan\frac{\pi}{n}P$$

s rovností pro pravidelný n-úhelník [13].

V případě libovolného čtyřúhelníku budeme pracovat s nerovnicí ve tvaru

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P \geq 0, \text{ [13]}$$

kde a, b, c, d jsou strany čtyřúhelníka a P jeho obsah. Rovnost nastane v okamžiku, bude-li čtyřúhelníkem $ABCD$ čtverec.



Obrázek 23: Weitzenböckova nerovnost, je-li jeden úhel větší nebo roven 120°, [13]

Grafický důkaz provedeme stejně jako u trojúhelníku. Čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme na čtyři části a nad jeho strany připíšeme čtverce. Součet obsahů takto sestrojených čtverců je vždy větší, než čtyřnásobek obsahu čtyřúhelníku. Rovnost nastane v okamžiku, kdy zmizí bílé čtverce, tedy když $ABCD$ je čtverec.

3.6 Obsahy rovinných obrazců

Se vzorci pro výpočet obsahů se žáci setkávají na základní škole poměrně často. V první řadě, většinou již na prvním stupni, se seznámí s výpočtem obsahu čtverce a obdélníku. Na druhém stupni postupně přibývají vzorce pro výpočet obsahu dalších rovinných obrazců. Konkrétně se jedná o trojúhelník, kosočtverec, kosodélník, lichoběžník a kruh. A právě vzorce pro výpočet obsahu zmíněných obrazců lze jednoduše odvodit z již známých vztahů pro obdélník či čtverec.

Myšlenkou takto vybudovaných znalostí je, že studentovi stačí znát vzorec pro obsah obdélníku a všechny ostatní je již schopen odvodit. Samozřejmě i znalost obsahu obdélníku je odvoditelná, z čehož plyne, že pokud žáci budou učitelem správně vedeni, nebudou nuceni se učit seznamy vzorců zpaměti.

Obsah trojúhelníku

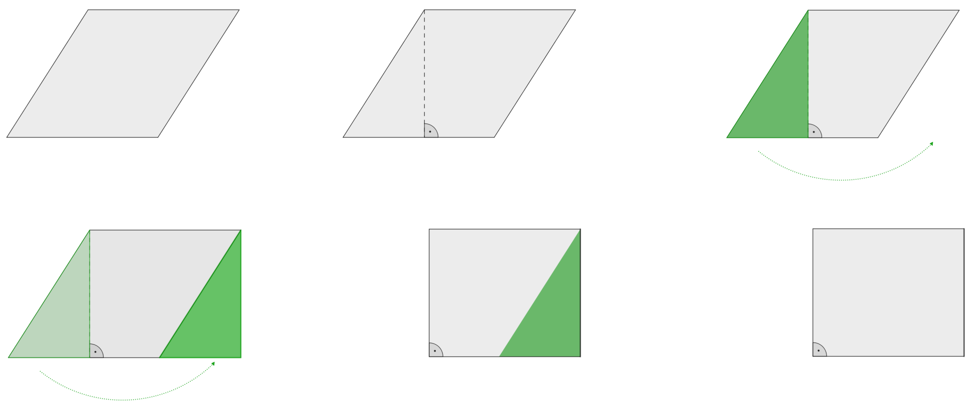
Při výpočtu obsahu trojúhelníku vycházíme ze znalosti obsahu čtverce či obdélníku. Stačí, aby si žáci uvědomili, že úhlopříčka půlí obsah obdélníku (čtverce) na dvě poloviny. Polovina obdélníku tvoří evidentně pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah bude poloviční, než obsah zadaného obdélníku. Pokud obsah obdélníku vypočteme jako $S = ab$, pak pro obsah trojúhelníku bude platit $S = \frac{ab}{2}$. Nyní by to mohlo vypadat, že obsah trojúhelníku vypočteme jako $\frac{1}{2} \cdot délkajednéstrany \cdot délkadruhéstrany$

.

Taková úvaha je samozřejmě chybná, o čem se žáci mohou přesvědčit například tak, že čtverec rozdělí pomocí úhlopříček na 4 shodné trojúhelníky. Zde je krásně vidět, že se nejedná a součin dvou stran, ale o součin strany a výšky k ní příslušné.

Obsah rovnoběžníku

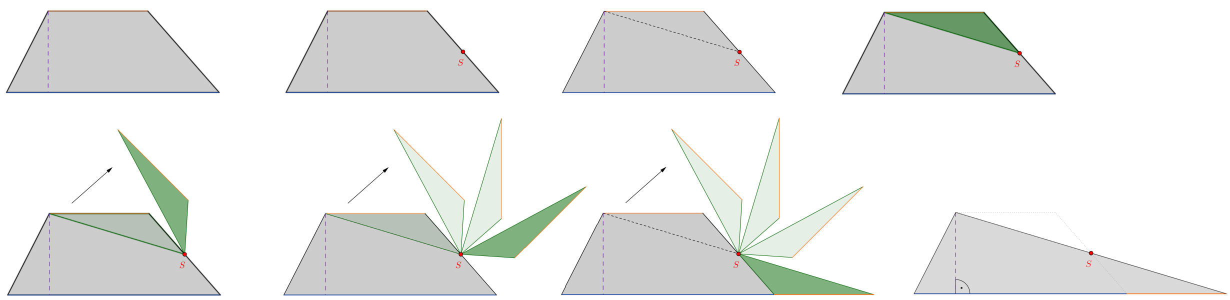
Pro výpočet obsahu rovnoběžníku nám pomůže znalost o výpočtu obsahu obdélníku. Stačí totiž udělat jednoduchou úpravu a z rovnoběžníku o určitém obsahu se stane obdélník o shodném obsahu. Následně je důležité si uvědomit, jak je výpočet obsahu proveden a jaké úsečky v takovém vztahu figurují. Častou chybou je, že žáci zamění výšku s délkou jedné ze stran.



Obrázek 24: Obsah kosočtverce

Obsah lichoběžníku

I vzorec pro obsah lichoběžníku lze jednoduše odvodit a mnohým jistě pomůže k zapamatování. Stačí najít střed jedné z různoběžných stran, spojit tento střed s libovolným protilehlým vrcholem a vzniklý trojúhelník otočit okolo bodu S. Vzorec ve tvaru $S = \frac{(a+b)\cdot v_a}{2}$, kde a, b jsou rovnoběžné strany je na světě.

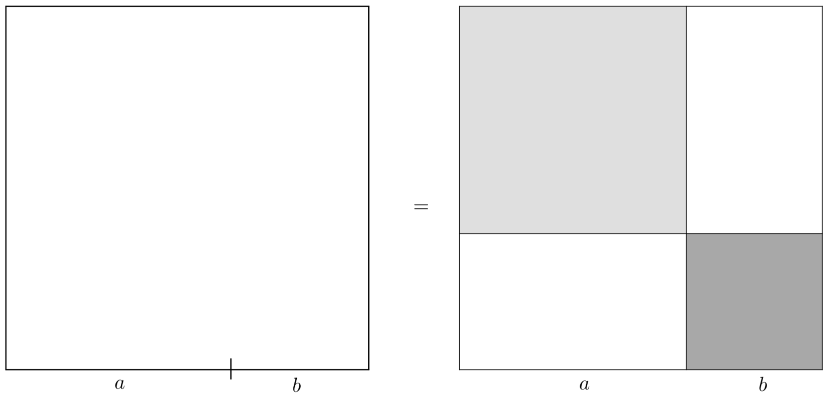


Obrázek 25: Obsah lichoběžníku

3.7 Algebraické úlohy řešené pomocí obsahů ploch

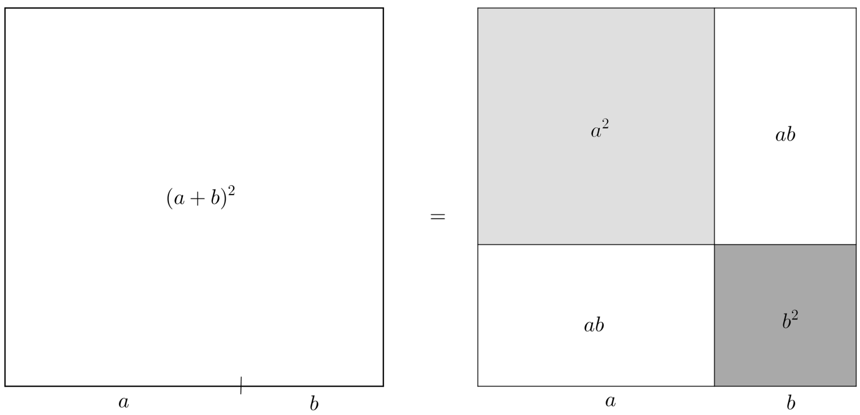
Druhá mocnina dvojčlenů

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



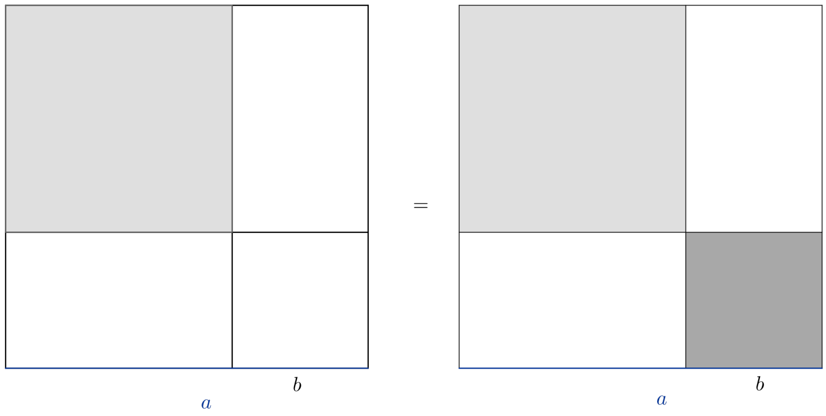
Obrázek 26: Druhá mocnina součtu dvojčlenů

Na obrázku (viz obrázek 27) je vidět další z důkazů, který lze použít při výuce na základní škole. Názornost je pro mnohé studenty velmi důležitá k pochopení. Při správném vysvětlení si studenti budou schopni vzorec sami odvodit, dobře zapamatovat a lépe s ním zvládnou pracovat.



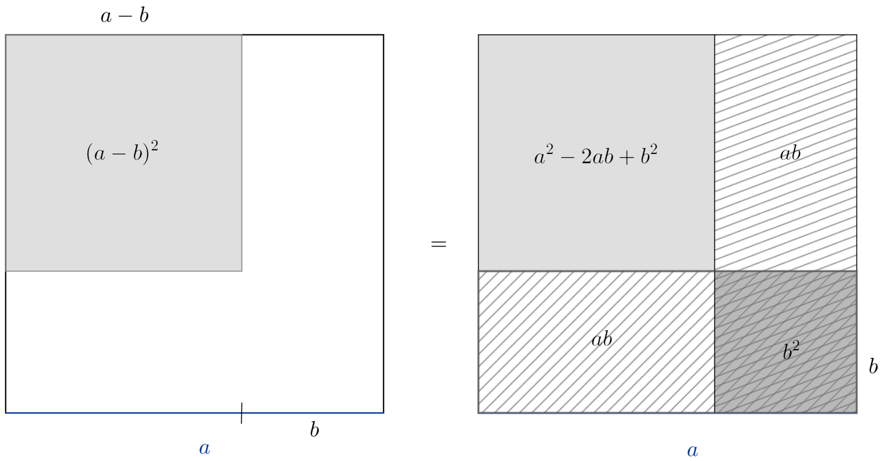
Obrázek 27: Druhá mocnina součtu dvojčlenů důkaz

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Obrázek 28: Druhá mocnina rozdílu dvojčlenů

Pro důkaz platnosti vzorce $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ použijeme stejný postup jako u předchozího problému.



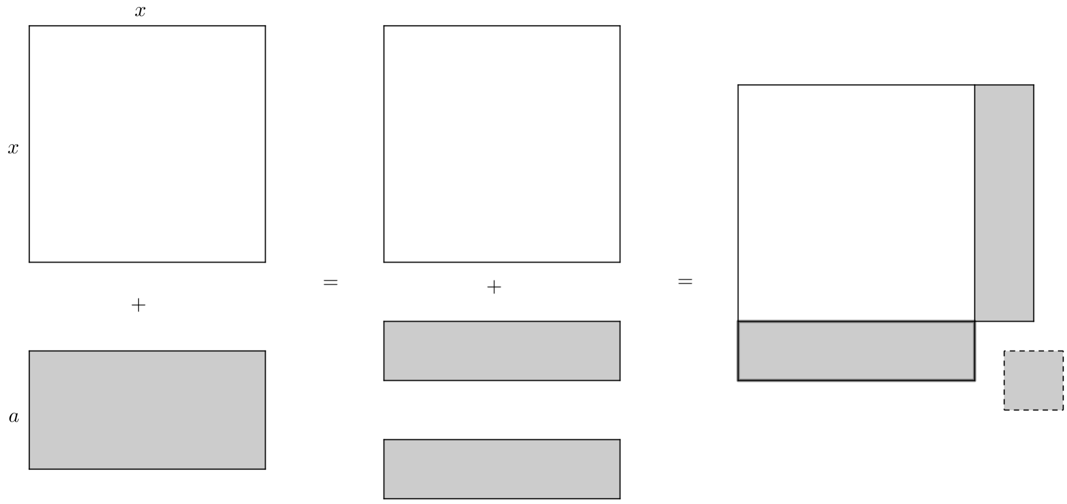
Obrázek 29: Druhá mocnina rozdílu dvojčlenů důkaz

Doplnění na čtverec, Charles D. Gallant

Níže uvedené vizuální znázornění doplnění na čtverec, velmi dobře ukazuje co se při úpravě se vzorcem děje. Tato technika je využívána při úpravách kvadratických výrazů, rovnic, při integrování v matematické analýze, v analytické geometrii v rámci práce s kuželosečkami a v mnoha dalších případech.

Ve své podstatě je to úprava dané kvadratické rovnice podle vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. V zadání je taková rovnice většinou ve tvaru $a^2 \pm 2ab + c$.

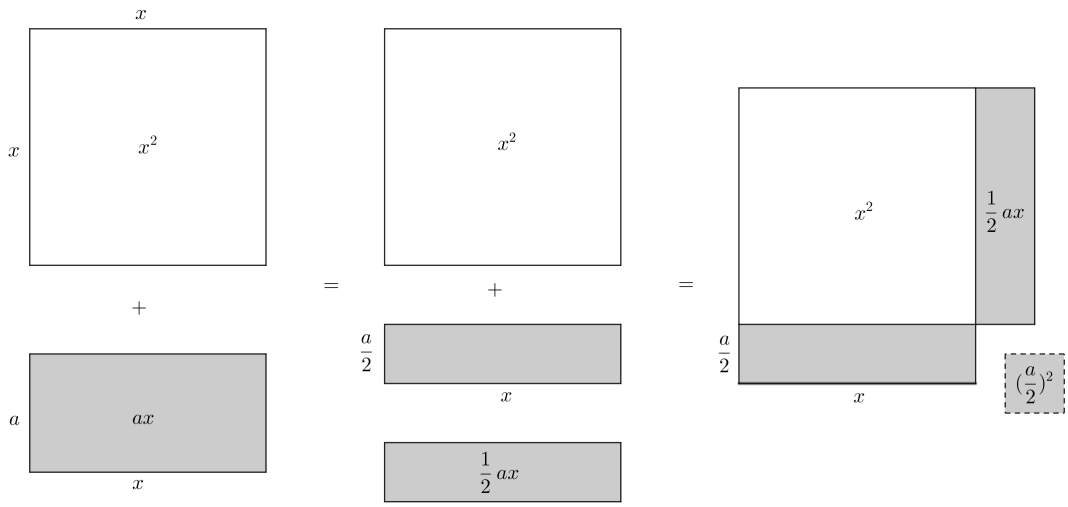
$$x^2 + ax = (x + \tfrac{a}{2})^2 - (\tfrac{a}{2})^2$$



Obrázek 30: Doplnění na čtverec, [11]

Grafický důkaz není nijak obtížný. Stačí jen dopočítat obsahy daných obrazců. Sečteme-li tedy obsah čtverce a obdélníku vlevo na obrázku 30 musí se rovnat obsahu obrazce vpravo. Důkaz provedeme pomocí rozpůlení zadaného obdélníku a přeskupení jeho dvou částí tak, že pro výpočet obsahu pravého obrazce platí: $S = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$.

$$x^2 + ax = (x + \tfrac{a}{2})^2 - (\tfrac{a}{2})^2$$



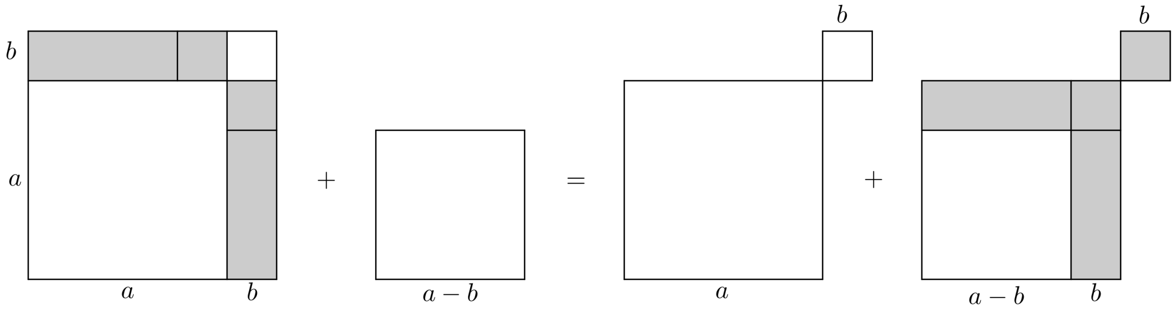
Obrázek 31: Doplnění na čtverec důkaz, [11]

Algebraická úloha řešená pomocí obsahů ploch, Shirley Walkin

Využívání výpočtu obsahů ploch k důkazům algebraických výrazů se ve výuce moc nepoužívá i přes to, že mnohé z nich jsou názorné a dobře demonstrují danou situaci. Příklad takového důkazu je uveden na obrázku 32. Když bychom rovnici $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ chtěli dokázat algebraicky, stačí upravit výraz na levé straně tak, abychom dostali výraz na pravé straně rovnice.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2+b^2)$$

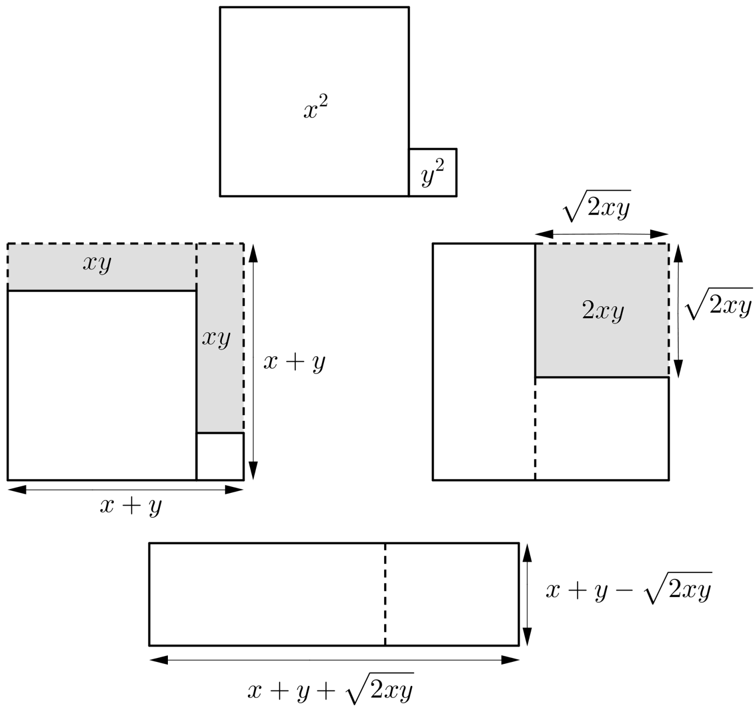
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$



Obrázek 32: Algebraická úloha řešená pomocí obsahů ploch, [11]

Součet obsahů dvou čtverců

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$



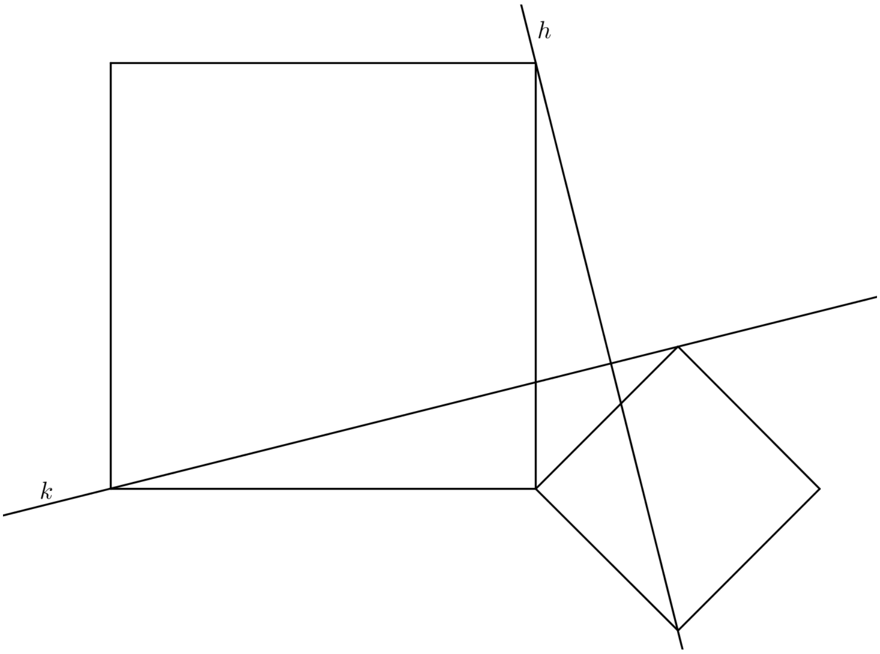
Obrázek 33: Součet obsahů dvou čtverců, [12]

Výše uvedený důkaz je jako mnoho dalších založen na správném přeskupení zadaných obrazců. Z geometrického hlediska se tedy již nejedná o součet obsahů u dvou čtverců, ale pouze o obsah obdélníku.

3.8 Další důkazy

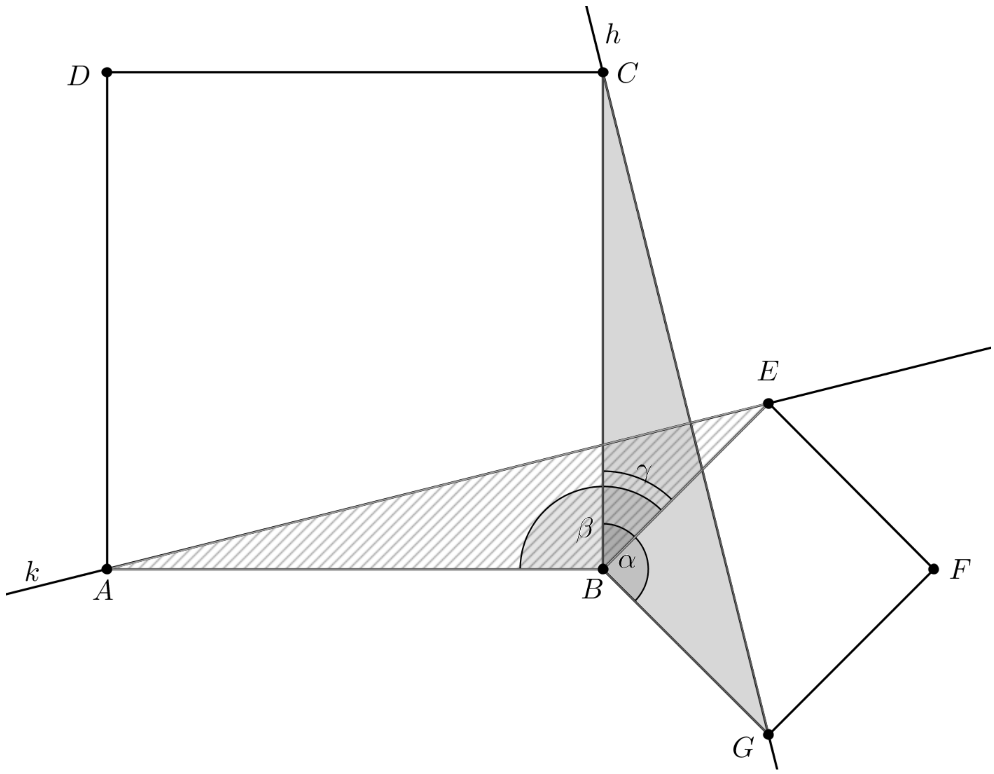
Kolmost dvou přímek

Nechť máme zadané dva čtverce, které mají společný jeden vrchol. Dokažte, že přímky h a k jsou k sobě navzájem kolmé.



Obrázek 34: Kolmost dvou přímek, [4]

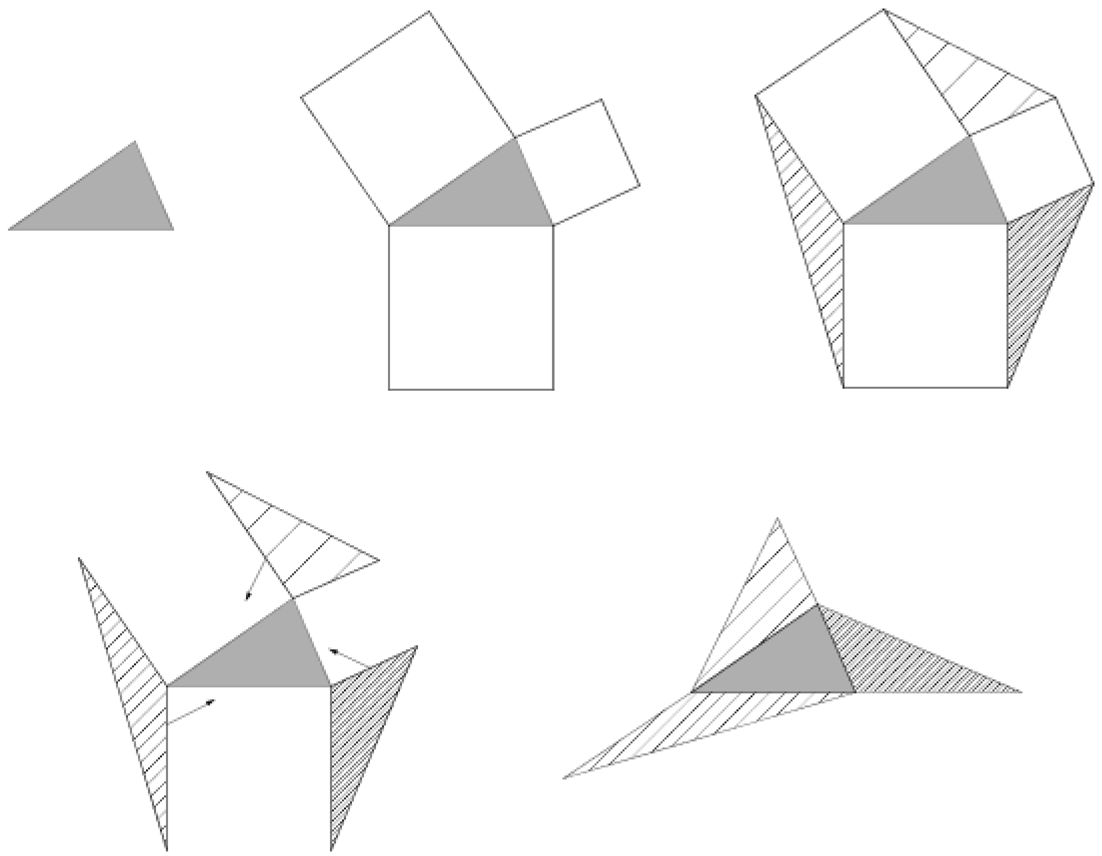
Pro důkaz takového tvrzení využijeme $\triangle ABE$ a $\triangle CBG$. Uvedené trojúhelníky jsou shodné, neboť se shodují v délkách dvou stran, $BE \cong BG$ a $AB \cong CB$ a úhlech $\angle\alpha \cong \angle\beta$, které tyto strany svírají. Úhly $\angle\alpha, \angle\beta$ jsou shodné, neboť velikost obou můžeme vyjádřit jako: $\angle\alpha = 90° + \gamma$ a zároveň $\angle\beta = 90° + \gamma$. Dané trojúhelníky by tedy byly totožné v případě, že bychom jeden otočili o úhel 90° a proto jsou vzájemně kolmé i úsečky CG, AE, tedy i přímky h, k.



Obrázek 35: Kolmost dvou přímek důkaz, [4]

Čtyři trojúhelníky se shodným obsahem, Steven L. Snover

„Spojíme-li u libovolného trojúhelníku se stranami a, b, c vnější vrcholy čtverců sestrojených nad těmito stranami úsečkami, vzniknou tři trojúhelníky. Dokažte, že každý z těchto tři trojúhelníků má obsah rovný obsahu výchozího trojúhelníku [4].“

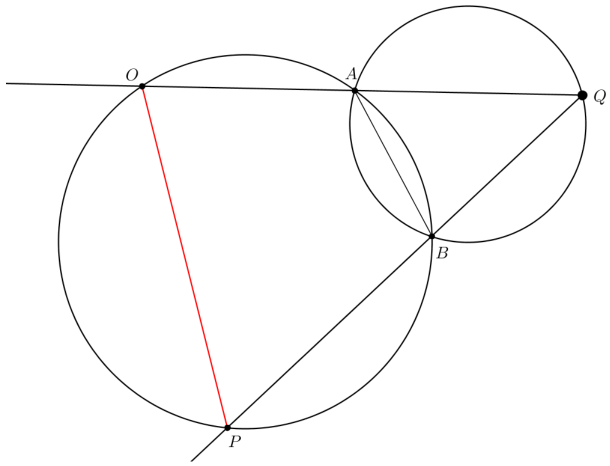


Obrázek 36: Čtyři trojúhelníky se shodným obsahem, [12]

Důkaz výše uvedeného tvrzení je vidět na první pohled. Stačí si pouze uvědomit, jakým způsobem lze vypočítat obsah trojúhelníků s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$. Původní (šedivý) trojúhelník a nově vzniklé trojúhelníky mají totiž vždy stejně dlouhou jednu stranu, což vychází vlastností čtverce (viz druhý obrázek) a společně sdílejí výšku. Je tedy zřejmé, že jejich obsahy musí být shodné.

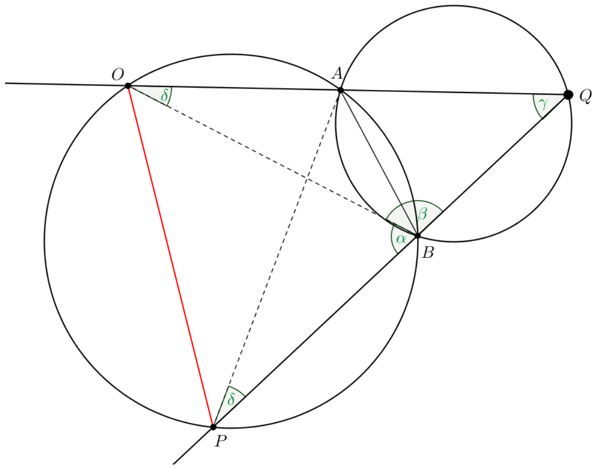
Úsečka konstantní délky

„*Uvažujme dvě kružnice se společnými body A, B. Pohybuje-li se bod P po oblouku BA, délka tětivy OP je konstantní* [4].“



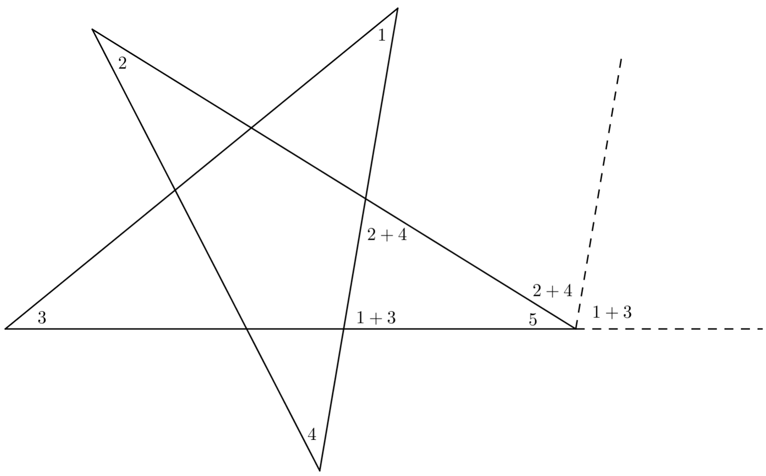
Obrázek 37: Úsečka konstantní délky, [4]

K důkazu obrázku 37 využijeme vlastností obvodového úhlu. Úhel $\angle\gamma$ je obvodovým úhlem náležejícím úsečce AB. Neboť velikost úsečky AB je konstantní, je konstantní i velikost úhlu γ. Stejné tvrzení platí i pro úhel δ, který je taktéž obvodovým úhlem úsečky AB, ale tentokrát vzhledem k jiné kružnici, tudíž $|\angle\gamma| \neq |\angle\delta|$. Vzhledem k tomu, že úhly γ, δ jsou konstantní, musí být konstantní i velikost úhlu β, neboť tyto úhly společně tvoří trojúhelník OBQ, pro který vždy platí: $\delta + \beta + \gamma = 180°$. Z faktu, že velikost $\angle\beta$ je neměnná je zřejmé, že i velikost $\angle\alpha$ bude neměnná, neboť α a β jsou vedlejší úhly, tedy $\alpha + \beta = 180°$. Všimněme si, že úhel α je obvodovým úhlem úsečky OP. Vzhledem k tomu, že víme, že $\angle\alpha$ je konstantní, musí být konstantní i velikosti úsečky OP.



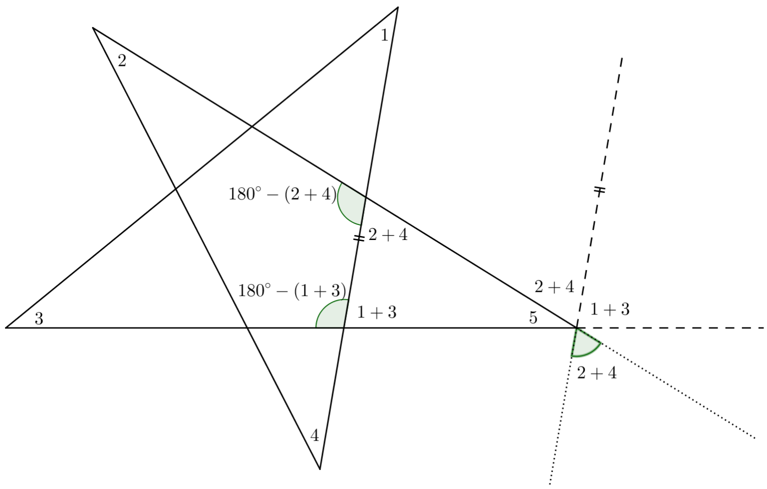
Obrázek 38: Úsečka konstantní délky důkaz, [4]

Součet úhlů při vrcholech hvězdy je 180°



Obrázek 39: Součet úhlů při vrcholech hvězdy je 180°, [11]

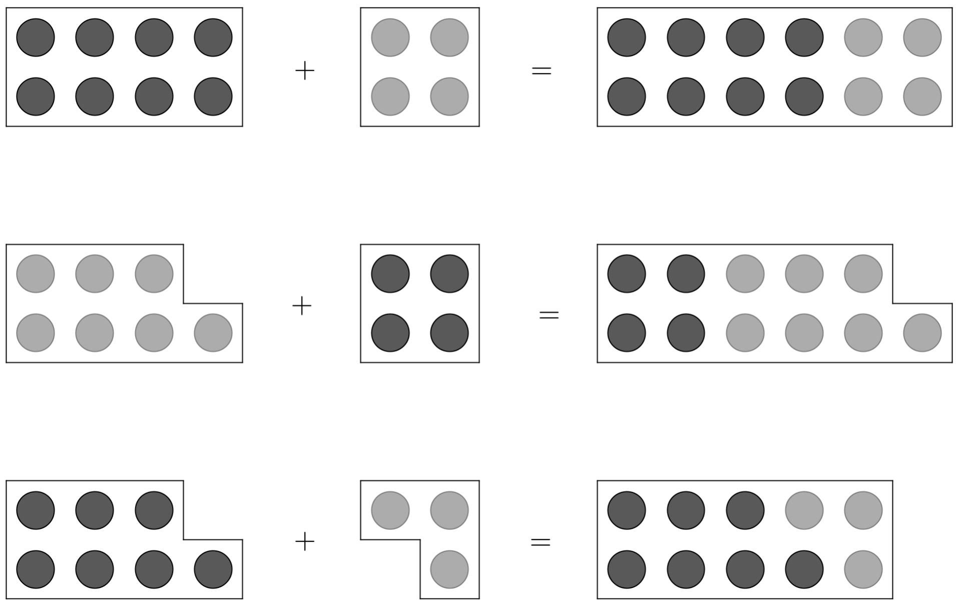
K důkazu, že součet úhlů při vrcholech hvězdy je 180°, potřebujeme znalost souhlasných úhlů, střídavých úhlů a toho, že součet vedlejších úhlů je vždy 180°. Krásně by s tedy taková úloha dala zakomponovat i do výuky na základní škole. Na obrázku 40 jsou doplněny některé velikosti úhlů, potřebné k důkazu.



Obrázek 40: Součet úhlů při vrcholech hvězdy je 180° důkaz, [11]

Sudost a lichost při součtu čísel

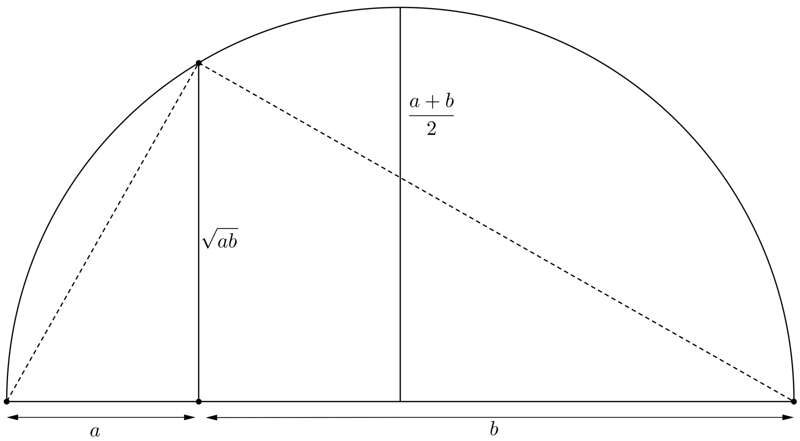
S rozlišováním čísel na sudá a lichá se studenti setkávají již na základní škole. Problémem však bývá zapamatovat si, co pro součty těchto čísel platí. Jednoduchá vizualizace znázorněná na obrázku 41 umožní žákům si problematiku představit a lépe zapamatovat. Sudé číslo je znázorněno pomocí čtverce či obdélníku zato liché nikdy takto vyjádřit nelze a v grafickém provedení vzniká nepravidelný útvar.



Obrázek 41: Sudost a lichost při součtu čísel

4 Nerovnost aritmetického a geometrického průměru

Charles D. Gallant

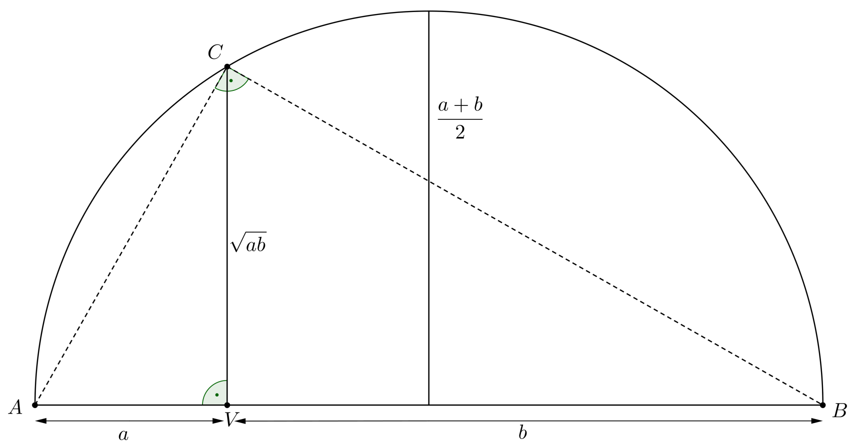


Obrázek 42: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru I, [11]

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{a+b}{2}$$

Pro potřeby důkazu si pojmenujeme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a délkou přepony $c = a + b$ a využijeme znalosti Euklidovy věty o výšce. To, že velikost úsečky jdoucí od středu kružnice do bodu ležícího na kružnici je $\frac{a+b}{2}$ není nijak záhadné, neboť jde o poloměr, tedy polovinu průměru, který lze vyjádřit jako $d = a + b$. Výška daného pravoúhlého trojúhelníku je $v = \sqrt{ab}$, což víme z Eukleidovy věty, která zní: $v^2 = c_a \cdot c_b$, kde c_a a c_b odpovídají v našem případě stranám a a b.

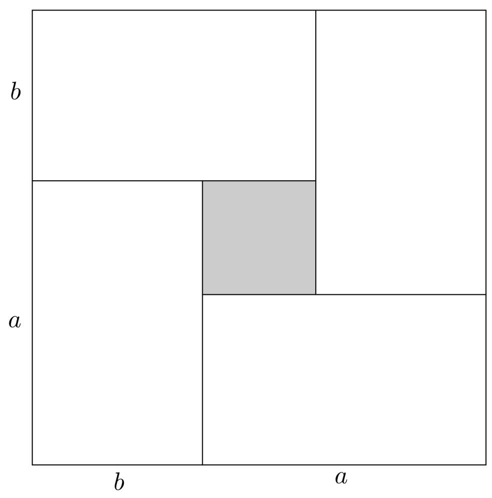
Z obrázku je tedy krásně vidět, že úsečka o délce $\frac{a+b}{2}$ je větší než úsečka o velikosti $\sqrt{ab}$



Obrázek 43: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru I, [11]

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Doris Schattschneider



Obrázek 44: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru II, [11]

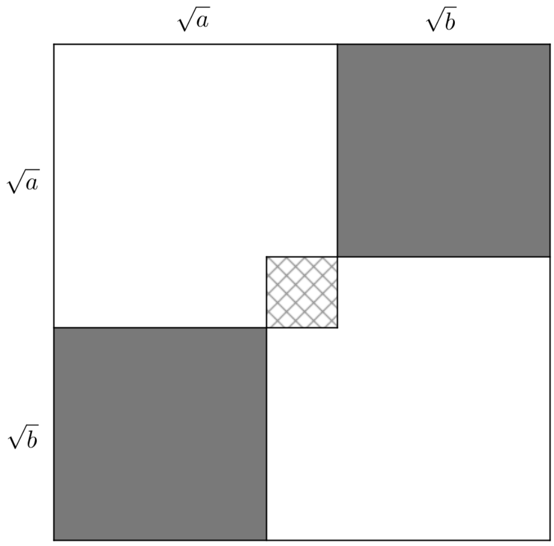
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Nejprve se podíváme na uvedenou rovnici a dokážeme její pravdivost. Levá strana rovnice vypadá: $(a+b)^2 - (a-b)^2$. První závorka vyjadřuje obsah celého čtverce, tedy $S_{čtverce} = (a+b)^2$. Druhá závorka udává obsah malého šedého čtverečku, tedy $S_{čverečku} = (a-b)^2$. Pomocí levé strany rovnice vyjádříme obsah velkého čtverce bez malého čtverečku, tudíž obsah čtyř obdélníků, což lze zapsat $S_{4obdelníků} = 4ab$. Rovnice je tedy pravdivá.

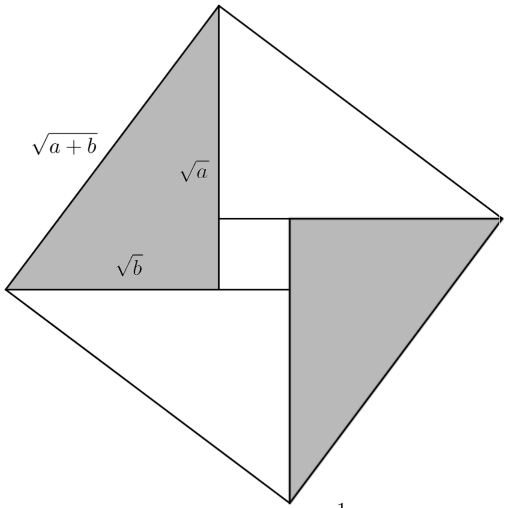
Nerovnici $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ si umocníme na druhou, což můžeme udělat, neboť víme, že obě stany nerovnice jsou jistě kladné. Dostaneme $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$. Zamysleme se nad tím, co znázorňuje $\frac{(a+b)^2}{4}$. Jde o čtvrtinu obsahu velkého čtverce. Podíváme-li se na situaci z jiného úhlu, tak $\frac{(a+b)^2}{4}$ lze chápat jako obsah jednoho obdélníku a obsah jedné čtvrtiny šedého čtverečku. Na pravé straně rovnice vidíme součin dvou délek, který v našem případě představuje obsah jednoho obdélníku. Je tedy naprosto zřejmé, že $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Pro důkaz A-G nerovnosti se výpočet obsahů používá poměrně často. Následující vizualizace jsou založeny na stejném principu, který zde byl již ukázán.



$$2(\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Obrázek 45: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru, [2]



$$(\sqrt{a+b})^2 \geq 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

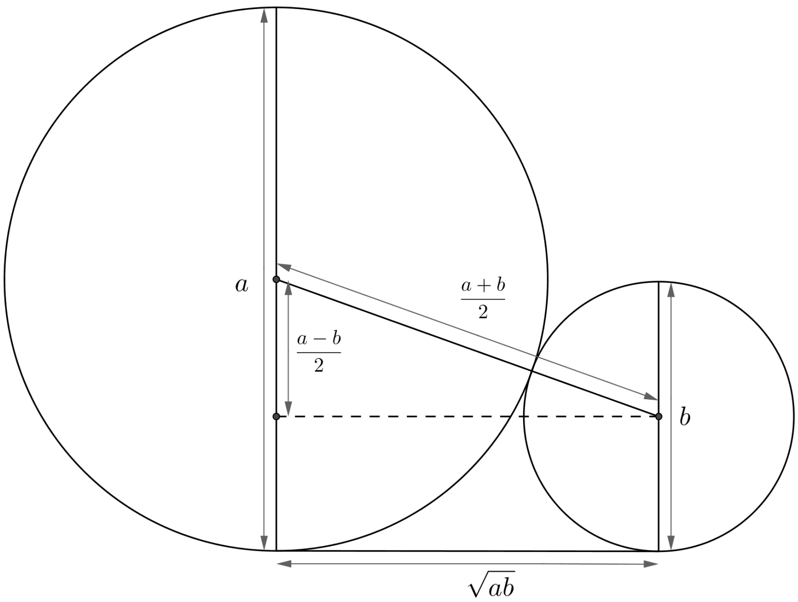
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Obrázek 46: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru, [2]

Roland H. Eddy

$$\tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

rovnost nastává pouze v případě, že $a = b$



Obrázek 47: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru III, [11]

Z obrázku (viz. 48) je velmi dobře vidět, že tvrzení $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ je pravdivé.

Na první pohled jsou zřejmé velikosti úseček BA a AC. Neboť $\triangle ACB$ je pravoúhlý, využijme pro důkaz toho, že $\mid CB \mid = \sqrt{ab}$ Pythagorovu větu. Úsečku CB si pro tuto chvíli pojmenujme například x.

$$(\tfrac{a+b}{2})^2 = (\tfrac{a-b}{2})^2 + x^2$$

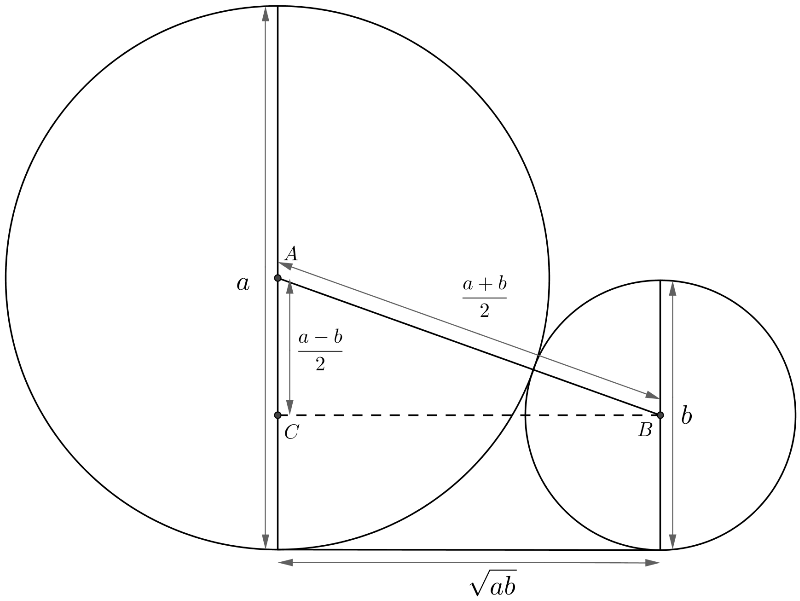
$$\tfrac{(a+b)^2}{4} = \tfrac{(a-b)^2}{4} + x^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4x^2$$

$$4ab = 4x^2$$

$$x = \sqrt{ab}$$

Z výše uvedené rovnice je patrné, že $\mid CB \mid = \sqrt{ab}$. A díky tomu, že přepona je vždy delší než libovolná odvěsna v daném trojúhelníku, věta je dokázána.



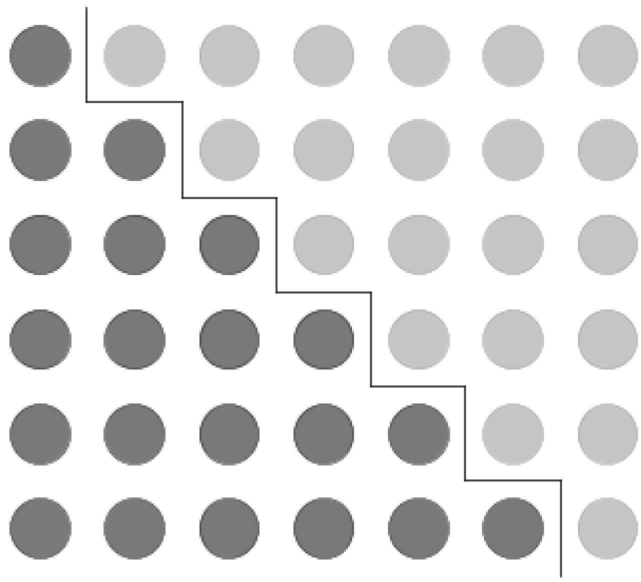
Obrázek 48: Nerovnost aritmetického a geometrického průměru III, [11]

5 Řady celých čísel

5.1 Řada celých čísel

Řada celých čísel I

Grafické provedení důkazu součtu řady n čísel je uveden na obrázku 49.



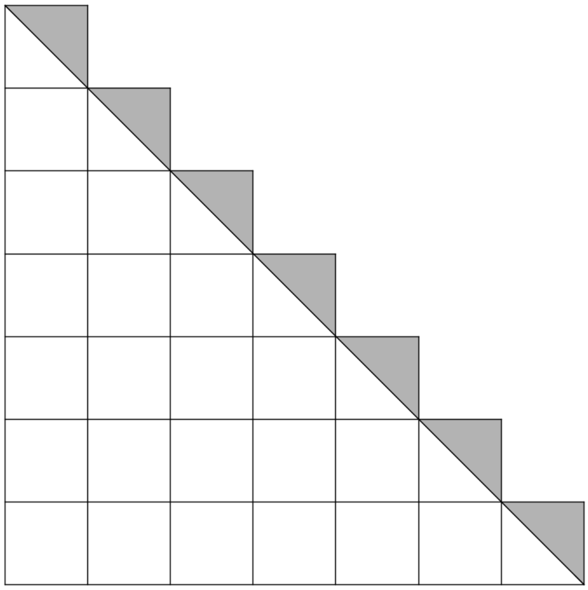
Obrázek 49: Řada celých čísel, [11]

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Při součtu řady čísel a jejím grafickém zpracování si čísla můžeme zakreslit jako nějaké symboly (v našem případě kolečka), seskupené tak, že vytvářejí obraz pravoúhlého trojúhelníku. Tento trojúhelník v případě výše uvedeného důkazu doplníme na obdélník. Obsah pravoúhlého trojúhelníku bude roven jedné polovině obsahu obdélníku, jehož plochu můžeme obecně vyjádřit součinem $n \cdot (n+1)$. Součet řady čísel tím pádem lze vyjádřit jako $\sum_1^n 1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Řada celých čísel II

Autorem níže uvedeného důkazu je Ian Richards.

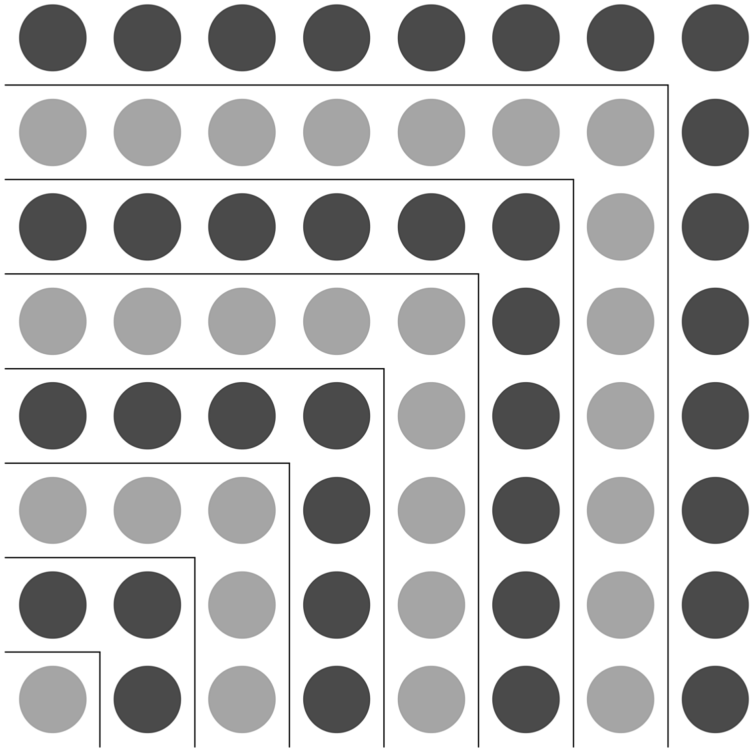


Obrázek 50: Řada celých čísel, [11]

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Nyní nám řadu čísel simulují jednotlivé čtverečky, máme tedy řadu čísel 1-7. Neboť bílé čtverečky tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou stejně dlouhé, můžeme počet čtverců vyjádřit jako: $\frac{n \cdot n}{2}$. Také víme, že počet čtverců jimiž prochází přepona daného trojúhelníku je stejná jako počet čtverců na straně daného trojúhelníku. Díky této informaci lze určit, kolik ze čtverců z obrázku jsme ještě nezapočetli, což je $\frac{n}{2}$. Počáteční tvrzení je tedy dokázáno.

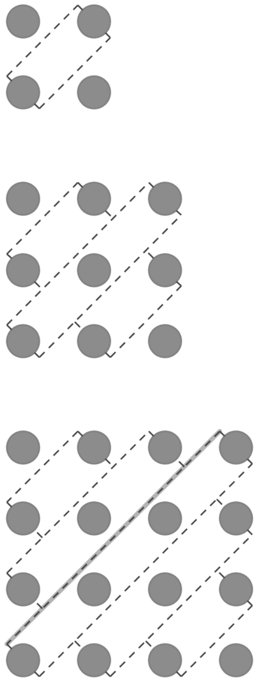
Řada lichých čísel



Obrázek 51: Řada lichých čísel, [11]

V případě, že n představuje počet sčítaných lichých čísel, tak výše uvedený důkaz velmi dobře demonstruje rovnici: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Součet lichých čísel lze jednoduše uspořádávat tak, aby tvořila čtverec. Právě díky tomu lze součet takové řady vyjádřit pomocí zápisu n^2.

Součet řady celých čísel pomocí čtverců



$$1 + 2 + 1 = 2^2$$

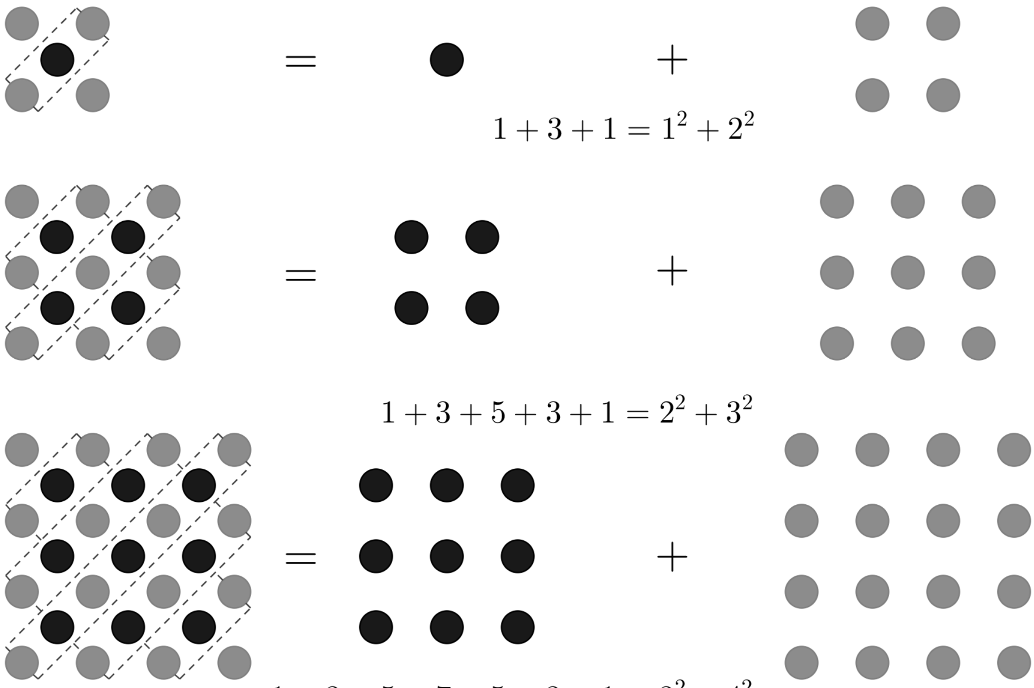
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

$$1 + 2 + ... + (n - 1) + n + (n - 1) + ... + 2 + 1 = n^2$$

Obrázek 52: Součet řady celých čísel pomocí čtverců I, [11]

Součet řady lichých čísel pomocí čtverců



$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$

$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$

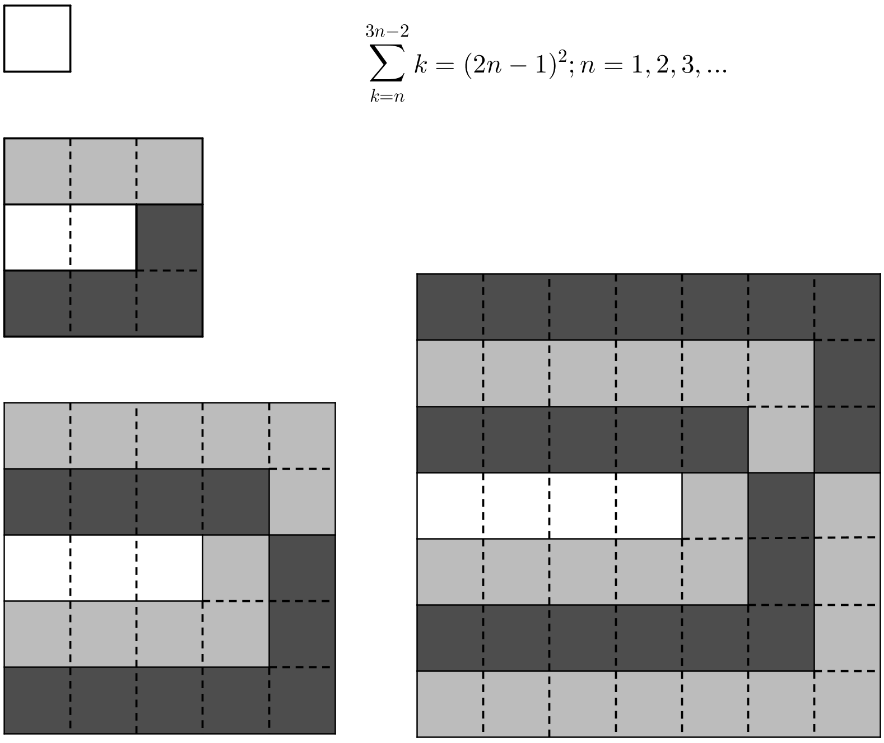
$$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + ... + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2$$

Obrázek 53: Součet řady celých čísel pomocí čtverců II, [11]

Aritmetická posloupnost, jejíž součet je roven druhé mocnině počtu členů posloupnosti

$$\sum_{k=n}^{3n-2} k = (2n-1)^2; n = 1, 2, 3, ...$$



$n = 4$
$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 7^2$

Obrázek 54: Aritmetická posloupnost, jejíž součet je roven druhé mocnině počtu členů posloupnosti, [11]

Netradiční pojetí součtu aritmetické posloupnosti publikoval v Mathematics magazine roku 1984 James O. Chilaka.

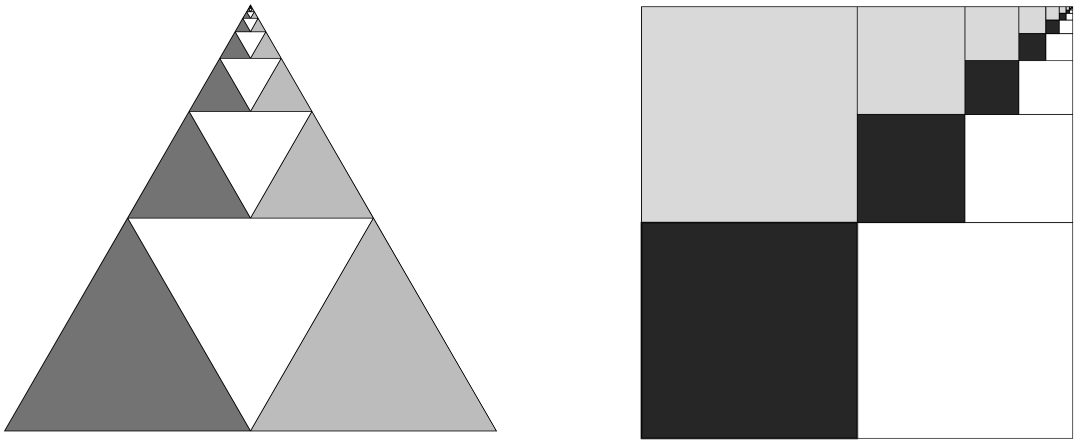
Daný důkaz součtu členů aritmetické posloupnosti platí pouze za specifických podmínek. Diference mezi členy je vždy rovna jedné, tedy $d = 1$. Při stanovení prvního členu této posloupnosti již nelze určit poslední, neboť ten je jednoznačně určen kvůli nutnosti doplnění obrazce na čtverec. Také se nikdy nestane, že by počet členů v dané aritmetické posloupnosti byl sudý.

5.2 Nekonečná řada

Geometrické vyjádření nekonečné řady

Číslo $\frac{1}{3}$ řadíme mezi periodická čísla, jehož hodnotu v desetinném čísle nelze nikdy přesně vyjádřit. Níže uvedený obrázek ukazuje, jak jednoduše geometricky vizualizovat toto číslo jako součet obsahů.

$$\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + (\tfrac{1}{4})^4 + ... = \tfrac{1}{3}$$



Obrázek 55: Součet nekonečné řady, [1]

V případě, že obsah celého trojúhelníku bude $S = 1j^2$. Potom obsah největšího černého trojúhelníku bude $S = \frac{1}{4}j^2$, obsah druhého největšího černého trojúhelníku bude $S = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}j^2$ a tak dále. Vzhledem k tomu, že tato posloupnost nebude platit pouze pro černý ale i šedý a bílý trojúhelník, tak víme, že každá z barev zabere $\frac{1}{3}$ z celkové plochy obrazce. Identickou úvahu lze aplikovat i na obrázek čtverce.

6 Pracovní listy

Pracovní listy jsem koncipovala tak, aby žáci postupnými kroky sami došli k důkazu daného tvrzení. Využití vidím především v případě konstruktivistického pojetí výuky. Učitel se stává facilitátorem či koučem. V první řadě musí probudit v dětech zájem o matematiku, následně nesděluje žákům cíl výuky, ale směřuje je k samostatné činnosti. Snaží se studenty povzbuzovat, motivovat a vést k badatelsky orientovanému vyučování. Pedagog se zaměřuje především na aktivní účast všech přítomných v hodině. Chyba není brána jako selhání, ale je vnímána jako příležitost ke zlepšení a další práci [10].

Zatím jsem neměla možnost pracovní listy vyzkoušet v praxi, ale věřím, že mnoho takových příležitostí ještě mít budu.

Obsah trojúhelníku

První soubor pracovních listů je zaměřen na zjištění vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku. Učivo je řazeno do sedmého ročníku a v rámci RVP je vymezeno bodem: *„žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů“* [15].

Ač je primární zaměření pracovních listů na zjištění obsahu trojúhelníku, studenti zopakují také výpočet obsahu u čtverce a obdélníku. Dále se věnují určování vlastností u zadaných rovinných útvarů a zakreslování do čtvercové sítě.

Obsah rovnoběžníků

Pravocní listy v druhém souboru jsou zaměřeny na určení obsahu kosočtverce a kosodélníku. Učivo bychom v rámci RVP mohli opět zařadit do bodu: *„žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů“* a nejčastěji se s ním setkávají žáci sedmých tříd [15] .

I zde dochází k procvičení mnoha dalších znalostí. Žák si nejprve zopakuje již známé informace, které jsou k budoucímu postupu nezbytné a zopakuje si, vlastnosti daných obrazců. Sám zkusí nadefinovat vlastnosti kosočtverce a kosodélníku a zjistí, v čem se liší. Zakresluje dané obrazce do čtvercové sítě, díky čemuž posiluje svou představivost a schopnost manipulace s objektem.

Obsah lichoběžníku

Poslední pracovní list zaměřený na výpočet obsahu je pro lichoběžník, který dělá studentům velké potíže a jen velmi zřídka dochází k jeho odvození. Látka se probírá v sedmém ročníku a v RVP je určena bodem: *„žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů“* [15] .

I tento list je provázán s předchozími znalostmi. V úvodu si žáci osvěží výpočet obsahu trojúhelníku, zopakují si některé vlastnosti a základní dělení do skupin podle úhlů a stran. Dalším bodem je určení vlastností lichoběžníku, které žáci na základě obrázku zkusí samostatně odvodit. V poslední části je už na studentech, aby sami zvládli lichoběžník převést na trojúhelník, a uvědomili si, jak bude vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku vypadat.

Pythagorova věta

Následující dvojce pracovních listů je zaměřena na Pythagorovu větu. Dané učivo spadá to osmého ročníku a v RVP je určeno bodem: *„žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku“* [15].

Studenti se při vypracování listů setkají s jedním z prvních důkazů na základní škole a získají tak důležité znalosti a zkušenosti pro budoucnost. Na pravé straně listu žáci naleznou zajímavé informace o samotném Pythagorovi a nadaní žáci jistě ocení druhou část pracovního listu, která obsahuje složitější vizualizaci.

Vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu

Poslední z pracovních listů je věnován problematice vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu. Dané učivo dělá studentům značné problémy, pod písmenky si nedovedou nic představit a práce se vzorci bývá často jen formální. Látka je řazena do osmého ročníku a v RVP je vymezena bodem: *„žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním“* [15].

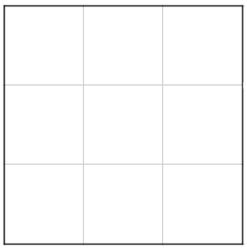
Studenti jsou zde seznámeni s geometrickou reprezentací jednotlivých členů. Díky této představě je zřejmé na základě jakých pravidel byly vzorce formulovány do podoby, ve které se je učí.

Jak zjistím obsah trojúhelníku ?

Co už známe:

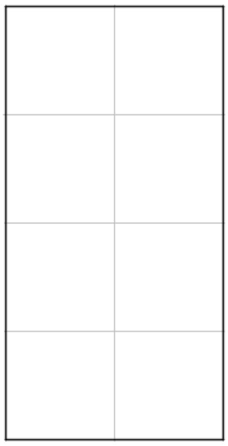
Rozměr jednoho čtverečku je 2cm x 2cm

Obsah čtverce:



Obvod čtverce:

Obsah obdélníku:



Obvod obdélníku:

Jaké jsou vlastnosti uvedených obrazců? (délky stran, vnitřní úhly, úhlopříčky)

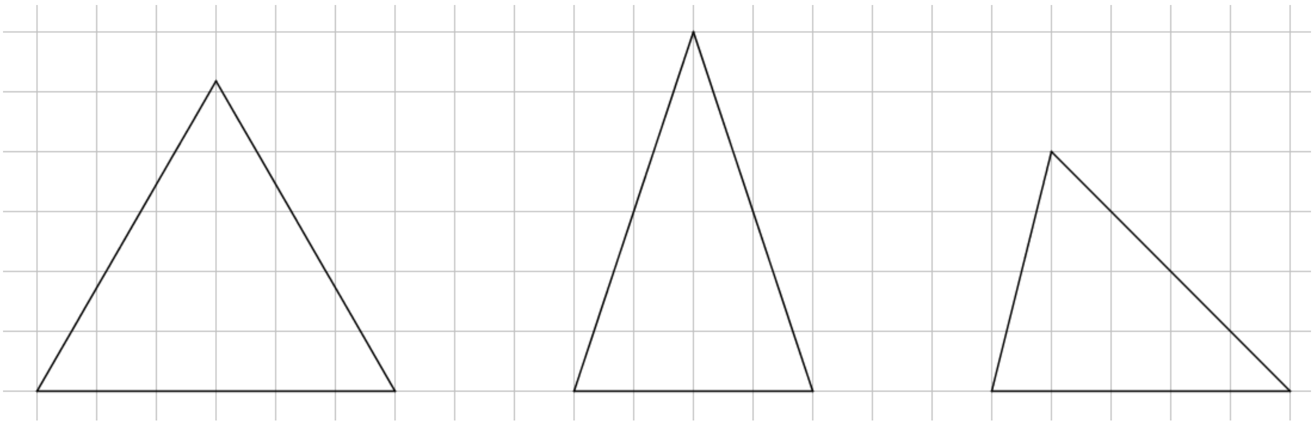
Čtverec . . . .

. . . .

Obdélník . . . .

. . . .

Trojúhelníky



Dokážeš z obrázků vyčíst nějaké shodné či rozdílné vlastnosti trojúhelníků?

. . . .

. . . .

. . . .

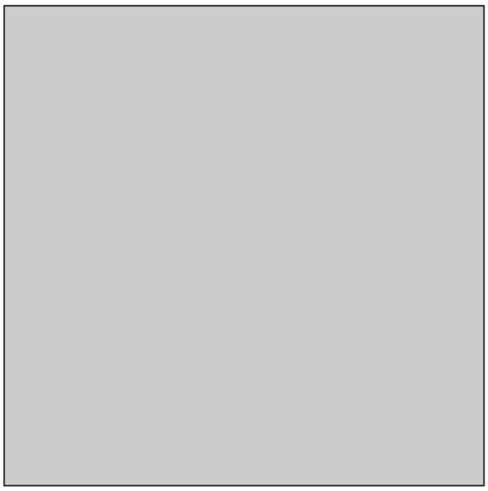
Vystřihni zadaný obdélník, narýsuj jednu z úhlopříček a podél té pak obdélník rozstřihni.

Jaké dva útvary ti vyšly? Co můžeme říci o jejich obsazích a co to vypovídá o obsahu trojúhelníku?

. . . .

Narýsuj si do čtvercové sítě vlastní obdélník a ověř si, zda vlastnosti, které jsi zjistil(a) u předchozího příkladu, platí i pro tvůj.

Vystřihni zadaný čtverec, narýsuj obě úhlopříčky a podél těch pak čtverec rozstřihni.



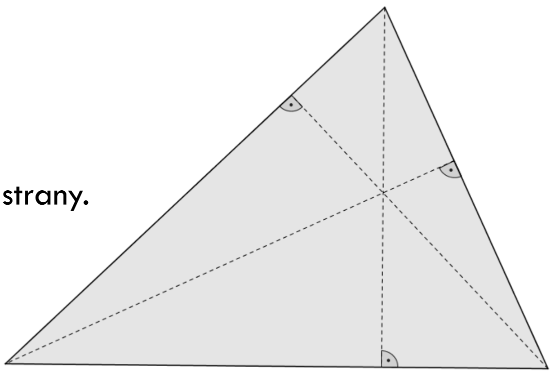
Jaké čtyři útvary ti vyšly? Co můžeme říci o jejich obsazích a co to vypovídá o obsahu trojúhelníku?

Narýsuj si do čtvercové sítě vlastní čtverec a ověř si, zda vlastnosti, které jsi zjistil(a) u předchozího příkladu, platí i pro tvůj.

Zakresli do čtvercové sítě trojúhelníky o obsahu :

$S_1 = 4cm^2$, $S_2 = 2cm^2$, $S_3 = 5cm^2$, $S_4 = 3cm^2$

Trojúhelník



Každý trojúhelník má . . . . vrcholy a . . . . . . strany.

Součet úhlů při vrcholech je vždy . . . .

Výpočet obvodu:

Výpočet obsahu:

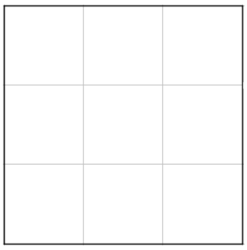
Jak zjistím obsah rovnoběžníku ?

Co už známe:

Rozměry jednoho čtverečku jsou 1cm x 1 cm

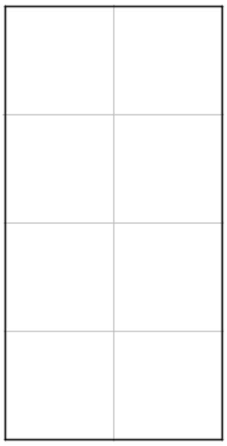
Obsah čtverce:

Obvod čtverce:



Obsah obdélníku:

Obvod obdélníku:



Jaké jsou vlastnosti uvedených obrazců? (délky stran, vnitřní úhly, úhlopříčky)

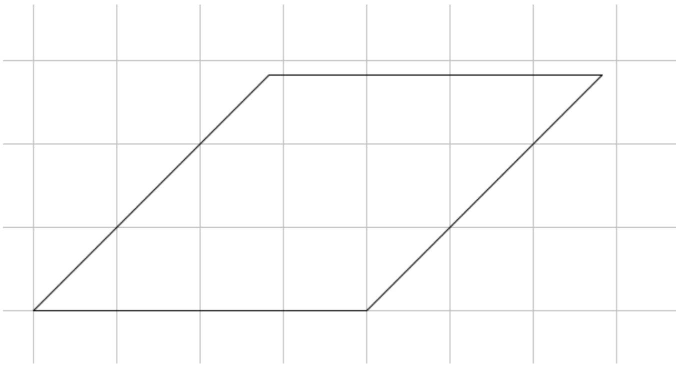
Čtverec . . . .

. . . .

Obdélník . . . .

. . . .

Kosočtverec



Jaké vlastnosti kosočtverce zjistíš z obrázku?

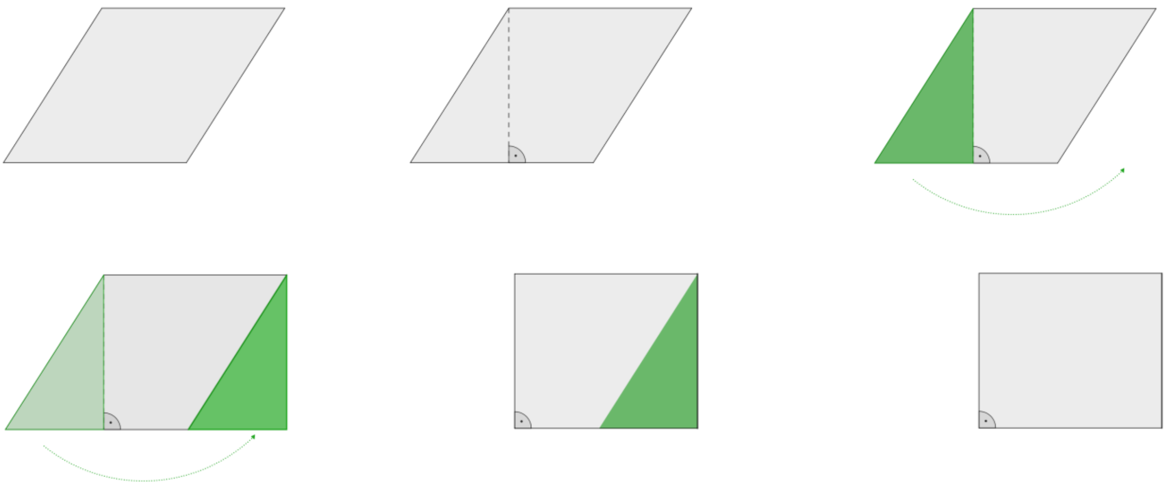
. . . .

. . . .

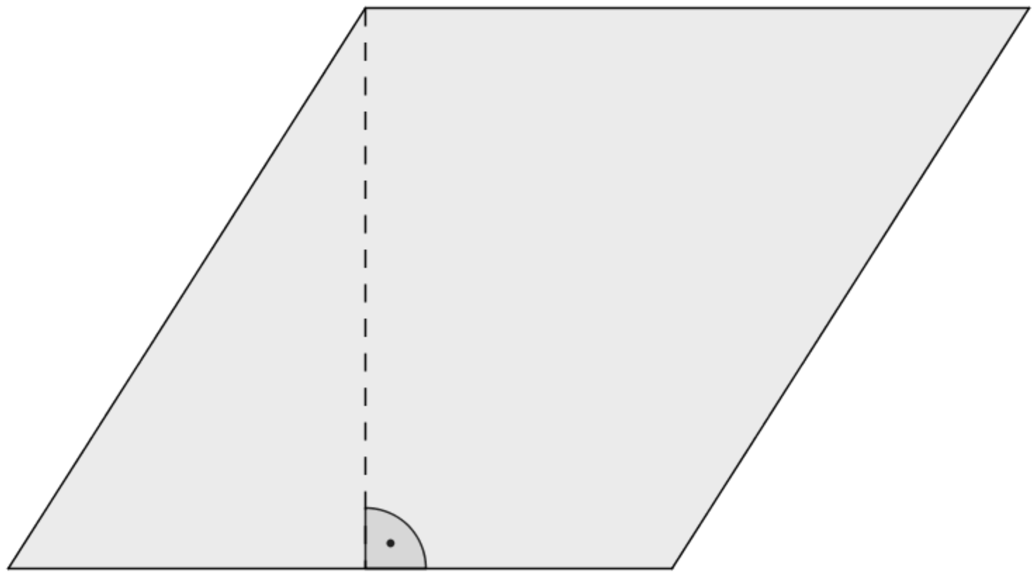
. . . .

. . . .

Výpočet obsahu pro nás nebude nic nového, nebo snad ano? Co lze vyčíst z obrázků?



Vystřihni si zadaný kosočtverec a vyzkoušej si postup z první strany.



Narýsuj si do čtvercové sítě vlastní kosočtverec a ověř si postup z první strany ještě jednou.

Pozor! Nezapomeň na jeho vlastnosti! Protilehlé strany jsou rovnoběžné a všechny strany jsou stejně dlouhé.

Kosodélník

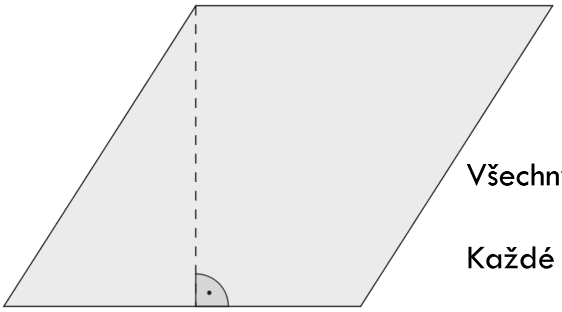
Jaké vlastnosti kosodélníku zjistíš z obrázku?

Můžeme při zjištění obsahu kosodélníku použít stejný postup jako u kosočtverce?

Ověř svou odpověď. Narýsuj si do čtvercové sítě vlastní kosodélník a ověř svou teorii.

Pozor! Nezapomeň na jeho vlastnosti! Protilehlé strany jsou rovnoběžné a ~~všechny strany~~ jsou stejně dlouhé.

Co jsme zjistili o rovnoběžnících:



Kosočtverec

Všechny strany v kosočtverci jsou . . . . dlouhé.

Každé dvě z nich, ležící naproti sobě jsou . . . .

Úhlopříčky v kosočtverci svírají . . . . úhel.

Výpočet obvodu:

Výpočet obsahu:
Můžeme si pomoci obsahem čtverce

Kosodélník

Protější strany v kosodélníku jsou

. . . . dlouhé.
Každé dvě z nich, ležící naproti sobě, jsou

. . . .
Úhlopříčky v kosočtverci nesvírají

. . . . úhel.

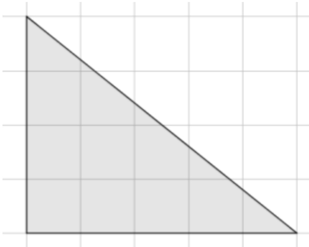
Výpočet obvodu:

Výpočet obsahu:
Můžeme si pomoci obsahem obdélníku

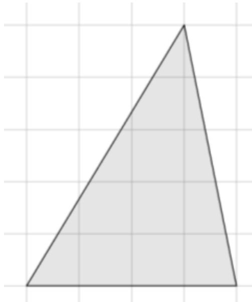
Jak zjistím obsah lichoběžníku ?

Co už známe:

Rozměry jednoho čtverečku jsou 1cm x 1 cm



Obsah trojúhelníku:



Obsah trojúhelníku:

Součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy . . . .

Trojúhelníky dělíme do kategorií podle délek stran, nebo velikosti úhlů. Vzpomeneš si jak se jmenují?

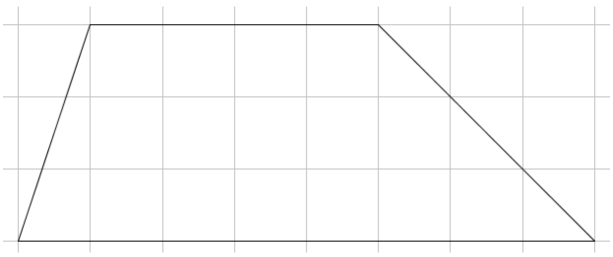
podle stran . . . .

. . . .

podle úhlů . . . .

. . . .

Lichoběžník



Jaké vlastnosti lichoběžníku zjistíš z obrázku?

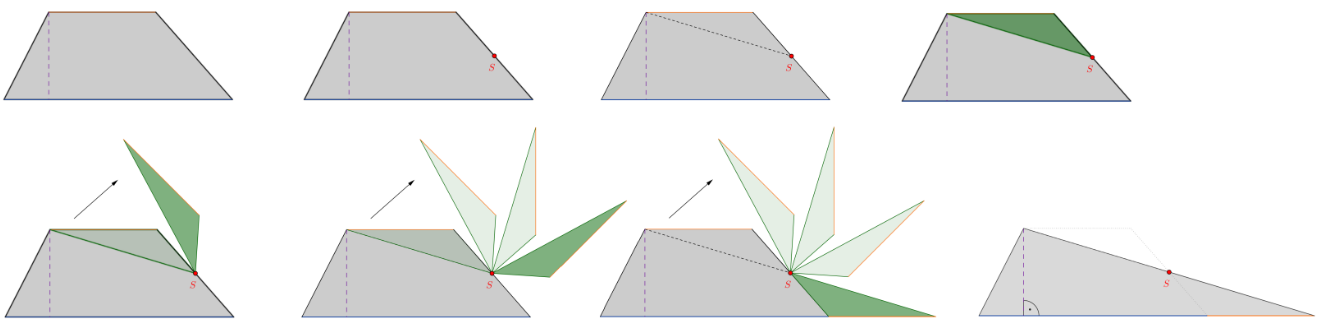
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Výpočet obsahu pro nás nebude nic nového, nebo snad ano? Co lze vyčíst z obrázků?

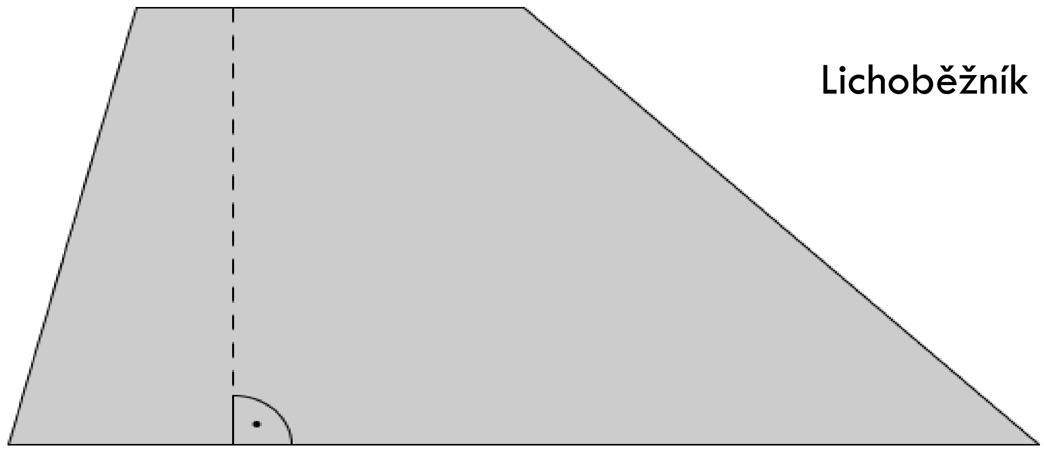


Vystřihni si zadaný lichoběžník a vyzkoušej si postup z první strany.

Narýsuj si do čtvercové sítě vlastní lichoběžník a ověř jestli na něj můžeš uplatnit stejný postup.

Pozor! Nezapomeň na jeho vlastnosti! 2 strany jsou rovnoběžné a žádné dvě nemusejí být stejně dlouhé.

Co jsme zjistili o lichoběžníku:



Lichoběžník

Strany mohou být . . . . dlouhé.

2 strany musí být . . . . a druhé dvě naopak . . . .

Úhlopříčky v lichoběžníku nesvírají . . . . úhel.

Výpočet obvodu:

Výpočet obsahu:

Můžeme si pomoci obsahem trojúhelníku

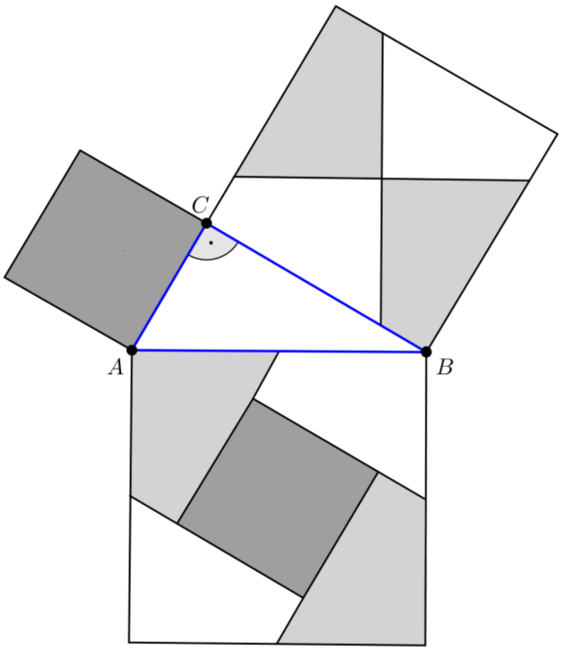
Co to je Pythagorova věta?

Co vidíš na obrázku?

•je tam modře zvýrazněný . . . . trojúhelník

s přeponou . . . . a odvěsnami . . . .

•úhel o velikosti . . . . s označením  je při vrcholu . . . .



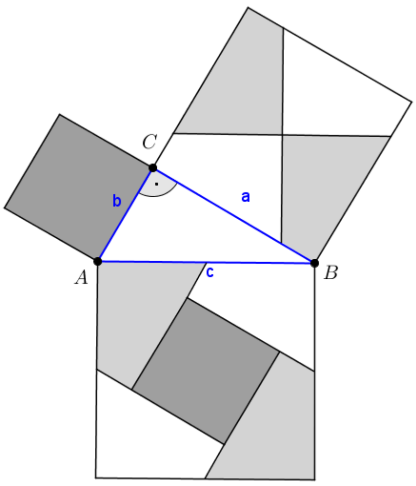
Vezmi si druhý pracovní list, vystřihni si jednotlivé tvary a zkus mezi jednotlivými čtyřúhelníky najít nějaké vztahy.

Co jsi po vystříhání zjistil(a)?

. . . .

. . . .

. . . .



Jaký obsah mají čtverce?

Čtverec se stranou *a*: . . . .

Čtverec se stranou *b*: . . . .

Čtverec se stranou *c*: . . . .

Jaký vztah jsme zjistili, že pro obsahy platí?

. . . .

Pythagoras ze Samu

•Žil v letech 570-500př. n. l.

•Matematik, filosof, politik, spisovatel, hudebník

•Založil svou školu

•Věřil v mystiku čísel

1- počátek všeho

4- spravedlnost

10- dokonalost

•Věřil, že ve středu vesmíru je oheň

•Zkus na mapě najít ostrov Samos, ze kterého pocházel

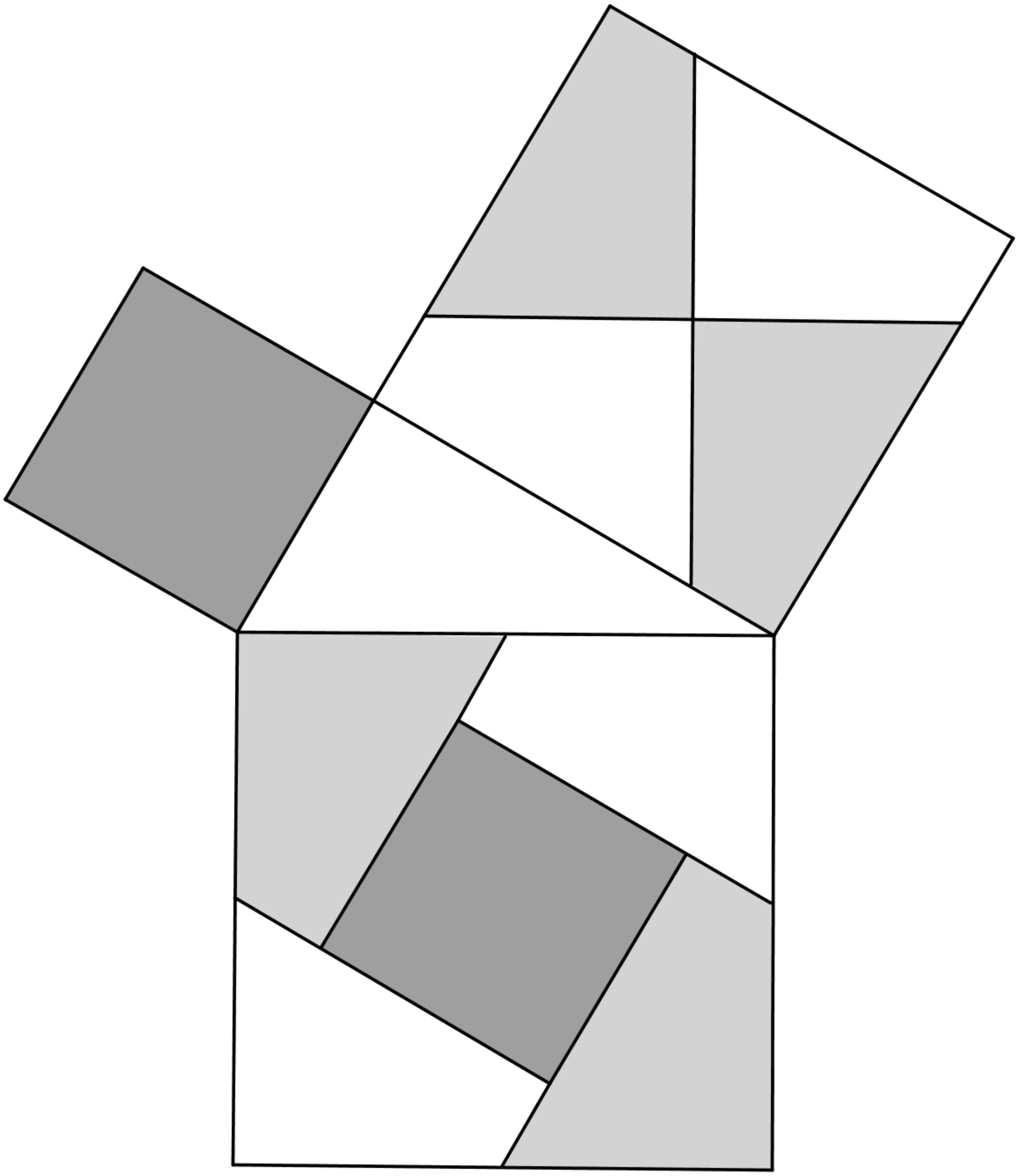
•*Pythagorova věta byla známá již v Egyptě 3000př.n.l.*

•*Pythagorova věta*

„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahu čtverců nad oběma jeho odvěsnami. “

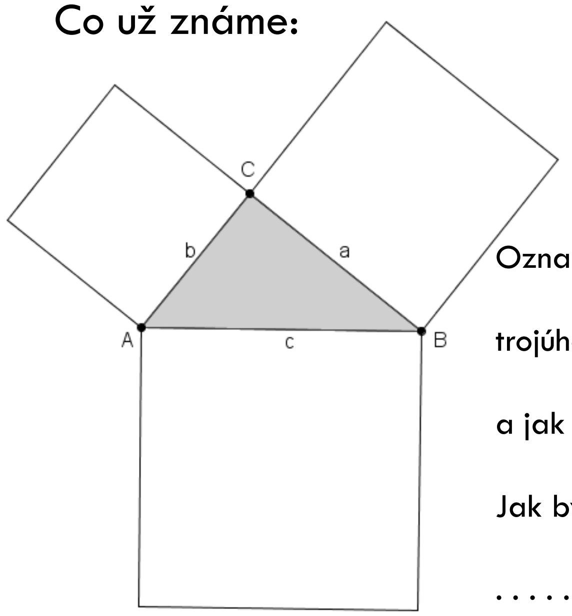
Co to je Pythagorova věta?

Vystřihni si jednotlivé tvary a zkus mezi jednotlivými čtyřúhelníky najít nějaké vztahy.



Důkaz Pythagorovy věty

Co už známe:



„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami. "

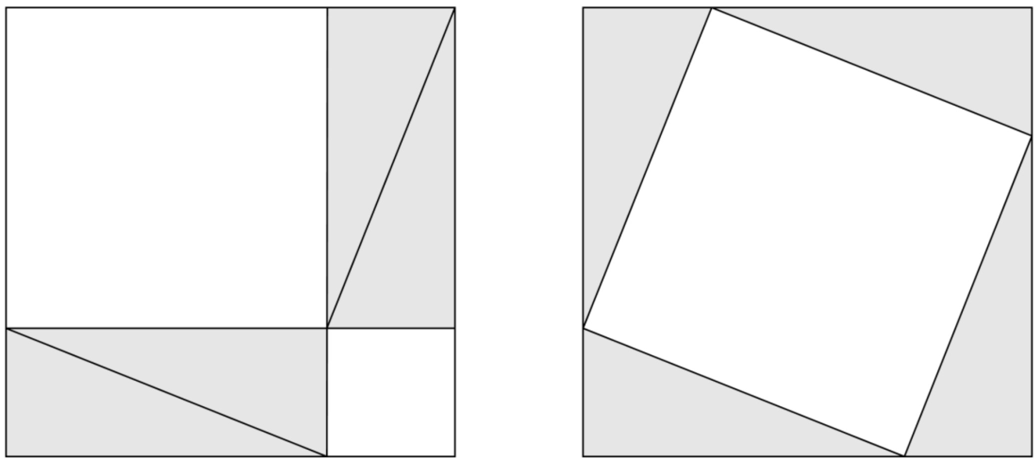
Označ jednou barvou přeponu a jinou barvou odvěsny v trojúhelníku. Jaká je velikost úhlu při vrcholu *C* . . . .

a jak se tento úhel nazývá . . . .

Jak bys znění Pythagorovy věty zapsal matematicky:

. . . .

Dokážeme být jako Pythagoras ze Samu a dokázat také znění Pythagorovy věty pomocí níže uvedeného obrázku?



V čem se pravý a levý obrázek shodují? . . . .

. . . .

A v čem se naopak liší? . . . .

. . . .

Kdy by sis označil(a) přepony šedého trojúhelníku jako stany *a*, *b* a odvěsnu jako *c*, jaké

by pak byly obsahy bílých čtverců? . . . .

. . . .

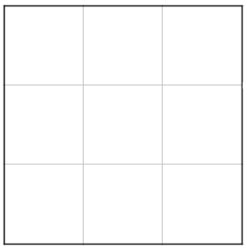
Co se nám povedlo zjistit?. . . . .

Vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu

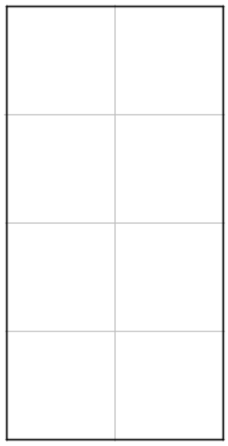
Co už známe:

Rozměr jednoho čtverečku je 1cm x 1 cm

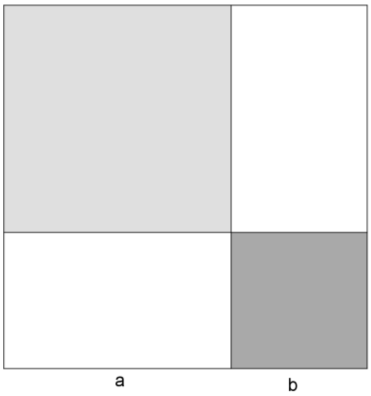
Obsah čtverce:



Obsah obdélníku:



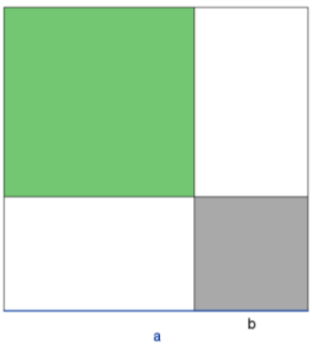
Jaké budou obsahy jednotlivých čtyřúhelníků na obrázku a jaký bude obsah celého čtverce?



Doplň tak, aby platila rovnost:

$(a+b)^2 =$

Jak bychom mohli vypočítat obsah zeleného čtverce?



Doplň tak, aby platila rovnost:

$(a-b)^2 =$

7 Závěr

Ve své práci jsem vybrala nejzajímavější vizualizace a některé z nich jsem využila pro tvorbu pracovních listů pro žáky základních škol. S obrázky se děti setkávají již od raného dětství, ale s příchodem do školy vizuálních podnětů stále ubývá, čímž dochází i k postupnému snižování fantazie a míry představivosti. Díky názornosti obrazového materiálu dochází k lepšímu zapamatování a následně i snadnějšímu využití znalosti v praktickém životě. Též dochází k logickému vystavění matematických znalostí, které jsou vzájemně provázány. Nestojí tak samostatně a student si dokáže vztahy opakovaně odvodit, díky čemuž není nucen si pamatovat velké množství učiva.

Právě opětovné zařazení obrazového materiálu do hodin je možná klíčem k lepšímu pochopení (nejen) matematických vztahů a zlepšení matematické gramotnosti u žáků. Samozřejmě se dané téma netýká pouze žáků základních škol, ale mnohé z uvedených vizualizací je možné využít na školách středních i vysokých.

Díky diplomové práci jsem si ještě více uvědomila důležitost využití vizualizací či praktických ukázek ve výuce matematiky. Ta by neměla být pouze o výpočtech, ale především o schopnosti logicky uvažovat a přemýšlet nad problémy. Věřím, že pracovní listy ve své pedagogické praxi využiji a postupně ještě vylepším.

8 Literatura

[1] Alsina, Claudi., Nelsen, Roger B.: Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics. Mathematical Association of America, Washington, 2006.

[2] Alsina, Claudi., Nelsen, Roger B.: When less is more: Visualizing basic inequalities. Mathematical Association of America, Washington, 2009.

[3] Folta, Jaroslav.: Dějiny matematiky I. Společnost pro dějiny věd a techniky, Praha, 2004.

[4] Hašek,Roman.: Geometrie II. Last modified 13.4.2018 [cit. 15.11.2018]. Dostupné z www: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2_2018.htm

[5] Kuřina, František. Půlpán, Zdeněk.: Podivuhodný svět elementární matematiky. Academia, Praha, 2006.

[6] Kuřina, František.: Umění vidět v matematice. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989.

[7] Leischner, Pavel.: Dějiny matematiky. [cit. 13.3.2019]. Dostupné z www: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf

[8] Leonadro da Vinci.: In Wikipedia: the free encyklopedia [online]. Last modified 24.10.2018 [cit. 8.11.2018]. Dostupné z www: https://cs.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci

[9] Mareš, Jiří.: Pedagogická psychologie. Portál, Praha, 2013.

[10] Molnár, Josef. Schubertová, Slavomíra. Vaněk, Vladimír.:Konstruktivismus ve vyučování matematice. Olomouc, 2007, 55s. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta.

[11] Nelsen,Roger B.: Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America, Washington, 1993.

[12] Nelsen,Roger B.: Proofs without words II: More exercises in visual thinking. Mathematical Association of America, Washington, 1993.

[13] Pech, Pavel.: Různé způsoby dokazování nerovností v geometrii. Matematika-fyzika- informatika 22 (2013), 253–261.

[14] Pythagoras.: In Wikipedia: the free encyklopedia[online]. Last modified 3.9.2018 [cit. 11.10.2018]. Dostupné z www: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

[15] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání[online]. Praha: MŠMT, 2017. 165 s. [cit. 25.3.2019]. Dostupné z www: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2017.pdf

[16] Štrausová, Irena.: Vizualizace důkazů pomocí software dynamické geometrie. České Budějovice, 2018, 135 s. Disertační práce. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Vedoucí práce prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

[17] Vincenzo Viviani.: In Wikipedia: the free encyklopedia[online]. Last modified 19.8.2017 [cit. 17.10.2018]. Dostupné z www:https://en.wikipedia.org/wiki/Vincenzo_Viviani